Библиотека
«Математическое просвещение»
Выпуск 6

А. Б. Сосинский

Мыльные плёнки и случайные блуждания

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2000

УДК 519.21+517.96
С66
ББК 22.17

Аннотация

Взаимное влияние математики и её приложений проиллюстрировано на примере задачи о мыльной плёнке, затягивающей проволочный контур. Приближённое решение этой задачи можно получить оригинальным способом, который, на первый взгляд, никак не связан с её постановкой, а именно методом моделирования случайных блужданий.

Текст брошюры представляет собой обработку записи лекции, прочитанной автором 10 декабря 1999 года для участников III Международного математического турнира старшеклассников «Кубок памяти А. Н. Колмогорова» — школьников 8–11 классов.

ISBN 5–900916–50–2

Сосинский Алексей Брониславович

Мыльные плёнки и случайные блуждания

(Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“»)
М.: МЦНМО, 2000. — 24 с.: ил.

Главный редактор серии *В. М. Тихомиров.*

Редакторы *Р. М. Кузнец*, *Е. Н. Осьмова.*

Фотограф *В. В. Бондарчук.* Технический редактор *М. Ю. Панов.*

Лицензия ИД №01335 от 24/III 2000 г. Подписано к печати 3/V 2000 г. Формат бумаги 60 × 88 $^1/_{16}$. Физ. печ. л. 1,5. Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,38. Тираж 4000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
121002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11.

Сначала мне хотелось бы обсудить ряд общих вопросов, касающихся моей профессии. Мыльные плёнки и случайные блуждания появятся позже, в качестве пояснений и иллюстраций к этим вопросам. Те читатели, которые не любят общих разговоров, могут сразу перейти к §1.

Я — *математик-исследователь*, чем очень горжусь, хотя осознаю: мало кто знает о существовании нашего сообщества. Большинство людей считает, что математика — сложившаяся наука, нужно только её выучить и потом применять — в технологиях, в других науках. Открытия, думают они, можно сделать в физике, биологии, но никак не в математике: недаром Нобелевские премии математикам не присуждают.

Это распространённое мнение в корне ошибочно. Я надеюсь, что читатель это понимает, но ему будет интересно узнать, чем же всё-таки занимается математик-исследователь, что он при этом делает, приносит ли эта деятельность какую-либо практическую пользу, а если нет — почему ей так увлекаются.

Уже на первый вопрос: чем занимается наша наука, т. е. *в чём предмет математики*, ответ совсем не прост. Можно сказать, что у математики нет предмета или что её предмет — *фикция*. Поясню это. Во всех других науках в определении их предмета всё ясно. Биология занимается живыми организмами, астрономия — небесными телами, психология — человеческой душой, т. е. каждая наука отвечает за определённую сторону реальной жизни. А математика? Плоскости, трансцендентные числа, несчётные множества и другие «математические объекты» не существуют в природе, во внешнем мире. Их нет, они фиктивны, это — *абстракции*.

Практически настроенные математики иногда говорят, что эти абстракции лишь составные части «математических моделей» (см. §2) реальных ситуаций и нашу науку можно свести к «математическому моделированию». Но хотя математическое моделирование, особенно в век развития компьютеров, вполне достойное и порой полезное занятие, отождествлять его с математикой нельзя. Во-первых, потому, что математическим моделированием занимаются в основном *вне* математики: в экономике, в исследовании технологических процессов, в ядерной физике. Во-вторых, каждая «математическая модель» подразумевает наличие «конкретного прототипа» во внешнем мире; но мы увидим на примерах, что это совсем не так, даже в той части математики, которую называют *прикладной*.

Теоретически настроенные математики, часто самодовольно называющие себя *чистыми*, рассматривают именно абстракции как реальный предмет математики, например в рамках философии Платона: математические сущности объективны, но нематериальны, они населяют *мир идей*, существующий независимо от мира вещей. Более прагматические теоретики, например французский «математик» Никола Бурбаки*), попытались формализовать абстрактные математические построения на основании теории множеств и технического понятия *структуры*. Однако дальнейшее развитие теоретической математики показало, что рамки структур а ля Бурбаки слишком узки, чтобы вместить новые теории.

Мне не удалось с ходу дать убедительный ответ на вопрос о том, *чем* занимается математика. Может быть, проще будет сказать, *что делают* математики, *какую работу они выполняют*. В академическом мире, в частности среди российских математиков, принято делить математиков на два типа: на *исследователей-теоретиков*, которые доказывают теоремы и придумывают новые математические теории, и на *прикладников*, которые применяют математические методы на практике. Так, существуют «кафедры прикладной математики» в вузах, есть даже целый «Институт прикладной математики» в Российской академии наук, и в то же время бывают кафедры алгебры или дифференциальной геометрии в вузах, отделы топологии в математических институтах, а в Великобритании даже встречаются ставки с красноречивым названием «профессор чистой математики».

Итак, существуют два типа математики — чистая и прикладная? Посмотрим, как это выглядит на практике, на примере очень красивой задачи, пришедшей в математику из экспериментальной физики.

*) Это не реальное лицо, а коллективный псевдоним группы математиков (в основном французских), прославившейся созданием многотомного догматического изложения математики, основанного на аксиоматическом методе.

§ 1. Мыльные плёнки

Возьмём шампунь, хорошее мыло и немного глицерина. Приготовим из них мыльный раствор. Опустим в этот раствор проволочный контур. При вынимании из раствора на контуре образуется мыльная плёнка (фото 1).

