

СОБРАНИЕ ТРУДОВ

А К А Д Е М И К А

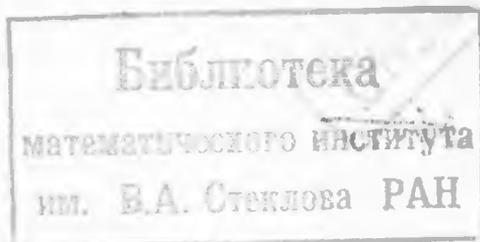
А. Н. К Р Ы Л О В А

XII

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

РАЗНЫЕ РАБОТЫ

004675



Ответственные редакторы:

*академик В. И. СМИРНОВ, академик Ю. А. ШИМАНСКИЙ,
кандидат технических наук А. П. КОРЖОВ*

ПОДАРИМО

Академия Наук СССР
СЕНТОР СЕТИ
СПЕЦИАЛЬНЫХ БИБЛИОТЕК

960 3601.

НАЧ

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
От Комиссии по изданию Собрания трудов академика А. Н. Крылова	5
Расчет башни броненосца „Император Николай I“	7
О программе систематических опытов над сопротивлением воды на моделях судов	37
Испытания в бассейне	41
Испытания судов	42
О прогрессивных испытаниях судов	45
Об усилиях, испытываемых кораблем на волне	47
О влиянии качаний корабля на орудие при накате	61
Действие выстрела на подъемный механизм 6-дюймовой пушки	69
О расчете прогрессивной крутизны нарезов	75
О кренометре, предложенном В. Ф. Миткевичем	88
О напряжении, вызываемом в упругой системе динамической нагрузкой	95
О размерах шлюзов для Волги	124
О равновесии и движении тел на качающемся корабле	129
Глава I. Кинематическое введение. Абсолютные и относительные скорости и ускорения тел, находящихся на качающемся на волнении корабле.	129
Глава II. Силы, действующие на стабилизированное тело	150
Глава III. Способы стабилизации тел, находящихся на качающемся на волнении корабле	157
Определение на корабле погрешности показаний гирокомпаса	162
О начальной остойчивости гиросферы, когда в нее налито масло	174
О кренометре, показывающем на качке то положение равновесия, около которого корабль качается	180
Некоторые соображения о проектировании мощного ледокола в 40 000 ИНР	187
Карданов подвес на корабле	193
Глава I. Маятниковый кренометр	193
Глава II. Карданов подвес	203
Общая теория гировертикали	259
I. Маятниковый кренометр	259
II. Карданов подвес	264
III. Гировертикаль Сперри	272
Об учете поправок при стрельбе по аэропланам	302
Качка корабля	315
Мореходная астрономия	320
Остойчивость	329
П. Д. Кузьминский	333
Записка об ученых трудах В. Г. Шухова (Совместно с акад. П. П. Лазаревым)	337
О проекте инженера Дель-Пропосто	343

10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200

ОТ КОМИССИИ ПО ИЗДАНИЮ СОБРАНИЯ ТРУДОВ АКАДЕМИКА А. Н. КРЫЛОВА

Настоящий XII том является последним томом Собрания трудов академика А. Н. Крылова. Согласно плану издания, выработанному Комиссией еще в 1946 г., XII том резервировался для различного рода заметок по механике и технике, а также для библиографии трудов А. Н. Крылова. Ввиду обширности материала, особенно библиографии, XII том пришлось разделить на две части.

Первая содержит научные работы А. Н. Крылова из области механики и техники как ранее появлявшиеся в печати, так и впервые публикуемые по рукописям архива А. Н. Крылова. Из обширного научного наследства Комиссия стремилась выбрать те законченные работы, которые не потеряли своего значения до настоящего времени или имеют исторический интерес. Эти работы расположены в хронологическом порядке. Каждой работе предпослана справка о том, где она впервые была напечатана, или указана дата соответствующей архивной рукописи.

Кроме того, в первой части XII тома содержатся некоторые статьи А. Н. Крылова, напечатанные в „Энциклопедическом словаре“ Брокгауза и Ефрона, а также его статьи о П. Д. Кузьминском, В. Г. Шухове и критика проекта подводной лодки, предложенного Дель-Пропосто.

Во вторую часть XII тома включен аннотированный список опубликованных трудов А. Н. Крылова, список литературы о нем и летопись его жизни и деятельности, а также перечень наиболее крупных рукописей Алексея Николаевича, которые не опубликованы в Собрании трудов.

Обе части XII тома готовились к печати совместно Комиссией Академии Наук СССР и Военно-морской академией кораблестроения и вооружения имени А. Н. Крылова. В редактировании статей и подготовке их к печати принимали участие преподаватели Военно-морской академии кораблестроения и вооружения имени А. Н. Крылова: К. А. Бельченко, В. П. Большаков, Л. А. Газиев, Н. А. Залесский, Н. П. Лавкин, А. Ф. Печников, А. С. Пятунин, К. М. Сергеев,

Н. И. Сягачев, П. П. Скородумов, Н. Г. Скрынский, В. В. Тушев, В. В. Хрустин, И. И. Цындра, В. Г. Чехович и сотрудники Кабинета-музея А. Н. Крылова: С. Т. Лучиных и С. Т. Яковлев.

РАСЧЕТ БАШНИ БРОНЕНОСЦА „ИМПЕРАТОР НИКОЛАЙ I“¹

В августе 1887 г. я был прикомандирован к постройке броненосца „Император Николай I“, и в октябре мне было предложено наблюдающим за постройкою старшим судостроителем Н. Е. Кутейниковым заняться расчетом башни для двух 12-дюймовых 35-калиберных орудий этого броненосца.

В основание расчетов должно было лечь следующее заданное мне положение: радиальные бимсы башни и крепление их к трубе должно быть настолько прочно, чтобы башня была вполне обеспечена от осадки, когда все поддерживающие ее пиллерсы и переборки будут разрушены неприятельскими снарядами; короче сказать, чтобы башня со всем в ней находящимся держалась на броневой трубе с полною надежностью на весу, на своих радиальных бимсах.

Главная задача расчета состояла в выяснении степени участия настилки пола башни в придании взаимной связи бимсам и в сопротивлении их разворачиванию.

Мною было предложено два способа расчета, хотя совершенно различных по своему характеру, но, как оказывается, приводящих к почти одинаковым результатам.

Первый из этих способов основан на рассмотрении пола башни как кольцевой упругой пластинки и на разборе условий ее равновесия.

Решение это изложено мною по Томсону и Тэту, из „Treatise on Natural Philosophy“, где разобрано упругое равновесие круговой площадки; при этом изложении я мог бы ограничиться заимствованием окончательных формул, отсылая к выводам их в знаменитой книге, но, согласно желанию уважаемого редактора „Морского сборника“, я позволил себе изложить этот вопрос в той мере полноты, чтобы читатель, раньше не занимавшийся теориею упругости, а лишь знакомый с началами математики, не встретил затруднений и необходимости обращаться к источникам при чтении этой статьи.

¹ Впервые опубликовано в „Морском сборнике“, 1888, № 5, Неофиц. отд., стр. 49—85. (Ред.).

Второе из этих решений предложено мною и основано на чисто элементарных положениях теории сопротивления материалов; оно было одобрено Н. Е. Кутейниковым и доложено им Морскому техническому комитету.

Я не смею выдавать эти решения за абсолютно строгие и точные, тем более, что мне раньше никогда не случалось заниматься вопросами теории сопротивления материалов и теории упругости; могу лишь сказать: *quod potui feci*.

В заключение считаю долгом выразить мою глубочайшую признательность Н. Е. Кутейникову, указаниями которого я пользовался при расчетах, и Е. А. Введенскому, производившему со мною в две руки все числовые вычисления.

I

Первое из тех двух решений, которые я имел честь представить Н. Е. Кутейникову, основано на следующих положениях:

1. Настилка пола башни вместе с подшивкою принимаются за кольцевую упругую площадку, подверженную равномерно по внешней окружности распределенной нагрузке.

2. Определяется толщина такой изотропно-упругой стальной пластинки, которая, при одинаковых с предыдущею внутреннем и внешнем диаметрах, выдерживала бы требуемую нагрузку, с напряжением в опаснейшем месте, равным 5 т на квадратный дюйм.

3. Определенная таким образом пластинка заменяется (сообразно требованиям практики) другою, состоящею из двух слоев, из которых нижний толщиной в 2 дюйма, перевязанных между собою бимсами и интеркостелями неизменным образом, удаленных друг от друга на 28 дюймов, причем верхнему дается такая толщина, чтобы эта составная пластинка в каждом своем сечении по отношению к изгибу была „эквивалентна“ первой.

Помещая ниже расчет нагрузки и описание деталей башни, начну изложение с теории упругого равновесия круговой площадки, следуя Томсону и Тэту по их „*Treatise on Natural Philosophy*“, где этот вопрос помещен в §§ 649 и 650 издания 1883 г.

§ 1. О кривизне поверхности и ее мере. Все поверхности разделяются на два класса: 1 — поверхности *синкластические* и 2 — *антикластические*. Отличительным признаком первого класса служит то, что касательная плоскость не пересекает поверхности в точках, бесконечно близких к точке касания, и, таким образом, вся поверхность в ближайших точках лежит по одну сторону ее касательной плоскости. В поверхностях второго класса касательная плоскость пересекает поверхность в точке касания. Примером первых может служить шар, эллипсоид, вторых — однополый гиперболоид, седло, или, например, внутренняя поверхность звена цепи или кольца — антикластическая

наружная — синкластическая. В поверхностях синкластических центры кривизны всех нормальных сечений, проходящих через данную точку, лежат по одну сторону касательной плоскости, через нее проходящей. В антикластических можно выбрать два таких нормальных сечения, центры кривизны которых лежат по разные стороны касательной плоскости.

Теорема Эйлера. В каждой точке поверхности есть такие два нормальных, взаимно перпендикулярных сечения, кривизна одного из которых наибольшая, другого — наименьшая.

Эти два сечения именуется главными нормальными сечениями.

Избрав за плоскость xy касательную плоскость в рассматриваемой точке поверхности, а самую точку — за начало координат, и положив

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

имеем:

$$z = f(xy) = \frac{1}{2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) + \dots \quad (1)$$

Кривизна сечения, проходящего через точки O и (x, y) , есть

$$\frac{1}{r} = \frac{2z}{x^2 + y^2} = \frac{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}{x^2 + y^2}$$

положив

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

получим:

$$\frac{1}{r} = A \cos^2 \theta + 2B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta \quad (2)$$

Называя через $\frac{1}{s}$ кривизну перпендикулярного к этому сечения, имеем:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = A + C = \text{const} \quad (3)$$

Уравнение (2) может быть представлено в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{2} \{ A(1 + \cos 2\theta) + 2B \sin 2\theta + C(1 - \cos 2\theta) \} = \\ &= \frac{1}{2} \{ (A + C) + (A - C) \cos 2\theta + 2B \sin 2\theta \} \end{aligned}$$

Это выражение обращается в maximum при

$$\theta = \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2B}{C - A}$$

и в minimum при

$$\theta = \beta = \alpha + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2B}{C - A}$$

Действительно, уравнение (2) можно представить в таком виде:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} (A + C) + \sqrt{\frac{1}{4} (A - C)^2 + B^2} \cos 2(\theta - \alpha) \quad (4)$$

что и подтверждает вышеприведенный вывод.

Когда поверхность антикластическая, то

$$\frac{1}{r_{\min}} < 0$$

тем не менее теорема Эйлера имеет место.

Сечения поверхности, определяемые углами $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$, называются главными нормальными сечениями, и произведение кривизны их служит критерием для определения класса поверхности. Именно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{\max}} &= \frac{1}{2} (A + C) + \sqrt{\frac{1}{4} (A - C)^2 + B^2} \\ \frac{1}{r_{\min}} &= \frac{1}{2} (A + C) - \sqrt{\frac{1}{4} (A - C)^2 + B^2} \end{aligned}$$

суть кривизны главных нормальных сечений. Произведение их

$$\frac{1}{r_{\max}} \cdot \frac{1}{r_{\min}} = AC - B^2 \quad (5)$$

Знак этого количества и определяет собою класс поверхности:

если $AC - B^2 > 0$ — синкластическая;

если $AC - B^2 < 0$ — антикластическая;

если $AC - B^2 = 0$, то $\frac{1}{r_{\min}} = 0$ и поверхность цилиндрическая.

Так как мы судим о кривизне поверхности по кривизне ее главных нормальных сечений, то и надлежит рассмотреть несколько ближе кривизну линий.

Пусть какая-либо прямая AB твердого тела Q , имеющего неподвижную точку A , направляется постоянно параллельно касательной MT к кривой OM в точке ее M . Положим, что точка M перемещается по этой кривой с линейною скоростью, равною единице; тогда тело Q будет вращаться около точки A , причем во всякий момент мгновенною осью будет служить прямая AC , перпендикулярная к плоскости, проходящей через два последовательных бесконечно близких положения прямой AB , а эта плоскость параллельна плоскости кривизны кривой OM в точке M .

Угловая скорость этого вращения тела Q во всякий момент численно равна кривизне кривой OM в точке M . В том случае, когда кривая OM плоская, направление мгновенной оси AC все время остается совпадающим с перпендикуляром, проведенным через A к плоскости кривой OM . Рассматривая кривизну таким образом по аналогии ее с угловою

скоростью, можно подобно последней разлагать кривизну по всяким трем взаимно перпендикулярным направлениям, и таким образом мы будем находить *составляющие кривизны* данной кривой в данной ее точке по осям координат. Мы будем встречаться в дальнейшем изложении с таким представлением кривизны.

После этих геометрических предварительных понятий, позволяю себе изложить основные положения теории упругости.

§ 2. Основные положения теории упругости.¹ Все тела предполагаются состоящими из отдельных материальных частиц (атомов), между которыми существуют некоторые силы взаимодействия. Предполагается, что эти силы взаимодействия следуют началу равенства и противоположности и что они суть силы центральные, т. е. направлены по прямой, соединяющей два взаимодействующих атома, и зависят лишь от расстояния между этими атомами.

Сила взаимодействия между двумя атомами состоит из двух сил: 1) *Ньютоновой силы* их взаимного притяжения и 2) *частичной силы*, обладающей тем свойством, что она имеет заметную величину лишь при ничтожно малых расстояниях между атомами; когда же это расстояние делается равным или бóльшим некоторой весьма малой величины ρ , то частичная сила обращается в нуль. Эта величина ρ называется радиусом сферы действия частичных сил.

При дальнейшем исследовании мы не будем обращать внимания на Ньютонову силу притяжения между атомами, по ее ничтожности сравнительно с частичными силами.

Выделим в теле какую-либо часть, и будем называть то, что заключается внутри ограничивающей поверхности, внутреннею частью, остальное — внешнею. Действие, которое может оказывать внешняя часть на внутреннюю, может лишь происходить от взаимодействия атомов, лежащих в слоях толщиной ρ , прилегающих к разграничивающей поверхности как в сторону внутренней, так и внешней части. Возьмем на разграничивающей поверхности какую-либо точку M и около нее очертим какую-либо замкнутую фигуру, площадью равную ΔS , и рассмотрим всю совокупность сил от действия внешней части на внутреннюю, направление которых пересекает разграничивающую поверхность внутри контура ΔS . Эта совокупность сил называется (согласно проф. Д. К. Бобылеву) *напряжением*, действующим сквозь ΔS со стороны внешней части на внутреннюю. Ясно, что напряжение, действующее сквозь ΔS со стороны внутренней части на внешнюю, равно и прямо противоположно первому.

Разложим все силы первой совокупности по осям координат и возьмем отношения

$$\frac{\sum X}{\Delta S}; \quad \frac{\sum Y}{\Delta S}; \quad \frac{\sum Z}{\Delta S} \quad (6)$$

¹ Д. Бобылев. Гидростатика и теория упругости. 1886.

Уменьшая величину ΔS , но так, чтобы точка M все время оставалась внутри контура, заставим вообще приведенные выше отношения изменяться, причем они будут приближаться к некоторым пределам, которые называются составляющими внешних напряжений в точке M .

Итак, положим:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\Sigma X}{\Delta S} \right) &= X_M \\ \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\Sigma Y}{\Delta S} \right) &= Y_M \\ \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\Sigma Z}{\Delta S} \right) &= Z_M \end{aligned} \quad (7)$$

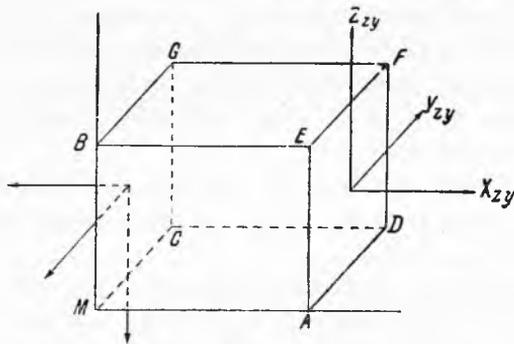
Величины X_M , Y_M , Z_M и суть составляющие напряжения в точке M , по осям координат.

Величина $F_M = \sqrt{X_M^2 + Y_M^2 + Z_M^2}$ есть величина напряжения в точке M , направление же его определяется углами

$$\cos(F_M X) = \frac{X_M}{F_M}$$

$$\cos(F_M Y) = \frac{Y_M}{F_M}$$

$$\cos(F_M Z) = \frac{Z_M}{F_M}$$



Фиг. 1.

Надо различать силу, действующую на какой-либо элемент поверхности, от величины напряжения в какой-либо точке этого элемента; формулы (7) показывают, что единица напряжения имеет следующее измерение:

$$\frac{\text{Сила}}{\text{Площадь}} = \frac{\text{Сила}}{(\text{Длина})^2}$$

Без дальнейших пояснений видно, что если напряжения по некоторой поверхности суть сплошные функции координат, то, с точностью до величин третьего порядка, сила, действующая сквозь элемент ΔS , окружающий точку M поверхности, равна $F_M \cdot \Delta S$. При дальнейшем изложении напряжения предполагаются сплошными функциями координат.

Зависимость между напряжениями сквозь взаимно перпендикулярные площадки. Проведя через точку M тела прямые, параллельные осям координат, откладываем по ним $MA = dx$, $MB = dy$, $MC = dz$ (фиг. 1) и строим параллелепипед MF , который будем называть элементарным. Положим, что сквозь площадку $AEFD$

на этот параллелепипед действует напряжение N_{zy} , составляющие которого

$$X_{zy}, Y_{zy}, Z_{zy}$$

Сквозь площадку $MBGC$ будет действовать напряжение, которого составляющие

$$-X_{zy} + \frac{\partial X_{zy}}{\partial x} dx; \quad -Y_{zy} + \frac{\partial Y_{zy}}{\partial x} dx; \quad -Z_{zy} + \frac{\partial Z_{zy}}{\partial x} dx$$

потому что это напряжение отличается от напряжения, действующего сквозь площадку $Aefd$ внутрь, т. е. справа налево, на величину $\frac{\partial N_{zy}}{\partial x} dx$, а это напряжение, в силу принципа равенства и противоположности сил взаимодействия, есть $-N_{zy}$. Таким образом, видим, что напряжения, действующие сквозь параллельные грани элементарного параллелепипеда, равны с точностью до величин первого порядка, но противоположно направлены.

Взяв пары, имеющие свою ось направления OY , видим, что эти пары следующие:

1) от напряжения, действующего сквозь площадки $Aefd$
 $(Z_{yz} dy dz) dx$

2) от напряжения, действующего сквозь площадки $BEFG$
 $(X_{xy} dx dy) dz$ и условие равновесия элементарного параллелепипеда дает

$$X_{xy} = Z_{yz} \tag{8}$$

Точно так же найдем:

$$X_{xz} = Y_{yz}; \quad Y_{yx} = Z_{xz}$$

Составляющие напряжений, нормальные к тем площадкам, сквозь которые они действуют, называются *натяжениями*, когда они направлены по внешней нормали, и *давлениями*, когда направление их по внутренней нормали; так,

$$X_{yz}, Y_{xz} \text{ и } Z_{xy}$$

суть натяжения.

Составляющие натяжений, лежащие в плоскости тех площадок, сквозь которые они действуют, называются *тангенциальными* напряжениями; так,

$$Y_{yz} \text{ и } Z_{yz}; \quad X_{xz} \text{ и } Z_{xz}; \quad X_{xy} \text{ и } Y_{xy} \tag{9}$$

суть тангенциальные напряжения.

После этих замечаний переходим к рассмотрению упругого равновесия пластинок, причем будем употреблять следующие термины:

1) средняя поверхность в пластинке есть поверхность, проходящая через все те ее частицы, которые до изгиба находились в плоскости, равноудаленной от обеих граней пластинки;

2) кривизна пластинки в каком-либо месте есть кривизна ее средней поверхности в этом месте.

Все дальнейшие выводы основаны на следующих законах изгибания упругих пластинок:

1) в том же нормальном сечении пластинки напряжения в различных его точках, лежащих на нормали к средней поверхности, пропорциональны удалению этих точек от средней поверхности;

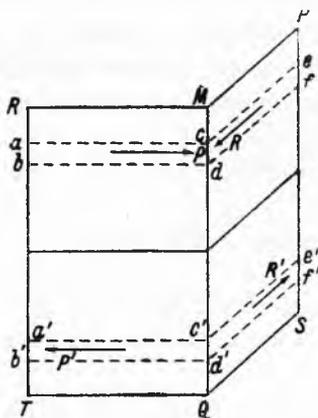
2) пары тангенциальных напряжений в двух взаимно перпендикулярных нормальных сечениях равны между собою, но противоположно направлены;

3) напряжения во всяком нормальном сечении пропорциональны кривизне пластинки.

Первый закон есть следствие подтверждаемого опытами положения, что напряжения пропорциональны растяжению, и того предположения, что средний слой пластинки не претерпевает растяжения.

Второй закон может быть пояснен следующим образом.

Возьмем два взаимно перпендикулярных нормальных сечения $MPSQ$ (фиг. 2) и $MQTR$ во всю толщину пластинки, длину же $MP = \alpha$ и $RM = \beta$ этих сечений возьмем столь малою, чтобы напряжения во всех точках площадок $abcd$ и $cdfe$ можно было принять равными между собою. Согласно формуле (8), составляющие P и R напряжений, действующих сквозь эти площадки, встречающиеся на ребре MQ , равны между собою и направлены, как



Фиг. 2.

то показано на чертеже. Так как, согласно первому закону, напряжения, действующие сквозь площадки $a'b'dc'$ и $c'd'f'e'$, симметричны относительно средней поверхности с площадками $abcd$ и $cdfe$, равны между собою, но обратно направлены, то и составляющие P' и R' соответственно равны, но обратно направлены с P и R , а следовательно, и пары $P_1P' = R_1R'$, причем, как видно, эти пары противоположны.

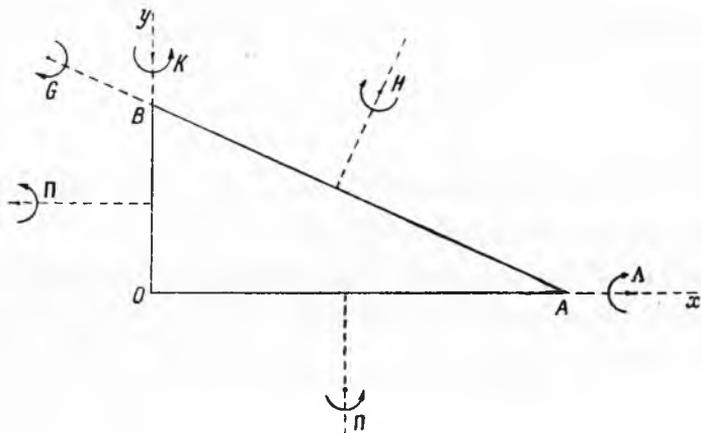
Взяв сумму всех пар для всех элементов сечения $RMQT$ и $PMQS$, увидим, что пары тангенциальных напряжений в этих сечениях равны между собою, но противоположно направлены.

Как напряжение не должно смешивать с силами, действующими сквозь какую-либо площадку, так и пару тангенциальных напряжений, лежащую в плоскости какого-либо сечения, должно отличать от пары сил, действующих в этой плоскости. Действительно, если тангенциальное напряжение в сечении $abcd$ есть P , то сила, действующая по направлению P и происходящая от этого напряжения, есть $PdS = P\beta dz$; точно так же площадка $cdfe$ дает силу $RdS = P\alpha dz$; отсюда легко заключить, что пара сил, действующих в плоскости какого-либо сечения, равняется паре тангенциальных напряжений в плоскости этого сечения, умножен-

ной на длину сечения; поэтому в дальнейшем мы будем называть пару тангенциальных напряжений в плоскости какого-либо сечения просто парю, приходящейся на единицу длины сечения.

Нормальные составляющие напряжений, действующих сквозь площадку $MPSQ$, также составляют пару, плоскость которой перпендикулярна плоскости сечения $MPSQ$. Пара сил, происходящая от этих напряжений, лежит также в плоскости, перпендикулярной плоскости сечения, и пропорциональна его длине.

Докажем теперь следующую теорему. *Во всякой точке изогнутой пластинки существуют два таких взаимно перпендикулярных сечения, пары тангенциальных напряжений в плоскости которых обращаются в нуль, пары же напряжений, перпендикулярные к плоскостям сечения, принимают наибольшую или наименьшую величину.*



Фиг. 3.

Пусть AOB (фиг. 3) есть прямоугольный треугольник, вырезанный в пластинке, пусть $AB = a$, и означим через Λ и Π пары напряжений в плоскости и перпендикулярно сечению OA ; K и Π — то же относительно сечения OB , и G и H — относительно AB . Направление пар показано стрелками при предположении, что каждая из них положительная. Полагая $\angle BAO = \varphi$, видим, что пары сил, действующие на сечения, соответственно равны:

для сечения OA :

$\Lambda a \cos \varphi$ — перпендикулярно к его плоскости;

$\Pi a \cos \varphi$ — в плоскости сечения;

для сечения OB :

$K a \sin \varphi$ — перпендикулярно к его плоскости;

$\Pi a \sin \varphi$ — в плоскости сечения;

для сечения AB :

$G a$ — перпендикулярно плоскости;

$H a$ — в плоскости сечения.

Разлагая последние две пары по осям OX и OY , имеем:

по OX
$$Ga \cos \varphi - Ha \sin \varphi \quad (10)$$

по OY
$$Ga \sin \varphi + Ha \cos \varphi \quad (11)$$

А так как площадка AOB находится в равновесии, то имеем:

$$Ga \cos \varphi - Ha \sin \varphi = \Delta a \cos \varphi + \Pi a \sin \varphi \quad (12)$$

$$Ga \sin \varphi + Ha \cos \varphi = K a \sin \varphi + \Pi a \cos \varphi$$

По решению этих двух уравнений относительно G и H находим:

$$G = \Delta \cos^2 \varphi + 2\Pi \sin \varphi \cos \varphi + K \sin^2 \varphi \quad (13)$$

$$H = (K - \Delta) \sin \varphi \cos \varphi + \Pi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \quad (14)$$

А следовательно, φ , удовлетворяющее уравнению

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{\Pi}{\frac{1}{2}(K - \Delta)} \quad (15)$$

обращает H в нуль. Уравнению (15) удовлетворяют два значения φ , отличающиеся друг от друга на $\frac{\pi}{2}$.

Формулы (13) и (14) могут быть преобразованы совершенно подобно формулам (2) и (4), и тогда, положив

$$\Sigma = \frac{1}{2}(K + \Delta) \text{ и } \Theta = \frac{1}{2}(K - \Delta)$$

получим:

$$G = \Sigma + \Pi \sin 2\varphi + \Theta \cos 2\varphi \quad (16)$$

$$H = \Pi \cos 2\varphi + \Theta \sin 2\varphi$$

что может быть приведено к виду:

$$G = \Sigma + \Omega \cos(2\varphi - \alpha) \quad (17)$$

$$H = -\Omega \sin(2\varphi - \alpha)$$

где α есть значение φ , определяемое формулой (15) и

$$\Omega = (\Pi^2 + \Theta^2)^{\frac{1}{2}}$$

причем

$$\Pi = \Omega \sin 2\alpha \text{ и } \Theta = -\Omega \cos 2\alpha.$$

Последние формулы (17) показывают, что напряжения, вызываемые в пластинке изгибом, могут быть разложены на две группы:

1) *синкластическое напряжение* Σ , состоящее в том, что в плоскости, перпендикулярной всякому сечению, действует пара напряжений; величина этой пары не зависит от направления сечения;

2) *антикластическое напряжение* Ω , четвертой характер изменений которого в зависимости от направления сечения вполне определяется формулами (17) и не требует дальнейших пояснений.

Выведенные формулы дают возможность, зная напряжения K , Λ и Π на два взаимно перпендикулярных сечения, найти и напряжения на всякое сечение, составляющее угол φ с данным.

Совершенно подобные же рассуждения имеют место и относительно кривизны поверхностей; так, например, если

$$z = \frac{1}{2} (\kappa x^2 + 2\omega xy + \lambda y^2) \quad (18)$$

есть уравнение поверхности близ точки O , которая принята за начало координат, и касательная в этой точке плоскость — за плоскость xy , то кривизна этой поверхности может быть рассматриваема как бы состоящею: 1) из цилиндрической кривизны κ , ось которой параллельна оси oy ; 2) цилиндрической кривизны λ с осью ox и 3) антикластической кривизны ω , оси которой разделяют пополам углы XOY и YOX' . Действительно, если λ и ω положить равными нулю, то поверхность обращается в цилиндр, производящие которого параллельны oy , а радиус кривизны основания равен $\frac{1}{\kappa}$; точно так же, если κ и ω положить равными нулю, получаем цилиндр с осью ox и радиусом кривизны оснований, равным $\frac{1}{\lambda}$; полагая же κ и λ равными нулю, получаем антикластическую поверхность с сечениями равной наибольшей кривизны, причем направления этих сечений разделяют пополам углы XOY и YOX' , и радиус кривизны в каждом из них равен $\frac{1}{\omega}$.

Полагая

$$\sigma = \frac{1}{2} (\kappa + \lambda) \text{ и } \vartheta = \frac{1}{2} (\kappa - \lambda) \quad (19)$$

приводим уравнение поверхности к виду

$$z = \frac{1}{2} \{ \sigma (x^2 + y^2) + \vartheta (x^2 - y^2) + 2\omega xy \}$$

затем, приняв

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi$$

получим:

$$z = \frac{1}{2} \{ \sigma + \vartheta \cos 2\varphi + \omega \sin 2\varphi \} r^2$$

и, наконец, взяв

$$\chi \cos 2\alpha = \vartheta; \quad \chi \sin 2\alpha = \omega$$

имеем:

$$z = \frac{1}{2} [\sigma + \chi \cos 2(\varphi - \alpha)] r^2$$

В этих формулах σ есть мера сферической кривизны; ϑ и ω — две составляющие антикластической кривизны, отнесенной к осям XX' и YY'

и к паре осей, разделяющих пополам угол между ними. Равнодействующая \mathfrak{Z} и ω есть антикластическая кривизна χ , оси которой составляют угол α с OX и OY .

Потенциал согнутой пластинки. Положим, что в пластинке выделена некоторым контуром площадка A , столь малая, что можно считать напряжения K , Λ и Π постоянными для всех точек, лежащих внутри контура. Положим, что поверхность внутри этого контура изображается уравнением (18):

$$z = \frac{1}{2}(\chi x^2 + 2\omega xy + \lambda y^2)$$

Определим, как велика работа, которую надо затратить, чтобы увеличить кривизну площадки A на $\delta\chi$, $\delta\lambda$, $\delta\omega$, т. е. чтобы внутри рассматриваемого контура уравнение ее средней поверхности было

$$z = \frac{1}{2}\{(\chi + \delta\chi)x^2 + 2(\omega + \delta\omega)xy + (\lambda + \delta\lambda)y^2\}$$

Очевидно, что вся работа затрачивается на преодоление сил, действующих сквозь элементы контура A ; возьмем какой-либо элемент ds этого контура, и пусть координаты его x , y . Так как x и y предполагаются чрезвычайно малыми, то можно считать, что первоначально след касательной плоскости к поверхности (18) в точке xy на плоскости xoz составлял с осью ox угол

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \chi x + \omega y$$

и след ее с плоскостью yoz составлял с осью oy угол

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lambda y + \omega x$$

При изменении кривизны на $\delta\chi$, $\delta\lambda$, $\delta\omega$ касательная плоскость в точке xy повернулась около оси

$$OY \text{ на угол } x\delta\chi + y\delta\omega$$

$$OX \text{ на угол } y\delta\lambda + x\delta\omega.$$

По формулам (10) и (11), зная напряжения K , Λ и Π , находим напряжения на элемент контура ds . Именно: пара сил, действующих сквозь этот элемент, и имеющая свою ось

$$OX, \text{ равна } \left(-\Lambda \frac{dx}{ds} + \Pi \frac{dy}{ds}\right) ds$$

$$OY, \text{ равна } \left(K \frac{dy}{ds} - \Pi \frac{dx}{ds}\right) ds$$

А как выше найдены углы поворота этого элемента сечения около осей OX и OY при изменении кривизны от χ , λ , ω до $\chi + \delta\chi$, $\lambda + \delta\lambda$, $\omega + \delta\omega$, то работа, совершаемая на протяжении контура ds , равна

$$\delta dT = \left\{ \left(K \frac{dy}{ds} - \Pi \frac{dx}{ds} \right) (x\delta z + y\delta\omega) + \left(\Pi \frac{dy}{ds} - \Lambda \frac{dx}{ds} \right) (x\delta\omega + y\delta\lambda) \right\} ds$$

Интегрируя по всему контуру, находим:

$$\delta T = (K\delta z + 2\Pi\delta x + \Lambda\delta\lambda) A \quad (20)$$

так как

$$\int x \frac{dy}{ds} ds = - \int y \frac{dx}{ds} ds = A$$

где A есть площадь, ограниченная контуром s , и интегралы

$$\int y \frac{dy}{ds} ds = \int x \frac{dx}{ds} ds = 0$$

так как контур s предполагается замкнутым.

От выражения (20) приращения работы при изменении кривизны нетрудно перейти и к выражению потенциала согнутой пластинки. Обозначим через w этот потенциал на единицу площади пластинки, когда ей придана кривизна z , λ , ω .

Из (20) видим, что

$$K\delta z = \delta_z w; \quad \Lambda\delta\lambda = \delta_\lambda w; \quad 2\Pi\delta\omega = \delta_\omega w \dots$$

а так как (§ 2) напряжения пропорциональны кривизне, т. е. если z , λ и ω будут увеличены в два, три или иное число раз, то во столько же раз увеличатся и K , Λ и Π , а следовательно, w увеличится в четыре, девять, вообще в квадрат этого числа раз, а потому w есть целая функция второй степени от z , λ , ω .

К этому же выводу можно придти и иначе; именно: так как

$$\delta w = K\delta z + 2\Pi\delta\omega + \Lambda\delta\lambda \quad (21)$$

и вследствие равенств (20) имеем:

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda} = \frac{\partial \Lambda}{\partial z}; \quad \frac{2\partial \Pi}{\partial z} = \frac{\partial K}{\partial \omega}; \quad \frac{2\partial \Pi}{\partial \lambda} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \quad (22)$$

и по предположению K , Λ и Π пропорциональны z , λ и ω , т. е. вида

$$K = Az + B\lambda + C\omega$$

$$\Lambda = A_1 z + B_1 \lambda + C_1 \omega$$

$$2\Pi = A_2 z + B_2 \lambda + C_2 \omega$$

то из условий (22) имеем:

$$A_1 = B; \quad A_2 = C; \quad B_2 = C_1$$

а потому

$$K = Az + B\lambda + C\omega$$

$$\Lambda = Bz + B_1 \lambda + C_1 \omega \quad (23)$$

$$2\Pi = Cz + C_1 \lambda + C_2 \omega$$

Отсюда, на основании (21), заключаем:

$$w = \frac{1}{2} (A\kappa^2 + B_1\lambda^2 + C_2\omega^2 + 2B\lambda\kappa + 2C\omega\kappa + 2C_1\lambda\omega) \quad (24)$$

Полагая

$$\sigma = \frac{1}{2} (\kappa + \lambda) \text{ и } \vartheta = \frac{1}{2} (\kappa - \lambda)$$

получим:

$$w = \frac{1}{2} \{ (A + B_1 + 2B)\sigma^2 + (A + B_1 - 2B)\vartheta^2 + C_2\omega^2 + \\ + 2(C - C_1)\vartheta\omega + 2(C + C_1)\sigma\omega + 2(A - B_1)\sigma\vartheta \} \quad (25)$$

и

$$\left. \begin{aligned} 2\Sigma &= \kappa + \lambda = (A + B_1 + 2B)\sigma + (A - B_1)\vartheta + (C + C_1)\omega \\ 2\Theta + \kappa - \lambda &= (A - B_1)\sigma + (A + B_1 - 2B)\vartheta + (C_1 - C)\omega \\ 2\Pi &= (C + C_1)\sigma + (C - C_1)\vartheta - C_2\omega \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

В том случае, когда пластинка однородна и равногибка по всем направлениям, синкластическое напряжение Σ должно произвести повсюду одинаковую, т. е. сферическую, кривизну σ , пропорциональную ему по величине. Точно так же и антикластические напряжения Θ и Π должны произвести таковые же кривизны ϑ и ω , имеющие с этими напряжениями общие оси и пропорциональные им; т. е., означая через h и f коэффициенты, зависящие от материала и толщины пластинки, должны иметь:

$$\Sigma = h\sigma; \quad \Theta = f\vartheta; \quad \Pi = f\omega$$

следовательно,

$$w = h\sigma^2 + f(\vartheta^2 + \omega^2) \quad (27)$$

а потому в случае полной однородности пластинки и равной гибкости ее по всем направлениям (т. е. пластинки из изотропно-упругого материала), коэффициенты A , B , C , B_1 , C_1 , C_2 удовлетворяют условиям:

$$\left. \begin{aligned} A &= B_1; & 2(A - B) &= C_2 \\ C &= 0; & C_1 &= 0 \\ A + B &= h; & \frac{1}{2} C_2 &= A - B = f \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Коэффициенты же h и f выражаются в зависимости от толщины пластинки и модуля ее упругости следующими формулами, вывод которых завлек бы нас слишком далеко от разбираемого вопроса:

$$h = \frac{1}{12} \cdot \frac{Mb^3}{1 - \mu}; \quad f = \frac{1}{12} \cdot \frac{Mb^3}{1 + \mu} \quad (29)$$

где b есть толщина пластинки, M — модуль упругости и μ — некоторая дробь, для стали равная 0.310.¹ После всех этих предварительных пояснений, выведем условия равновесия круговой упругой площадки,

¹ Д. Бобылев. Гидростатика и теория упругости, стр. 110.

