Летняя математическая школа

А.Д. Блинков

учитель математики ЦО №218
руководитель филиала МММФ (ЦО №218)

Проведение летних математических школ является давней образовательной традицией. В таких школах, организуемых для школьников во многих регионах России, традиционно используется лекционно-семинарская форма проведения занятий.

Опыт, которым я хочу поделиться, — проведение учебных занятий по несколько иной технологии, многократно апробированной в летнем математическом лагере, который ежегодно проводится для учащихся различных параллелей школы № 218 г. Москвы в Архангельской области. Цель этих занятий — приобретение навыков решения олимпиадных задач, и, посредством этого, — углубление знаний учащихся в некоторых разделах математики.

При разработке описанной ниже технологии учитывалось, что участниками нашей летней школы могут являться ученики, существенно различающиеся как по уровню знаний и мотивации, так и по «олимпиадному опыту». Кроме того, существенной является возможность проведения занятий одним преподавателем (без ассистентов), в отличие от традиционной семинарской формы проведения занятий часто применяемой в математических кружках.

Исходя из вышесказанного, и была придумана групповая соревновательная форма проведения ежедневных тематических занятий, каждое из которых продолжается примерно 2,5 – 3 часа. Кроме этих занятий в течение смены проводятся также математические регаты и математический бой.

На все время проведения занятий учащиеся разбиваются на постоянные команды по 4 – 5 человек, максимально равноценные по своим математическим возможностям. Таких команд обычно бывает три или четыре. В каждой команде назначается или выбирается капитан.

После объявления темы занятия и, если это необходимо (по усмотрению преподавателя), краткой вступительной беседы (не более пятнадцати минут), каждая команда получает лист — задание, который содержит семь задач: 5 для «классной» и 2 для «домашней» работы.

По каждой теме задачи подбираются так, чтобы в процессе их решения и в последующем обсуждении можно было затронуть наиболее существенные аспекты данной темы, а также продемонстрировать приемы, «типичные» для решения задач данной тематики. Задачи одного листа должны быть максимально разнообразны по трудности и содержанию. Условная «ценность»задач отмечается в баллах. Это позволяет членам команды распределить задачи между собой так, чтобы каждый решал то, что соответствует его реальным возможностям.

На решение задач командам отводится 75 – 90 минут, по истечении которых каждый капитан подает «заявку» с номерами тех задач, которые его команда решила и готова рассказывать. Исходя из поданных заявок, преподаватель определяет для каждой команды задачи, на которые она имеет приоритет в изложении решения, стараясь предоставить всем максимальные возможности для выступления. На разбор остальных задач каждая команда имеет право выставить оппонента. В функции оппонента, как обычно, входит возможность задавать вопросы докладчику из другой команды, а также возможность опровергать неверные решения. Если одна и та же задача решена разными командами и способы решения принципиально различаются, то заслушиваются представители всех решивших её команд с сохранением за другими командами права на оппонирование. Как за рассказ решения задачи, так и за оппонирование, команда может получить баллы, исходя из объявленной ценности задачи. Если же задача не была решена ни одной из команд, то ее решение разбирает учитель, но и в этом случае командам могут быть начислены какие-то баллы за высказанные верные идеи.

В отличие от похожей процедуры на математическом бое, сумма баллов, полученных командами за одну задачу может превышать ее «ценность»: например, если задача «стоит» пять баллов, то одна команда может получить 4 балла за верное решение с некоторым недочетом, другая — 5 баллов за другой способ решения, а третья команда — 2 балла за грамотно поставленные вопросы, даже если на какие-то из них докладчики сумели ответить. Кроме того, на тематических занятиях жестко не ограничивается количество раз, которое один и тот же член команды может выступать в качестве докладчика или оппонента.

Решения домашних задач сдаются в письменном виде до начала следующего занятия, проверяются учителем по критериям письменной олимпиадной работы, и за них также начисляются баллы. Перед началом каждого занятия подводится итог соревнования по предыдущей теме, то есть объявляется и награждается команда, набравшая наибольшее количество баллов. Аналогичные итоги подводятся по прошествии каждой недели и по окончании лагерной смены (перед проведением итогового математического боя).

Математическая регата проводится после каждых пяти — шести занятий, завершая учебную неделю. Математический бой проводится по «классическим» правилам. Правила проведения математической регаты и математического боя неоднократно публиковались на страницах приложения и в других изданиях.

Составы команд для проведения математического боя формируются по итогам смены. В регату и математический бой, наряду с прочими, обязательно включаются задания по изученным темам.

