Исследуем на уроке и на проекте

А.И. Сгибнев

учитель математики

школы-интерната "Интеллектуал"

Чтобы сформулировать цели проектно-исследовательской деятельности, необходимо теоретическое введение, которое имеет и общее значение.

Умения и навыки, которым мы учим детей, можно условно разбить на две группы: базовые навыки и исследовательские умения. К первой относятся способность узнавать знакомые ситуации, применять в них известные методы решения. Ко второй — успешность действий в незнакомых ситуациях, в которых нет известных методов решения (или есть, но глубоко спрятаны).

С первой группой всё более-менее ясно. Мы понимаем, **как обучать** базовым навыкам: их содержание описано в подробных программах, им посвящены многочисленные дидактические **материалы**. Мы знаем, **как оценивать** их наличие: процент успешно решённых на контрольной работе задач — вот тебе и оценка. «Разбуди ночью — отвечу». Их не так много, и средний школьник при известной старательности ими овладевает.

Со второй группой, напротив, ничего не ясно.

Во-первых, **как обучать** исследовательским умениям? Рассказывать ученикам готовые решения — значит опять работать на воспроизведение. Давать самим — «авось решат» — так и не решат, только время потеряешь.

Во-вторых, **чему** собственно учить, на каком материале развивать эти умения? Базовые темы входят в требования базовых навыков, тут рисковать нельзя. Остаётся сложный факультативный материал (а времени не остаётся). Ставится знак равенства между сложными задачами и исследовательскими, чем отсекаются средние и слабые ученики.

В-третьих, как **оценивать** исследовательские умения? Если ты несколько раз успешно находил требуемое на уроках, это совсем не значит, что в новой ситуации — на контроле — тоже найдёшь. Вероятность успеха выше, но гарантии никакой нет.

Итак, проблема исследовательских умений: как и на каком материале учить, как оценивать?

Прежде всего обозначим внутреннюю сторону проблемы. Исследование означает свободный поиск: идёшь куда хочешь, но рискуешь ничего не найти. Исследование — это творчество в науке. Творчество появляется лишь там, где есть свобода, и необходимо связано с риском, с отсутствием гарантий. Заставить творить нельзя. Поэтому исследование, как и всякое творчество, слабо поддаётся формализации — и в обучении и в проверке.

Давайте уточним, о какой свободе в математике идёт речь. В.И. Арнольд, цитируя Пуанкаре, говорит, что задачи бывают двух видов: бинарные и интересные. Бинарные предполагают только два ответа: «да» и «нет», интересные допускают продвижения, вспомогательные задачи, уточнения, обобщения. Иначе говоря, интересны те задачи, в которых решающий имеет пространство выбора:

$$\text{Задачи интересные} = \text{исследовательские} = \text{есть выбор.}$$

Представьте себе детектив, в котором на первой же странице сообщают имя преступника, а потом всю книгу его судят. Читатель разочарован: ему не пришлось ломать голову, теряться в догадках вместе со следователем. Всё уже известно, осталась скучная юридическая процедура. То же происходит с учеником, когда мы ему даём *задачу с готовым утверждением* (таковы почти все традиционные задачи на доказательство).

Чтобы разобраться здесь как следует, надо со всей чёткостью разделить два действия:

(1) «следствие» — рассмотрение математической ситуации («преступления»), завершающееся выдвижением гипотезы («обвинения»);

(2) «суд» — доказательство или опровержение готовой гипотезы.

(А есть ещё и третье, вернее "нулевое": сначала находят интересную ситуацию — "труп".)

То, что мы называем исследовательскими умениями, развивается в основном «на следствии» — в (1). Именно здесь решающему задачу предоставлена свобода, здесь развивается интуиция — искусство *угадывать* решение по нескольким частным случаям, по аналогии [1]. И вот как раз всего этого мы лишаем учеников, когда даём задачу с готовым утверждением![1]

Итак, традиционные формулировки школьных задач по математике, содержащие готовые утверждения, неоправданно сужают пространство выбора. Задачи, поставленные таким образом, развива-

[1] Говоря образно, живую задачу разрезают на две мёртвые части, и ученику обычно достаётся только вторая — доказать неизвестно откуда взявшееся утверждение. Говоря методологически, знание искусственно отсекается от методов его получения, и ученику их не сообщают.