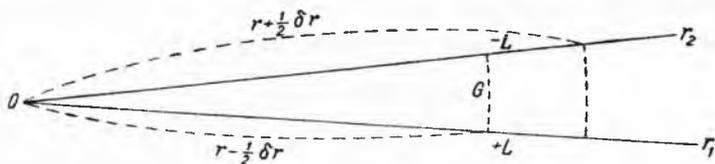
закрепленной по внутренней окружности и равномерно нагруженной по внешней.

§ 3. Очевидно, под влиянием такой нагрузки площадка примет форму поверхности вращения, главные нормальные сечения которой будут в направлении радиуса и по перпендикуляру к нему.

Напряжения во всех точках одной и той же окружности равны между собою.

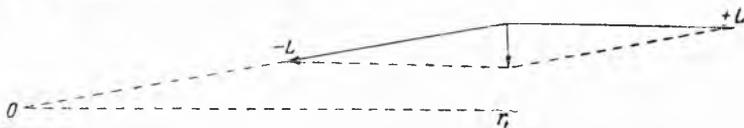
Изберем центр площадки за начало координат и обозначим через z расстояние точки поверхности, в которую обращается площадка, до горизонтальной плоскости, проходящей через внутреннюю ее окружность; через Z — величину нагрузки на единицу площади (т. е. вес квадратной единицы площадки); через L и G — величины пар напряжений, действующих перпендикулярно к нему; через ξ — срезывающее усилие на единицу длины сечения.

Рассмотрим элемент площадки, ограниченный двумя радиусами, составляющими между собою бесконечно малый угол $\delta\theta$, и дугами двух концентрических окружностей радиусов $r - \frac{1}{2}\delta r$ и $r + \frac{1}{2}\delta r$ (фиг. 4).



Фиг. 4.

Напряжение L , действующее сквозь сечение по радиусу r_1 , дает пару сил, ось которой направлена по r_1 от центра, по величине равную $L\delta r$; то же напряжение сквозь сечение r_2 дает пару, по величине равную предыдущей, но обратно направленную, т. е. ось которой направлена по r_2 от окружности к центру. Эти две пары слагаются в одну, ось которой направлена в сторону отрицательных θ и момент которой равен $-L\delta r\delta\theta$, что легко видеть из чертежа (фиг. 5).



Фиг. 5.

Точно так же напряжение G , действующее сквозь остальные две стороны рассматриваемого элемента площадки, дает пары $G(r + \frac{1}{2}\delta r)\delta\theta$ и $-G(r - \frac{1}{2}\delta r)\delta\theta$; эти две пары соединяются в одну, ось которой направлена перпендикулярно радиусу и момент которой равен $\frac{\partial}{\partial r}(G r)\delta r\delta\theta$.

Срезающее усилие ξ дает пару $\xi r \delta r \delta \theta$, имеющую ту же ось, что и две предыдущие.

Следовательно, условие равновесия рассматриваемого элемента площадки выражается уравнением

$$-L \delta r \delta \theta + \frac{d}{dr}(Gr) \delta r \delta \theta + \xi r \delta r \delta \theta = 0$$

или по сокращении:

$$-L + \frac{d}{dr}(Gr) + \xi r = 0 \quad (30)$$

Кроме этих пар, на рассматриваемый элемент действуют следующие вертикальные силы:

- 1) $Zr \delta r \delta \theta$ вес элемента;
- 2) $-\xi r \delta r \delta \theta$ и $+\left(\xi r + \frac{d}{dr}(\xi r)\right) \delta r \delta \theta$ срезающие усилия по его круговым сечениям; а потому имеем условие:

$$Zr + \frac{d}{dr}(\xi r) = 0 \quad (31)$$

Эти два условия и определяют собою форму равновесия площадки. Действительно, по формулам (23) § 2 имеем следующие выражения напряжений L и G в функции кривизны площадки:

$$\begin{aligned} L &= A\kappa + B\lambda \\ G &= B\kappa + A\lambda \end{aligned} \quad (32)$$

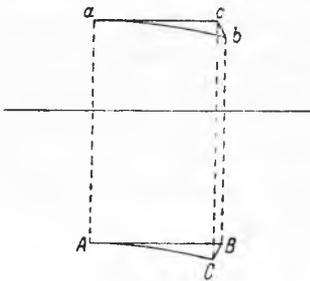
где κ есть составляющая кривизны по направлению радиуса и λ — составляющая кривизны перпендикулярно радиусу, ω же для этих направлений, согласно предыдущему, равна нулю.

Следовательно,

$$\kappa = \frac{dz}{rdr} ; \quad \lambda = \frac{d^2z}{dr^2}$$

подставляя в (32), имеем:

$$\begin{aligned} L &= A \frac{dz}{rdr} + B \frac{d^2z}{dr^2} ; \\ G &= B \frac{dz}{rdr} + A \frac{d^2z}{dr^2} \end{aligned} \quad (33)$$



Фиг. 6.

¹ Вторая из этих формул слишком известна, чтобы ее выводить, первая же может быть получена следующим образом: пусть фиг. 6 изображает вертикальную и горизонтальную проекции рассматриваемого сечения AB . Составляющая кривизны по направлению r , т. е. κ , есть кривизна вертикальной проекции ab . Но мы имеем:

$BC = \frac{1}{2} r d\theta^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} ds^2 = \delta r$. Эта формула выражает зависимость между отклонением BC и кривизною $\frac{1}{r}$. Для дуги ab , длина которой тоже ds , отклонение

$bc = \frac{dz}{dr} \delta r = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dz}{dr} ds^2$, а следовательно, кривизна ее $\kappa = \frac{1}{r} \cdot \frac{dz}{dr}$, как то и указано в тексте.

Подставляя в уравнение (30) вместо L и G их выражения (33) и найдя из полученного уравнения ξ_r , вносим его в уравнение (31) и получаем:

$$\xi_r = -Ar \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dz}{dr} \right) \right\}^1 \quad (34)$$

и

$$A \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dz}{dr} \right) \right\} \right] = Zr \quad (35)$$

Интегрируя (34), имеем:

$$-\xi = \frac{1}{r} \int Zr dr + \frac{C_1 A}{r} \quad (36)$$

По интегрировании же (35) получаем последовательно:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dz}{dr} \right) \right] &= \frac{1}{Ar} \int Zr dr + \frac{C_1}{r} \\ \frac{d}{dr} \left(r \frac{dz}{dr} \right) &= \frac{r}{A} \int \frac{dr}{r} \int Zr dr + C_1 r \lg r + C_2 r \\ \frac{dz}{dr} &= \frac{1}{Ar} \int r dr \int \frac{dr}{r} \int Zr dr + \frac{1}{2} C_1 \left(\lg r - \frac{1}{2} \right) r + \frac{C_2}{2} r + \frac{C_3}{r} \\ z &= \frac{1}{A} \int \frac{dr}{r} \int r dr \int \frac{dr}{r} \int Zr dr + \\ &+ \frac{1}{4} C_1 r^2 (\lg r - 1) + \frac{C_2}{4} r^2 + C_3 \lg r + C_4 \end{aligned} \quad (37)$$

Это и есть уравнение той поверхности, в которую обращается площадка.

Легко найти следующие выражения напряжений G и L :

$$\begin{aligned} G &= -\frac{A-B}{Ar^2} \int r dr \int \frac{dr}{r} \int Zr dr + \int \frac{dr}{r} \int Zr dr + \\ &+ \frac{1}{2} C_1 \left\{ (A+B) \lg r + \frac{1}{2} (A-B) \right\} + \frac{C_2}{2} (A+B) - (A-B) \frac{C_3}{r_2} \end{aligned} \quad (38)$$

¹ Непосредственная подстановка в уравнение (30) вместо L и G их значений приводит к следующему выражению:

$$-L + \frac{d}{dr} (Gr) + \xi_r = -A \frac{dz}{r dr} + A \frac{d^2 z}{dr^2} + Ar \frac{d^3 z}{dr^3} + \xi_r = 0$$

откуда

$$\begin{aligned} \xi_r &= -A \left\{ rz''' + z'' + \frac{z'}{r} \right\} = -Ar \left\{ z''' + \frac{d}{dr} \cdot \frac{z'}{r} \right\} \\ &= -Ar \frac{d}{dr} \left[z'' + \frac{z'}{r} \right] = -Ar \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} rz' \right] \\ &= -Ar \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dz}{dr} \right) \right] \end{aligned}$$

Это и есть формула текста, из нее уже легко получается формула (35).

$$L = \frac{A-B}{Ar^2} \int r dr \int \frac{dr}{r} \int Z r dr \int + \frac{B}{A} \int \frac{dr}{r} \int Z r dr +$$

$$+ \frac{1}{2} C_1 \left\{ (A+B) \lg r - \frac{1}{2} (A-B) \right\} +$$

$$+ \frac{C_2}{2} (A+B) + \frac{C_3}{r^2} (A-B) \quad (39)$$

В этих уравнениях C_1, C_2, C_3, C_4 суть неопределенные постоянные, введенные интегрированием; A и B — коэффициенты упругости пластинки, для которых мы снова приводим выражения, уже данные формулой (29), именно:

$$A = \frac{1}{12} \cdot \frac{Mb^3}{1-\mu^2}; \quad B = \frac{\mu}{12} \cdot \frac{Mb^3}{1-\mu^2} \quad (40)$$

где, как уже было указано, M есть модуль упругости, b — толщина пластинки, $\mu = 0.310$ для стали.

Приложим теперь выведенные формулы к занимающему нас вопросу о башне, причем еще раз ставим этот вопрос в такой форме: приняв пол башни за кольцеобразную пластинку, равномерно нагруженную по внешней окружности и подпертую по внутренней, определить толщину (или, что то же, момент сопротивления сечения длиной, равную 1) так, чтобы натяжение в опаснейшем месте не превосходило данного R (положим 5 т на квадратный дюйм).

Ввиду того, что вес пола башни оказывается ничтожным сравнительно с нагрузкою по ее окружности, мы примем для упрощения формул $Z = 0$, увеличив соответственно нагрузку, как о том будет сказано ниже при определении численной величины этой нагрузки, а пока обозначим ее через F .

Для полного решения вопроса, в формулах (37)—(39) надо определить постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 сообразно условиям задачи. Эти же условия следующие:

- 1) $Z = 0$;
- 2) полная нагрузка $= F$, следовательно сумма всех срезающих усилий по всякой окружности есть F ;
- 3) так как внешняя кромка площадки предполагается свободною, а внутренняя подпертою, то G и L должны обращаться в нуль для обеих кромок.

Итак, имеем (36):

$$-\xi = \frac{C_1 A}{r}$$

при $r = a$ или $r = a_1$, где a — внутренний, a_1 — внешний радиус:

$$2\pi a \xi_a = F = -2\pi C_1 A$$

а потому

$$C_1 = -\frac{F}{2\pi A} \quad (41)$$

Полагая в уравнении (38) $r=a$ и $r=a_1$, имеем:

$$\frac{1}{2} C_1 \left\{ (A+B) \lg a + \frac{1}{2} (A-B) \right\} + \frac{C_2}{2} (A+B) - (A-B) \frac{C_3}{a^2} = 0$$

$$\frac{1}{2} C_1 \left\{ (A+B) \lg a_1 + \frac{1}{2} (A-B) \right\} + \frac{C_2}{2} (A+B) - (A-B) \frac{C_3}{a_1^2} = 0$$

Отсюда находим:

$$C_3 (A-B) \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a^2} \right) = -\frac{1}{2} C_1 (A+B) \lg \frac{a}{a_1}$$

$$\frac{1}{2} C_2 (A+B) (a^2 - a_1^2) = -\frac{1}{2} C_1 \left[\frac{1}{2} (A-B) (a^2 - a_1^2) + \right.$$

$$\left. + (A+B) (a^2 \lg a - a_1^2 \lg a_1) \right]$$

Заменяв C_1 его величиною

$$C_1 = -\frac{F}{2\pi A}$$

найдем следующие выражения для G и L :

$$G = \frac{F}{2\pi A} \cdot \frac{A+B}{2} \cdot \left\{ \frac{a^2}{a^2 - a_1^2} \lg \frac{a}{a_1} - \right.$$

$$\left. - \lg \frac{r}{a_1} - \frac{a^2 a_1^2}{a^2 - a_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} \lg \frac{a}{a_1} \right\} \quad (42)$$

и

$$L = \frac{F}{2\pi A} - \frac{A+B}{2} \left\{ \frac{a^2}{a^2 - a_1^2} \lg \frac{a}{a_1} - \lg \frac{r}{a_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{a^2 a_1^2}{a^2 - a_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \lg \frac{a}{a_1} \right\} - \frac{1}{4} \cdot \frac{F}{2\pi A} (A-B) \quad (43)$$

Зная напряжение в каждой точке площадки легко найти и условие ее прочности; для этого найдем G_{\max} .

Имеем:

$$\frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{1}{r} + 2 \frac{a^2 a_1^2}{a^2 - a_1^2} \cdot \frac{1}{r^3} \lg \frac{a}{a_1} = 0 \quad (44)$$

откуда

$$r = \frac{\sqrt{2 \cdot a a_1}}{\sqrt{a^2 - a_1^2}} \sqrt{\lg \frac{a}{a_1}} \quad (45)$$

и

$$G_{\max} = \frac{F}{2\pi A} (A+B) \left\{ \frac{a^2}{a^2 - a_1^2} \lg \frac{a}{a_1} - \lg \left[\frac{a \sqrt{2}}{\sqrt{a^2 - a_1^2}} \sqrt{\lg \frac{a}{a_1}} \right] - \frac{1}{2} \right\} \quad (46)$$

Условие прочности состоит, как известно, в том, чтобы натяжение в наиболее отстоящем от нейтрального (средней поверхности) слоя не превосходило допускаемого прочного R .

Так как в нашем случае радиус внутреннего круга, за каковой мы считаем тот, которым подшивка опирается на броню трубы, $a_1 = 82$ дюйма и радиус внешнего круга $a = 183$ дюйма и, как ниже при расчете нагрузки будет показано, что

$$F = 616 \text{ т}$$

то $G_{\max} = 70$ тонно-дюймов

Из выражения (43) видно, что L есть убывающая функция радиуса, и потому наибольшее его значение — при $r = a_1$, именно:

$$L_{\max} = \frac{F}{2\pi A} (A+B) \left\{ \frac{a^2}{a^2 - a_1^2} \lg \frac{a}{a_1} \right\} + \frac{1}{4} \frac{F}{2\pi A} (A-B) \quad (47)$$

но из формул (40) имеем:

$$\frac{A+B}{A} = 1 + \mu$$

и
$$\frac{A-B}{A} = 1 - \mu$$

то
$$L_{\max} = \frac{F}{2\pi} \left\{ (1 + \mu) \frac{a^2}{a^2 - a_1^2} \lg \frac{a}{a_1} + \frac{1}{4} (1 - \mu) \right\} \quad (48)$$

и при $F = 616$ т, $a_1 = 82$ дюйма, $a = 183$ дюйма, $\mu = 0.310$, имеем

$$L_{\max} = 145$$

Допуская, что натяжение в опаснейшем слое пластинки R не должно превосходить 5 т на квадратный дюйм, видим, что момент сопротивления w сечения,¹ при длине его 1 дюйм, определяется условием:

$$w = \frac{L}{R} = \frac{145}{5} = 29 \quad (49)$$

При изложении второго способа расчета мы увидим, что настилке пола башни придана толщина $\frac{11}{16}$ дюйма, которая доставляет при опоре бимса момент сопротивления на единицу длины сечения, равный 27,7, т. е. почти тот самый, который требуется вышеизложенною теориею.

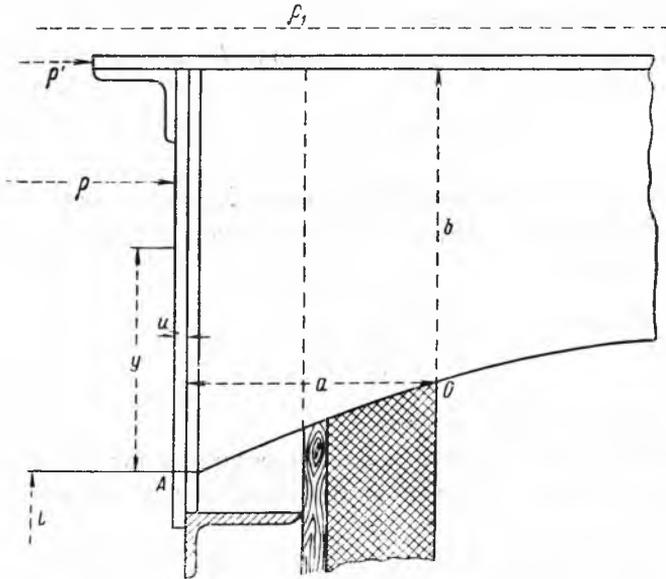
На этом мы и окончим изложение первого способа расчета, не вдаваясь в определение наибольшего прогиба, напряжений в других точках пола башни и пр.; всё это легко может быть проделано на основании выведенных выше формул.

¹ Моментом сопротивления сечения мы называем отношение $\frac{I}{u}$, где I есть момент его инерции относительно нейтральной оси, которую мы принимаем проходящей через центр тяжести сечения, и u — расстояние крайнего слоя до нейтральной оси.

II

Перехожу теперь к изложению второго способа расчета башни. Устройство башни видно из прилагаемых чертежей (фиг. 7) и не требует пояснений.

Каждый из радиальных бимсов прикреплен внутренним своим концом к ребровой стойке рубашки центральной броневой трубы башни и точкою O (фиг. 8) опирается на броню трубы; кроме того, настилка пола башни связывает между собою все эти бимсы.



Фиг. 8.

Каждый бимс поэтому можно рассматривать как балку, подпертую и закрепленную у одного конца и нагруженную на другом, и, следовательно, расчет ее будет состоять из двух отдельных расчетов: 1) устроить эту балку так, чтобы она выносила лежащий на ней груз не прогибаясь, и 2) укрепить ее так, чтобы она не могла получить вращения около своей точки опоры O .

Первый из этих расчетов слишком известен, чтобы вдаваться в его подробности, и мы приведем лишь в своем месте численные его результаты; второй же может быть выполнен следующим образом.

Вообразим себе, что бимсам придана такая прочность, что каждый из них выносит лежащую на нем нагрузку не прогибаясь и не изменяя длины своей; следовательно, надо только воспрепятствовать повороту его около точки O .

Мы уже видели, что бимсы прикреплены своими внутренними концами к ребровым стойкам трубы и соединены между собою настилкою пола башни и слегка конической подшивкою.

Эти связи могут воспрепятствовать сказанному повороту бимса лишь, получив некоторые деформации, которые вызовут в них упругие напряжения.

Итак, положим, что бимс, оставаясь сам неизменяемым, повернулся около точки O на бесконечно малый угол α ; какие же при этом произойдут деформации?

Очевидно (при обозначениях фиг. 8), что от такого поворота бимса:
1) рубашка броневой трубы получит абсолютное удлинение, равное

$$a\alpha$$

где α — угол поворота бимса.

Полагая же длину рубашки, равную l , относительное удлинение ее есть

$$\frac{a}{l}\alpha$$

2) Верхняя часть рубашки, выше точки A , растянется в конус, причем абсолютное удлинение каждого элементарного пояска, в расстоянии y от точки A , будет

$$2\pi y\alpha$$

относительное же:

$$\frac{2\pi y}{2\pi\rho}\alpha = \frac{y}{\rho}\alpha$$

где ρ — внутренний радиус рубашки.

3) Настилка пола башни, сохраняя форму плоского кольца, растянется таким образом, что как внутренний, так и внешний ее радиусы увеличатся на

$$b\alpha$$

и вообще всякий круг, первоначально бывший радиуса r , растянется в круг радиуса

$$r + b\alpha$$

а потому относительное удлинение элементарного кольца радиуса r есть

$$\frac{b}{r}\alpha$$

Называя через E модуль упругости, через s — площадь сечения рубашки и стоек, через u — толщину рубашки и через e — толщину настилки пола башни, увидим, что выше приведенные относительные удлинения вызывают следующие натяжения:

1) $E \frac{a}{l} s\alpha$ — продольное в рубашке;

2) $E \frac{y}{\rho} u\alpha dy$ — поперечные в каждом элементарном пояске рубашки шириною в dy , направленные по касательной;

3) $E \frac{b}{r} e\alpha dr$ — в настилке, в элементарном кольце радиуса r и ширины dr по направлению касательной.

Ввиду весьма малой коничности подшивки, мы пренебрегаем происходящими в ней деформациями и натяжениями.

Число всех бимсов 28; поэтому, как ниже будет показано, натяжение по касательной, как в каждом элементарном кольце настилки, так и рубашки, производят некоторые силы, направленные по каждому из бимсов (т. е. по радиусу), составляющие определенную долю этих натяжений; обозначим ее пока через

$$\frac{1}{x}$$

Момент всех вызванных деформациею сил относительно точки O должен равняться моменту нагрузки бимса относительно той же точки; это и есть условие его равновесия.

Перечисленные же выше силы дают моменты:

1) удлинение рубашки:

$$\frac{1}{28} E \frac{a^2}{l} s \alpha$$

2) коничность рубашки:

$$\frac{1}{x} E \frac{\alpha u}{\rho} \int_0^b y^2 dy = \frac{1}{3x} \cdot \frac{Eb^3}{\rho} u \alpha$$

3) растяжение настилки:

$$\frac{1}{x} Eb^2 \alpha e \int_{\rho}^{\rho_1} \frac{dr}{r} = \frac{1}{x} Eb^2 \alpha e \lg \frac{\rho_1}{\rho}$$

Называя через M момент нагрузки относительно точки O , имеем условие равновесия бимса:

$$\frac{1}{28} E \frac{a^2}{l} s \alpha + \frac{1}{3x} \cdot \frac{Eb^3}{\rho} u \alpha + \frac{1}{x} Eb^2 \alpha e \lg \frac{\rho_1}{\rho} = M \quad (50)$$

Остается в этом уравнении определить величину x и исключить α . Для определения x поступаем так.

Положим, что какое-либо кольцо подвержено действию $2n$ равных между собою сил P , приложенных по направлению равноотстоящих радиусов; надо определить величину натяжения T в каком-либо сечении кольца.

Очевидно, имеем уравнение

$$2T = P \sin \varphi + P \sin 2\varphi + \dots + P \sin n\varphi = P \sum_{p=1}^{p=n} \sin p\varphi$$

а по предыдущему

$$T = x\rho$$

откуда

$$x = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{p=n} \sin p\varphi$$

при

$$\varphi = \frac{360}{2n} \quad \text{и} \quad 2n = 28$$

имеем

$$\chi = 4.437 \quad (51)$$

Для исключения χ воспользуемся условием прочности, состоящим, как известно, в том, чтобы натяжение в опаснейшем месте не превосходило некоторой определенной величины R , за которую примем 5 т на квадратный дюйм.

Опаснейшим сечением будет, очевидно, то, которое претерпевает наибольшую деформацию, и при нижеприведенных численных значениях ρ , l , a и b видно, что таковым будет внутренняя кромка настилки, так как

$$\frac{b}{\rho} < \frac{a}{l}$$

а потому полагаем

$$\frac{Eb}{\rho} \alpha = R$$

откуда

$$E\alpha = \frac{R\rho}{b}$$

и уравнение (50) принимает вид

$$\frac{1}{28} \cdot \frac{R\rho}{b} \cdot \frac{a^2}{l} s + \frac{1}{3\chi} Rub^2 + \frac{1}{\chi} bR\rho e \lg \frac{\rho}{\rho_1} = M \quad (52)$$

Из этого уравнения надо определить толщину настилки e при следующих численных значениях: $\rho = 63$ дюймам, $\rho_1 = 180$ дюймам, $a = 21$ дюйму, $s = 546$ кв. дюймам, $b = 29$ дюймам, $u = 1$ дюйму, $l = 123$ дюймам, $M = 2200$ тонно-дюймам, $\chi = 4.437$. Получаем: $e = 0.523$ дюйма.¹

Остается еще пояснить, каким образом был исчислен момент M нагрузки бимса.

Положим, что все бимсы участвуют одинаково в поддержке стены башни и ее навесной части, так что на каждый из них приходится $\frac{1}{28}$ общего веса стены башни вместе с подшивкою; кроме того, приняты во внимание вес и отдача 12-дюймовых орудий, причем, как ниже будет видно, этот вес распределяется неравномерно на бимсы: в исчисление принят наибольший из приходящихся на каждый бимс.

Таким образом, для каждого бимса получаются следующие моменты от веса различных частей башни:

¹ При вычислении этой толщины был принят во внимание внутренний угольник по верхней кромке трубы, так что радиусы трубы и настилки разнятся на 4 дюйма ($\rho = 63$ д, $\rho^1 = 59$ д), но я не вывожу этой формулы, совершенно подобной (50) и лишь содержащей еще несколько членов, не имеющих большого значения.

- | | |
|---|-----------------|
| 1) Броня толщиной 10 дюймов; вес ее 175.2 т; плечо 120 дюймов. Момент, приходящийся на каждый бимс | 754 тонно-дюйма |
| 2) Подкладка за броней толщиной 8 дюймов; вес ее 9.84 т; плечо 111 дюймов. Момент, приходящийся на каждый бимс | 39 " |
| 3) Рубашка толщиной в 1 дюйм; вес ее 16.36 т; плечо 107 дюймов. Момент, приходящийся на каждый бимс | 62.5 " |
| 4) Стойки позади рубашки за броней, числом 56, размеры каждой $10 \times 3 \times 3 \times \frac{7}{16}$ дюйма; длина 9 футов; вес 4.45 т; плечо 101 дюйм. Момент, приходящийся на каждый бимс | 16 " |
| 5) Угольник позади брони $4 \times 4 \times \frac{1}{2}$ дюйма; три горизонтальных ребра в подкладке $7 \times 3 \times \frac{7}{16}$ дюйма; стрингер над броней и прочие мелочи дают момент на каждый бимс | 19.3 " |

6) Броневая подшивка толщиной 2 дюйма. Момент исчислен по следующим формулам.

Называя через Δ вес квадратного дюйма подшивки, имеем (фиг. 9):

$$M = \Delta \int_r^R d\rho \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{+\frac{\varphi}{2}} (\rho \cos \theta - r) \rho d\theta =$$

$$= \frac{2}{3} \Delta (R^3 - r^3) \sin \frac{\varphi}{2} - \frac{\Delta}{2} (R^2 - r^2) r \varphi$$

Полагая

$$R = 204 \text{ дюймам; } r = 84; \varphi = \frac{360^\circ}{28} = 12^\circ 51' 26''$$

$$\Delta = \frac{12 \cdot 40.8}{144} \cdot \frac{1}{2240}$$

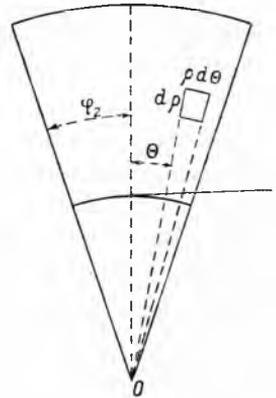
получаем

$$M = 66.7 \text{ тонно-дюйма}$$

7) Настилка пола башни. Полагая среднюю ее толщину равной $\frac{1}{2}$ дюйма, получим из предыдущей величины момента для подшивки 16.6 "

8) Вес с установкою и отдача 12-дюймовых орудий.

За неимением точных сведений о конструкции станка, гидравлических цилиндров и прочего приняты были некоторые приближенные данные согласно установке орудий на корабле „Чесма“, и самый расчет выполнен следующим образом.



Фиг. 9.

Предположено: 1) вся живая сила отката орудия поглощается работой сопротивления гидравлического компрессора, причем давление жидкости внутри его считается постоянным (компрессор с переменными отверстиями); 2) компрессор устроен таким образом, что не происходит при откате ударов (мгновенных сил), т. е. или ось компрессора направлена по оси орудия, или имеется два компрессора, оси которых взаимно перпендикулярны.

Очевидно, что пороховые газы сообщают как снаряду, так и орудию равные количества движения, а потому, называя через m массу снаряда, V —его начальную скорость, через M —массу орудия и v —наибольшую скорость его отката, имеем

$$mV = Mv \quad (53)$$

откуда

$$v = \frac{m}{M} V$$

Обозначая через F давление на поршень компрессора и l —длину отката, согласно первому предположению имеем

$$Fl = \frac{1}{2} Mv^2 \quad (54)$$

отсюда определяем F .

Допуская, что наибольший угол возвышения орудия α , согласно второму предположению найдем горизонтальную и вертикальную составляющие силы F , именно:

$$F_1 = F \sin \alpha; \quad F_2 = F \cos \alpha$$

Распределение давления на бимсы было исчислено на основании следующего допущения: самый стол под орудиями имеет такую ребровую крепость, что остается неизменяемым, и, следовательно, все роульсы всегда остаются в одной плоскости, и что каждый бимс от действующего на него давления получает прогиб, пропорциональный этому давлению.

Тогда пусть фиг. 10 представляет горизонтальную и вертикальную проекцию того круга, по которому ходят роульсы стола.

Обозначим через Q вес стола и станков орудий, P_1 —вес обоих орудий, N_0, N_1, \dots, N_{2n} —реакции каждого роульса, число которых примем равным числу бимсов.

Согласно нашему положению, от веса стола орудий и действия отдачи вся система оседет, но таким образом, что плоскость AB (центров роульсов) переместится в новое положение $A'B'$.

Уравнение этой плоскости, принимая за плоскость xy первоначальное положение AB и прямую N_0N_n за ось x , есть

$$z = ax + b$$

Согласно положению о пропорциональности осадки бимса действующему на него давлению, имеем

$$N = kz \quad (55)$$

Условия равновесия стола дают уравнения

$$Q + F_1 + P_1 = N_0 + N_1 + \dots + N_{2n-1}$$

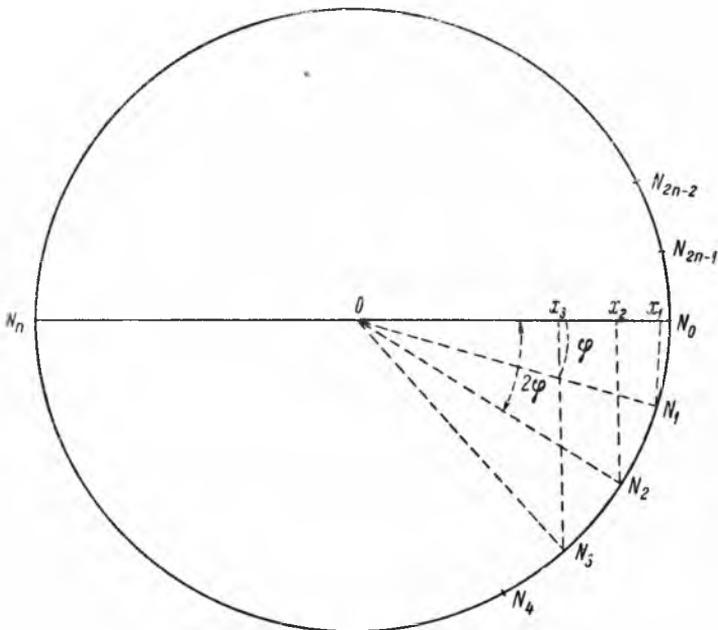
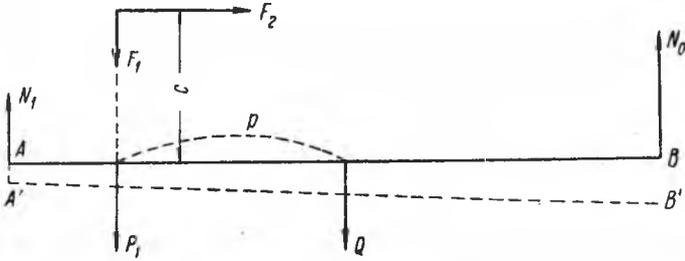
$$(F_1 + P_1)p - F_2c = N_0x_0 + N_1x_1 + \dots + N_{2n-1}x_{2n-1}$$

но так как

$$x_0 = \rho \cos 0; \quad x_1 = \rho \cos \varphi; \quad x_2 = \rho \cos 2\varphi, \dots, \quad x_n = \rho \cos \pi$$

то имеем

$$(F_1 + P_1)p - F_2c = ka \sum x^2 + kb \sum x$$



Фиг. 10.

но ясно, что

$$\sum x = 0$$

и

$$\sum x^2 = \rho^2 \sum_0^{2n-1} \cos^2 p\varphi = \frac{1}{2} \rho^2 \sum_0^{2n-1} (1 + \cos 2p\varphi) = n\rho^2$$

таким образом

$$(F_1 + P_1)p - F_2c = ka n\varphi^2$$

откуда

$$ka = \frac{(F_1 + P_1)p - F_2c}{n\varphi^2} \quad (56)$$

Подобным же образом найдем:

$$kb = \frac{Q + P_1 + F_1}{2n} \quad (57)$$

и затем получим для реакций N выражения

$$N_m = \frac{(F_1 + P_1)p - F_2c}{n\varphi^2} \rho \cos m\varphi + \frac{Q + P_1 + F_1}{2n} \quad (58)$$

N получает наибольшее и наименьшее значения соответственно при

$$m\varphi = 0 \quad \text{и} \quad m\varphi = \pi$$

При вычислении численных значений наибольшего и наименьшего давления приняты следующие величины:

Масса орудия 55 т. (орудий 2).

Масса снаряда = 1111 фунтов = 0.447 т

$V = 2000$ футов в секунду, $\alpha = 15^\circ$.

Длина отката $l = 3$ фута.

Получается:

$$F_1 = 51 \text{ т}; \quad F_2 = 191 \text{ т}$$

Затем

$$P_1 = 110 \text{ т}; \quad p = 156 \text{ дюймам}$$

$$Q = 140 \text{ т}; \quad c = 112 \text{ дюймам}$$

Тогда получается:

$$N_{\max} = 11.13 \text{ т}; \quad N_{\min} = 10.37 \text{ т}$$

т. е. во время отдачи давление распределяется почти равномерно на все бимсы.

Положим теперь $F_1 = F_2 = 0$, т. е. орудия придвинуты перед выстрелом к борту, причем полагаем цапфы над роульсами стола; тогда по тем же формулам получим:

$$N_{\max} = 16.8 \text{ т}; \quad N_{\min} = 1.07 \text{ т}$$

Таким образом, видим, что наибольшее давление, которое приходится на бимс, есть 16.8 т, а как расстояние роульсов до точки опоры бимса есть 72 дюйма, то орудия с установкою и отдача доставляют момент

1210 тонно-дюймов

а всего с моментом прочих грузов

974 „

Получаем M 2184 тонно-дюймов

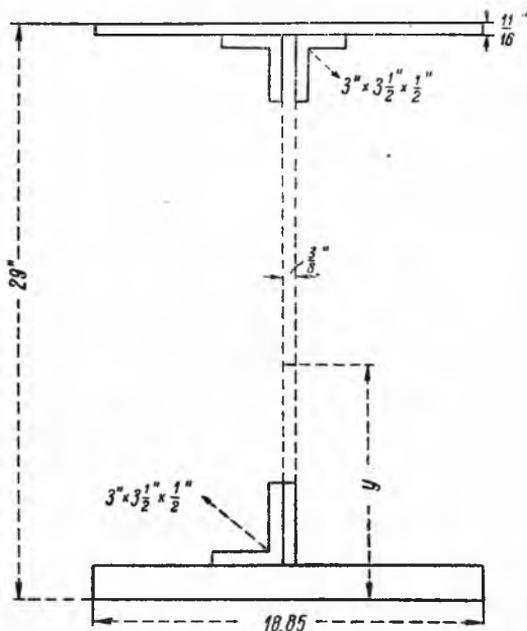
и для расчетов эта цифра округлена до 2200 тонно-дюймов.

При плече в 101 дюйм (расстояние внешней окружности настилки пола башни до точки опоры) этот момент соответствует грузу в 21.78 т или нагрузке на все бимсы

$$F = 616 \text{ т}$$

какое число и принято в первом способе расчета.

Фиг. 11 представляет сечение бимса над точкою опоры; нам остается определить момент сопротивления этого сечения; приводим это вычисление целиком:



Фиг. 11.

	Площади	Плечи от нижней кромки бимса	Моменты
Лист настилки	12.96	28.66	371.4
Полки угольников	3.69	28.07	103.6
Ребра угольников	3.44	26.57	91.4
Нижние угольники	2.19	3.75	8.2
Полки угольников	1.94	2.25	4.4
Подшивка	37.7	1.00	37.7
	61.92		616.7

$$y = \frac{616.7}{61.92} = 9.96$$

где y есть ордината центра тяжести сечения от нижней кромки подшивки.

Момент относительно нейтральной оси:

I Площади	II Расстояние центра тя- жести их до центра тяжести сечения	lg I	2 lg II	lg I + 2 lg II	Числа
12.96	18.7	1.11261	2.54368	3.65629	4532.0
3.69	18.11	0.56703	2.51584	3.08287	1210.2
3.44	16.61	0.53656	2.44074	2.97730	949.1
2.19	6.21	0.34044	1.58618	1.92662	84.45
1.94	7.71	0.28780	1.77410	2.06190	115.3
37.7	8.96	1.57634	1.90462	3.48096	3026.6
$\Sigma = 9917.65$					

Момент инерции отдельных частей сечения относительно своих центров тяжести:

12.96	0.687	1.11261	1.67392	0.78653	6.117
3.69	0.5	0.56703	1.39794	1.96497	0.9225
3.44	2.5	0.53656	0.79588	1.33244	21.5
2.19	2.5	0.34044	0.79588	1.13632	13.69
1.94	0.5	0.28780	1.39794	1.68574	0.485
37.7	2.0	1.57634	0.60206	2.17840	150.8
$\Sigma = 193.515$					
$\frac{1}{12} \Sigma = 16.13$					

Момент инерции сечения:

$$I = 9917.65 + 16.13 = 9933.78$$

Длина же сечения есть 18.85 дюйма, и расстояние опаснейшего слоя от нейтральной оси 19.04 дюйма, а потому момент сопротивления сечения на единицу его длины есть

$$w = \frac{I}{18.85 \cdot 19.04} = \frac{9933.78}{18.85 \cdot 19.04} = 27.7$$

т. е. почти та самая величина, которая требуется первым способом расчета.

