О некоторых прямых, связанных с четырехугольником

А.Г. Мякишев

учитель математики лицея №1303

Настоящая публикация представляет собою расширенную и дополненную версию лекции, прочитанной автором на Семинаре Учителей. Сама лекция являлась попыткой ознакомить присутствующих с тем, каким образом соединенными усилиями «Железного друга» (компьютер + программа «Живая геометрия»), любознательного ученика (в данном случае в этой роли выступал учащийся 11 класса лицея №1511 Ярослав Ганин) и более-менее разбирающегося в предмете наставника можно получать новые и не всегда очевидные факты в области элементарной геометрии.

1. Предварительные замечания: вспомним классику!

Каждому любителю элементарной геометрии наверняка известны две замечательные прямые в треугольнике: прямая *Эйлера* ([3]:5.116, 5.117; [4]:444) и прямая *Нагеля* ([2]; [3]:5.79; [4]:489). На всякий случай все же напомним, что на первой из них лежат точки H (ортоцентр треугольника), M (его центроид) и O (центр описанной окружности), причем $HM : MO = 2 : 1$, а также E — центр окружности, описанной около серединного треугольника (так называемой окружности *Эйлера* или *девяти точек*). Последняя точка является серединой отрезка HO.

На второй прямой расположены точки N (точка *Нагеля*: в этой точке пересекаются прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей с противоположными сторонами; каждая из них делит периметр треугольника пополам), M (центроид треугольника) и I (центр вписанной окружности), так что $NM : MI = 2 : 1$, а также S — центр окружности, вписанной в серединный треугольник. Эту точку называют точкой *Шпикера* — она является серединой отрезка NI, и, кроме того, служит центром тяжести полого треугольника с проволочными ребрами.

И с четырехугольником связаны многие замечательные прямые. Пожалуй, возглавляет этот своеобразный «хит-парад» следующая тройка:

- прямая *Гаусса* ([3]:4.55; [4]:350), на которой расположены середины диагоналей четырехугольника, а также середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон (предполагаем, что противоположные стороны непараллельны);
- прямая *Ньютона* ([3]:6.5; [4]:541), содержащая в описанном четырехугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности (можно сказать, прямая Гаусса описанного четырехугольника: знаменательная перекличка славных имен!);
- прямая *Штейнера* ([3]:6.36; [4]:558), на которой лежат ортоцентры четырех треугольников, образованных прямыми, проходящими через противоположные стороны четырехугольника (опять же, считаем, что противоположные стороны пересекаются).

И еще один факт из серии «и звезда с звездою говорит»: прямые Гаусса и Штейнера *перпендикулярны.*

Однако совсем мало известно об аналогах прямых Эйлера и Нагеля для четырехугольника. (Во всяком случае, автору этих строк удалось обнаружить в доступных ему источниках только один: *Пусть четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность и H_a — ортоцентр треугольника BCD. Таким же образом определим точки H_b, H_c, H_d. Тогда прямые AH_a, BH_b, CH_c, DH_d пересекаются в точке H и M (центроид) является серединой OH, где O — центр описанной около четырехугольника окружности — см.* [5]).

Настоящая статья как раз и призвана в какой-то мере восполнить этот пробел.

2. Прямая Эйлера четырехугольника — аналогия первая.

Пусть P — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, M — точка пересечения прямых, соединяющих середины его противоположных сторон (центроид четырехугольника), O — точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям («квазицентр»[1] описанной окружности), H — точка пересечения прямых, соединяющих ортоцентры треугольников APD и BCP, APB и CPD («квазиортоцентр»). Тогда M — середина OH.

---

[1] Точнее бы сказать, вероятно, «квазицентр квазиописанной окружности», но звучит это уж как-то слишком тяжеловесно. А вот английское словцо «quasi-circumcenter» явно уместнее. Замечу кстати (отнюдь не являясь каким-нибудь русофобом, а скорее наоборот), что геометрическая терминология (и, возможно, математическая вообще) английским языком описывается более лаконично, чем русским. Опять же, сравним: «Circumcenter» и «Центр описанной окружности».

Доказательство: Пусть O_1 — середина AC, а O_2 — середина BD (см. рис. 1). Несложно показать, что точка M — середина отрезка O_1O_2 (понятно, что M — центр масс системы $1A$, $1B$, $1C$, $1D$. Рассмотрим подсистемы $1A$, $1C$ и $1B$, $1D$, эквивалентные подсистемам $2O_1$, $2O_2$.

Все необходимые сведения по геометрии масс, необходимые для понимания этого и некоторых последующих утверждений, можно найти в [1], [2], [3]: *глава* 14).

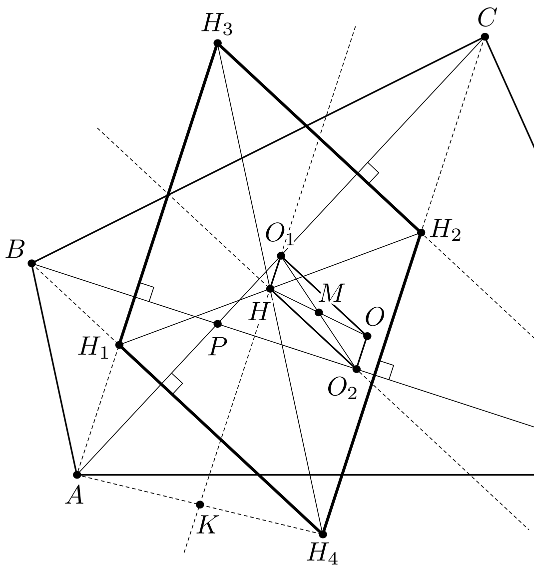

Рис. 1

Очевидно, что четырехугольник, образованный ортоцентрами, есть параллелограмм, стороны которого лежат на перпендикулярах, проведенных из вершин четырехугольника к соответствующим диагоналям. Поэтому H — точка пересечения диагоналей этого параллелограмма и делит их пополам.