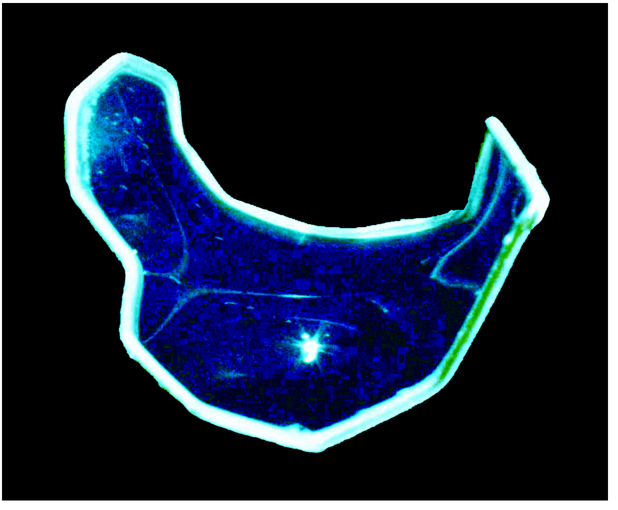

Фото 1. Мыльная плёнка на простом проволочном контуре.

Иногда при этом возникают интересные и удивительно красивые картины. Возьмём, например, проволочный контур, завязанный в виде простейшего узла — трилистника. При некоторых способах вынимания проволоки из раствора плёнка принимает форму *листа Мёбиуса* (фото 3, с. 9). Но чаще полученная плёнка состоит из трёх гладких полостей с общими «мыльными рёбрами», вдоль которых полости выглядят как «книга из трёх страниц»; попарно страницы образуют двугранные углы в 120° (фото 2, с. 8).

Если взять каркас тетраэдра, внутри его образуется сложная разветвлённая поверхность, которая может иметь пузырь (фото 4, 5, сс. 12, 13). Аналогично и с кубом (фото 6, 7, сс. 16, 17).

Заметим, что подобные конфигурации удивительным образом возникают и в биологии: некоторые организмы, живущие в океане, очень похожи на мыльные плёнки.

Естественно, математик, увидев такое явление, пытается объяснить его и создать теорию, которая это явление описывает.

§ 2. Математическая модель мыльной плёнки

Введём в пространстве систему координат $Oxyz$. На рис. 1 изображён контур с натянутой на него плёнкой (т. е. поверхностью) Ω. Пусть проекция Ω на плоскость xOy есть некоторая область на плоскости; обозначим её через G. Проекцию контура, т. е. границу области G, обозначим через Γ.

Рассмотрим точку (x, y, z) на поверхности Ω и её проекцию, точку (x, y) в области G. Тогда *высота* точки на поверхности представляет собой функцию двух переменных: $z = u(x, y)$ или $z = u(A)$, где A — точка с координатами (x, y) (см. рис. 1).

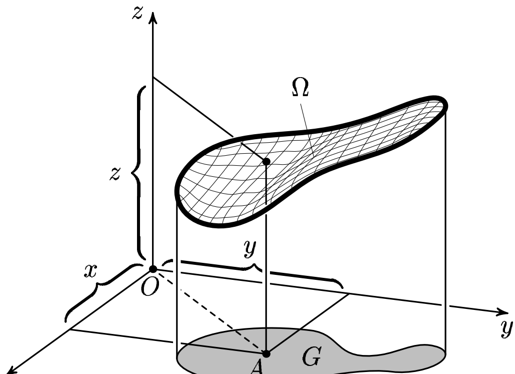

Рис. 1

Заметим, что если существуют несколько точек поверхности, проекции которых на плоскость совпадают, то мы не можем построить однозначную функцию u. Таким образом, эта математическая модель подходит только для относительно простых контуров. Мы отказались, в частности, от рассмотрения наиболее сложных контуров, описанных в предыдущем параграфе.

Контур в пространстве задан (известна высота каждой точки контура), значит, дана функция $f(Q)$, $Q \in \Gamma$. Теперь задача состоит в том, чтобы найти значения функции $u(A)$, $A \in G$, которая описывает поверхность Ω.

Ясно, что мыльная плёнка, затягивающая замкнутый проволочный контур, будет занимать положение, при котором силы натяжения уравновесятся. К сожалению, в рамках настоящей брошюры невозможно подробно рассказать, как из этих соображений получить уравнение на функцию u. Это уравнение (оно называется *уравнением Лапласа*) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Впрочем, понимание его смысла нам не потребуется. Кроме того, для функции u должно выполняться *краевое условие*

$$u(Q) = f(Q) \quad \text{для всех } Q \in \Gamma. \tag{2}$$

Таким образом, нам нужно найти функцию $u(A)$, $A \in G$, удовлетворяющую уравнению Лапласа (1) и краевому условию (2).

Заметим, что в такой постановке задачи уже нет никакой физики. Осталось уравнение (Лапласа) и равенство функций на границе плоской области. Исчезло мыло, пропала проволочка. Получилась *математическая модель.* В принципе, постановку (чисто математической) задачи (здесь — вывод уравнения (1) и равенства (2)) должен осуществлять специалист в данной области (здесь — физик), а потом её уже может решать математик (не зная ничего про раствор и проволочные контуры).

Ну и что же сделает математик? Он сначала докажет следующее утверждение.

Теорема существования и единственности. В области G (при некоторых условиях на область G и функцию f) существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничному условию (2).

Однако эта теорема — в чистом виде *теорема существования*: она не даёт ответа на вопрос, как *найти* это решение, как построить функцию u. Более того, классическое доказательство этой теоремы (мы его не приводим: оно совсем не элементарно) тоже не даёт никакого метода для практического нахождения функции $u(x, y)$.