Принимая же изгибающий момент, по нашему упрощенному расчету, $M = 2200$ тонно-дюймов, найдем натяжение в опаснейшем слое R :

$$R = \frac{2200 \cdot 19.04}{9933.78} = 4.217 \text{ т на кв. дм.}$$

На этом и заканчиваю изложение способа расчета башни.

О ПРОГРАММЕ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ОПЫТОВ НАД СОПРОТИВЛЕНИЕМ ВОДЫ НА МОДЕЛЯХ СУДОВ¹

Важнейший результат, который желательно достигнуть испытанием моделей судов, есть определение с возможно большей степенью точности индикаторной силы машины, потребной на движение корабля с данной скоростью. Лишь после того, как этот результат будет достигнут, можно задаваться другими вопросами, например, изысканием наивыгоднейших обводов, главных размерений и пр., ибо до тех пор, пока по сопротивлению модели не имеется возможности рассчитать с точностью индикаторной силы машины для корабля, нельзя быть уверенным, что если модель представляется наивыгоднейшей по сравнению с другими моделями, то таковым же окажется и соответствующий корабль, а тем более определить, на сколько процентов он окажется экономичнее других.

Вышеуказанный важнейший результат еще далеко не достигнут, и из предложенной для рассмотрения программы не видно, чтобы стремились к его достижению, вместо этого намечается ряд вопросов, правильно решить которые возможно лишь пользуясь точным способом перехода от модели к кораблю. Таким образом, мне представляется, что представленная Опытным бассейном программа деятельности неправильна по самой ее сущности. Чтобы доказать такое мое утверждение, достаточно показать, что в настоящее время не существует строго доказанного и обоснованного правила для вычисления по испытываемому моделию сопротивлению индикаторной силы машины, потребной для движения корабля с соответствующей скоростью. Точность всякого результата зависит от следующих факторов: 1) точности тех данных, из которых результат выводится; 2) справедливости тех допущений и гипотез, которые для этого вывода делаются.

Данными для вычисления индикаторной силы машины для корабля по испытанию его модели служат:

¹ Публикуется впервые по литографированной копии, хранящейся в Кабинетном музее А. Н. Крылова. Дата написания не установлена. После текста пометка: „Подписал штабс-капитан Крылов“. В этом звании А. Н. состоял с 21 апреля 1891 г. по 13 апреля 1897 г. (Ред.).

- 1) масштаб модели относительно корабля,
- 2) сопротивление r , испытываемое моделью при скорости ее v , причем то и другое измеряется прибором Фруда.

Допущения и гипотезы, которые делаются для расчета силы машины по этим данным следующие:

1) Исключаемое сопротивление от трения на модель рассчитывается по результатам, полученным Фрудом для досок.

2) К остаточному сопротивлению применяется закон механического подобия Ньютона.

3) Сопротивление от трения, испытываемое кораблем, рассчитывается по данным Фруда, *неизвестно* как и откуда полученным, и придается к упомянутому в п. 2.

4) Для получения индикаторной силы машины по вышеопределенному полному сопротивлению корабля задают предполагаемый коэффициент полезного действия машины.

5) Если за кормою модели работал винт, то предполагается, что добавочное сопротивление, от этого являющееся, следует закону подобия; большею же частью (а в нашем бассейне до сих пор постоянно) испытывают модель, не работая винтами и относя и это добавочное сопротивление к коэффициенту полезного действия.

Рассмотрим же теперь, в какой мере можно полагаться на эти данные и допущения.

1. Модель исполняется на механическом станке, затем ее размеры и водоизмещение проверяются и не допускается погрешности более $\frac{1}{2}\%$ в водоизмещении, т. е. $\frac{1}{200}$ его величины, значит, погрешность в переводном множителе тоже не более $\frac{1}{200}$ его величины, и значит, можно считать масштаб модели определяемым с достаточной степенью точности.

2. Чтобы судить о точности какого бы то ни было мерительного прибора, необходимо его сперва подробно исследовать. Это исследование должно состоять в определении: а) чувствительности прибора, б) вероятной ошибки каждого результата наблюдения, в) величины систематических ошибок и приемов их исключения. Образцом того, как должны быть выполняемы подобного рода исследования, служат исследования вертикальных кругов астрономических обсерваторий. Мне не известно, было ли сделано подобное исследование прибора Фруда, как той его части, которая измеряет сопротивление, так и той, которая определяет скорость, и соответствует ли точность этих аппаратов точности исполнения модели. Таких данных для своего прибора не дает и Фруд; если бы даже и давал, то они не применимы к прибору нашего бассейна, ибо всякий прибор даже работы одного и того же мастера обыкновенно разнится как по чувствительности, так и по

точности. Таким образом, самые данные, получаемые Опытным бассейном для моделей, настолько не полны, что не могут служить предметом строго научной критики, и, следовательно, нельзя указать вероятной погрешности этих данных.

Обратимся теперь к *допущениям*.

[Первое допущение]. Расчет трения модели не может считаться точным и совершенно нельзя указать предела погрешности по следующим причинам: мне не известно, чтобы было доказано, что трение для кривой поверхности то же самое, что и для плоской доски при той же скорости, а это при расчете предполагается. Самые результаты опытов Фруда над досками подлежат сомнению, а так как Фруд в двух своих кратких сообщениях не приводит *подлинных* данных, а лишь результаты, сглаженные графически, то нельзя что-либо и проверить по ним, а тем более судить о точности и пределах погрешностей. Профессор Менделеев в своей книге о сопротивлении воды¹ подвергает результаты Фруда весьма меткой критике и в заключение показывает, что из данных же Фруда можно вывести: „что трение на гладких плоскостях, параллельных с направлением пути, постоянно и с длиною неизменно“ в противность мнению Фруда, получившего совершенно другой вывод. Если из одних и тех же данных могут быть выводимы столь противоречивые результаты, то это служит лучшим доказательством как недостаточности опытов, так и ненадежности всех остальных заключений, из них выводимых, их малой точности и совершенной неубедительности.

Второе допущение есть применение закона Ньютона к остаточному, за вычетом трения, сопротивлению. Это допущение совершенно произвольное, в чем легко убедиться, проследив доказательство Ньютонова закона механического подобия. Суть дела в том, что исключение одной из сил, действующих на тело, может совершенно изменить характер движения, производимого остальными силами, и слагать алгебраически эти действия можно заведомо в том случае, когда уравнения движения линейные и силы даны как функции времени. О других же случаях этого сказать нельзя. Поэтому применимость закона подобия Ньютона к остаточному сопротивлению может быть установлена лишь опытным путем. В видах этой проверки и были сделаны опыты с „Greyhound“ и его моделью. Но об этих опытах можно сказать, что ничего не известно, ибо, то, что опубликовано в „Transactions“, не содержит в себе *ни одного* непосредственно наблюдаемого результата и не приведено ни одного числа, кроме округленных до $\frac{1}{10}$ т сопротивлений для скоростей от 12 узлов и ниже, затем начерчена кривая, выражающая результат совпадения вычисленных данных по моделям и полученных

¹ Д. И. Менделеев. О сопротивлении жидкостей и о воздухоплавании. СПб., тип. В. Демакова, 1880. (Ред.).

из наблюдений. Но это сравнение совершенно не убедительно, не видно, сколько введено произвольных параметров и на сколько число уравнений было больше числа параметров. Таким образом, то, что известно об опытах с „Greyhound“, совершенно не может служить для убеждения в применимости закона Ньютона. Можно лишь с уверенностью сказать, что об этих опытах Фруд и английскому Адмиралтейству известно гораздо больше того, чем это было опубликовано.

Третье допущение — расчет трения на корабль. Ясно, что к нему еще в большей степени применимо все то, что сказано о расчете трения на модели и результаты этого расчета заслуживают еще несравненно меньшего доверия, ибо здесь не только пользуются данными для досок, но еще распространяют эмпирические формулы далеко за пределы наблюдений, послуживших для их вывода и пользуются для стальной окрашенной поверхности коэффициентом, неизвестно откуда взятым, ибо подобная поверхность даже не испытывалась Фрудом.

Рассчитав по столь мало обоснованным и самим Бассейном совершенно не проверенным данным, ожидаемое сопротивление корабля и так называемую полезную силу машины, делят ее на коэффициент полезного действия для получения индикаторной. О точном значении коэффициента полезного действия известно еще меньше, чем о всех остальных величинах. Есть ли этот коэффициент величина постоянная для данной машины (предполагая исправное ее состояние и отсутствие нагревания) или переменная, зависящая от числа оборотов, давления пара, индикаторной силы развиваемой машиной при неполном ходе и пр. Нечего и говорить о том, что эта величина разная для разных машин, разных винтов и т. д.

Этот, даже самый краткий и неполный разбор допущений, показывает, сколь они ненадежны и гадательны и, следовательно, самая основа дела испытания моделей требует тщательной проверки и обстоятельного исследования.

Ниже я привожу примерную программу тех опытов, которые для этого желательны, а теперь выскажу несколько замечаний по поводу представленной Бассейном программы.

В Бассейне предполагается произвести ряд испытаний над моделями, меняя у них длину и положение цилиндрической части, подобно тому, как описано для проекта крейсера. Приводя результаты этих испытаний, показаны экономии в индикаторных силах: 960, 630, 860, 1250, 1140, 1176, которые заставляют думать, что Бассейн может ручаться за 10 сил на 10 000. После изложенного выше очевидно, что не известно, за сколько сил может ручаться Бассейн. Эти опыты не могут даже служить для сравнительной *качественной* оценки моделей не только что количественной, ибо были произведены без винтов. Одним словом, пока не будет установлено, с какой точностью испытывается модель и с какой точностью совершается переход от модели к кораблю, подоб-

ные опыты не могут дать сколь-нибудь ценных и благонадежных результатов.

Что касается самого способа систематизации результатов опытов по тому элементу, который Бассейн называет характеристикой, то и он не представляется благонадежным, ибо при нем меняются образования носа и кормы, а если желательна систематизация таких опытов, то по таким параметрам, которые входят в уравнение поверхности корабля и меняя всякий раз только один из этих параметров, чтобы оценивать его влияние на сопротивление модели, а значит и корабля, если закон перехода от модели к кораблю будет установлен. До тех же пор, пока этот закон не установлен с точностью, такие опыты почти бесполезны. Необходимо еще заметить, что при таких опытах характера дифференциального, особенно важно знать меру точности каждого результата, его вероятную погрешность, иначе полученные данные никакого значения не имеют.

Совершенно то же и относительно испытания винтов. Необходимо опытами над судами установить закон перехода от модели винта к самому винту, работающему на данном корабле.

Из вышеизложенного видно, что самое важное дело — это установить способ перехода от результатов, полученных для модели, к результатам для корабля. Пользование для этого результатами приемных испытаний судов недостаточно как ввиду несистематичности, так и неизвестной точности этих результатов, поэтому пользование случайными данными для установления основного закона может повести к крупным заблуждениям.

Таким образом, необходимо производство серии систематических испытаний судов, произведенных с особенной тщательностью, так расположенных, чтобы систематические ошибки по возможности исключались; величина же вероятной случайной погрешности, иначе — мера точности, определялась по известным способам из результатов самих наблюдений. Параллельно с этой серией должны быть испытаны модели этих судов и из сличения полученных результатов установлен закон перехода от модели к кораблю.

Мне представляется, что эти испытания могут быть произведены по следующей примерно программе.

Испытания в Бассейне

1. Исследовать прибор Фруда в смысле точности и вероятной погрешности получаемых по нему данных.
2. Произвести испытания над трением тонких пластин, покрытых парафином и обработанных подобно моделям для проверки данных, служащих для расчета трения испытываемого моделью.

3. Изготовить ряд моделей одного и того же корабля, но разных масштабов так, например, чтобы масштабы относились, как 1:1.5, 1:2, 1:2.5, 1:3.

4. Испытать эти модели при всех доступных скоростях движения тележки и на них проверить как гипотезу о трении, так и применимость к ним закона Ньютона; если расчет трения по формулам Фруда окажется неприменимым, то из таких испытаний можно вывести другой закон, при котором остаточное, за вычетом трения, сопротивление следовало бы закону подобия Ньютона для этих моделей. Пока этого не будет достигнуто, нельзя считать правильно обоснованным дело испытания корабля по его модели. Эти опыты — основные и должны быть видоизменяемы и обрабатываемы до тех пор, пока названный прием исключения трения не будет найден или же будет показано, что такого приема не существует и быть не может.

5. Изготовить модели в разных масштабах того корабля, над которым предполагается произвести ниже описываемые опыты буксирования, и испытать эти модели в условиях, при которых предполагается испытание корабля, и обработать их так, как будут обработаны результаты, добытые для корабля, чтобы таким образом был подготовлен материал для испытания корабля.

Испытания судов

1. Испытания судов должны быть произведены систематически по строго и подробно выработанной программе, причем сперва надо взять два небольших судна (например, два миноносца или два минных крейсера), чтобы на них вполне выяснились все детали опытов над большими судами.

2. Испытания судов имеют целью установить точные правила для перехода от модели к кораблю, для этого необходимо выделить часть сопротивления, не следующую закону подобия Ньютона от следующей ему, исследовать зависимость коэффициента полезного действия машины и винта от скорости хода корабля и числа оборотов.

Наибольшую трудность представляет решение последнего вопроса, потому что опыты, произведенные подобно тому, как на „Greyhound“, не могут служить для определения коэффициента полезного действия или иначе давления на упорный подшипник, ибо когда за кормой корабля работает винт, то сопротивление корабля становится иным, нежели без винта, поэтому необходимо найти способ определять добавочное сопротивление, происходящее от работы винта, или определять давление на упорный подшипник. С первого взгляда представляется, что это требует введения динамометра, подобного динамометру Кузьминского или Ярроу. Такой способ наиболее прямой, но устройство подобного динамометра для нескольких тысяч сил затруднительно. Поэтому можно

идти косвенным путем и воспользоваться опытами буксирования, определяя натяжение буксира.

Действительно, положим, имеется два корабля A , B и произведены испытания корабля A , давшие кривую ИНР в зависимости от скорости хода v и числа оборотов n . Сняв затем с корабля A винт, буксируют корабль A кораблем B и определяют натяжение буксира в зависимости от скорости v . Получают кривую сопротивления корабля A без винта, по ней строят кривую работы этого сопротивления.

Чтобы найти упорное давление при какой-нибудь скорости v_0 и числе оборотов n_0 , надо произвести следующие две группы испытаний в смежности с v_0 и n_0 , а именно: 1) дать на корабле A винту число оборотов n'_0 , меньшее n_0 и соответствующее скорости v'_0 , меньшей v_0 , и, работая этим числом оборотов, буксировать его кораблем B так, чтобы скорость A стала равна или больше v_0 и определить натяжение буксира и полученную скорость; 2) дать на корабле A винту число оборотов n , большее n_0 , и им буксировать корабль B или иной предмет, определяя натяжение буксира и полученную скорость, которую сделать равной или меньшей v_0 . Понятно, что как в первой группе, так и во второй надо произвести целые ряды испытаний в смежности с каждой из скоростей от наибольшей до наименьшей. Результаты этих наблюдений сведут задачу о нахождении добавочного сопротивления, или что то же, упорного давления, ибо сопротивление без винта известно, к такой задаче интерполирования или, лучше сказать, графического интегрирования: известны значения частных производных $\frac{dT}{dv}$ и $\frac{dT}{dn}$, неизвестной функции T переменных независимых v и n и ее начальное значение $T_{(0,0)}=0$ (т. е. при $v=0$, $n=0$, $T=0$) найти эту функцию графически. Задача эта поддается решению, хотя и требующему довольно продолжительных вычислений.

3. Произвести над моделью корабля A и его винтов те же серии наблюдений, как над самим кораблем, и взяв из них данные, аналогичные полученным для корабля A (задавшись предварительно какой-нибудь функцией $T(v, n)$), подвергнуть эти данные вышеописанной обработке, дабы, сличив полученный результат с предварительно известным, выяснить, в какой мере точен подобный прием.

Очевидно, что этот пункт должен быть выполнен прежде испытаний самого корабля, как упомянуто в п. 5 испытаний, производимых в Бассейне.

Такие испытания, как видно, потребуют значительных средств и продолжительного времени, но надо заметить, что пока этим или иным способом не будет получен точно проверенный закон перехода от модели к кораблю, все работы бассейна сведутся к испытанию *моделей* без связи с кораблем и, значит, практически бесполезны. Пользование прогрессическими испытаниями судов без буксирования дает *валовый*

коэффициент полезного действия и винта и машины и не может служить для оценки работы винта и, значит, для исследования винтов по их моделям, что составляет также одну из основных задач бассейна.

При производстве вышеописанных испытаний буксированием необходима их особенная точность, ибо это суть испытания дифференциальные, в этом смысле прямое испытание упорного давления динамометром предпочтительнее, и так как для передачи работы в 50—100 сил динамометр Кузьминского легко применим, то было бы весьма полезно воспользоваться и этим прибором.

В заключение считаю необходимым еще раз указать, что как при производстве вновь опытов, так и при обработке их необходимо строго руководствоваться выработанными в астрономии точными способами.

О ПРОГРЕССИВНЫХ ИСПЫТАНИЯХ СУДОВ¹

Одною из главнейших задач Опытного бассейна является определение силы машины, потребной для сообщения кораблю данной скорости хода, пользуясь для этой цели определением сопротивления воды при движении модели этого корабля.

Для перехода от результатов, получаемых для модели к кораблю, Фруд дал известные правила, которые, однако, еще не могут считаться окончательно установленными. Кроме того, по правилам Фруда определяется так называемая *эффективная* сила машины, для проектирования же надо знать индикаторную.

Отношение эффективной силы, определяемой по опытам над моделями, к индикаторной, непосредственно наблюдаемой на корабле при соответствующей скорости, представляет собою *валовой* коэффициент полезного действия всего механизма, т. е. машины, винта, влияния попутной струи и т. п. Величина этого коэффициента колеблется от 0.34 до 0.60, как о том имеются указания в литературе. Ввиду этого необходимо изучение изменчивости коэффициента полезного действия и накопление материала для такого изучения, которое только и может выяснить характер, а, может быть, и причины этой изменчивости.

Ближайшее же пользование этим материалом будет состоять в суждении об ожидаемом полезном действии механизма для проектируемого корабля по кораблю, к нему наиболее подходящему и уже испытанному.

Вместе с тем очевидно, что такие данные, систематически накапливаемые, будут ценны не только для Опытного бассейна, но и вообще для проектирования судов. Такие данные и доставляются прогрессивными испытаниями судов на мерной миле, почему и желательно производить по возможности такое испытание для всякого вновь построенного корабля. Чтобы точнее выяснялся для данного корабля закон изменения индикаторной силы машины от скорости хода, а также скорость от числа оборотов винта, необходимо производить испытание при пяти или шести

¹ Докладная записка Начальнику отряда судов, назначенных для испытаний, контр-адмиралу К. П. Никонову. Публикуется впервые. (Ред.)

равноотстоящих скоростях, начиная с половинной и до полной, напр.: 10, 12, 14, 16, 18, 20 узлов, или 12.5, 15, 17.5, 20, 22.5, 25 узлов и т. п. [Необходимо отметить, что полные испытания одного корабля представляют для бассейна гораздо более ценный материал, нежели неполные испытания нескольких.]¹ При каждой скорости надо сделать не менее *трех* пробегов по мерной миле, снимая при каждом пробеге полную серию индикаторных диаграмм. Три пробега надо делать, чтобы можно было судить о течении на мерной миле и его изменемости, ибо на нашей миле скорость течения достигает до 1.2 узла на *W* и до 0.5 узла на *O*, претерпевая столь значительное изменение иногда в продолжении одного дня.

Желательно также испытание судов одного типа, например: „Диана“, „Аврора“, „Паллада“ или „Пересвет“, „Ослябя“, „Победа“, ибо оно даст возможность судить о том зависит ли коэффициент полезного действия, и в какой мере, от самой машины так сказать случайно.

Наконец, получаемые при прогрессивных испытаниях данные представляются ценными и для самого корабля, ибо получаемая при них зависимость скорости хода от силы машины, скорости хода от числа оборотов, силы машины от числа оборотов, дадут возможность судить об экономическом ходе, о расходе топлива на переход с данною скоростью, о степени потери скорости от обрастания судна или винтов и т. п.

Ввиду всего вышеизложенного имею честь представить следующую общую программу таких испытаний:

1. Для каждого вновь построенного корабля, кроме приемных испытаний, производится прогрессивное испытание на мерной миле.

2. В случае нескольких однотипных судов прогрессивное испытание производится для каждого из них в отдельности.

3. Прогрессивное испытание производится при пяти или шести равноотстоящих скоростях от половинной до наибольшей, делая при каждой скорости не меньше *трех* пробегов и снимая при каждом пробеге не менее одной полной серии индикаторных диаграмм.

24 мая 1902 г.

¹ Из рапорта главному инспектору кораблестроения (Ред.).

ОБ УСИЛИЯХ, ИСПЫТЫВАЕМЫХ КОРАБЛЕМ НА ВОЛНЕ¹

Эта работа является приложением к моей работе „Общая теория качки корабля на волнении“² и посвящена оценке тех дополнительных усилий, которые возникают из-за вертикальной и килевой качки корабля и вследствие разницы в волновом и гидростатическом давлениях.

§ 1. Процесс вычисления усилий, испытываемых кораблем на волне, становится значительно проще, если его разделить на составные части.

Когда корабль находится в равновесии на тихой воде, его корпус испытывает одну нагрузку; когда же он находится на волне, то к этой нагрузке должны быть прибавлены следующие дополнительные силы:

1. Дополнительные силы поддержания, вызванные тем, что при равновесном положении корабля на вершине или на подошве волны одни части корпуса погружаются в воду в то время, как другие оголяются. Волновое давление здесь принимается гидростатическим. Это — основная часть дополнительных сил, и находится она с помощью известного метода Э. Рида.

2. Кроме того, должны быть учтены дополнительные силы, вызванные разностью волнового и гидростатического давлений (поправка Смита).

3. К этим двум категориям сил должны быть присоединены силы, происходящие от вертикальной и килевой качки корабля. Эти силы возникают по двум причинам:

а) корабль при движении принимает на волне положения, которые отличаются от его положений равновесия;

б) движение корабля не является прямолинейным и скорости не постоянны; силы инерции (реакции против ускорений) не равны нулю и создают усилия в корпусе.

¹ Перевод доклада, прочитанного А. Н. Крыловым 1 апреля 1898 г. в английском обществе корабельных инженеров. Под названием „On stresses experienced by a ship in a seaway“ опубликовано в „Transactions of the Institution of Naval Architects“, vol. XL, 1898, стр. 197—209. (Ред.).

² А. Н. Крылов, Собрание трудов, т. XI, 1951, стр. 183—250. Первоначально опубликовано в „Transactions of the Institution of Naval Architects“, vol. XL, 1898, стр. 135—190. (Ред.).

Я ограничусь детальным рассмотрением последней части дополнительных усилий вместе со второй их частью, и сделаю только несколько замечаний, упрощающих расчет первой части.

Эти замечания покажутся очевидными и общеизвестными тем, кто самостоятельно выполняет расчеты; но они будут, возможно, полезны молодым инженерам и студентам, когда они впервые встретятся с данным вопросом.

§ 2. Когда 9 лет тому назад я, как слушатель кораблестроительного факультета Морской академии в С.-Петербурге, должен был впервые произвести такие вычисления, я встретил известные трудности, которые должен был сам преодолеть, так как ни в учебниках, ни в периодических изданиях я не мог найти полных и законченных указаний на метод производства этих вычислений без излишней затраты времени и труда. Точнее, я не мог найти ясных, точных и математически обработанных во всех деталях указаний о расчете, каким я располагал во время своей прежней службы, имея дело с астрономией и девиацией компасов.

Позже, применяя общие принципы вычислений, я выработал этот метод приближенных кораблестроительных расчетов, в котором использовал правило Чебышева для квадратур и который позднее опубликовал в „Bulletin de l'Association technique Maritime“, № 4, 1893.¹

Вильям Уайт упомянул об этом методе на Юбилейном конгрессе, как о „русском методе“.

§ 3. Первое, что необходимо иметь, это кривую распределения веса. Вычисление такой кривой — самая трудная часть работы. Единственным указанием, как это сделать, которое я смог найти, были слова Э. Рида: „Общая длина была разбита на 20-футовые шпации... для каждой шпации был определен вес корпуса и вес оборудования“.

Учитывая эти рекомендации, но не понимая их буквально, я избрал следующий метод.

Весá разделялись на 3 категории:

1) весá, непрерывно распределенные по всей длине корабля, например, наружная обшивка с набором, палубы и т. д.;

2) весá, непрерывно распределенные по некоторой части длины корабля, как, например, бортовая броня, машины, котлы, уголь, боезапас, мелкокалиберная артиллерия и т. д.;

3) сосредоточенные весá: броневые траверзы, ахтерштевень и руль, главные орудия и т. д.

Само собой разумеется, что распределение всех весов первой категории может быть представлено непрерывной кривой, простирающейся от носа до кормы; чтобы изобразить эту кривую с достаточной точностью, нам нужно весьма мало ординат (6 или 8), равномерно разне-

¹ Новый метод расчета элементов подводной части судна. (Nouvelle méthode de calcul des éléments d'une carène). А. Н. Крылов, Собрание трудов, т. IX, ч. 2, 1949, стр. 55—102. (Ред.).

сенных. Вычисление каждой из этих ординат при наличии спецификации производится очень просто, так как каждая из ординат представляет собой вес 1 фута длины конструкции в рассматриваемом сечении корабля. Что касается набора, то вес поперечного шпангоута на месте, соответствующем месту вычисляемой ординаты, должен быть разделен на расстояние между шпангоутами в футах. Вычисляя таким образом ординаты для каждой статьи веса и проводя соответствующую частную кривую всегда от предшествующей, мы получим линию, которая представляет собой общее распределение весов первой категории. Эта кривая, как и все промежуточные, будет непрерывной.

Распределение весов второй категории не может быть представлено непрерывной кривой, идущей с носа до кормы по всей длине корабля, но распределение каждой статьи веса будет выражаться непрерывной кривой — в большинстве случаев даже прямой линией — тянущейся по длине, занимаемой рассматриваемым весом.

Наложение этих частных кривых, построение которых весьма легко, когда известны веса и их расположение по длине, дает ступенчатую кривую. Когда мы наложим последнюю кривую на первую, то получим также кривую ступенчатой формы, выражающую распределение весов первых двух категорий. Затем эти ступени могут быть сглажены при соблюдении неизменности площади кривой.

Весы третьей категории, если бы они были изображены в том же масштабе, что и предыдущие две категории, дали бы ординаты, далеко выходящие за пределы кривой. Поэтому нет нужды их так представлять и проще их считать за внешние силы, приложенные в соответствующих точках.

Построение кривой сил поддержания на тихой воде не может представлять никаких трудностей.

На кривой нагрузки, определяемой кривыми сил веса и сил поддержания, сосредоточенные веса могут быть также представлены как внешние силы, они должны быть учтены при построении кривой перебивающих сил, которая вычисляется графически или численным интегрированием кривой нагрузки; в местах приложения сосредоточенных весов ступени численно будут равны соответствующим силам. Второе интегрирование дает кривую моментов, которая должна быть непрерывной кривой по ординатам, но не по кривизне, имея точки излома в местах приложения сосредоточенных весов. Такой метод расчета является, я не могу сказать приятным, но, во всяком случае, не утомительно скучным.

§ 4. Переходя к рассмотрению корабля на волне, оставаясь в пределах гипотезы статического равновесия Э. Рида, первое, что мы должны сделать, — найти равновесное положение корабля на вершине или подошве волны. В этом отношении также нельзя найти указаний на то, как это проще выполнить, и я часто слышал от инженеров, что постановка на волну является делом, требующим большого труда.

Существует метод определения равновесного положения корабля, аналогичный упомянутому выше, но который, если его провести должным образом, может сделать расчет очень простым, требующим десятиминутной работы. Я позволю себе описать его здесь.

Одним из наиболее полезных принципов числовых расчетов является следующий: „Если необходимо найти значение переменной величины, которая мало отличается от известной постоянной величины, то нужно не прямо вычислять эту переменную величину, а ее разность от указанной постоянной величины“. Следовательно, в нашем случае, для какого бы то ни было положения корабля на волне, мы должны прямо вычислять не само водоизмещение корабля, а только его разницу между грузовой ватерлинией и действующей волновой поверхностью воды. Для того чтобы сделать это, проведите линию *AB* уровня волны, снимите ординаты для соответствующих шпангоутов корабля. Если шпангоуты чебышевские, то ординаты снимаете для них, а если — равноотстоящие, то для этих равноотстоящих, число которых не должно быть больше, чем 10 или 12 на всей длине корабля. Возьмите узкую полоску бумаги, отметьте на ней линию уровня на тихой воде и ординаты волновой поверхности, нумеруя их так же, как и соответствующие шпангоуты корабля; с этой полоски нанесите на корпус теоретического чертежа положение волновой поверхности для каждого сечения, совмещая соответствующие пометки на полоске с грузовой ватерлинией корабля; проведите соответствующие ординаты и выполняйте следующий расчет в табличной форме.

№ шпангоута	Ордината шпангоута на уровне главной ватерлинии	Ордината шпангоута на уровне поверхности волны	Высота погруженного (+) или вышедшего (-) из воды объема	Погруженная (+) или вышедшая из воды (-) площадь шпангоута
	<i>a</i>	<i>b</i>		
0	$\frac{1}{2} a_0$	$\frac{1}{2} b_0$	c_0	$\frac{1}{2} (a_0 + b_0) c_0$
1	a_1	b_1	c_1	$(a_1 + b_1) c_1$
2	a_2	b_2	c_2	$(a_2 + b_2) c_2$
3	a_3	b_3	c_3	$(a_3 + b_3) c_3$
4	a_4	b_4	c_4	$(a_4 + b_4) c_4$
5	a_5	b_5	c_5	$(a_5 + b_5) c_5$
6	a_6	b_6	c_6	$(a_6 + b_6) c_6$
7	a_7	b_7	c_7	$(a_7 + b_7) c_7$
8	a_8	b_8	c_8	$(a_8 + b_8) c_8$
9	a_9	b_9	c_9	$(a_9 + b_9) c_9$
10	$\frac{1}{2} a_{10}$	$\frac{1}{2} b_{10}$	c_{10}	$\frac{1}{2} (a_{10} + b_{10}) c_{10}$
Сумма . . .		<i>S</i>		<i>V</i>

Поправка $\epsilon = \frac{V}{S}$

Если сумма V , пропорциональная разности начального водоизмещения корабля и того, которое он имеет в рассматриваемом произвольном положении на волне, будет равна нулю, то данное произвольное положение будет требуемым. Если сумма V не будет равна нулю, то линия уровня волны должна быть поднята (когда V положительно) или опущена (когда V отрицательно) на поправку $\epsilon = \frac{V}{S}$. Помещая теперь уровень волны выше или ниже грузовой ватерлинии на вычисленное расстояние ϵ и повторяя тот же расчет, мы получим либо $V=0$, либо очень малую вторую поправку ϵ_1 , которая дает требуемое положение корабля на волне.

При проведении второго приближения, если дополнительная погруженная площадь данного шпангоута велика, иногда бывает удобно провести вспомогательную ординату и использовать правило Симпсона. Тогда в последнем столбце помещенной выше таблицы мы должны иметь вместо $(a_i + b_i)c_i$ величину

$$\frac{a_i + 4b'_i + b_i}{3} c_i,$$

где b'_i является вспомогательной ординатой.

Расчет упростится, если ординаты и высоты будут выражены не в футах, соответственно масштабу чертежей, а в своей действительной величине на чертеже в миллиметрах, или $\frac{1}{16}$ дюйма, и тогда поправка ϵ будет получена в тех же единицах. Можно заметить, что для того, чтобы поставить корабль с помощью этого метода на вершину или подошву волны, нам нет необходимости знать его водоизмещение.

Мы не рассчитываем угол дифферента, так что центр величины и центр тяжести корабля не будут на одной вертикали; лучше вводить соответствующую поправку в эпюру моментов, хотя это легко можно было бы сделать и способом, аналогичным описанному выше.

К положению корабля, определенному таким образом, должна быть применена поправка Смита, если желательно учесть разницу между гидродинамическим и гидростатическим давлениями волны. Метод Смита полностью изложен в его работе и не требует никаких дополнительных указаний.

Когда найдено положение равновесия, мы должны только графически изобразить дополнительные силы поддержания от погруженных и вышедших из воды объемов с учетом поправки Смита, а двойное интегрирование этой кривой даст нам дополнительные перерезывающие силы и изгибающие моменты при статической постановке на волну.

Перехожу к динамической части вопроса.

§ 5. Совершенно очевидно, что бортовая качка, рысканье и горизонтальные составляющие общего колебательного движения имеют лишь второстепенное влияние на дополнительные силы, возникающие, в ос-

новном, благодаря наличию вертикальной и килевой качки, а поэтому мы рассмотрим только эти две составляющие общей качки.

Пусть корабль движется под данным углом к системе регулярных волн с некоторой скоростью, при которой необходимо исследовать дополнительные усилия (по отношению к таковым на тихой воде), которые должен испытывать корпус корабля.

Для того чтобы выполнить это исследование, мы рассматриваем четыре положения корабля на волне, соответствующие моментам времени t , равным $0, \frac{\tau_1}{4}, \frac{\tau_1}{2}, \frac{3\tau_1}{4}$, где τ_1 является кажущимся периодом волны, а момент времени 0 соответствует прохождению подошвы волны через мидель корабля. Аналитическое выражение для угла дифферента при килевой качке ψ и ординаты центра тяжести корабля ζ , должны быть предварительно определены, как показано в моей другой работе.¹ Для каждого момента времени мы рассчитываем положение корабля на волне, его угловое ускорение $\ddot{\psi}$ и вертикальную составляющую его поступательного ускорения $\ddot{\zeta}_0$, а затем, чтобы получить дополнительные усилия, мы должны лишь вычертить соответствующую кривую дополнительной нагрузки (силу поддержания необходимо рассматривать как отрицательную нагрузку).

Для каждого сечения корабля эта дополнительная нагрузка состоит из: 1) дополнительных сил поддержания, происходящих от изменения погруженных площадей поперечных сечений корабля; они могут быть непосредственно подсчитаны после определения положения корабля на волне; 2) разницы между гидростатическими и гидродинамическими силами поддержания; эта величина может быть получена точно с помощью метода Смита или, с достаточным приближением, умножением погруженной площади на

$$\frac{2\pi r}{\lambda} \cos U$$

где r есть радиус образующего круга волны ($2r$ равны ее высоте), λ — ее длина, а U есть фаза:

$$U = 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} - \frac{t}{\tau_1} \right)$$

(x — абсцисса рассматриваемого сечения; $\lambda_1 = \frac{\lambda}{\cos \alpha}$ — эффективная длина волны, α — угол между диаметральной плоскостью корабля и направлением движения волн); 3) сил инерции (реакций против ускорения), которые составляют ко всему весу рассматриваемого сечения то же отношение, что и соответствующее ускорение к ускорению силы тяжести. Для расчета этих сил мы должны помнить, что положительные значения x идут к носу, значение ψ является положительным при подъеме носа, а положительное значение ζ_0 отсчитывается вниз; таким образом, основная часть вер-

¹ А. Н. Крылов. Теория килевой качки корабля на волнении. Собрание трудов, т. XI, 1951, стр. 136—182. (Ред.).

тикальной составляющей ускорения сечения, соответствующего абсциссе x , есть $\zeta_0 - \ddot{\psi} \cdot x$, и таким образом, если P означает соответствующую ординату кривой веса, то дополнительная реакция против ускорения будет

$$-P \frac{(\zeta_0 - \ddot{\psi} \cdot x)}{g}$$

При этом знаки должны быть взяты алгебраически, и конечная отрицательная величина означает уменьшение веса.

Сумма соответствующих ординат трех кривых, вычисленных таким образом отдельно, даст окончательное распределение дополнительной нагрузки на волне, а эта кривая, дважды проинтегрированная по x , даст дополнительные срезающие силы и дополнительные изгибающие моменты.

Таким путем может быть выполнен расчет усилий, прокатывающихся по корпусу корабля, для четырех положений его на волне в моменты

$$t = 0; t = \frac{\tau_1}{4}; t = \frac{\tau_1}{2}; t = \frac{3\tau_1}{4}$$

которые Э. Рид удачно назвал „волной усилий“.

Действительно, изгибающий момент M_x в сечении x является периодической функцией времени t , имеющей период τ_1 и может быть разложен в ряд Фурье вида

$$M_x = A_0 + A_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau_1} + B_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau_1} + A_2 \cos \frac{4\pi t}{\tau_1} + B_2 \sin \frac{4\pi t}{\tau_1} + \dots$$

Здесь A_0 — изгибающий момент на тихой воде, а имея значения M_x , соответствующие вышеуказанным значениям t , мы сразу получаем значение коэффициентов A_1 и B_1 , A_2 и B_2 . Последние два обычно очень малы и могут быть опущены, тогда общее выражение для M_x будет

$$M_x = A_0 + A_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau_1} + B_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau_1}$$

Коэффициенты A_1 и B_1 изменяются при переходе от одного сечения к другому по закону, который может быть или представлен графически, или с хорошим приближением аналогичным выражением Фурье:

$$A_1 = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi x}{l} + b_1 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_2 \frac{4\pi x}{l} + b_2 \frac{4\pi x}{l} + \dots$$

$$B_1 = a'_0 + a'_1 \cos \frac{2\pi x}{l} + b'_1 \sin \frac{2\pi x}{l} + a'_2 \frac{4\pi x}{l} + b'_2 \frac{4\pi x}{l} + \dots$$

где $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ не зависят от x и являются только лишь функциями курсового угла (к направлению волны) и элементов волны; l — полная длина корабля. Таким образом может быть составлено аналитическое выражение изменения усилий, испытываемых кораблем, но сам расчет, как описано выше, довольно сложен.

