Метод вспомогательной задачи

И.Б. Писаренко

учитель математики лицея №1557

Можно было бы, конечно, выбрать примеры и пострашнее, но усваивать идеи лучше на простых.

В.А. Уфнаровский. Математический аквариум.

Метод был разработан венгерским математиком Д. Пойа в середине двадцатого века, и описан в книгах: «Как решать задачу» (КРЗ), «Математика и правдоподобные рассуждения» (МПР), «Математическое открытие» (МО).

Для того чтобы решить нестандартную задачу этим методом, нужно сделать три вещи:

1. Придумать вспомогательную задачу.
2. Решить вспомогательную задачу.
3. Использовать вспомогательную задачу для решения основной.

Далее я кратко раскрою содержание трех основных этапов, но для начала хочу сделать весьма важное замечание. Дело в том, что метод Пойа не относится к числу алгоритмических методов, это не метод деления уголком, и не алгоритм Евклида. Метод Пойа я отношу к интуитивным методам.

Их отличие от алгоритмических заключается в том, что тут нет формальных правил и определений, они не могут быть запрограммированы на компьютере, но обучать им людей возможно. Все основные правила и трюки согласовываются на некотором количестве интуитивных примеров, доказать тут ничего нельзя, но экспериментальный факт заключается в том, что согласовать все друг с другом возможно. Образно говоря, метод Пойа (как и все остальные интуитивные методы) — это полный бред, но мы можем бредить согласованно, выходя независимо на одни и те же контрольные решения. Да это бред, но этот бред имеет свою структуру, и я полагаю, что он весьма полезен.

Приведем несколько примеров решения задач методом Пойа.

Пойа 1.

Червяк ползет по столбу, начав путь от его основания. Каждый день он проползает вверх на 5 см, а каждую ночь сползает вниз на 4 см. Когда он достигнет верхушки столба, если его высота равна 75 см?

Обсуждение: Задача сложная, потому что высота столба большая. Уменьшим ее.

Вспомогательная: Червяк ползет по столбу, начав путь от его основания. Каждый день он проползает вверх на 5 см, а каждую ночь сползает вниз на 4 см. Когда он достигнет верхушки столба, если его высота равна 5 см?

Решение: Если высота столба 5 см, то червяку понадобится день (12 часов), потому что достигнув верхушки столба он вниз сползать не будет. А основная задача через 70 суток сведется к вспомогательной. Поэтому всего червяку потребуется 70 суток и один день (половина суток).

Пойа 2.

За десять дней пират Ерема способен выпить бочку рома, а у пиратушки Емели ушло б на это две недели. За сколько дней прикончат ром пираты, действуя вдвоем?

Обсуждение: Трудность задачи заключается в том, что за десять дней Емеля выпивает нецелое число бочек, а за две недели — Ерема. Пусть пираты пили 140 дней. Тогда Ерема выпьет 14 бочек, а Емеля — 10 бочек, всего 24 бочки. А одну бочку они выпьют за $\dfrac{140}{24} = \dfrac{35}{6}$дней.

Итак, вернемся к трем основным шагам метода вспомогательной задачи.

Придумать полезную вспомогательную задачу наиболее сложно технически, мне известны около двух десятков техник генерации вспомогательных задач. Я Вам расскажу только об одной из них, но это чуть позже, давайте начнем с более простых, но не менее важных вещей.

Как решить вспомогательную задачу?

По своему определению вспомогательная задача — это игрушечная модель основной. Она на порядок и более проще, чем основная, поэтому вспомогательную задачу Вы решаете своим обычным методом, как Вы решали и все остальные задачи. Решение вспомогательной задачи должно быть видно с первого взгляда, ну, в крайнем случае, со второго. Более пока не буду говорить о втором шаге, а перейду к третьему.

Вспомогательную задачу для решения основной можно использовать двумя принципиально разными способами: используя Метод или используя Результат.

