Первое знакомство с классом

А.Н. Андреева

учитель математики школы №91

Когда я прихожу первый раз в новый класс, меня естественно интересует вопрос: с кем мне предстоит работать? Какова реакция детей, каков их интерес к предмету, какова их наблюдательность. Первый урок я посвящаю очень простым занимательным задачам и смотрю на глаза детей.

Вот образцы задач и вопросов первого урока.

Задача 1. Как подсчитать число ступенек эскалатора?

Ответ, который дают сразу несколько детей: на ступеньках есть номера (через каждую пятерку) и надо только дождаться когда появятся ступеньки с начальными номерами и посмотреть самое большое число перед ним. Причем я тоже не знаю другого решения этого вопроса, и не стесняюсь сказать им об этом.

Задача 2. Найти тройку натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению $28x + 30y + 31z = 365$.

Замечание: реакция всех детей вначале (особенно пятиклашек): мы не умеем решать уравнения с тремя неизвестными.

И вдруг кто-то видит идею: 365 — это число дней в году, а числа 28, 30, 31 — это число дней в разных месяцах. И сразу находится ответ. Ясно, что $x = 1$ — это соответствует февралю. Считаем месяца по 30 дней (апрель, июнь, сентябрь, ноябрь) и получаем $y = 4$. Окончательно, $z = 7$, что соответствует оставшимся месяцам: январь, март, май, июль, август, октябрь и ноябрь. На этом с «пятиклашками» и «шестиклашками» задачу считаем решенной.

Если работаем с учениками старших классов, то имеет смысл сразу говорить и приучать их к аккуратности. Да, мы получили один ответ подбором, но их может быть несколько. Если ответ угадан подбором, то надо доказать, что мы угадали все решения, чтобы считать задачу полностью решенной.

Решение: во-первых, докажем, что переменные удовлетворяют еще одному уравнению: $x+y+z = 12$ (идея подсказана числами, связанными с числом дней в году и числом дней в месяце). Докажем это, используя метод от противного. Допустим, что $x+y+z \neq 12$, тогда возможно два случая: или $x+y+z > 12$, или $x + y + z < 12$. Если учесть, что искомые числа натуральные, то эти условия можно записать более точно следующим образом: $x + y + z \geq 13$ или $x + y + z \leq 11$. Рассмотрим случай, когда сумма не меньше 13. Запишем соотношения $28x + 30y + 31z > 28x + 28y + 31z > 28x + 28y + 28z = 28(x + y + z) \geq 28 \cdot 13 = 364$. Между левой и правой частью неравенства стоит два строгих неравенства, следовательно, $28x + 30y + 31z \geq 366 > 365$. Получили противоречие.

Рассмотрим случай, когда сумма не больше 11. Тогда $28x+30y+31z < 31x+31y+31z = 31(x+y+z) \leq 31 \cdot 11 = 361 < 365$, следовательно, и в этом случае получаем противоречие. Обратите внимание, что мы существенно использовали числа 13 и 11, и более грубые оценки не дали бы результата. Итак, мы получили, что натуральные искомые числа удовлетворяют на самом деле системе (второе условие мы вначале угадали, исходя из «житейских» соображений, а потом его доказали):

$$\begin{cases} 28x + 30y + 31z = 365, \\ x + y + z = 12 \end{cases}$$

Умножая второе уравнение на 28, и вычитая из первого уравнения, получим равносильную систему

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 2y + 3z = 29, \\ x + y + z = 12 \end{cases}$$

Система из двух уравнений с тремя переменными. Будем решать подбором, постараемся, это сделать как можно проще, Из первого уравнения следует, что z нечетное число и $z \leq 9$. При $z = 9$, получим $y = 1$ и $x = 2$. Если $z = 7$, то $y = 4$ и $x = 1$. При $z = 5$, получаем $y = 7$ и $x = 0$, что не является решением, так как 0 не натуральное число. Если же $z = 3$ или $z = 1$, то получим, что $x < 0$, то есть не является натуральным числом.

Ответ: $(1, 4, 7)$; $(2, 1, 9)$.

