# Математические бои в лицее 1511

*А.В. Иванищук*

*учитель математики лицея №1511 при МИФИ*

В Лицее 1511 (ранее физико-математическая школа 542) математические бои проводятся по данным правилам уже более 20 лет. Что же заставило нас отойти от правил классического математического боя? Большая учебная нагрузка не позволяет занимать единственный выходной день. В наших математических боях, основная цель которых состоит в развитии математического кругозора, участвуют дети с различным уровнем подготовки, разной скоростью мышления, разных математических пристрастий. Проведение боя по нашим правилам позволяет учесть большинство этих особенностей. Поскольку бой состоит из двух частей, то могут проявить себя как ученики с более высокой скоростью мышления при решении не очень сложных задач в основной аудитории, так и дети, которым для решения задач требуется более длительное время. Конкурсы требуют от участников проявления как индивидуальных способностей, так и умения работать в команде.

Классы в Лицее разбиваются на большинстве предметов на половинки, и каждая половинка выставляет на бой команду от 4 до 8 человек в каждой. Чаще всего бои проходят в субботу. Для проведения одного боя необходимы три аудитории и, как минимум, двое судей. Судьями являются преподаватели Лицея и студенты-выпускники. Проведение всего боя занимает 3 – 4 часа, из которых «довыездная» часть занимает 2 – 2,5 часа. Турнир математических боев в Лицее проходит в каждой учебной параллели чаще всего по системе выбывания двух худших проигравших команд или по олимпийской системе. При небольшом количестве команд можно организовать круговой турнир. Для встреч команд из разных параллелей рекомендуется давать различное время на обдумывание при одинаковом количестве баллов за задачу. У нас в Лицее проводились завершающие бои параллелей 10-х и 11-х, причем в них не всегда побеждали 11-е. Были бои школьников И.В. Ширстовой с выпускниками и даже с учителями. (Выпускники проиграли, а учителя победили).

Подготовка к бою состоит в подборе задач, обсуждении критериев выставления баллов. Задачи подбираются самого разного уровня сложности, тематика их и олимпиадная и учебная. Количество баллов за задачи конкурсов в основной аудитории к количеству баллов за выездной конкурс относятся приблизительно как 3 : 2.

Далее приводятся правила и задачи математических боев параллелей 10-х и 11-х классов.

## *Основные правила*
### *математического боя*[1]

1. В математическом бое участвуют две команды от 4 до 8 человек в каждой.
2. Математический бой состоит из четырех частей:
   - ***конкурс командного решения задач***;
   - ***экспресс-конкурс***;
   - ***конкурс капитанов***;
   - ***выездной конкурс***.
3. Вначале две группы не более чем по четыре игрока от каждой команды переходят в другие аудитории, где им сообщаются условия задач выездного конкурса и время, отведенное на их решение. При решении задач команда может использовать любую литературу, но не имеет права общаться по поводу решения задач ни с кем, кроме жюри. Капитаны команд в эти группы не входят.
4. После того, как в каждой команде останется по 4 человека, жюри проводит конкурс ***командного решения задач***. Командам одновременно предлагается задача для решения и сообщается время, за которое необходимо решить эту задачу. Максимальное количество баллов, которое может присудить жюри команде за решение задачи, равно числу минут, отведенному на ее решение.
5. В решении задачи могут принимать участие все члены команды. Когда указанное время заканчивается, каждая из команд одновременно рассказывает свое решение жюри. После недолгого совещания жюри объявляет количество баллов, присуждаемое каждой команде. Конкурс командного решения состоит из двух задач.
6. Далее проводится ***экспресс-конкурс***. Для решения каждой задачи, которую предлагает жюри, от обеих команд к доске одновременно выходит по одному человеку. Участники находятся за крыльями доски, команда не должна видеть подготовку члена своей команды к ответу. Участники получают

[1] Классические правила математического боя существенно отличаются от изложенных в статье.