Ниже приведены некоторые материалы летней математической школы 2001 года (занятие и матбой), участниками которой были школьники, закончившие семь классов и поступившие в 8 класс с углубленным изучением математики.

Соответствия и графы

Рассмотрим два множества A и B с конечным количеством элементов. Соответствие между ними называется взаимно-однозначным, если каждому элементу из A соответствует ровно один элемент из B и наоборот, каждому элементу из B соответствует ровно один элемент из A. Иначе говоря, можно составить пары вида $(a; b)$ так, чтобы $a \in A$ и $b \in B$, причем, использовать каждый элемент ровно один раз. Например, взаимно-однозначным является соответствие между вами и вашими кроватями. В случае, если между двумя множествами может быть установлено взаимно-однозначное соответствие, понятно, что эти множества содержат одинаковые количества элементов.

Пример 1. Как установить кого больше на балу, дам или кавалеров, не пересчитывая их?

Объявить танец с условием, что должно танцевать максимально возможное количество пар и посмотреть, кто останется.

Если элементы множеств изобразить точками, а связи между ними линиями, то получится объект, который называется «граф» (показать!). Точки — вершины графа, линии — ребра графа. Если задать соответствие, которое не является взаимно — однозначным, то граф будет иметь более сложный вид (показать!).

Вершину графа принято называть четной либо нечетной в зависимости от количества выходящих из нее ребер. Если существует путь по ребрам графа из любой его вершины в любую другую, то граф называется связным. Обход графа называется правильным, если можно обойти все его вершины, пройдя по каждому ребру ровно один раз. Полезно знать, что если граф содержит более двух нечетных вершин, то его правильный обход невозможен. Докажите.

С помощью графов удобно объяснять решение некоторых задач. В частности, в виде графов можно изображать сеть дорог или проводов, расписание турниров и др.

Пример 2. Может ли муха пройти по всем ребрам проволочного куба, побывав на каждом ровно один раз?

Нет, так как такой куб является связным графом с восемью вершинами, каждая из которых нечетна (степени 3), то есть, его правильный обход невозможен.

1. [3] **3 балла**
На некотором острове расположено 15 государств. Для каждого из них хотя бы одно соседнее государство — дружественное. Докажите, что найдется государство, у которого четное количество дружественных соседей. (Два государства называются соседними, если у них имеется целый кусок общей границы).

2. [5] **4 балла**
В городе отличников от каждой площади отходит ровно пять улиц, причем каждая улица соединяет ровно две площади. Докажите, что количество площадей в этом городе — четно, а количество улиц кратно пяти.

3. [4] **5 баллов**
Требуется подключить к сети люстру с 15 лампочками так, чтобы можно было зажигать любое количество лампочек (в том числе, и ни одной). Можно ли это сделать, если разрешить использовать только четыре выключателя?

4. [1] **6 баллов**
На окружности расположены 1999 белых и одна красная точка. Рассмотрим все выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше: тех, у которых есть красная вершина или тех, у которых её нет?

5. [2] **7 баллов**
Кучку из N спичек произвольным образом разбили на две кучки, подсчитали количество спичек в каждой кучке и записали их произведение. Затем, одну из новых кучек опять разбили на две, опять подсчитали количество спичек в каждой и записали новое произведение. Этот процесс продолжали до тех пор, пока не получили N кучек по одной спичке в каждой. Тогда, все полученные произведения сложили и получили число S. Найдите S.

6. [3] **6 баллов**

Можно ли «занумеровать» все ребра куба целыми числами так, чтобы суммы «номеров» ребер, сходящихся в каждой вершине, были одинаковыми, если это числа: а) $1; 2; \ldots; 12$; б) $-6; -5; \ldots; -1; 1; 2; \ldots; 6$?

7. [8] **6 баллов**
В школьной олимпиаде по математике участвовало 100 человек, по физике — 50 человек, по информатике — 48 человек. Когда каждого из учеников спросили, в скольких олимпиадах он участвовал, ответ «по крайней мере в двух» дали в два раза меньше человек, чем ответ «не менее, чем в одной», а ответ «в трех» — втрое меньше человек, чем ответ «не менее, чем в одной». Сколько всего учеников приняло участие в этих олимпиадах?