Докажем, что прямая HO_1 параллельна OO_2, или, иначе говоря, перпендикулярна диагонали BD. Рассмотрим прямую, перпендикулярную этой диагонали и проходящую через H и покажем, что она проходит и через точку O_1. Пусть наша прямая пересекает отрезок AH_4 в точке K. Тогда она является средней линией в треугольнике AH_3H_4, и потому K — середина AH_4. А следовательно, наша прямая будет средней линией и в треугольнике AH_4C, и потому пройдет через O_1.

Рассуждая совершенно аналогично, убеждаемся в том, что прямая HO_2 параллельна OO_1, т. е. HO_1OO_2 — *параллелограмм*, причем M — точка пересечения его диагоналей. Отсюда следует, что точки O, M, H лежат на одной прямой, и $\dfrac{OM}{MH} = 1$.

Заметим, что задача допускает очевидное обобщение:

Пусть M — точка пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$(см. рис. 2), O — точка пересечения некоторых двух прямых, проходящих через середины диагоналей, H — точка пересечения диагоналей параллелограмма, полученного при пересечении прямых, проходящих через вершины четырехугольника, и соответственно параллельных указанным двум «серединным» прямым. Тогда M — середина OH.

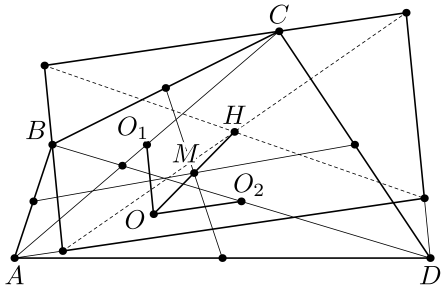

Рис. 2

Следующая прямая, являющаяся частным случаем только что построенной, была уже ранее известна ([5]).

Пусть четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность и H_a — ортоцентр треугольника BCD. Аналогично определим точки H_b, H_c, H_d. Тогда прямые AH_a, BH_b, CH_c, DH_d пересекаются в точке H, и M (центроид) является серединой OH (O — центр описанной около четырехугольника окружности).

Доказательство: Если четырехугольник вписан в окружность, то O совпадает с центром этой окружности, которая также будет описана около каждого из четырех треугольников. Пусть, например, M_a — точка пересечения медиан треугольника BCD. Несложно показать, что точка M делит отрезок AM_a в отношении $3:1$ (рассмотрим подсистемы $1A$ и $1C$, $1B$, $1D$, которые эквивалентны подсистемам $1A$, $3M_a$). С другой стороны, точки H_a, M_a, O лежат на одной прямой (*прямой Эйлера* треугольника BCD), причем $\dfrac{H_aM_a}{OM_a} = \dfrac{2}{1}$. Отсюда немедленно следует (проще всего из геометрии масс), что прямая AH_a пересекает прямую OM в такой точке H', что $\dfrac{OM}{H'M} = 1$. Из предыдущей теоремы теперь следует, что точки H' и H совпадают. Точно также доказывается, что и три другие прямые пройдут через точку H.

Описанные в этом параграфе аналоги прямой Эйлера страдают одним недостатком, бросающимся в глаза: $\dfrac{OM}{MH} = 1$ в четырехугольнике, а в треугольнике — $\dfrac{OM}{MH} = \dfrac{1}{2}$. Следующие аналогии в этом смысле будут более удачными.

3. Прямые Эйлера и Нагеля четырехугольника — аналогия вторая.

Как известно, в треугольнике центр единичных масс, помещенных в его вершины и центр тяжести всего треугольника, как однородной пластины — совпадают. В четырехугольнике это уже не так. Рассматривая центр тяжести четырехугольника, как однородной пластины, автору удалось получить еще некоторые любопытные обобщения прямых Эйлера и Нагеля на четырехугольник.

Итак, рассмотрим $ABCD$ — выпуклый четырехугольник и точку G — его центр тяжести как однородной пластины (т. е. точка пересечения двух прямых, каждая из которых соединяет центроиды треугольников, имеющих общую диагональ).

а) *Пусть около $ABCD$ можно описать окружность с центром в O. Точку H определим аналогично G, взяв вместо центроидов ортоцентры. Тогда точки H, G, O лежат на одной прямой и $HG : GO = 2 : 1$.*

б) *Оказывается, предыдущее утверждение остается справедливым и в случае произвольного четырехугольника $ABCD$, если в качестве O взять «квазицентр» описанной окружности — точку пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям.*

в) *Пусть в $ABCD$ можно вписать окружность с центром в I. Точкой Нагеля N описанного четырехугольника назовем точку пересечения двух прямых, каждая из которых проходит через точки на противоположных сторонах четырехугольника, симметричные точкам касания вписанной окружности относительно середин сторон. (Эти прямые делят периметр четырехугольника пополам). Тогда точки N, G, I лежат на одной прямой и $NG : GI = 2 : 1$.*

Доказательство: а) Пусть G_a и H_a — соответственно центроид и ортоцентр треугольника BCD (см. рис. 3). Центроиды и ортоцентры остальных трех треугольников обозначим буквами G_b, H_b, G_c, H_c, G_d, H_d. Все треугольники имеют общую описанную окружность с центром в точке O. Рассмотрев прямые Эйлера этих треугольников, заметим, что четырехугольник $G_aG_bG_cG_d$ переходит в четырехугольник $H_aH_bH_cH_d$ при гомотетии с центром в O и коэффициентом 2. Соответственные элементы должны переходить в соответственные, в частности, точки пересечения диагоналей этих четырехугольников переходят друг в друга.