Представьте себе, что Вы поручили решение вспомогательной задачи младшему брату, он Вам ее решил. Далее, если для решения основной задачи, Вас интересует только ответ, и Вы спрашиваете: «Что у тебя получилось?», значит, Вы используете Результат. Если Вам ответ не важен, а важно знать как он ее решал, Вы используете Метод. Иногда (в задачах на математическую индукцию, например) Вам важен и ответ и способ решение, в этом случае Вы используете и Метод и Результат. В интуитивных техниках общие слова без примеров не несут никакой полезной информации. Поэтому перейдем к примерам.

В нижеследующих примерах мы используем Результат решения вспомогательной задачи.

Результат 1.

Купец на 540 рублей купил 138 аршинов сукна (черного и синего). Сколько купил он черного сукна и сколько синего, если синее стоило 5 рублей за аршин, а черное 3 рубля?

Обсуждение: Трудность в том, что есть сукно двух цветов, тогда вспомогательная задача может звучать примерно так: "Купец купил 138 аршинов синего сукна по 5 рублей за аршин, сколько он заплатил?"

Ответ: 690 рублей.

Вспомогательную задачу мы решили, но в основной сукно двух цветов, как быть?

Надо взять ведро черной краски и начать перекрашивать синее сукно в черное. Если перекрасить один аршин, суммарная стоимость сукна уменьшиться на 2 рубля, а нам надо ее уменьшить на $690 - 540 = 150$ рублей, для этого надо перекрасить 75 аршинов. В итоге у нас получится 75 аршинов черного сукна, и $138 - 75 = 63$ аршина синего.

Результат 2.

Кузнец подковывает одно копыто за 5 минут. Сколько времени потребуется 48 кузнецам, чтобы подковать 60 лошадей? (При ковке лошадь не умеет стоять на двух ногах.)

Обсуждение: В основной задаче слишком много кузнецов и слишком много лошадей.

Вспомогательная: Кузнец подковывает одно копыто за 5 минут. Сколько времени потребуется 4 кузнецам, чтобы подковать 5 лошадей? (При ковке лошадь не умеет стоять на двух ногах).

Нетрудно понять, что, так как надо всего подковать 20 копыт, а за пять минут мы можем подковать только 4 копыта, то меньше, чем за 25 минут, мы не управимся. Теперь надо организовать работу без простоев, для этого поставим пять лошадей по кругу, а четыре кузнеца будут обходить их по часовой стрелке, каждый раз сдвигаясь на одну лошадь. Вспомогательную задачу мы решили.

Для того, чтобы решить основную, разобьем лошадей на 12 табунов по 5 лошадей, а кузнецов на 12 бригад по 4 кузнеца и сведем основную задачу к вспомогательной.

Результат 3.

Какое число больше: 2^{300} или 3^{200}?

Обсуждение: Трудность задачи в слишком больших степенях.

Вспомогательная: Какое число больше: 2^3 или 3^2?

Нетрудно понять, что $2^3 < 3^2$.

Вспомогательная задача решена. Для того, чтобы решить основную, умножим неравенство $2^3 < 3^2$ само на себя 100 раз и получим решение основной задачи.

Результат 4.

Квадратная площадь размером 100×100 выложена квадратными плитами 1×1 четырех цветов: белого, красного, черного и серого так, что никакие две плиты одного цвета не соприкасаются ни сторонами, ни вершинами. Сколько может быть красных плит?

Обсуждение: Трудность задачи в размерах площадки.

Вспомогательная: Квадратная площадь размером 2×2 выложена квадратными плитами 1×1 четырех цветов: белого, красного, черного и серого так, что никакие две плиты одного цвета не соприкасаются ни сторонами, ни вершинами. Сколько может быть красных плит?

Ответ для вспомогательной задачи очевиден — ровно одна плита.

Для того, чтобы решить основную, разобьем площадь 100×100 на 2500 площадок 2×2, так как в каждой из них ровно одна красная плита, то на большой площадке ровно 2500 красных плит.

Результат 5.

Петя и Вася выписывают двенадцатизначное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Вася начинает. Сможет ли Петя добиться, чтобы полученное число делилось на 9?

Обсуждение: Число слишком длинное.

