Библиотека
«Математическое просвещение»
Выпуск 15

В. М. Тихомиров

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

(ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ)

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2002

УДК 517.1/.3
ББК 22.161
Т46

Аннотация

Дифференциальное исчисление, возникшее более трёхсот лет назад в работах Ньютона и Лейбница, открыло новую эпоху в развитии науки. Оно послужило основой для создания современной математики и нашло многочисленные применения в естествознании и технике.

В этой брошюре вводятся основные понятия дифференциального исчисления: предел, производная, непрерывность функции, и рассказывается о применении этих понятий в механике, биологии, социологии и других областях. Читатель также узнает о том, как менялись представления учёных о дифференциальном исчислении в течение последних трёх столетий.

Текст брошюры представляет собой дополненную обработку записи лекции «Экстремумы функций одной переменной», прочитанной автором 24 февраля 2000 года на Малом мехмате МГУ для школьников 9—11 классов.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов младших курсов, учителей...

ISBN 5-94057-016-X

Тихомиров Владимир Михайлович.

Дифференциальное исчисление (теория и приложения).

(Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“»).
М.: МЦНМО, 2002. — 40 с.: ил.

Редактор *Е. Ю. Смирнов*.
Художник *М. Л. Кукушкин*. Техн. редактор *М. Ю. Панов*.

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано к печати 26/II 2002 года. Формат бумаги $60\times 88\ ^1/_{16}$. Офсетная бумага № 1. Офсетная печать. Физ. печ. л. 2,50. Усл. печ. л. 2,44. Уч.-изд. л. 2,47. Тираж 3000 экз. Заказ 573.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
121002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241 05 00.

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНИТИ.
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.

Для пояснения искусства анализа надо привести некоторые образцы задач... Все заключающиеся в них затруднения можно свести к двум следующим проблемам относительно пути...

1) Пусть дана длина проходимого пути; требуется найти скорость движения в данное время.

2) Пусть дана скорость движения; требуется найти длину пройденного пути.

И. Ньютон

Первой публикацией по дифференциальному исчислению явилась небольшая заметка Лейбница, появившаяся в 1684 году в первом научном журнале «Acta Eruditorum». Она называлась «Новый метод про максимумы и минимумы и определение касательных, не изменяющийся в случае дробных или иррациональных величин, и специальный способ исчисления к нему» и была посвящена изучению геометрических задач и задач на экстремум. Необходимо сказать при этом, что двумя десятилетиями ранее к основным понятиям дифференциального исчисления пришёл Ньютон. В 1671 году он представил в Королевское общество рукопись работы «Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением к геометрии кривых», которая сохранила своё значение и в наше время. С самого начала Ньютон строил дифференциальное исчисление как аппарат естествознания. Поразительные, пророческие слова о сущности дифференциального и интегрального исчисления, которые приведены в эпиграфе, взяты из одного из величайших научных трудов за всю историю человечества — его «Математических начал натуральной философии» (1687).

В XVIII веке в трудах Эйлера, Лагранжа и других учёных математический анализ достиг своих высочайших вершин, явившись реальной базой для постижения законов природы и развития техники. В XIX веке были предприняты значительные усилия, направленные на обоснование анализа. Наибольшая роль в этом принадлежит Коши (одной из его важнейших публикаций на эту тему стала книга «Уроки по дифференциальному исчислению», опубликованная в 1829 году). К концу XIX столетия в трудах Вейерштрасса оформился способ изложения начал анализа, сохранившийся до наших дней. Кроме самого Вейерштрасса, вклад в его разработку внесли Больцано, Дедекинд, Кантор, Коши и другие математики.

В первой части настоящей брошюры рассказывается о началах дифференциального исчисления. Всюду, где это возможно, предметы обсуждения рассмотрены с трёх точек зрения — физической, идущей от Ньютона, геометрической, восходящей к Лейбницу, и аналитической, заложенной в трудах Коши. Считается, что это соответствует трём стилям мышления, которые присущи людям: интуитивно-физическому, вообразительно-геометрическому и алгоритмически-логическому. Но в наше время появляется новый подход — компьютерный. Вкратце мы касаемся и его.

Во второй части брошюры рассказывается о приложениях дифференциального исчисления к естествознанию, технике, геометрии, алгебре и некоторым другим областям знаний.

На сс. 20—21 изображена «ось времени», на которой отмечены важнейшие этапы развития дифференциального исчисления. Постепенно, шаг за шагом будет рассказано о вкладе в развитие дифференциального исчисления всех представленных на оси времени учёных.

ЧИСЛА

Бог создал натуральные числа, а всё остальное — дело рук человеческих.

Л. Кронекер

В основе всей математики лежит понятие числа. А что такое число? На этот вопрос человечество отвечало несколько тысячелетий и (как ему показалось) разрешило его в конце XIX века. Но в XX веке опять возникли споры о сущности чисел, не утихающие и поныне.

В XIX веке было предложено очень простое толкование: *число* — это *бесконечная десятичная дробь* (при этом дроби, оканчивающиеся нулями с n-го знака после запятой и девятками с $(n+1)$-го знака, считаются одинаковыми)*).

Множество чисел можно представить геометрически как прямую с выбранным масштабом. Любой точке этой прямой можно однозначным образом сопоставить число, и наоборот (рис. 1).

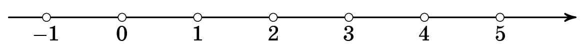


Рис. 1

Все мы знаем важнейшие подмножества чисел: *натуральные числа* $\mathbb{N}$ (положительные с нулями после запятой); *целые* $\mathbb{Z}$ (любые с нулями после запятой), *дробные* или *рациональные* $\mathbb{Q}$ (периодические десятичные дроби)**) и, наконец, «все» (*действительные*, или *вещественные*) числа — $\mathbb{R}$.

1. Число 0,0101010101... является рациональным (поскольку его десятичная запись периодическая). Как оно записывается в виде отношения двух натуральных?

*) Разумеется, в качестве основания системы счисления не обязательно выбирать число 10, подойдёт любое натуральное число. Например, для нужд вычислительной техники бывает удобно представлять числа по основанию 2. Но в этой брошюре для определённости мы будем использовать лишь десятичные записи.

**) При этом конечные десятичные дроби считаются периодическими с периодом, состоящим из одних нулей.

Двумя чертами слева выделены задачи для самостоятельного решения. Задачи повышенной сложности отмечены знаком *.

2. Ахиллес стартует в ста метрах позади черепахи и бежит со скоростью 10 м/с. Черепаха начинает движение одновременно с Ахиллесом и за секунду преодолевает 0,01 м. Какому из множеств — $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ или ни одному из них — принадлежит число, равное расстоянию (в метрах) от старта черепахи в момент, когда Ахиллес её настигнет?

3. Приведите пример числа, не являющегося рациональным*).

Натуральные числа возникли в незапамятные времена. В египетских папирусах, написанных примерно 4 тыс. лет тому назад, производятся действия с дробями; древние греки обнаружили *иррациональные* числа (не являющиеся дробными); примерно полторы тысячи лет тому назад в Индии придумали нуль и десятичную запись натуральных чисел; отрицательные числа появились совсем недавно, в XVII веке. Построение всей числовой системы (т. е. $\mathbb{R}$) было осуществлено Дедекиндом, Вейерштрассом, Больцано, Кантором и некоторыми другими математиками XIX века. В XIX веке были построены также и комплексные числа $\mathbb{C}$.

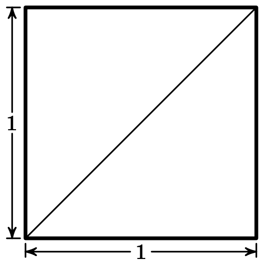
В числовых системах $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ определяются операции сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на нуль), в $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ имеется порядок (для двух чисел всегда можно сказать, равны ли они или одно превосходит другое). Числовая система $\mathbb{R}$ (в отличие от $\mathbb{Q}$) *порядково полна*: если имеется возрастающая последовательность чисел, которые ограничены каким-то одним числом, то эта последовательность «стремится» к некоторому определённому числу. Она также *метрически полна* (как и $\mathbb{C}$, но не $\mathbb{Q}$): пределы таких последовательностей не выходят за множество чисел.

Всё это было установлено во второй половине XIX века, и на какое-то время все успокоились.

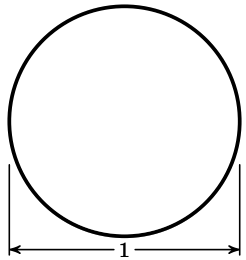
Подавляющее большинство математиков и ныне вполне удовлетворяются таким построением чисел. Но некоторые математики XX столетия стали вдруг говорить, что им кое-что неясно. Ведь если кто-то утверждает, что ему точно известно некоторое число, то он должен либо указать, какая цифра стоит на, скажем, шестом, пятнадцатом или любом ином месте после запятой, или доказать, что за конечное время этот десятичный знак можно вычислить. А что же иначе может означать, что данное число действительно и з в е с т н о?

Возьмём для примера четыре замечательных числа: $\sqrt{2}$, π, e и золотое сечение. Ни одно из них не является числом в нашем определении, ибо не предъявлена ни одна представляющая их десятичная дробь, а известные символы этих чисел — $\sqrt{2}$, π, e и $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ — это, так сказать, «псевдонимы». Более того, никто не скажет вам без

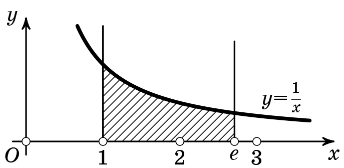
*) Конечно, можно привести числа, вроде $\sqrt{5}$, но требуется ещё доказать, что оно не является рациональным, т. е. что его десятичная запись не периодическая.



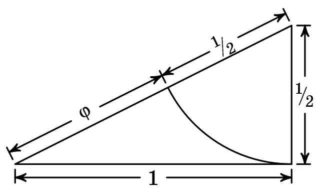
а) $\sqrt{2}$ — диагональ квадрата со стороной 1.



б) π — длина окружности диаметра 1.



в) Число *e* таково, что площадь заштрихованной фигуры равна 1.



г) $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ — золотое сечение.

Рис. 2

вычислений, чему равен, скажем, сотый десятичный знак любого из этих чисел.

4. Чему равно число

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\ ?$$

единице? корню из двух? π? *e*? или чему-то другому?

В этой брошюре приведены алгоритмы для вычисления любого из этих чисел с помощью лишь четырёх арифметических действий без помощи калькулятора или компьютера. Но сначала нам надо выяснить, что эти числа означают.