ют исследовательские умения гораздо меньше, чем могли бы.

Дело здесь именно в формулировках. Я утверждаю, что почти всякую школьную задачу на доказательство (и простую и сложную!) можно сформулировать так, что в решении появится (понадобится!) элемент исследования. См. приложение 1А, где собран ряд приёмов, позволяющих превращать обычные бинарные и унарные задачи в интересные, исследовательские.

Вот пример «из жизни» (курсивом выделены соображения, которые я добавил позже). Возьмём обычную «унарную» задачу на доказательство. «Доказать, что если фигура имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то точка их пересечения является центром симметрии фигуры».

Слегка изменим утверждение задачи: «Если у фигуры на плоскости есть две оси симметрии, то есть и центр симметрии». (∗)

Спросим: «Верно ли утверждение? Если да, докажите, попробуйте обобщить. Если нет, приведите контрпример, попробуйте уточнить. Постройте утверждение, обратное исходному. Выполните с ним те же задания. *Как можно разумно поставить аналогичную задачу для пространства?*» (∗∗)

Я дал эту задачу в домашнем задании 9 классу, два ученика независимо нашли и доказали (в сумме) следующее: «У правильного треугольника три оси симметрии, пересекающиеся в одной точке, а центра симметрии нет. Значит, утверждение (∗) нуждается в уточнении. Если есть две оси и они взаимно перпендикулярны, то центр симметрии есть. Если у фигуры ровно две оси симметрии, то они автоматически взаимно перпендикулярны, тогда есть и центр симметрии». *Хочется найти более общее утверждение. Может быть, достаточно чётного числа осей симметрии? Правильные многоугольники не опровергают этого...* «Теперь разберёмся с обратным утверждением. Из наличия центра симметрии не следует наличие двух осей, например, буква Z. Попробуем уточнить. Можно потребовать наличия центра и одной оси, тогда должна быть и вторая, ей перпендикулярная. Возможны и другие уточнения».

Составляя задание (∗∗), я просто выбрал те вопросы из списка, которые подходили к задаче (∗). Давать готовые утверждения — лишь один из способов формулировать задачи, способ со своими достоинствами и недостатками. Главный недостаток — он мало развивает исследовательские умения. Но этот способ почему-то получил количественный перевес, несоответственный его достоинствам. Предлагаемый мною подход — в том, чтобы ставить задачи *разными способами*, притом такими, которые *дают ученику пространство выбора* (см. приложение 1А).

Ограничиваясь готовыми утверждениями, мы лишаем задачи одного из измерений, глубины. Задачи составляются «с конца», с известного решения. Происходит своеобразное *состязание* составителя задачи и ученика. Усложнение происходит в одной плоскости, за счёт увеличения числа промежуточных шагов, отчего задачи становятся всё более искусственными и вычурными[2]. Двигаясь по этой линии, мы рискуем получить «бойкого решателя заковыристых задач» (выражение В.И. Рыжика).

Предлагаемый способ вопрошания существенно *изменяет отношение к ученику.* Делясь этими вопросами с учеником, мы открываем ему свою исследовательскую «кухню». Мы перестаём удивлять его гипотезами, до которых неизвестно как можно додуматься, честно показываем, как мы это сделали, и ожидаем ответных гипотез, диалога. Тем самым мы признаём за ним право и способность не только доказывать готовые утверждения известными способами, но думать наравне с нами. Вместо состязания — *сотрудничество.* См. приложение 1Б, где собран сравнительно полный перечень вопросов, которые отражают типовые ходы исследовательской мысли.

Итак, вот предлагаемые мною ответы.

Как учить исследовать?

Надо 1) изменить способ вопрошания, 2) показывать, из каких соображений выдвигают гипотезы и ставят задачи.

На каком материале учить? На том же самом.

Как оценивать исследовательские умения? Лучше всего избегать формальных оценок[3], потому что этим умениям нельзя гарантированно научить, а значит, нельзя их и уравнительно оценивать.