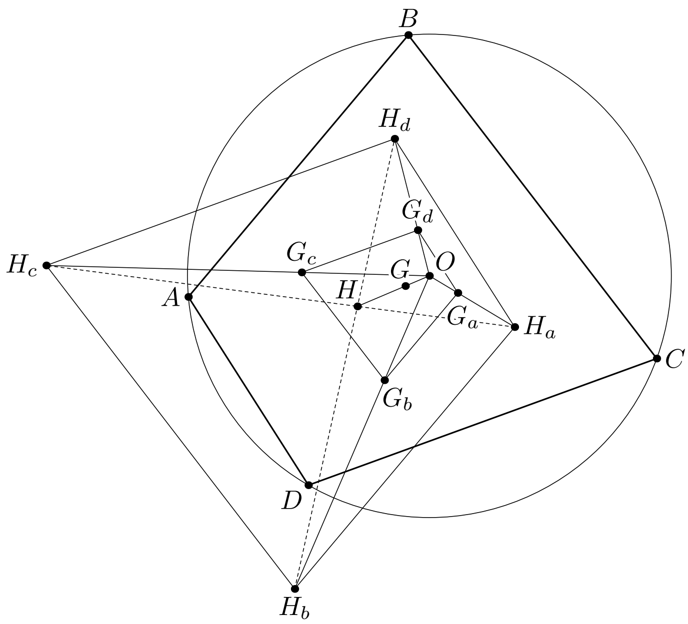

Рис. 3

б) Конструкция, рассмотренная в предыдущем пункте, естественным образом обобщается на случай произвольного четырехугольника. Первым этот факт обнаружил[2], по-видимому, Ярослав Ганин.

Если ввести еще точки O_a, O_b, O_c O_d (где O_a — центр окружности, описанной около треугольника BCD и т. д.), то O — точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям четырехугольника $ABCD$, очевидно, совпадает с точкой пересечения диагоналей четырехугольника $O_aO_bO_cO_d$ (например, O_a и O_c лежат на серединном перпендикуляре к BD и т. д.)

Поэтому задачу можно переформулировать так:

Рассмотрим произвольный четырехугольник $ABCD$ и еще три порожденных им четырехугольника: $O_aO_bO_cO_d$, $G_aG_bG_cG_d$, $H_aH_bH_cH_d$. Пусть точки пересечения диагоналей этих четырехугольников — O, G, H соответственно. Тогда эти точки коллинеарны, причем $HG : GO = 2 : 1$. Ниже мы приведем изящное доказательство этой теоремы, идея которого принадлежит Francois Rideau (см. [6]).

[2]Замечательные программы «The Geometer's Scetchpad» (Канада) и «Cabri Geometry» (Франция) позволяют проверять справедливость тех или иных геометрических гипотез непосредственно на компьютере. То есть, выдвинув какое-либо предположение, мы можем узнать, верно оно или нет, не затратив при этом никаких умственных усилий. Конечно, тем самым математические доказательства не отменяются (открытый на компьютере красивый факт неизбежно взывает, если не сказать, вопиет — к душам Геометров: докажи меня! и докажи красиво!) — но в каком-то смысле все же отодвигаются на второй план. (Если факт имеет место, то, рано или поздно, доказательство будет найдено). Другое дело, что человек, привыкший работать с бумагой и ручкой и не спешащий засесть за компьютер для проверки плодотворной и содержательной идеи всякий раз, когда она ему приходит в голову, скорее всего, будет награжден большим количеством таких идей. И то сказать, великое множество теорем (порой весьма замысловатых), вошедших в Золотой Фонд Геометрии, открыты были задолго до появления компьютеров. Остается только восхищаться величием Старых Мастеров.