Опишем эти числа геометрически (рис. 2, *а*—*г*). Корень из двух — это отношение длины диагонали квадрата к длине его стороны, π — отношение длины окружности к диаметру, *e* — это такое число на вещественной оси, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком $y = 1/x$, осью Ox и прямыми $x = 1$ и $x = e$, равна 1 (см. рис. 2, *в*). Геометрическое построение золотого сечения показано на рис. 2, *г*.

Для того, чтобы привести другие псевдонимы числа π, можно вспомнить разные формулы для площадей и объёмов. На самом деле существует бесконечно много таких псевдонимов. В связи с этим можно упомянуть такой эпизод. Однажды Лейбниц, приехав в Англию, стал заносчиво говорить о том, что он научился считать ряды. И действительно, он придумал, как сосчитать ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$$

и некоторые подобные. Англичане дали ему сосчитать ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots,$$

и Лейбниц не справился. Этот ряд со-

считал Эйлер. Сумма оказалась равной $\frac{\pi^2}{6}$. Вообще, все ряды вида

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{1}{1^{2k}} + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \ldots$$

при всевозможных натуральных k сходятся (т. е. их сумма равна некоторому конечному числу), и в ответе участвует число π в некоторых степенях.

Опишем алгоритмы вычисления названных четырёх чисел.

Для вычисления числа $\sqrt{2}$ можно воспользоваться его представлением в виде цепной дроби*)

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}$$

и затем вычислять последовательность подходящих дробей. А можно действовать по-другому, вычисляя последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right) \quad \text{при } n \geqslant 1, \qquad x_0 \text{ — любое число.}$$

Предел этой последовательности равен $\sqrt{2}$.

5. Вычислите четыре подходящие дроби числа $\sqrt{2}$. Сколько десятичных знаков при этом окажутся верными?

---

*) В качестве эпиграфа к этому разделу выбрано известное изречение немецкого математика XIX века Леопольда Кронекера. Одно из таких «дел рук человеческих», о которых он говорит, — прямое описание действительных чисел через натуральные с помощью цепных дробей. Представить число $\alpha \in \mathbb{R}$ в виде цепной дроби — значит записать его в виде

$$\alpha = n + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \ddots}},$$

где n — целое, а остальные числа n_1, n_2, ... — натуральные. Для того, чтобы придать смысл написанному символу, нужно уметь складывать дроби и понимать, что такое предел. Предполагается, что складывать дроби читатель умеет, а о пределах мы ещё поговорим. Пока же нам хватит такого понимания: надо последовательно вычислять *подходящие* дроби

$$n, \quad n + \frac{1}{n_1}, \quad n + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2}} \quad \text{и т. д.,}$$

и модуль разницы между членами этой последовательности и α начиная с некоторого момента будет меньше любого наперёд заданного положительного числа ε.

π — длина окружности диаметра 1 — число, примерно равное

$$3{,}1415926536,$$

впервые появилось в работах Уильяма Джонса в 1706 году (общепринятым обозначение π стало после работ Эйлера 1736 года), хотя известно оно было очень-очень давно. В одном из первых по времени письменных источников (так называемом «московском папирусе») имеется формула, из которой вытекает приближение для π, равное $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1605\ldots$; в Талмуде $\pi = 3$; в индийских священных книгах встречается приближение числа π числом $\sqrt{10} \approx 3{,}16228$; а в древних китайских рукописях имеется приближение $\pi \approx \frac{355}{113}$. Первые строгие оценки числа π были даны Архимедом: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$; он же предложил, пожалуй, самый первый метод вычисления числа π путём описывания вокруг окружности и вписывания в неё правильных многоугольников. Оценка, данная Архимедом, получается при рассмотрении правильного 96-угольника.

Для запоминания первых цифр десятичной записи π было придумано множество мнемонических правил. Вот одно из них, его автор — один учитель дореволюционной гимназии:

$$\underbrace{\text{кто}}_{3,}\ \underbrace{\text{и}}_{1}\ \underbrace{\text{шутя}}_{4}\ \underbrace{\text{и}}_{1}\ \underbrace{\text{скоро}}_{5}\ \underbrace{\text{пожелаетъ}}_{9}\ \underbrace{\text{пи}}_{2}\ \underbrace{\text{узнать,}}_{6}\ \underbrace{\text{число}}_{5}\ \underbrace{\text{ужъ}}_{3}\ \underbrace{\text{знаетъ}}_{6}$$

(надо считать число букв в каждом слове, причём по старой орфографии).

На протяжении многих лет, вплоть до сегодняшнего дня, происходит «гонка» в вычислении десятичных знаков числа π. Используя разные методы и формулы (некоторые из них приведены ниже), математики, а в последнее время и программисты, из разных стран мира занимаются вычислением всё новых и новых знаков числа π. Одно из последних достижений в этой «гонке» — значение π с 206 158 430 000 знаками (1999 год).

Число π не является рациональным (это доказал Иоганн Ламберт в 1766 году), но, например, число $\sqrt{2}$ тоже не рационально, однако для него есть гораздо более простые способы вычисления, чем для π. Дело в том, что число π является *трансцендентным*, т. е. не является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Этот факт доказал Фердинанд Линдеманн в 1882 году, разрешив одновременно великую проблему древности — проблему квадратуры круга (невозможность построения циркулем и линейкой квадрата, равновеликого данному кругу). Рассказывают, что в тот день, когда Линдеманн окончательно убедился в правильности своего доказательства, он встретился с друзьями. Его вид был столь радостным, что один из друзей спросил его: «Что ты сияешь, как будто ты решил проблему квадратуры круга?». «А я вот сегодня как раз её-то и решил», — последовал ответ.

Для вычисления числа π можно использовать ряд — бесконечную сумму

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right).$$

Этот ряд носит имя Лейбница, хотя был известен уже Ньютону. Аналогично тому, как в сноске на с. 7 для вычисления бесконечной цепной дроби предлагалось вычислять подходящие дроби, для вычисления значения ряда Лейбница следует вычислять *частичные суммы*

$$4, \quad 4\left(1 - \frac{1}{3}\right), \quad 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right), \quad 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right), \quad \ldots$$

Последовательность этих сумм и стремится к числу π.

6. Как вы думаете, сколько времени придётся вычислять, не пользуясь, как во времена Лейбница, ни калькулятором, ни компьютером, чтобы найти с помощью этого ряда число π с точностью до одной тысячной?

Вместо ряда Лейбница можно использовать и другие ряды*), например,

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2673} + \ldots\right), \qquad (1)$$

$$\pi = 4\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{160} - \frac{1}{896} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} - \frac{1}{15309} + \ldots\right)\right),$$

$$\pi = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{375} + \frac{1}{15625} - \frac{1}{546875} + \ldots\right) - \\ - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{40955757} + \frac{1}{3899056325995} - \frac{1}{311805194956024553} + \ldots\right).$$

Все они получаются из представления функции $\operatorname{arctg} x$ в виде бесконечного ряда

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Почему это так, мы ещё обсудим позже.

Число e мы определили геометрически: это такое число, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, графиком функции $y = 1/x$ и двумя вертикальными прямыми $x = 1$ и $x = e$, равна единице. Оно оказывается равным $2{,}718281828459045\ldots$

*) Для получения одинаковой точности в вычислении π при помощи ряда Лейбница и, скажем, ряда (1), у последнего следует брать меньшее число частичных сумм.

(Для запоминания его первых цифр существует следующее мнемоническое правило: e — это 2,7 и два раза год рождения Льва Толстого.)

Обозначение этому числу дал Эйлер. Иногда e называют *неперовым числом* в честь шотландского учёного Джона Непера, изобретателя логарифмов.

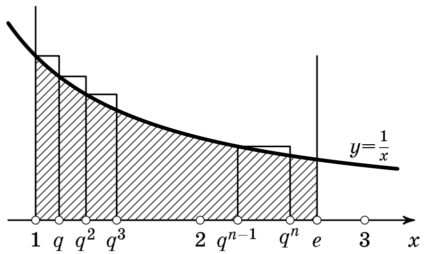


Рис. 3

У числа e имеется много важных свойств. Вот одно из них (иногда оно принимается за определение): оказывается, что к e стремится последовательность

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Докажем это. Отметим на оси Ox точки $1, q, q^2, q^3, \ldots, q^{n-1}, q^n$, где $q=1+1/n$. Рассмотрим прямоугольники $(q-1)\times 1$, $(q^2-q)\times 1/q$, $(q^3-q^2)\times 1/q^2$ …, $(q^n-q^{n-1})\times$ $\times 1/q^{n-1}$, расположенные так, как показано на рис. 3. Площадь каждого из этих n прямоугольников равна $q-1=1/n$, поэтому сумма их площадей при любом n равна 1. При увеличении n объединение прямоугольников походит на фигуру под графиком $y=1/x$, при помощи которой было определено число e. Таким образом, последовательность $a_n=q^n$ стремится к e.

Так же как и π, число e является трансцендентным. Впервые это было доказано Шарлем Эрмитом в 1873 году.

Золотое сечение — иррациональное число, равное

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618033983\ldots$$

Это число равно такой (большей) доле отрезка, при которой весь отрезок относится к этой своей большей части, как бо́льшая часть относится к меньшей. При переводе на язык алгебры получаем, что золотое сечение удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x},$$

откуда

$$x^2+x-1=0.$$

Отрезок, равный по длине золотому сечению, можно построить с помощью циркуля и линейки: надо построить прямоугольный треугольник с катетами 1 и 1/2 и отнять от гипотенузы отрезок, равный 1/2 (см. рис. 2, *г*).

Золотое сечение участвует во многих интересных математических соотношениях. Например, отношение стороны правильного

пятиугольника к диагонали равно золотому сечению (рис. 4, *а*); золотое сечение равно отношению половины разности диаметра полуокружности и длины стороны вписанного в полуокружность квадрата (две вершины которого расположены на диаметре, а две на полуокружности) к длине стороны этого квадрата (рис. 4, *б*).

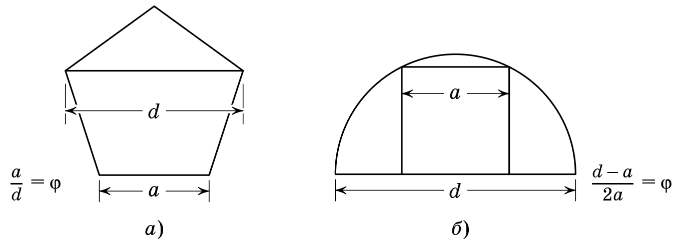


Рис. 4

Первое произведение, посвящённое золотому сечению, принадлежит Луке Пачиоли, оно называется «О божественной пропорции». По мнению некоторых историков, название «золотое сечение» принадлежит Леонардо да Винчи. Считается, что золотое сечение имеет большое эстетическое значение: некоторые исследователи древней архитектуры полагают, например, что пропорции многих известных архитектурных сооружений Древней Греции близки к золотому сечению. Довольно спорны суждения о том, что строение человеческого тела и вообще многие соотношения в живой природе связаны с золотым сечением, но такие высказывания делаются уже на протяжении пяти веков.