задания на карточках, для команд и болельщиков жюри зачитывает условия. Экспресс-конкурс состоит не более чем из шести задач. Каждый игрок решает не более двух задач. Порядок выхода к доске определяет капитан, который сам к доске не выходит. Ответы заслушиваются одновременно, оцениваются так же, как и в командном конкурсе, за досрочный ответ баллы не добавляются.
Если были выставлены нулевые оценки игрокам обеим команд, то жюри разрешает помощь команды. Оценки выставляются из расчета половины баллов по задаче.

7. После экспресс-конкурса начинается ***конкурс капитанов***. Капитаны обеих команд выходят к доске и решают три задачи. Оценки выставляются аналогично командному конкурсу. Помощь команды не разрешается.
   Баллы, присуждаемые жюри за решения задач в конкурсе капитанов, идут в общий зачет команды и, кроме того, служат для определения победителя отдельно в конкурсе капитанов. Если после решения предложенных задач победитель не выявлен, то жюри может дать дополнительные задачи, либо определить победителя жребием.
8. По окончании конкурса капитанов в основную аудиторию приглашаются члены команд, решавшие задачи ***выездного конкурса***. Командам предоставляется двухминутный перерыв для определения тактики проведения выездного конкурса.
9. Победитель конкурса капитанов имеет право вызвать другую команду на одну из выездных задач, либо передать право вызова другой команде, либо отказаться от права вызова.
10. Если команда принимает вызов соперников, то она выдвигает отвечающего, а другая оппонента. Отвечающий (докладчик) и оппонент выдвигается только из числа участников выездного конкурса. Каждый может быть выдвинут докладчиком или оппонентом не более двух раз (в сумме). Все выдвижения делает капитан.
11. Если команда не принимает вызов, то другая команда обязана предоставить решение. В этом случае команда, не принявшая вызова, выдвигает оппонента. Если при этом оппонент докажет, что у команды, которая вызывала, нет решения задачи, то вызов считается некорректным. Оппонент в этом случае получает 5 баллов, а перемена ролей (см. далее) невозможна.
12. Если оппонент доказал, что у докладчика нет решения (вопрос об этом решает жюри), то оппонент получает право (но не обязан) рассказать свое решение. Если оппонент взялся рассказывать свое решение, то происходит полная перемена ролей: бывший докладчик становится оппонентом и может зарабатывать баллы за оппонирование. Если же оппонент не доказал, что у докладчика нет решения, но выявил в предложенном решении некоторые конкретные недостатки, то оппонент получает право (но не обязан) устранить все (или некоторые) из этих недостатков ("залатать дыры"). Такое же право оппонент получает, если он доказал, что у докладчика нет решения, но отказался рассказывать собственное решение. Если оппонент взялся "залатывать дыры", то происходит частичная перемена ролей: оппонент обязан сформулировать предварительно, что именно он будет делать (например, разбирать такой-то неразобранный докладчиком случай, доказывать такое-то недоказанное докладчиком утверждение или что-либо еще), а бывший докладчик становится оппонентом и может зарабатывать баллы за оппонирование сформулированных утверждений.
    Обратной перемены ролей ни в каком случае не происходит!
13. Капитан команды, рассказывавшей только что решение задачи или сделавшей некорректный вызов, получает право вызова и может либо вызвать команду соперников на одну из оставшихся задач, либо отказаться вызывать.
14. Если команда отказывается вызывать, то другая команда может по своему желанию рассказать решение тех задач, которых еще не обсуждались. В этом случае она выдвигает докладчика, а противоположная команда оппонента. После отказа от вызова не может происходить ни полной, ни частичной перемены ролей (см. далее).
15. Во время ответа по задаче говорить могут только отвечающий и оппонент с разрешения жюри. Докладчик и оппонент обязаны вести дискуссию в вежливой, корректной форме, критикуя действия противника, не допускать критики его личности, обращаться к нему только на "Вы". Докладчик и оппонент могут обращаться к своим капитанам с просьбой о перерыве для консультации. Другое общение между командой и докладчиком (оппонентом) допускается только во время перерыва. Другие разговоры и подсказки караются штрафом (до 10 баллов).
16. В процессе ответа оппонент может задавать вопросы докладчику только с разрешения жюри. Жюри вправе отвести вопросы оппонента, если они не касаются существа дела или явно затягивают ответ. В процессе ответа оппонент не должен высказывать свое отношение к ответу.
17. Отвечающий заканчивает свой ответ по задаче словами: «Я закончил». После этого оппонент говорит все, что он хочет сказать по поводу ответа докладчика. Жюри вправе прервать оппонента, если он говорит не по существу. Оппонент заканчивает словами: «Я закончил». Если в течение минуты оппонент не задал вопрос, то считается, что у него вопросов нет. Если докладчик после истечения минуты не начал отвечать на вопрос, то считается, что у него ответа нет.
18. Жюри дает оценку выступлений докладчика и оппонента и приводит свои соображения по данной задаче.