Задумаемся над вопросами: такая задача единственная в своем роде или мы можем придумать похожую. Кто составляет задачи? Или все задачи имеют тысячелетнюю историю? Или только «боги горшки обжигают»? Оказывается, наши современники — математики, и не только математики, придумывают задачи. Предлагаю детям придумать аналогичную задачу, и почти тут же получаю ответ: *найти тройку натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению* $29x + 30y + 31z = 366$. Дети вспомнили о високосном годе.

Так можно говорить, обыгрывать и обобщать почти любую задачу.

В следующей задаче я описываю случай, который произошел со мной.

Задача 3. Подходя к дому и думая, что на этаже шесть квартир, я подсчитала, что мне надо быть на четвертом этаже. Когда я поднялась, то оказалось, что на этаже семь квартир, но этаж я выбрала верно. В какую квартиру я шла?

Решение. Если бы на этаже было бы по шесть квартир, то на четвертом этаже были бы квартиры с номерами 19, 20, 21, 22, 23 и 24. Если бы на этаже было бы по семь квартир, то на четвертом этаже были бы квартиры с номерами 22, 23, 24, 25, 26, 27 и 28. Следовательно, я могла идти в квартиру с номером 22, или 23, или 24.

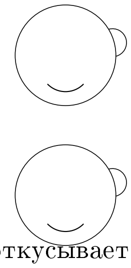
Задумаемся над вопросом: А если ли этаж, на котором только одна квартира удовлетворяет условию?

Да, такой этаж есть. Это шестой этаж. Если бы на этаже было бы по шесть квартир, то на шестом этаже были бы квартиры с номерами 31, 32, 33, 34, 35 и 36. Если бы на этаже было бы по семь квартир, то на шестом этаже были бы квартиры с номерами 36, 37, 38, 39, 40, 41 и 42. Условию удовлетворяет квартира с номером 36.

Даже по такой простой задаче можно придумать еще вопросы.

Вот пример задачи, в которой трудно найти решение, хотя решение и легко понять.

Задача 4. Два друга стоят на балконах, друг под другом. Они одновременно вскрикнули, кто раньше услышит другого? Предполагаем, что звук во все стороны распространяется равномерно.



Подсказка. После того как дети долго думают, можно предложить нарисовать чертеж. Эта подсказка их очень удивляет. Они пробуют зачем-то рисовать балконы, волосы друзей и много что другое, хотя достаточно нарисовать простую схему, из которой ясно, что нижний услышит друга быстрее, так как расстояние ото рта верхнего до его ушей меньше, чем расстояние от его рта до ушей верхнего.

Уже в шестом классе, где дети знают пропорции, можно впервые детям дать задачу на бесконечные суммы.

Задача 5. Мама с сыном едят шоколадку. Сын откусывает половину и отдает маме, мама откусывает половину остатка и передает сыну и так далее. Какую часть шоколадки съест сын?

Замечание. Приведен пример задачи, где математическая модель — пример бесконечного процесса — заведомо отличается от жизненной ситуации.

Решение. Почти сразу дети записывают две бесконечные суммы $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\dots$ — это часть шоколадки, съеденная сыном и $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\dots$ — часть шоколадки, съеденная мамой. Затем почти все дети сразу замечают, что каждое слагаемое в первой сумме в два раза больше соответствующего слагаемого во второй сумме, следовательно, шоколадка съедена в отношении $2:1$. И тогда получаем равенство $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\dots=\frac{2}{3}$.

Ответ: сын съест $\frac{2}{3}$ шоколадки.

Цель таких уроков:

- знакомство с классом;
- заинтересовать математикой учеников; заманить детей в мир математики, а затем уже играть с ними в серьезную математику;
- показать детям, что математика не застывшая наука и жизнь ставит свои задачи;
- самое главное — это научить детей думать, видеть разные закономерности;
- как можно раньше приучать детей к занимательным задачам;
- решая занимательные задачи, нужно обязательно подчеркивать, что знание основ математики обязательно;

Я не предлагаю задачи для самостоятельного решения, как это было принято раньше. Я назову сайт в Интернете, где таких задач тысячи: *www.mccme.ru* — это сайт Московского центра непрерывного математического образования.