Разложение золотого сечения в цепную дробь имеет вид

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}$$

Видите, как оно совершенно устроено!

7. Вычислите четыре подходящих дроби золотого сечения. Не напоминают ли числители и знаменатели этих дробей какой-нибудь известной последовательности?

Мы видим, что по-настоящему понять, что такое число, возможно лишь освоившись с понятием предела. Но сначала нам представляется необходимым рассказать о понятии функции.

ФУНКЦИЯ

> Когда некоторое количество зависит от других таким образом, что при изменениях последних и сами подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых.
>
> *Л. Эйлер*

Понятие функции стало формироваться лишь в XVII веке. Согласно представлениям XIX века, *функция* — это правило, которое одному числу (из некоторой совокупности чисел, называемой *областью определения*) однозначно сопоставляет другое число. Функции с областью определения $\mathbb{N}$ называют *последовательностями*. Числовые функции нередко обозначаются символом f ($f(x)$ — это значение функции f на числе x). Последовательности часто обозначают $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

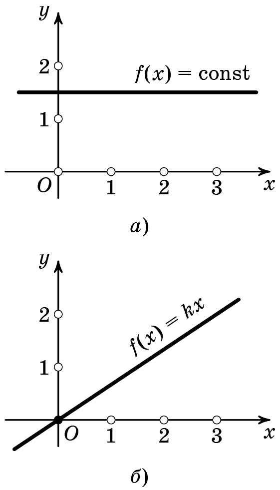


Рис. 5

П р и м е р ы. 1. Простейшая функция на $\mathbb{R}$ — это *константа*, сопоставляющая любому числу из $\mathbb{R}$ одно и то же число:

$$f(x) = \text{const} \qquad (\text{рис. } 5,\ a).$$

2. Важнейшая функция на $\mathbb{R}$ — *линейная*:

$$f(x) = kx \qquad (\text{рис. } 5,\ б).$$

Её ограничение на $\mathbb{N}$ называется *прямой пропорциональностью*. Так называется последовательность $x_n = kn$. А ещё вы, конечно, знаете уравнение невертикальной прямой: $f(x) = kx + b$.

В зарубежных курсах анализа, когда речь заходит об определении функции, обычно ссылаются на Петера Дирихле, приводя его слова: «Если... каждому отдельному x отнесено одно определённое y, то переменная y называется функцией x». Такое толкование понятия функции сложилось не сразу. Некие весьма общие, но туманные воззрения на этот счёт высказывал Лейбниц. Но само слово «функция» впервые появляется у него. Жан Даламбер под функцией понимал «аналитическое выражение», Эйлер — «то, что можно вычертить карандашом на листе бумаги». (Но, с другой стороны, он писал: «Когда некоторое количество зависит от других таким образом, что при изменении последних и сами подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых».) Даниил Бернулли считал, что произвольная периодическая функция может быть задана тригонометрическим рядом по синусам и косинусам. Разгорелся спор, какое из определений (Даламбера, Эйлера или Д. Бернулли) самое общее. И поныне

в этом вопросе имеются неясности. В XIX веке стали склоняться к толкованию функции в духе слов Дирихле. Но, пожалуй, ещё лучше (и раньше Дирихле) идею функциональной зависимости выразил Н. И. Лобачевский. Он писал: «Обширный взгляд теории допускает существование зависимости в том смысле, что числа одни с другими принимались как бы данными вместе». Это близко к современному, принятому в большинстве математических книг, общему определению функциональной зависимости (охватывающему понятие числовой функции). Оно таково.

Пусть даны два множества X и Y, и пусть во множестве пар (x, y), где x принадлежит X, а y принадлежит Y, выделено подмножество Γ такое, что если пара (x, y) принадлежит Γ, то ни при каком ином $y' \neq y$ из Y пара (x, y') не принадлежит Γ. Тогда говорят, что задана *функция* f из X в Y (обозначение: $y = f(x)$). Множество Γ называется *графиком* f. Совокупность тех x, на которых определено значение $f(x)$, называется *областью определения функции* f; совокупность тех y, для которых существует такой элемент x, что $y = f(x)$, называется *областью значений* f.

Такого рода определения стали возможными на базе теории множеств, начала которой были заложены Георгом Кантором в конце XIX столетия. Числовые функции — это функции, у которых Y — это множество чисел; функции одной переменной — это числовые функции, у которых X — это также числа. Функции на $\mathbb{R}$ изображают в виде графиков. Рисуют две оси — горизонтальную для x и вертикальную для $y = f(x)$, и над x откладывают $f(x)$. Рисовать графики функций одной переменной начали со времён Декарта и Ферма.

Вспомним четыре важных примера функциональных зависимостей (рис. 6).

1) С т е п е н н а я ф у н к ц и я $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$, $x \geqslant 0$*).

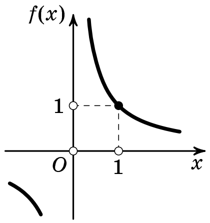
2) Т р и г о н о м е т р и ч е с к и е ф у н к ц и и: синус, косинус, тангенс, котангенс и обратные к ним.

3) П о к а з а т е л ь н а я ф у н к ц и я $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

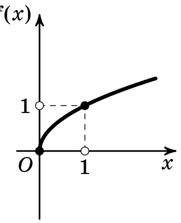
4) Л о г а р и ф м и ч е с к а я ф у н к ц и я $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Многочлены, порождаемые степенными функциями с натуральным показателем — это одно из важнейших средств приближения функций, так как они требуют для своего вычисления лишь операций сложения, вычитания и умножения. Функции, представимые в виде отношения двух многочленов (рациональные функции), также играют исключительную роль в анализе. Обратная пропорциональность

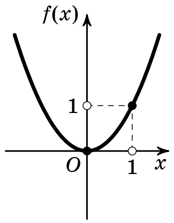
*) Разумеется, при натуральных a можно определять степенную функцию для всех x, а при целых положительных a — для $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Но в определении общей степенной функции приходится рассматривать $x \geqslant 0$ (подумайте, почему).



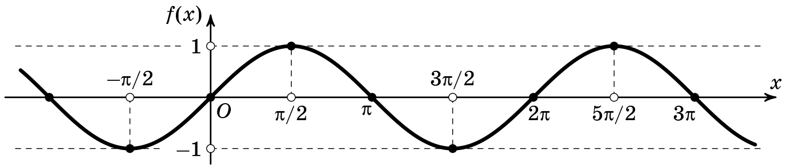
$f(x) = 1/x = x^{-1}$



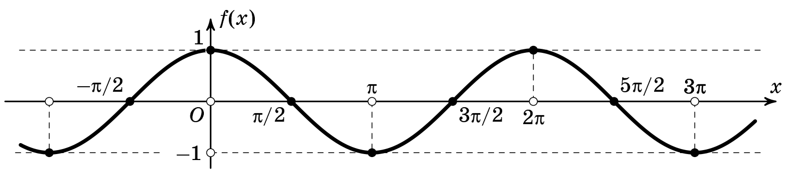
$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$



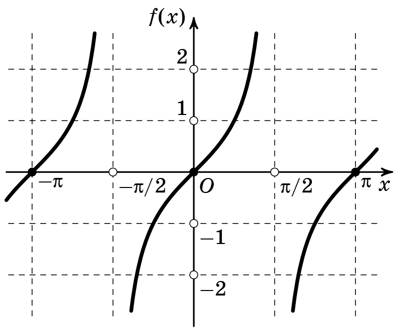
$f(x) = x^2$



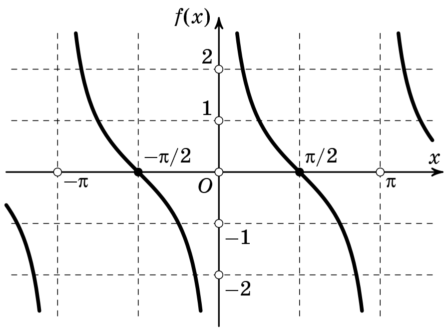
$f(x) = \sin x$



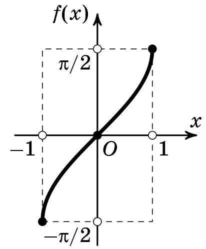
$f(x) = \cos x$



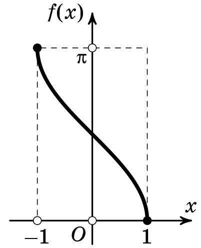
$f(x) = \operatorname{tg} x$



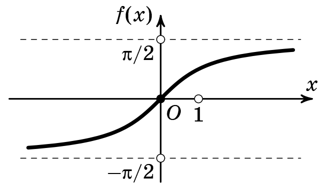
$f(x) = \operatorname{ctg} x$



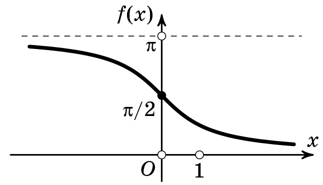
$f(x) = \arcsin x$



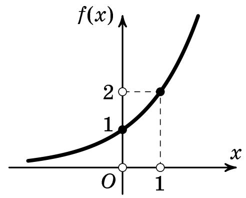
$f(x) = \arccos x$



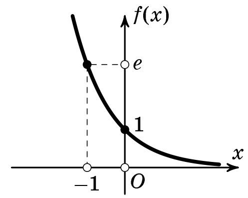
$f(x) = \operatorname{arctg} x$



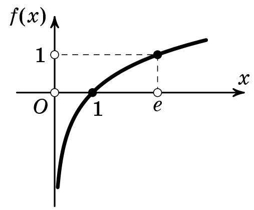
$f(x) = \operatorname{arcctg} x$



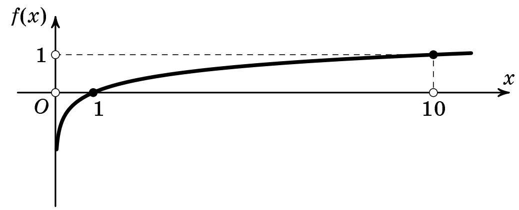
$f(x) = 2^x$



$f(x) = e^{-x} = (1/e)^x$



$f(x) = \ln x = \log_e x$



$f(x) = \log_{10} x$

Рис. 6

(функция $f(x) = 1/x$) часто встречается и в жизни, и в физике (вспомните, например, правило рычага), функция $f(x) = 1/x^2$ выражает один из наиболее важных законов природы — закон всемирного тяготения: сила взаимодействия притягивающих друг друга тел обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Тригонометрические функции описывают колебательные процессы, которые очень распространены в природе, например, биение сердца. Показательные функции описывают стремительно развивающиеся процессы, вроде цепной реакции. Логарифмы были придуманы для облегчения вычислений, в компьютерную эру их роль значительно уменьшилась.