Вспомогательная: Петя и Вася выписывают двузначное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Вася начинает. Сможет ли Петя добиться, чтобы полученное число делилось на 9?

Простым перебором (18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90) можно убедиться, что Петя своего добьется.

Для решения основной задачи разобьем двенадцатизначное число на шесть двузначных. Тут надо отследить два момента, во-первых появляется новая пара чисел (09), во-вторых, надо убедиться, что при таком разбиении свойство делимости на 9 сохраняется.

Замечание: Признак делимости на 9 мы не использовали, и решали маленькую задачу перебором.

Если бы для решения маленькой задачи мы использовали признак делимости на 9, а потом применяли так или иначе признак делимости на 9 для решения большой задачи, это было бы уже использование Метода.

Сделаем еще несколько замечаний по Результату. Во-первых, вспомогательные задачи у нас получились очень простыми, они решались либо в лоб, либо небольшим перебором, в то время как основную задачу решить перебором было бы затруднительно. Во-вторых, основная задача выступала у нас как одна или несколько копий вспомогательной (**Результат 1** — 1 копия, **Результат 2** — 12 копий, **Результат 3** — 100 копий, **Результат 4** — 2500 копий, **Результат 5** — 6 копий).

В третьих, если мы используем результат вспомогательной задачи, нам совершенно не важно каким методом (может быть совершенно некорректным) она решалась, главное, чтобы был правильный ответ.

Далее приведу несколько примеров на Метод.

Метод 1.

Квадратный торт и круглую шоколадку на нем разрезать пополам одни разрезом.

Обсуждение: Трудность в том, что фигуры разные.

Вспомогательная: Круглый торт и круглую шоколадку на нем разрезать пополам одни разрезом.

Понятно, что искомый разрез надо провести через центры двух кругов.

Перенесем метод решения вспомогательной на основную задачу, проведя разрез через центр квадратного торта и центр круглой шоколадки, нетрудно понять, что данный разрез удовлетворяет условиям задачи.

Метод 2.

Может ли каждый из 77 телефонов быть соединенным ровно с 7 другими?

Обсуждение: Соединений много.

Вспомогательная: Может ли каждый из 77 телефонов быть соединенным ровно с одним другим?

Понятно, что не может, т. к. телефоны должны разбиться на пары, а один останется без пары.

Но это рассуждение на основную задачу не переносится. Попытаемся его модифицировать.

Так как связаны два телефона, число соединений должно быть четным, а так как каждый из 77 телефонов соединен ровно с одним другим — оно нечетное (равно 77), чего быть не может. Перенесем это рассуждение на основную задачу:

Так как связаны два телефона, число соединений должно быть четным, а так как каждый из 77 телефонов соединен ровно с семью другим — оно нечетное (равно $77 \cdot 7 = 539$), чего быть не может.

Метод 3.

Можно ли из 36 первых простых чисел составить магический квадрат 6×6?

Обсуждение: Квадрат большой.

Вспомогательная: Можно ли из 4 первых простых чисел составить магический квадрат 2×2?

Решение: Простым перебором можно убедиться, что из чисел 2, 3, 5, 7 магического квадрата не получится. Однако переборное решение на квадрат 6×6 не переносится.

Попытаемся теоретически обосновать, почему задача 2×2 не имеет решения. Мы замечаем, что 2 — единственное простое число, поэтому сумма всех чисел квадрата 2×2 равна $2 + 3 + 5 + 7 = 17$ — число нечетное, а так как в магическом квадрате суммы чисел в строках равны, общая сумма должна делиться на 2, получили противоречие. Перейдем к основной задаче.

Так как в магическом квадрате 6×6 суммы чисел в строках должны быть одинаковыми, сумма чисел в квадрате должна делиться на 6, а значит и на 2. С другой стороны сумма двойки и 35 нечетных чисел будет числом нечетным. Получили противоречие.

Заметим, что не всякий метод решения вспомогательной задачи может быть перенесен на основную задачу, метод перебора, например, практически никогда не переносится. В этом заключается недостаток использования Метода по сравнением с использованием Результата.