На уроках далеко не всегда можно приблизиться к изображённому идеалу. Обычно не хватает времени, недостаточно мотивации. А вот жанр *проектной работы* даёт ученику возможность, которой не даёт никакая другая учебная деятельность: решать исследовательские задачи в свободном режиме. Теперь мы готовы, наконец, сформулировать цели проектно-исследовательской деятельности. *Цель проектной работы — научить ребёнка исследовать.* Главный и уникальный результат проектной работы — это исследовательские умения ученика. Всё остальное (овладение новой темой, получение нового научного результата) — это побочные продукты, если есть — хорошо, если нет — ничего страшного[4].

Я попробую описать стиль психологических отношений между руководителем проекта и исполнителем как своего рода образец для всякой учебной деятельности:

[2] Как ни странно звучит, задачи олимпиад высокого уровня часто требуют лишь владения несколькими базовыми навыками (пусть и «олимпиадными»).

[3] Если избежать не удаётся, можно давать несколько исследовательских задач на выбор и ставить «отлично» за хотя бы одну решённую. А других оценок не ставить.

[4] Новой теме можно научить на уроке и на кружке, особенность проектов не в этом. За новым научным результатом не надо гнаться, он может получиться сам собой — в тех редких случаях, когда «совпали» ребёнок, руководитель и тема.

Свобода мышления, соответствующая исследованиям, должна сказываться и в их организации. Проектами занимаются только по желанию. Тему ученик выбирает сам (а учитель вправе отказаться, если не чувствует к ней сил или интереса — свобода обоюдная!). Учитель сотрудничает с учеником: делится своими соображениями и выслушивает ученика на равных, точнее как более опытный коллега. Учитель должен уметь отказываться от своего замысла в пользу идей ученика. Это приходится иногда делать, даже если учитель уверен в бесплодности этих идей, но не может убедить в этом ученика иначе как «попробуй — увидишь» (насилие тут недопустимо). Никаких наказаний («двоек») за медлительность или отказ ставить нельзя. Награды допускаются, но лучше внеучебные — похвалить, поделиться результатами с коллегами. Настоящей наградой будет радость от хорошо сделанной совместной работы.

Все мы хотим, чтобы ученики в результате учёбы «доросли» до нас. Большинство согласно, что лучшее средство для этого — доверять ученикам и сотрудничать с ними. Но тогда, обучая математике, надо учить ставить задачи и выдвигать гипотезы.

Литература

[1] Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. — М.: Изд-во Иностр. Лит. — 1957.

Приложение 1

А. Как ставить задачи, не давая готовых утверждений

- Попросим сформулировать гипотезу на данных примерах.
- Попросим «доказать или опровергнуть» утверждение вместо однозначного «доказать», «опровергнуть».
- Наведём на факт, который надо открыть, не высказывая его прямо.
- Перевернём задачу: дадим в готовом виде идею доказательства и попросим по ней сформулировать утверждение. (Фактически «Сформулируй условие по решению»!)
- Дадим в готовом виде лишь часть утверждения.
- Разобъём сложную задачу на несколько более простых. (Дадим план доказательства).
- Зададим такой частный вопрос, что ученик сам будет вынужден обобщить его. (Иногда общую задачу решить легче, чем частную).
- Позволим ученику самому разбирать простые частные случаи.
- Попросим вывести формулу, не давая её прямо, а описывая косвенно.
- Позволим ученику выбирать данные.
- Дадим готовое утверждение и попросим угадать аналогичное.
- Дадим готовое рассуждение и спросим, истинно оно или ложно. Фактически нужно выяснить: (1) верно ли утверждение; (2) верно ли доказательство.

Б. Какие вопросы помогают выдвигать гипотезы и ставить задачи

- Верно ли аналогичное утверждение?
- Верно ли более общее утверждение?
- Как можно обобщить данное утверждение?
- Какие ещё задачи можно решить этим методом?
- Нельзя ли ослабить условия? Нельзя ли усилить утверждение?
- Верно ли обратное утверждение?
- Как можно продолжить последовательность утверждений (задач)?
- Нельзя ли уточнить (исправить) неверное утверждение?
- На какие утверждения опирается наше рассуждение?
- В каком пункте доказательства срабатывает это условие? Насколько оно существенно (что изменится, если его отбросить или заменить другим)?
- Не работает ли это доказательство для другого случая?
- Почему это доказательство не работает для другого случая?
- Верно ли утверждение в предельном случае? Если да, то работает ли доказательство для предельного случая или его надо разбирать отдельно?
- Можно ли построить эту теорию на другом основании?