Конечно же, многие математики, в том числе самые сильные, пытались явно выразить функцию u через уравнения, задающие границу Γ, и через явный вид функции f. Ничего не вышло. Этот труд, как обычно

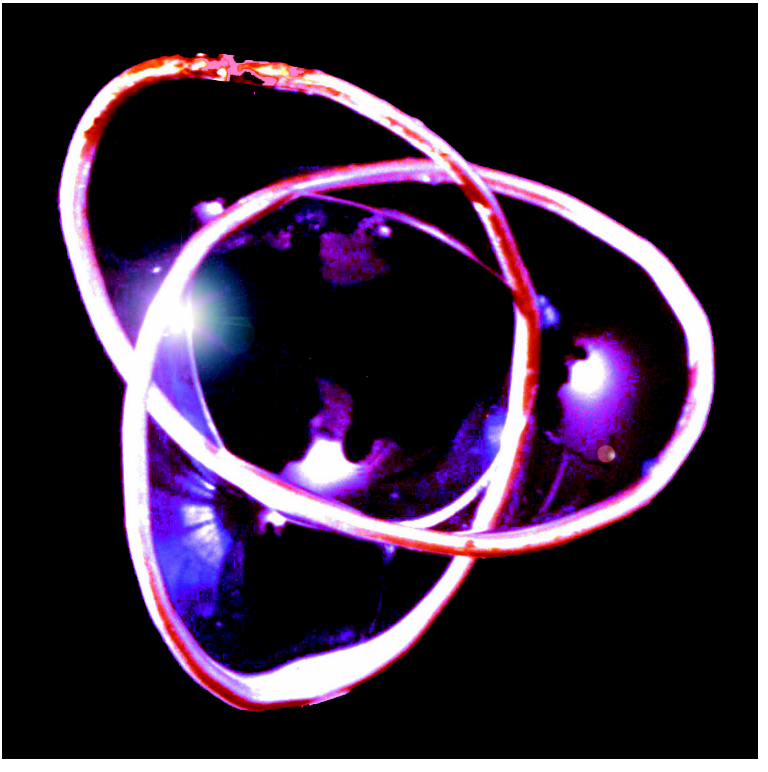

Фото 2. Мыльная плёнка на заузленной проволочке. Поверхность состоит из двух частей: «серединки» с «мыльными рёбрами» и окружающего её «пояска».

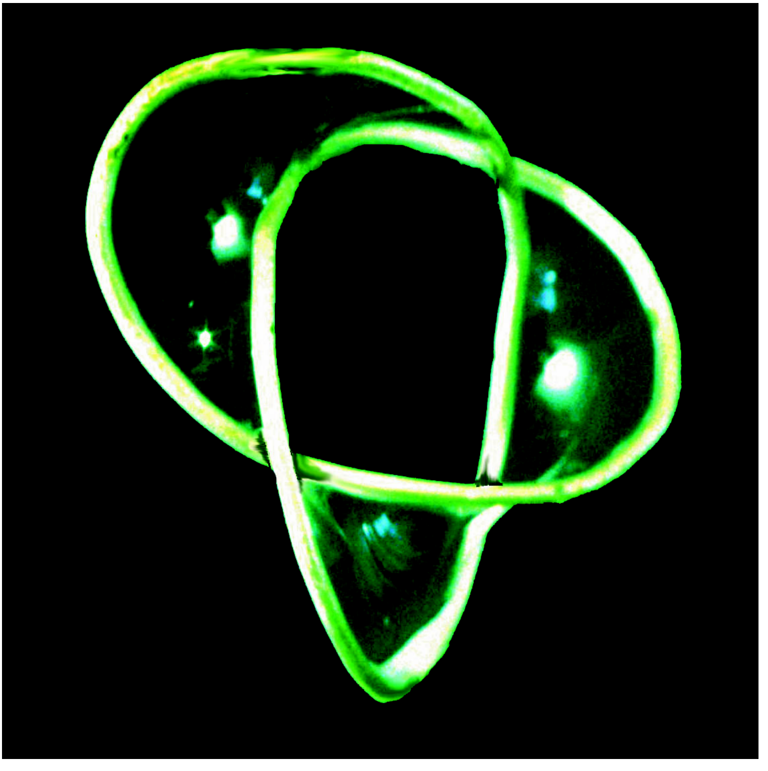

Фото 3. При протыкании «серединки» мыльной плёнки на заузленной проволочке (см. пояснение к фото 2) остаётся лишь «поясок», имеющий форму листа Мёбиуса.

бывает в науке при неудачной работе, остался за кадром. Такие ситуации часто возникают в математике, в частности в *теории дифференциальных уравнений*: известно, что есть единственное решение, а вот явно найти его (аналитически выразив через данные функции) нельзя.

Когда такого рода задача возникает на практике, вместо аналитического решения ищут *приближённое решение*, для чего меняют математическую модель.

§ 3. Дискретная модель задачи

Заменим нашу задачу *дискретной* задачей с помощью следующего стандартного приёма. Построим на плоскости координатную сетку, разбивающую плоскость на маленькие квадратики. Пусть для простоты граница Γ области G проходит по сторонам квадратиков. Будем рассматривать не все точки G и Γ, а только те из них, которые являются узловыми точками сетки (вершинами квадратиков), рис. 2.

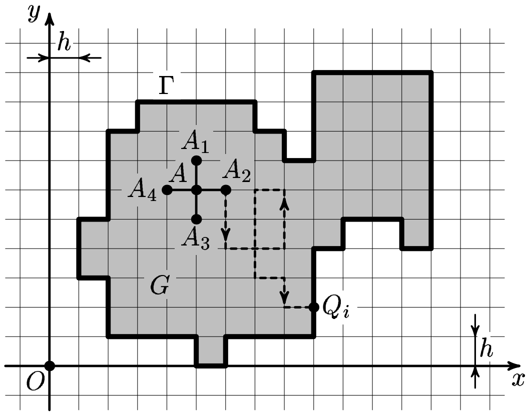

Рис. 2

Пусть Q_1, Q_2, ..., Q_m — узловые точки сетки, лежащие на ломаной Γ, и известны значения $f(Q_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Теперь задача состоит в том, чтобы найти значения функции $u(A)$ для всех узловых точек $A \in G$. (Тогда, если сетка достаточно мелкая, по значениям функции u в узлах сетки можно построить хорошее приближение значений этой функции и в остальных точках области G.)

Что же будет аналогом уравнения Лапласа в дискретном случае?

Рассмотрим вместе с точкой A четыре соседние вершины: A_1, A_2, A_3, A_4 (см. рис. 2). Физическая интуиция подсказывает, что

$$u(A) = \frac{1}{4}\big(u(A_1) + u(A_2) + u(A_3) + u(A_4)\big). \tag{3}$$

В самом деле, пусть u — функция, описывающая мыльную плёнку. Плёнка стремится уравновесить силы натяжения, и если центральная точка находится выше среднего уровня, то силы натяжения будут тянуть её вниз, а если ниже, то вверх.