Поэтому в первую очередь надо попытаться использовать Результат, хотя не во всех задачах это возможно.

Для того, чтобы подчеркнуть различия между двумя способами использования вспомогательной задачи, приведем еще ряд задач.

Метод — Результат 1.

Основная: Найти последнюю цифру числа 2^{100}.

Вспомогательная: Найти последнюю цифру числа 2^{10}.

Решение вспомогательной: Понаблюдаем за последними цифрами степеней двойки: 2^1 – 2, 2^2 – 4, 2^3 – 8, 2^4 – 6, 2^5 – 2, 2^6 – 4 и далее с периодом 4. Так как $10 = 2 \cdot 4 + 2$, то 2^{10} оканчивается на 4.

Решение основной (Метод): Так как последние цифры степеней двойки имеют период 2 – 4 – 8 – 6 (длины 4), а $100 = 4 \cdot 25$, то 2^{100} оканчивается на 6.

Решение основной (результат): Мы знаем, что 2^{10} оканчивается на 4. А $2^{100} = (2^{10})^{10}$. Поэтому 2^{100} оканчивается на тоже, что 4^{10}, а $4^{10} = 2^{10} \cdot 2^{10}$, значит 2^{100} оканчивается так же, как 4×4, т. е. на 6.

Метод — Результат 2.

Основная: Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании присутствовали все, и никто не воздержался при голосовании. Когда было объявлено, что некоторое решение было принято большинством в 23 голоса, оппозиция закричала "Это обман!" Почему?

Вспомогательная 1 (*Метод*):

Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании присутствовали все, и никто не воздержался при голосовании. Когда было объявлено, что некоторое решение было принято большинством в один голос, оппозиция закричала "Это обман!" Почему?

Решение 1: Так как парламент состоит из двух равных палат, то в нем четное число депутатов. Если присутствовали все, никто не воздержался, и решение было принято большинством в один голос, в парламенте нечетное число депутатов, получается противоречие.

Это рассуждение дословно (лишь заменой 1 на 23) переносится на основную задачу.

Вспомогательная 2 (*Результат*):

Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании присутствовали все, и никто не воздержался при голосовании. Может ли некоторое решения набрать равное число голосов за и против?

Решение 2: Да, может, половина депутатов проголосовали за, а половина против. Вспомогательную задачу мы решили, но в основной задаче у нас большинство в 23 голоса. Пусть депутат, голосовавший против изменит свое мнение и проголосует за, при это разность голосов за и против увеличится на 2, а начиная с нуля и добавляя двойки 23 получить нельзя. Основная задача решена.

Итак, мы составили некоторое начальное представление о третьем шаге метода Пойа, и пора перейти к первому, к техникам генерации продуктивных вспомогательных задач. Я Вам расскажу только об одной из них, технике Таблиц.

Часто, мы встречаемся с задачами, где в условии есть два натуральных числа, которые либо равноправны, либо простым образом связаны друг с другом. Такие задачи будем называть задачами с таблицами. Полагая первое число ее длиной, а второе — шириной. Длину и ширину будем называть параметрами таблицы. Для таблиц можно ввести два оператора фантазии, позволяющих создавать плодотворные вспомогательные задачи. Прежде всего, это оператор сжатия. Один параметр таблицы мы оставляем неизменным, а второй уменьшаем до минимально возможного значения. Далее применяется оператор деления. Оба параметра таблицы мы одновременно уменьшаем в целое число раз, так чтобы получившиеся значения были минимальными из всех возможных.

Мы также будем использовать определенную форму записи:

Таблица: 27×6.

Сжимаем: 27×1 или 1×6.

Делим: 9×2.

А теперь перейдем к примерам.

Таблица 1.

По длинному узкому каналу один за другим идут три парохода. Навстречу им — еще 3 парохода. Канал такой узкий, что два парохода в нем разъехаться не могут, но в нем есть залив, где может поместиться один пароход. Как им разъехаться?