19. Максимальное число баллов, которое могут получить докладчик и оппонент в сумме — 10.
20. Выигрывает команда, набравшая в сумме наибольшее количество баллов. Если команды набрали равное количество баллов, а победитель должен быть обязательно определен, то командам предлагаются дополнительные задачи, количество которых определяет жюри. Преимущество в два балла не считается победой. Жюри также имеет право назначить блиц.
21. Каждая команда имеет право на два двухминутных таймаута (либо на 8 полуминутных — по договоренности команд). Таймауты команда может взять в любой момент (кроме конкурса капитанов). При этом соперники тоже могут пользоваться этим временем). Во время таймаута команда имеет право совещаться, не покидая аудитории.
22. Верховным толкователем правил математического боя является жюри.

## Задачи математических боев

## 10 класс

### *Коллектив*

**1.** (7) В треугольнике центры вписанной и описанной окружности симметричны относительно одной из сторон. Найдите величины углов этого треугольника.

**2.** (7) Представьте число 3 в виде произведения наименьшего количества рациональных множителей, сумма которых равно нулю.

### *Экспресс*

**1.** (5) Дано множество из семи ненулевых комплексных чисел, в котором произведение любых двух чисел из данного множества принадлежит данному множеству. Докажите, что хотя бы одно из чисел данного множества равно единице.

**2.** (5) Изобразите на плоскости график функции $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, если известно, что $\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2c}{b}$.

**3.** (5) На плоскости даны две непересекающиеся окружности. Укажите все точки плоскости, из которых можно провести касательную к одной из окружностей и которая имела бы общие точки с другой окружностью.

**4.** (5) Все натуральные числа от 1 до 1000 разбили на две группы: четные и нечетные. В каждой группе посчитали суммы цифр, использованных для записи этих чисел. Какая сумма больше и насколько?

**5.** (5) В ряд лежат 19 шишек. Играют два игрока, делая ходы по очереди. За один ход можно забрать одну или две шишки, лежащие рядом. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

**6.** (5) В выпуклом четырехугольнике проведены диагонали. Площади трех образовавшихся треугольников равны 3, 5 и 6. Найдите площадь четырехугольника.

### *Капитаны*

**1.** (5) Дана математическая последовательность букв: О, Д, Т, Ч, П, Ш, .... Какая буква стоит на 26 месте этой последовательности?

**2.** (5) Докажите, что при всех $a > 1$ значение выражения $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{2}{1+a^2} + \dfrac{4}{a+a^4} + \dfrac{8}{a+a^8} + \dfrac{16}{a+a^16} + \dfrac{1}{1-a}$ отрицательно.

**3.** (6) В треугольнике из разных вершин проведены биссектриса, высота и медиана. Могут ли они в пересечении образовывать равносторонний треугольник?
**Дополнительная задача** (5): Сколькими нулями заканчивается число $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100$.