Математическая часть вопроса изложена с некоторыми деталями в приложении к этой работе и для иллюстрации расчета приведен числовой пример, но для облегчения его применения на практике необходимо дать простые аналитические выражения, содержащие только размерения корабля и элементы волны и дающие с достаточным приближением килевую и вертикальную качку корабля на данной волне и возникающие усилия для идеального распределения нагрузки. Я составил такие приближенные выражения, но еще не проверил степени их точности на достаточном количестве численных примеров, относящихся к кораблям с различной остротой обводов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

§ 1. В работе „Общая теория качки корабля на волнении“ я дал общие уравнения движения корабля на волне.

Эти уравнения дают возможность рассчитать не только положения, занимаемые кораблем на волне, но узнать также ускорение любой его точки, а затем исследовать усилия, испытываемые кораблем, с большей степенью точности, чем любыми другими известными до сих пор методами. Я здесь кратко объясню, как может быть выполнен такой расчет.

§ 2. Рассмотрим корабль, занимающий в некоторый момент времени соответствующее положение на волне. Это положение характеризуется величинами абсолютных координат ξ_0 , η_0 , ζ_0 центра тяжести корабля и трех углов θ_1 , ψ , φ . Обозначения здесь такие же, как и в упомянутой выше работе, где выражения для всех этих шести величин даны в функции от времени t . Для того чтобы вычислить срезающую силу и изгибающий момент в каком-либо сечении корабля, соответствующем значению абсциссы $x = a$, мы должны лишь взять алгебраическую сумму действующих на корабль составляющих всех сил, параллельных оси z , расположенных по одну сторону рассматриваемого сечения, скажем, со стороны носа ($x = L$), и сумму моментов этих сил относительно нейтральной оси сечения CD .

Таким образом, получим: срезающую силу

$$S = \int_{cbd} Z dv \quad (1)$$

изгибающий момент

$$M = \int_{cbd} [(z - c) X - (x - a) Z] dv \quad (2)$$

где $x = a$, $z = c$ являются уравнениями нейтральной оси сечения CD , а суммирование относится ко всем силам, действующим в объеме CBD , заключенном между CD и носом B .

Силы, действующие на рассматриваемую часть, суть:

1) силы веса;

- 2) силы инерции (реакции против ускорений);
- 3) гидродинамическое волновое давление;
- 4) сопротивление воды.

В вычислении этих сил я ограничусь тем же приближением, как и в предыдущей работе, т. е. буду пренебрегать второй и высшими степенями углов θ_1, ψ . В дальнейшем будет иметь значение только угол дифферента при килевой качке ψ ; обычно он меньше $6-7^\circ$, или $\frac{1}{10}$, так что его квадрат меньше $\frac{1}{100}$.

1. Для силы тяжести мы имели следующие значения компонентов по осям корабля:

$$X = -\psi \cdot g; \quad Y = \theta_1 \cdot g; \quad Z = g$$

тогда, обозначая через S_1 и M_1 соответствующие части в выражениях срезающих сил и изгибающих моментов, мы получим:

$$S_1 = g \int_{CBD} dv = \int_{CBD} P dx \quad (3)$$

где P означает вес на 1 фут длины, а

$$M_1 = \int_{CBD} [(z-c)X - (x-a)Z] dv = -\psi \int_{CBD} (z-c) P dx - \int_{CBD} (x-a) P dx \quad (4)$$

Можно легко показать, что выражение $\int (z-c) P dx$ является само по себе очень малым, а если его умножить на величину ψ , то им можно пренебречь по сравнению со вторым интегралом, так что выражение (4) можно просто записать

$$M_1 = - \int_{CBD} (x-a) P dx. \quad (4')$$

Эти два выражения показывают, что, несмотря на наклонение корабля, усилия от веса могут быть вычислены точно так же, как если бы корабль находился в равновесии в прямом положении.

2. Сила инерции измеряется произведением массы рассматриваемой частицы на ее ускорение, а направление этой силы противоположно направлению ускорения.

В любом трактате по теоретической механике можно найти следующие полные выражения для составляющих ускорения точек, координаты которых суть x, y, z , в предположении, что оси движутся вместе с телом:

$$\begin{aligned} w \cos(\hat{w}x) &= \ddot{\xi}_0 a + \ddot{\eta}_0 a_1 + \ddot{\zeta}_0 a_2 + z\dot{q} - y\dot{r} + p(px + qy + rz) - x\omega^2 \\ w \cos(\hat{w}y) &= \ddot{\xi}_0 b + \ddot{\eta}_0 b_1 + \ddot{\zeta}_0 b_2 + x\dot{r} - zp + q(px + qy + rz) - y\omega^2 \\ w \cos(\hat{w}z) &= \ddot{\xi}_0 c + \ddot{\eta}_0 c_1 + \ddot{\zeta}_0 c_2 + y\dot{p} - x\dot{q} + r(px + qy + rz) - z\omega^2 \end{aligned} \quad (5)$$

где $\ddot{\xi}_0$, $\ddot{\eta}_0$, $\ddot{\zeta}_0$ суть компоненты ускорения начала координат осей Ox , Oy , Oz , связанных с телом (в нашем случае это центр тяжести корабля), по отношению к неподвижным осям; a, a_1, \dots, c_2 — косинусы углов между соответствующими осями этих систем; p, q, r — компоненты угловой скорости ω относительно осей Ox, Oy, Oz , а $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ — компоненты угловых ускорений, т. е. производные от p, q, r по времени t . Перед подстановкой этих полных выражений в формулы (1) и (2) мы можем их упростить, ограничиваясь установленной степенью точности. Так, члены $p(px + qy + rz)$ и $x\omega^2$ (и аналогичные им в двух других уравнениях) являются величинами второго порядка малости по отношению к угловой скорости, которая мала, и, поэтому, в первом приближении эти члены могут быть опущены. Члены $\ddot{\eta}_0 a_1$ и $\ddot{\xi}_0 a_2$ — также величины второго порядка малости, так как косинусы a_1 и a_2 первого порядка, а $\ddot{\eta}_0$ и $\ddot{\xi}_0$ также малые величины (должно быть ясно, что отношения $\frac{\ddot{\xi}_0}{g}$ и $\frac{\ddot{\eta}_0}{g}$ малы; в нашем случае они меньше $\frac{1}{7}$), так что получаем следующие приближенные формулы, причем должно быть замечено, что

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \ddot{\theta}_1; & \dot{q} &= \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\psi}; & \dot{r} &= \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \\ w \cos(\widehat{wx}) &= \ddot{\xi}_0 + z\ddot{\psi} - y\ddot{\varphi} \\ w \cos(\widehat{wy}) &= \ddot{\eta}_0 + x\ddot{\varphi} - z\ddot{\theta}_1 \\ w \cos(\widehat{wz}) &= \ddot{\zeta}_0 + y\ddot{\theta}_1 - x\ddot{\psi} \end{aligned} \quad (5')$$

Здесь использована таблица (9)¹ для косинусов. Затем мы найдем уравнение перерезывающей силы и изгибающего момента за счет сил инерции:

$$\begin{aligned} S_2 &= - \int_{CBD} (\ddot{\zeta}_0 + y\ddot{\theta}_1 - x\ddot{\psi}) dm = - \frac{\ddot{\zeta}_0}{g} \int_{CBD} P dx - \frac{\ddot{\theta}_1}{g} \int_{CBD} y dP + \\ &+ \frac{\ddot{\psi}}{g} \int_{CBD} x P dx = \frac{1}{g} \left(\ddot{\psi} \int_{CBD} x P dx - \ddot{\zeta}_0 \int_{CBD} P dx \right) = \\ &= \frac{\ddot{\psi}}{g} \int_{CBD} (x - a) P dx + \left(\frac{a\ddot{\psi}}{g} - \ddot{\zeta}_0 \int_{CBD} P dx \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Сумма $\int_{CBD} y dP = 0$, и смысл последнего преобразования заключается в том, что величина $\int_{CBD} (x - a) P dx$ легко вычисляется графически с помощью общеизвестного метода.

¹ А. Н. Крылов, Собрание трудов, т. XI, 1951, стр. 201. (Ред.).

$$\begin{aligned}
 M_2 &= -\frac{1}{g} \int_{CBD} [(z-c)(\ddot{\zeta}_0 + z\ddot{\psi} - y\ddot{\varphi}) - (x-a)(\ddot{\zeta}_0 + y\ddot{\theta}_1 - x\ddot{\psi})] P dx = \\
 &= -\frac{\ddot{\zeta}_0}{g} \int_{CBD} (z-c) P dx + \frac{\ddot{\zeta}_0}{g} \int_{CBD} (x-a) P dx - \frac{\ddot{\psi}}{g} \int_{CBD} (z-c) z P dx + \\
 &+ \frac{\ddot{\varphi}}{g} \int_{CBD} (z-c) y P dx + \frac{\ddot{\theta}_1}{g} \int_{CBD} (x-a) y P dx - \frac{\ddot{\psi}}{g} \int_{CBD} (x-a) P dx
 \end{aligned}$$

Заметив, что

$$\int (z-c) P dx$$

мал, а

$$\int (z-c) y P dx = \int (x-a) y P dx = 0$$

и что интеграл

$$\int (z-c) x P dx$$

будет мал, по сравнению с

$$\int (x-a) x P dx$$

исключая сечения, близкие к оконечностям корабля (но для этих сечений изгибающие моменты совсем не нужно вычислять), мы получаем следующее выражение для основной величины M_2 :

$$\begin{aligned}
 M_2 &= \frac{\ddot{\zeta}_0}{g} \int_{CBD} (x-a) P dx - \frac{\ddot{\psi}}{g} \int_{CBD} (x-a) x P dx = \\
 &= -\left(\frac{\ddot{\psi} a}{g} - \frac{\ddot{\zeta}_0}{g}\right) \int_{CBD} (x-a)
 \end{aligned} \tag{7}$$

Выражения для S_2 и M_2 показывают, что усилия, вызываемые инерцией, являются такими, как если бы к каждому сечению x был бы добавлен дополнительный вес, равный весу, действительно находящемуся в данном сечении, умноженному на отношение соответствующего ускорения

$$\ddot{\psi} x - \ddot{\zeta}_0$$

к ускорению силы тяжести g .

Последнее преобразование проделано лишь для упрощения способа графического вычисления. Можно также заметить, что

$$\frac{1}{g} \int_{CBD} (x-a)^2 P dx$$

есть момент инерции носовой части корабля относительно плоскости рассматриваемого сечения CD .

Полученный результат можно было бы предвидеть а priori, так как добавление вышеупомянутого веса эквивалентно замене истинного веса кажущимся и этот кажущийся вес действительно имеет место, когда

корабль движется, математическое выражение лишь помогает уточнению того, какими величинами можно пренебречь при вычислении.

3. Для подсчета силы поддержания волны мы могли бы использовать выражение (31)¹ и, последовательно его преобразуя, должны были бы получить выражения для суммарной силы поддержания и ее момента, как функций времени t . Эти выражения включали бы определенные параметры, аналогичные (41),² при этом суммирование производилось бы не от кормы к носу, а лишь от рассматриваемого сечения к носу. Но проще вывести другое эквивалентное выражение, более удобное для графического расчета. Для того чтобы представить положение корабля на волне, достаточно нанести на чертеж бока действующий профиль волны и грузовую ватерлинию. Чтобы это сделать, нам необходимо лишь вычислить величины ξ_0 , η_0 , ζ_0 , соответствующие рассматриваемому моменту времени; эти величины дадут нам положение центра тяжести корабля. Величина ψ даст нам дифферент корабля, а чтобы установить положение профиля волны, мы должны лишь отметить, что в момент $t=0$ подошва волны проходит через плоскость $\eta_0\zeta_0$.

Нам необходимо рассчитать только разницу в силах поддержания в рассматриваемом положении корабля на волне и на тихой воде. Эта разница появляется из-за: 1) погружения и выхода из воды частей корабля между обычной грузовой ватерлинией и поверхностью волны; чтобы представить это графически, необходимо вычислить лишь дополнительные погруженные или вышедшие из воды площади для достаточного числа (10—12) сечений корабля, обозначим эти объемы через σ ; 2) из-за разницы волнового и гидростатического давлений; эту разницу в силах поддержания можно получить либо точным способом, указанным Смитом, либо с достаточной степенью приближения, пренебрегая прогрессивным изменением радиусов орбит, описываемых частицами воды, и принимая, что сила поддержания волны относится к гидростатической силе поддержания, как длина нормали к трохоиде относится к радиусу орбиты, т. е.

$$\left(1 + \frac{2\pi r}{\lambda} \cos U\right) : 1$$

Приближение будет еще ближе, если мы возьмем значение радиуса r не на поверхности, а на глубине, соответствующей положению центра величины, т. е. мы возьмем

$$r = \frac{h}{2} e^{-\frac{2\pi c}{\lambda}}$$

где h — высота волны, а c — погружение центра величины корабля. В этих формулах U есть фаза, соответствующая рассматриваемому сечению,

$$U = 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} - \frac{t}{\tau_1} \right)$$

¹ А. Н. Крылов, Собрание трудов, т. XI, 1951, стр. 211. (Ред.).

² Там же, стр. 216. (Ред.).

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{\cos \alpha}$$

где α — угол между направлением движения корабля и направлением волны, а τ_1 — кажущийся период волны.

Таким образом, мы должны взять лишь кривую, представляющую распределение гидростатических сил поддержания и умножить ее ординаты Ω на соответствующую величину

$$\frac{2\pi r}{\lambda} \cos U;$$

и мы получим этим путем кривую, выражающую дополнительную поправку, а именно — разницу между волновой и гидростатической силами поддержания.

Соответствующие срезающие силы и изгибающие моменты будут

$$S_3 = - \int_a^L \sigma dx - \frac{2\pi r}{\lambda} \int_a^L \Omega \cos U dx \quad (8)$$

$$M_3 = - \int_a^L (x - a) \sigma dx - \frac{2\pi r}{\lambda} \int_a^L (x - a) \Omega \cos U dx \quad (9)$$

или, если мы зададимся целью использовать графическое представление:

$$y = \sigma + \frac{2\pi r}{\lambda} \Omega \cos U \quad (10)$$

тогда

$$S_3 = - \int_a^L y dx \quad (8')$$

$$M_3 = - \int_a^L (x - a) y dx \quad (9')$$

К этим выражениям непосредственно применимо графическое интегрирование.

4. Для вычисления сил сопротивления воды мы должны принять несколько допущений, но для кораблей с острыми образованиями их действие пренебрежимо мало, а для плоскодонных кораблей его можно считать таким же, как для пластины, имеющей форму грузовой ватерлинии; тогда оно может быть приближенно вычислено простым методом, когда сопротивление принимается пропорционально первой степени скорости или ее квадрату.

Для нашего случая корабля с острыми обводами мы не должны рассматривать его совсем и я не буду приводить формул, соответствующих разным гипотезам.

§ 3. Суммируя вышеуказанные результаты, мы видим, что дополнительные усилия на волне суть:

$$S = S_2 + S_3$$

$$M = M_2 + M_3$$

где S_2 , S_3 , M_2 , M_3 выражаются формулами (6), (7), (8'), (9').

Эти выражения могут быть вычислены двумя различными методами:

1) мы можем вычислить все эти величины в отдельности, а затем взять их суммы, или

2) можем вычислить суммы без интегрирования каждой части в отдельности.

Первый метод требует вычисления величины

$$\int_a^L P dx, \quad \int_a^L (x-a) P dx, \quad \text{и} \quad \int_a^L (x-a) x P dx \quad \text{или} \quad \int_a^L (x-a)^2 P dx \quad (11)$$

где P есть ордината кривой веса. Когда эти три величины получены для всех значений a (графически), то усилия, создаваемые инерцией, могут быть непосредственно получены, если известно движение корабля. Для получения S_3 и M_3 мы чертим кривую

$$y = \sigma + \frac{2\pi r}{\lambda} \Omega \cos U$$

соответствующую значениям:

$$t = 0; \quad t = \frac{\tau_1}{4}; \quad t = \frac{\tau_1}{2}; \quad t = \frac{3\tau_1}{4}$$

а затем двойным ее интегрированием мы получаем четыре системы значений S_3 и M_3 . Так как они суть периодические функции времени t , мы легко можем вычислить коэффициенты соответствующих рядов Фурье, как представлено в самой работе, и, таким образом, получить данные о влиянии волны.

Второй метод представлен в самой работе „Общая теория качки корабля на волнении“.

О ВЛИЯНИИ КАЧАНИЙ КОРАБЛЯ НА ОРУДИЕ ПРИ НАКАТЕ¹

§ 1. В настоящей записке рассматривается вопрос о том влиянии, которое оказывают качания корабля на волнении на орудие при накате.

Это влияние происходит от двух причин: 1) от изменения угла наклона платформы к горизонту и 2) от сил инерции, развивающихся при качке корабля.

Чтобы не усложнять напрасно выкладок, ограничимся рассмотрением самого невыгодного случая, т. е. когда сказанное влияние наибольшее, именно, когда корабль идет к волне лагом и имеет чисто боковую качку и орудие поставлено по траверзу.

§ 2. Качания корабля при вышеуказанном условии состоят из двух движений: во-первых, поступательного (орбитального) движения центра тяжести корабля по круговой орбите, лежащей в вертикальной плоскости бега волн. Диаметр орбиты равен высоте волны, время обращения равно периоду волны, движение по орбите равномерное и центр тяжести проходит через низшую точку своей орбиты, когда под кораблем проходит подошва волны. Во-вторых, боковой качки, совершающейся около продольной оси корабля, проходящей через его центр тяжести, причем боковая качка состоит из наложения друг на друга двух родов колебаний, из которых период одного равен периоду волн, период другого равен периоду размахов корабля на тихой воде.

§ 3. Таким образом, имеем следующий вопрос: *При данном движении корабля рассмотреть и исследовать движение орудия с подвижными частями станка по отношению к неподвижным частям станка при накате.*

Так как все движения совершаются в плоскости шпангоута, совпадающей с плоскостью бега волн, то примем ее за плоскость координат ζ , η (фиг. 1), неподвижных в пространстве, за начало координат примем точку O — центр орбиты, описываемой центром тяжести G корабля. В любой момент времени t положение корабля определяется координа-

¹ Докладная записка подполковника А. Н. Крылова главному инспектору морской артиллерии от 2 мая 1902 г. Публикуется впервые по авторской копии. (Архив АН СССР, ф. 759, оп. 2, № 65, лл. 366—383). (Ред.).

тами η_0 и ζ_0 его центра тяжести G и углом крена φ , считаемым от вертикальной плоскости. Положение центра тяжести C орудия, определяется переменной координатою y , считаемого от диаметральной плоскости перпендикулярно к ней, и постоянной координатою a , представляющей возвышение орудия над центром тяжести корабля, предполагая, что платформа параллельна плоскости палубы.

Чтобы составить дифференциальные уравнения относительного движения орудия, воспользуемся второю Лагранжевою формою общих дифференциальных уравнений динамики, именно:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

где T есть живая сила движущейся системы, q_1, q_2, \dots, q_n — независимые координатные параметры, определяющие положение системы; $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ — их производные по времени; Q_1, Q_2, \dots, Q_n — множители при элементарных перемещениях $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ в выражении элементарной работы внешних и внутренних сил в системе

$$\delta U = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n$$

В данном случае система, движение которой нас интересует, состоит из одной лишь точки C , в которой воображаем сосредоточенную массу M орудия и станка (подвижных частей). Координатные параметры суть

$$\eta_0, \zeta_0, \varphi, y.$$

из которых лишь y представляет собою неизвестную функцию времени; значит и уравнений вида (1) будет только одно, именно:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}'} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Q \quad (1')$$

Чтобы составить выражение T , выразим сперва абсолютные координаты точки C (ζ и η) через наши параметры; будем иметь:

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0 + a \sin \varphi + y \cos \varphi \\ \zeta &= \zeta_0 + a \cos \varphi - y \sin \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}' &= \dot{\eta}'_0 + \dot{y}' \cos \varphi + (a \cos \varphi - y \sin \varphi) \dot{\varphi}' \\ \dot{\zeta}' &= \dot{\zeta}'_0 - \dot{y}' \sin \varphi - (a \sin \varphi + y \cos \varphi) \dot{\varphi}' \end{aligned} \quad (3)$$

а так как

$$2T = M(\dot{\zeta}'^2 + \dot{\eta}'^2)$$

то

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}'} = M \left[\dot{\zeta}' \frac{\partial \dot{\zeta}'}{\partial \dot{y}'} + \dot{\eta}' \frac{\partial \dot{\eta}'}{\partial \dot{y}'} \right]$$

и

$$\frac{\partial T}{\partial y} = M \left[\zeta' \frac{\partial \zeta'}{\partial y} + \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial y} \right]$$

а так как, в силу уравнений (3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta'}{\partial y'} &= \cos \varphi; & \frac{\partial \eta'}{\partial y} &= -\varphi' \sin \varphi \\ \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} &= -\sin \varphi; & \frac{\partial \zeta'}{\partial y} &= -\varphi' \cos \varphi \end{aligned}$$

то по подстановке и сокращении получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y'} &= (\eta'_0 \cos \varphi - \zeta'_0 \sin \varphi + a\varphi') M + My' \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= -[\varphi' (\eta'_0 \sin \varphi + \zeta'_0 \cos \varphi) - y\varphi'^2] M \end{aligned} \quad (4)$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial y'} \right) = M [\eta''_0 \cos \varphi - \zeta''_0 \sin \varphi + a\varphi'' - (\eta'_0 \sin \varphi + \zeta'_0 \cos \varphi) \cdot \varphi'] + My'' \quad (5)$$

и по подстановке получим:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial y'} \right] - \frac{\partial T}{\partial y} = M [y'' + \eta''_0 \cos \varphi - \zeta''_0 \sin \varphi + a\varphi'' - y\varphi'^2] \quad (6)$$

Чтобы составить вторую часть уравнения движения, заметим, что силы, действующие на орудие, суть: 1) вес орудия $P = Mg$, 2) давление на поршень компрессора F , 3) сопротивление накату от трения и пр. f .

В выражении элементарной работы множителем при перемещении δy будут

$$(P \sin \varphi + F - f) \delta y$$

Значит,

$$Q = P \sin \varphi + F - f = Mg \sin \varphi + F - f$$

и требуемое уравнение движения будет

$$M [y'' + \eta''_0 \cos \varphi - \zeta''_0 \sin \varphi + a\varphi'' - y\varphi'^2] = Mg \sin \varphi + (F - f) \quad (7)$$

§ 4. Прежде чем идти дальше, рассмотрим, что собою представляет каждый член уравнения (7), чтобы таким образом наглядно себе представить те добавочные силы, которые являются от качки, орбитального движения корабля и крена его.

Для этого напишем уравнение (7) так:

$$My'' = Mg \sin \varphi + (F - f) - M(\eta''_0 \cos \varphi - \zeta''_0 \sin \varphi) - M(a\varphi'' - y\varphi'^2) \quad (7')$$

и сравним его с уравнением

$$My'' = Mg \sin \varphi + (F - f) \quad (8)$$

которое представляет движение орудия на корабле не качающемся, но наклоненном на угол φ . Мы видим, что вторая часть уравнения (7') отличается от второй части уравнения (8) членами

$$-M(\gamma_0'' \cos \varphi - \zeta_0'' \sin \varphi) - M(a\varphi'' - y\varphi'^2)$$

где M есть масса орудия.

Величины γ_0'' и ζ_0'' (фиг. 2) представляют собою проекции ускорения точки G на оси координат $O\eta$ и $O\zeta$, величина же $(\gamma_0'' \cos \varphi - \zeta_0'' \sin \varphi)$ представляет собою проекцию $O\varepsilon$ полного ускорения W_1 точки G на направление Oy , составляющее угол φ с горизонтом. Знак перед этим членом показывает, что сила $M(\gamma_0'' \cos \varphi - \zeta_0'' \sin \varphi)$ действует в направлении, обратном $O\varepsilon$.

Таким образом, первый член

$$-M(\gamma_0'' \cos \varphi - \zeta_0'' \sin \varphi)$$

представляет собою проекцию на направление платформы силы инерции поступательного движения орудия, общего с орбитальным движением центра тяжести корабля.

Член $-Ma\varphi''$ — представляет собою, очевидно, силу инерции, которую имело бы орудие, находясь в точке A при боковой качке корабля, ибо φ'' есть угловое ускорение этого движения.

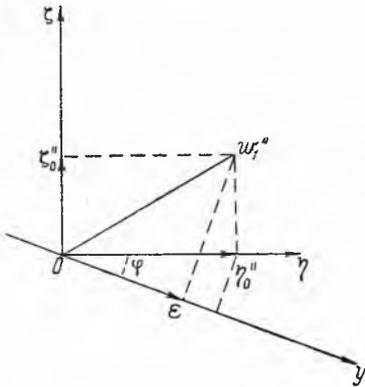
Член $My\varphi'^2$ представляет собою ту величину центробежной силы, которую имело бы орудие, находясь в точке C ; предполагаем, что корабль вращается около оси, проходящей через A .

Само собою разумеется, что можно было бы и впредь предвидеть, что именно эти силы надо присоединить к тем, которые действуют на орудие при неподвижном корабле, чтобы рассматривать его движение по отношению к движущейся вместе с кораблем платформе.

§ 5. Прежде чем интегрировать уравнение (7), рассмотрим сравнительную величину этих трех добавочных, развивающихся от качаний корабля, сил.

1. Сила инерции Mw_1 от орбитального движения корабля может быть получена из рассмотрения известных свойств равномерного движения точки по кругу, ибо таково движение центра тяжести корабля. Значит, эта сила направлена параллельно прямой, соединяющей мгновенное положение центра тяжести корабля с центром орбиты, им описываемой в сторону от этого последнего к центру тяжести корабля. Величина же этой силы составляет

$$\frac{Mv^2}{r} = M\left(\frac{2\pi r}{\tau}\right)^2 \frac{1}{r} = \frac{4\pi^2}{\tau^2} Mr = \frac{4\pi^2}{\tau^2} \cdot \frac{P}{g} r$$



Фиг. 2.

Для зыби имеется определенное соотношение между периодом волн τ и длиной их λ , а именно:

$$\tau = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}$$

Значит

$$\tau^2 g = 2\pi\lambda$$

и мы получаем:

$$M\omega_1 = \frac{4\pi^2}{\tau^2} \cdot \frac{P}{g} r = \frac{2\pi r}{\lambda} P$$

Но величина $\frac{2\pi r}{\lambda}$ представляет собою синус угла наибольшего волнового склона, который составляет обыкновенно при крупной зыби около $8-10^\circ$, и, значит, $\frac{2\pi r}{\lambda}$ составляет около $\frac{1}{7}$.

Таким образом, мы видим, что сила инерции от орбитального движения корабля составляет около $\frac{1}{7}$ от веса орудия и изменяет свое направление в круговую за время пробега τ каждой волны под кораблем.

2. Сила — $Ma\varphi''$ инерции орудия от размахов боковой качки при положении центра тяжести орудия в диаметральной плоскости зависит, как видно, от возвышения орудия над центром тяжести корабля.

Центр тяжести высокобортного корабля лежит обыкновенно весьма близко от грузовой ватерлинии, поэтому можно без большой погрешности брать вместо a возвышение оси орудия над грузовой, т. е. около 25 футов.

Боковая качка может быть представлена такую формулою

$$\varphi = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) + B \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \beta\right)$$

где T есть период размахов корабля на тихой воде; τ период волн, и величина B выражается такую формулою:

$$B = \Theta_0 \frac{\tau^2}{T^2 - \tau^2}$$

где Θ_0 есть наибольший волновой склон.

Наибольший размах будет равен $A + B$, значит, когда он известен и известно B , то найдется и A .

Так, например, если $\tau = 7^\circ$, $T = 15^\circ$, $\Theta_0 = 9^\circ$, то будет

$$B = \Theta_0 \frac{49}{225 - 49} = 9^\circ \frac{49}{176} = 2.5^\circ$$

и, следовательно, если, например, размахи качки доходили до 10° , то $A = 7.5^\circ$.

Если же, например, $\tau = 8^\circ$, $T = 15^\circ$ и $\Theta_0 = 9^\circ$, то $B = 9^\circ \frac{64}{225 - 64} = 3.6^\circ$ и $A = 6.4^\circ$.

Обыкновенно и бывает, что A от 2 до 3 раз больше B .
Итак, когда

$$\varphi = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) + B \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \beta\right)$$

то

$$\varphi'' = -\frac{4\pi^2}{T^2} A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) - B \frac{4\pi^2}{\tau^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \beta\right)$$

и если мы, например, положим:

$$A = 7^\circ = \frac{1}{8}; \quad B = 3^\circ = \frac{1}{20}$$

$$T = 15^\circ \quad \text{и} \quad \tau = 7^\circ$$

то будет:

$$\begin{aligned} \varphi'' &= -\frac{4\pi^2}{225} \cdot \frac{1}{8} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) - \frac{4\pi^2}{49} \cdot \frac{1}{20} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \beta\right) = \\ &= -\frac{1}{45} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) - \frac{1}{25} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \beta\right) \end{aligned}$$

Значит, в нашем примере наибольшая величина, которой может достигнуть угловое ускорение φ'' , составит до

$$\frac{1}{45} + \frac{1}{25} = \frac{14}{225} \approx \frac{1}{15}$$

Таким образом, даже при плавной (8 ординарных размахов в минуту) боковой качке, сила инерции, от нее происходящая, при положении центра тяжести орудия в диаметральной плоскости и возвышении его оси на 25 футов, может достигать величины до

$$M\varphi''a = \frac{P}{g} a\varphi'' = \frac{P}{32} 25 \frac{1}{15} \approx \frac{1}{20} P$$

т. е. до $\frac{1}{20}$ от веса орудия.

3. Центробежная сила $Mu\varphi'^2$ зависит от угловой скорости размахов боковой качки и удаления u центра тяжести орудия от диаметральной плоскости.

Чтобы составить понятие о наибольшей величине этой силы, возьмем тот же пример; у нас будет:

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{2\pi}{15} \cdot \frac{1}{8} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) + \frac{2\pi}{7} \cdot \frac{1}{20} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \beta\right) = \\ &= \frac{1}{20} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) + \frac{1}{22} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \beta\right) \end{aligned}$$

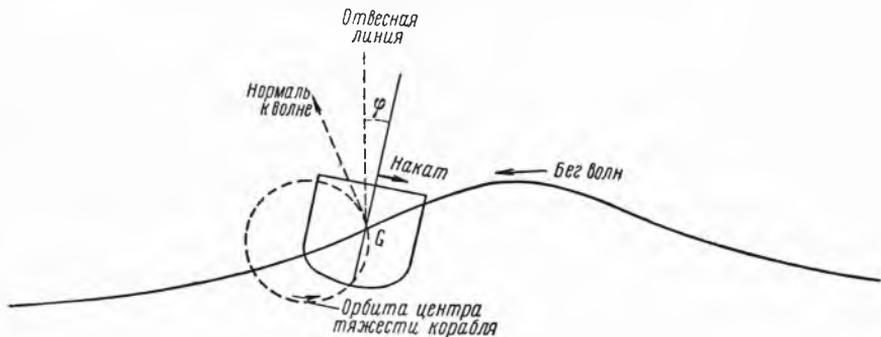
Значит, наибольшая возможная величина φ' есть $\frac{1}{20} + \frac{1}{22} = \frac{21}{220} \approx \frac{1}{10}$ и, следовательно, наибольшая величина φ'^2 составит около $\frac{1}{100}$. Для орудий средних башен u не превышает 10 футов, и, значит, сила $Mu\varphi'^2$ составит не более

$$\frac{P}{32} 10 \frac{1}{100} = \frac{1}{320} P$$

т. е. величина этой силы ничтожна по сравнению с силою инерции орбитального движения. Для бортовых орудий эта сила может составить до $\frac{1}{100} P$.

§ 6. Нетрудно теперь рассмотреть и влияние качки на скорость наката орудия, так как силы, происходящие от качки, уже известны.

Наибольший интерес представляет определение *наибольшей* величины той скорости, которая может произойти от действия качки. Мы получим эту величину, если вообразим, что в момент открытия крана для наката орудия корабль занимал положение, показанное на фиг. 3. В этом



Фиг. 3.

положении проекции на направление платформы силы инерции орбитального движения и силы тяжести слагаются и действуют в одну сторону, а также и сила $Ma\varphi''$ достигает наибольшей величины и действует в одну сторону с первыми двумя. Сила $Mu\varphi^2$ в этом положении корабля имеет наименьшую величину, но по ничтожности этой силы с прочими ею можно совершенно пренебречь.

В этом положении корабля угол φ_1 , считаемый от *истинной* отвесной линии, будет приблизительно равен $A - B$, т. е. около $5-6^\circ$, когда полный размах составляет 10° и, значит, будет $P \sin \varphi = \frac{1}{10} P$ и, следовательно, все три силы вместе составят

$$\frac{1}{7} P + \frac{1}{10} P + \frac{1}{20} P = \frac{41}{140} P \approx \frac{2}{7} P$$

т. е. на орудие в сторону к борту, кроме силы $(F-f)$ нормального наката, действует сила, составляющая до $\frac{2}{7}$ от веса орудия и происходящая от влияния качки и крена.

Если бы при рассматриваемом положении корабля кран оказался открытым в такой же мере, как для наката при прямом положении корабля, то $F-f$ была бы почти равна нулю и, следовательно, вышеуказанная добавочная сила производила бы свою полную работу, которая составила бы при длине отката $l = 3-4$ фута величину

$$\frac{2}{7} P \cdot l = \frac{2}{7} P \cdot 3.5 = P \cdot 1 \text{ тонно-футов}$$

предполагая, что P выражено в тоннаже.

Значит, одна эта добавочная сила сообщила бы орудью скорость наката V , определяемую равенством

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} V^2 = P$$

$$V^2 = 2g = 64;$$

$$V = 8 \text{ футов в секунду}$$

т. е. в 24 раза большую нормальной скорости в 0.33 фута.

Если по достижении орудием крайнего положения „к борту“ оно останавливается *упругими* деформациями стопора и неподвижных частей станка, то, так как работа этих деформаций пропорциональна квадрату их и должна поглотить развивающуюся живую силу, соответствующую скорости в 24 раза большей нормальной, то и самые деформации будут в 24 раза больше нормальных и, следовательно, поломка стопора или станин вполне возможна.

Полученные в этой записке выводы могут быть резюмированы следующим образом.

1). При качаниях корабля на волнении на орудие в направлении наката (параллельном палубе), кроме составляющей силы тяжести, соответствующей углу крена корабля, действуют еще силы инерции, происходящие как от орбитального движения центра тяжести корабля, так и от размахов его качки.

2. При качке (боковой) корабля на крупной зыби (длина волн около 300—350 футов, высота 15—17 футов, период около 7 сек.) и размахах его до 10° на сторону при 8 ординарных размахах в минуту сказанные силы могут достигать следующих величин:

а) составляющая сила тяжести до $\frac{1}{6} P$;

б) сила инерции орбитального движения до $\frac{1}{7} P$;

в) сила инерции от размахов качки до $\frac{1}{20} P$,

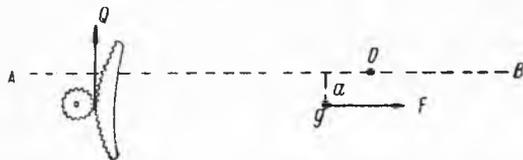
где P есть вес орудия.

Во время качаний корабль может принять на волне такое положение, при котором около $\frac{2}{3}$ первой силы слагаются с двумя остальными и, значит, в сторону наката может появиться добавочная сила, составляющая до $\frac{2}{7}$ от веса орудия. Эта сила сохраняет почти постоянную величину в течение от $\frac{1}{2}$ до 2 сек. и, следовательно, может вызвать весьма стремительный накат, продолжительность которого составит всего около 1 сек., а наибольшая скорость до 8 футов в секунду.

ДЕЙСТВИЕ ВЫСТРЕЛА НА ПОДЪЕМНЫЙ МЕХАНИЗМ 6-ДЮЙМОВОЙ ПУШКИ¹

Задача. Даны велосиметрическая запись отката 6-дюймовой пушки Кане и все ее конструктивные элементы; требуется определить наибольшую величину скручивающего усилия, действующего на валик подъемного механизма, а также рассмотреть возможный эффект этого действия, продолжительность коего весьма мала.

Решение. Пусть O (фиг. 1) есть ось цапф люльки; AB — ось орудия; g — центр тяжести откатывающихся частей; P — вес их; I — момент инерции всей качающейся системы относительно оси O , когда орудие придвинуто к борту (при начале отката); L — радиус подъемной дуги; r — радиус подъемной шестеренки; d — диаметр подъемного валика.



Фиг. 1.

Положим, что в момент времени t после начала отката качающаяся система занимает положение, определяемое углом θ ее поворота около оси O . Вследствие такого поворота произойдет деформация частей подъемного механизма, которая, главным образом, будет состоять в скручивании подъемного валика, и если пренебречь изгибом зубцов, то угол закручивания валика φ будет равен²

$$\varphi = \theta \frac{L}{r} \quad (1)$$

Такое закручивание валика дает момент

$$M = \frac{\pi d^4}{32} \cdot \frac{H}{l} \varphi \quad (2)$$

¹ Письмо начальнику Обуховского завода в Петербурге А. П. Меллеру. Публикуется впервые по авторской копии. (Архив АН СССР, ф. 759, оп. 2, № 64, лл. 68—79). (Ред.).

² При этом считается, что зазор в зацеплении подъемной шестеренки и подъемной дуги отсутствует. (Ред.).

