Применение программы «Живая геометрия»

А.Н. Андреева, А.А. Волкова

Покажем примеры того, как можно использовать эту программы на уроках и во внеклассной деятельности.

Проиллюстрируем некоторые известные задачи по темы «Площади».

Задача 1. Докажите, что треугольники с общим основанием и вершиной на прямой, параллельной основанию, равновелики.

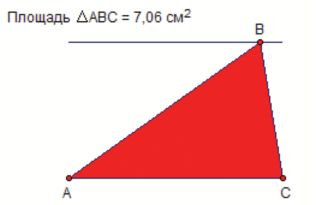

Рис. 1а

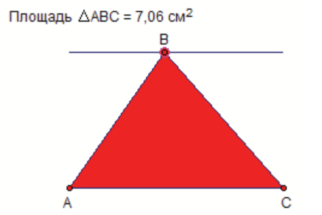

Рис. 1б

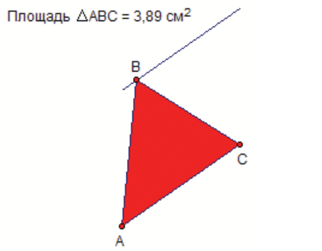

Рис. 1в

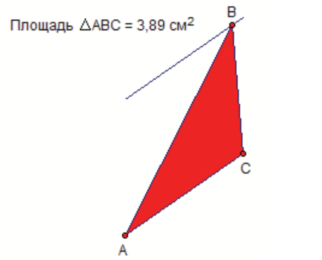

Рис. 1г

Используя программу «Живая геометрия», можно двигать на экране вершину треугольника по заданной прямой и следить за тем, что площадь не меняется (см. рис. 1а–б). Затем можно двигать любую из вершин основания и следить за изменением площади (см. рис. 1в–г).

Можно заранее не формулировать утверждение, а предложить учащимся сделать это самостоятельно после проделанных операций.

Задача 2. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ взята произвольная точка K и соединена с точками ... площа... ощади параллелограмма.

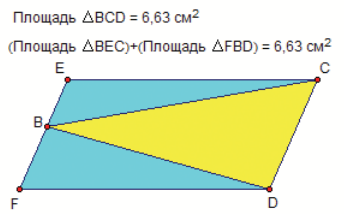

Рис. 2а

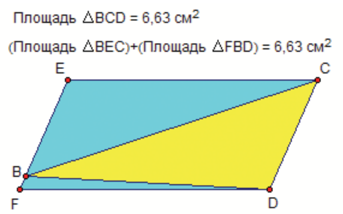

Рис. 2б

Включая анимацию точки K по AB (см. рис. 2а–б), можно наглядно убедиться, что отношение площадей не меняется.

Задача 3. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята произвольная точка M. Докажите, что сумма площадей треугольников AMD и BCM равна сумме площадей треугольников AMB и DMC.

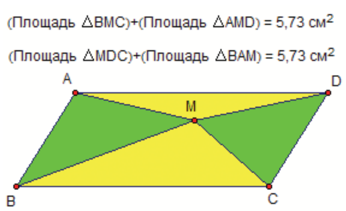

Рис. 3а

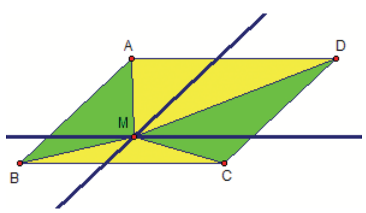

Рис. 3б

Включая анимацию точки M (см. рис. 3а), можно убедиться в верности доказываемого утверждения; а дополнительные построения на рис. 3б помогают строго доказать утверждение.

Задача 4. В трапеции проведены диагонали. Докажите, что площади треугольников, содержащих боковые стороны трапеции, равны.

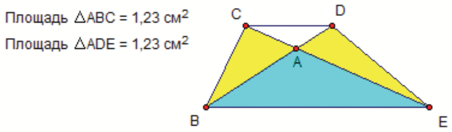

Рис. 4

Равновеликие треугольники BCE и BDE, изображенные на рис. 4, имеют общую часть — треугольник BAE (смотри задачу 1), отсюда следует нужное утверждение.

Рассмотрим примеры применения «Живой геометрии» на внеклассных занятиях.

Задача 5. Стороны произвольного треугольника разделены на три равные части и точки деления соединены с противоположными вершинами треугольника. Найти отношение площади треугольника к площади получившегося внутреннего шестиугольника.

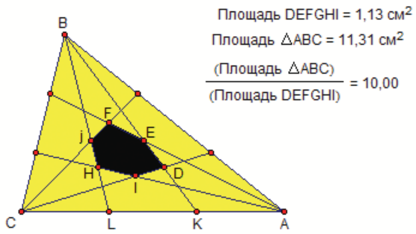

Рис. 5

Ресурсы программы позволяют убедиться, что это отношение остается неизменным для любого треугольника и равно 10. Попробуйте это доказать.