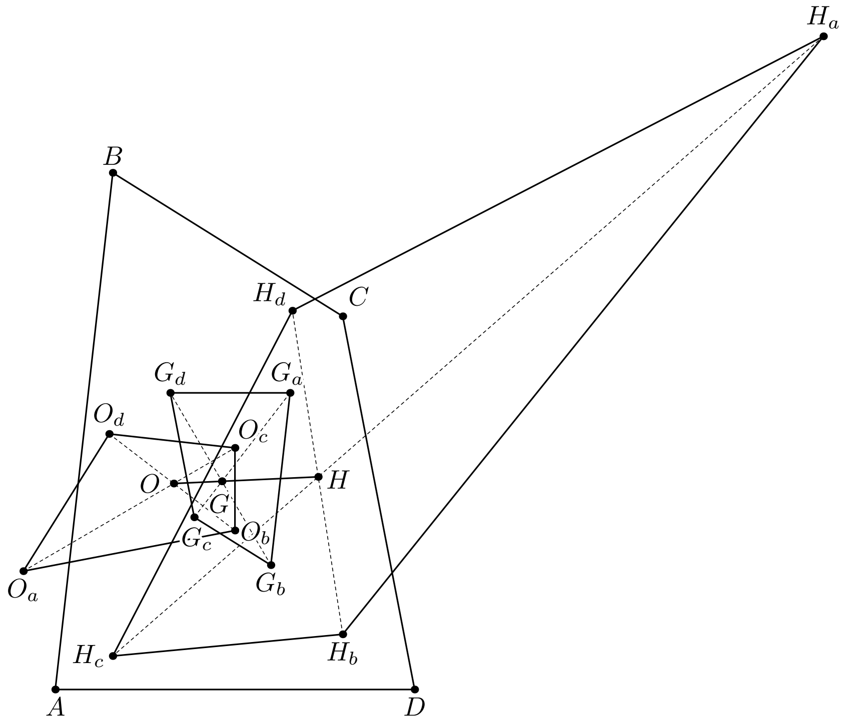

Рис. 4

Итак, на языке векторов, нужно показать, что $2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GH}$. Сначала мы предъявим сразу всю цепочку утверждений, ведущих к достижению этой цели, а потом обсудим каждое звено в отдельности.

1°. Рассмотрим три *аффинных* преобразования F_G, F_O и F_H, такие что: F_G — переводит треугольник ABC в треугольник $G_aG_bG_c$, F_O — ABC в $O_aO_bO_c$ и F_H — ABC в $H_aH_bH_c$.

2°. Тогда для произвольной точки плоскости P справедливо равенство: $\overrightarrow{F_G(P)} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_O(P)} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{F_H(P)}$. Это равенство равносильно тому, что $2\overrightarrow{F_O(P)F_G(P)} = \overrightarrow{F_G(P)F_H(P)}$.

3°. Исходный четырехугольник и порожденные им три четырехугольника *аффинно-эквивалентны*, т. е. $F_G(D) = G_d$, $F_O(D) = O_d$ и $F_H(D) = H_d$.

4°. При аффинном преобразовании, переводящем четырехугольник в четырехугольник, точка пересечения диагоналей переходит в точку пересечения диагоналей.

Воспользуемся теперь 2°, взяв в роли точки P точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Теорема доказана.

Теперь перейдем к деталям.

1°. Напомним определение и некоторые свойства аффинных преобразований (подробности см. в [3], глава 29).

Аффинное преобразование плоскости — это такое преобразование, которое любую прямую переводит в прямую же. При этом, разумеется, точка пересечения прямых переходит в точку пересечения образов. В частности, любое подобие есть аффинное преобразование.

В сущности, аффинное преобразование есть параллельная проекция одной плоскости на другую (плоская фигура, освященная параллельным потоком лучей, переходит в ее тень).

Некоторые свойства:

1. Сохраняется отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой.

2. Сохраняется отношение площадей фигур.

3. Параллельные прямые переходят в параллельные.

4. Существует ровно одно аффинное преобразование, переводящее произвольный треугольник ABC в произвольный треугольник $A_1B_1C_1$ (так, что $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$). При этом любая точка P и ее образ P_1 имеют *одинаковые барицентрические координаты* (относительно треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно).

При аффинном отображении F треугольника в треугольник можно рассматривать вместо точек также и вектора — под записью $\overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{F(P)}$ подразумеваем вектор $\overrightarrow{A_1P_1} = F(\overrightarrow{AP})$. Треугольник ABC определяет аффинную систему координат, в которой координаты (β, γ) любой точки P (или соответствующего вектора с началом в A и с концом в P) определяются равенством $\overrightarrow{AP} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$. Образом точки P будет такая точка P_1, что $\overrightarrow{AP_1} = \beta\overrightarrow{A_1B_1} + \gamma\overrightarrow{A_1C_1}$ (т. е. имеющая *те же* самые аффинные координаты в базисе с началом в A_1 и векторами A_1B_1 и A_1C_1).

Отсюда вытекает еще одно свойство аффинных преобразований — *линейность*: $\forall P,\ Q\ \overrightarrow{F(\beta P+\gamma Q)} = \beta\overrightarrow{F(P)}+\gamma\overrightarrow{F(Q)}$.

5. Пусть имеется некоторый треугольник ABC и точка P. Рассмотрим *подерный* (или *педальный*) треугольник точки P — треугольник $A_1B_1C_1$, образованный основаниями перпендикуляров, опущенных из P на прямые, содержащие стороны исходного треугольника (так, A_1 — основание перпендикуляра на (BC) и т. д.) Пусть, далее, Q —точка, *изогонально сопряженная* точке P относительно треугольника ABC (проведем прямую через вершину A и точку P и рассмотрим прямую, симметричную проведенной относительно биссектрисы угла A. Поступим аналогично с другими вершинами. Новая тройка прямых пересечется в точке Q — см. [3]:5.87). Тогда аффинное преобразование, переводящее ABC в $A_1B_1C_1$, отображает точку Q в точку P.

Докажем это свойство, ограничившись случаем внутренней точки P (для внешней доказательство аналогично). Нужно показать, что точка Q относительно треугольника ABC имеет такие же координаты, как и точка P относительно треугольника $A_1B_1C_1$. Введем обозначения: h_a, h_b, h_c — где, например, h_a — расстояние от точки P до отрезка BC (длину которого обозначим a; см. рис. 5) и т. д.