### *Выездной*

**1.** Придумайте уравнение (в виде одной формулы), графиком которого являются два различных непересекающихся квадрата, с непараллельными сторонами, и окружность.

**2.** В качестве доказательства того, что правильный ответ еще не означает правильность решения, учитель привел следующий пример. Возьмем дробь $\dfrac{19}{95}$. После зачеркивания 9 в числителе и знаменателе («сокращения» на 9) получаем верный ответ — дробь $\dfrac{1}{5}$. Точно так же дробь $\dfrac{1999}{9995}$ можно «сократить» на три девятки и получить верный результат. А возможно ли, чтобы в результате подобного сокращения также получился правильный ответ, равный $\dfrac{1}{3}$? (Рассматриваются дроби вида $\dfrac{1a}{a3}$. Здесь буквой $a$ обозначено несколько цифр, следующих в одинаковом порядке в числителе после 1, а в знаменателе перед 3. «Сокращаем» на $a$).

**3.** Три окружности радиуса $R$ проходят через одну точку. Докажите, что оставшиеся точки попарных пересечений лежат на окружности того же радиуса.

**4.** Докажите, что $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.

## 11 класс

### *Коллектив*

**1.** (7) Все коэффициенты многочлена целые и по модулю не превосходят 9. Докажите, что все действительные корни этого многочлена не превосходят по модулю 10.

**2.** (7) Найдите три таких многоугольника, чтобы было можно, прикладывая их друг к другу, получить квадрат $8 \times 8$ без любой его клетки.

### *Экспресс*

**1.** (6) При каких натуральных $p$ существует плоский невыпуклый $p$-угольник, при вращении которого вокруг некоторой прямой в его плоскости, можно получить прямой круговой конус.

**2.** (6) На плоскости $(x, y)$ укажите все точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $\operatorname{tg}(\ln[\cos x]) \geq 2^{|y|} + |2^{|y|} - 2| - 2$ ([ ] – целая часть).

**3.** (6) Могут ли у двух последовательных натуральных чисел суммы цифр делиться на 5?

**4.** (6) Найдите действительные корни уравнения: $x^3 + x^2 + x = -\dfrac{1}{3}$.

**5.** (5) В какое наименьшее количество цветов надо раскрасить доску $100 \times 100$, чтобы никакие две соседние клетки (по горизонтали, вертикали или диагонали) не были окрашены в одинаковый цвет?

### *Капитаны*

**1.** (4) Незнайка сложил число, записанное с помощью единицы, двойки и тройки с числом, записанным с помощью двух единиц, двух двоек и двух троек и получил число, записанное с помощью одной единицы, двух двоек и трех троек. Докажите, что Незнайка ошибся.

**2.** (5) При каких действительных значениях параметра $c$ уравнение $(5x^2 + \cos 3cx)^3 - c\sqrt{\operatorname{tg}^4 6x + 1} + c^2 + 3 - \sqrt[4]{81 - x^4} = 0$ имеет ровно три различных решения.

**3.** (6) В треугольной пирамиде все грани — равные треугольники. Докажите, что в такой пирамиде центры вписанной и описанной сфер совпадают.

### *Выездной*

**1.** Множество шести различных ненулевых комплексных чисел обладает следующим свойством: произведение любых двух из них, а также любая натуральная степень каждого из них принадлежит данному множеству. Докажите, что данное множество содержит число $-1$.

**2.** Докажите, что в правильном восемнадцатиугольнике $A_1A_2 \ldots A_{18}$ диагонали $A_1A_9$, $A_3A_{13}$ и $A_5A_{16}$ пересекаются в одной точке.

**3.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых ровно пять различных наборов натуральных чисел $(x, y, z)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 12x^2 - 4x - 2xy + 3y - 9 = 0, \\ ayz + axz + axy > xyz. \end{cases}$$

**4.** В треугольной пирамиде $ABCD$ на ребрах $AC$ и $AB$ выбраны соответственно точки $L$ и $K$ так, что $LK||BC$. Точки $M$, $N$, $P$, $R$ — середины ребер $BC$, $AD$, $BD$, $CD$ соответственно. Докажите, что объемы треугольных пирамид $BKPR$ и $CLMN$ равны.