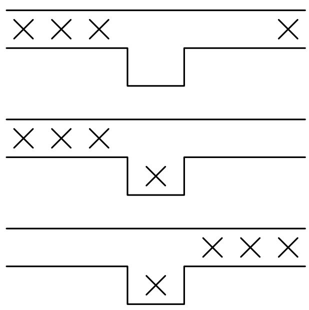
Решение:

Таблица: 3×3.

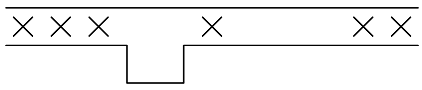
Сжимаем: 3×1 или 1×3.

Делим: 1×1.

Решение начнем с задачи 3×1. Т. е. с одной стороны у нас три парохода, с другой — один. Решение почти очевидно:



Решив вспомогательную задачу вернемся к основной. Как случай 3×3 свести к случаю 3×1? Да отогнать два парохода куда подальше.



Если учесть, что пароходы могут двигаться в обе стороны, то решение задачи 3×3 сводится к решению трех задач 3×1.

Таблица 2.

Можно ли из 36 первых простых чисел составить магический квадрат 6×6?

Решение:

Таблица: 6×6.

Сжимаем: нельзя.

Делим: 2×2.

Напомним, что простые числа — это натуральные числа, отличные от единицы, которые делятся только на самих себя и единицу. В магических квадратах сумма чисел по вертикалям, горизонталям и двум главным диагоналям должна быть одинакова.

Задачи 6×1 и 1×6 смысла не имеют. Мы будем говорить, что оператор сжатия в данном случае не допускается задачей.

Рассмотрим задачу 2×2. Простым перебором мы можем убедиться в том, что из чисел 2, 3, 5, 7 составить магический квадрат 2×2 невозможно. Однако применить полный перебор для задачи 6×6 представляется трудным. Кроме того, отрицательный Результат задачи 2×2 использовать для решения задачи 6×6 тоже не выйдет, потому что из того, что нельзя составить 9 маленьких 2×2 не вытекает, что нельзя составить большой 6×6. Мы будем в таких случаях говорить что **Нет-решение** маленькой задачи не допускает перенос по результату.

Контрольный вопрос: А **Да-решение** нашей задачи 2×2 допускает перенос по результату?

Поищем другое решение задачи 2×2, не переборное, а теоретическое.

Нетрудно заметить, что 2 отличается от всех остальных простых чисел тем, что оно четное. В строке, где будет стоять 2, сумма чисел будет нечетная, а в остальных — четная. Данное решение дословно переносится на случай таблицы 2×2.

Контрольный вопрос: А что мы сейчас использовали — Метод или Результат?

Решение второго примера вызывает некоторые дополнительные вопросы. Почему мы рассматривали таблицу 2×2, а не 1×1? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, разобьем вспомогательные задачи на три класса: простейшие, примитивные, бессмысленные.

Бессмысленные задачи — это те, которые не имеют смысла. Например $(-1) \times 3$ в первом случае, 6×1 и 0×0 во втором. Сразу за бессмысленными задачами следуют примитивные задачи.

Примитивные задачи — это те, решение которых безальтернативно, задачи, которые как бы решают сами себя. Например 3×0 в первом случае, 1×1 во втором. Действительно, если слева три парохода, а справа ни одного, то им очень легко разминуться. Очень легко составить магический квадрат из одного простого числа.

Сразу за примитивными задачами следуют простейшие. Простейшие задачи — это те, которые мы можем решить с помощью небольшого перебора.

Например, 3×1 в первом случае и 2×2 во втором. Так вот операторы фантазии необходимо применять до простейших задач. В задаче о магическом квадрате случай 1×1 — примитивен, поэтому мы выбрали 2×2.

Таблица 3.

Какое максимальное число королей можно поставить на шахматную доску так, чтобы ни не били друг друга?

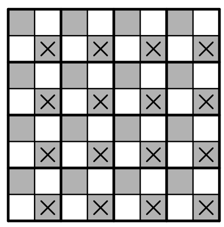
Решение:

Подход 1.

Таблица: 8×8.

Сжимаем: 8×1 или 1×8.

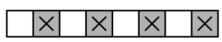
Делим: 2×2.