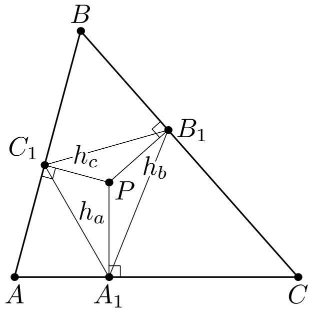

Рис. 5

Тогда, как известно, барицентрические координаты точки P (относительно треугольника ABC) имеют вид: $P(ah_aA, bh_bB, ch_cC)$, а точки, изогонально ей сопряженной — $Q=\left(\frac{a}{h_a}A, \frac{b}{h_b}B, \frac{c}{h_c}C\right)$.

Относительно же треугольника $A_1B_1C_1$ координаты точки P выражаются через площади соответствующих треугольников: $P_{A_1B_1C_1}=(S_{PB_1C_1}A_1, S_{PC_1A_1}B_1, S_{PA_1B_1}C_1)$. Однако, $S_{PB_1C_1}=\frac{1}{2}h_bh_c\sin(\pi - \angle A)=\frac{1}{4}\frac{h_ah_bh_c}{R}\frac{a}{h_a}$ (мы воспользовались тем, что $\sin(\pi-\angle A)=\sin\angle A$, а также теоремой синусов: $a=2R\sin\angle A$, где R — радиус описанной около ABC окружности). Аналогично выражаются и две другие координаты. После сокращения на общий множитель свойство доказано.

2°. Сначала покажем, что $\overrightarrow{F_G(A)}=\frac{2}{3}\overrightarrow{F_O(A)}+\frac{1}{3}\overrightarrow{F_H(A)}$, $\overrightarrow{F_G(B)}=\frac{2}{3}\overrightarrow{F_O(B)}+\frac{1}{3}\overrightarrow{F_H(B)}$, $\overrightarrow{F_G(C)}=\frac{2}{3}\overrightarrow{F_O(C)}+\frac{1}{3}\overrightarrow{F_H(C)}$.

Например, рассмотрим второе из этих соотношений. Понятно, что оно эквивалентно равенству $\overrightarrow{G_aG_b}=\frac{2}{3}\overrightarrow{O_aO_b}+\frac{1}{3}\overrightarrow{H_aH_b}$.

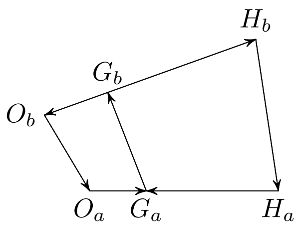

Рис. 6

Поскольку $\overrightarrow{G_aG_b}+\overrightarrow{G_bO_b}+\overrightarrow{O_bO_a}+\overrightarrow{O_aG_a}=\overrightarrow{0}$ и $\overrightarrow{G_aG_b}+\overrightarrow{G_bH_b}+\overrightarrow{H_bH_a}+\overrightarrow{H_aG_a}=\overrightarrow{0}$ (см. рис. 6), то $\frac{2}{3}\overrightarrow{O_aO_b}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{G_aG_b}+\overrightarrow{G_bO_b}+\overrightarrow{O_aG_a})$ и $\frac{1}{3}\overrightarrow{H_aH_b}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{G_aG_b}+\overrightarrow{G_bH_b}+\overrightarrow{H_aG_a})$. Сложим эти два равенства: $\frac{2}{3}\overrightarrow{O_aO_b}+\frac{1}{3}\overrightarrow{H_aH_b}=\overrightarrow{G_aG_b}+\frac{1}{3}(2\overrightarrow{G_bO_b}+\overrightarrow{G_bH_b})+\frac{1}{3}(2\overrightarrow{O_aG_a}+\overrightarrow{H_aG_a})$.

Выражения в скобках равны нулевому вектору в силу основного свойства прямой Эйлера.

Теперь равенство $\overrightarrow{F_G(P)}=\frac{2}{3}\overrightarrow{F_O(P)}+\frac{1}{3}\overrightarrow{F_H(P)}$ (для произвольной точки P) вытекает из того, что соответствующие вектора образуют базис и из линейности аффинного преобразования (1°.4.) То, что оно эквивалентно равенству $2\overrightarrow{F_O(P)F_G(P)}=\overrightarrow{F_G(P)F_H(P)}$, доказывается совершенно аналогично только что проведенному рассуждению.

3°.

1. Аффинная эквивалентность четырехугольников $ABCD$ и $G_aG_bG_cG_d$ является следствием их *гомотетичности*: первый переходит во второй при гомотетии с центром в точке M пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон $ABCD$ и коэффициентом $-\dfrac{1}{3}$ (в самом деле, $M = 1A, 1B, 1C, 1D = 1A, 3G_a$ и т. д.). Гомотетичность этих четырехугольников приводит к появлению еще одной интересной прямой:

Следствие 1. Пусть Q — точка пересечения диагоналей произвольного четырехугольника $ABCD$. *Тогда точки* Q, M, G *лежат на одной прямой и* $QM : MG = 3 : 1$.

2. Если удастся показать, что $F_O(D) = O_d$, то равенство $F_H(D) = H_d$ вытекает из соотношения $\overrightarrow{F_G(D)} = \dfrac{2}{3}F_O(D) + \dfrac{1}{3}F_H(D)$ (верного в силу 2°: положим $P = D$) и из основного свойства прямой Эйлера. Стало быть, чтобы «расставить все точки над i», нам остается доказать аффинную эквивалентность четырехугольников $ABCD$ и $O_aO_bO_cO_d$.