Читатель может потренироваться в обращении с элементарными функциями, ответив на следующие вопросы:

8. Чему равно значение показательной функции 2^x при $x = \sqrt{2}$ с точностью до сотых?

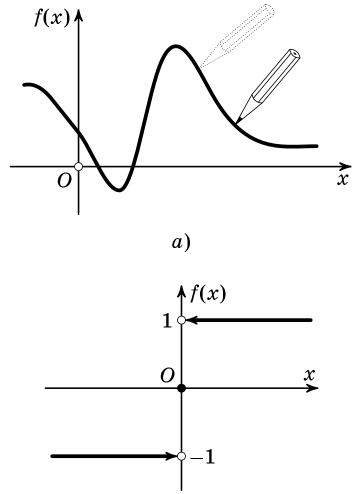
9. Чему равны значения $\sin x$ и $\log_{10} x$ с точностью до сотых при x, равном числу ваших лет*)?

Функции бывают непрерывные и разрывные. График непрерывной функции можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги (рис. 7, *а*). Примером разрывной функции является функция $\operatorname{sign} x$ — знак x (рис. 7, *б*). Она равна 1 при $x > 0$, -1 при $x < 0$ и 0 при $x = 0$.

Вот определение непрерывности. Пусть функция f определена на интервале $a < x < b$ и точка x_0 принадлежит этому интервалу. Функция f *непрерывна* в точке x_0, если для сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что для любого числа x, для которого $|x - x_0| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (рис. 8). А если функция непрерывна во всех точках какого-то числового множества, говорят, что она *непрерывна на этом множестве*.

*) Вопрос о логарифме возраста был задан Я. Б. Зельдовичем, одним из создателей первой атомной бомбы, в зимнюю сессию 1947 года первокурснику Инженерно-физического института (называвшегося тогда из соображений секретности Механическим институтом). Первокурсником был молодой человек, проведший четыре года в госпиталях после полученного на войне ранения. Аттестат об окончании школы ему выдали 21 июня 1941 года, но приступить к обучению в институте он смог лишь в 1947 году. «Сколько Вам лет?», — спросил Зельдович. «Двадцать четыре», — был ответ. «Чему равны два знака после запятой логарифма Вашего возраста?». Зельдович ожидал, что студент углубится в долгие вычисления, но едва он успел произнести свой вопрос, как был получен ответ: «1,38021». «Как Вы сосчитали так быстро?» — изумился экзаменатор. Студент ответил: «А я на всякий случай перед экзаменом выучил значения логарифмов всех натуральных чисел…». Это была шутка, а суть дела такова: $24 = 2^3 \cdot 3$ и следовательно, $\log_{10} 24 = 3\log_{10} 2 + \log_{10} 3$ и для вычисления $\log_{10} 24$ достаточно знать $\log_{10} 2$ и $\log_{10} 3$. Студенту, о котором идёт речь, приходилось много вычислять, и он помнил эти два числа (тем более, что логарифм двойки очень симметрично выглядит, он равен 0,30103, а логарифм тройки равен 0,477121). И оставалось лишь сложить 0,90309 и 0,477121.

Примерами непрерывных функций «из жизни» могут служить высота подъёма лифта в зависимости от времени, температура в музейном зале (записываемая на ленте самописцем) в зависимости от времени и т. п.



а)

б) $f(x) = \operatorname{sign} x$

Рис. 7

Лемма (о сохранении знака непрерывной функции). Непрерывная на интервале функция, положительная в какой-то точке этого интервала, сохраняет знак в некоторой окрестности этой точки.

Посмотрите на рис. 7, *а*, вспомните определение непрерывной функции, и всё станет ясно.

Эта лемма вполне согласуется со здравым смыслом: если вы стоите на холме у берега моря, вы не сможете мгновенно спуститься к морю, на это потребуется некоторое время. Это вызвано тем, что ваша высота над уровнем моря как функция времени непрерывна.

Непрерывные функции описывают *эволюционные* процессы, т. е. такие, в которых не происходит скачков. Но многие процессы в природе на самом деле скачкообразны. (В философии издавна говорилось о «революционных», скачкообразных изменениях, но математическая теория таких явлений появилась лишь во второй половине XX века и была названа *теорией катастроф*.)

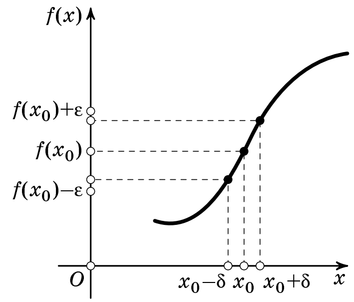


Рис. 8

Следующей нашей задачей будет определение производной — важнейшего понятия математического анализа. Вообще говоря, определение производной можно дать, основываясь лишь на понятии непрерывной функции (это будет проделано на с. 24). Однако такое определение зачастую оказывается неудобным для вычисления производной, и приходится пользоваться другим определением, которое равносильно первому, но требует использования понятия предела функции. Поэтому сейчас мы перейдём к рассмотрению пределов и только потом определим производную.

ПРЕДЕЛЫ

> Количества [...], которые в продолжение любого конечного времени постоянно стремятся к равенству и ранее конца этого времени приближаются друг к другу ближе, нежели на любую заданную величину, будут в пределе равны.
>
> *И. Ньютон*

Теория пределов была создана (преимущественно Коши) почти два века спустя после рождения математического анализа. Об этом хорошо сказал Рихард Курант: «Безупречной и ясной формулировкой основных понятий Коши довёл до конца начатое уже в XVIII столетии дело изложения высшего анализа... и достиг в этом законченности, ставшей во многих отношениях образцовой».

Что же такое предел? Давайте ответим на этот вопрос не сразу, а сначала порассуждаем. Начнём с предела последовательности (функции, определённой на $\mathbb{N}$), а потом поговорим о пределе функции, определённой на $\mathbb{R}$.

Каждой последовательности x_n можно сопоставить график ступенчатой функции, равной x_n на полуинтервале $[n,\ n+1)$ (рис. 9). У нас получилось нечто вроде бесконечной лестницы. Предположим, что вы идёте по этой лестнице. Если её высота всё ближе и ближе к какому-то числу $\widehat{x}$, говорят, что $\widehat{x}$ — это предел последовательности x_n, и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \widehat{x}\ ^{*)}.$$

Например, предел последовательности $x_n = kn$, $k>0$ равен бесконечности: поднявшись до какого-то уровня, вы потом никогда не спуститесь ниже, и при этом «возьмёте» любую высоту (см. рис. 9, *а*).

10. Предположим, что вы идёте по лестнице, высота ступени которой равна 0,2 м. Начиная с какой ступени вы подниметесь выше университетского шпиля? Эльбруса? Эвереста?

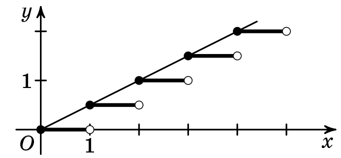
Предел последовательности $x_n = 1/n$ равен нулю: высота ступенек всё меньше и меньше отличается от нуля (см. рис. 9, *б*). А, скажем, последовательность $x_n = \sin\frac{\pi n}{2}$, т. е. $\{1, 0, -1, 0, 1, 0, \ldots\}$, предела не имеет: ступеньки идут то вверх, то вниз (рис. 10).

Дадим теперь точное определение предела последовательности. Число $\widehat{x}$ есть *предел* последовательности $\{x_n\}$ при $n\to\infty$, если для сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$ найдётся такое натуральное число N, что для любого натурального $n>N$ выполнено неравенство $|x_n-\widehat{x}|<\varepsilon$.

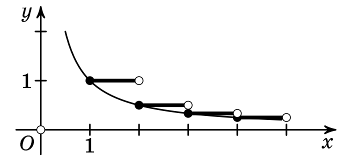
*) Символ lim происходит от латинского слова l i m e s — межа, граница, предел.

11. Дайте определение того, что предел последовательности равен бесконечности.

12. Докажите, что предел суммы двух последовательностей равен сумме пределов, а предел произведения двух последовательностей равен произведению пределов.



а) $k=1/2$



б)

Рис. 9

Теперь дадим определение предела функции. Говорят, что предел функции $f(x)$ в точке x_0 равен y_0, если для сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta>0$, что для любого $x\ne x_0$, для которого $|x-x_0|<\delta$, верно, что $|f(x)-y_0|<\varepsilon$. (Обозначение: $y_0=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.) Это означает, что при x, близких к x_0 функция принимает значения, близкие к y_0. Заметим, что на значение предела функции в точке x_0 никак не влияет значение самой функции в этой точке.

13. Докажите, что

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x),$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x).$$

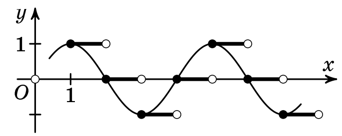


Рис. 10

14. Докажите, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

У к а з а н и е. Вспомните определение непрерывной функции, приведённое на с. 16.

Фундаментальную роль в анализе играют следующие два предела:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

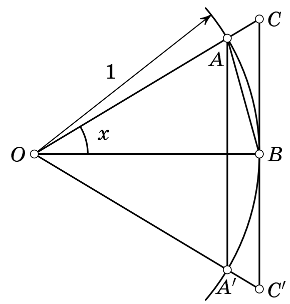


Рис. 11

Первый из них нам уже встречался на с. 11 (см. рис. 3). На рис. 11 приведено геометрическое доказательство другого равенства (оно носит название «первый замечательный предел»). Действительно, длина дуги $\overset{\frown}{AA'}$ равна $2x$. Она заключена между длинами отрезков $AA'=2\sin x$ и $CC'=2\operatorname{tg} x$. Разделив двойное неравенство $2\sin x<2x<2\operatorname{tg} x$ на $2\sin x$, получим, что

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}.$$

А поскольку $\cos x\to 1$ при $x\to 0$, отсюда и следует требуемое.

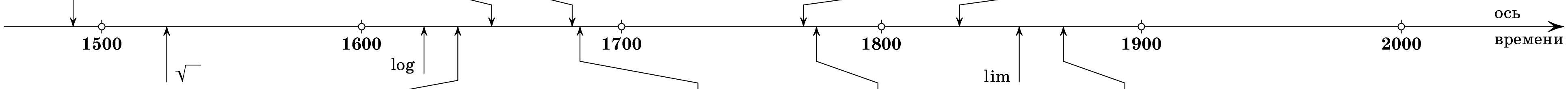
Прошли многие века, прежде чем выработались удобные знаки для математических действий. Современные знаки сложения и вычитания (+ и –) появились лишь в конце XV века.