# Решения

## 10 класс

### *Коллектив*

1. *Ответ*: $36°$, $36°$, $108°$.

*Решение*: пусть $O$ и $I$ — центры описанной и вписанной окружностей, симметричные относительно стороны $AC$. Легко доказать, что треугольник $ABC$ — тупоугольный равнобедренный (см. рис. 1). Пусть $\angle BAI = \beta$. $AI$ — биссектриса угла $BAC$, то есть, $\angle IAP = \beta = \angle PAO$ из симметрии точек $O$ и $I$ относительно стороны $AC$. Треугольник $ABO$ — равнобедренный, откуда $\angle OBA = \angle OAB = 3\beta$. В прямоугольном треугольнике $APB$ сумма острых углов $BAP$ и $ABP$ равна 5, откуда $\beta = 18°$.

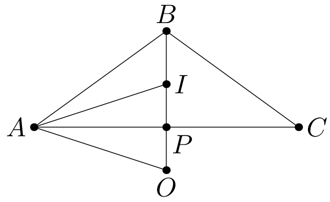


Рис. 1

2. *Ответ*: $3 = \dfrac{363}{70} \cdot \dfrac{20}{77} \cdot \left(-\dfrac{49}{110}\right) \cdot (-5)$.

*Решение*: меньшим количеством множителей обойтись нельзя. Приведенное разложение и доказательство минимальности принадлежит М.А. Цфасману. Оценивалось приближение к «идеалу». Школьники приводили разложение: $3 = \left(-\dfrac{3}{2}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 4$.

## *Экспресс*

1. *Доказательство*: результат перемножения всех этих чисел, по условию, равен одному из чисел данного множества. Сократив на получившееся ненулевое число, получаем, что произведение оставшихся равно 1, и она принадлежит рассматриваемому множеству.

2. *Ответ*: при $a < 0$ — точка с координатами $\left(\sqrt{\dfrac{c}{a}}, 0\right)$. При $a > 0$ $y = \sqrt{a}\left|x + \sqrt{\dfrac{c}{a}}\right|$.

*Решение*: равенство дробей означает, что под корнем полный квадрат с коэффициентом.

3. *Решение*: а) Одна из окружностей лежит внутри другой. В этом случае решением являются все точки вне большей окружности, включая ее.

б) Ни одна из окружностей не лежит внутри другой. Граница искомой области состоит из частей общих касательных к окружностям. Ответом является объединение части плоскости между общими внешними касательными, содержащая окружности, с частью плоскости, между общими внутренними касательными, содержащая окружности.

4. *Ответ*: сумма цифр нечетных чисел на 499 больше суммы цифр четных чисел.

*Решение*: разобьем все числа на пары: 2 и 3, 4 и 5, 6 и 7, 8 и 9, 10 и 11, … , 998 и 999, 1000 и 1. В паре 1000 и 1 суммы цифр равны, в остальных 499 парах сумма цифр нечетного числа на 1 больше суммы цифр четного.

5. *Ответ*: выигрывает первый.

*Решение*: первый забирает одну центральную шишку, после чего отвечает ходам второго симметрично в другой половине шишек.

6. *Ответ*: 24, или 17,6, или 16,5.

*Решение*: используя формулу для площади треугольника $\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$, легко показать, что произведения площадей пар треугольников с вертикальными углами равны для любого выпуклого четырехугольника, в котором проведены диагонали.

## *Капитаны*

1. *Ответ*: буква Д или буквы ДШ.

*Решение*: данная последовательность: Один, Два, Три, Четыре, Пять, Шесть, … .