Условие (2) меняется несущественно:

$$u(Q_i) = f(Q_i) \quad \text{для всех } Q_i \in \Gamma,\ 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{4}$$

Итак, мы получили новую задачу: найти функцию $u(A)$, определённую на всех узловых точках сетки, лежащих в области G (в том числе на её границе Γ), удовлетворяющую уравнению (3) для любой узловой точки $A \in G \setminus \Gamma$ и краевому условию (4). Как и раньше, для этой (чисто математической) задачи имеет место

Теорема существования и единственности. Существует единственная функция $u(A)$, удовлетворяющая уравнению (3) для любой узловой точки $A \in G \setminus \Gamma$ и граничному условию (4).

Эта теорема тоже выглядит как чистая теорема существования, однако мы сейчас продемонстрируем практический способ нахождения функции u.

§ 4. Итерационный метод

В этом параграфе мы опишем простой (легко реализуемый на компьютере) метод решения задачи о форме мыльной плёнки, натянутой на проволочный контур, точнее решения дискретного аналога этой задачи.

Напомним (см. рис. 2), что дана область G на плоскости, в которой нас интересуют только узловые точки квадратной решётки (с мелким шагом h); эти точки мы теперь будем обозначать A_i^j, где i и j — координаты точки по осям x и y соответственно; граница Γ области G, $\Gamma \subset G$, проходит по линиям решётки, и в узловых точках границы Γ известны значения функции f («высоты проволочного контура»); требуется найти функцию u («высоту мыльной плёнки»), заданную во всех

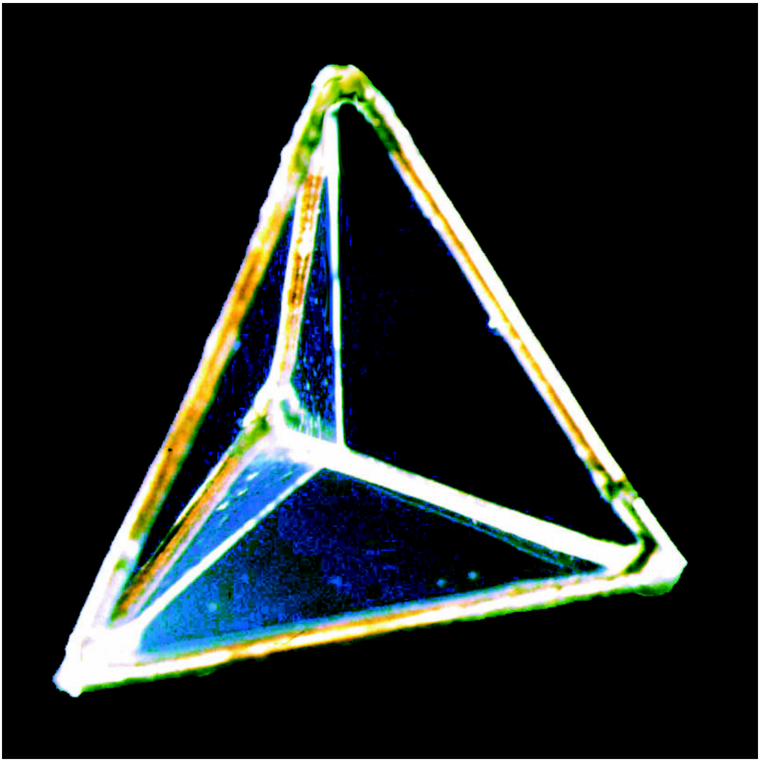

Фото 4. Мыльная плёнка на проволочном контуре в форме правильного тетраэдра.

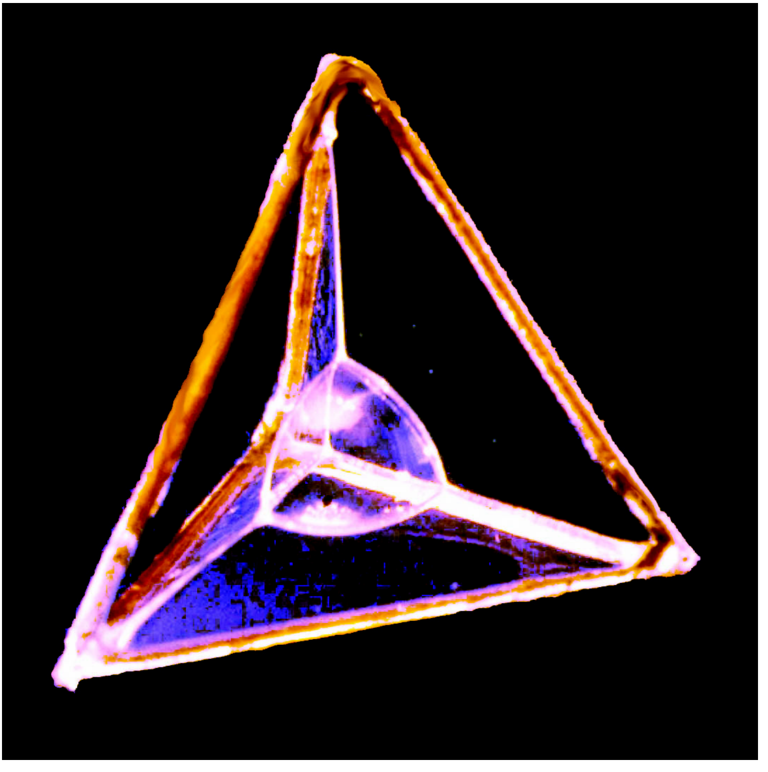

Фото 5. Другая мыльная плёнка на проволочном контуре в форме правильного тетраэдра.