Приложение 2

Пример тематической подборки задач, сформулированных в исследовательском стиле

Автор Д.Э. Шноль

Тема «Площадь. Теорема Пифагора».

1. Выведите формулы площади известных вам фигур (параллелограмма, треугольника, трапеции, дельтоида, не забудьте про понятие средней линии).
2. Выберите какую-либо фигуру и постройте равновеликий ей прямоугольник
3. Медиана разбивает треугольник на два треугольника. Каким свойством они обладают?
4. Диагонали разбивают параллелограмм на четыре треугольника. Каким свойством они обладают?
5. Сформулируйте утверждение, обратное тому, которое получилось у вас в задаче 4. Верное ли оно?
6. Стороны треугольника равны b и c. В каких границах может меняться его площадь?
7. Пусть точка P делит сторону треугольника в отношении $m : n$. Придумайте и решите задачу, связанную с понятием площадь.
8. Даны два равновеликих треугольника. Равенство каких элементов нужно задать дополнительно, чтобы треугольники были равны?
9. На сторонах угла с вершиной A взяты точки B и C. На плоскости берется произвольная точка M. Сравните площади треугольников ABM и ACM в зависимости от положения точки M.
10. Используя решение задачи 9 и понятие ГМТ, докажите новым способом теорему о медианах треугольника (медианы треугольника пересекаются в одной точке ...).
11. Придумайте и докажите признак трапеции (если в четырехугольнике ..., то он является трапецией), использующий понятие площади.
12. Диагонали разбивают трапецию на четыре треугольника. Какими свойствами они обладают?
13. Биссектриса разбивает треугольник на два треугольника. Как относятся их площади?
14. Треугольник задан своими сторонами. В каком отношении делит биссектриса угла А противолежащую сторону? Можно ли найти не только отношение этих отрезков, но и их длины?
15. В многоугольник можно вписать окружность радиуса r. Как связана площадь многоугольника и этот радиус?
16. На основании равнобедренного треугольника взята точка. Из нее опущены перпендикуляры на боковые стороны. Что можно сказать о сумме длин этих перпендикуляров? Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для равностороннего треугольника.
17. Диагонали разбивают выпуклый четырехугольник на четыре треугольника. Что можно сказать про площади этих треугольников?
18. Противоположные стороны шестиугольника параллельны. Задайте минимальное количество параметров, необходимых, чтобы можно было найти его площадь. Найдите формулу для вычисления этой площади.
19. При доказательстве теоремы о медианах треугольника (задача 10) получено свойство точки пересечения медиан, связанное с площадями. Сформулируйте аналогичную задачу для n-угольника. Попробуйте ее решить для четырехугольника.
20. Два треугольника имеют общий угол. Задайте необходимые элементы этих треугольников, чтобы найти отношение их площадей. Получите формулу для вычисления этого отношения.
21. Аналогом прямоугольника в пространстве является прямоугольный параллелепипед. Его объем равен произведению трех ребер, выходящих из одной вершины. Выведете формулы объема для некоторых многогранников, аналогичные формулам площадей для плоских фигур.
22. Сформулируйте утверждение, обратное теореме Пифагора. Верно ли оно? Если верно — докажите, если неверно — приведите опровергающий пример.
23. Треугольник задан двумя сторонами. Угол между ними начинают увеличивать. Что происходит с третьей стороной? Сформулируйте и докажите соответствующее утверждение. Как выяснить есть ли в треугольнике тупой угол, если известны длины его сторон?
24. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Проведите их общие касательные. Сформулируйте задачу по этой конструкции и решите ее.
25. В квадрат со стороной b вписан другой квадрат, вершины которого делят стороны первого квадрата в отношении $m : n$. Сформулируйте задачу по этой конструкции и решите ее.
26. Найдите связь между квадратами сторон параллелограмма и квадратами его диагоналей.
27. Треугольник задан тремя сторонами. Найдите его высоту и медиану, проведенные к одной из сторон.
28. (Формула Герона). Треугольник задан тремя сторонами, найдите его площадь. Какие ограничения и почему нужно наложить на длины сторон, чтобы формула имела смысл?
29. Трапеция задана своими сторонами. Найдите формулу ее площади, выраженной через ее стороны. Какие ограничения и почему нужно наложить на длины сторон, чтобы формула имела смысл?
30. Теорему Пифагора можно сформулировать, используя понятия: прямоугольник, его стороны и диагональ. Обобщите теорему Пифагора для объемного случая — для прямоугольного параллелепипеда.