где H есть модуль сдвига для стали валика, т. е. около $800\,000$ кг/см², и l — длина валика и, следовательно, давление на зубец Q будет

$$Q = \frac{M}{r} \quad (3)$$

Момент же этого давления относительно оси цапфы O есть

$$\mathfrak{M} = QL = \frac{\pi d^4}{32} \cdot \frac{H}{l} \left(\frac{L}{r}\right)^2 \theta \quad (4)$$

или, обозначая для краткости через K величину

$$K = \frac{\pi d^4}{32} \cdot \frac{H}{l} \left(\frac{L}{r}\right)^2 \quad (5)$$

будем иметь:

$$\mathfrak{M} = K\theta \quad (4')$$

Сила инерции подвижных (откатывающихся) частей

$$F = \frac{P}{g} w \quad (6)$$

где w есть ускорение в момент t , доставляемое известною обработкою велосиметрической записи, и, следовательно, w будет известная функция времени t , которую обозначим так:

$$w = f(t)$$

причем между этою функцией и функцией $s = F(t)$, представляющей запись пройденных пространств, имеет место соотношение

$$f(t) = F''(t) \quad (7)$$

Так как сила F действует на плечо a (фиг. 1), то уравнение движения качающейся системы будет¹

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = Fa - \mathfrak{M} \quad (8)$$

или, подставляя вместо \mathfrak{M} и F их величины

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + K\theta = \frac{Pa}{g} f(t) \quad (8')$$

Разделив на I и обозначая для краткости

$$\frac{K}{I} = n^2 \text{ и } \frac{Pa}{gI} = q \quad (5')$$

имеем:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + n^2 \theta = qf(t) \quad (8'')$$

¹ При составлении уравнения движения качающейся системы А. Н. Крылов пренебрегает моментом от перевеса откатывающихся частей и кориолисовыми силами инерции снаряда и орудия. (Ред.).

Общий интеграл этого уравнения есть такой:¹

$$\theta = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt + \frac{g}{n} \left[\sin nt \int_0^t f(t) \cos nt dt - \cos nt \int_0^t f(t) \sin nt dt \right]$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 должны быть определены из начальных условий, которые суть:

при $t=0$ должно быть $\theta=0$ и $\theta'=0$. Отсюда следует: $C_1=C_2=0$.

Итак, интеграл уравнения (8'), удовлетворяющий начальным условиям, есть

$$\theta = \frac{g}{n} \left[\sin nt \int_0^t f(t) \cos nt dt - \cos nt \int_0^t f(t) \sin nt dt \right] \quad (9)$$

В этом выражении всё известно и вычисление интегралов не представляет никаких трудностей, но оно еще в значительной мере может быть облегчено и упрощено благодаря соотношению (7) и тому обстоятельству, что велосимметрическая запись доставляет непосредственно функцию $F(t)=s$ (фиг. 2).



Фиг. 2.

В самом деле, так как

$$f(t) = F''(t)$$

то

$$\int_0^t f(t) \cos nt dt = \int_0^t F''(t) \cos nt dt$$

и, выполнив дважды интегрирование по частям и заметив, что при $t=0$ $s=0$ и $s'=0$ (откат без начальной скорости), т. е. $F_{(0)} = F'_{(0)} = 0$, получим:

$$\int_0^t F''(t) \cos nt dt = \cos nt F'(t) + n \sin nt F(t) - n^2 \int_0^t F(t) \cos nt dt.$$

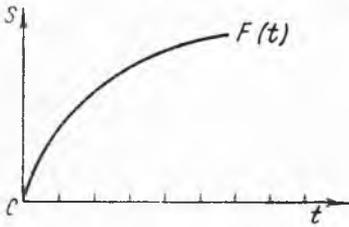
Совершенно так же

$$\begin{aligned} \int_0^t f(t) \sin nt dt &= \int_0^t F''(t) \sin nt dt = \\ &= \sin nt F'(t) - n \cos nt F(t) - n^2 \int_0^t F(t) \sin nt dt \end{aligned}$$

¹ При интегрировании уравнения (8') А. Н. Крылов пренебрегает изменением момента инерции качающейся системы вследствие отката орудия. (Ред.).

Подставляя это выражение в формулу (9), получим:

$$\theta = q \left\{ F(t) - n \sin nt \int_0^t F(t) \cos nt dt + n \cos nt \int_0^t F(t) \sin nt dt. \right. \quad (10)$$

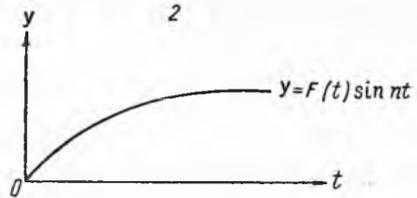
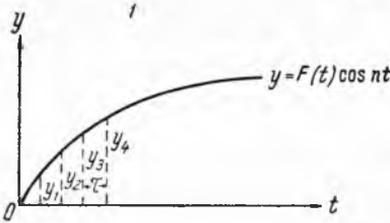


Фиг. 3.

Чтобы вычислить входящие в формулу (10) интегралы, следует поступать так: пусть кривая $F(t)$ (фиг. 3) есть кривая пройденных пространств (s) в функции времени t , доставляемая непосредственной записью велосиметра; вычислив по формуле (5') величину n , строим кривые $y = F(t) \cos nt$ и $Y = F(t) \sin nt$, пусть эти кривые будут 1 и 2 (фиг. 4).

Откладываем по оси t такие равные промежутки τ , чтобы участки кривых, им соответствующие, можно было считать за прямые линии, проводим через [полученные] точки ординаты и пусть они будут

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$$



Фиг. 4.

в нашем примере $y_0 = 0$) и составляем такую схему:

Вычисление интеграла $\int_0^{t=k\tau} y dt = \int_0^{t=k\tau} F(t) \cos nt dt$

I	II	III	IV	V
$t = k\tau$	y	Сумма чисел (II) попарно	Сумма чисел (III) сверху	(IV) $\frac{1}{2} \tau = \int_0^t y dt$
0	y_0	$y_0 + y_1 = N_1$	0 N_1	$\frac{1}{2} \tau N_1$
τ	y_1	$y_1 + y_2 = N_2$	$N_1 + N_2$	$\frac{1}{2} \tau (N_1 + N_2)$
2τ	y_2	$y_2 + y_3 = N_3$	$N_1 + N_2 + N_3$
3τ	y_3	$y_3 + y_4 = N_4$	$N_1 + N_2 + N_3 + N_4$
4τ	y_4
5τ	y_5
.....

Совершенно так же вычисляется и интеграл $\int_0^t Y dt$, и, подставив в формулу (10) вычисленные значения, построим кривую, представляющую зависимость угла θ от времени t , зная θ , найдем и скручивающий момент M и реакцию Q и пр. Таким образом, первая часть задачи будет решена вполне.

Прежде чем перейти ко второй части задачи, т. е. к критерию, какие промежутки времени для данного действия на какое-либо упругое сооружение должно почитать за „малые“ и какие за „большие“, рассмотрим первую часть нашей задачи с несколько иной точки зрения и дадим приближенное решение, но такое, которое будет доставлять два предела для искомой величины θ , а значит, и для остальных, от нее зависящих.

Возьмем уравнение (8):

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = F \cdot a - \mathfrak{M}$$

которое, в силу формулы (7), может быть написано так:

$$I\theta'' = \frac{Pa}{g} F''(t) - \mathfrak{M} \quad (11)$$

В этом уравнении величина \mathfrak{M} — момент реакции подъемной дуги — мал сравнительно с моментом силы инерции, поэтому, если мы, отбросив \mathfrak{M} , напишем уравнение

$$I\theta_1'' = \frac{Pa}{g} F''(t) \quad (12)$$

то полученная из него величина θ_1 , очевидно, будет постоянно *больше* θ , но вместе с тем, она будет и близка к θ .

Из уравнения же (12) следует (так как при $t=0$ $F(t)=0$ и $F'(t)=0$)

$$I\theta_1 = \frac{Pa}{g} F(t)$$

или

$$\theta_1 = \frac{Pa}{gI} F(t) = qF(t) \quad (13)$$

функция же $F(t)$ известна по непосредственной записи велосиметра.

Итак, один предел найден:

$$\theta < \theta_1 \quad (14)$$

Пренебрегая [изгибом] зубцов и относя всю деформацию на скручивание валика, мы, очевидно, нашу систему считаем более жесткой, нежели она есть на самом деле, следовательно, момент \mathfrak{M} , рассчитанный по формуле (4'), не меньше истинного; если же мы напишем формулу

$$\mathfrak{M}_1 = K\theta_1 \quad (15)$$

то, очевидно, будет иметь место неравенство

$$\mathfrak{M} < \mathfrak{M}_1 \quad (16)$$

и, следовательно, если написать уравнение

$$I\theta_2'' = \frac{Pa}{g} F''(t) - \mathfrak{M}_1$$

откуда следует:

$$\theta_2 = \frac{Pa}{gI} F(t) - \frac{1}{I} \int_0^t dt \int_0^t \mathfrak{M}_1 dt = qF(t) - \frac{Kq}{I} \int_0^t dt \int_0^t F(t) dt \quad (17)$$

то будет наверное

$$\theta > \theta_2$$

Итак, получим *двойное* неравенство

$$\theta_1 > \theta > \theta_2 \quad (18)$$

и по нему соответствующие двойные же неравенства для скручивающего валик момента M реакции (давление на зубец) Q и пр.

Если бы найденные пределы оказались недостаточно близки, то нетрудно видеть, как, продолжая подобный процесс последовательных приближений, можно их сблизить как угодно, но на практике, вероятно, этого не потребуется [кстати, порекомендуйте молодым вашим помощникам, которые в Технологическом институте изучали графическую статистику, подумать и разобрать, как, пользуясь приемами графической статистики, *сразу* вычислять встречающийся в формуле (17) интеграл].

Перейдем теперь ко второй части нашей задачи. Слова „весьма медленно“, „очень мало“, „очень много“, „весьма быстро“ и т. п., пока не указано, *по сравнению с чем*, обыкновенно ничего не выражают (скорость вши, ползущей... весьма мала по сравнению со скоростью бега матроса по вантам и весьма велика по сравнению со скоростью сползания глетчеров или векового поднятия или опускания материков).

Итак, надо установить критерий, упомянутый выше. Было бы слишком длинно и сложно излагать полную теорию этого дела, ограничусь простейшим примером и окончательными выводами.

Окончательный вывод такой:

Надо определить период свободных колебаний данной системы, подверженной действию силы. Если продолжительность этого действия *мала* по сравнению с этим периодом, то расчет надо вести „динамически“, и сила „поспеет“ проявить лишь малое влияние, по сравнению со статическим, причем это отношение будет, приблизительно, как квадрат отношения продолжительности действия к квадрату периода. Если же продолжительность действия силы не меньше периода или больше его, то эффект силы проявится полностью и можно рассчитывать как обыкновенно.

В вашем случае для валика период свободных колебаний крутильных около 10 000 в секунду, следовательно, продолжительность в $\frac{1}{350}$ сек. не то, что мала, а весьма велика по сравнению с периодом, т. е. для этого валика.

О РАСЧЕТЕ ПРОГРЕССИВНОЙ КРУТИЗНЫ НАРЕЗОВ¹

§ 1. При движении снаряда внутри канала орудия, ускорение, которое сообщается снаряду, пропорционально в каждый момент движущей силе, равной избытку полного давления на дно снаряда над трением его пояска о нарезы. Угловое ускорение снаряда в каждый момент пропорционально линейному, умноженному на тангенс угла наклона нарезов в этом месте к оси канала.

Давление на боевую грань нареза, очевидно, пропорционально угловому ускорению снаряда в рассматриваемый момент. Так как назначение нарезов состоит единственно в придании снаряду к моменту вылета заданной угловой скорости, то крутизне нарезов по длине канала можно придавать разнообразный вид, достигая того же самого конечного результата. Ясно, что если крутизне в каждой точке придать такое значение, чтобы давление на боевую грань было постоянное, то требуемый результат будет достигнут при *наименьшей* величине этого давления; поэтому представляется, что крутизна, так обусловленная, может иметь некоторое практическое значение в смысле облегчения напряжения пояска и устранения его проворачивания.

С другой стороны выгорание канала происходит главным образом вблизи каморы орудия, поэтому, если нарезы начинать не от самой каморы, а там, где выгорание уже значительно меньше, то, придав их крутизне форму, обусловленную как выше сказано, может быть, окажется возможным получать достаточную меткость и из орудия изношенного или же достигать его исправления более простыми способами.

На основании этих соображений и представляется, что расчет такой крутизны будет бесполезен.

§ 2. Мы начнем рассмотрение с того случая, когда нарезы начинаются от самой каморы. Итак, положим, что уравнение „кривой давления“, отнесенного к единице площади, есть

$$p = f(x)$$

¹ Впервые опубликовано Комиссией особых артиллерийских опытов в 1921 г., отдельным изданием, в Петрограде. (Ред.).

где x есть путь, пройденный снарядом от начала движения; пусть Q есть сила трения, которую при нашем условии можно считать постоянной. Тогда движущая сила F будет

$$F = \frac{\pi d^2}{4} f(x) - Q$$

(d — калибр орудия).

Обозначим эту функцию через $F_1(x)$. Эта функция будет известна, как только известны элементы, ее составляющие; поэтому мы будем ее считать заданной функцией x , причем задание это может быть как аналитическое, так и графическое.

Обозначая затем через m — массу снаряда; ρ — радиус инерции его; θ — угол поворота от начала движения; q — давление на боевую грань; $r = \frac{d}{2}$ — полукалибр, будем иметь следующие уравнения движения:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_1(x) \quad (1)$$

$$m \rho^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = q r \quad (2)$$

По условию задачи q должно быть постоянное, значит, и qr есть постоянная величина; обозначая ее через c , напомним второе уравнение движения так:

$$m \rho^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = c \quad (3)$$

Из уравнения (1) имеем:

$$m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 2 \int_0^x F_1(\xi) d\xi = 2F_2(x) \quad (4)$$

где через $F_2(x)$ обозначен интеграл $\int_0^x F_1(\xi) d\xi$, рассматриваемый как функция своего верхнего предела x .

Из уравнения (4) следует

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{F_2(x)} \quad (5)$$

Откуда

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{F_2(x)}} \quad (6)$$

и

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{F_2(\xi)}} = \sqrt{\frac{m}{2}} F_3(x) \quad (6')$$

причем через $F_3(x)$ обозначен интеграл $\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{F_2(\xi)}}$, рассматриваемый как функция своего верхнего предела x .

Из уравнения (3) имеем:

$$m\varphi^2 \frac{d\theta}{dt} = ct \quad (7)$$

или на основании (6')

$$m\varphi^2 \frac{d\theta}{dt} = c \sqrt{\frac{m}{2}} F_3(x) \quad (8)$$

Из уравнения (7) следует:

$$m\varphi^2\theta = \frac{1}{2} ct^2 \quad (9)$$

и по замене t его выражением (6') и сокращении:

$$\varphi^2\theta = \frac{c}{4} [F_3(x)]^2 \quad (10)$$

Это и есть требуемое уравнение, определяющее „форму“ нареза.

Постоянное c найдется, пользуясь уравнением (8), по данной угловой скорости снаряда при вылете, т. е. при $x=l$; обозначая эту скорость через ω , имеем:

$$m\varphi^2\omega = c \sqrt{\frac{m}{2}} F_3(l)$$

Откуда

$$c = \omega\varphi^2 \sqrt{2m} \frac{1}{F_3(l)}$$

и уравнение (10) принимает вид

$$\theta = \frac{1}{4} \sqrt{2m} \frac{[F_3(x)]^2}{F_3(l)} \omega \quad (11)$$

Таким образом, всё дело сводится к нахождению по заданной функции $F_1(x)$ функций $F_2(x)$ и $F_3(x)$, определяемых равенствами

$$F_2(x) = \int_0^x F_1(\xi) d\xi \quad (12)$$

$$F_3(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{F_2(\xi)}} \quad (13)$$

что проще всего выполнять, как показано в нижеприводимых примерах, в которых, для простоты, трением пренебрегается.

Для нахождения интегралов $F_2(x)$ и $F_3(x)$ применено правило „трапеций“, как самое простое и достаточно точное при том большом числе ординат, которое взято. Если бы было признано желательным вести расчет с большею степенью точности, то выгоднее взять еще чаще ординаты, чем применять более сложные правила, которых множество.¹

¹ См., например, мой курс „Приближенные вычисления“ [1911], стр. 242, 256 пр. (Собрание трудов, т. III, ч. I, стр. 286 и 229 (Ред.)).

Необходимо еще отметить, что при вычислении интеграла $F_3(x)$ встречается то затруднение, что при нижнем пределе $x=0$ подинтегральная функция обращается в бесконечность. Чтобы обойти это затруднение и делается для ближайших к $x=0$ значений абсциссы x отдельный расчет.

Величина ω получена по условию, что ход нарезов у дула равен 25 калибрам, а так как начальная скорость 1900 футов в секунду, то будет

$$\omega = 2\pi \frac{1900 \cdot 12}{3 \cdot 25} = 1910$$

Из чисел столбца XIV табл. 1 видно, что при прогрессивной нарезке угол поворота на 4 дюйма хода составляет в начале 14° , а в конце $20^\circ 5'$; при постоянной крутизне этот угол везде составлял бы $20^\circ 5'$ и, следовательно, давление на боевую грань в начале движения было бы больше, нежели при вылете, в таком же отношении, т. е. на 50% .

§ 3. Положим теперь, что нарезы начинаются не от каморы, а в расстоянии $x=a$, так что снаряд проходит путь, равный a , не вращаясь, и вступает в нарезную часть с соответствующей этому пути начальной скоростью v_0 через промежуток времени t_0 от начала движения.

Сохраняя прежние обозначения, будем иметь те же уравнения движения:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_1(x); \quad m\rho^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = c \text{ для } t \geq t_0$$

пока же $0 < t \leq t_0$, то $\theta = 0$.

Из этих уравнений следует, на основании уравнения (4):

$$mv_0^2 = 2F_2(a) \tag{14}$$

Затем, для значений $t > t_0$ и $x > a$:

$$m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - mv_0^2 = 2[F_2(x) - F_2(a)]$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [F_2(x) - F_2(a)] + v_0^2} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{F_2(x)}$$

как и раньше. Затем

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{F_2(x)}};$$

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{F_2(x)}} = \sqrt{\frac{m}{2}} [F_3(x) - F_3(a)]$$

$$m\rho^2\theta = \frac{1}{2} c (t - t_0)^2;$$

$$m\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = c (t - t_0) = c \sqrt{\frac{m}{2}} [F_3(x) - F_3(a)]$$

$$c = \omega\rho^2 \sqrt{2m} \frac{1}{F_3(t) - F_3(a)} \tag{15}$$

и, следовательно:

$$\theta = \frac{1}{4} \sqrt{2m} \frac{[F_3(x) - F_3(a)]^2}{F_3(l) - F_3(a)} \omega \quad (16)$$

Положим, что для пушки, рассмотренной в примере первом, мы хотели бы сделать нарезы, начиная от такой абсциссы $x = a$, при которой постоянное давление на боевую грань при прогрессивной крутизне было бы такое же, как наибольшее давление при постоянной крутизне.

Из условия $qr = c$ видно, что давление q пропорционально c , следовательно, надо выбрать a так, чтобы было

$$[F_3(l) - F_3(a)] : F_3(l) = 14^\circ : 20^\circ 5'$$

или

$$F_3(a) = 0.317F_3(l) = 0.317 \cdot 0.0370 = 0.0117$$

Из столбца XII табл. 1 видно, что $a = 8$ дюймам.

Соответствующее значение v_0 получится из пропорции

$$v_0^2 : V^2 = F(a) : F_2(l)$$

или

$$v_0 = V \sqrt{\frac{F_2(a)}{F_2(l)}} = 1900 \sqrt{\frac{19.8}{100.76}} = 1900 \cdot 0.429 = 816 \text{ фут/сек.}$$

Отсюда видно, что после того, как по данной кривой давления вычислены функции $F_2(x)$ и $F_3(x)$ — иначе „кривая скоростей“ и „кривая времени“ (ибо скорость v и время t , согласно (5) и (6'), получаются умножением функций $\sqrt{F_2(x)}$ и $F_3(x)$ на постоянный множитель), то решение вопросов, подобных предыдущему, не представляет затруднений.

§ 4. Как второй пример, возьмем 4-дюймовую 60 калибров длиною пушку (морскую), воспользовавшись кривою давления, которая дана в атласе чертежей этого орудия, причем попутно вычислим „кривую скоростей“ и „кривую времени“, которыми и воспользуемся для расчета величины θ .

Здесь прежде всего необходимо обратить внимание на следующее обстоятельство. Кривая давления в начальной своей части отличается от кривой для 3-дюймовой пушки, полученной из опытов Н. А. Забудским. Вместе с тем, рассчитанная по этой кривой кривая скоростей в начальной точке имеет касательную, наклонную к оси x , иными словами разложение функции v в ряд по степеням абсциссы x было бы вида

$$v = ax + bx^2 + \dots$$

Тогда интеграл

$$t = \int_0^x \frac{dx}{v}$$

был бы бесконечный, что и указывает на то, что кривой скорости рассматриваемого вида, а значит, и кривой давления, соответствующего ей очертания, в смежности с началом ($x=0$) не может быть.

Для 4-дюймовой пушки опытов, подобных опытам Н. А. Забудского, произведено не было, следовательно, кривая давлений построена на теоретических соображениях, а так как для целей расчета орудия начальная часть кривой давления не имеет существенного значения, то к правильному очертанию этой начальной части и не было приложено заботы.

Давление или, точнее говоря, движущая сила при горении пороха изменяется с течением времени и, если вообразить, что

$$p = a + bt + ct^2 + \dots$$

причем a есть избыток трения в покое над трением при движении, то будет

$$x = \alpha t^2 + \beta t^3 + \dots$$

следовательно,

$$t = \gamma \sqrt{x} + \dots$$

а значит и скорость v в функции x выразится так:

$$v = \delta \sqrt{x} + \dots$$

и

$$p = a + \varepsilon \sqrt{x} \dots$$

Если бы разложение p началось вообще с какой-либо степени t^n и было бы

$$p = at^n + bt^m + \dots$$

то

$$x = \alpha t^{n+2} + \beta t^{m+2} + \dots$$

значит,

$$t = \gamma x^{\frac{1}{n+2}} + \dots$$

$$v = \delta x^{\frac{n+1}{n+2}} + \dots$$

т. е. во всяком случае кривая скоростей в смежности с начальной точкою касалась бы оси ординат Ov , в каковом случае интеграл $\int_0^x \frac{dx}{v}$ только и остается конечным.

На основании этого может казаться, что в смежности с началом надо представить зависимость между v и x формулою вида

$$v^2 = \alpha x + \beta^2 x^2 + \dots$$

определив коэффициенты α и β по двум значениям скорости, рассчитанной по имеющейся на чертеже кривой давления. Тогда для этого промежутка время t будет

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\alpha x + \beta^2 x^2}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\left(\beta x + \frac{\alpha}{2\beta}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4\beta^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\beta} \operatorname{lg} \frac{\left(\beta x + \frac{\alpha}{2\beta}\right) + \sqrt{\alpha x + \beta^2 x^2}}{\frac{\alpha}{2\beta}} = \frac{1}{\beta} \operatorname{lg} \frac{v + \sqrt{v^2 + \frac{\alpha^2}{4\beta^2}}}{\frac{\alpha}{2\beta}}$$

остальную же часть кривой времен вычислять по правилу трапеций. Но такой расчет приведет к неправильному результату, как то видно из прилагаемой табл. 2.

В самом деле, в этом случае, пока снаряд проходит путь в 4 см, скорость нарастает до 40.1 м в секунду, а время t составляет 0.314 сотых секунды и, значит, ускорение (в соответствии с малым значением давления) малое. Но, так как в нашем предположении форма нарезов обусловлена *постоянством* давления на боевую грань, то, чтобы получить соответствующее этому условию угловое ускорение, пришлось бы нарезам придать практически совершенно недопустимую крутизну (угол поворота на 4 см составил бы 50.4).

Отсюда ясно, что для расчета начальной части нарезов следует сделать относительно кривой давления другое крайнее предположение, а именно, что давление возрастает до своей наибольшей величины ранее, нежели снаряд успевает приобрести чувствительную скорость и какое-либо смещение, т. е. что кривая давления имеет вид такой, как в опытах Забудского.

Соответствующий этому предположению расчет приведен в табл. 3 и не требует пояснений, так как он совершенно аналогичен исполненному в табл. 1.

Если бы мы пожелали начать нарезы не от каморы, а отступя, обусловив тем, чтобы давление на боевую грань при прогрессивной крутизне было равно наибольшему на нее давлению при постоянно крутизне, то получили бы пропорцию

$$(T - t_0) : T = 4^{\circ}2 : 5^{\circ}625$$

где T есть полное время движения, t_0 момент вступления на нарезы иначе:

$$1 - \frac{t_1}{T} = 0.747 \text{ и } \frac{t_1}{T} = 0.253$$

$$t_0 = 0.253 \cdot 0.965 = 0.244 \text{ сотых секунды.}$$

Расчет прогрессивной крутизны нарезов для 3-дюймовой пушки в 30 калибров длиной¹

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
Абсцисса x в дм	Давление P в 1000 атм.	$\frac{\pi d^2}{4} p = F_1(x)$ в русск. фунт. 10^5	Суммы III попарно	Суммы IV сверху	$V \frac{h}{2} = F_2(x)$ в фунт. · дм 10^5	$\frac{1000}{\sqrt{F_2(x)}}$	Суммы VII попарно	Суммы VIII сверху	$10000 \int_{12}^x \frac{dx}{\sqrt{F_2(x)}}$	$\int_{12}^x \frac{dx}{\sqrt{F_2(x)}}$	$F_3(x)$	$[F_3(x)]^2$	θ°	Дуга пово- рота $S = \frac{\pi r}{180} \theta^\circ$ в дм
0	2.22	2.51	4.99	0.00	0.00						0.0000	0.000	0.0	0.00
4	2.19	2.48	4.91	4.99	9.98						0.0081	0.048	14.0	0.367
8	2.15	2.43	4.74	9.90	19.80						0.0115	0.097	28.3	0.746
12	2.04	2.31	4.43	14.64	29.28	5.83					0.0141	0.145	42.3	1.110
16	1.88	2.12	4.09	19.07	38.14	5.12	10.95	0.00	0.00	0.000	0.0163	0.194	56.7	1.485
20	1.74	1.97	3.72	23.16	46.32	4.75	9.87	10.95	21.90	0.0022	0.0183	0.245	71.5	1.87
24	1.55	1.75	3.36	26.88	53.76	4.33	9.08	20.82	41.64	0.0042	0.0201	0.296	86.5	2.27
28	1.42	1.61	3.06	30.24	60.48	4.07	8.40	29.90	59.80	0.0060	0.0218	0.348	101.8	2.67
32	1.28	1.45	2.75	33.30	66.60	3.85	7.92	38.30	76.60	0.0077	0.0228	0.396	115.6	3.03
36	1.15	1.30	2.46	36.05	72.10	3.75	7.60	46.22	92.44	0.0092	0.0233	0.451	132.3	3.48
40	1.03	1.16	2.18	38.51	77.02	3.60	7.35	53.82	107.64	0.0108	0.0249	0.505	147.5	3.87
44	0.90	1.02	1.93	40.69	81.38	3.50	7.10	61.17	122.34	0.0122	0.0263	0.565	165.0	4.32
48	0.80	0.91	1.70	42.62	85.24	3.43	6.93	68.27	136.54	0.0137	0.0278	0.618	180.5	4.73
52	0.70	0.79	1.49	44.32	88.64	3.36	6.79	75.20	150.40	0.0150	0.0291	0.678	198.5	5.20
56	0.62	0.70	1.32	45.81	91.62	3.30	6.66	81.99	166.98	0.0164	0.0305	0.738	215.5	5.65
60	0.55	0.62	1.19	47.13	94.26	3.25	6.55	88.65	177.30	0.0177	0.0318	0.800	233.6	6.13
64	0.50	0.57	1.08	48.32	96.64	3.22	6.47	95.20	190.40	0.0190	0.0331	0.865	252.5	6.62
68	0.45	0.51	0.98	49.40	98.20	3.19	6.41	101.67	203.34	0.0203	0.0344	0.930	271.5	7.12
72	0.42	0.47	50.38	100.76	3.15	6.34	108.08	114.42	228.84	0.0216	0.0357	1.000	292.0	7.64

См. отдельный расчет²¹ Н. Забудский. О давлении пороховых газов в канале 3-дюймовой пушки, черт. 3.² На протяжении от $x=0$ до $x=12$ можно принять $F_1(x)$ равным среднему ее значению $2.42 \cdot 10^5$, тогда $F_2(x) = 2.42 \cdot 10^5 \cdot x$,

$\frac{1}{\sqrt{F_2(x)}} = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{\sqrt{2.42}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$. Следовательно: $\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{F_2(\xi)}} = \frac{1}{50\sqrt{2.42}} \sqrt{x} = 0.00406 \sqrt{x}$. Таким образом, для значений $0 \leq x \leq 12$ функция $F_3(x)$ есть $F_3(x) = 0.00406 \sqrt{x}$.

Отдельный расчет к таблице 1

x	$8.86x$	$8.86x + 4.97 = \sqrt{^2 + 24.7}$	$(8.86x + 4.97)^2$	v^2	v	$v + \sqrt{v^2 + 24.7}$	$\lg(v + \sqrt{v^2 + 24.7})$	$\lg \frac{v + \sqrt{v^2 + 24.7}}{4.97}$	$0.26 \lg = t \left(\frac{1}{100} \text{ сек.} \right)$	$v = 51.7 \sqrt{x}$ Для таб. III
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.0
0.1	0.89	5.86	34.34	9.64	3.10	8.96	0.9523	0.2560	0.0666	16.3
0.25	2.215	7.185	51.62	26.92	5.19	12.37	1.0924	0.3961	0.103	25.8
0.50	4.43	9.40	88.36	63.66	7.95	17.35	1.2393	0.5430	0.141	36.6
0.75	6.645	11.615	134.90	110.20	10.50	22.11	1.3446	0.6483	0.1685	44.8
1.00	8.86	13.83	191.27	166.6	12.91	26.74	1.4272	0.7309	0.190	51.7
2	17.72	22.69	514.84	490.1	22.14	44.83	1.6516	0.9553	0.248	73.2
3	26.58	31.55	995.40	970.7	31.16	62.71	1.7973	0.1010	0.286	89.5
4	35.44	40.41	1633	1608.3	40.10	80.51	1.9058	1.2095	0.314	103
6	53.16	58.13	3379	3354	57.92	116.05	2.0646	1.3683	0.356	126.5
8	70.88	75.85	5753	5728	75.68	151.43	2.1802	1.4839	0.386	146.2
10	88.60	93.57	8755	8730	93.43	187.00	2.2718	1.5755	0.410	163.2
12	106.32	111.29	12385	12360	111.18	222.47	2.3472	1.6509	0.430	179.0

Постоянная крутизна (ход при дуле 25 калибр)
Прогрессивная крутизна (ход при дуле 25 калибр)

Прогрессивная, начало нарезов 4 калибра впереди камеры

0 4 8 12 16 24 32 40 48 56 64 72 80 88 96 104 см.

Схема развертки нарезов

Расчет прогрессивной крутизны нарезов для

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Абсцисса x см	Ординаты кривой давления в мм чертежа	Суммы (II) попарно	Суммы (III) сверху	Приведение (IV) к промежутку $h = 32$	Приведенные суммы сверху	Скорость $\frac{v}{100}$	$\frac{100}{v}$	Суммы (VIII) попарно
0	0.0	25.5	0.0	0.0	0.0	0.0		
4	25.5	65.5	25.5	3.2	3.2	0.401	2.49	
8	40.0	94.5	91.0	11.4	11.4	0.757	1.32	2.246
12	54.5	117.5	185.5	23.2	23.2	1.080	0.926	1.651
16	63.0		303.0	37.9	37.9	1.380	0.725	
24	75.0	138.0	138.0	34.5	72.4	1.905	0.525	1.250
32	82.0	157.0	295.0	73.8	111.7	2.37	0.422	0.947
40	86.0	168.0	463.0	115.8	153.7	2.78	0.360	0.782
48	88.0	174.0	637.0	159.3	197.2	3.15	0.317	0.677
56	88.0	176.0	813.0	203.4	241.3	3.48	0.287	0.604
72	85.0	173.0	173.0	86.5	327.8	4.06	0.246	0.533
88	80.0	165.0	338.0	169.0	410.3	4.54	0.220	0.466
104	76.0	156.0	494.0	247.0	488.3	4.94	0.202	0.422
120	71.5	147.5	642.0	321.0	562.3	5.32	0.188	0.390
152	65.0	136.5	136.5		698.8	5.94	0.168	0.356
184	59.5	124.5	261.0		823.3	6.44	0.155	0.323
216	55.0	114.5	375.5		937.8	6.87	0.146	0.301
248	50.5	105.5	481.0		1043.3	7.25	0.138	0.284
280	46.5	97.0	578.0		1140.3	7.57	0.132	0.270
312	43.5	90.0	668.0		1230.3	7.87	0.127	0.259
344	42.0	85.5	743.0		1305.8	8.11	0.123	0.250
376	40.0	82.0	825.5		1387.8	8.36	0.120	0.243
408	38.0	78.0	903.5		1465.8	8.58	0.117	0.237
440	37.0	75.0	978.5		1540.8	8.81	0.1135	0.230
472	35.5	72.5	1051.0		1613.3	9.01	0.111	0.2245
504	34.5	70.0	1121.0		1683.3	9.21	0.1086	0.2196
536	33.5	68.0	1189.0		1751.3	9.40	0.1064	0.215

Примечание. Для начальной части кривой скоростей имеем: при $x = 4$

$$v^2 = 88x + 78.5 x^2 = (8.86x + 4.97)^2 - 24.7. \text{ Тогда } t = \int \frac{dx}{v} = \frac{1}{8.86} \lg \frac{\sqrt{v^2 + 24.7} + v}{\sqrt{24.7}} = 0.26 \lg_{10}$$

а v в метрах в секунду.

4-дюймовой пушки в 60 калибров длину

X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	I
Суммы (IX) сверху	Числа (X), приведенные к промежутку $h=32$	$\frac{(XI) \cdot h}{100} (h=32)$	время движения t в $\frac{1}{100}$ сек.	$\varepsilon = \frac{\Omega t}{T}$	t^2	θ°	θ° при постоянной крутизне	абсцисса x см
		0.00	0.00	0.0	0.000	0.0	0.0	0
См. примечание		0.314	0.314	564	0.0986	50.4	5.76	4
		0.386	0.386	692	0.1490	76.2	11.52	8
		0.425	0.425	763	0.1806	92.6	17.28	12
		0.458	0.458	822	0.2098	107.5	23.04	16
1.250	0.312	0.0491	0.507	910	0.2570	131.4	34.56	24
2.197	0.550	0.0880	0.546	980	0.298	152.4	46.08	32
2.979	0.745	0.1142	0.572	1026	0.327	167.2	57.60	40
3.656	0.914	0.1462	0.604	1085	0.365	186.6	69.12	48
4.260	1.065	0.1705	0.629	1128	0.396	202.5	80.64	56
0.533	0.267	0.043	0.672	1205	0.452	231	103.68	72
0.999	0.500	0.080	0.709	1272	0.503	257	126.72	88
1.421	0.710	0.114	0.743	1334	0.552	282	149.76	104
1.811	0.905	0.145	0.774	1387	0.599	306	172.80	120
	0.356	0.057	0.831	1490	0.691	353	218.90	152
	0.679	0.109	0.883	1585	0.780	399	265.00	184
	0.980	0.157	0.931	1670	0.867	443	311.00	216
	1.264	0.202	0.976	1750	0.953	487	357.10	248
	1.564	0.245	1.019	1828	1.038	533	403.20	280
	1.793	0.287	1.061	1905	1.126	576	449.30	312
	2.043	0.327	1.101	1975	1.212	620	495.40	344
	2.286	0.366	1.140	2045	1.300	665	541.40	376
	2.523	0.404	1.178	2114	1.388	710	587.50	408
	2.753	0.441	1.215	2180	1.476	755	633.60	440
	2.979	0.477	1.251	2245	1.565	800	679.70	472
	3.199	0.512	1.286	2308	1.654	846	775.70	504
	3.414	0.547	1.321	2370	1.745	892	771.80	536

$v = 40.1$ м; при $x = 8$ $v = 75.7$ м. Отсюда находим коэффициенты α и β ; именно, будет $\frac{\sqrt{v^2 + 24.7} + v}{\sqrt{24.7}}$, при этом t будет выражено в $1/100$ сек., ибо x выражено в сантиметрах,

Расчет прогрессивной крутизны нарезов для 4-дюймовой пушки 60 калибров для

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
Абсцисса в см	Ордината кривой давления в мм чертежа				$F_2(x)$	Скорость $\frac{v}{100}$ м/сек.	$\frac{100}{v}$	Суммы (VIII) попарно	Суммы (IX) попарно ¹	Суммы (X) сверху
0.0	88.5	Скорость v рассчитывается по формуле				0.00	Время движения рассчитывается по формуле			
4						1.03				
8						1.46				
12		$v = V \sqrt{\frac{F_2(x)}{F_2(l)}}$				1.79	$t = \frac{t_1}{v_1} v$			
16		т. е.				2.07	$t_1 = \frac{x_1}{v_1} = 2 \frac{0.56}{387}$			
24		$v = 940 \sqrt{\frac{F_2(x)}{F_2(l)}}$				2.53				
32		$= \frac{940}{\sqrt{1819}} \cdot \frac{\sqrt{88 \cdot x}}{308} = K \sqrt{x};$				2.92				
40		$K = 51.7$				3.27				
48						3.58				
56	88	$\frac{88 \cdot 56}{32} = 308$				3.87	0.258	0.243		
72						395	0.228	0.218	0.243	0.0384
88						477	0.208	0.201	0.461	0.0738
104						555	0.193	0.187	0.662	0.106
120						629	0.181	0.345	0.849	0.136
152						766	0.164	0.316	0.345	0.055
184						890	0.152	0.295	0.661	0.104
216						1005	0.143	0.279	0.956	0.153
248		См. табл. 2				1110	0.136	0.267	1.235	0.197
280						1207	0.131	0.257	1.502	0.241
312						1297	0.126	0.248	1.759	0.282
344						1372	0.122	0.241	2.007	0.321
376						1455	0.119	0.235	2.248	0.360
408						1533	0.116	0.229	2.483	0.398
440						1608	0.113	0.224	2.712	0.434
472						1680	0.111	0.2195	2.936	0.470
504						1750	0.1085	0.215	3.155	0.505
536						1819	0.1064		3.370	0.540

Этому значению времени соответствует абсцисса $x = 40$ см, т. е. 4 калибра впереди каморы; снаряд при этом имеет уже скорость 327 м/сек. Форма нарезов (крутизна) дана в столбце XVII табл. 3 и рассчитана по формулам

$$\theta = \frac{1}{2} w (t - t_0)^2 \quad w = \frac{\Omega}{T - t_0}$$

¹ Для промежутка от $x = 7.2$ до $x = 120$ взяты полусуммы.