узловых точках области G, такую чтобы выполнялись условия (3) и (4); эти условия мы перепишем так:

$$u(A_i^j) = \frac{1}{4}\bigl(u(A_i^{j+h}) + u(A_{i+h}^j) + u(A_i^{j-h}) + u(A_{i-h}^j)\bigr) \quad \text{для всех } A_i^j \in G \setminus \Gamma, \tag{5}$$

$$u(A_i^j) = f(A_i^j) \quad \text{для всех } A_i^j \in \Gamma. \tag{6}$$

Итерационный метод (или метод последовательных приближений) для решения этой задачи состоит в следующем. На нулевом шаге мы выбираем *нулевое приближение* u_0 к решению задачи, полагая u_0 равным f в узловых точках границы Γ и присваивая u_0 произвольные значения (например нулевые) в других узловых точках G.

На первом шаге мы находим *первое приближение* u_1, по-прежнему полагая $u_1 = f$ в узловых точках границы Γ, а в остальных точках области G *усредняем* значения u_0, чтобы получить u_1, т. е. полагаем

$$u_1(A_i^j) := \frac{1}{4}\bigl(u_0(A_i^{j+h})+u_0(A_{i+h}^j)+u_0(A_i^{j-h})+u_0(A_{i-h}^j)\bigr)$$

для всех точек $A_i^j \in G$, не лежащих на границе Γ.

Второе приближение u_2 получается аналогично: полагаем $u_2 = f$ на Γ и, усредняя u_1, получаем u_2 в остальных точках G.

Далее продолжаем по индукции. Если построено *n-е приближение* u_n, то следующее приближение u_{n+1} строится как и ранее: полагаем $u_{n+1} = f$ на Γ, в остальных точках G полагаем

$$u_{n+1}(A_i^j) := \frac{1}{4}\bigl(u_n(A_i^{j+h})+u_n(A_{i+h}^j)+u_n(A_i^{j-h})+u_n(A_{i-h}^j)\bigr).$$

Оказывается, что *этот итерационный процесс всегда сходится к решению задачи* (5), (6), независимо от выбора нулевого приближения. Это значит, что для любой заданной точности $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого шага N, все значения $u_n(A_i^j)$, $n > N$, отличаются друг от друга (для фиксированной точки $A_i^j \in G$) меньше чем на ε; при этом, если положить $u = u_N$ при достаточно большом N, равенства (5) и (6) будут выполняться с любой точностью.

Практически, описанный выше процесс легко запрограммировать на компьютере и даже на (хорошем) программируемом калькуляторе.

При этом после небольшого числа N итераций (шагов) происходит *стабилизация* значений $\{u_n(A_i^j)\}$, т. е. при любых фиксированных (i, j) соответствующие значения $u_n(A_i^j)$, $n > N$, выдаваемые компьютером, перестают меняться. (Это связано с тем, что компьютер *округляет* результат, начиная с некоторого места после запятой в десятичной записи результата.)

Теоретически, можно доказать, что при определённых условиях на область G и на функцию f решение задачи (5), (6), полученное таким образом, будет с заданной точностью *аппроксимировать* решение исходной задачи (1), (2), если только шаг h выбран достаточно маленьким.

К сожалению, оба эти утверждения (о стабилизации итерационного метода к решению задачи (5), (6) и об аппроксимации решения исходной задачи о мыльной плёнке (1), (2) решением дискретной задачи (5), (6)) доказать не так просто. Во всяком случае, их доказательства выходят за рамки этой брошюры. Однако мы сейчас рассмотрим другой практически реализуемый метод решения задачи (5), (6), справедливость которого мы сможем установить вполне элементарными средствами.

§ 5. Блуждания пьяницы

Представим, что G — это город, улицами которого являются линии сетки. Вокруг города, вдоль границы Γ, вырыта глубокая канава. В произвольный перекрёсток A поставим испытуемого — пьяницу. Допустим, он пьян настолько, что направление своего движения выбирает случайно, т. е. на любом перекрёстке с равной вероятностью может пойти в любую сторону, в том числе и назад, независимо от того, как он двигался раньше. Блуждая по городу, он в некоторый момент выходит на границу (попадает в точку $Q_i \in \Gamma$) и падает в канаву. Тут к нему подбегает милиционер и требует штраф в размере $f(Q_i)$.

Блуждания пьяницы легко смоделировать на компьютере. Для этого нужен только *датчик случайных чисел*: каждый раз, попав в очередной узел, мы должны с равной вероятностью выбрать направление движения: на север, на юг, на запад или на восток, т. е. компьютер должен «случайно» каждый раз выдавать (с равной вероятностью 1/4) одну из четырёх букв С, Ю, З, В, кодирующих эти направления. Можно с большой скоростью провести огромное количество таких испытаний.

Определим величину $v(A)$ для любой узловой точки (перекрёстка) $A \in G$ следующим образом. Проведём достаточно много испытаний, в каждом из которых пьяница начинает свой путь в этой точке A,

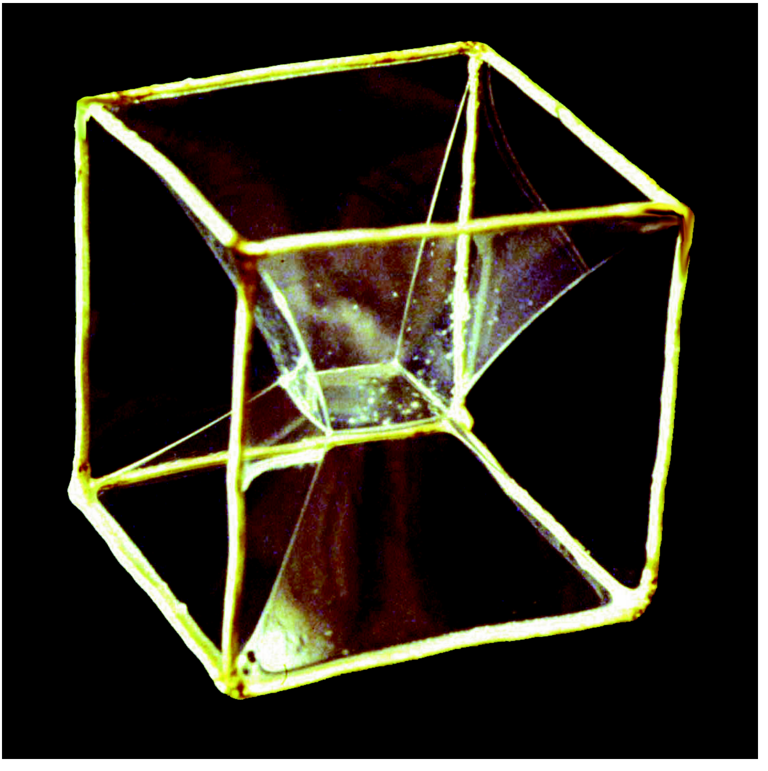

Фото 6. Мыльная плёнка на каркасе, имеющем форму куба.