2. *Решение*: $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1-a} = \dfrac{1-a+1+a}{1-a^2} = \dfrac{2}{1-a^2}$. Аналогично, $\dfrac{2}{1-a^2} + \dfrac{2}{1+a^2} = \dfrac{1}{1-a^4}$. Продолжая далее, приведем всю сумму к $\dfrac{32}{1-a^{32}} < 0$ при $a > 1$.

3. *Ответ*: нет.

*Решение*: пусть в треугольнике $ABC$ проведены медиана $BD$, высота $CE$ и биссектриса $AF$, которые образуют в пересечении равносторонний треугольник $VGK$ (см. рис. 2). Треугольник $AKE$ — прямоугольный с углом $EKA$ равным $60°$, следовательно, угол $EAK$ равен $30°$ и угол $BAC$ равен $60°$. В треугольнике $AGD$ угол $AGD$ равен $60°$ (как вертикальный к углу $VGK$), угол $GAD$ равен $30°$, откуда, угол $GDA$ — прямой. Значит, медиана $BD$ в треугольнике $ABC$ является высотой, и треугольник $ABC$ — равносторонний, в котором проведенные отрезки $BD$, $CE$ и $AF$ пересекаются в одной точке.

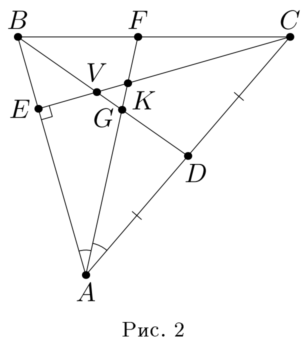


Рис. 2

**Дополнительная задача**.

*Ответ*: 24.

*Решение*: ноль в конце числа получается при произведении 2 и 5. Причем множитель 2 входит в разложение 100! в степени большей, чем степень множителя 5. Посчитаем степень 5: в каждом десятке есть 2 числа, кратные 5, причем числа 25, 50, 75 и 100 имеют в своем разложении вторую степень 5.

(*Дополнительная задача была заготовлена, так как бой не мог закончиться вничью. Она должна была быть выдана в конце боя, если разница очков была бы не более трех*).

## *Выездной*

1. *Ответ*: $(|x|+|y|-3)(x^2+y^2-4)\sqrt{400-x^2}\sqrt{400-y^2}=0$.

2. *Ответ*: да, возможно. Например, для $a=428571$.

*Решение*: пусть искомое $a$ $n$-значное число. По условию $\dfrac{10^n+a}{10a+3}=\dfrac{1}{3}$. Откуда $3\cdot 10^n+3a=10a+3$, то есть $3\cdot 10^n-3=7a$, $a=\dfrac{3(10^n-1)}{7}$. Подбором находим, что при $n=6$ $a$ — натуральное число 428571. Существует бесконечное множество подходящих $a$.

3. *Доказательство*: пусть $O_1$, $O_2$, $O_3$ — центры окружностей, точка $D$ — точка пересечения всех трех окружностей (см. рис. 3). Точки $A$, $B$, $C$ — точки попарных пересечений этих окружностей. $BO_3DO_2$, $O_1AO_2D$ — ромбы. $O_3BAO_1$ — параллелограмм, так как $BO_3$ и $AO_1$ параллельны и равны. Следовательно, $AB=O_3O_1$. Аналогично доказывается, что $BC=O_2O_1$ и $AC=O_2O_3$. То есть треугольник $ABC$ равен треугольнику $O_1O_2O_3$ по трем сторонам. Поскольку вокруг треугольника $O_1O_2O_3$ описанная окружность имеет центр $D$ и радиус $R$, то и окружность, описанная вокруг треугольника $ABC$ имеет радиус $R$.

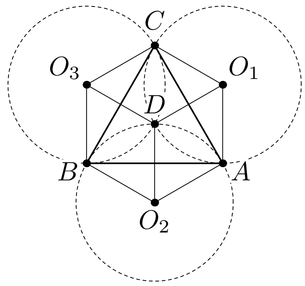

Рис. 3

4. *Доказательство*: если мы докажем справедливость неравенства для неотрицательных $a$, $b$ и $c$, то для произвольных переменных оно будет справедливо. Будем предполагать в дальнейшем неотрицательность $a$, $b$ и $c$. Известно соотношение: $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ $(*)$ (один из способов доказательства состоит в умножении на 2, переносе всех слагаемых вправо и представления в виде трех квадратов разностей).