3. Будем говорить, что треугольник ABC *ортологичен* треугольнику $A_1B_1C_1$ ($\triangle ABC \perp \triangle A_1B_1C_1$), если перпендикуляры из A на прямую B_1C_1, из B на A_1C_1 и из C на A_1B_1 пересекаются в одной точке (ортологический центр).

Верно следующее утверждение:

Если дан некоторый треугольник ABC и точка P, треугольник $A_1B_1C_1$ — подерный треугольник этой точки, и Q —точка, изогонально сопряженная точке P относительно треугольника ABC (см. 1°. 5), то $\triangle ABC \perp \triangle A_1B_1C_1$ с центром ортологии в Q.

Это почти очевидно: рассмотрим прямую, изогональную прямой AP (см. рис. 7). (Опять же, не ограничивая общности, считаем точку P внутренней).

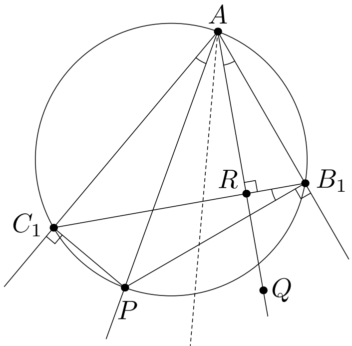

Рис. 7

Треугольники AC_1P и AB_1P — прямоугольные, с общей гипотенузой, поэтому около четырехугольника AB_1PC_1 можно описать окружность. Пусть изогональ AQ пересекает B_1C_1 в точке R. Изогональные прямые образуют с соответствующими сторонами угла равные углы, и углы, опирающиеся на одну дугу, равны. Поэтому $\angle RB_1P = \angle C_1B_1P = \angle C_1AP = \angle QAB_1 = \angle RAB_1$. Но $\angle AB_1R + \angle RB_1P = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle AB_1R + \angle RAB_1 = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ треугольник ARB_1 — прямоугольный.

4. *Ключевое утверждение*: Если $\triangle ABC \perp \triangle A_1B_1C_1$ с центром ортологии в точке Q, $\triangle A_1B_1C_1 \perp$ $\perp \triangle ABC$ с центром ортологии в точке P и F — аффинное преобразование, отображающее треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$, то $F(Q) = P$.

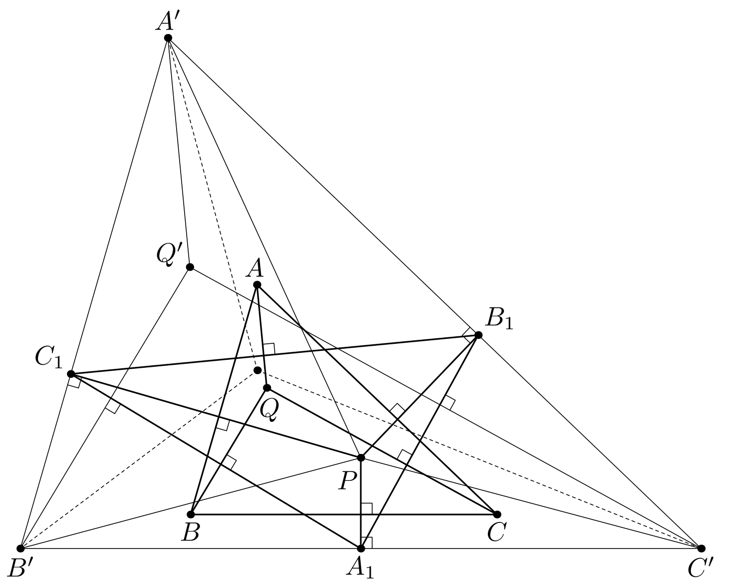

Рис. 8

Проведем через A_1 прямую, параллельную BC, через B_1 — параллельную AC и через C_1 — параллельную AB. Точки пересечения этих прямых образуют треугольник $A'B'C'$, *подобный* (и даже гомотетичный) треугольнику ABC. Треугольник $A_1B_1C_1$ — подерный относительно треугольника $A'B'C'$ и точки P. Q' — точка, изогонально сопряженная P (относительно треугольника $A'B'C'$).

Согласно $3^\circ.3$, $A'Q' \perp B_1C_1$, $B'Q' \perp A_1C_1$ и $C'Q' \perp B_1A_1$. Через точки A, B и C проведем прямые, соответственно параллельные прямым $A'Q'$, $B'Q'$ и $C'Q'$. Эти прямые также будут перпендикулярны соответствующим сторонам подерного треугольника. Значит, они пересекутся в точке Q — и точка эта (рассмотренная относительно треугольника ABC) соответствует точке Q' (относительно $A'B'C'$)[3].

Наше утверждение теперь следует из того, что в подобных треугольниках *соответственные точки имеют одинаковые барицентрические координаты* (каждая — в «своем» треугольнике), а также из свойства $1^\circ.5$.

5. Однако также понятно (можно сказать, «бросается в глаза»), что $\triangle ABC \perp \triangle O_aO_bO_c$ с центром ортологии в D и $\triangle O_aO_bO_c \perp \triangle ABC$ с центром ортологии в O_d, т. е., в соответствии с $3^\circ.4$, $F_O(D) = O_d$.