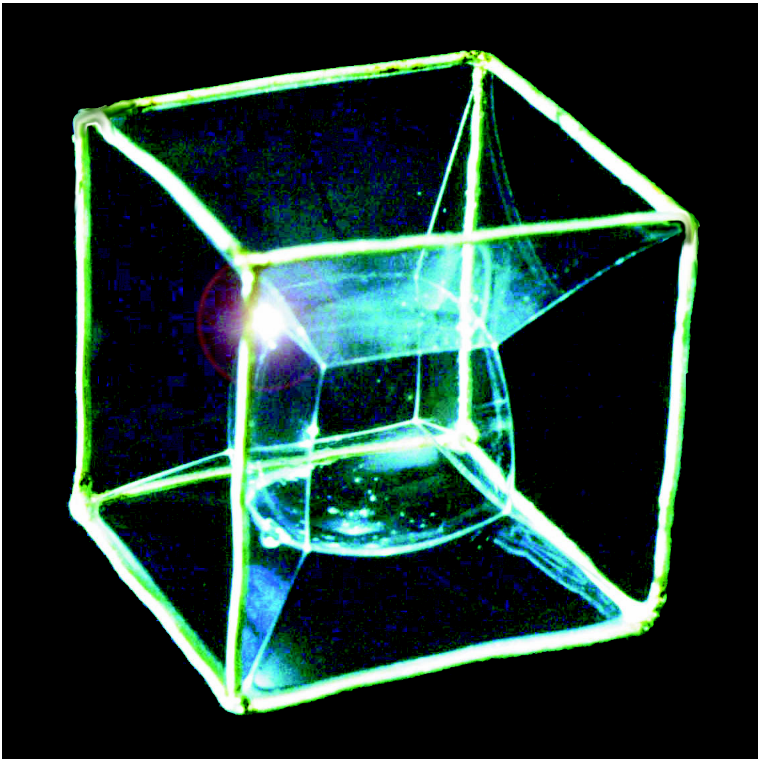

Фото 7. Другая мыльная плёнка на каркасе в форме куба.

в некоторый момент попадает в канаву*) и платит штраф $f(Q_i)$, зависящий от конечной точки Q_i пути. Среднюю величину штрафа, выплаченного при этих испытаниях, обозначим $v(A)$.

Удивительный факт состоит в том, что функция «среднего штрафа» совпадает с функцией, описывающей поверхность мыльной плёнки, т. е. имеет место следующая

Основная теорема. $v(A) = u(A)$ для всех узловых точек $A \in G$.

Таким образом, высота мыльной плёнки $u(A)$ в узловой точке сетки A равна среднему штрафу, который нужно платить при случайном блуждании по сетке, начиная от точки A.

Для доказательства этого факта, в силу дискретного варианта теоремы существования и единственности, нужно проверить следующие два утверждения:

а) функция v удовлетворяет уравнению (3) для всех узловых точек $A \in G \setminus \Gamma$;

б) функция v удовлетворяет условию (4).

Тогда, в силу единственности такой функции (см. §3), $v \equiv u$. Проверку этих двух утверждений мы оформим в виде двух лемм.

Лемма 1. Для любой узловой точки $A \in G \setminus \Gamma$ и соседних с ней узловых точек A_1, A_2, A_3 и A_4 выполнено равенство

$$v(A) = \frac{1}{4}\big(v(A_1) + v(A_2) + v(A_3) + v(A_4)\big).$$

Доказательство. Проведём N испытаний (N достаточно велико), в которых путь испытуемого начинается в точке A. Пусть n_1 раз этот путь закончился в точке Q_1, n_2 раз — в точке Q_2, …, n_m раз — в точке Q_m, где $Q_i \in \Gamma$, $1 \leqslant i \leqslant m$, и $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = N$. Тогда

$$P(A, Q_i) \approx \frac{n_i}{N}, \tag{7}$$

где $P(A, Q_i)$ — вероятность прийти из точки A в точку Q_i. Чем больше число N, тем точнее это приближённое равенство.

Из точки A испытуемый может с вероятностью $1/4$ пойти в любую из точек A_1, A_2, A_3, A_4, поэтому для всех $1 \leqslant i \leqslant m$

$$P(A, Q_i) = \frac{1}{4}\big(P(A_1, Q_i) + P(A_2, Q_i) + P(A_3, Q_i) + P(A_4, Q_i)\big). \tag{8}$$

*) Вероятность того, что пьяница будет блуждать по городу, никогда не выходя на границу, равна 0.

Пусть в k-м испытании пьяница приходит в некоторую точку Q_{i_k}. Тогда, по определению среднего штрафа $v(A)$,

$$v(A) = \frac{f(Q_{i_1}) + f(Q_{i_2}) + \ldots + f(Q_{i_N})}{N}. \tag{9}$$

Среди точек Q_{i_l}, $1 \leqslant l \leqslant N$, многие, разумеется, совпадают. Пусть в сумме, стоящей в числителе, величина $f(Q_i)$ встречается n_i раз, $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда её можно переписать в виде

$$v(A) = \frac{n_1 f(Q_1) + n_2 f(Q_2) + \ldots + n_m f(Q_m)}{N}.$$

Будем считать N настолько большим, что приближённое равенство (7) является точным. Пользуясь (7) и (8), получаем:

$$v(A) = \sum_{i=1}^{m} P(A, Q_i) f(Q_i) = \sum_{i=1}^{m} f(Q_i) \cdot \frac{1}{4} \Big(\sum_{j=1}^{4} P(A_j, Q_i) \Big) =$$
$$= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} \Big(\sum_{i=1}^{m} P(A_j, Q_i) f(Q_i) \Big) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} v(A_j). \qquad \square$$

| **Лемма 2.** $v(Q_i) = f(Q_i)$ для всех $Q_i \in \Gamma$.