Пьер Ферма (1601—1665) — один из основоположников математического анализа, аналитической геометрии, теории чисел.

Исаак Ньютон (1643—1727) — один из крупнейших учёных всех времён, родоначальник математического анализа.

Леонард Эйлер (1707—1783) — гениальный математик, физик, механик, астроном. Ему принадлежат обозначения чисел e и π, функций sin, cos, tg.

Огюстен Луи Коши (1789—1857) — великий математик XIX века, заложивший начала современного обоснования анализа.



Рене Декарт (1596—1650) — великий учёный и философ, один из создателей аналитической геометрии. Первым стал использовать систему координат. Ввёл обозначение степени a^n, знаки x, y, z для обозначения переменных.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) — великий учёный, изобретатель, юрист, историк, языковед; один из основоположников математического анализа. Ввёл обозначения $\cdot$ и $:$ для умножения и деления, d и $\frac{d}{dx}$ для дифференциала и производной.

Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) — великий математик, глубоко развивший обоснование анализа. Ему принадлежит обозначение f' для производной функции f.

Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815—1897) — один из крупнейших аналитиков XIX века, завершивший обоснование анализа.

Отметим ещё один «замечательный» предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Опираясь на эти пределы, нетрудно доказать, что тригонометрические функции (синус и косинус) и показательные функции непрерывны на $\mathbb{R}$ (проделайте это).

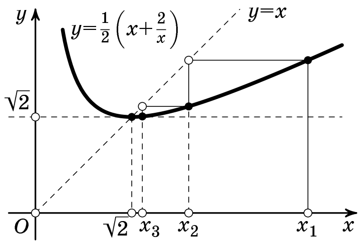


Рис. 12

15*. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{2}{x_{n-1}}\right)$$

при $n\geqslant 2$, а x_1 равно, например, 4, сходится к $\sqrt{2}$.

Указание. См. рис. 12.

ПРОИЗВОДНАЯ

Однажды, войдя в аудиторию, лорд Кельвин спросил студентов: «Что такое $\frac{dx}{dt}$?» и получил в ответ всевозможные формальные определения.

— Оставьте это, — воскликнул он тогда, — $\frac{dx}{dt}$ — это скорость!

Понятия производной и дифференциала функции (наряду с понятием интеграла) являются основными в математическом анализе. Правила оперирования с дифференциалами получили название *дифференциального исчисления*. В этом разделе обсуждается понятие производной и рассказывается об основных правилах дифференциального исчисления.

Вспомним слова Ньютона, приведённые в качестве эпиграфа к этой брошюре. Одной из двух основных задач Ньютон называет такую: «Пусть дана длина проходимого пути; требуется найти скорость движения в данное время».

Операция нахождения скорости по пути и называется *дифференцированием*. Функция, которая при этом получается, называется *производной* (т. е. скорость — производная пути по времени). Понятие производной имеет четыре важных толкования — физическое (Ньютон, 1662—1664), геометрическое (Лейбниц, 1684), аналитическое (Коши, 1823) и аппроксимативное*) (Фреше, 1912).

Первая трактовка понятия производной, предложенная Ньютоном, такова: производная — это скорость движущегося тела в данный момент времени.

*) От латинского approximo — приближаюсь.

Двадцатью годами позже Лейбниц определял производную так: значение производной функции, изображённой на графике, в данной точке равно тангенсу угла между касательной к графику функции в этой точке и осью абсцисс (рис. 13).

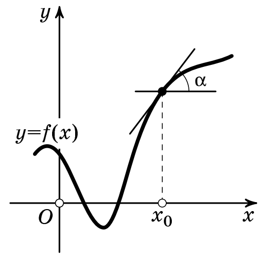


Рис. 13. $\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$

Следует пояснить, почему в качестве значения производной берётся именно тангенс угла наклона касательной, а не сам угол, или, скажем, его синус. Одна из мотивировок такова: согласно «правильному» определению, производная линейной функции $f=kx$ должна равняться k. Действительно, при равномерном движении скорость — это отношение пройденного пути ко времени движения. Значит, в качестве значения производной нужно брать угловой коэффициент касательной к графику, т. е. тангенс угла её наклона. Уравнение касательной к графику f в точке x_0 имеет вид

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

16. Напишите уравнение касательной к графику функции x^2 в точке $x=2$.

Необходимо сказать, что ни Ньютон, ни Лейбниц в своих работах не давали чёткого определения производной, высказывая лишь некоторые интуитивные соображения на этот счёт. Впервые определение производной было сформулировано Коши, и именно это определение стало общепринятым и в настоящее время используется почти во всех курсах анализа. Согласно Коши, производная — это предел отношения приращения функции $f(x+\Delta x)-f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при Δx стремящемся к нулю:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Согласно аппроксимативному определению, *производная функции f в точке x_0* — это число A такое, что

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+r(\Delta x),$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{r(\Delta x)}{\Delta x}=0$. Это число A обозначается $f'(x_0)$. Аппроксимативное определение производной по Фреше для функций одного переменного практически не отличается от определения Коши. Для функций многих (и даже бесконечного числа) переменных определение Фреше остаётся корректным в отличие от остальных, так как производная в таком случае — это не число, а линейная функция.

Из последнего определения легко вывести ещё такое определение дифференцируемости*): функция f дифференцируема в точке x_0, если в некоторой окрестности точки x_0 имеет место равенство $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0. При этом $f'(x_0) = \varphi(x_0)$. Это определение позволяет определить производную до определения предела и в ряде случаев облегчает вычисление производной.

Примеры вычисления производной. 1°. Производная константы равна нулю. Физическая трактовка этого такова: если автомобиль стоит, его скорость равна нулю.

17. Приведите остальные четыре трактовки — по Лейбницу, Коши, Фреше и с помощью функции φ.

2°. Если график функции — прямая, то угол, образованный ей с горизонтальной осью, одинаков во всех точках, значит, если $f(x) = kx + b$, то $f'(x) = k$. Это легко выводится изо всех определений.

А теперь дважды воспользуемся пятым определением.

3°. Если $f(x) = x^2$, то $x^2 - x_0^2 = (x - x_0)(x + x_0)$, функция $\varphi(x) = x + x_0$ непрерывна в x_0 и $\varphi(x_0) = 2x_0$, значит,

$$(x^2)' = 2x.$$

Аналогично, используя бином Ньютона, получаем, что $(x^n)' = nx^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

4°. Если $f(x) = \frac{1}{x}$, то $\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = (x - x_0)\frac{-1}{x_0 x}$, значит,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

В следующем примере без понятия предела обойтись трудно.

5°. Подсчитаем производную синуса. Имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x/2) = \cos x.$$

(Мы использовали свойство произведения пределов, первый замечательный предел и непрерывность косинуса.) Аналогично,

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

6°. Используя замечательный предел для экспоненты, получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x,$$

т. е. $(e^x)' = e^x$. Это соотношение объясняет выдающуюся роль числа e в математическом анализе.

*) Такое определение приведено в одной из брошюр О. С. Ивашёва-Мусатова.

Основные правила дифференцирования (производная суммы, произведения, частного и сложной функции).

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \tag{2}$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \tag{3}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad (\text{если } g(x) \neq 0) \tag{4}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x). \tag{5}$$

Формула (2) следует из того, что предел суммы равен сумме пределов. Придумайте этому физическое объяснение.

А вот для формулы производной произведения (3) я не знаю физического объяснения (и знаю довольно спорные геометрические). Но «аппроксимационное» доказательство весьма просто:

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) &= \\ = (f(x) + f'(x)\Delta x + r_1(\Delta x))(g(x) + g'(x)\Delta x + r_2(\Delta x)) - f(x)g(x) &= \\ = \Delta x(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) + r(\Delta x)&, \end{aligned}$$

где $r(\Delta x) = f(x)r_2(\Delta x) + g(x)r_1(\Delta x) + r_1(\Delta x)r_2(\Delta x)$. Из свойств суммы и произведения пределов следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x} = 0$, откуда вытекает искомое соотношение.

Также легко доказывается формула для производной сложной функции. Воспользуемся пятым определением. Пусть $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)\psi(z)$, $g(x) - g(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$ и функции ψ и φ непрерывны в $z_0 = g(x_0)$ и x_0 соответственно. Тогда

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = (g(x) - g(x_0))\psi(g(x)) = (x - x_0)\varphi(x)\psi(g(x)),$$

откуда и следует, что сложная функция $f(g(x))$ дифференцируема и $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$.

Формула (4) легко выводится из доказанных соотношений.

Формула для производной сложной функции даёт возможность вычислить производную показательной и общей степенной функции:

7°. $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = a^x \ln a$.

8°. $(x^a)' = (e^{a \ln x})' = ax^{a-1}$.

9°. Производная обратной функции тоже получается из формулы для производной сложной функции. Пусть, например, $f(y) = \operatorname{arctg} y$, $y = g(x) = \operatorname{tg} x$. Тогда, поскольку $f(g(x)) = x$, используя результаты примера 5° и формулу (4), имеем:

$$1 = (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x) = f'(y)\frac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= f'(y)\frac{1}{\cos^2 x} = f'(y)(1 + \operatorname{tg}^2 x) = f'(y)(1 + y^2),$$

откуда $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$. Вообще, если g — функция, обратная к f, т. е. $y = f(x)$, а $x = g(y)$, то $f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)} = \dfrac{1}{g'(f(x))}$.

С понятием производной тесно связано понятие дифференциала. Если функция дифференцируема в точке x_0, то её приращение состоит из двух слагаемых. Первое из них есть линейная функция от Δx. Это слагаемое называется *дифференциалом f в точке x_0* и обозначается $df(x_0)$, т. е. $df(x_0)(\Delta x) = A\Delta x$. Но так как $A = f'(x_0)$, можно написать $df(x_0)(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$.

Если $f(x) = x$, то $dx = \Delta x$ (в этом случае говорят, что дифференциал независимой переменной совпадает с её приращением). Учитывая это, получаем, что $df(x_0)(\Delta x) = f'(x_0)\,dx$. Обычно это записывают короче: $df(x_0) = f'(x_0)\,dx$. Из этой формулы следует, что $f'(x_0) = \dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Читатель может потренироваться в вычислении производных и проведении касательных, решив следующие задачи.

18. Вычислите производные функций $\operatorname{ctg} x$, $e^{\sin x}$.

19. Проведите касательную к графику функции 2^x в точке $x = \sqrt{2}$.

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ И МЕТОДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Мне прямо стыдно сказать, до какого числа знаков я довёл на досуге эти вычисления.