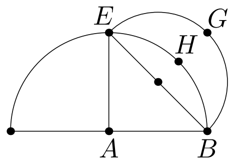
Приложение 3

Темы самостоятельных исследовательских работ по математике, предлагавшихся в школе «Интеллектуал» в 2003-06 годах

После номера задачи указан **рекомендуемый** возраст

1. (5 – 7 класс) Разбойники поймали мудрецов, выстроили их в колонну, надели на каждого чёрный или белый колпак и спрашивают каждого: какого цвета колпак на нём? Если ответил правильно — отпускают, если ошибся — убивают. Как надо действовать мудрецам, чтобы их спаслось как можно больше? (Мудрец видит только колпаки тех, кто перед ним).
2. (5 – 6 класс) Можно ли квадрат 8×8 с вырезанной угловой клеткой разрезать на полоски 1×3? Обобщите задачу на квадрат $n \times n$.
3. (5 – 6 класс) Дана таблица 4×4. Можно ли так расставить в её клетках 7 звёздочек, чтобы при вычёркивании любых двух строк и любых двух столбцов хотя бы одна звёздочка оставалась?
4. (5 – 6 класс) Сколькими способами можно раскрасить бесцветные грани куба (можно несколько граней в один цвет), если красок: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7? Тот же вопрос для тетраэдра, октаэдра. Сколько красок тут имеет смысл рассматривать?
5. (5 – 6 класс) Цепь скована из звеньев. Как наименьшим числом распилов разбить её на отдельные звенья? Рассмотреть ветвящиеся цепи.
6. (5 – 6 класс) Замостить плоскость правильными многоугольниками 1) одного типа, 2) двух разных типов. Замостить плоскость полуправильными многоугольниками. «Замостить» пространство правильными многогранниками.
7. (5 – 6 класс) Вычеркнуть из данного числа три цифры, так чтобы новое число было наименьшим (наибольшим). Сформулировать алгоритм. А если вычёркивать четыре цифры?
8. (5 – 6 класс) В кубе некоторые вершины покрашены в чёрный цвет, некоторые в белый. При этом можно повернуть куб вокруг какой-либо оси так, чтобы вершины одного цвета переходили друг в друга. Сколько существует таких различных раскрасок? Тот же вопрос для октаэдра, икосаэдра.
9. (5 – 6 класс) У вас есть 15 шаров, из них какие-то четыре — радиоактивные, и прибор, который показывает, есть среди выбранных шаров радиоактивные или нет. Как за наименьшее число проб узнать все радиоактивные шары?
10. (5 – 6 класс) По кругу расположены точки с номерами от 1 до n. Точки начинают вычёркивать через одну, считая от первой. Как узнать номер точки, которая останется последней?
11. (6 – 7 класс) Есть 5-этажный дом и 2 кокоса, которые можно сбрасывать с любого этажа и можно подбирать. Помогите обезьяне определить, с какого этажа кокосы начинают разбиваться. Учтите, что обезьяна ленивая и хочет бросать кокосы как можно меньше. Обобщить на n этажей и m кокосов.
12. (6 – 7 класс) Один из игроков загадал число, меньшее 100. Другой задает ему вопросы, на которые первый может отвечать только "да" или "нет". Один раз отвечающий может соврать. Как правильно задавать вопросы, чтобы быстрее отгадать число? Обобщите задачу.
13. (6 – 7 класс) $13^2 = 12^2 + 3^2 + 4^2$. При этом $3^2 + 4^2$ является полным квадратом, а $12^2 + 3^2$ нет. Можно ли найти такую тройку чисел, чтобы каждая пара квадратов в сумме была полным квадратом? Иначе тот же вопрос: бывает ли прямоугольный параллелепипед, у которого рёбра, диагональ и диагонали граней целые?
14. (6 – 7 класс) (Трапецеидальные числа). Число 15 можно тремя способами представить в виде суммы последовательных натуральных чисел: $15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$. А сколько таких способов для числа 101? Как найти количество способов для произвольного числа?
15. (6 – 7 класс) (Многоугольные числа). Назовём число m треугольным, если из m камней можно выложить треугольник (т. е. если оно представимо в виде $m = 1 + 2 + \cdots + k$). Найти формулу для треугольных чисел. Найти все квадратные числа, которые одновременно являются треугольными. Найти общую формулу для n-угольных чисел.
16. (6 – 7 класс) Какие суммы можно уплатить монетами по 3 и 5 рублей? Обобщение: какие числа выражаются комбинацией $ax + by$, где a, b — данные натуральные числа, x, y — произвольные целые неотрицательные числа.
17. (6 – 7 класс) Придумать *общую для игроков* стратегию игры в шашки, при которой игра закончится как можно быстрее. Можно ставить другие *общие цели.*
18. (7 – 8 класс) Назовём *элементами* многоугольника его стороны и углы. По скольким элементам можно построить правильный треугольник? Равнобедренный треугольник? Произвольный треугольник? Любые ли элементы подходят? Обобщить на четырёхугольники и пятиугольники.
19. (7 – 8 класс) Вывести неравенство, связывающее периметр многоугольника и сумму его диагоналей. Вывести соотношение между суммами диагоналей двух многоугольников, если один находится внутри другого.