Таблица 3

ною в предположении, что начало нарезов на 4 калибра впереди входа в нарезы.

XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	I
$\frac{XI}{100} \cdot \frac{h}{2} = t$	t^2	θ°	$t - t_0$	$(t - t_0)^2$	θ°	Абсцисса в см
0.00	0.0	0.0				0.0
0.0768	0.0059	4.15				4
0.1088	0.0118	8.31				8
0.1336	0.0178	12.53				12
0.1618	0.0262	18.45				16
0.1800	0.0324	22.8				24
0.2184	0.0477	33.6				32
0.2444	0.0597	42.0	0.000	0.000	0.00	40
0.2676	0.0716	50.4	0.0232	0.00054	0.507	48
0.2890	0.0835	58.8	0.0446	0.0199	1.87	56
0.327	0.107	75.4	0.083	0.00689	6.48	72
0.363	0.132	93.0	0.117	0.0137	12.87	88
0.395	0.156	109.8	0.151	0.0228	21.4	104
0.425	0.181	127.4	0.181	0.0328	30.8	120
0.480	0.230	162	0.236	0.0557	52.3	152
0.529	0.280	197	0.285	0.0812	76.4	184
0.578	0.334	235.2	0.334	0.1115	104.8	216
0.622	0.387	272.5	0.378	0.143	133.5	248
0.666	0.4436	312.5	0.422	0.178	167.3	280
0.707	0.500	352	0.463	0.214	201.0	312
0.746	0.5565	392	0.502	0.252	236.8	344
0.785	0.616	434	0.541	0.293	275.3	376
0.823	0.677	477	0.579	0.335	315	408
0.859	0.738	519.5	0.615	0.378	355	440
0.895	0.801	564	0.651	0.424	398.5	472
0.930	0.865	608.8	0.686	0.470	442.5	504
0.965	0.931	655	0.721	0.5198	489	536

где Ω есть угловая скорость при вылете и время t считается от начала движения. Из чисел столбца XVII табл. 3 видно, насколько постепенно и сперва медленно возрастает в этом случае угол θ , благодаря чему и устраняется избыточное напряжение пояска.

16 марта 1920 г.

О КРЕНОМЕТРЕ, ПРЕДЛОЖЕННОМ В. Ф. МИТКЕВИЧЕМ¹

§ 1. Теория предложенного В. Ф. Миткевичем прибора, в простейшем случае применения его, сводится к рассмотрению следующей задачи.

Рама ABC (см. рисунок) может вращаться в своей плоскости около оси O , к ней перпендикулярной. К вершине B этой рамы на нити подвешен груз P , связанный пружинами AP и CP с точками A и C рамы.

Требуется определить малые колебания груза и рамы, когда ось O будет удерживаться неподвижно, на груз же и раму будут действовать периодические силы, лежащие в плоскости рамы и приложенные к соответствующим центрам тяжести рамы и груза.

§ 2. Заметим здесь же, что к рассмотрению этой задачи сейчас же

приводится рассмотрение движения рамы, когда ось O находится вместе со всем прибором на корабле или аэроплане и участвует в движении его, — возмущающими силами тогда являются так называемые силы инерции переносного движения.

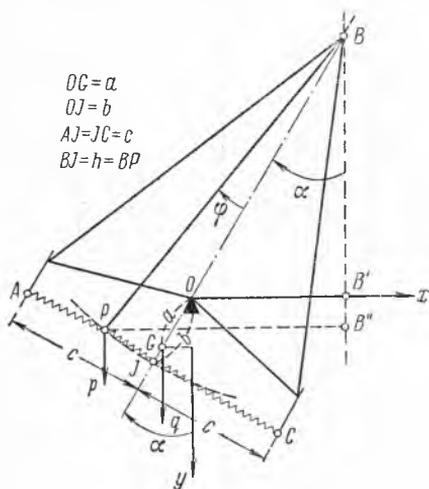
§ 3. Сделаем следующие обозначения:

1) рама: вес q ; центр тяжести G ; момент инерции относительно оси, проходящей через ее центр тяжести к параллельной оси вращения рамы k ;

2) груз: вес p ; центр тяжести P ; момент инерции относительно оси, параллельной оси рамы O и проходящей через точку P — i .

Чтобы составить уравнения движения для малых колебаний нашей системы, примем точку O за начало координат xOy , направив ось Oy по истинной отвесной линии вниз; за координатные параметры возьмем углы: α — наклона рамы, иначе прямой OG к оси Oy , т. е. отвес-

¹ Публикуется впервые по рукописи, хранящейся в Кабинете-музее А. Н. Крылова. (Ред.).



ной линии, и φ — наклонения нити подвеса к диаметральной плоскости рамы, иначе к прямой BOG . Оба угла будем считать в одну сторону положительными, как показано стрелкой.

При сделанных обозначениях будет:

1) координаты точки G :

$$x_0 = -a \sin \alpha = -ax$$

$$y_0 = a \cos \alpha = a \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$$

2) координаты точки P :

$$x_1 = (h - b) \sin \alpha - h \sin(\alpha + \varphi) = -bx - h\varphi$$

$$y_1 = (h - b) \cos \alpha + h \cos(\alpha + \varphi) = b \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) - h \left(\frac{\varphi^2}{2} + \alpha\varphi\right)$$

ограничиваясь вторыми степенями „малых“ величин α и φ . Следовательно,

$$\dot{x}_0 = -a\dot{\alpha}$$

$$\dot{x}_1 = -b\dot{\alpha} - h\dot{\varphi}$$

$$\dot{y}_0 = -a\alpha\dot{\alpha}$$

$$\dot{y}_1 = -b\alpha\dot{\alpha} - h\varphi\dot{\varphi} - h(\alpha\dot{\varphi} + \varphi\dot{\alpha})$$

§ 4. Удвоенная живая сила системы $2T$ складывается из удвоенной живой силы $2T_0$ рамы и удвоенной живой силы $2T_1$ груза.

Имеем:

$$2T_0 = \frac{q}{g} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + k\dot{\alpha}^2 = \frac{q}{g} (a^2\dot{\alpha}^2 + a^2\alpha^2\dot{\alpha}^2) + k\dot{\alpha}^2 =$$

$$= \left(k + \frac{q}{g} a^2\right) \dot{\alpha}^2 = k_1\dot{\alpha}^2$$

где $k_1 = k + \frac{q}{g} a^2$ есть момент инерции рамы относительно оси вращения O , член же $a^2\alpha^2\dot{\alpha}^2$, как четвертого порядка, отброшен.

Совершенно так же будет

$$2T_1 = \frac{p}{g} [\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2] + i(\dot{\alpha} + \dot{\varphi})^2 =$$

$$= \frac{p}{g} [(b\dot{\alpha} + h\dot{\varphi})^2 + \dots] + i(\dot{\alpha} + \dot{\varphi})^2 =$$

$$= \left(i + \frac{p}{g} b^2\right) \dot{\alpha}^2 + \left(i + \frac{p}{g} h^2\right) \dot{\varphi}^2 + 2\left(i + \frac{p}{g} bh\right) \dot{\alpha}\dot{\varphi} =$$

$$= i_1\dot{\alpha}^2 + i_2\dot{\varphi}^2 + 2i_3\dot{\alpha}\dot{\varphi}$$

причем $i_1 = i + \frac{p}{g} b^2$ — момент инерции груза относительно O ; $i_2 = i + \frac{p}{g} h^2$ — момент инерции груза относительно B ; $i_3 = i + \frac{p}{g} bh$.

Таким образом, имеем:

$$2T = (k_1 + i_1) \dot{\alpha}^2 + i_2 \dot{\varphi}^2 + 2i_3 \dot{\alpha}\dot{\varphi} \quad (I)$$

§ 5. Потенциальная энергия системы, ограничиваясь членами второго порядка, будет

$$U = A + qy_0 + py_1 - Nu^2$$

где N есть некоторая постоянная, выражение которой составим ниже; $u = PI$ — смещение груза от его среднего положения в раме, представляющее сжатие одной и растяжение другой пружины.

Обозначая „жесткость“ пружин соответственно через f_a и f_c , так что

$$F_a = f_a \cdot u; \quad F_c = f_c \cdot u$$

будут силы, действующие на точки A и C , найдем

$$Nu^2 = \frac{1}{2} (f_a + f_c) u^2$$

Но $u = h\varphi$; значит

$$Nu^2 = \frac{1}{2} (f_a + f_c) h^2 \varphi^2 = \frac{1}{2} nh^2 \varphi^2$$

где

$$n = f_a + f_c$$

Подставляя вместо y_0 и y_1 их величины, получим:

$$\begin{aligned} U = A + qa \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) + p \left[b \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) - h \left(\varphi \alpha + \frac{\varphi^2}{2} \right) \right] - \\ - \frac{1}{2} nh^2 \varphi^2 = (A + qa + pb) - (qa + pb) \frac{\alpha^2}{2} - \\ - (nh^2 + ph) \frac{\varphi^2}{2} - ph\varphi\alpha \end{aligned} \quad (II)$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \alpha} = -(qa + pb) \alpha - ph\varphi \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -(nh^2 + ph) \varphi - ph\alpha \end{aligned} \quad (II')$$

Заметим здесь же, что для того, чтобы прибор мог совершать *малые* свободные колебания, необходимо, чтобы было

$$qa + pb > 0 \quad (*)$$

Но

$$qa + pb = (q + p) d$$

где d есть расстояние центра тяжести рамы вместе с грузом, поставленным в среднее положение от точки опоры (оси вращения). Приведенное неравенство показывает, что этот центр тяжести должен быть *ниже* точки опоры.

§ 6. Уравнения движения по схеме Лагранжа будут для свободных колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{\partial U}{\partial \alpha} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Для вынужденных колебаний во вторых частях надо еще приписать „обобщенные составляющие возмущающих сил“, как о том будет сказано ниже.

Положив

$$K = k_1 + i_1$$

получим на основании выражений (I) и (II') следующие уравнения:

$$\begin{aligned} K\ddot{\alpha} + i_3\ddot{\varphi} + (qa + pb)\alpha + ph\varphi &= 0 \\ i_3\ddot{\alpha} + i_2\ddot{\varphi} + ph\alpha + (ph + nh^2)\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (III)$$

где

$$\ddot{\alpha} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} \text{ и } \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

§ 7. Как обыкновенно, ищем решение этих уравнений вида

$$\alpha = C_1 \sin(\lambda t + \varepsilon); \quad \varphi = C_2 \sin(\lambda t + \varepsilon)$$

Подстановка этих значений в (III) дает для определения C_1 и C_2 уравнения

$$\begin{aligned} (qa + pb - K\lambda^2) C_1 + (ph - i_3\lambda^2) C_2 &= 0 \\ (ph - i_3\lambda^2) C_1 + (ph + nh^2 - i_2\lambda^2) C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (III')$$

Чтобы эти уравнения допускали решения, отличные от нуля, необходимо, чтобы определитель $\Delta(\lambda)$ равнялся нулю, т. е. чтобы было

$$\Delta(\lambda) = (qa + pb - K\lambda^2)(ph + nh^2 - i_2\lambda^2) - (ph - i_3\lambda^2)^2 = 0$$

иначе

$$\begin{aligned} (i_2K - i_3^2)\lambda^4 + [2phi_3 - i_2(qa + pb) - K(ph + nh^2)]\lambda^2 + \\ + [(qa + pb)(ph + nh^2) - p^2h^2] = 0 \end{aligned}$$

Это уравнение при само собою понятных обозначениях мы напомним так:

$$A\lambda^4 - 2B\lambda^2 + C = 0 \quad (IV)$$

причем по приведении окажется

$$A = i_2K - i_3^2 = k_1 \left(i + \frac{p}{g} h^2 \right) + im(h - b)^2$$

где $m = \frac{p}{g}$, т. е. всегда $A > 0$.

Обозначая через λ_1 и λ_2 корни уравнения (IV), имеем:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \\ \lambda_2^2 &= \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} \end{aligned}$$

§ 8. Чтобы колебания могли оставаться малыми, необходимо, чтобы обе эти величины были положительными, а так как A заведомо положительное, то должны быть положительными и величины B и C и, кроме того, $B^2 - AC > 0$.

Итак, имеем условия:

$$\begin{aligned} B^2 - AC &> 0 \\ B &> 0 \\ C &> 0 \end{aligned} \quad (*)$$

Последние два в развитом виде напишутся так:

$$\begin{aligned} i_2(qa + pb) + K(ph + nh^2) - 2phi_3 &> 0 \\ (qa + pb)(ph + nh^2) - p^2h^2 &> 0 \end{aligned}$$

Из последнего условия следует

$$qa + pb > \frac{p^2h^2}{ph + nh^2} > 0$$

т. е. общий центр тяжести системы должен лежать ниже точки опоры. Но это неравенство дает и указание, *на сколько* ниже.

Положим

$$n = \frac{p}{s}$$

Тогда s представит растяжение одной и равное ему сжатие другой пружины при нагрузке, равной весу груза, а предыдущее неравенство можно будет написать так:

$$\frac{q}{p} a + b > \frac{h}{1 + \frac{h}{s}} \quad (V)$$

откуда, задаваясь, например q, p, a, h и s , найдем предел для величины b . Эта формула принимает особенно простой вид, если взять $a = 0$, т. е. уравновесить раму саму по себе (без груза P) так, чтобы ее центр тяжести лежал на оси O (точке опоры) и рама была бы одна в безразличном равновесии. Для этого надо, чтобы было

$$b > \frac{h}{1 + \frac{h}{s}} \quad (V')$$

Сделаем по поводу этого неравенства еще одно замечание. Положим, что вместо того, чтобы подвешивать груз P на нити к точке B (что, очевидно, заставляет его ходить по дуге круга), заставим его скользить по прямой AC . В таком случае h будет бесконечно велико и предыдущее неравенство примет весьма простой вид

$$b > s \quad (V'')$$

Заметим, что при всяком h , если соблюсти неравенство (V'') , то (V) будет также соблюдено.

Развивать подробно другие два неравенства $(*)$ не будем, чтобы не удлинять эту заметку.

§ 9. Для $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ уравнения (III') будут совместны и, например, при $\lambda = \lambda_1$ получим:

$$C_2 = \frac{qa + pb - K\lambda_1^2}{i_3\lambda_1^2 - ph} C_1 = \beta_1 C_1$$

совершенно так же при $\lambda = \lambda_2$ будет

$$C_2 = \frac{qa + pb - K\lambda_2^2}{i_3\lambda_2^2 - ph} C_1 = \beta_2 C_1$$

Следовательно, наши решения будут

$$\begin{aligned} \alpha &= C_1 \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + C'_1 \sin(\lambda_2 t + \varepsilon'_1) \\ \varphi &= \beta_1 C_1 \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + \beta_2 C'_1 \sin(\lambda_2 t + \varepsilon'_1) \end{aligned} \quad (VI)$$

причем C_1 , C'_1 , ε_1 и ε'_1 — произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям движения. Входить в подробности этого определения и упрощения происходящих при этом вычислений мы не будем — они слишком известны и для нашей цели надобности в них нет.

§ 10. В случае колебаний, вынужденных под действием периодической силы, уравнения (III) примут вид

$$\begin{aligned} K\ddot{\alpha} + i_3\ddot{\varphi} + (qa + pb)\alpha + ph\varphi &= H_1 \sin n_1 t + L_1 \cos n_1 t \\ i_3\ddot{\alpha} + i_2\ddot{\varphi} + ph\alpha + (ph + nh^2)\varphi &= H_2 \sin n_1 t + L_2 \cos n_1 t \end{aligned} \quad (VII)$$

Ищем их решение вида

$$\begin{aligned} \alpha &= M \sin n_1 t + N \cos n_1 t \\ \varphi &= P \sin n_1 t + Q \cos n_1 t \end{aligned}$$

где M , N , P и Q — неизвестные постоянные коэффициенты, для определения которых, например, M и P получаем уравнения

$$\begin{aligned} [(qa + pb) - Kn_1^2]M + (ph - i_3n_1^2)P &= H_1 \\ (ph - i_3n_1^2)M + (-i_2n_1^2 + nh^2 + ph)P &= H_2 \end{aligned} \quad (VIII)$$

и совершенно подобные два уравнения для N и Q с той разницей, что во вторых частях вместо H_1 и H_2 будут стоять L_1 и L_2 .

Сличая эти уравнения с уравнением (III') видим, что их определитель есть $\Delta(n_1)$, т. е. $\Delta(n_1) = (qa + pb - Kn_1^2)(ph + nh^2 - i_2n_1^2) - (ph - i_3n_1^2)^2$, следовательно, если n_1 не будет равно ни одному из значений, ни λ_1 , ни λ_2 , то $\Delta(n_1)$ не будет равно нулю, а будет величиною конечною и, значит, для M и P получатся значения того же порядка, как H_1 и H_2 . Эти значения будут быстро возрастать, когда n_1

будет приближаться к λ_1 и λ_2 , т. е. когда период возмущающей силы $\left(\frac{2\pi}{n_1}\right)$ будет приближаться к тому или другому из периодов

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \text{ или } \tau_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$$

свободных колебаний системы. Одним словом, тогда имеет место „резонанс“, по поводу которого входить в подробности опять-таки излишне; достаточно напомнить, что для того, чтобы амплитуда колебаний была „мала“ по сравнению со „статическим“ отклонением, вызываемым возмущающей силой, надо, чтобы *оба* периода τ_1 и τ_2 были велики по сравнению с периодом возмущающей силы.

Достигнуть этого на практике весьма затруднительно. В самом деле мы имели:

$$\lambda_1 = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}; \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}$$

$$\lambda_2 = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}; \quad \tau_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$$

Очевидно, для того, чтобы оба периода τ_1 и τ_2 были „велики“, надо по крайней мере иметь „большим“ τ_1 , ибо $\tau_2 > \tau_1$, в силу того, что $\lambda_2 < \lambda_1$.

Для этого необходимо, чтобы λ_1 был малым; следовательно, должно быть B малым по сравнению с A , а C величиной, так сказать, малой по сравнению с A второго порядка малости.

§ 11. Из этой заметки видно, что для составления проекта подобного прибора необходимо выяснить: величину и период возмущающих сил, необходимую точность показаний и по этим данным произвести предварительный подробный расчет прибора, пользуясь формулами, здесь приведенными.

25 января 1928 г.

О НАПРЯЖЕНИИ, ВЫЗЫВАЕМОМ В УПРУГОЙ СИСТЕМЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКОЙ¹

В журнале „Monatshefte für Mathematik und Physik“ (XXXVI, 1929) помещена прочтенная 24 апреля 1928 г. в Вене знаменитым итальянским математиком Т. Levi-Civita лекция под заглавием „Ueber dynamische Beanspruchung elastischer Systeme“.

При разработке многочисленных технических конструкций постоянно возникает вопрос: насколько отличаются динамические напряжения от статических и каким образом учесть быструю изменяемость нагрузки?

Леви-Чивита дает в своей лекции общее и весьма изящное решение этого вопроса, но самая общность его изложения может представить для конструкторов некоторое затруднение, тем более, что она и самого автора привела к ошибочному заключению, поэтому в этой статье я даю не буквальный перевод лекции Леви-Чивита, а несколько упрощенную ее переработку, при которой все выводы становятся более наглядными и общедоступными, поясняю, в чем состоит ошибка автора и как ее исправить.

Леви-Чивита ведет все свои выводы и рассуждения, предполагая, что система обладает n степенями свободы, но, нисколько не нарушая общности выводов и результатов их, можно вести все рассуждения на частном случае $n=3$, что придает им, может быть в ущерб математическому изяществу, требуемую наглядность, способствующую более ясному усвоению сущности дела и более соответствующую нашим техническим навыкам и привычкам, нежели совершенно общее отвлеченное изложение.

§ 1. Так называемые явления резонанса известны уже давно. При них приходится иметь дело со сравнительно весьма значительными, иногда даже опасными вынужденными колебаниями, возникающими в упругой системе при действии периодически изменяющихся сил, период коих в точности равен или близок к одному из периодов соб-

¹ Впервые опубликовано в „Бюлетене НТК УВМС РККА“, 1930, № 4, стр. 5—38. Статья печатается с небольшим редакционным изменением § 14, сокращенного в связи с тем, что работы А. Н. Крылова, упомянутые в конце § 13, напечатаны в Собрании трудов. (Ред.).

ственных свободных колебаний системы. Камертон, разного рода стержневые и рамные конструкции, мосты и своды представляют наиболее часто встречающиеся примеры. В кораблестроении наиболее обычным примером является вибрация корабля или отдельных частей его.

Во всяком случае, когда упругое тело совершает упругие колебания, то напряжения, в нем возникающие, больше тех, которые имели бы место под действием тех же сил в состоянии покоя. Очевидно, желательно подчинить это увеличение напряжений математическому исследованию и выразить формулами, применимыми для технических целей.

Пусть s есть какая угодно упругая система, O — ее естественное положение или конфигурация, когда на нее не действуют никакие внешние силы.

Положим, однако, что таковые приложены и притом „силы положения“, т. е. зависящие единственно от положения системы, причем мы примем, что эти силы не превосходят тех значений, при которых нарушаются пределы упругости в частях системы; тогда, на основании учений статики упругих систем, можно утверждать, что система будет иметь вполне определенную конфигурацию K_s . В этой конфигурации приложенные силы уравниваются силами упругости. В системе возникают напряжения, которые мы назовем *статическими*, и обозначим через Ω_s соответствующую им *работу*, происходящую вследствие упругой деформации системы. Эта работа упругих сил есть, иначе, та работа, которую надо затратить, чтобы перевести систему из ее естественного состояния O в состояние упругого равновесия K_s и которая не зависит от того, каким образом этот переход совершается. Эта работа Ω_s может служить мерою напряженности упругого состояния системы.

Это энергетическое определение меры напряженности или напряжений теоретически вполне удовлетворительно, оно принято также и в технике, например, в известном сочинении Castigliano „Systèmes élastiques“, 1879.

В практике применяют и другие критерии для установления так называемых коэффициентов безопасности, как то: наибольшее растяжение или наибольшее натяжение, или отношение скалывающего напряжения к нормальному; относительно каждого из этих критериев имеется обширная литература, но вопрос этот еще не может считаться окончательно решенным.

В общем можно сказать, оставаясь в пределах применимости обыкновенной классической теории упругости, что если надо знать только совокупную меру напряженности, то таковая в достаточной степени доставляется работой упругих сил. В тех же случаях, когда имеются в виду явления излома или текучести, то общая оценка может оказаться недостаточной и надо принимать во внимание и местные особенности.

Как уже сказано, в этом исследовании предполагается, что предел упругости нигде не превзойден.

§ 2. Пусть s есть какая угодно материальная система, положение и конфигурация которой определяется n независимыми переменными (координатными параметрами)

$$q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$$

То обстоятельство, что система упругая, проявляется существованием такой конфигурации O , которая называется естественной и в которой система остается в покое без действия внешних сил и к которой она возвращается, если сообщенные ей отклонения достаточно малы.

Очевидно, не нарушая общности, можно принять, что естественное положение равновесия O соответствует значениям

$$q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q_n = 0$$

координатных параметров.

То существенное обстоятельство, что система обладает упругой энергией, препятствующей всякому отклонению от O , выражается тем, что работа упругих сил *положительная*, когда система возвращается из любого положения K опять в O . Если, кроме того, принять, что система консервативная, то сказанная работа Ω будет независима от пути и, следовательно, есть функция только переменных q_1, q_2, \dots, q_n , обращающаяся в нуль для нулевого значения всех этих переменных одновременно, и так как Ω при всяких достаточно малых значениях этих переменных остается положительным, то при

$$q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q_n = 0$$

эта функция имеет абсолютный минимум, равный нулю.

Отрицательно взятые производные этой функции, т. е.

$$-\frac{\partial \Omega}{\partial q_1}; \quad -\frac{\partial \Omega}{\partial q_2}; \quad \dots; \quad -\frac{\partial \Omega}{\partial q_n}$$

при всякой совокупности значений переменных

$$q_1, q_2, \dots, q_n \tag{I}$$

определяют, так называемые, *обобщенные* (Лагранжевы) *составляющие* упругих сил системы. В самом деле, если система из положения K , определяемого значениями переменных (I), переходит в бесконечно близкое положение K' , определяемое значениями

$$q_1 + \delta q_1; \quad q_2 + \delta q_2; \quad \dots, \quad q_n + \delta q_n \tag{II}$$

то, с одной стороны, работа сказанных сил будет выражаться разностью

$$\Omega(q_1, q_2, \dots, q_n) - \Omega[q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots, q_n + \delta q_n]$$

т. е.

$$-\left(\frac{\partial \Omega}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \Omega}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \Omega}{\partial q_n} \delta q_n\right) = -\delta \Omega$$

с другой же стороны, через

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n$$

где Q_1, Q_2, \dots, Q_n обобщенные (Лагранжевы) силы. Из сравнения этих выражений и следуют упомянутые равенства

$$Q_1 = -\frac{\partial \Omega}{\partial q_1}; \quad Q_2 = -\frac{\partial \Omega}{\partial q_2}; \quad \dots; \quad Q_n = -\frac{\partial \Omega}{\partial q_n}$$

По предположению, конфигурация O , для которой

$$q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q_n = 0$$

есть положение равновесия системы и даже, более того, — устойчивого равновесия, без действия внешних сил, то при этом и все величины

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q_n = 0$$

Следовательно, разложение функции Ω в тейлоров ряд начинается с членов *второго* порядка, и, значит, для достаточно малых значений q , при которых имеет место линейная зависимость сил и деформаций, можно положить

$$2\Omega = \sum_1^n b_{.k} q_{.k} q_k \tag{1}$$

причем в этой сумме как значок h , так и k принимают все значения 1, 2, 3, ..., n , коэффициенты $b_{.k}$, зависящие от упругих свойств системы, в нашем предположении будут постоянными, и $b_{.k} = b_{k.}$

Если на систему действуют внешние силы, то при рассмотрении положений, лишь близких к O , можно их Лагранжевы составляющие B_h также считать постоянными. Эти внешние силы мы будем вообще называть *нагрузками*, так как в обычных задачах относительно балок, сводов и т. п. силы происходят от нагрузки сооружений.

Во всяком случае (вследствие точного или лишь приближенного постоянства коэффициентов B_h), нагрузки можно рассматривать как консервативную систему сил, происходящих от силовой функции

$$U = \sum_1^n B_h q_h \tag{2}$$

§ 3. Полезно, прежде чем идти далее, привести простейший пример для случая $n=1$.

Вообразим массу M , которая может двигаться лишь по заданной траектории и оттягивается, например, пружиною к точке O , лежащей на этой кривой, так что, когда эта масса отстоит от точки O на расстоянии s (измеряемом по дуге кривой), то упругая энергия

$$\Omega = \frac{1}{2} es^2$$

причем e есть заданная упругая постоянная. Здесь s , считаемое положительным в каком-либо избранном направлении, и есть Лагранжева координата; за соответствующую нагрузку B следует в этом случае считать проекцию действующей на M силы на касательную к траектории этой точки, так что будет

$$U = B_s$$

В еще более частном случае, когда траектория есть вертикальная прямая и масса M подвешена на пружине, так что она может колебаться только оставаясь на сказанной вертикальной прямой, то, обозначая через s растяжение пружины, считаемое от естественного положения O нижнего конца ненагруженной пружины, будем иметь:

$$B = Mg$$

т. е. нагрузка есть вес массы M .

§ 4. Как уже сказано выше, мы будем при дальнейшем изложении брать $n = 3$, но все рассуждения вести так, как будто бы n имело любое значение.

Итак, положим, что имеется система S с тремя степенями свободы, так что для нее функции Ω и U определяются равенствами

$$2\Omega = b_{11}q_1^2 + b_{22}q_2^2 + b_{33}q_3^2 + 2b_{12}q_1q_2 + 2b_{13}q_1q_3 + 2b_{23}q_2q_3 \quad (3)$$

$$U = B_1q_1 + B_2q_2 + B_3q_3 \quad (4)$$

в которых q_1, q_2, q_3 суть координатные параметры, определяющие конфигурацию и положение системы, коэффициенты же b и B — постоянные, из коих первые определяются упругими свойствами системы, вторые — действующими на систему нагрузками.

Под действием этих нагрузок система будет иметь некоторое положение равновесия K_s , отличное от O .

Это положение определяется, на основании начала возможных перемещений, из условия

$$\delta(\Omega - U) = 0 \quad (III)$$

которое ввиду произвольности „перемещений“ $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$ дает уравнения

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial q_2} = \frac{\partial U}{\partial q_2}; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial q_3} = \frac{\partial U}{\partial q_3} \quad (3')$$

или в развитой форме:

$$\begin{aligned} b_{11}q_1 + b_{12}q_2 + b_{13}q_3 &= B_1 \\ b_{12}q_2 + b_{22}q_2 + b_{23}q_3 &= B_2 \\ b_{13}q_3 + b_{23}q_2 + b_{33}q_3 &= B_3 \end{aligned} \quad (3'')$$

Эти линейные уравнения с неизвестными q_1, q_2, q_3 послужат для определения их значений, соответствующих положению равновесия. Они всегда допускают одно вполне определенное решение, ибо по

предположению квадратичная форма Ω есть форма определенная положительная и, следовательно, дискриминант ее не равен нулю, а этот дискриминант и есть как раз определитель системы (3'').

Нетрудно видеть, что значения q_1, q_2, q_3 , определяемые уравнением (3), обращают функцию $\Omega - U$ в минимум, для этого стоит только показать, что

$$\delta^2(\Omega - U) > 0$$

при произвольных бесконечно малых $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$.

Так как функция U линейная относительно наших переменных, то

$$\delta^2 U = 0$$

тождественно, следовательно,

$$\delta^2(\Omega - U) = \delta^2 \Omega$$

Но Ω есть квадратичная форма (целая однородная функция второй степени) переменных q_1, q_2, q_3 , значит $\delta^2 \Omega$ получится, если мы в выражении Ω заменим соответственно

$$q_1 \text{ через } \delta q_1$$

$$q_2 \text{ через } \delta q_2$$

$$q_3 \text{ через } \delta q_3$$

а так как величина Ω положительная при *всяких* значениях q_1, q_2, q_3 , то и будет

$$\delta^2 \Omega > 0$$

Значит,

$$\Omega - U$$

при положении K_s равновесия системы есть минимум.

Умножив соответственно первое из уравнений (3'') на q_1 , второе на q_2 , третье на q_3 , на основании равенств (3) и (4) получим:

$$2\Omega_s = U_s \tag{4'}$$

где через Ω_s и U_s обозначены значения Ω и U , соответствующие положению K_s статического равновесия системы, определяемого значениями q_1, q_2, q_3 , следующими из уравнений (3'), значит, для этих значений будет

$$\Omega_s - U_s = -\Omega_s$$

что выражает, на основании сказанного выше, такое свойство: *наименьшее значение, которое может вообще принимать разность $\Omega - U$, есть $-\Omega_s$.*

§ 5. Перейдем теперь собственно к предмету этой лекции, т. е. к исследованию динамического напряжения.

Сперва будем рассматривать только свободные колебания нашей системы, т. е. такие, которые происходят лишь под действием упругих

сил и нагрузок B , рассмотренных выше, при заданных начальных условиях.

Из элементов, зависящих от этих начальных условий, выделим важнейший, именно: полную величину энергии E , соответствующей заданным начальным условиям. Так как система консервативная, то во всё время движения полная энергия E будет оставаться постоянной, но эта энергия складывается из трех частей:

- 1) энергии сил упругости Ω ;
- 2) потенциальной энергии $-U$;
- 3) кинетической энергии T .

Эта последняя зависит от скоростей:

$$q'_1 = \frac{dq_1}{dt}; \quad q'_2 = \frac{dq_2}{dt}; \quad q'_3 = \frac{dq_3}{dt}$$

и представляет определенную положительную квадратичную форму этих переменных.

Положим для простоты письма

$$q'_1 = p_1; \quad q'_2 = p_2; \quad q'_3 = p_3$$

тогда будет

$$2T = a_{11}p_1^2 + a_{22}p_2^2 + a_{33}p_3^2 + 2a_{12}p_1p_2 + 2a_{13}p_1p_3 + 2a_{23}p_2p_3 \quad (5)$$

причем с тою же степенью приближения, как и раньше, мы будем считать все коэффициенты a постоянными.

Движение системы определяется Лагранжевыми уравнениями во второй их форме, и наша задача должна была бы состоять в нахождении наибольшего значения Ω^* , которого, действительно, с течением времени достигает величина Ω . При конечном числе степеней свободы задача эта разрешима, но выкладки чрезмерно сложны и результат выражается столь сложными формулами, что они в технике не применимы.

К счастью, для практики не столь важно установить точное значение Ω^* в зависимости от начальных условий, сколько указать достаточно точную границу, которой Ω превзойти не может. Это достижимо весьма просто на основании рассмотрения только уравнения, выражающего закон сохранения энергии для нашего случая, т. е. уравнения

$$T + \Omega - U = E \quad (6)$$

в котором E есть заданная постоянная, значение которой определяется начальными условиями.

В самом деле, пусть Ω_d есть наибольшее значение (максимум) величины Ω , *согласный* с условием (6), т. е. максимум относительный, тогда очевидно, что будет

$$\Omega^* \leq \Omega_d \quad (7)$$

ибо Ω^* не только должно удовлетворять уравнению (6), но и условиям, следующим из уравнений движения системы.

Прежде чем перейти к определению величины Ω_d , полезно заметить, что, когда дело идет о действительном движении (не покое) системы, то имеет место неравенство

$$E > -\Omega_s \quad (7')$$

Действительно, постоянная E (во всякий момент, в частности, и начальный) равна $T + \Omega - U$; величина T , как живая сила, не может быть отрицательной; второй член $\Omega - U$, как показано выше, имеет абсолютный минимум для положения K_s , статического равновесия системы, причем

$$\Omega_s - U_s = -\Omega_s$$

но так как мы рассматриваем именно положения системы, отличающиеся от положения ее статического равновесия, то будет или $T > 0$, или же система не будет занимать положения K_s ; значит, будет

$$E > -\Omega_s$$

Что же касается определения величины Ω_d , то вопрос приводится к обыкновенной задаче дифференциального исчисления нахождения относительного максимума.

В самом деле, в нашем случае трех координатных параметров имеются заданные функции (3), (4) и (5):

$$2\Omega = b_{11}q_1^2 + b_{22}q_2^2 + b_{33}q_3^2 + 2b_{12}q_1q_2 + 2b_{13}q_1q_3 + 2b_{23}q_2q_3$$

$$U = B_1q_1 + B_2q_2 + B_3q_3$$

$$2T = a_{11}p_1^2 + a_{22}p_2^2 + a_{33}p_3^2 + 2a_{12}p_1p_2 + 2a_{13}p_1p_3 + 2a_{23}p_2p_3$$

закрывающие шесть переменных:

$$q_1, q_2, q_3; p_1, p_2, p_3$$

и дано условие (6):

$$T + \Omega - U = E$$

где E есть данная постоянная; требуется найти максимум функции Ω . Тем, что функция Ω содержит лишь переменные q , функция же U вдобавок к тому же линейная, задача значительно упрощается.

В простейшем случае, когда нагрузки нет ($U=0$), задача решается сразу.

В самом деле, уравнение (6) приводится тогда к такому:

$$T + \Omega = E$$

и так как функция $T \geq 0$, то наибольшее значение Ω , т. е. величина Ω_d , будет

$$\Omega_d = E \quad (8)$$

§ 6. При определении искомого максимума Ω заметим, что изменяемость переменных q и p не ограничена никакими неравенствами, поэтому

нет надобности рассматривать граничные максимумы и достаточно применить известный способ Лагранжева множителя.

Соответственно этому способу должно иметь место равенство

$$\delta[\Omega + \lambda(T + \Omega - U - E)] = 0 \quad (9)$$

причем λ есть некоторый, пока неопределенный, постоянный множитель, и знак δ означает полный дифференциал той функции, которая под этим знаком стоит.

Заметив, что переменные p входят лишь в состав T , имеем уравнения

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial p_1} = 0; \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial p_2} = 0; \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial p_3} = 0 \quad (10)$$

умножив которые соответственно на p_1, p_2, p_3 и сложив, получим

$$2\lambda T = 0 \quad (10')$$

что может иметь место не иначе, как при $\lambda = 0$ или $T = 0$.

Предположение $\lambda = 0$ отпадает, ибо тогда вопрос [как видно из уравнения (9)] был бы равносильен разысканию наибольшей или наименьшей величины Ω , а было показано, что эта функция имеет абсолютный минимум (именно нуль), нам же надо найти максимум ее, когда соблюдено условие (6).

Таким образом, остается только условие $T = 0$; так как T есть определенная положительная квадратичная форма, то она может обратиться в нуль лишь, когда все переменные p , от которых она зависит, принимают значение, равное нулю, т. е. когда

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0$$

тогда уравнения (10) также сами собою удовлетворяются.