И. Ньютон

Дадим сначала важное определение локального экстремума функции в точке. *Локальным максимумом* функции называется такая точка, что значения функции в некоторой её окрестности не больше значения в этой точке. Изображённая на рис. 14 функция имеет локальные максимумы в точках *1*, *3*, *5*. Аналогично определяется *локальный минимум* (точки *2*, *4*, *6* на рис. 14).

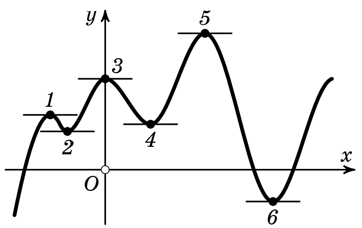


Рис. 14

Точка, в которой функция имеет локальный максимум или локальный минимум, называется точкой *локального экстремума**).

Теорема 1 (о локальном экстремуме, Ферма). Производная функции, дифференцируемой в точке, где она имеет локальный экстремум, равна в этой точке нулю.

*) От латинского extremum — крайнее.

Доказательство (аналитическое, для максимума в точке x_0). Предел отношения разности $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к Δx «справа» (когда $\Delta x > 0$) неположителен, так как в некоторой окрестности x_0 выполняется неравенство $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leqslant 0$, а слева (когда $\Delta x < 0$) неотрицателен. Значит, этот предел равен нулю.

Физическая интерпретация. Если интерпретировать x как время, а $f(x)$ как положение шарика на пружинке, в крайних точках скорость его равна нулю. Ньютон замечательно сказал о сути теоремы Ферма: в точках, где функция достигает своих максимума или минимума, она «не течёт ни назад, ни вперёд».

Геометрическая интерпретация. Касательная к графику функции в точке локального экстремума горизонтальна (см. рис. 14).

Аппроксимативная интерпретация была хорошо выражена Иоганном Кеплером, который писал, что вблизи экстремума «изменения несущественны».

Теорема 2 (о промежуточном значении, Коши). Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого числа γ, $f(a) < \gamma < f(b)$ существует точка c, $a < c < b$ такая, что $f(c) = \gamma$. Другими словами, непрерывная на отрезке функция принимает все промежуточные значения.

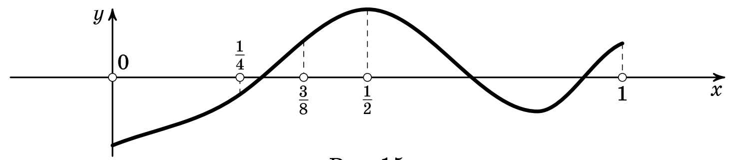


Рис. 15

Доказательство, которое мы предлагаем — конструктивное. Это значит, что мы описываем осуществимое правило поиска нужной точки (рис. 15). Пусть для определённости отрезок, на котором функция f непрерывна, есть отрезок $[0, 1]$, и при этом $f(0) < 0$, а $f(1) > 0$. Докажем, что в некоторой точке интервала $(0, 1)$ функция обращается в нуль. Применим *метод деления пополам*. Вычислим f в середине отрезка. Если там функция f равна нулю, то всё доказано. Если же это не так, то там её значение либо положительно, либо отрицательно. В первом случае отбросим отрезок $[1/2, 1]$, во втором — отрезок $[0, 1/2]$, и будем искать нуль на оставшемся отрезке. А далее с отрезком половинной длины поступим аналогично. Левые и правые концы отрезков, на которых функция имеет разные знаки, стремятся к одному и тому же пределу, который мы обозначим $\widehat{x}$. По теореме о сохранении знака значение f в этой точке равно нулю. Для доказательства теоремы Коши в общем случае необходимо внести в приведённое рассуждение незначительные изменения, с чем читатель, несомненно, справится.

20. Найдите методом деления пополам $\sqrt{2}$ с точностью до 10^{-3}, отыскав нуль функции x^2-2 на отрезке $[1,2]$.

Теорема 3 (о конечном приращении, Лагранж). Пусть функция f непрерывна и непрерывно-дифференцируема (т. е. её производная $f'(x)$ также непрерывна на $[a,b]$) на отрезке $[a,b]$. Тогда найдётся такая точка c, $a \leqslant c \leqslant b$, что

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Доказательство (физическое). На физическом языке теорема звучит так. Две машины движутся по шоссе, одна с постоянной скоростью $V=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, а другая — с непостоянной скоростью. Пусть в моменты времени a и b машины были рядом. Тогда обязательно найдётся момент времени c, $a \leqslant c \leqslant b$, в который скорость второй машины равнялась V.

И это действительно так. Если в момент a скорости машин были одинаковы, то всё доказано. Пусть это не так, и скорость второй машины была, скажем, меньше V. Тогда в какой-то момент её скорость должна превзойти V (иначе ей первую машину не догнать). И нужное утверждение следует из теоремы о промежуточном значении.

Геометрический смысл теоремы 3 таков: на отрезке $[a,b]$ всегда найдётся точка c такая, что касательная в ней параллельна прямой, проведённой через точки $(a,f(a))$ и $(b,f(b))$ (рис. 16).

Следствие 1 (теорема Ролля). Если в предположениях теоремы Лагранжа $f(a)=f(b)$, то найдётся такая точка c, $a \leqslant c \leqslant b$, что $f'(c)=0$.

Из теоремы Лагранжа следует, что если производная на некотором интервале положительна (отрицательна), то функция на этом интервале монотонно возрастает (убывает); что если производная тождественно равна нулю, то функция равна константе, и многое другое*).

*) Вас убедило приведённое доказательство теоремы Лагранжа? Думаю, что для большинства оно выглядит вполне убедительно. Но у некоторых возникнет вопрос: «А почему если две машины стартуют одновременно и скорость одной строго меньше скорости другой, то эта машина не догонит другую?». «Это же очевидно», — скажет большинство. «Почему? Это аксиома?» — возразит сторонник математической строгости.

Для строгого доказательства теоремы Лагранжа сначала доказывают теорему Вейерштрасса о том, что непрерывная на отрезке функция достигает своего максимального и минимального значения. Затем — теорему Ролля (по теореме Вейерштрасса функция достигает и максимума и минимума, если они совпадают, то функция постоянна и её производная всюду равна нулю, если же они разные, то один из экстремумов лежит внутри отрезка, и значит, производная в этой точке равна нулю). А из теоремы Ролля следует теорема Лагранжа: надо лишь заменить функцию $f(x)$ на $g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ и применить теорему Ролля.

Заметим, что в этом доказательстве нигде не используется непрерывность функции $f'(x)$, т. е. теорема Лагранжа остаётся верной и для функций с разрывной производной.

Опишем метод, при помощи которого можно исследовать на экстремум функции, непрерывные на отрезке и дифференцируемые внутри отрезка. Напомним, что непрерывная на отрезке функция достигает своих максимума и минимума (в этом состоит теорема Вейерштрасса, см. сноску на с. 28).

Для отыскания абсолютного минимума (максимума) функции f на $[a,b]$ следует найти все решения уравнения $f'(x)=0$ внутри интервала (a,b) (эти точки называются *стационарными*). Допустим, это точки x_1, ..., x_m. Далее надо найти наименьшее (наибольшее) значение среди *критических точек* $f(a)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_m)$, $f(b)$ (рис. 17).

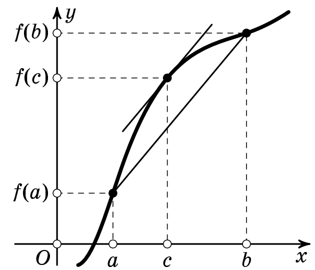


Рис. 16

Применим теперь теорему Лагранжа для вывода других важных теорем дифференциального исчисления.

Следствие 2 (правило Лопиталя). Пусть функции f и g непрерывно-дифференцируемы в окрестности точки x_0, причём $f(x_0)=g(x_0)=0$, а $g'(x_0)\neq 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Доказательство. Сначала рассмотрим отрезок $[x_0,\ x_0+\varepsilon]$, $\varepsilon>0$. Для $x\in[x_0,\ x_0+\varepsilon]$ в силу теоремы Лагранжа

$$f(x)=f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0),$$

$\xi\in(x_0,x)$, и аналогично,

$$g(x)=g'(\eta)(x_0-x).$$

Значит,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\eta)}$$

для некоторых $\xi,\eta\in(x,x_0)$. Теперь устремим x к x_0. Получаем, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\eta)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

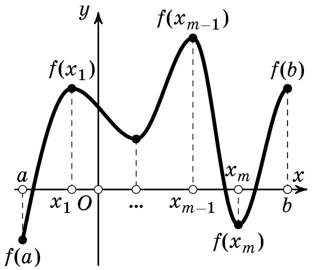


Рис. 17. $f(a)$ — абсолютный минимум, $f(x_{m-1})$ — абсолютный максимум.

Аналогичное рассуждение для отрезка $[x_0-\varepsilon,\ x_0]$ завершает доказательство.

Теорема 4 (формула Тейлора).

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o((x-x_0)^n)\ ^{*)}.$$

*) Через $o(y)$ (читается: «о малое от y») обычно обозначают функцию, такую что $\lim\limits_{y\to 0}\frac{o(y)}{y}=0$. Про такие функции говорят, что они *бесконечно малы по сравнению с y*.

Первый шаг сразу следует из правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),$$

откуда

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0).$$

Сделаем второй шаг. Снова из правила Лопиталя

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}=\frac{f''(x_0)}{2},$$

откуда

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2),\quad \text{и т. д.}$$

21. Докажите, что если $f(x)=\operatorname{arctg}x$, то $f^{(2m)}(0)=0$, $f^{(2m-1)}(0)=(-1)^{m-1}(2m-2)!$. Подставив $x_0=0$ в формулу Тейлора, получите разложение арктангенса в ряд, приведённое на с. 9.

Для решения уравнений вида $f(x)=a$ весьма эффективен *метод Ньютона*. Он заключается в построении последовательности, которая сходится к решению данного уравнения. Начальный член последовательности берётся довольно близко к искомому решению, а каждый следующий вычисляется по формуле

$$x_n=x_{n-1}+\frac{a-f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

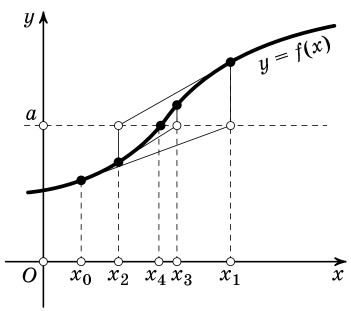


Рис. 18

В частности, применение метода Ньютона к решению уравнения $x^2-2=0$ приводит к формуле из задачи 15. Ньютон овладел этим методом и формулой, впоследствии названной формулой Тейлора, в середине 1660-х годов и с воодушевлением вычислял значения различных функций и решал множество уравнений (об этом можно судить по приведённому эпиграфу).