Математический бой

1. [10] Каждый зритель, пришедший на спектакль «Королевский жираф», принес с собой либо *одну* дохлую кошку, либо два кочана гнилой капусты, либо *три* тухлых яйца. Стоявший у входа Гекльберри Финн подсчитал, что кошек было 64 штуки. После спектакля оба артиста — король и герцог — были с ног до головы закиданы припасами, причем на долю каждого досталось поровну предметов (а промахов жители Арканзаса не делают). Правда, король принял на себя лишь *пятую* часть всех яиц и *седьмую* часть капусты, но все дохлые кошки полетели именно в него. Сколько зрителей пришло на представление?

2. [Фольклор] Постройте треугольник если даны точки пересечения описанной около этого треугольника окружности с продолжениями медианы, биссектрисы и высоты, проведенными из одной вершины.

3. [6] Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2001}$ — некоторые целые числа. $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{2001}$ — те же числа, записанные в другом порядке. Докажите, что произведение $(a_1 - b_1) \cdot (a_2 - b_2) \cdot \cdots \cdot (a_{2001} - b_{2001})$ является четным числом.

4. [9] Из точки A проведены касательные AB и AC к окружности с центром O. Через точку X отрезка BC проведена прямая KL, перпендикулярная XO (точки K и L лежат на лучах AB и AC). Докажите, что X — середина отрезка KL.

5. [11] Двое играют с кучей из N камней. Первый делит ее на две произвольные кучи. Каждым следующим ходом каждая куча, которая содержит более одного камня, разбивается на две меньшие. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет?

6. [7] У продавца имеется моток веревки длиной 1024 метра. Никаких измерительных инструментов нет, поэтому продавец может лишь резать любой из имеющихся кусков веревки пополам. В магазин по одному приходят покупатели за кусками веревки, длина которых выражается степенью двойки (1 м или 2 м, или 4 м, или 8 м, $\ldots$, 1024 м). Известно, что сумма всех запросов покупателей за день не превышает 1024 метра, но в каком порядке идут покупатели и сколько метров будет просить каждый из них — неизвестно. Как нужно действовать продавцу, чтобы обслужить всех покупателей?

7. [7] Покрасьте максимальное количество вершин куба в красный цвет так, чтобы среди красных вершин нельзя было выбрать три, образующие равносторонний треугольник.

8. [12] Переднее колесо велосипеда изнашивается через 2000 км, а заднее — через 3000 км. Какое максимальное расстояние можно проехать на одной паре колес?

Решения

Соответствия и графы

1. Предположим, что у каждого государства нечетное количество дружественных соседей, тогда, сложив 15 нечетных чисел, получим нечетное число. С другой стороны, если государство A дружественно государству B, то и B дружественно A (отношение «дружбы» между государствами обладает свойством симметричности). Следовательно, найденная нами сумма должна быть четной. Из полученного противоречия следует, что наше предположение не верно и хотя бы у одного государства — четное количество дружественных соседей, ч. т. д.

В данном случае рассматривается граф с нечетным количеством вершин. В таком графе степень хотя бы одной вершины должна быть четной, так как каждое ребро должно соединять две вершины.

2. Пусть количество площадей (вершин графа) — n, а количество улиц (ребер графа) — m, тогда, количество улиц, соединяющих все площади должно быть равно $\dfrac{5n}{2}$. Получим уравнение в натуральных числах: $5n = 2m$. Так как НОД$(2; 5) = 1$, то n кратно двум, а m кратно пяти, ч. т. д.

3. Да, можно. Для доказательства достаточно подсчитать сколько различных состояний можно обеспечить четырьмя выключателями. Каждый из них имеет два состояния: включен или выключен (0 или 1). Значит, занумеровав выключатели, мы имеем $16 = 2^4$ всевозможных комбинаций их состояний (количество различных чисел в двоичной системе счисления, имеющих не более четырех знаков). Количество состояний люстры также равно 16, то есть, мы сможем установить взаимно-однозначное соответствие между множеством состояний выключателей и множеством состояний люстры.

Задачу легко обобщить: N выключателей смогут «обслужить» люстру, в которой не более, чем $2^N - 1$ лампочек.

4. Если к многоугольнику, все вершины которого белого цвета, «добавить» красную вершину, то получится многоугольник с красной вершиной. То есть, для всех n, таких что $3 < n \leq 2000$ каждому выпуклому $(n-1)$ — угольнику, все вершины которого — белые, соответствует выпуклый n-угольник с красной вершиной. Но, кроме того, существуют треугольники, имеющие красную вершину. Значит, многоугольников с красной вершиной больше, чем многоугольников без красной вершины.