Таким образом, в уравнении (9) надо положить $T = 0$, и оно принимает вид

$$(1 + \lambda)\delta\Omega - \lambda\delta U = 0 \quad (9')$$

Случай, когда $\delta U = 0$, уже рассмотрен выше, ибо в этом случае все нагрузки B_1, B_2, B_3 также равны нулю; значит, и само $U = 0$, мы же рассматриваем случай, когда U не равно нулю. Таким образом, уравнение (9') можно разделить на $1 + \lambda$, ибо эта величина не равна нулю, так как иначе было бы и $\delta U = 0$; по разделении на $1 + \lambda$, положив

$$\mu = \frac{\lambda}{1 + \lambda}$$

мы придадим уравнению (9') вид

$$\delta\Omega - \mu\delta U = 0 \quad (9'')$$

Функции Ω и U содержат лишь переменные q_1, q_2, q_3 , и уравнение (9''), ввиду произвольности $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$, распадается на следующие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial q_1} &= \mu \frac{\partial U}{\partial q_1} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial q_2} &= \mu \frac{\partial U}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial q_3} &= \mu \frac{\partial U}{\partial q_3} \end{aligned} \quad (11)$$

сличив их с уравнениями (3'), видим, что вторые части этих уравнений суть не что иное, как нагрузки

$$\mu B_1, \mu B_2, \mu B_3$$

и, следовательно, значения координатных параметров q_1, q_2, q_3 , удовлетворяющие уравнениям (11), которые мы обозначим через $q_1^{(d)}, q_2^{(d)}, q_3^{(d)}$, будут соответственно равны

$$\mu q_1^{(s)}, \mu q_2^{(s)}, \mu q_3^{(s)}$$

где

$$q_1^{(s)}, q_2^{(s)}, q_3^{(s)}$$

суть значения этих величин, определяемые уравнениями (3'') для *статической* нагрузки и статического положения равновесия K_s .

Отсюда следует, так как Ω есть однородная функция второй степени от переменных q , а функция U — однородная функция первой степени, что при динамической нагрузке будет

$$\Omega_d = \mu^2 \Omega_s \quad (12)$$

$$U_d = \mu U_s \quad (13)$$

где значок d относится к нагрузке динамической, s — к статической.

На основании уравнения (4)

$$2\Omega_s = U_s$$

из уравнений (12) и (13) следует

$$\Omega_d - U_d = (\mu^2 - 2\mu) \Omega_s \quad (IV)$$

Множитель μ должен быть определен так, чтобы при значениях

$$T_d = 0; \quad \Omega_d = \mu^2 \Omega_s; \quad U_d = \mu U_s$$

уравнение (6), обращаясь в

$$T_d + \Omega_d - U_d = E \quad (6')$$

имело место; отсюда, на основании уравнения (IV), следует

$$(\mu^2 - 2\mu) \Omega_s = E \quad (14)$$

Так как, рассмотрев особо случай $U=0$, мы это предположение исключаем, то можно считать, что Ω_s есть величина положительная,

отличная от нуля (ибо положение K_s не совпадает с O); написав тогда уравнение (14) так:

$$(\mu - 1)^2 = 1 + \frac{E}{\Omega_s} \quad (14')$$

получаем:

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{E}{\Omega_s}} \quad (14'')$$

второй же корень уравнения (14') будет меньше 1, во всяком случае, меньше первого по численной величине.

Чтобы показать, что величина

$$\Omega_d = \mu^2 \Omega_s$$

при значении (14'') для μ есть действительно максимум, замечаем сперва, что значение Ω_d , соответствующее второму корню μ , будет меньше этого; заметив это обстоятельство, обратимся к уравнению (6), выражающему закон сохранения энергии.

Мы видели, что в нашем случае $T_d = 0$, следовательно,

$$\Omega_d - U_d = E$$

с другой стороны, в любой момент времени t при движении имеет место равенство

$$T + \Omega - U = E$$

Вычитая из предыдущего, имеем:

$$\Omega_d - \Omega + U - U_d = T \quad (15)$$

Но на основании Тейлорова ряда, применяя его к разложению функции $\Omega(q_1, q_2, q_3)$ в смежности с значениями $q_1^{(d)}, q_2^{(d)}, q_3^{(d)}$, имеем:

$$\Omega - \Omega_d = \sum_h \left(\frac{\partial \Omega}{\partial q_h} \right)_d (q_h - q_h^{(d)}) + \Omega' \quad (V)$$

причем Ω' есть та же самая функция Ω , в которой переменные q_1, q_2, q_3 заменены соответственно через $q_1 - q_1^{(d)}, q_2 - q_2^{(d)}, q_3 - q_3^{(d)}$, а так как функция Ω есть положительная при всяких значениях аргументов, то и величина Ω' всегда положительная.

Но мы видели [уравнение (11)], что значения производных $\left(\frac{\partial \Omega}{\partial q_1} \right)_d, \left(\frac{\partial \Omega}{\partial q_2} \right)_d, \left(\frac{\partial \Omega}{\partial q_3} \right)_d$ равны соответственно $\mu B_1, \mu B_2, \mu B_3$, следовательно, входящая в предыдущее равенство сумма равна

$$\mu (U - U_d)$$

Подставив в уравнение (V) и разделив на μ , имеем:

$$\frac{1}{\mu} (\Omega - \Omega_d) = U - U_d + \frac{\Omega'}{\mu}$$

Сложив это равенство с (15), имеем:

$$\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)(\Omega_d - \Omega) = T + \frac{\Omega'}{\mu}$$

Но мы видели, что $\mu > 1$, значит, величина $1 - \frac{1}{\mu}$ положительная, вторая часть равенства также не может принимать отрицательных значений, следовательно и разность

$$\Omega_d - \Omega \geq 0$$

что показывает, что Ω_d есть наибольшее значение Ω , которого эта функция достигает лишь, когда одновременно $T=0$ и $\Omega'=0$, т. е. когда система переходит через положение K_d , определяемое значениями $q^{(d)}$, имея живую силу, равную нулю, т. е. со скоростями, равными нулю.

Таким образом, доказано с полной строгостью, что выражение

$$\Omega_d = \mu^2 \Omega_s$$

представляет верхнюю границу меры динамического напряжения, когда за таковую принята энергия упругих деформаций системы, поэтому множитель μ^2 можно рассматривать как тот коэффициент безопасности, на который надо умножить меру статического напряжения Ω , чтобы получить динамическое.

§ 7. Заменяв в выражении (12)

$$\Omega_d = \mu^2 \Omega_s$$

множитель μ его величиной

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{E}{\Omega_s}} \quad (14'')$$

получим:

$$\Omega_d = 2\Omega_s + E + 2\sqrt{\Omega_s(\Omega_s + E)} \quad (13')$$

Это выражение не столь наглядно, как (12), и единственное его преимущество состоит в том, что оно не подчинено ограничению, что U не равно нулю, и является вполне общим и приложимо также в предельном случае, когда нагрузок нет и $\Omega_s = 0$; чтобы в этом убедиться, стоит только заметить, что при $\Omega_s = 0$ будет

$$\Omega_d = E$$

что согласуется с уравнением (8).

Поясним теперь полученный результат некоторыми примерами.

Рассмотрим сперва хорошо известный случай: заданные нагрузки (имеющие силовую функцию U) начинают действовать на систему, находящуюся в покое в положении O .

Если бы система пришла в равновесие под действием этих нагрузок, то мерою ее напряженности служила бы величина Ω_s , соответствующая статическому равновесию.

Но прежде, чем система в это положение придет, она будет находиться в движении. Начальные условия для этого движения суть

$$T = 0; \Omega = 0; U = 0$$

следовательно, и

$$E = 0$$

На основании (14'') в этом случае

$$\mu = 2$$

и, следовательно, будет

$$\Omega_d = 4\Omega_s$$

т. е. работа упругих сил может быть в четыре раза больше таковой же при статическом положении и, значит, соответствующие динамические напряжения вдвое больше статических.

Легко показать, что эта высшая граница может быть достигнута, для чего достаточно рассмотреть случай одной степени свободы.

Вообразим для этого пружину, к нижнему концу которой подвешивается сразу груз B .

Пренебрегая массой пружины по сравнению с массой груза, будем иметь:

$$\Omega = \frac{1}{2} es^2$$

$$U = Bs$$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$

и уравнение движения будет

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\omega^2 s + g$$

причем $\omega^2 = \frac{e}{m}$. Это уравнение имеет частное решение (которое, понятно, может быть получено самым простым образом)

$$s = \frac{g}{\omega^2}$$

соответствующее статическому равновесию, при котором сила упругости уравновешивает нагрузку.

Колебательное же движение груза при начальных, соответствующих $t = 0$, условиях:

$$s = 0 \text{ и } s' = 0$$

будет, очевидно,

$$s = \frac{g}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)$$

и наибольшее отклонение от положения равновесия (в те моменты, когда ωt равно нечетному кратному π) будет

$$\frac{2g}{\omega^2}$$

т. е. вдвое больше статического, соответственно чему будет и

$$\Omega_d = 4\Omega,$$

Перейдем теперь к рассмотрению несколько более общего приложения, предположив, что система находилась в равновесии под действием нагрузок αB_1 , αB_2 , αB_3 и эти нагрузки внезапно изменились в B_1 , B_2 , B_3 , оставаясь пропорциональными своим первоначальным значениям, причем α есть постоянный коэффициент пропорциональности. Когда $\alpha > 1$, то, очевидно, имеет место внезапное уменьшение нагрузки, например, от частичного освобождения от нее; когда же $\alpha < 1$, то имеет место увеличение нагрузки (в отношении $1:\alpha$); наконец, отрицательные значения α означают, что изменяется не только величина, но и направление действия нагрузки становится противоположным.

Во всех этих случаях замена в уравнениях (12) и (13) μ через α показывает, что наряду с $T=0$ надо взять за начальные значения

$$\Omega = \alpha^2 \Omega_s; \quad U = \alpha U_s.$$

Заметив, что $2\Omega_s = U_s$, будем иметь:

$$E = T + \Omega - U = (\alpha^2 - 2\alpha)\Omega_s;$$

$$1 + \frac{E}{\Omega} = (1 - \alpha)^2$$

Таким образом, численная величина $\sqrt{1 + \frac{E}{\Omega}}$ есть $\alpha - 1$, когда $\alpha \geq 1$; когда $\alpha < 1$, то эта величина есть $1 - \alpha$, причем сюда включается и тот случай, когда α отрицательное; на основании этого формула (14'') дает

$$\begin{aligned} \mu &= \alpha, & \text{когда } \alpha \geq 1 \\ \mu &= 2 - \alpha, & \text{когда } \alpha \leq 1 \end{aligned} \quad (14''')$$

и затем из уравнения (12) следует:

$$\Omega_d = \alpha^2 \Omega_s, \text{ когда } \alpha \geq 1$$

$$\Omega_d = (2 - \alpha)^2 \Omega_s, \text{ когда } \alpha \leq 1$$

Необходимо заметить, что мера упругого напряжения Ω , представляемая целою однородною функцией (квадратичной формой) переменных q , представляется также, выразив при помощи уравнений (3'') переменные q через B , как квадратичная форма нагрузок B . Эта форма называется союзною или взаимною с первой. Отсюда видно, что $\alpha^2 \Omega_s$ есть не что иное, как мера упругого напряжения в состоянии равновесия под действием нагрузок αB . Отсюда следует любопытное (как бы само собою понятное) заключение, что при динамическом состоянии, происходящем от внезапного уменьшения нагрузки, не может произойти увеличения начального статического напряжения.

В том же случае, когда внезапно прилагается добавочная нагрузка, направленная в одну сторону с первоначальной, что соответствует значениям $0 < \alpha < 1$, коэффициент безопасности μ^2 принимает значение

$$\mu^2 = (2 - \alpha)^2 \quad (VI)$$

которое показывает, что в этом случае работа упругих деформаций Ω_d , служащая мерою напряженности, за всё то время, пока система колеблется до прихода в новое состояние равновесия, не превзойдет четырехкратного своего значения, соответствующего этому новому положению равновесия.

Из формулы (VI) видно, что значение $\mu^2 = 4$ имеет место лишь при $\alpha = 0$ (т. е. случай, разобранный выше — отсутствие начальной нагрузки и покой), когда же имелась и начальная нагрузка, то $\alpha > 0$ и, значит, $\mu^2 < 4$, но больше 1.

Наконец, когда внезапная перемена нагрузок сопровождается также изменением их направления на обратное ($\alpha < 0$), то $\mu^2 > 4$ и может в зависимости от величины α принимать сколь угодно большое значение; обратим внимание на случай $\alpha = -1$, т. е. на внезапную перемену направления нагрузки, не изменяя величины ее, тогда $\mu^2 = 9$. Совершенно подобно тому, как в примере первом, легко показать, что для случая одной степени свободы вышеуказанные наибольшие значения напряжений, действительно, достигаются.

§ 8. Из формулы (14'') ясно, что μ постоянно возрастает вместе с E для всей области изменений этой величины, лежащей в промежутке от $-\Omega_s$ до ∞ , следовательно, динамическое напряжение $\Omega_d = \mu^2 \Omega_s$ есть *возрастающая функция* от E . Установив это обстоятельство, обратимся к предположению, более близкому к действительности, когда наряду с нагрузкою и силами упругости имеются еще сопротивления вроде трения, вязкости и т. п. Не разбирая их в подробности, достаточно будет указать, что наличие „сопротивлений“, т. е. сил, работа которых всегда отрицательная, способствует безопасности в том смысле, что динамическое напряжение, наверно, остается не больше того, которое при прочих одинаковых условиях имело бы место при отсутствии сказанных сопротивлений.

Доказать это весьма просто. Стоит только в уравнении (6), выражающем закон сохранения энергии, ввести еще и работу $-\Psi$ сил сопротивления (считаемую от начала движения по рассматриваемый момент времени t); тогда это уравнение примет вид

$$T + \Omega - U = E - \Psi \quad (16)$$

причем Ψ есть величина неотрицательная, обращающаяся в нуль при $t = 0$.

При наибольшем напряжении уравнение (16) должно иметь место и, если обозначить через Ψ_d значение функции Ψ в этот момент, которое положительно, и принять

$$E' = E - \Psi_d$$

то наверно будет $E' \leq E$, вместе с тем уравнение (16) напишется:

$$T + \Omega - U = E'$$

т. е. уравнение, совершенно подобное уравнению (6) с заменю E мень-
шею величиною E' , значит, и соответствующее значение Ω'_d будет
меньше Ω_d или, в крайнем случае, равно Ω_d .

В общем случае нельзя сказать ничего больше этого, но легко
удостовериться, что при подходящих начальных условиях высшая гра-
ница Ω_d может быть достигнута.

В последнее время¹ г. Krall исследовал (пользуясь нормальными
координатами) замечательный случай упругой системы с внутренним
трением, для которой при начальном покое получается коэффициент
безопасности $\mu' < \mu$, а именно:

$$\mu' - 1 = (\mu - 1) e^{-\frac{\gamma}{\nu}}$$

где γ есть постоянная, зависящая от свойств материала (упругость и
внутреннее трение), и ν есть частота основного тона свободных коле-
баний системы.

§ 9. Обозначим, как и раньше, через Q_h обобщенные (Лагранжевы)
слагающие сил, действующих на систему.

Как известно, если мы вообразим Декартову систему прямоугольных
прямолинейных координат x, y, z и систему Лагранжевых координатных
параметров $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, через которые координаты всех точек
системы выражаются заданными функциями, и обозначим через x_i, y_i, z_i
координаты точек приложения силы F_i , составляющие которой суть
 X_i, Y_i, Z_i , то будет

$$\begin{aligned} Q_h = & X_1 \frac{\partial x_1}{\partial q_h} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial q_h} + \dots + X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_h} + \dots + \\ & + Y_1 \frac{\partial y_1}{\partial q_h} + Y_2 \frac{\partial y_2}{\partial q_h} + \dots + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_h} + \dots + \\ & + Z_1 \frac{\partial z_1}{\partial q_h} + Z_2 \frac{\partial z_2}{\partial q_h} + \dots + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_h} + \dots \end{aligned}$$

которые короче напишутся так:

$$Q_h = \sum_i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_h} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_h} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_h} \right) \quad (VI)$$

причем сумма распространяется на все силы F_i .

Элементарная работа, производимая силами Q_h , выражается формулою

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_h \delta q_h$$

Можно принять

$$\delta q_1 = q'_1 dt; \delta q_2 = q'_2 dt; \dots; \delta q_n = q'_n dt$$

или при сделанных ранее для простоты обозначениях:

$$\delta q_1 = p_1 dt; \delta q_2 = p_2 dt; \dots; \delta q_n = p_n dt$$

¹ Rend. della R. Acad. del Lincei, vol. VII, 1928, pp. 223—228 и 556—561.

В дальнейшем, для упрощения, подобно тому, как и выше, примем для наглядности $n=3$, но рассуждения будем вести в общем виде.

Таким образом, элементарная работа в продолжение промежутка времени от t до $t + \Delta t$ будет

$$dA = (Q_1 p_1 + Q_2 p_2 + \dots + Q_n p_n) dt$$

или, положив

$$2w = Q_1 p_1 + Q_2 p_2 + \dots + Q_n p_n \quad (17)$$

будем иметь для конечного промежутка времени от 0 до τ :

$$A = 2 \int_0^\tau w dt \quad (18)$$

Мы имеем следующее общее выражение живой силы T системы:

$$2T = \sum_1^n a_{nk} q'_k q'_k = \sum_1^n a_{nk} p_k p_k$$

которое в развитом виде для $n=3$ будет

$$2T = a_{11} p_1^2 + a_{22} p_2^2 + a_{33} p_3^2 + 2a_{12} p_1 p_2 + 2a_{13} p_1 p_3 + 2a_{23} p_2 p_3$$

Будем наряду с слагающими Q_k или в нашем случае Q_1, Q_2, Q_3 рассматривать еще выражения $Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}$, связанные с предыдущими соотношениями:

$$\begin{aligned} a_{11} Q^{(1)} + a_{12} Q^{(2)} + a_{13} Q^{(3)} &= Q_1 \\ a_{21} Q^{(1)} + a_{22} Q^{(2)} + a_{23} Q^{(3)} &= Q_2 \\ a_{31} Q^{(1)} + a_{32} Q^{(2)} + a_{33} Q^{(3)} &= Q_3 \end{aligned} \quad (19)$$

причем

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{31} = a_{13}, \quad \text{и т. д.}$$

тогда ясно, что выражение w может быть написано так:

$$\begin{aligned} 2w &= a_{11} p_1 Q^{(1)} + a_{22} p_2 Q^{(2)} + a_{33} p_3 Q^{(3)} + a_{12} (p_1 Q^{(2)} + p_2 Q^{(1)}) + \\ &+ a_{13} (p_1 Q^{(3)} + p_3 Q^{(1)}) + a_{23} (p_2 Q^{(3)} + p_3 Q^{(2)}) \end{aligned} \quad (17')$$

В дальнейшем нам понадобится еще выражение

$$\begin{aligned} 2\gamma &= Q_1 Q^{(1)} + Q_2 Q^{(2)} + Q_3 Q^{(3)} = a_{11} Q^{(1)} Q^{(1)} + a_{22} Q^{(2)} Q^{(2)} + a_{33} Q^{(3)} Q^{(3)} + \\ &+ 2a_{12} Q^{(1)} Q^{(2)} + 2a_{13} Q^{(1)} Q^{(3)} + 2a_{23} Q^{(2)} Q^{(3)} \end{aligned} \quad (20)$$

Введя эти величины, мы выведем одно важное для дальнейшего неравенство, которым ограничивается абсолютная величина полной работы A , а именно:

$$A^2 \leq \int_0^\tau T dt \int_0^\tau \gamma dt \quad (21)$$

Чтобы вывести это неравенство, принадлежащее к типу неравенств Шварца¹ (правильнее Буняковского), рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2} \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^n a_{kk} (\xi p_k + \eta Q^{(k)}) (\xi p_k + \eta Q^{(k)}) dt$$

Стоящая под знаком интеграла сумма, как видно, представляет выражение живой силы

$$2T = \sum_{k=1}^n a_{kk} p_k p_k \quad (\text{VII})$$

в котором заменено

$$p_k \text{ через } \xi p_k + \eta Q^{(k)}$$

$$p_k \text{ через } \xi p_k + \eta Q^{(k)}$$

а так как квадратичная форма (VII), представляющая живую силу, при всяких значениях переменных p , очевидно, имеет положительное значение, то и подинтегральная сумма положительная, какие бы значения буквам ξ и η ни приписывались, а, значит, и вышенаписанный интеграл при всяких значениях ξ и η *положительный*.

На основании равенств (5), (17'), (18) и (20), этот интеграл равен

$$\xi^2 \int_0^{\tau} T dt + 2\xi\eta A + \eta^2 \int_0^{\tau} \gamma dt$$

¹ Неравенство Буняковского (Шварца) в обычной его форме выражается следующим образом:

$$\left[\int_a^b f(x) g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2 dx \int_a^b [g(x)]^2 dx$$

и доказывается так: составим интеграл

$$\int_a^b [f(x) + \lambda g(x)]^2 dx$$

очевидно, что этот интеграл при всяком значении λ положителен [неотрицателен], таким образом, имеем неравенство

$$\lambda^2 \int_a^b [g(x)]^2 dx + 2\lambda \int_a^b g(x) f(x) dx + \int_a^b [f(x)]^2 dx \geq 0 \quad (\text{VIII})$$

имеющее место при всяком вещественном значении λ , следовательно,

$$\left[\int_a^b g(x) f(x) dx \right]^2 - \int_a^b [g(x)]^2 dx \int_a^b [f(x)]^2 dx \leq 0$$

ибо корни трехчлена (VIII), чтобы он был всегда положительным, должны быть мнимые или равные между собою.

и мы получаем следующее неравенство, имеющее место при всяких значениях ξ и τ :

$$\xi^2 \int_0^{\tau} T dt + 2\xi\tau A + \tau^2 \int_0^{\tau} \gamma dt \geq 0$$

откуда и следует (21):

$$A^2 \leq \int_0^{\tau} T dt \int_0^{\tau} \gamma dt$$

Так как функции T и γ всегда положительные, то, если при каком-нибудь значении τ_1 величина $|A|$ принимает свое наибольшее значение A_1 , будет

$$A_1^2 \leq \int_0^{\tau_1} T dt \int_0^{\tau_1} \gamma dt$$

и если $\tau_1 \leq \tau$, то подавно будет

$$A_1^2 \leq \int_0^{\tau} T dt \int_0^{\tau} \gamma dt \quad (21')$$

Вводя средние величины

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \gamma dt \quad \text{и} \quad \bar{T} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} T dt$$

можем предыдущее неравенство написать так:

$$A_1^2 \leq \tau^2 \bar{\gamma} \bar{T} \quad (21'')$$

§ 10. На основании выводов предыдущего параграфа можно составить выражение верхней границы для динамического напряжения, когда на систему s действуют не только постоянные нагрузки B_h , но и какие угодно обобщенные силы Q_h .

В самом деле, в этом случае уравнение (6) принимает вид

$$T + \Omega - U = E + A \quad (22)$$

Обратив внимание на то, что (§ 4), с одной стороны, $-\Omega$ есть минимум $\Omega = U$, так что

$$U - \Omega \leq \Omega,$$

с другой стороны

$$A \leq |A| \leq A_1$$

получаем из равенства (22) неравенство

$$T \leq E + \Omega + A_1$$

имеющее место во всякий момент времени t , лежащий в промежутке от 0 до τ . Так как все величины, стоящие в правой части предыду-

щего неравенства, постоянные, то, умножив на dt , проинтегрировав в пределах 0 и τ и разделив на τ , получим:

$$\bar{T} \leq E + \Omega_s + A_1 \quad (23)$$

Внося эту величину в неравенство (21''), получаем:

$$A_1^2 \leq \tau^2 \bar{\gamma} (E + \Omega_s + A_1) \quad (24)$$

что равносильно неравенству

$$\left(A_1 - \frac{1}{2} \tau^2 \bar{\gamma} \right)^2 \leq \tau^2 \bar{\gamma} \left(E + \Omega_s + \frac{1}{4} \tau^2 \bar{\gamma} \right)$$

из которого следует

$$A_1 \leq \tau W \quad (24')$$

где

$$W = \frac{1}{2} \tau \bar{\gamma} + \sqrt{\bar{\gamma} \left(E + \Omega_s + \frac{1}{4} \tau^2 \bar{\gamma} \right)} \quad (25)$$

Как видно, в состав величины W входят четыре аргумента: начальная энергия E , статическое напряжение Ω_s (эти два аргумента входят лишь в виде их суммы $\Omega_s + E$), продолжительность τ того промежутка времени, в течение которого рассматривается действие нагрузки, и среднее значение $\bar{\gamma}$ величины γ за этот промежуток времени.

Обратив внимание на то, что при обычном Максвелловом обозначении размерность энергии вообще, а, значит, в частности Ω_s , E и A_1 , есть ml^2t^{-2} , видим из формулы (24), что такова же размерность и величины $\tau^2 \bar{\gamma}$, так что размерность $\bar{\gamma}$ есть ml^2t^{-4} .

Вычисление величины $\bar{\gamma}$ особенно легко выполнимо в том, хотя и частном, но часто на практике встречающемся случае, когда силы Q_h суть заданные периодические или синусоидальные функции времени, во всяком случае, когда силы Q_h заданы, вычисление $\bar{\gamma}$ требует лишь квадратур.

Само собою разумеется, что к уравнению (22) приложимы все те соображения, которые сделаны в § 8 по отношению к уравнению (16); стоит только в уравнении (22) заменить переменную величину A ее верхней границей A_1 , и мы получим верхнюю границу для величины Ω для рассматриваемого промежутка времени от 0 до τ , как показано в §§ 5 и 6, и мы придем к следующему выводу: *для промежутка времени от $t=0$ до $t=\tau$ имеет место равенство*

$$\Omega_d = \mu^2 \Omega_s$$

причем

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{E + \tau W}{\Omega_s}}$$

как то следует из выражения (14'') по замене E на $E + \tau W$, где W дается формулой (25).

Когда система вначале (до приложения сил Q_h) находилась в равновесии и покое под нагрузками B_h , то при $t=0$ будет

$$T=0; \Omega = \Omega_s; U = U_s = 2\Omega_s$$

и, на основании уравнения (6):

$$E + \Omega_s = 0$$

выражение W упрощается и обращается в

$$W = \tau \bar{\gamma}; E + \tau W = -\Omega_s + \tau^2 \bar{\gamma}$$

так, что будет

$$\mu = 1 + \tau \sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{\Omega_s}} \quad (26)$$

Прежде чем привести типичные примеры применения этих формул, сделаем одно замечание качественного характера.

Общеизвестно, что если на упругую систему s , могущую совершать колебательное движение, действуют периодические силы, периоды которых близки к одному из периодов свободных колебаний системы, то имеют место явления резонанса, т. е. амплитуды колебаний, а, значит, и напряжения Ω получаются значительной величины, как только вынужденные колебания достигнут полной своей величины.

Выше полученный результат показывает, что повышение напряжения в этом случае совершается не внезапно, а лишь постепенно: пока τ достаточно мало, напряжение не может значительно превышать того Ω_s , которое имеет место без действия возмущающих сил.

§ 11. Прежде чем привести примеры, напомним некоторые формулы, относящиеся к изгибу и поперечным колебаниям балок.

Пусть s есть балка, длина которой l , и левая ее опора O принята, как обыкновенно, за начало координат, причем ось Ox направлена по оси балки, предполагаемой горизонтальной, ось Oy — вертикально вниз.

Когда балка подперта в обоих концах, то под действием вертикальной нагрузки ось балки будет оставаться в вертикальной плоскости Oxy , и уравнение изогнутой оси может быть представлено в виде

$$y = \sum_1^{\infty} q_h \sin \frac{\pi h x}{l} \quad (IX)$$

причем q_h и суть Лагранжевы координаты, число которых n в этом случае бесконечное.

Сосредоточенная в точке, абсцисса которой есть x , нагрузка, на основании формул § 9, имеет Лагранжеву обобщенную слагающую Q_h :

$$Q_h = Y \frac{\partial y}{\partial q_h} = Y \sin \frac{\pi h x}{l} \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

если же дело идет о нагрузке p на погонный метр, равномерно распределенной на протяжении от $x=a$ до $x=b$, то будет

$$Q_h = p \int_a^b \sin \frac{\pi h x}{l} dx = \frac{pl}{\pi h} \left(\cos \frac{\pi h a}{l} - \cos \frac{\pi h b}{l} \right) \quad (27)$$

На основании определения живой силы T , пренебрегая поворотом сечений балки, получим, обозначая через ρ вес погонного метра балки:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{g} \int_0^l y'^2 dx = \frac{\rho l}{4g} \sum_1^{\infty} q_h'^2 \quad (28)$$

Как известно, потенциальная энергия Ω изогнутой балки выражается так:

$$\Omega = \frac{1}{2} G \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{G}{4} \cdot \frac{\pi^4}{l^3} \sum h^4 q_h^2 \quad (29)$$

причем G есть мера жесткости балки, т. е. произведение модуля упругости материала на момент инерции площади сечения балки.

Лагранжевы уравнения для свободных колебаний суть

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial q_h'} - \frac{\partial (T - \Omega)}{\partial q_h} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots)$$

Они принимают вид

$$q_h'' + h^4 \omega^2 q_h = 0 \quad (28')$$

где

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 g G}{\rho l^4} \quad (30)$$

Из уравнений (IX) и (28') следует, что движение каждой точки балки колебательное с периодами

$$\tau_h = \frac{2\pi}{h^2 \omega} \quad (h = 1, 2, 3, \dots)$$

Наибольший из этих периодов, соответствующий основному тону, есть

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega}$$

и вследствие (30) будет

$$\tau_1^2 = \frac{4\rho l^4}{\pi^2 g G} \quad (30')$$

Мы ограничимся рассмотрением лишь двух простейших случаев статической нагрузки:

- 1) равномерно распределенной по всей длине балки;
- 2) сосредоточенной в точке, абсцисса которой равна ξ .

В первом случае нагрузку можно присовокупить к весу самой балки и, обозначив эту сумму через p (на погонный метр), будем иметь:

$$G \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{pl}{2} (l-x) + \frac{p}{2} (l-x)^2 = -\frac{p}{2} x(l-x)$$

откуда следует

$$\Omega_s = \frac{\rho^2}{8G} \int_0^l x^2 (l-x)^2 dx = \frac{1}{240} \cdot \frac{\rho^2 l^5}{G} \quad (31)$$

На основании формулы (30') это выражение может быть написано с заменой ρ на p так:

$$\Omega_s = \frac{1}{240} \cdot \frac{1}{4} \pi^2 g p l \tau_1^2 \quad (31')$$

и если ввести стрелку прогиба f , которая для этого случая нагрузки, как известно, есть

$$f = \frac{5}{384} \frac{p l^4}{G}$$

то будет

$$\Omega_s = \frac{16}{50} P f \quad (31'')$$

где $P = pl$ есть полная, действующая на балку нагрузка, включая и вес ее.

Во втором случае, не приводя довольно сложного общего выражения Ω_s , когда принимается во внимание и внешняя нагрузка Q и вес балки, ограничимся случаем, когда весом балки можно пренебречь; тогда, обозначая через η прогиб балки в точке приложения нагрузки, получим, что работа силы Q есть $Q\eta$ и, на основании формулы (4), будет

$$\Omega_s = \frac{1}{2} Q \eta$$

Вместе с тем для этого случая будет

$$\eta = \frac{1}{48} \cdot \frac{P}{IG} \xi^2 (l - \xi)^2 \quad (32)$$

как то можно найти в любом справочнике по строительной механике.

§ 12. Для примера приложения формул § 10 рассмотрим случай пробега железнодорожного поезда, средний вес которого на погонный метр равен p' , через мост.

Положим, что скорость хода поезда есть v , и будем считать время t с момента вступления поезда на мост, тогда, в случае, когда длина поезда $l_1 > l$, положив $vt = b$, будем иметь следующие состояния переменной нагрузки F моста, а именно:

- 1) пока $0 < b < l$,
 то для $0 \leq x \leq b$ будет $F = p'$
 и для $b \leq x \leq l$ будет $F = 0$;
- 2) когда $l \leq b \leq l_1$,
 то для $0 < x \leq l$ будет $F = p'$;
- 3) наконец, когда $l_1 \leq b \leq l + l_1$,
 то для $0 < x \leq b - l_1$ будет $F = 0$
 и для $b - l_1 \leq x \leq l$ будет $F = p'$.

Совершенно так же подразделим на отдельные промежутки и тот случай, когда $l_1 < l$, т. е. поезд короче моста.

Как видно, во всех этих случаях мост будет загружен или на протяжении некоторой части своей длины между абсциссами a и b , или на всей своей длине, что можно считать также входящим в предыдущий случай, приняв для a и b их крайние значения 0 и l .

Таким образом, можем считать, что a и b суть некоторые непрерывные функции времени t , значения которых лежат между 0 и l .

Мы увидим ниже, из формулы (26'), что период τ_1 основного тона свободных колебаний балки или моста входит в знаменатель второго члена выражения коэффициента безопасности, следовательно, мы сделаем погрешность в сторону запаса прочности, взяв для τ_1 величину, меньшую истинной, а такую величину мы получим, пренебрегая инерцией вертикальных колебаний поезда вместе с мостом; в таком случае живая сила T нашей системы сведется только к живой силе колебательного движения самого моста и будет выражаться формулой (28), из которой, на основании формулы (19), следует

$$Q^{(h)} = \frac{2g}{\rho l} Q_h$$

и по формуле (20) получается для величины γ выражение

$$\gamma = \frac{g}{\rho l} \sum_1^{\infty} Q_n^2 \quad (33)$$

в котором h заменено через n

По выражению (27) видно, что будет

$$\sum_1^{\infty} Q_n^2 = (S_a + S_b - 2S') \frac{\rho'^2 l^2}{\pi^2}$$

причем

$$S_a = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos^2 \frac{\pi n a}{l}$$

$$S_b = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos^2 \frac{\pi n b}{l}$$

$$S' = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{\pi n a}{l} \cos \frac{\pi n b}{l}$$

Очевидно, что каждый из членов этих частных сумм по абсолютной величине меньше или равен $\frac{1}{n^2}$, значит, каждая сумма (из них первые

две всегда положительные) по абсолютной величине меньше $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$,

таким образом, положительная величина $S_a + S_b - 2S'$ будет не больше $\frac{4\pi^2}{6} = \frac{2}{3}\pi^2$ и, следовательно, можно положить

$$S_a + S_b - 2S' = \frac{2}{3} k(t) \pi^2$$

причем $k(t)$ есть некоторая непрерывная функция t , значения коей лежат между 0 и 1.

Таким образом, из (27) и (33) следует

$$\gamma = \frac{2}{3} g \frac{p'^2}{\rho} lk(\cdot)$$

и, значит, среднее значение этой величины будет

$$\bar{\gamma} = \frac{2}{3} g \frac{p'^2}{\rho} lk \quad (34)$$

причем k есть некоторая положительная дробь.

Таким образом, у нас подготовлены все те величины, которые необходимы, чтобы составить верхний предел для динамического напряжения, испытываемого мостом при прохождении поезда, т. е. вследствие совокупного действия как увеличенной нагрузки, так и вызываемых в мосте колебаний.

Достаточно для этой цели составить выражение соответствующего коэффициента безопасности μ , пользуясь формулой (26)

$$\mu = 1 + \tau \sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{\Omega_s}}$$

из § 10, ибо в нашем случае мост до входа на него поезда находится в равновесии и покое под действием собственного веса.

Для Ω_s мы имеем формулу (31') и, на основании (34), будет

$$\frac{\bar{\gamma}}{\Omega} = \frac{80 \cdot 8}{4} \cdot \frac{k}{\pi^2} \left(\frac{p'}{\rho}\right)^2 \frac{1}{\tau_1^2}$$

Подставляя в формулу (26), заменив k наибольшим возможным его значением 1, получаем:

$$\tau \sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{\Omega}} = 8.05 \frac{p'}{\rho} \cdot \frac{\tau}{\tau_1}$$

и окончательно:

$$\mu = 1 + 8.05 \frac{p'}{\rho} \cdot \frac{\tau}{\tau_1} \quad (26')$$

где p' есть вес погонного метра поезда, ρ — вес погонного метра моста, τ — время прохождения поезда через мост, τ_1 — период основного тона свободных колебаний моста.

Получив формулу (26'), Леви-Чивита говорит: „Высший предел коэффициента безопасности, даваемый формулой (26'), вполне надежен, но в обычных случаях он не столь выгоден, как то меньшее его значение,

которое получается на основании иных соображений. Надо, однако, отметить, что эти обычные критерии указывают на опасное возрастание напряжений, когда с увеличением скорости поезда время его пробега τ через мост приближается к периоду τ_1 свободных колебаний моста, наша же формула показывает, что это опасение не основательно, напротив, увеличение скорости ведет к уменьшению динамической нагрузки“.

Затем автор рассматривает вкратце влияние неровностей рельс на колебания и напряжения моста, но этот вопрос для нашей цели не представляет интереса.

§ 13. Обратимся теперь ближе к формуле (26') и к тем словам, которыми автор ее поясняет, и посмотрим, к каким результатам приводит применение этой формулы.

Возьмем для примера ферму знаменитого Конвейского моста, построенного 80 лет тому назад и служащего, кажется, и по сие время. Конструкция этой трубчатой фермы по своему характеру близка к конструкции корабля, длина ее 424 фута (129,2 м), высота 25 ф. 6 д. (7.77 м), ширина 14 ф. 8 д. (4.47 м), верхний и нижний пояски — двойные клетчатой постройки, подобно днищу корабля, боковые стенки обыкновенные, укрепленные вертикальными ребрами углового железа, подобными шпангоутам корабля.

Площадь сечения нижнего пояска 500 кв. д., боковых стенок 259 кв. д. и верхнего пояска 565 кв. д., полный вес фермы 1146 т.