Решение 1. Простым перебором можно убедиться, что в случае таблицы 2×2 можно поставить только одного короля. Разобьем квадрат 8×8 на 16 квадратиков 2×2. И убедимся, что всего можно поставить 16 королей, а 17 — нельзя, потому что, если поставить 17 королей на большую доску, то минимум двое из них окажутся на маленькой, а это запрещено.

В данном случае мы использовали Результат задачи 2×2 для решения задачи 8×8.

Решение 2. Рассмотрим задачу 8×1. Простым перебором можно убедиться, что в такую полоску можно поставить не более 4 королей.



Попытаемся найти теоретическое объяснение этому факту. Полоску из восьми клеток можно разрезать на 4 кирпичика из двух клеток. Ясно, что в одном кирпичике может быть только один король, поэтому пять королей в полоску из восьми клеток поставить нельзя (иначе в каком-то кирпичике появилось больше одного короля, что запрещено).

По аналогии разобьем квадрат 8×8 на 16 квадратиков 2×2, а дальше смотри первое.

Контрольный вопрос: Мы использовали метод или результат решения задачи 8×1 для решения задачи 8×8?

Подход 2.

Мы могли посчитать, что сжатие до 8×1 чрезмерно, и задача допускает сжатие только до 8×2. Тогда мы получили бы:

Таблица: 8×8.

Сжимаем: 8×2 или 2×8.

Делим: 2×2.

Упражнение: Получите два решения задачи 8×8, на основании решения задачи 8×2. Сначала по Результату, потом по Методу. Сравните их с предыдущими решениями.

Таблица 4.

Дана таблица чисел 9×6, сумма чисел в каждой строке меньше нуля. Может ли быть так, что в каждом столбце сумма чисел будет больше нуля?

Решение:

Таблица: 9×6.

Сжимаем: 9×1 или 1×6.

Делим: 3×2.

Рассмотрим строку 1×6. Могут ли все числа в строке быть больше нуля, а их сумма меньше нуля? Конечно нет. Как превратить таблицу 9×6 в строку 1×6 с нужными свойствами? Необходимо разрезать таблицу на девять строк 1×6 и просуммировать строки. Тогда, если в первоначальной таблице сумма чисел в каждой строке меньше нуля, а сумма чисел в каждом столбце больше нуля, то мы получим строку 1×6 в которой все числа больше нуля, а сумма их меньше нуля, что невозможно.

Контрольный вопрос: А что мы использовали здесь: Метод или Результат?

Упражнение: Опираясь на задачу 1×6, и используя другой способ сведения, получите новое решение задачи 9×6.

Таблица 5.

За круглым столом сидят несколько мальчиков и девочек. Докажите, что число пар соседей разного пола четно.

Решение: С первого взгляда не видно, где здесь таблица, однако, внимательнее прочитав условие задачи, видим, что таблица задана неявно. За столом у нас сидят m мальчиков и n девочек.

Таблица: $m \times n$.

Сжимаем: $m \times 1$ или $1 \times n$.

Делим: нельзя.

Итак, за столом у нас несколько мальчиков и одна девочка, тогда число пар соседей разного пола равно двум и является четным. Остальных девочек будем подсаживать по одной, а место, куда садиться, они выбирают сами. Возможны два случая: если очередная девочка скромная, то она сядет рядом с другой девочкой, и число пар соседей разного пола не изменится. Нескромная девочка сядет между двумя мальчиками, в этом случае число пар соседей разного пола увеличится на два. Итак, в начале искомое число было четным, далее либо не менялось, либо увеличивалось на два, понятно, что и в конце оно будет четным.

Мораль этой задачи: слово "несколько" в условии заменяйте неизвестными, и вообще надо внимательно приглядываться к условия задачи, таблица в нем может присутствовать неявно.

Замечание: Данная задача допускает сжатие и до нуля, что соответствует полному отсутствию мальчиков или девочек поначалу.

Контрольный вопрос: Что мы использовали?

Таблица 6.