в) Отрезки ка сательных, проведенные из одной точки, равны между собой. Введем обозначения: $AT_1 = AT_4 = p$, $BT_1 = BT_2 = q$, $CT_3 = CT_2 = r$, $DT_3 = DT_4 = t$.

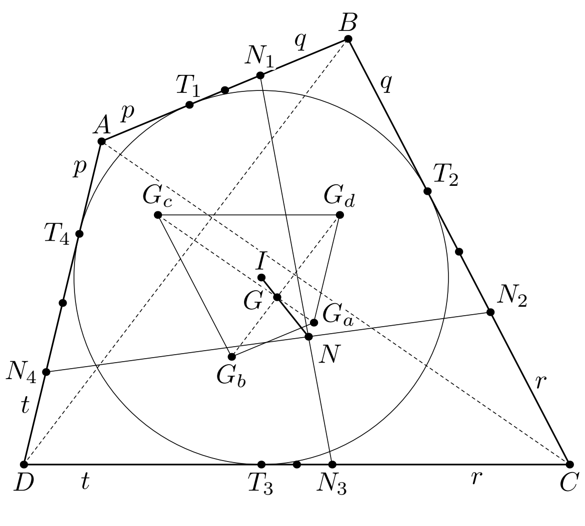

Рис. 9

Оказывается, точки N, I, G являются центрами масс следующих систем:
$N = pA, qB, rC, tD$;
$I = (q+t)A, (p+r)B, (q+t)C, (p+r)D$;
$G = (p+q+t)A, (p+q+r)B, (q+r+t)C, (p+r+t)D$,
причем первое из этих трех утверждений очевидно. Далее мы докажем справедливость остальных двух,

[3]На самом деле, если исходные прямые пересекались в одной точке, то и соответственные им должны пересекаться в одной точке и мы попутно доказали *теорему Штейнера*: $\triangle A_1B_1C_1 \perp \triangle ABC \Leftrightarrow \triangle ABC \perp \triangle A_1B_1C_1$.

а пока заметим, что из них сразу вытекает нужный нам факт. Действительно, рассмотрим систему $G = (p+q+t)A, (p+q+r)B, (q+r+t)C, (p+r+t)D$.

Ее можно разбить на две подсистемы: $N = pA, qB, rC, tD$ с суммарной массой $s = p+q+r+t$ (полупериметр четырехугольника) и $I = (q+t)A, (p+r)B, (q+t)C, (p+r)D$ с суммарной массой $2(p+q+r+t) = 2s$. Воспользовавшись правилом рычага, получим , что точки N, G, I лежат на одной прямой, причем $NG : GI = 2 : 1$.

Более того, если рассмотреть еще точку G_5 — центр масс «проволочного» четырехугольника, то понятно, что $G_5 = (2p+q+t)A, (2q+p+r)B, (2r+q+t)C, (2t+r+p)D$ (нужно нагрузить середину каждой стороны длиной этой стороны, затем «растащить» эту массу по вершинам и т. д.). Отсюда следует, что G_5 — середина отрезка NI, т. е. имеем полную аналогию с треугольником, где в роли G_5 выступает точка Шпикера — центр окружности, вписанной в серединный треугольник.

Точку G_5 можно построить следующим образом:

Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. A_1 — точка пересечения биссектрисы AI и отрезка O_1O_4, а G_1 — точка, симметричная A_1 относительно середины O_1O_4. Аналогично определим B_1 и G_2, C_1и G_3, D_1и G_4. Тогда G_5 является точкой пересечения отрезков G_1G_3 и G_2G_4.

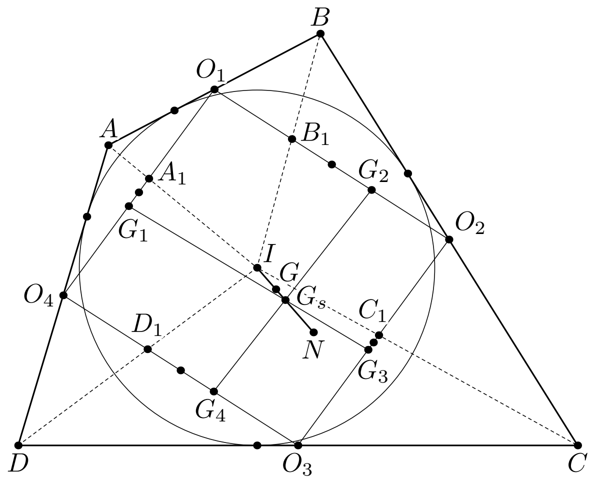

Рис. 10

Лемма 1: $I = (q+t)A, (p+r)B, (q+t)C, (p+r)D$.

Предположим, что в нашем четырехугольнике найдется пара непараллельных противоположных сторон (иначе четырехугольник является ромбом и все три точки N, G, I совпадают с точкой пересечения диагоналей). Пусть это будут, например, стороны AD и BC, а их продолжения за точки A и B соответственно пересекутся в точке E (см. рис. 11). Пусть $a = EB$, $b = EA$. Тогда, с одной стороны, $I = (t+r)E, (a+q+r)D, (b+p+t)C$, как центр окружности, *вписанной* в треугольник EDC. С другой же стороны, $I = (p+q)E, -aA, -bB$ — как центр *вневписанной* в EAB окружности. Наконец, поскольку $\dfrac{EC}{EB} = \dfrac{a+q+r}{a}$ и $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{b+p+t}{b}$, то система $(p+q+r+t)E$ эквивалентна разбиению на подсистемы $(a+q+r)B, -aC, (b+p+t)A, -bD$.