20. (7 – 8 класс) Придумать игру типа «пятнашек» или «месяцев» (12 шариков ходят по кругу, один может уезжать в центр, надо расставить в определённом порядке). Построить компьютерную модель, а затем механизм.
21. (8 – 9 класс) Построить многочлен с целыми коэффициентами, имеющий корень $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Построить многочлен наименьшей степени, обладающий этим свойством. Обобщить на случай суммы трёх корней.
22. (8 – 9 класс) Как восстановить многоугольник по серединам его сторон? Единственно ли решение? А если рассматривать также невыпуклые многоугольники? А если поделить его стороны в отношении $1 : a$?
23. (8 – 9 класс) Найти центр тяжести: треугольника, в вершинах которого тяжёлые шарики; проволочного треугольника; картонного треугольника. Обобщить на многоугольники.
24. (8 – 9 класс) Параллелограмм разбивается диагоналями на 4 равновеликих треугольника. Верно ли обратное? Тот же вопрос для ромба и периметров. Обобщить на шестиугольники.
25. (8 – 9 класс) Последовательность $a_{n+2} = -a_n - a_{n+1}$ ($a_1 = 1$, $a_2 = 1$) является периодической. При каких ещё коэффициентах для последовательности $a_{n+2} = ka_n + ma_{n+1}$ получается периодичность? Какой длины может быть период?
26. (8 – 9 класс) Тетраэдр — пространственный аналог треугольника. Найти для тетраэдра аналоги биссектрис, медиан, высот треугольника. Изучить их свойства.
27. (8 – 9 класс) Сколько осей симметрии может быть у n-угольника? Может ли многоугольник иметь: две параллельные оси симметрии; ровно две пересекающиеся оси; конечное число осей симметрии; бесконечно много осей симметрии; конечное число центров симметрии; бесконечно много центров симметрии; центр симметрии и ровно одну ось симметрии? Как связано наличие у многоугольника двух осей симметрии с наличием центра симметрии? Какие ответы изменятся, если вместо многоугольников рассматривать общий случай *фигур* на плоскости? Обобщить на пространство (центры, оси и плоскости симметрии; многогранники и объёмные фигуры).
28. (8 – 9 класс) Гиппократовы луночки. На рисунке площадь фигуры $EHBG$ равна площади треугольника ABE. При каком ещё положении точки E площадь $EHBG$ рационально выражается через площадь ABE?