Ответ: многоугольников, имеющих красную вершину, больше.

Можно подсчитать, на сколько больше: на столько, сколько существует отрезков с белыми концами, то есть на $\dfrac{1998 \cdot 1999}{2}$.

5. *Первый способ.* Свяжем все спички попарно нитками. Каждый раз, разбивая одну из кучек на две, будем разрезать все нитки, соединяющие спички из разных кучек. Если мы разбиваем кучку из $m+k$ спичек на кучки по m и k спичек, то разрезано будет $m \cdot k$ ниток, то есть, в точности столько, какое число будет записано на этом шаге. Таким образом, сумма S всех записанных чисел равна общему количеству разрезанных ниток. Так как сначала все спички были соединены попарно, то было использовано $\dfrac{N(N-1)}{2}$ ниток. По окончании процесса все нитки будут разрезаны, значит, $S = \dfrac{N(N-1)}{2}$.

Второй способ. Заметим, что $m \cdot k = \dfrac{(m+k)^2 - (m^2+k^2)}{2}$. То есть, если на каком-то шаге мы разбиваем кучку из $m+k$ спичек на кучки по m и k спичек, то вместо произведения $m \cdot k$ можно записать такую дробь. Так как каждую кучку, в которой больше одной спички, мы обязательно разделим на две, то, записав сумму всех таких дробей, можно заметить, что все «промежуточные» числа взаимно уничтожатся. Значит, искомую сумму можно найти следующим образом: из квадрата количества спичек вначале вычесть сумму квадратов количеств спичек в конце (N слагаемых) и разделить на 2, то есть, $S = \dfrac{N^2 - (1^2 + 1^2 + \dots + 1^2)}{2} = \dfrac{N^2 - N}{2} = \dfrac{N(N-1)}{2}$

6. а) Нет. Предположим, что это возможно и сумма «номеров» ребер, сходящихся в каждой вершине, равна x. Тогда, сумма чисел на всех восьми ребрах куба равна $8x$. С другой стороны, так как каждый «номер» вошел в эту сумму дважды, то эта же сумма равна: $(1+2+\dots+11+12) \cdot 2 = (1+12) \cdot 12 = 156$. Уравнение $8x = 156$ в целых числах решения не имеет, поэтому наше предположение не верно.

б) Да, например, см. рис. 1. Сумма «номеров» ребер, сходящихся в каждой вершине, равна 0.

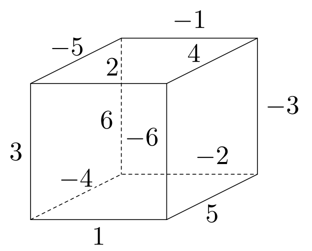

Рис. 1

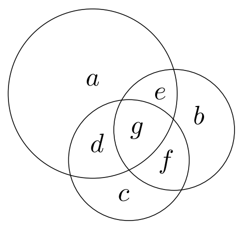

Рис. 2

7. *Первый способ.* Ситуацию, описанную в условии задачи, удобно изобразить с помощью «кругов Эйлера» (см. рис. 2). Обозначим: $x = a + b + c$ — количество человек, участвовавших ровно в одной олимпиаде; $y = d + e + f$ — количество человек, участвовавших ровно в двух олимпиадах. Составим системы уравнений:

$$\text{а)} \begin{cases} 2y + 2g = x + y + g, \\ 3g = x + y + g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3g = 2x, \\ g = 2y \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} a + d + e + g = 100, \\ b + e + f + g = 50, \\ c + d + g + f = 48 \end{cases} \Rightarrow x + 2y + 3g = 198,$$

откуда $g = 36$; $x = 54$; $y = 18$.

Второй способ. (Р.М. Кузнец) Пусть N — общее количество участников. Тогда, по крайней мере в двух олимпиадах участвовало $\dfrac{N}{2}$ человек («двустаночники»), а в трех — $\dfrac{N}{3}$ («трехстаночники»). Сложив числа, данные в условии, мы дважды посчитаем «двустаночников» и трижды «трехстаночников». Таким образом, получим уравнение: $N = (100 + 50 + 48) - \dfrac{N}{2} - \dfrac{N}{3}$, решением которого является $N = 108$.

Ответ: 108 человек.