Хулиганы Петя и Вася рвут стенгазету на мелкие кусочки. Вася рвет каждый попавшийся ему кусок на 4 кусочка, а Петя — на 7. Может ли в результате получиться 1997 кусочков?

Решения: чисел много в задаче слишком, но можно заметить, что 4 и 7 равноправнее. Таким образом, стоит рассмотреть таблицу 4×7.

Таблица: 4×7.

Сжимаем: 4×1 или 1×7.

Делим: нельзя.

Решение 1. Начнем с задачи 4×1. Один хулиган отдыхает, а второй рвет на четыре части. Что может получиться? 1, 4, 7, 10, 13, ... каждый раз число частей увеличивается на три, а уравнение $1 + 3\kappa = 1997$ решений в натуральных числах не имеет. Поэтому в этой задаче ответ "не может".

Рассмотрим задачу 1×7. Теперь работает первый хулиган, разрывая газету на шесть частей, у него может получиться 1, 7, 13, 19, 26, ... Каждый раз число частей увеличивается на шесть, а уравнение $1 + 6\kappa = 1997$ решений в натуральных числах не имеет. Первый тоже не справится. Если теперь они заработают оба, то число частей будет увеличиваться на три или на шесть, а уравнение $1+3\kappa+6p = 1997$ решений в натуральных числах не имеет, значит, не может.

Решение 2. После Васи число кусочков газеты увеличивается на 3, а после Пети — на 6. Мы выяснили, что один Вася получить 1997 кусочков не может. Пусть теперь работают оба хулигана, и Петя ввел дедовщину, когда приходит время рвать ему, он два раза посылает Васю. Таким образом, задача с двумя хулиганами сводится к одному работающему Васе, а он получить 1997 кусочков не может.

Контрольный вопрос: В каком решении мы использовали метод, а в каком результат?

Я познакомил Вас кратко с методом вспомогательной задачи, а теперь хочу поговорить о его достоинствах.

1. Все примеры были элементарными, однако и некоторые шестые задачи Московской математической олимпиады легко решаются методом Пойа. Моя статистика по 8 – 10 классам примерно такая: четыре из шести задач можно решить методом вспомогательной задачи. Следует отметить, что чем длиннее условие основной задачи, тем труднее ее решить методом Пойа.

2. Я никогда не говорил, что с помощью любого решения любой вспомогательной задачи можно решить основную. Но моя статистика примерно такова: для очень многих задач можно придумать не более трех разумных вспомогательных, каждая из вспомогательных имеет не более трех различных решений, и одно из решений одной из вспомогательных задач является ключом для решения основной задачи.

3. Метод Пойа является естественным развитием арифметического метода решения задач (смотри **Пойа 2**, **Результат 1**). Помимо этого метод вспомогательной задачи является развитием метода перебора. Вместо того, чтобы решать большую задачу, которую перебором решить нельзя, мы конструируем маленькую, которая перебором легко решается, а потом сводим большую к маленькой (смотри **Результат 4**, **Результат 5**, **Таблица 3**). Большой перебор по данным в основной задаче мы размениваем на небольшой перебор по решениям вспомогательной задачи.

4. Д. Пойа как-то заметил, что хорошая классификация предполагает разбиение задач на такие типы, что тип задачи предопределяет метод ее решения. Стандартная классификация олимпиадных задач: задачи на четность, задачи на индукцию, задачи на принцип Дирихле, задачи на инвариант — это классификация по решениям. Но в начале у нас нет решения, у нас есть только условие.

Техники придумывания вспомогательных задач (смотри технику Таблиц) ориентированы на работу с условием задачи.

5. Метод вспомогательной задачи выводит только на универсальные решения. Дело в том, что вспомогательная задача на порядок проще основной, и имеет намного меньше различных решений, чем основная. Выживают только самые сильные решения, которые подходят для целой серии задач (смотри **Результат 2**, **Результат 3**, **Результат 4**, **Результат 5**, **Метод 2**, **Метод 3**, **Таблица 1**, **Таблица 2**).