29. (8 – 10 класс) При каких a, b, c корни уравнения $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ записываются через квадратичные иррациональности.
30. (8 – 10 класс) Исследовать в трёхмерном пространстве параметров a, b, c количество корней уравнения $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ (можно начать с квадратного и кубического уравнений).
31. (9 – 10 класс) На плоскости заданы три неколлинеарных направления и шаги по каждому из них. Как дойти до данной точки при этих условиях за наименьшее число шагов?
32. (10 класс) Исследовать возможные варианты взаимного расположения двух прямых в пространстве (трёх, четырёх, …). Сколько у них может быть общих точек, общих плоскостей?
33. (10 класс) Какими свойствами обладает тетраэдр, если его грани — равные треугольники (подобные треугольники, равновеликие, равного периметра)? То же для октаэдра.
34. (10 – 11 класс) Если (a_n) — арифметическая прогрессия, то, зная только a_2, можно найти $a_1+a_2+a_3$, зная 3-й член, можно найти сумму первых пяти, и т. д. Оказывается, для последовательности Фибоначчи (u_n) (т. е. $u_{n+2} = u_n+u_{n+1}$) тоже есть такие свойства. А именно, сумма первых десяти членов однозначно выражается через седьмой член: $u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = 11u_7$ $(*)$, причём равенство верно для последовательностей с любыми начальными членами u_1, u_2. Вопросы: а) нельзя ли найти другие равенства типа $(*)$ (т. е. с другими числами вместо 1, 10, 7, 11), верные для всех последовательностей Фибоначчи; если можно, то как связаны эти параметры; б) нельзя ли построить подобные равенства для других рекуррентных последовательностей (хотя бы вида $u_n = ku_{n-1} + lu_{n-2}$); если можно, то как.
35. (10 – 11 класс) Последовательность задана рекуррентным соотношением $u_{n+1} = u_n/2$ если u_n чётно, $u_{n+1} = 3u_n + 1$, если u_n нечётно. Если начать с числа $u_0 = 1$, то мы попадём в цикл $1 \to 4 \to 2 \to 1$. Выяснить, попадём ли мы в 1, начиная с любого натурального числа. (Компьютерные расчёты подтверждают эту гипотезу). Придумать другие последовательности, обладающие этим свойством.

«Парадная» подборка 2005 года

36. **Разложение средних.** Дано натуральное число, надо понять, для скольких пар натуральных чисел оно является а) средним арифметическим, б) средним геометрическим, в) средним квадратичным,

г) средним гармоническим. Методы: *упорядоченный перебор*, *комбинаторика*, *численный эксперимент*.

37. **Минимумы в многоугольниках.** Дан четырёхугольник, надо понять, для какой точки в его плоскости сумма расстояний до вершин будет наименьшей. Обобщить на треугольники, пятиугольники и т. д. Методы: *неравенство треугольника*, *геометрический эксперимент*, *вычислительная математика + программирование*.
38. **Цепные дроби.** Дана обыкновенная дробь, надо разложить её в цепную, понять свойства приближений, зависимость длины цепной дроби от числителя и знаменателя. Методы: *вычислительная математика + программирование*, *арифметика*.
39. **Суммы.** Надо научиться получать явные формулы для рекуррентных последовательностей вида $x_{n+1} = x_n + P_k(n)$, где $P_k(n)$ — многочлен степени k от переменной n; применить эти формулы для решения задачи о делении плоскости прямыми, находящимися в общем положении. Методы: *алгебра*, *индукция*.
40. **Симметрии восьмигранников.** Придумывать восьмигранники и смотреть, переходят ли они в себя при вращении вокруг каких-то прямых. Методы: *ножницы*, *клей*, *созерцание*.
41. **Классификация дробно-квадратичных функций.** Исследовать какие типы графиков могут получиться, если в числителе и в знаменателе — квадратичные функции. Методы: *теорема Виета*, *построение графиков*.