Математический бой

1. Пусть в короля попало x яиц, y кочанов и 64 кошки. Тогда, герцогу досталось $4x$ яиц и $6y$ кочанов. Так как предметов, угодивших в них, равное количество, то составляем уравнение: $x + y + 64 = 4x + 6y$, которое равносильно уравнению $3x + 5y = 64$. Из условия задачи следует, что общее количество яиц делится на 3, а общее количество кочанов — на 2. Следовательно, $5x$ кратно *трем*, а $7y$ кратно *двум*. С учетом того, что числа 5 и 3, а также числа 7 и 2 образуют пары взаимно простых чисел, имеем, что $x = 3k$, а $y = 2n$, где $k \in N$ и $n \in N$. Подставляя в исходное уравнение, получаем: $9k + 10n = 64$. Перебором находим, что его решением в натуральных числах является только $n = 1$; $k = 6$. То есть, $x = 18$; $y = 2$. Значит, на представление было принесено $5x = 90$ (яиц), $7y = 14$ (кочана) и 64 кошки. Следовательно, количество зрителей, пришедших на представление, равно: $90 : 3 + 14 : 2 + 64 = 101$.

Ответ: 101.

2. Пусть ABC — искомый треугольник; BM, BL и BH — его медиана, высота и биссектриса; K, P и Q — их точки пересечения с описанной окружностью с центром O (см. рис. 3). Треугольник KPQ вписан в ту же окружность; P — середина дуги AC, значит, $(OP)||(BQ)$ и $M \in (OP)$. Следовательно, задача сводится к построению окружности, описанной около $\triangle KPQ$ и восстановлению вершин треугольника. Вершина B получится при пересечении этой окружности с прямой, параллельной (OP) и проходящей через точку Q. $M = (OP) \cap (BK)$. Точки A и C получатся при пересечении окружности с прямой, проходящей через точку M и перпендикулярной (OP).

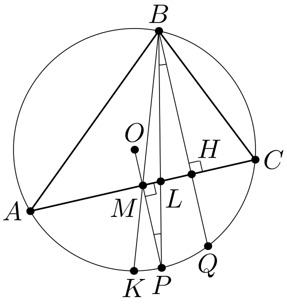

Рис. 3

3. Каждый из множителей — целое число. Предположим, что произведение не является четным числом, тогда все множители должны быть нечетными. Так как количество множителей также нечетно, то их сумма должна быть нечетным числом, но эта сумма, очевидно, равна нулю. Полученное противоречие доказывает ошибочность предположения, то есть, данное произведение является четным числом, ч. т. д.

4. Так как $\angle OXK = \angle OBK = 90°$, то точки X и B лежат на окружности с диметром OK (см. рис. 4). Следовательно, $\angle XKO = \angle XBO$ (вписанные углы, опирающиеся на дугу XO). Аналогично, точки X и C лежат на окружности с диметром OL, значит, $\angle XLO = \angle XCO$. Так как $|OB| = |OC|$, то $\angle XBO = \angle XCO$, значит, $\angle XKO = \angle XLO$, то есть, $\triangle KOL$ — равнобедренный и OX — его высота, проведенная к основанию, следовательно, она является медианой и X — середина отрезка KL, ч. т. д.

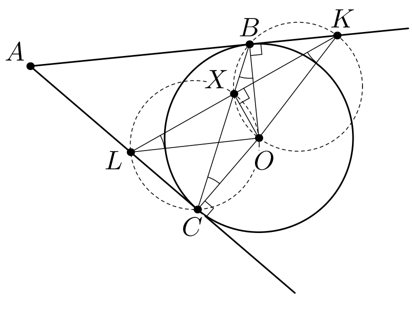

Рис. 4

5. Выигрышная стратегия состоит в том, чтобы после любого своего хода оставлять в наибольшей кучке количество камней, равное $2^k - 1$, где $k \in N$. Действительно, если в какой-то момент на столе нет ни одной кучки, в которой количество камней больше трех, но есть хотя бы одна кучка, в которой ровно три камня, то тот игрок, чья очередь ходить, проигрывает (своим ходом закончить игру он не может и вынужден оставить кучки, в которых не более двух камней). Аналогичная ситуация возникнет и ходом раньше, если на столе нет ни одной кучки, в которой больше, чем 7 камней, но есть хотя бы одна кучка, в которой их ровно 7, и т. д. Таким образом, если $N = 2^k - 1$, где $k \in N$, то выиграет второй, в других случаях выигрывает первый.