Доказательство. Если пьяница находится в точке $Q_i \in \Gamma$, то он уже в канаве и должен заплатить штраф $f(Q_i)$. $\square$

Из этих двух лемм сразу вытекает утверждение теоремы.*)

Конечно, проведённые здесь рассуждения не являются вполне строгими: в них мы, в частности, позволили себе работать с приближёнными равенствами как с точными.

Метод, с помощью которого мы решили дискретную задачу (3), (4), на самом деле является весьма общим и называется *методом статистических испытаний* или *методом Монте-Карло* (второе название связано с тем, что самые знаменитые в Европе игорные дома находятся в Монте-Карло, расположенном в карликовом государстве Монако).

Естественно спросить, является ли метод Монте-Карло более эффективным для решения задачи (3), (4), чем итерационный метод, описанный в §4. Ответ зависит от постановки задачи: если речь идёт

*) Последнее равенство в доказательстве леммы 1 для граничных точек A_j остаётся верным в силу леммы 2.

об определении значений функции $u(A)$ в одной точке (или в небольшом количестве точек), метод Монте-Карло работает быстрее, если же нужно построить $u(A)$ во всех точках, итерационный метод оказывается намного выгоднее.

Однако при сравнении двух методов (§§ 4 и 5) самое интересное, наверное, не это. Решая задачу (3), (4), мы в первом случае (§ 4) исходили из того, что неизвестная функция $u(A)$ является *высотой мыльной плёнки*, а во втором (§ 5) неизвестная функция $v(A)$ была *средним штрафом* (более научное название — *математическое ожидание случайной величины*). Непостижимым образом эти две функции, между которыми по смыслу нет ничего общего, оказались *тождественно равны* между собой!

Напрашивается вопрос: о чём же тогда задача (3), (4) — о плёнках? о штрафах? А может быть, о чём-то другом? Повременим с ответом: у нашей задачи есть ещё одна неожиданная сторона.

§ 6. Минимальные поверхности

Пусть $u(A)$ — функция, заданная в узловых точках области G, удовлетворяющая краевому условию (4), но не обязательно удовлетворяющая уравнению (3). Разобьём все квадратики нашей сетки на прямоугольные равнобедренные треугольники диагоналями, параллельными прямой $x = y$. Если $A_1A_2A_3$ — такой треугольничек, построим в пространстве треугольник с вершинами $\bigl(A_1, u(A_1)\bigr)$, $\bigl(A_2, u(A_2)\bigr)$,

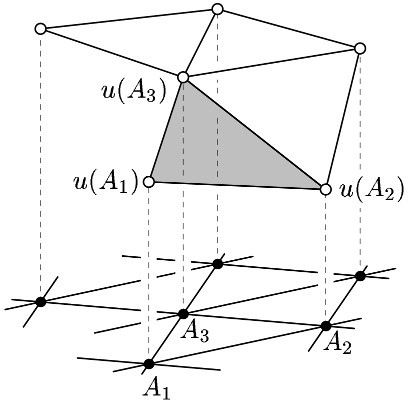

Рис. 3. Триангулированная поверхность

$(A_3, u(A_3))$, как показано на рис. 3. Если проделать это со всеми треугольниками из области G, мы получим *триангулированную* поверхность, натянутую на пространственный контур, заданный функцией $f(Q_i)$, $Q_i \in \Gamma$ (напомним, что Γ проходит по линиям сетки). У этой поверхности есть площадь, которую мы обозначим через $S(u)$.

Теорема о минимальной поверхности. Для функции $u(A)$, удовлетворяющей краевому условию (4), выполняется условие (3) тогда и только тогда, когда площадь $S(u)$ минимальна.

Мы не будем останавливаться на (не очень сложном) доказательстве этой теоремы.

Теорема о минимальной поверхности нам интересна в первую очередь потому, что она даёт *третью интерпретацию* нашей дискретной задачи: её решением является функция $u_{\min}(A)$, для которой площадь $S(u_{\min})$ является минимальной. Таким образом,

$$\begin{array}{ccccc} u(A) & \equiv & v(A) & \equiv & u_{\min}(A), \\ \begin{pmatrix}\text{мыльная}\\ \text{плёнка}\end{pmatrix} & \sim & \begin{pmatrix}\text{средний}\\ \text{штраф}\end{pmatrix} & \sim & \begin{pmatrix}\text{минимальная}\\ \text{площадь}\end{pmatrix}. \end{array}$$

Но у теоремы о минимальной поверхности есть и другой аспект — прикладной. Представьте себе, что строится крытый стадион, в плане имеющий овальную форму, высота стен которого разная в разных точках (рис. 4). У этого стадиона должна быть спроектирована крыша, при этом нужно минимизировать затраты на кровельный материал. Чтобы этого достигнуть, крыша должна иметь *минимальную площадь*.

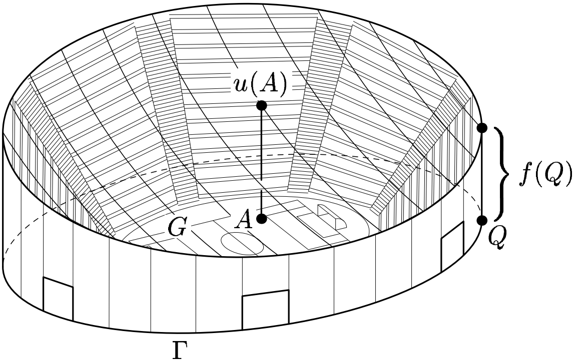

Рис. 4. Крытый стадион

Названная теорема даёт практический способ решения этой задачи; для этого нужно вычислить функцию $u_{\min}$ на достаточно мелкой сетке, что можно сделать с помощью двух простых вычислительных алгоритмов: найти $u_{\min}(A) = u(A)$ итерационным методом (§ 4) или же вычислить $u_{\min}(A) = v(A)$ методом Монте-Карло (§ 5).