22. Используя рис. 18, придумайте обоснование метода Ньютона.

23. Вычислите значения функций $\sin x$, $\cos x$, e^x и $\ln x$ в точке $\sqrt{2}$.

24. Решите с точностью до 10^{-3} уравнение $x^3-2x=5$, на котором Ньютон демонстрировал свой метод решения уравнений.

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К НАХОЖДЕНИЮ ЭКСТРЕМУМОВ

В мире не происходит ничего, в чём бы не был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.

Л. Эйлер

Экстремум — это термин, объединяющий понятия «максимум» и «минимум». Задачи на нахождение максимума или минимума — наибольшего и наименьшего значений — называют *экстремальными задачами*. Имеется множество причин, побуждающих ставить и решать экстремальные задачи. Людям свойственно стремление к лучшему, и потому им хочется выбирать наилучшую из предоставляющихся возможностей. А потому экстремальные задачи, возникающие в самых разных областях знания, например, в технике или экономике, играют значительную роль в практической деятельности людей.

Этот раздел, в частности, посвящен методам нахождения максимумов и минимумов функций одного переменного, определённых на конечном отрезке $[a,b]$. Точку $\widehat{x}$ из этого отрезка называют *абсолютным минимумом* (*максимумом*) функции f, если $f(x)\geqslant f(\widehat{x})$ (соответственно, $f(x)\leqslant f(\widehat{x})$) для любой точки из $[a,b]$.

Экстремальные задачи мы будем записывать в форме

$$f(x)\to\min\,(\max),\qquad a\leqslant x\leqslant b.$$

Запись задачи (если это возможно) в таком виде называют её *формализацией*.

Формализуем и решим такую задачу: найти наибольшую площадь прямоугольного треугольного с заданной суммой катетов.

Р е ш е н и е. Обозначим сумму катетов через a, а один из катетов — через x. Тогда другой катет равен $a-x$, а площадь треугольника — $\frac{1}{2}x(a-x)$. В итоге мы приходим к задаче

$$f(x)=\frac{1}{2}x(a-x)\to\max,\qquad 0\leqslant x\leqslant a.$$

Функция f непрерывна на конечном отрезке $[0,a]$. У неё имеется единственная стационарная точка: $0=f'(x)=a-2x$, $x=a/2$. Таким образом, критические точки — это 0, $a/2$, a. Максимальное значение функции f достигается в точке $a/2$.

О т в е т: прямоугольным треугольником максимальной площади с заданной суммой катетов является равнобедренный треугольник.

В тридцатые годы XVII века ещё не существовало математических журналов, и научные достижения фиксировались либо в книгах, либо в письмах. Свой метод отыскания экстремумов Ферма изложил в письме к Жилю Робервалю — известному математику того времени. В письме, посланном в 1638 году, Ферма иллюстрировал свой метод решением задачи, которую мы только что разобрали.

Эта задача — геометрическая, но заодно мы решили и важный алгебраический вопрос: мы доказали, что произведение xy двух чисел x и y не превосходит $(x+y)^2/4$. Тем самым, мы установили знаменитое неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим:

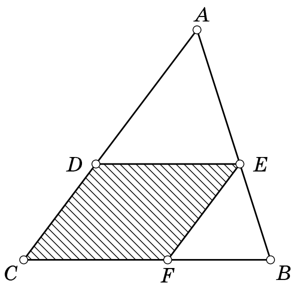


Рис. 19

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

Задачи на максимум и минимум возникли в глубокой древности. Одна из них была решена Евклидом в его «Началах» (III в. до н. э.). Её формулировка такова: вписать в треугольник ABC параллелограмм $CDEF$ (рис. 19) наибольшей площади.

25. Формализуйте и решите задачу Евклида.

26. Формализуйте такую задачу: разделить число 8 на две такие части, чтобы произведение их произведения на их разность было максимальным*).

Решим следующую задачу: вписать в заданный круг прямоугольник наибольшей площади.

Решение. Прежде всего формализуем задачу. Пусть круг имеет радиус R, а длина одной из сторон прямоугольника равна $2x$. Тогда из теоремы Пифагора следует, что длина второй стороны равна $2\sqrt{R^2-x^2}$. В итоге получаем такую задачу:

$$f(x) = 4x\sqrt{R^2-x^2} \to \max, \quad 0 \leqslant x \leqslant R.$$

Функция f непрерывна на отрезке $[0, R]$. Найдём её стационарные точки. Имеем:

$$0 = f'(x) = 4\frac{R^2-2x^2}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

откуда $x^2 = \frac{1}{2}R^2$. Следовательно, имеется единственная стационарная

*) Эту задачу поставил замечательный человек, живший в XVI веке — Никколо Тарталья (1500—1557). Он научился решать уравнения третьей степени и благодаря этому справляться с задачами, подобными той, что приведена в этом упражнении.

Кстати, из формулы для решения уравнения третьей степени вытекает, что ответом в задаче 4 является единица. Действительно, надо рассмотреть уравнение $x^3+3x-4=0$, применить к нему формулу для корней уравнения третьей степени (она приведёт к числу из задачи 4), а затем убедиться, что единица — единственный корень выписанного уравнения. По-другому это можно доказать так: обозначим $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ через a, $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ через b и $a+b$ через x. Тогда, учитывая, что

$$x^3 = (a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b) = 4-3x$$

(так как $ab=-1$), сразу приходим к уравнению $x^3+3x-4=0$.

точка $x_0 = R\frac{\sqrt{2}}{2}$. А всего критических точек три: 0, x_0, R. Максимального значения функция f достигает в точке x_0, т. е. длина стороны равна $R\sqrt{2}$. Длина второй стороны равна $2\sqrt{R^2-x_0^2} = R\sqrt{2}$.

Ответ: прямоугольник наибольшей площади, вписанный в круг является квадратом.

Сформулированная задача — одна из задач на экстремум, решённых Кеплером в его знаменитой книге «Стереометрия винных бочек» (1613).

Следующая задача связана с замечательным открытием, принадлежащим опять-таки Ферма. В 20-е годы XVII века голландский учёный Виллеброрд Снеллиус экспериментально открыл закон преломления света на границе двух сред (скажем, воздуха и воды). Закон Снеллиуса состоит в следующем. Пусть два луча A_1OB_1 и A_2OB_2 (идущие «сверху вниз») преломляются в точке O (рис. 20). Углы $A_1OC_1 = \alpha_1$ и $A_2OC_2 = \alpha_2$, образованные A_1O и A_2O с вертикалью OC, называются *углами падения*, углы $B_2OD = \beta_2$ и $B_1OD = \beta_1$, образованные B_2O и B_1O с вертикалью OD, называют *углами преломления*. Снеллиус установил, что

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2}$$

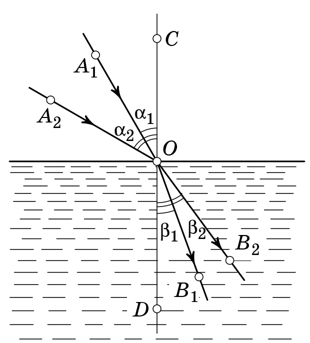


Рис. 20

(т. е. что отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная, не зависящая от угла падения).

Объяснение закона преломления дал Ферма. При этом он выдвинул (впервые в истории науки) *экстремальный принцип для явлений природы*. Принцип Ферма гласит: в неоднородной среде свет избирает такую траекторию, вдоль которой время, затрачиваемое им на преодоление пути от одной точки до другой, минимально. Если точка A имеет координаты $(0, a)$, точка B — координаты $(d, -b)$, граница сред проходит по оси Ox, а точка O преломления луча имеет координаты $(x, 0)$, то время прохождения луча из точки A в точку B равно

$$\frac{AO}{v_1} + \frac{BO}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{v_2},$$

где v_1 и v_2 — скорости света в воздухе и в воде соответственно.

В силу экстремального принципа Ферма эта величина должна быть минимальной. Мы приходим к следующей задаче: найти минимум функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{v_2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Р е ш е н и е. Казалось бы, мы не можем воспользоваться описанным рецептом для поиска экстремумов, поскольку функция f определена на всей прямой $\mathbb{R}$, а не на отрезке. Но ведь функция f растёт на бесконечности, т. е.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Значит, можно найти такое число $C > 0$, что вне отрезка $[-C, C]$ функция f принимает значения, бóльшие, чем её значение, скажем, в нуле. Следовательно, минимум f не следует искать вне отрезка $[-C, C]$. Мы свели задачу к конечному отрезку — к тому случаю, который умеем решать. Найдём стационарные точки:

$$0 = f'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}. \qquad (6)$$

Вследствие монотонности функций

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} \quad \text{и} \quad \frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

получаем, что имеется единственная стационарная точка x_0, удовлетворяющая уравнению Ферма (6). Критических же точек три: $-C$, x_0 и C. Но как мы установили, точки $-C$ и C не могут быть точками минимума.

О т в е т: минимум достигается в точке x_0.

При этом равенство

$$\frac{x_0}{v_1\sqrt{a^2+x_0^2}} = \frac{d-x_0}{v_2\sqrt{b^2+(d-x_0)^2}}$$

означает, что отношение синусов углов преломления равно отношению скоростей распространения света в верхней и нижней средах:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{v_1}{v_2}.$$

По ходу дела, решив нашу задачу, мы установили закон Снеллиуса, исходя из экстремального принципа Ферма.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ

Обратимся снова к эпиграфу в начале брошюры, где Ньютон формулирует две основные задачи. Первую из них — нахождение скорости по пути — мы обсуждали, она сводится к дифференцированию. Вторая задача — нахождение пути по скорости — решается интегрированием. Если функция $f(x)$ выражает скорость, то путь выражается такой функцией $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$. Эта функция называется *первообразной*, или *неопределённым интегралом* от f. Первообразные определены с точностью до константы: если функция F является первообразной для f, то функция $F + C$, где C — произвольное число, также является первообразной для f.

27. Докажите обратное: если производные двух функций равны, то сами эти функции отличаются на константу.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь теоремой Лагранжа.

Геометрический смысл первообразных заключается в следующем. Вычислим площадь под графиком функции $f(x)$ от a до b (рис. 21); при этом площади участков, лежащих ниже оси Ox учитываются со знаком «минус». Полученная величина называется *определённым интегралом* функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Оказывается, эта площадь равна разности значений первообразной в точках b и a. Это выражает знаменитая *формула Ньютона—Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

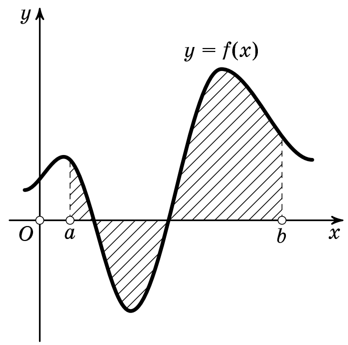


Рис. 21

Когда мы ищем такую функцию F, что $F' = f$, мы решаем простейшее *дифференциальное уравнение*. Решая обычное алгебраическое уравнение, мы ищем значения x, обращающие некоторое соотношение в тождество. При решении (или, как говорят ещё, *интегрировании*) дифференциального уравнения требуется найти не число, а функцию, удовлетворяющую определённому соотношению, причём в это соотношение входит как сама функция, так и её производные различных порядков.