Задача 6. Дан параллелограмм $KLMN$, у которого $KL = 8$, $KN = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ и $\angle LKN = 45°$. На стороне KL взята такая точка A, что $KA : AL = 3 : 1$. Через точку A параллельно LM проведена прямая, на которой внутри параллелограмма выбрана точка B. На стороне KN выбрана точка C так, что $KC = AB$. Прямые LC и MB пересекаются в точке D. Найдите величину угла LAD.

Обдумываем условие. Читая внимательно условие задачи, обратим внимание на то, что точка B — произвольная точка на отрезке AF параллельном LM. Означает ли это, что величина угла LAD не зависит от положения точки B? Если да, то точка D принадлежит некоторой фиксированной прямой. Какой? Рассмотрим "крайние" положения точки B. Если точку B совместить с точкой A, то мы не получим угла, так как в этом случае точка D совпадет с точкой A. Интереснее совместить точки B и F, тогда MB совпадет с MN, LC совпадет с LN, а тогда точка D совпадет с точкой N. Делаем предположение, что точка D находится на прямой AN.

Теперь займемся анимацией точки B (см. рис. 6а–б) и действительно увидим, что D перемещается по прямой AN. Интересно отметить еще, что если анимировать точку M, то есть заставить ее двигаться, то, по-прежнему точка D двигается по прямой AN.

Интересен вопрос, что же остается неизменным при указанной анимации точки B? Это выбор точки A, то есть пропорция $KA : AL$ и острый угол параллелограмма.

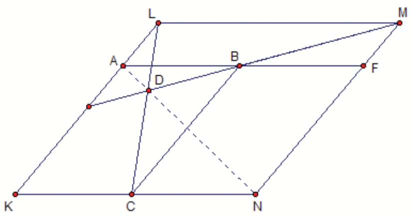

Рис. 6а

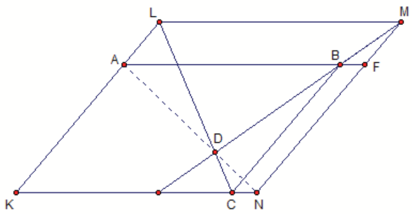

Рис. 6б

С помощью "Живой геометрии" мы сделали вывод, что точка D принадлежит отрезку AN (следовательно, надо найти угол LAD, равный углу $\angle LAN$, что не составляет труда), но теперь надо строго доказать этот факт, чтобы иметь право им пользоваться.

Решение. Решим эту задачу, применяя вектора.

I. Докажем вначале, что точка D принадлежит отрезку AN.

1. Введем вектора $\overline{KL} = \overline{a}$, $\overline{KN} = \overline{b}$, тогда $\overline{AN} = \overline{b} - \dfrac{3}{4}\,\overline{a}$.

2. $\overline{AB} = \overline{KC} = \gamma\overline{b}$ $(0 \le \gamma \le 1)$; $\overline{LC} = \gamma\overline{b} - \overline{a}$. Пусть точка T принадлежит прямой AN, тогда $\overline{LT} = \alpha\overline{LC} = \alpha(\gamma\overline{b} - \overline{a})$; $\overline{MT} = \overline{ML} + \overline{LT} = -\alpha\overline{a} + \overline{b}(\alpha\gamma - 1)$. Также, $\overline{MB} = \overline{ML} + \overline{LT} = -\dfrac{1}{4}\overline{a} + \overline{b}(\gamma - 1)$.

3. Подберем α так, чтобы MB была параллельна MT (если это возможно). Используя пропорциональность соответствующих коэффициентов, получим $\alpha = \dfrac{1}{4 - 3\gamma}$.

4. Поскольку $\overline{AT} = \overline{AL} + \overline{LT} = \dfrac{\gamma}{4 - 3\gamma}(\overline{b} - \dfrac{3}{4}\overline{a}) = \dfrac{\gamma}{4 - 3\gamma}\overline{AN}$, то $\overline{AT} || \overline{AN}$, следовательно, точка T принадлежит AN, а точки T и D совпадают, так как обе являются точками пересечения прямых LC и MB.

II. Найдем нужный нам угол:

$$\cos LAN = \frac{\overline{AN} \cdot \overline{AL}}{|\overline{AN}| \cdot |\overline{AL}|} = \frac{(\overline{b} - \frac{3}{4}\,\overline{a}) \cdot \frac{\overline{a}}{4}}{\sqrt{(\overline{b} - \frac{3}{4}\,\overline{a})^2} \cdot \frac{|\overline{a}|}{4}}.$$

Осталось использовать данные задачи: $|\overline{a}| = 8$, $|\overline{b} - \dfrac{3}{4}\overline{a}| = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$, $\overline{a} \cdot \overline{b} = 8(3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cos 45^\circ$ и получить ответ $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3} - 2$ или $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\alpha = 105^\circ$.