Возведем это неравенство в квадрат: $a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq 2abc(a+b+c)(**)$. Из неравенства $(*)$ следует неравенство $a^4+b^4+c^4\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$. Сложив его с неравенством $(**)$ получим требуемое.

# 11 класс

## *Коллектив*

1. *Доказательство*: пусть $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$ — данный многочлен, в котором $a_I\leq 9$. Подставим в многочлен без старшего члена число $x$, по модулю превосходящее десять: $|a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0|\leq|a_{n-1}x^{n-1}|+|a_{n-2}x^{n-2}|+\dots+|a_2x^2|+|a_1x|+|a_0|\leq 9(|x^{n-1}|+|x^{n-2}|+\dots+|x^2|+|x|+1)=9\dfrac{|x|^n-1}{|x|-1}<|x^n|-1$ (так как $|x|-1>9$), что меньше модуля старшего члена даже при наименьшем возможном старшем коэффициенте. Таким образом, корень не может превосходить по модулю 10.

2. *Ответ*: искомые многоугольники изображены разными оттенками серого цвета на рис. 4.

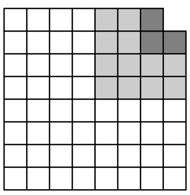
Рис. 4

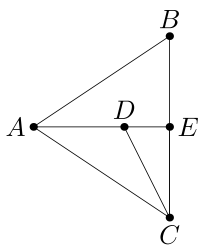

Рис. 5

## *Экспресс*

1. *Ответ*: при любых натуральных $p\geq 4$.

*Решение*: нарисованный четырехугольник $ABCD$ при вращении вокруг прямой $AE$ дает прямой круговой конус (см. рис. 5). Заменяя ломаную $ADC$ на близкую к ней «большезвенную» ломаную, не выходящую за пределы треугольника $AEC$, получаем $p$-угольник, где $p\geq 4$.

2. *Ответ*: $x=2\pi n$, $n\in Z$, $y\in[-1;1]$.

*Решение*: целая часть от $\cos x$ может быть только 0, 1 и $-1$. Подходит только 1. Подставив это значение в неравенство, найдем, что $y\in[-1;1]$.

3. *Ответ*: могут.

*Решение*: например, 49999, 50000.

4. *Ответ*: $x = \dfrac{-1}{1+\sqrt[3]{2}}$.

*Решение*: уравнение преобразуется к виду $3x^3+3x^2+3x+1=0$, откуда, $(\sqrt[3]{2}x)^3+(x+1)^3=0$, что раскладывается на множители по формуле суммы кубов.

5. *Ответ*: 4 цвета.

*Решение*: каждая клетка имеет не менее 3 соседей. То есть цветов должно быть не менее 4. Если раскрасить квадрат $2\times 2$ в четыре цвета и этими квадратами замостить полосы $2\times 100$, то получится раскраска, удовлетворяющая условию задачи.

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 4 | 3 |

Рис. 6

## *Капитаны*

1. *Решение*: оба слагаемых делятся на 3, а сумма — не делится.

2. *Ответ*: ни при каких.

*Решение*: если $x_0$ является решением уравнения, то и $-x_0$ тоже является решением. Значит, необходимым условием существования только одного решения является то, что $x_0=0$ должно быть решением. При подстановке $x=0$ получаем уравнение $1-c+c^2=0$, которое не имеет действительных решений.