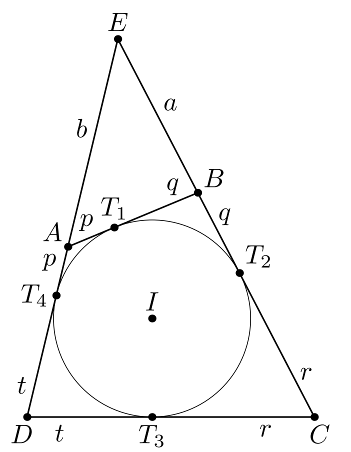

Рис. 11

Таким образом, $I = (-a+b+p+t)A, (-b+a+q+r)B, (-a+b+p+t)C, (-b+a+q+r)D$. Осталось заметить, что $b+p=a+q$ (как отрезки касательных, проведенных из одной точки).

Следствие 2 — *прямая Ньютона.* Если в четырехугольник можно вписать окружность, то ее центр и середины диагоналей лежат на одной прямой.

Следствие 3. В описанном четырехугольнике нагрузим каждую точку касания длиной стороны, содержащей эту точку. Центр масс такой системы есть центр вписанной окружности.

И правда, $I=(q+t)A,(p+r)B,(q+t)C,(p+r)D=T_1(p+q),T_2(q+r),T_3(r+t),T_4(t+p)$. Действительно, поскольку $I=(q+t)A,(p+r)B,(q+t)C,(p+r)D$, то подсистема $(q+t)A,(q+t)C$ имеет центром масс середину AC, а подсистема $(p+r)B,(p+r)D$ — середину BD.

Лемма 2: $G=(p+q+t)A,(p+q+r)B,(q+r+t)C,(p+r+t)D$.

Пусть P — точка пересечения диагоналей четырехугольника (см. рис. 12). Отметим, что если в него можно вписать окружность, то $\frac{AP}{CP}=\frac{p}{r}$; $\frac{BP}{DP}=\frac{q}{t}$. Действительно, как следует из теоремы Брианшона ([3]: 30.34, 30.36), прямые T_1T_3 и T_2T_4 также проходят через точку P, поэтому $P=\frac{1}{p}A,\frac{1}{q}B,\frac{1}{r}C,\frac{1}{t}D$, а значит, $P=\frac{1}{q}B,\frac{1}{t}D$ и $P=\frac{1}{p}A,\frac{1}{r}C$ (отрезок P_1P_2 с концами на пересекающихся прямых должен проходить через точку пересечения этих прямых, т. е. концы отрезка совпадают с точкой пересечения).

Кроме того, четырехугольник $G_aG_bG_cG_d$ гомотетичен четырехугольнику $ABCD$ (см. 3°. 1.)

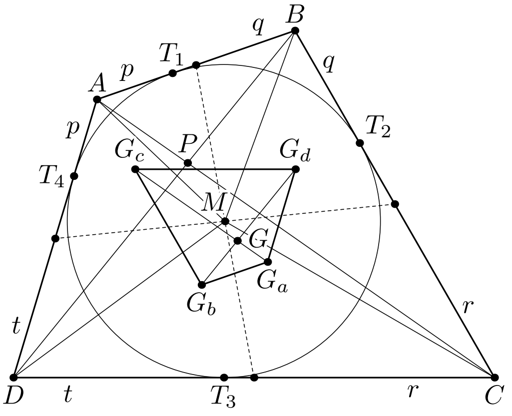

Рис. 13

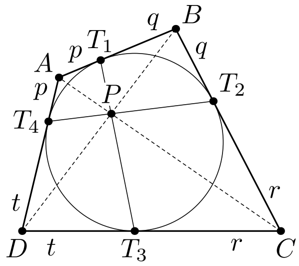

Рис. 12

Значит, $\frac{G_aG}{G_cG}=\frac{AP}{CP}=\frac{p}{r}$; $\frac{G_bG}{G_dG}=\frac{BP}{DP}=\frac{q}{t}$. Поэтому $G=rG_a$, $pG_c=pA,(r+p)B,rC,(r+p)D$. Аналогично, $G=tG_b\ qG_d=(q+t)A,qB,(q+t)C,tD$. Сложив массы при одинаковых вершинах, завершим доказательство[4].

Литература:

[1] М. Балк, В. Болтянский. Геометрия масс. (Библиотечка «Квант», выпуск 61). М., «Наука», 1987 г.

[2] А. Мякишев. Элементы геометрии треугольника. (Библиотека «Математическое просвещение», выпуск 19). М., МЦНМО, 2002 г.

[3] В. Прасолов. Задачи по планиметрии. М., МЦНМО, 2001 г.

[4] И. Шарыгин. Геометрия 9 – 11. Задачник. М., «Дрофа», 1996 г.

[5] А. Богомольный. Remarkable Line in Cyclic Quadrilateral.

На сайте:

`http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/InscribedQuadri.shtml`

[6] Hyacinthos messages №№12400, 12402 — 26.03. 2006

На сайте:

`http://www.groups./yahoo.com/group/Hyacinthos`

[4]Увы, найти аналог прямой Нагеля для произвольного четырехугольника автору не удалось. Во всяких схожих с б) конструкциях аффинной эквивалентности не возникает. Впрочем, судя по доказательству в), довольно содержательному и использующему важные свойства вписанной в четырехугольник окружности, усилить эту теорему будет нелегко.