6. Стратегия продавца должна состоять в том, чтобы разрезать как можно меньше. Если кусок требуемой покупателем длины уже есть, то нужно продать его, если же его нет, нужно взять имеющийся кусок наименьшей длины, превышающей длину требуемого, и разрезать его пополам. Если получившиеся куски снова длиннее требуемого, нужно взять один из них и разрезать его пополам и так далее. Действуя таким образом, продавец когда-нибудь получит кусок требуемой длины и сможет продать его. Заметим, что при такой стратегии после каждой продажи у продавца не окажется двух или более кусков одинаковой длины. Покажем, что при такой стратегии продавец сможет последовательно удовлетворить запросы всех покупателей. Предположим, что это не так. Пусть продавец не может продать кусок, требуемый очередным покупателем. Это значит, что все куски, которые есть у продавца, короче того, который нужен покупателю. Но мы знаем, что среди них нет кусков одинаковой длины. Значит, даже если бы у продавца оставались все куски, имеющие меньшие длины, то сумма этих длин была бы меньше требуемой, так как $\forall n \in N 1+2+\cdots+2^n < 2^{n+1}$. Следовательно, сумма всех запросов покупателей за этот день превысила бы 1024 метра, что противоречит условию.

7. Докажем, что максимальное возможное количество красных вершин равно четырем. 1) Покрасить четыре вершины возможно, например, можно покрасить четыре вершины одной грани. В этом случае красные вершины образуют квадрат и среди них нет трех, образующих равносторонний треугольник.

2) Докажем, что покрасить пять вершин куба, удовлетворяющих условию, невозможно. Покрасим четыре вершины куба в синий цвет, а оставшиеся — в зеленый (см. рис. 5). Заметим, что между любыми двумя вершинами одного цвета одинаковое расстояние. Пусть мы смогли перекрасить пять вершин в красный цвет. Тогда какие-то три из них были покрашены в один цвет. Следовательно, они и образуют равносторонний треугольник.

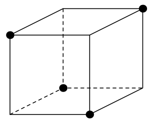
Рис. 5

Ответ: 4.

8. Для того, чтобы проехать наибольшее расстояние, необходимо в какой-то момент так поменять колеса местами, чтобы они израсходовали свой «ресурс» по возможности одновременно. Пусть это произойдет через x км, и мы сумеем проехать еще y км, тогда, «ресурс» первого колеса составит $\frac{x}{2000}+\frac{y}{2000}$ (км), а второго — $\frac{x}{3000}+\frac{y}{3000}$ (км). Следовательно, $\begin{cases} \frac{x}{2000}+\frac{y}{2000} \le 1, \\ \frac{x}{3000}+\frac{y}{3000} \le 1. \end{cases}$ Тогда, умножая почленно каждое неравенство на 6000 и складывая их, получим: $5x+5y \le 12000 \Leftrightarrow x+y \le 2400$. Проверкой убеждаемся, что при $x=y=1200$ оба «ресурса» достигают единицы.

Ответ: 2400 км.

Обратите внимание, что полученное число является средним гармоническим чисел 2000 *и* 3000 *и исходя из этого, подумайте о другом способе решения, не использующем неравенства.*

Литература

[1] А.Д. Блинков, А.В. Семенов. Турнир Архимеда. Московская математическая регата 9 классов. Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №17/01.

[2] А.Д. Блинков, О.Р. Горская, А.Г. Мякишев, А.В. Семенов, П.В. Чулков «Турнир Архимеда. Московская математическая регата 10 классов», приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №34, 2001.

[3] В.О. Бугаенко. Турниры имени Ломоносова. Конкурсы по математике. – М.: 1993.

[4] Н.Б. Васильев, В.Л. Гутенмахер, Ж.М. Раббот, А.Л. Тоом. Заочные математические олимпиады. — М.: «Наука», Физматлит, 1987.

[5] А.Я. Канель-Белов, А.К. Ковальджи Как решают нестандартные задачи. М.: МЦНМО 2001.

[6] Материалы окружного тура 63 и 64 Московских математических олимпиад.

[7] Материалы VI Соросовской олимпиады.

[8] Московские математические регаты. / Сост. — А.Д. Блинков. – М.: МЦНМО, 2000.

[9] В.В. Прасолов. Задачи по планиметрии. — М.: «Наука», Физматлит, 1995.

[10] Сборник материалов пятого турнира «Математика 6 – 8» журнала «Квант» (составитель — Д.А. Калинин). — Кострома: РЦ НИТ «Эврика-М», 1999.

[11] Ю.Ф. Фоминых. Математические игры. «Математика в школе», №2/97.

[12] Ш. Цыганов. Кубок Уфы по математике. «Квант», №2/97.