Подведём некоторый итог. Мы начали с экспериментов с мыльными плёнками, превратили задачу о форме мыльной плёнки (§ 1) в чисто математическую задачу о решении уравнения Лапласа (1) с краевым условием (2). Эту задачу, несмотря на теорему существования и единственности (§ 2), не удалось решить практически, поэтому непрерывная задача (1), (2) была заменена на её дискретный аналог (3), (4) в § 3. Затем были описаны два практических алгоритма для решения дискретной задачи (§§ 4, 5). Наконец мы узнали, что эта задача также совпадает с задачей о минимальной площади.

Не следует, однако, думать, что исторически эти задачи возникали и решались в указанной нами последовательности.

§ 7. А что было на самом деле?

На самом деле всё было не так. Уравнение (1) было впервые выписано французским математиком П. С. Лапласом (1749–1827) в конце XVIII столетия безотносительно к каким-либо мыльным плёнкам. Краевая задача (2) была поставлена немецким учёным П. Г. Дирихле (1805–1859) уже в середине XIX века, притом не только для уравнения Лапласа, а для любых *уравнений с частными производными*.

Идея замены непрерывного уравнения (1) дискретным уравнением (3) стала активно эксплуатироваться в XX веке, по мере развития *метода конечных разностей* для приближённого решения дифференциальных уравнений, в частности в работах немецко-американского математика Р. Куранта (1888–1972). (Однако, кто именно первым написал дискретное уравнение (3), я не знаю.)

Значительно раньше этого, ещё в XIX веке, математики подробно исследовали свойства непрерывного уравнения (1); его решения были названы *гармоническими функциями*, и среди их многочисленных (и очень красивых) свойств было установлено *свойство минимальной площади* (не в дискретном варианте, описанном в § 6, а в более естественном, с площадью гладкой поверхности).

Что же касается задачи о случайных блужданиях и её связи с задачей о мыльной плёнке, она тоже впервые возникла не в дискретной, а в непрерывной ситуации в работах нашего соотечественника И. Г. Петровского (1901–1973). Дискретный же вариант этой связи был получен позже (кем именно, я не знаю). На непрерывном варианте замечательной теоремы Петровского, из которой возникла основная теорема из §5, здесь не было возможности остановиться: для понимания одной только формулировки требуются далеко идущие и совсем не элементарные познания.

Таким образом, последовательность изложения основных математических идей этой брошюры совсем не связана с хронологией их реального открытия. Это не удивительно. Ведь наше изложение подчиняется внутренней логике, в то время как никакой логики в сроках появления великих математических открытий не бывает. Математические открытия не более предсказуемы, чем великие произведения архитектуры, музыки или литературы.

§ 8. Заключение

Вернёмся к вопросам, поставленным в самом начале нашего рассказа, — о работе математиков и о предмете их науки.

Мне думается, что деление математиков на прикладников и теоретиков, хотя часто является организационной реалией, неправомерно, порой даже вредно, а когда речь идёт о крупнейших математиках — совершенно искажает суть высокого математического творчества. Вот иллюстрация.

Английский учёный Г. Х. Харди (1877–1947), считавшийся при жизни одним из лучших математиков своего времени, очень кичился тем, что он «совсем чистый» математик. Он является автором книги для школьников, названной им «Курсом чистой математики» (вышедшей на русском языке в 1949 году). В одной популярной статье он даже написал, что гордится полной бесполезностью всех своих математических открытий. Но с этим высказыванием ему не повезло: бóльшая часть его чисто математических открытий была впоследствии переоткрыта, и его вклад в них во многом забыт, но одно его открытие (относящееся к «чистой» аналитической теории чисел), носящее сегодня название *закон Харди—Вайнберга*, осталось навсегда в науке. Ибо это один из основных законов... молекулярной биологии!

Мне посчастливилось слышать мнение величайшего русского математика XX века А. Н. Колмогорова по этим вопросам. Он говорил, что *не существует никакой прикладной математики, математика едина*, просто разные её разделы в большей или меньшей степени в данный момент используются на практике. Что же касается самих математиков, то они бывают *плохие* и *настоящие*. Решив практическую задачу, настоящий математик (в отличие от плохого) никогда на этом не остановится, он обязательно будет смотреть, в каких других задачах его метод решения работает, попробует обобщить метод решения (для чего ему могут понадобиться новые понятия, новые теоремы) *и тем самым обогатит математическую теорию*. Но математик не обязан начинать с практических задач, он может работать в «чистой» математике, рождая новую абстрактную теорию, как говорят, на кончике пера. И если он настоящий математик, эта теория будет содержать по-настоящему новые идеи и *рано или поздно она окажется востребованной*, даже если автор, как Харди, к этому не стремился. Плохой же математик тоже может создать абстрактную теорию, но интерес к ней (даже если она сначала в центре внимания коллег) его не переживёт, и его труды будут лежать в научных библиотеках, никем не востребованные, и покрываться толстым слоем пыли.

Ну и в заключение несколько слов о предмете математики. Кратко можно сказать, что *математика занимается ничем и чем угодно*. Ничем — потому что у неё нет предмета, она имеет дело с несуществующими в реальном мире абстракциями. Чем угодно — потому что заранее не известно, в какое реальное платье будет одет каркас её абстрактных структур. Порой оказывается, что эти разные обличья математических абстракций внешне совершенно не похожи, и это (по крайне мере во мне) вызывает чувство восторженного удивления. Возможно потому, что тогда приоткрывается завеса над таинственным единством всего сущего.