3. *Доказательство*: известно, что вокруг любой треугольной пирамиды можно описать сферу. Плоскости, содержащие грани пирамиды, будут пересекать описанную сферу по окружностям, описанным вокруг граней, которые являются равными треугольниками. Радиусы этих окружностей будут равны. Окружности равного радиуса, лежащие на сфере, находятся в плоскостях равноудаленных от центра сферы, и расстояния до этих плоскостей (граней пирамиды) равны радиусу вписанной сферы. Отсюда следует, что центры вписанной и описанной сфер совпадают.

## *Выездной*

1. *Доказательство*: возьмем произвольный элемент $z_0$ этого множества и будем рассматривать его последовательные натуральные степени. Поскольку количество возможных результатов конечно, то какие-то степени будут равны, то есть $z_0^k = z_0^p$ $(k<p)$. Откуда, $z_0^{p-k}=1$. Таким образом, все эти числа — корни некоторой степени (может быть и первой, но не более шестой) из 1. Если какое-либо число не равное единице в четной степени $2m$ будет равно 1, то в степени $m$ оно будет равно $-1$. Если же единица получается только при возведении в нечетную степень, то это корни либо степени 3, либо 5, но их меньше шести, либо степени 7, но их больше шести. Если есть корень степени 3 и корень степени 5, то их произведение дает корень степени 15, которых слишком много. Следовательно, все эти числа — корни шестой степени из 1, а среди них есть $-1$.

2. *Доказательство*: в треугольнике $A_1A_5A_{13}$ указанные диагонали являются биссектрисами.

3. *Ответ*: $a \in \left[\dfrac{5}{11}; \dfrac{62}{95}\right)$.

*Решение*: из первого уравнения $y = 6x+7+\dfrac{12}{2x-3}$. Из условия, что $x$ и $y$ — натуральные числа, следует, что 12 должно быть кратно $2x-3$. Находим пары: $(1;1)$; $(2;31)$; $(3;29)$. Из второго неравенства $a > \dfrac{xyz}{xy+yz+zx}$. При $a \geq \dfrac{5}{11}$ пара $(1;1)$ дает пять троек натуральных чисел, причем если $a < \dfrac{62}{95}$, то пары $(2;31)$ и $(3;29)$ новых троек не дают, так как при $z=1$ для второй пары $a=\dfrac{62}{95}$, а для третьей пары $a=\dfrac{87}{119}$, и $\dfrac{87}{119} > \dfrac{62}{95}$. При $a \geq \dfrac{62}{95}$ пара $(1;1)$ дает минимум пять троек решений, а вторая хотя бы одно при $z=1$, отличное от первых пяти троек, то есть эти значения $a$ не подходят.

4. *Доказательство*: пусть $\dfrac{KL}{BC}=p$, объем пирамиды $ABCD$ равен $V$ (см. рис. 6). Тогда $\dfrac{KB}{BA}=1-p$, $S_{BKP}=\dfrac{1}{2}(1-p)S_{ABD}$, $H_R=\dfrac{1}{2}H_C$, где $H_R$ и $H_C$ — высоты пирамид $BKPR$ и $ADBC$ из точек $R$ и $C$, соответственно. $V_{BKPR}=\dfrac{1}{3}S_{BKP}H_R=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}(1-p)V$. Аналогично, $\dfrac{CL}{FC}=1-p$, $S_{CLM}=\dfrac{1}{2}(1-p)S_{ABC}$, $H_N=\dfrac{1}{2}H_D$, где $H_N$ и $H_D$ — высоты пирамид $NMLC$ и $DABC$ из точек $N$ и $D$, соответственно. $V_{CLMN}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}(1-p)V$, то есть $V_{BKPR}=V_{CLMN}$.

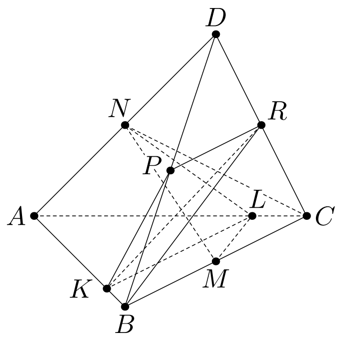


Рис. 6