Не замечая этого, мы решаем не две задачи (основную и вспомогательную), а целую серию задач. При этом, так как решение игнорирует мелкие детали, свойственные индивидуальным задачам в серии, оно получается кратким и изящным. Кроме того, по двум задачам мы можем легко и однозначно провести обобщение. Переведя неявное знание в явное.

6. Метод вспомогательной задачи хорошо взаимодействует с классическими методами решения олимпиадных задач. Дело в том, что классические методы — это методы, наиболее часто встречающиеся в решении задач, можно сказать, самые живучие методы. А когда мы переходим к вспомогательной задаче, мы естественным образом производим их отбор. Мы сами выходим на эти методы в ситуациях, где они наиболее обозримы и очевидны (смотри **Таблицу 3**). Мы применяем метод Дирихле не зная, что это метод Дирихле. Скажу больше, если какая-нибудь теория используется для решения вспомогательной и основной задач, или для перехода от вспомогательной задачи к основной, то основная задача, решаемая методом Пойа вынуждает нас построить эту теорию (смотри **Результат 5**). Решая эту задачу, мы можем обнаружить и доказать признак делимости на 9. При этом теория возникает не сама по себе, а вместе с задачей, которую с ее помощью можно решить.

7. Метод интуитивно прозрачен, основан на вере в то, что похожие задачи имеют похожие решения. Неявно, подсознательно, люди решают задачи с помощью упрощения. Иллюстрацией этого факта является то, что очень часто учащиеся неправильно понимают условие, решая другую, упрощенную задачу. Они незаметно для себя генерируют вспомогательную задачу.

Метод Пойа позволяет эти неявные вещи сделать явными, оптимизировать их, а потом автоматизировать.

8. Является одной из реализаций метода моделирования. Вспомогательные (игрушечные) задачи служат моделями различных черт основной задачи. Работая с игрушечными задачами, мы постепенно го-

товимся к решению основной.

9. Метод открыт. У ученика есть выбор вспомогательной задачи из нескольких разумных, выбор в решении вспомогательной задачи, и выбор в способе использования. К счастью, этот выбор обозрим. Но его наличие приводит к нескольким возможным контрольным решениям. И новые решения порой находишь там, где все казалось бы знаешь.

10. Решая задачу методом Пойа мы многие полезные вещи выполняем не замечая этого. Например, решение вспомогательной задачи служит проверкой для решения основной, мы выполняем проверку решения еще до того как решили задачу! При этом проверка выполняется в более простом случае. Многие ошибки интуиции в большой задаче для малой задачи исключены (смотри **Пойа 1**).

11. Весь курс школьной математики может быть изложен с помощью метода вспомогательной задачи. При этом не возникает эффекта рояля из кустов, а у учащегося возникает иллюзия, что он сам догадался до новой теории. Может быть использован для самостоятельного повторения и закрепления пройденного материала (в классе учитель дает лемму о точной верхней границе, дома просит сформулировать и доказать лемму о точной нижней границе, используя Метод или Результат первой леммы). Метод Пойа может быть использован как эффективное мнемоническое средство. Он позволяет восстанавливать забытые решения и доказательства. «Объясняет» откуда взялись решение задачи, доказательство теоремы, новая теория или метод.

12. Метод позволяет решение сложной задачи разложить на ряд простых шагов. Каждый шаг понятен и обозрим. Многие из них могут выполняться независимо друг от друга. Например, мы можем сначала решить вспомогательную задачу, а потом попытаться ее использовать. А можем сначала попытаться использовать гипотетически решенную вспомогательную задачу.

Метод позволяет избежать логических ошибок.

13. Метод достаточно компактен. Имеет техники разных уровней, можно постепенно улучшать свои умения. Даже не полное следование методу приносит пользу. Действуя по протоколу, в любой момент времени мы можем оценить, как далеко мы продвинулись в решении данной задачи. Не дает ощущения тупика. Если есть небольшие продвижения в решении, учащийся это понимает.

14. Развивает разумную фантазию. Для сведения одной задачи к другой требует введения новых понятий и новых теоретических фактов. Позволяет «уточнять» некорректно сформулированные задачи. Если задача методом Пойа не решается, это также дает некоторую информацию о задаче.