Дифференциальными уравнениями описываются многие процессы окружающего нас мира в самых разных областях — физике, биологии, социологии, экономике и т. д. Рассмотрим несколько примеров таких процессов.

Простейшим примером является свободное падение тела под действием земного притяжения при отсутствии сопротивления воздуха. Можно считать, что поле тяжести Земли вблизи её поверхности однородно, т. е. в любой точке на тело действует одинаковая сила $\vec{F} = m\vec{g}$, направленная вниз. Если обозначить за $x(t)$ высоту, на которой находится тело, как функцию времени, то его ускорение в момент времени t будет равно производной скорости, т. е. второй производной высоты — $\ddot{x}(t)$ *).

Записав второй закон Ньютона: $m\ddot{x} = F$, мы приходим к уравнению $m\ddot{x}(t) = -mg$, или $\ddot{x}(t) = -g$. Для определения $x(t)$ это уравнение нужно проинтегрировать. Здесь это сводится к нахождению первообразной от первообразной. Его решением является функция

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

где x_0 и v_0 — произвольные константы. Этими константами описываются начальные условия движения тела: x_0 — это его высота в начальный момент времени, а v_0 — начальная скорость. Мы получили *закон свободного падения*.

Теперь давайте решим это же уравнение $\ddot{x}(t) = -g$ другим способом. Домножим обе его части на $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t)\,\ddot{x}(t) = -g\dot{x}(t). \qquad (7)$$

Заметим, что в левой части (7) стоит производная функции $\frac{(\dot{x}(t))^2}{2}$. Действительно,

$$\left(\frac{(\dot{x}(t))^2}{2}\right)^{\cdot} = \frac{1}{2}(\dot{x}(t)\,\ddot{x}(t) + \ddot{x}(t)\,\dot{x}(t)) = \dot{x}(t)\,\ddot{x}(t).$$

В правой части (7) записана производная функции $-gx(t)$. А если производные двух функций совпадают, то сами функции отличаются на константу. Значит,

$$\frac{(\dot{x}(t))^2}{2} = -gx(t) + C_1.$$

Но $\dot{x}(t)$ — это скорость тела. Домножив обе части уравнения на массу тела m, получаем *закон сохранения энергии*:

$$\frac{mv^2}{2} + mgx = C.$$

Рассмотрим другой пример из механики: опишем движение грузика массы m, прикреплённого к пружинке и совершающего колебания (рис. 22). Для пружинки справедлив *закон Гука*: сила, возвращающая её к положению равновесия, пропорциональна отклонению пружины от этого положения. Обозначим коэффициент пропорциональности через k (его ещё называют *жёсткостью* пружины), а отклонение пружины от положения равновесия в момент

*) Производная по времени в физике часто обозначается (как это делал Ньютон) не штрихом, а точкой.

времени t — через $x(t)$. Приходим к дифференциальному уравнению

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0.$$

Его решениями являются всевозможные функции вида

$$x(t) = A\sin(\omega t + \gamma),$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$, а A и γ — это константы, задающие начальные условия движения грузика. Из этого решения видно, что грузик будет совершать колебания с *амплитудой* A и *периодом* $2\pi\sqrt{m/k}$. Интересно, что этот период зависит только от массы грузика и жёсткости пружины и не зависит от начальных условий: периоды колебаний с различными амплитудами одинаковы.

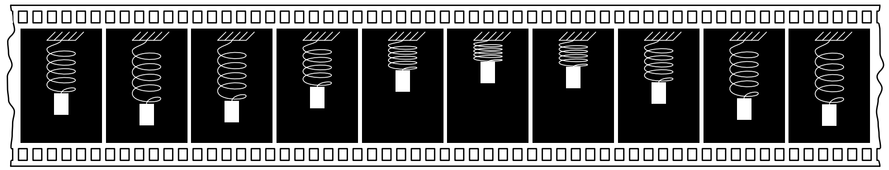


Рис. 22

А вот ещё несколько примеров из разных областей знания.

Идея *социологической модели Томаса Мальтуса* состоит в том, что прирост населения пропорционален численности населения в данный момент времени. Обозначим численность населения в момент времени t через $N(t)$. Функция $N(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{N}(t) = kN(t), \quad k > 0.$$

Решением этого уравнения является экспоненциальная функция $N(t) = N(t_0)e^{kt}$, где $N(t_0)$ — численность населения в начальный момент времени t_0.

Модель Мальтуса неплохо соответствовала действительности, например, для описания изменения численности населения США в период с 1790 до 1860 года. Ныне эта модель в большинстве стран не работает, более того, сейчас нет достаточно удовлетворительной модели развития человечества, которая дала бы прогноз численности населения планеты на ближайшие полвека.

Биологическая модель эволюции популяций — это та же математическая модель: если через $P(t)$ обозначить численность популяции (скажем, бактерий) в момент времени t, то, полагая, что прирост пропорционален количеству бактерий в данный момент времени, мы вновь приходим к уравнению

$$\dot{P}(t) = \beta P(t)$$

и опять получаем экспоненциальный рост (рис. 23).

Ещё одним примером явления, которое описывается с помощью экспоненциальной функции, может служить *радиоактивный распад*. Примем гипотезу, что каждая частица радиоактивного вещества

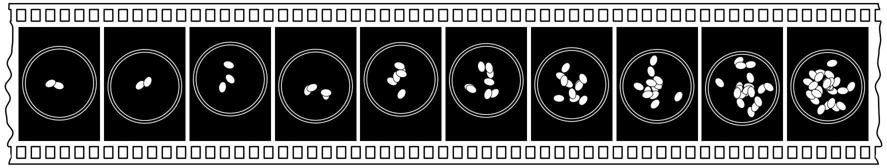


Рис. 23

имеет определённую вероятность распада, не зависящую от других частиц. Тогда скорость распада вещества в некоторый момент времени пропорциональна имеющемуся количеству вещества. Обозначая количество вещества в момент t через $R(t)$, снова получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{R}(t) = -\gamma R(t), \quad \gamma > 0.$$

Вычислим время, за которое распадётся половина вещества (оно называется *периодом полураспада*). Решением уравнения распада является функция $R(t) = R(t_0)e^{-\gamma t}$, откуда период полураспада T определяется из соотношения $e^{-\gamma t} = \frac{1}{2}$, или $e^{\gamma t} = 2$. Следовательно,

$$T = \frac{\ln 2}{\gamma}.$$

28. Снежный ком, имеющий форму шара, тает по следующему закону: скорость убывания объёма пропорциональна площади поверхности шара. Час назад его объём равнялся 4 м^3, а сейчас он равен 2 м^3. Когда снежный ком растает полностью?

Одним из величайших открытий, произведённых при помощи дифференциальных уравнений, был теоретический вывод *законов Кеплера* — основных законов небесной механики. Первый закон Кеплера заключается в том, что планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце (рис. 24). Кеплер пришёл к такому выводу в начале XVII века на основании наблюдений Тихо Браге. А через несколько десятилетий Ньютон дал этому теоретическое обоснование, исходя из *закона всемирного тяготения*, согласно которому два тела с массами M и m притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F = G\frac{Mm}{R^2},$$

где G — гравитационная постоянная. Это приводит к следующей

системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -GMm\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \\ m\ddot{y} = -GMm\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

(здесь x и y — координаты планеты в системе координат, началом которой служит Солнце).

Эти уравнения были проинтегрированы Ньютоном, и в итоге оказалось, что каждая планета действительно движется по эллипсу, параметры которого определяются массами планеты и Солнца, гравитационной постоянной и начальными условиями — положением и скоростью планеты в некоторый произвольный момент времени.

Здесь мы учитываем только взаимное притяжение Солнца и планет и «забываем» о силах, возникающих в результате взаимного притяжения планет между собой и т. п.*). Эти силы действительно практически не оказывают никакого воздействия на движение планет, так что ими можно пренебречь. А как обстоит дело в случае, когда этого сделать нельзя? Например, как описать движение системы из трёх тел — скажем, Солнца, Земли и Луны?

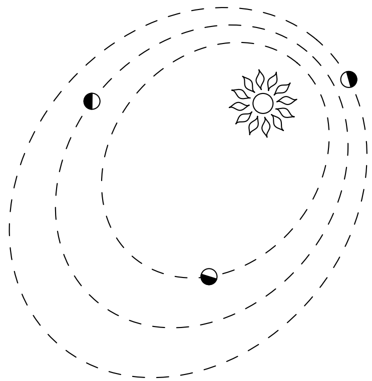


Рис. 24

Для системы из n тел тоже можно выписать систему дифференциальных уравнений, описывающих их движение. Однако решить эту систему при $n \geqslant 3$ в явном виде, т. е. найти функции, задающие положение этих тел в зависимости от времени, долгое время никому не удавалось. В конце XIX века Анри Пуанкаре доказал, что этого сделать нельзя — как говорят, эта система не интегрируется в квадратурах. Однако если задать начальные положения и скорости тел, их положения в последующие моменты можно рассчитать при помощи специальных численных методов, требующих применения компьютеров.

Это же относится не только к дифференциальным уравнениям, но и к другим, самым разнообразным задачам. Например, все задачи приведённые в этой брошюре, и вообще практически все задачи

*) О других факторах, влияющих на движение тел во Вселенной, читатель может узнать, например, из брошюры

В. Г. Сурдин. Динамика звёздных систем. — (Серия «Библиотека „Математическое просвещение“». Вып. 12). — М.: МЦНМО, 2001.

из задачников по математическому анализу обладатель компьютера способен решить в течение времени, которое требуется на нажатие нескольких клавиш. Например, чтобы вычислить число $2^{\sqrt{2}}$ с точностью до 17-го знака после запятой, нужно набрать в программе «Математика»

```
N[2^(2^(1/2)),18],
```

нажать на клавиши «Shift» и «Enter», и через мгновение получится ответ:

```
2,66514414269022519.
```

Математики работают с дифференциальными уравнениями уже более трёхсот лет. Компьютерные методы применяются только последние полвека, но при этом они позволяют эффективно решать значительно более сложные дифференциальные уравнения (и системы дифференциальных уравнений), с которыми учёные сталкиваются при описании различных процессов в естествознании, технике, экономике и других областях.