По этим данным момент инерции площади сечения оказывается равным $2.2 \cdot 10^7 \text{ д}^4 (= 9.16 \text{ м}^4)$, модуль упругости сварочного железа, из которого построен мост, можно принять равным $2 \cdot 10^7 \text{ т/м}^2$ и, следовательно, мера жесткости фермы

$$G = 1.832 \cdot 10^8 \text{ т/м}^2$$

На основании этого имеем:

$$\rho = \frac{1146}{129.2} = 8.86 \text{ т/м}$$

$$\tau_1^2 = \frac{4 \cdot 8.86 \cdot 129.2^4}{\pi^2 \cdot 9.81 \cdot 1.832 \cdot 10^8} = 0.552$$

$$\tau_1 = 0.74 \text{ сек.}$$

Вообразим, что через этот мост идет товарный поезд, длиною 400 м, весом 1000 т, со скоростью 36 км в час, т. е. 10 м в секунду, тогда будет

$$\tau = \frac{400 + 129.2}{10} = 53 \text{ сек.}$$

и формула (26') дает

$$\mu = 1 + 8.05 \frac{2.5}{8.86} \cdot \frac{53}{0.74} = 164 \text{ (sic!)}$$

Хорошо, что Стефенсон и Ферберн не знали формулы Леви-Чивита, не пришлось бы им строить ни Конвейского, ни Британского моста, так как по этой формуле им надо было бы за расчетную подвижную нагрузку брать $2.5 \cdot 164 = 410$ т на погонный метр, а если бы почему-либо пропустили через мост поезд самым малым ходом, в 1 м в секунду, то по формуле (26') коэффициент μ надо бы взять $\mu = 1627$ и расчетную нагрузку в 4067 т на погонный метр!

Знаменитые же строители моста, не мудрствуя лукаво, рассчитали свой мост просто на статическую равномерно-распределенную нагрузку, состоящую из веса поезда и веса моста, т. е. взяв 11.4 т на погонный метр или 3.5 т на погонный фут, тогда получаются:

наибольший изгибающий момент:

$$M = \frac{1}{8} 11.4 (129,2)^2 = 24\,000 \text{ тонно-метров}$$

момент сопротивления:

$$W = \frac{9.16}{3.9} = 2.35 \text{ м}^3$$

натяжение в наиболее удаленном слое:

$$T = \frac{M}{W} = 10\,000 \text{ т/м}^2 = 10 \text{ кг/мм}^2$$

Железо, из которого мост построен, при испытании на разрыв дало предельное сопротивление 23.5 т на кв. дюйм, т. е. 36.5 кг/мм², значит, запас прочности у них всего 3.65, и стоит их мост благополучно 80 лет пропустив за это время миллионы поездов.

Ясно, что „полная строгость вывода“ настолько увлекла итальянского математика, что он, получив свою формулу и рекомендуя брать в ней за τ „полное время перехода поезда через мост“, не обратил внимания на то, что его формула при этом становится явно несообразной, ибо из нее следует, что при неопределенном возрастании τ множитель μ также неопределенно возрастает; иными словами, чем медленнее поезд продвигать по мосту, тем больше становится динамическая нагрузка, и если его двигать еле-еле, самым малым ходом, то μ будет весьма велико, тогда как очевидно, что в этом случае нагрузка возрастает медленно и постепенно, и ее действие во всякий момент времени чисто статическое, так что μ должно быть равно 1.

В чем же ошибка Леви-Чивита и пригодна ли его формула, или ее надо считать совершенно ложной? Формула пригодна и верна, только промежуток времени τ надо в ней брать не тот, который советует Леви-Чивита, а выбирать его значение на основании совершенно иных соображений, в правильном же выборе надлежащего значения τ и заключается вся сущность дела.

Вопрос этот в главных чертах рассмотрен мною в статье: „Некоторые замечания о крешерах и индикаторах“ (Известия Академии Наук,

1909), а затем в моем курсе „О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах“ (Известия Морской академии, вып. 2).

§ 14. Начнем с простейшего случая одной степени свободы и отсутствия погашения колебаний. В этом случае, к которому приводятся и все остальные, уравнение движения системы будет вида

$$q'' + n^2 q = f(t) \quad (35)$$

причем $f(t)$ будет заданной функцией времени, представляющей закон изменения внешней нагрузки с течением времени.

Обыкновенно ход функции $f(t)$ таков: при $t=0$ $f(t)=0$, затем $f(t)$ возрастает до $t \leq t_1$, при каком-то значении эта функция достигает своей наибольшей величины $f(t_1)=f_m$, после чего она или остается постоянной, или же медленно убывает.

Соответствующий этому ходу изменения функции $f(t)$, ход изменения ее производной такой: пока $t < t_1$, $f'(t) > 0$, при $t = t_1$ производная $f'(t_1) = 0$ и затем при $t > t_1$ производная $f'(t) \leq 0$. Пусть наибольшее значение $f'(t)$ между пределами 0 и t_1 есть b .

Обозначим через q_{sm} наибольшее значение q при статической нагрузке, так что

$$q_{sm} = \frac{1}{n^2} f_m$$

Тогда отношение

$$\frac{q_m}{q_{sm}} \leq 1 + \frac{t_1 b}{f_m} \quad (36)$$

где q_m — наибольшее значение q .

Для наиболее важных практических случаев можно получить более тесные пределы.

Эти практически важные случаи такие:

1) отношение величины t_1 — продолжительности нарастания нагрузки к величине $T = \frac{2\pi}{n}$ — периоду свободных колебаний системы велико;

2) то же отношение $\frac{t_1}{T}$ весьма малое.

В первом случае

$$\frac{q_m}{q_{sm}} \leq 1 + \frac{c_m}{f_m} \quad (37)$$

где произведение

$$c_m = \frac{T}{2} b$$

представляет наибольшую величину нарастания нагрузки в продолжение промежутка времени, равного полупериоду свободных колебаний системы.

Ясно, что в нашем предположении, когда t_1 велико по сравнению с T , то отношение $\frac{c_m}{f_m}$ будет мало и $\frac{q_m}{q_{sm}}$ будет близко к единице, т. е. действие нагрузки практически будет статическое.

Аналогично в формулах Леви-Чивита в этом случае естественно за величину τ брать не полное время действия нагрузки, а полагать

$$\tau = \frac{T}{2}$$

т. е. брать τ равным лишь полупериоду свободных колебаний системы.

Так, например, в формуле (26') надо брать

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \frac{1}{2}$$

и будет

$$\mu = 1 + 8.053 \frac{2.5}{8.86} \cdot \frac{1}{2} = 2.22$$

вместо 164 или 1627, как получалось по Леви-Чивита.

Величина 2.22 далеко превосходит действительно необходимую.

В самом деле, при скорости 10 м в секунду и среднем весе поезда по 2.5 т на погонный метр в продолжение

$$\frac{\tau_1}{2} = \frac{T}{2} = 0.37 \text{ сек.}$$

надвинется на мост нагрузка

$$2.5 \cdot 0.37 \cdot 10 = 9.25 \text{ т}$$

так что приблизительно будет

$$c_m = 9.25$$

Наибольшая же нагрузка

$$f_m = 2.5 \cdot 128 = 320 \text{ т}$$

и формула (37) дает

$$\frac{q_m}{q_m} = 1 + \frac{9.5}{320} = 1.03$$

т. е. практически нагрузка *статическая*, как ее и считали Стефенсон и Ферберн по своему здравому инженерному смыслу.

§ 15. Мы рассмотрели случай, когда система имеет одну степень свободы, но если вообразить, что за Лагранжевы параметры приняты так называемые „нормальные“ координаты системы, т. е. в которых как кинетическая, так и потенциальная энергия системы выражаются только членами вида $a_{ii} p_i^2$ и $b_{ii} q_i^2$, то уравнения движения вида (35) будут содержать лишь по одной координате и всё сказанное выше будет иметь место, только вместо T надо брать *наибольший* из периодов свободных колебаний системы.

Совершенно подобным же образом можно было бы рассмотреть и случай, когда в системе есть сопротивления, вызывающие погашение колебаний, но этот случай в вопросах строительной механики, относящихся к действию динамической нагрузки, не имеет существенного значения и на нем мы останавливаться не будем.

О РАЗМЕРАХ ШЛЮЗОВ ДЛЯ ВОЛГИ¹

1 декабря я был приглашен на заседание Центрального научно-исследовательского института водного транспорта (ЦНИИВТ). В этом заседании при участии представителей разных проектирующих организаций рассматривался вопрос о распределении работ по проектированию разных сооружений для Великой Волги.

Между прочим на этом заседании выяснилось, что Совнаркомом утвержден следующий, намеченный одной из организаций, размер шлюзов:

Длина	290 м
Ширина	30 „
Глубина на пороге	5.5 „

Размер же самых больших барж предполагается:

Длина	200 м
Ширина	29.0 или 28.5 м
Углубление	5.0 „

Таким образом, при вводе такой баржи в шлюз остается свободная длина 90 м, причем указывалось, что эта свободная длина необходима, ибо впереди баржи помещается буксир.

Здесь имеет место явное недоразумение по следующим причинам:

а. Ввод баржи в шлюз должен производиться тягую при помощи *береговых* приспособлений, также и ввод буксира, и должно быть *категорически* воспрещено буксиру давать ход своей машине, когда ворота шлюза впереди его закрыты, ибо достаточно, чтобы машина не дала заднего хода, то буксир ударит в ворота и произойдет весьма крупная авария для всей системы.

б. Буксир должен обладать мощностью, соответствующей необходимой для буксировки силе тяги на крюке и возможно меньшей длиной, но которую можно выбрать так, что потребная длина шлюза будет 220 м.

в. При таком выборе элементов буксира для каждого шлюза сбережение в длине составит 70 м, т. е. почти 25⁰/₀, такое же сбережение

¹ Докладная записка вице-президенту Академии Наук СССР Г. М. Кржижановскому, от 5 декабря 1933 г. Публикуется впервые по машинописной копии, хранящейся в Кабинете-музее А. Н. Крылова. (Ред.).

будет и в каменной кладке, т. е. около 40 000 куб. м для каждого шлюза или по стоимости около 5 000 000 руб., а так как полное число таких шлюзов на всей системе будет около 50, то экономия составит до 250 000 000 руб., и этот вопрос заслуживает должного изучения.

Прежде всего надо с ясностью выникнуть в причины, вследствие которых в капиталистических странах строят мощные буксирные суда и придают им большую длину.

Новейший самый большой и самый мощный из существующих буксиров есть недавно законченный постройкою голландский буксир „Zwarte See“. Его элементы таковы:

Длина наибольшая	63.4 м
„ между перпендикулярами	59.7 „
Ширина наибольшая	5.9 „
Углубление	5.3 „
Мощность механизма	3300 ВНР (тормозных сил)
Система механизмов	2 дизеля 4-тактных, работающих на 1 гребной вал через перебор
Вместимость	792 регистровых тонн
Водоизмещение	~ 950 т
Скорость хода <i>порожнем</i>	17 $\frac{1}{4}$ узла — 32 км/час
Место постоянной стоянки	Брест (Франция)

Уже самое место постоянной стоянки указывает назначение этого и подобных ему мощных буксиров — это спасательные работы, которые по существу мало чем отличаются от узаконенного грабежа.

Дело вот в чем: когда корабль, потерпев на море аварию, требует (теперь по радио) помощи, то к нему спешат наперегонки так называемые „спасатели“, чтобы, как можно скорее, вы думаете, оказать помощь, — нет, а для того, чтобы заключить со шкипером потерпевшего судна контракт на „спасание“ (по-немецки „Bergung“, по-английски „salvage“), а не на простое оказание помощи.

По установленным тарифам, плата „за спасание“, смотря по обстоятельствам и степени аварии, составляет от 25 до 75% (sic!) от стоимости корабля и груза.

Главное искусство спасателя состоит в том, чтобы заключить со шкипером потерпевшего судна наиболее выгодный контракт, т. е. оформить более или менее подложными актами и записями высшую степень опасности.

При этом надо иметь в виду, что шкипер потерпевшего судна почти всегда уверен, что судовладельцем немедленно по возвращении в порт он со службы будет выгнан, поэтому, торгуясь со спасателем, он выговаривает в свою пользу от спасателя возможно крупную комиссию (provision), повышая степень аварийности. Эта комиссия доходит до 10% и более от стоимости корабля и груза. Заполучив такой куш, шкипер обеспечен на всё свое дальнейшее существование (рискуя отсидеть

в тюрьме три года), а „спасатель“ заработает больше, чем стоит весь пароход.

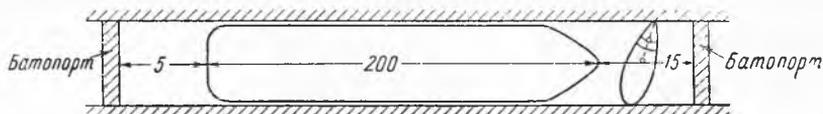
Всё вышесказанное не раз выяснялось на суде по претензиям страховых обществ, являющихся страдательными в этом деле. Отчеты о таких делах можно найти в „Lloyd's Gazette“ (London).

Вот для таких-то операций и строятся такие буксиры, как „Zwarte See“, который, подобно грифу-стервятнику, дежурит в Бресте, чтобы раньше другого, дежурящего где-нибудь в Портланде или Плимуте, 17-узловым ходом напасть на падаль.

Поэтому этому буксиру и придано отношение длины к ширине, равное 10, как у миноносца, и винт у него проектирован не столько для наивыгодной буксировки, а для большого хода *порожнем*.

Отсюда ясно, что для нашего случая Великой Волги подражать иностранным мощным буксирам и строить их *длинными* для большого хода *порожнем* *есть абсурд*.

Буксир и его винт (при глубине воды 5 м буксир должен быть винтовой, а не колесный) надо проектировать так, чтобы наибольшим по-



Фиг. 1.

лезным действием винт обладал не при скорости хода *порожнем*, а при скорости буксировки полного каравана. О ходе *порожнем* незачем и заботиться, если только буксир не предназначается для каких-либо специальных заданий, требующих большого хода.

Сперва мы предположим, что такого специального задания нет, в этом случае буксирное судно должно быть *возможно коротким*, т. е. иметь лишь ту длину, которая необходима для вмещения моторов достаточной мощности для буксировки полного каравана с назначенной скоростью. В нашем случае скорость буксировки должна составлять около 12.5 км/час (7 узлов) по отношению к воде, т. е. в среднем около 10 км/час по отношению к берегу при ходе вверх по течению.

Длина буксирного судна должна быть 30.5 м чтобы буксир становился в шлюз почти в точности *поперек* шлюза, упираясь носом и кормою в его стенки. Если бы буксир сделать длиной ровно 30 м, то его могло бы заесть между стенками шлюза. Для примера ниже приведены элементы буксирных судов того типа, который я предполагаю, при мощности 1000, 1500, 2000 и 3000 ВНР. Ширина наибольшего из них при длине их 30.5 м составляет по шпангоутам 11.65 м, а с привальными брусьями 12.25 м, поэтому при расположении буксира *впереди баржи поперек* шлюза, потребная длина шлюза составит $5 + 200 + 15 = 220$ м вместо проектированных 290 м. Расположение баржи и буксира в шлюзе представится такую схему (фиг. 1).

Чтобы определить приблизительно размеры буксирных теплоходов разной мощности, сделаем следующие обозначения:

Длина буксира между $\perp\perp \cdot L$	28 м
Наибольшая ширина по шпангоутам	B
Среднее углубление	T_0
Водоизмещение	D

и примем:

$$\frac{D}{LB T_0} = 0.60$$

Вес корпуса с постоянным оборудованием	$P_1 = 0.40D$
Вес снабжения, команды, провизии и пр.	$P_2 = 0.05D$
Запас водоизмещения и непредвиденные грузы	$P_3 = 0.03D$
Вес механизмов на 1 силу мощности	120 кг
Расход топлива и смазки в час на силу	0.200 кг
Полный запас топлива на 150 часов хода [на 1 силу мощности] . .	[30 кг]

При таких данных, при мощности главных механизмов N тормозных сил, полный вес машинной установки и топлива составит:

$$Q = (0.12 + 0.03)N = 0.15N \text{ (тонн)}$$

Таким образом, имеем уравнение весов

$$D = 0.40D + 0.05D + 0.03D + 0.15N$$

т. е.

$$0.52D = 0.15N$$

или, округляя в сторону запаса водоизмещения:

$$D = 0.3N \tag{1}$$

Принимаю

$$T_0 = 0.40B \tag{2}$$

тогда будет

$$D = 0.60 \cdot 0.40L \cdot B^2 = 0.24 \cdot 28 \cdot B^2 = 6.72B^2 \tag{*}$$

и уравнение (1) принимает вид

$$6.72B^2 = 0.3N$$

отсюда кругло

$$B^2 = 0.045N \tag{3}$$

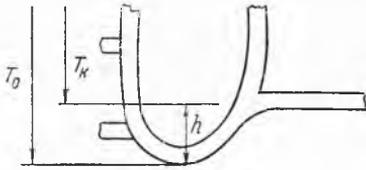
Задавая теперь для N значения 1000, 1500, 2000, 2500, 3000, получаем табл. 1.

Буксирному судну обыкновенно придется некоторый дифферент на корму, кроме того, в нашем случае выгодно и гребной вал располагать наклонно к килевой линии, придавая ахтерштевню форму при киле, показанном на фиг. 2.

Таблица 1

N	D в тоннах	B^2	B в метрах	T_0 в метрах
1000	300	45	6.70	2.70
1500	450	67.5	8.25	3.30
2000	600	90	9.50	3.80
2500	750	112.5	10.60	4.25
3000	900	135	11.65	4.65

Примем дифферент равным 0.80 м, тогда будет:



Фиг. 2.

Углубление носовое $T_n = T_0 - 0.40$
 Углубление кормой $T_k = T_0 + 0.40$
 Углубление пятки $T_p = T_k + h$

По данным табл. 1 и этим легко составить таблицу главных элементов буксирных судов (табл. 2).

Таблица 2

Мощность, ВНР	Водоизмещение D в тоннах	Наибольшая длина L _m в метрах	Длина между \perp L	Ширина B	Углубление				Погружение центрального вала в корме	Диаметр винта
					пятки T _p	к-рмы и киля T _k	среднее T ₀	нос T _n		
1000	500	30.5	28.0	6.70	4.40	3.10	2.70	2.30	2.30	3.60
1500	450			8.25	4.90	3.70	3.30	2.90	2.60	4.10
2000	600			9.50	5.00	4.20	3.80	3.40	2.65	4.20
2500	750			10.60	5.10	4.65	4.25	3.85	2.72	4.30
3000	900			11.65	5.20	5.00	4.65	4.30	2.72	4.40

Эти данные дают общее представление о буксирных судах предлагаемого типа и по ним любой корабельный инженер сейчас же может составить эскизный чертеж.

При двух быстроходных моторах с перебором длина машинного отделения приблизительно 10—11 м вполне достаточна и внутреннее размещение достигается без затруднений.

Во всем вышеприведенном предположено, что буксирные суда, мощность которых надо затем выбрать соответственно требуемой скорости буксировки и составу каравана, не подлежат никаким *специальным* требованиям, так что их скорость порожнем безразлична, если же будут представлены специальные требования, то и размеры надо определять по этим требованиям и тогда возможно, что для буксира в 3000 сил придется взять примерно такие же размеры, как для „Zwarte See“.

В таком случае по отношению к шлюзам надо последовать примеру того легендарного немецкого профессора, который в своей двери прорезал две дыры: большую дыру для собаки и маленькую дыру для кошки. Так и тут надо будет сделать два шлюза рядом: один большой длиной примерно 215 м для 200-метровой баржи и малый примерно 75 × 10 × 5.5 для буксирных судов.

Такое раздвоение доставит также значительную экономию в стоимости постройки и значительное удобство и сбережение воды при эксплуатации, ибо малые суда можно будет пропускать без задержек.

Если вы признаете эти соображения заслуживающими изучения, то сообщите мне ваше мнение, я переговорю с ЦНИИВТ или какою иною проектирующей организацией, чтобы разработать эскизные проекты таких буксиров.

О РАВНОВЕСИИ И ДВИЖЕНИИ ТЕЛ НА КАЧАЮЩЕМСЯ КОРАБЛЕ¹

Глава I

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ. АБСОЛЮТНЫЕ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТЕЛ, НАХОДЯЩИХСЯ НА КАЧАЮЩЕМСЯ НА ВОЛНЕНИИ КОРАБЛЕ

§ 1. Корабль на волнении совершает колебательные движения, составляющие его качку.

В своем движении корабль увлекает находящиеся на нем грузы, которые должны или оставаться неподвижными по отношению к кораблю, или же совершать по отношению к кораблю определенное, наперед задаваемое движение, как, например: поршни его механизмов, роторы турбин, якоря динамомашин, башни и орудия при наводке, орудия при откате и накате и пр.

Кроме того, возникают вопросы об удержании, например, орудия или визирной трубы, постоянно наведенной на заданную цель, т. е. сохранении постоянного приданного им направления *в пространстве*, несмотря на качания корабля.

Рассмотрение этих вопросов и составляет цель настоящей статьи.

§ 2. Качания корабля на волнении состоят из следующих движений:

- а) поступательного орбитального движения, общего всем точкам корабля, а значит, такого, какое совершает центр тяжести корабля;
- б) качаний около продольной оси корабля, именуемых *боковой качкой*;
- в) качаний около поперечной оси корабля, именуемых *килевой качкой*;
- г) качаний около вертикальной оси корабля, именуемых *рысканием*.

Все упомянутые здесь оси принимаются неизменными в корабле; они проводятся через центр тяжести корабля так, как указано ниже, и весьма близки к главным осям инерции корабля.

Законы упомянутых колебательных движений известны с довольно грубым приближением, но запись качаний корабля может быть хорошо и точно регистрируема гироскопическими приборами или, еще того точ-

¹ Публикуется впервые по литографированному изданию 1938 г. (Ред.).

нее, фотографируя через щель видимый горизонт, как это делалось мною в 1907 г. на лодке „Уралец“¹ в Черном море при исследовании меткости стрельбы на качке, или на пароходе „Метеор“² во время плавания в Атлантическом океане для исследования действия сестерн Фрама на успокоение боковой качки корабля.

§ 3. В любом курсе теоретической механики можно найти общие формулы, охватывающие учение об относительном покое и относительном движении точки и твердого тела. Эти формулы дают общее решение относящихся к нашему делу вопросов.

В теоретической механике это решение прилагается обыкновенно к рассмотрению движения по отношению к вращающейся Земле (отклонение падающих тел, маятник Фуко, гироскоп Фуко и т. п.).

Но движение корабля на волнении представляет ряд особенностей, пользуясь которыми, можно внести существенные упрощения в общие формулы для применения их к тем частным вопросам, которые возникают относительно корабля и его устройств.

Главнейшие из этих вопросов следующие:

1. Какие добавочные усилия возникают в связях или креплениях разных грузов на корабле или в креплениях корабельных устройств, например, мачт с боевыми марсами или наблюдательными постами?

2. Какие силы надо приложить, чтобы заставить заданное тело двигаться заданным образом по отношению к кораблю?

3. Какие добавочные усилия возникают в связях, например, параллелях, подшипниках и пр., которыми ограничивается свобода движений тела и оно принуждается совершать заданное движение по отношению к кораблю?

4. Каковы законы качаний физического маятника, установленного на корабле, как по отношению к кораблю, так и по отношению к Земле, считаемой неподвижной (кренومتر, тело, подвешенное на кардановом подвесе, и пр.)?

5. Какие усилия надо приложить к телу, определенным образом с кораблем связанному, чтобы заставить это тело двигаться заданным образом или находиться в покое по отношению к Земле (стабилизация разного рода устройств, расчеты подъемных и поворотных механизмов для башен и орудий и т. п.).

6. Воздействие корабля на разного рода гироскопические приборы и обратно.

7. Кроме качаний, как твердое тело, корабль, вследствие работы машины, совершает упругие колебания, обыкновенно весьма малой ампли-

¹ См.: Об опытах стрельбы на качке с канонерской лодки „Уралец“ в 1907 г. Отчет полковника Крылова. СПб., тип. Морск. мин., 1909. (Ред.).

² Отчет Комиссии под председательством генерал-лейтенанта Крылова по исследованию сестерн Фрама на пароходе „Метеор“. СПб., типо-литогр. Морск. мин., 1913. (Ред.).

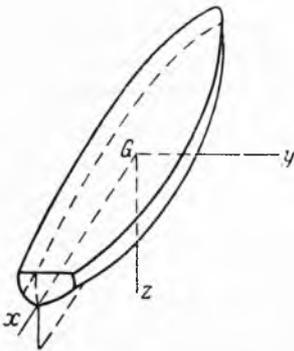
туды, составляющие его вибрацию, которая приводит, например, в колебательное движение картушку компаса или мешает визированию. Для устранения этих влияний устраиваются разного рода антивибрационные приспособления, теория которых находится в непосредственной связи с поставленными здесь вопросами.

Как уже сказано, цель настоящей записки состоит в том, чтобы дать возможно простое, общее и для практических целей достаточно точное решение этих вопросов.

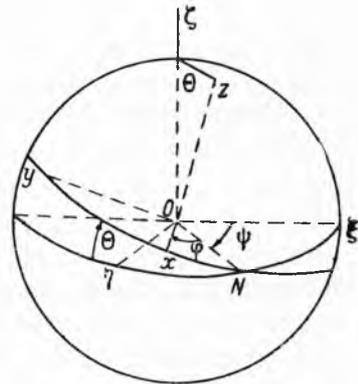
§ 4. Чтобы не отсылать к курсам теоретической механики и иметь принятые в теории корабля и в моей книге „Общая теория гироскопов“¹ обозначения,

здесь дается вывод главнейших общих формул относительного движения в том виде, каким мы будем пользоваться.

Для определения как движений самого корабля, так и положения любой точки по отношению к кораблю в нем берут координатные оси $Gxyz$ (фиг. 1), начало которых G находится в центре тяжести корабля.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

За координатную плоскость xz принимают диаметрально плоскость корабля; за плоскость zy — перпендикулярную к xz плоскость шпангоута, проходящего через центр тяжести G корабля, и наконец, за плоскость xu принимают плоскость, перпендикулярную к сказанным двум, т. е. плоскость грузовой ватерлинии корабля, или, как для простоты и ясности говорят, „плоскость ватерлинии, на корабле накрашенной“.

Прямые пересечения этих взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающихся попарно, образуют координатные оси корабля.

Положительные направления этих осей берем: для оси Gx — в *корму*, для оси Gy — к *правому борту*, для оси Gz — *вниз*, так что расположение осей будет то, которое схематически показано на фиг. 1.

Само собою разумеется, что эти плоскости неизменно связаны с кораблем.

Кроме этих координатных плоскостей и осей, вообразим оси $O\xi\eta\zeta$ (фиг. 2), неизменно связанные с Землей, иначе говоря, неподвижные в пространстве, ибо во всех вопросах, не относящихся к гироскопам и приборам, им аналогичным, мы *Землю считаем неподвижной*.

¹ А. Н. Крылов, Собрание трудов, т. VIII, 1950, стр. 2—275. (Ред.).

Эти неподвижные оси выбираем так, что, когда корабль находится в равновесии и покое (на тихой воде), то точка O совпадает с точкой G , аналогичные оси совпадают между собой.

§ 5. Положение корабля во время движения определяется координатами ξ_0, η_0, ζ_0 его центра тяжести G относительно осей $O\xi\eta\zeta$ и косинусами углов между направлениями осей, как показано в следующей таблице:

	x	y	z	
ξ	a_1	a_2	a_3	(1)
η	b_1	b_2	b_3	
ζ	c_1	c_2	c_3	

Между этими косинусами имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1 \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1 \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

ибо оси $O\xi\eta\zeta$ прямоугольные;

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

ибо оси $Gxyz$ прямоугольные.

Затем

$$\begin{aligned} a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= 0 \\ a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 &= 0 \\ a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Эти равенства выражают взаимную перпендикулярность осей Gx , Gy и Gz .

Наконец,

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 &= 0 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Эти равенства выражают взаимную перпендикулярность осей

$$O\xi, O\eta, O\zeta$$

Из равенств (3) и (4) и (1) следуют равенства

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_1}{b_2 c_3 - c_2 b_3} &= \frac{b_1}{c_2 a_3 - a_2 c_3} = \frac{c_1}{a_2 b_3 - b_2 a_3} = 1 \\ \frac{a_2}{b_3 c_1 - c_3 b_1} &= \frac{b_2}{c_3 a_1 - a_3 c_1} = \frac{c_2}{a_3 b_1 - b_3 a_1} = 1 \\ \frac{a_3}{b_1 c_2 - c_1 b_2} &= \frac{b_3}{c_1 a_2 - a_1 c_2} = \frac{c_3}{a_1 b_2 - b_1 a_2} = 1 \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

Теорема проекций дает следующие соотношения между координатами x , y , z и ξ , η , ζ любой точки m корабля:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + a_1x + a_2y + a_3z \\ \eta &= \eta_0 + b_1x + b_2y + b_3z \\ \zeta &= \zeta_0 + c_1x + c_2y + c_3z\end{aligned}\tag{6}$$

Отсюда, на основании равенств (2) и (3), следует:

$$\begin{aligned}x &= a_1(\xi - \xi_0) + b_1(\eta - \eta_0) + c_1(\zeta - \zeta_0) \\ y &= a_2(\xi - \xi_0) + b_2(\eta - \eta_0) + c_2(\zeta - \zeta_0) \\ z &= a_3(\xi - \xi_0) + b_3(\eta - \eta_0) + c_3(\zeta - \zeta_0)\end{aligned}\tag{7}$$

§ 6. Эйлер показал, что все девять косинусов выражаются через косинусы и синусы трех *независимых между собой* углов, именуемых Эйлеровыми.

Обычный выбор этих углов и обычное расположение осей координат, возникшее из вопросов астрономии, показано на фиг. 2, а именно: воображают вспомогательную сферу произвольного радиуса (в астрономии этот радиус предполагается весьма большим и сфера называется небесной); через центр этой сферы O проводят прямые параллельные координатным осям $O\xi\eta\zeta$ и $Gxyz$, и отмечают точки пересечения этих осей с поверхностью сферы буквами ξ , η , ζ и x , y , z . Плоскости координат пересекают сферу по большим кругам, из которых для ясности на чертеж (фиг. 2) нанесены лишь некоторые. Отмечают точку N пересечения кругов $\xi\eta$ и $xу$, иначе линию ON пересечения плоскостей $\xi O\eta$ и xOy . Точку N по астрономической терминологии называют *узлом*, а линию ON — *линией узлов*. Положение этой линии определяется углом $\psi = \angle ON\xi$, измеряемым дугою ξN . Угол этот считают по направлению от оси $O\xi$ к оси $O\eta$ в плоскости $\xi O\eta$, так что, если бы точка N совпадала с точкой η , то было бы $\psi = 90^\circ$.

Положение плоскости xOy определяется сферическим углом Θ при точке N или, что то же, двугранным углом Θ при ребре ON , считаемым от дуги $N\eta$ по часовой стрелке. Положение оси Ox в плоскости xOy определяется углом $\varphi = \angle NOx$, иначе, дугою $Nx = \varphi$.

Углы Θ , ψ , φ суть Эйлеровы углы, как они берутся в астрономии и, по ее примеру, в теоретической механике.

В астрономии эти углы имеют вполне определенное физическое значение, так, например: если плоскость $\xi O\eta$ есть плоскость эклиптики, а xOy есть плоскость экватора, то угол ψ представляет угол прецессии, угол φ — суточное вращение Земли, Θ — угол наклонности эклиптики к экватору.

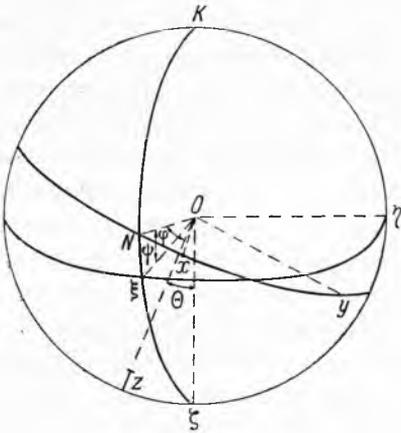
Применяя к сферическим треугольникам, таким как $Nx\xi$, $Nx\eta$, $Nx\xi$, ..., $Nz\xi$, в каждом из которых будут известны две стороны и угол при вершине N между ними, основную формулу сферической тригоно-

метрии, получим следующие выражения косинусов через Эйлеровы углы (фиг. 2):

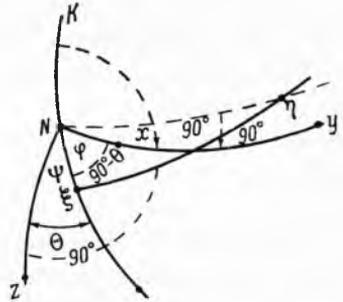
$$\begin{aligned}
 \cos(x\xi) &= a_1 = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \psi \cos \Theta \\
 \cos(x\eta) &= b_1 = \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \Theta \\
 \cos(x\zeta) &= c_1 = \sin \varphi \sin \Theta \\
 \cos(y\xi) &= a_2 = -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \Theta \\
 \cos(y\eta) &= b_2 = -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \Theta \\
 \cos(y\zeta) &= c_2 = \cos \varphi \sin \Theta \\
 \cos(z\xi) &= a_3 = \sin \varphi \sin \Theta \\
 \cos(z\eta) &= b_3 = -\cos \psi \sin \Theta \\
 \cos(z\zeta) &= c_3 = \cos \Theta
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Для кораблей такой выбор Эйлеровых углов мало пригоден, ибо эти углы не имеют прямой связи с качаниями корабля.

Надлежащий выбор представлен на фиг. 3, когда оси z и ζ направлены вниз, ось Ox — в корму, ось Oy — к правому борту.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

В этом случае за линию узлов ON взята прямая пересечения плоскостей xOy и $\eta O\zeta$, которые при покое и равновесии корабля *взаимно перпендикулярны*. Положение точки N или прямой ON определяется углом $\xi ON = \psi$, считаемым в плоскости $\zeta O\xi$ от оси $O\xi$ по часовой стрелке, так что дуга $\xi N = \psi$.

Положение плоскости xOy определяется сферическим углом $KNx = 90^\circ + \Theta$ (фиг. 4), положение оси Ox в этой плоскости определяется углом $NOx = \varphi$ (фиг. 3) или дугой Nx , измеряющей этот угол.

При таком выборе углов, если корабль делает малые размахи качки, то все три угла ψ , φ , Θ будут оставаться малыми и будут иметь физический смысл, а именно: ψ — килевая качка, угол φ — рыскание, Θ — боковая качка.

Поступая подобно предыдущему, т. е. рассматривая сферические треугольники $Nx\xi$, $Nx\eta$, $Nx\zeta$, ..., $Nz\zeta$, будем в каждом из них иметь известный угол при вершине N и две стороны, к нему прилегающие;

противолежащая углу сторона и будет измерять угол ξO_x , ξO_y и т. д. Тогда, пользуясь основной формулой сферической тригонометрии, получим:

$$\begin{aligned}
 \cos(x\check{\zeta}) &= a_1 = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \sin \Theta \\
 \cos(x\check{\eta}) &= b_1 = \sin \varphi \cos \Theta \\
 \cos(x\check{\zeta}) &= c_1 = -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \sin \Theta \\
 \cos(y\check{\zeta}) &= a_2 = -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \sin \Theta \\
 \cos(y\check{\eta}) &= b_2 = \cos \varphi \cos \Theta \\
 \cos(y\check{\zeta}) &= c_2 = \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \sin \Theta \\
 \cos(z\check{\zeta}) &= a_3 = \sin \psi \cos \Theta \\
 \cos(z\check{\eta}) &= b_3 = -\sin \Theta \\
 \cos(z\check{\zeta}) &= c_3 = \cos \psi \cos \Theta
 \end{aligned} \tag{9}$$

Те же самые формулы получаются и в том случае, когда ось z направлена вверх, ось x — в нос, ось y — к левому борту и направление счета углов согласовано с направлением осей, т. е. движением по часовой стрелке на 90° ; ось O_x переходит в O_y , ось O_y таким же движением переходит в O_z и ось O_z переходит в O_x .

Будем для краткости речи сделанный нами выбор Эйлеровых углов называть *корабельным* в отличие от сделанного в § 5 *астрономического*.

§ 7. Выгода сделанного выбора Эйлеровых углов состоит не только в том, что для корабля они имеют реальный смысл, но еще и в том, что при *малых* размахах качки все девять косинусов между осями выражаются весьма просто.

Вообще, угол α называют *малым*, когда при той точности, которая от расчета требуется, можно полагать

$$\sin \alpha = \alpha; \quad \cos \alpha = 1$$

Таким образом, понятие о *малости* угла есть чисто условное, зависящее от точности, которая от расчета требуется.

$$\alpha = 12^\circ = 0.2094; \quad \cos \alpha = 0.978$$

Значит, взяв $\cos \alpha = 1$, мы сделаем погрешность в 2% . В этом случае

$$\sin \alpha = 0.2079$$

абсолютная погрешность, если взять $\sin \alpha = \alpha = 0.2094$, составит 0.0015, относительная $\frac{0.0015}{0.2079} = 0.008 = 0.8\%$.

Разложения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ в ряд суть

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha &= \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120} \dots \\
 \cos \alpha &= 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} \dots
 \end{aligned}$$

Когда мы берем вместо $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ величины $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, то мы делаем *относительную* погрешность для $\sin \alpha$, приблизительно, $\frac{1}{6} \alpha^2$ и для $\cos \alpha$, приблизительно, $\frac{1}{2} \alpha^2$.

Поэтому, если, например, довольствоваться точностью в 2%, то должно быть $\frac{1}{2} \alpha^2 \leq 0.02$, $\alpha^2 \leq 0.04$, $\alpha \leq 0.20$, т. е. $\alpha \leq 12^\circ$ и т. д.

Насколько условно понятие *малый*, возьмем $\alpha = 30^\circ = 0.5236$, тогда $\sin 30^\circ = 0.5000$. Относительная погрешность $\frac{0.0236}{0.50} = 0.046 \approx 4.5\%$.

$\cos 30^\circ = 0.8660$, если взять $\cos 30^\circ = 1.000$, то относительная погрешность будет

$$\frac{0.134}{0.866} = 0.15 = 15\%$$

Но если брать

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

то $\cos 30^\circ = 1 - 0.5 \cdot (0.5236)^2 = 1 - 0.1370 = 0.8630$, относительная погрешность $\frac{0.1370}{0.8660} = 0.016 = 1.6\%$.

Из этих примеров видно, что при такой качке, т. е. когда

$$\Theta \leq 12^\circ; \quad \psi \leq 5^\circ; \quad \varphi \leq 3^\circ$$

иначе

$$\Theta \leq \frac{1}{5}; \quad \psi \leq \frac{1}{12}; \quad \varphi \leq \frac{1}{20}$$

можно брать

$$\sin \Theta = \Theta; \quad \cos \Theta = 1$$

$$\sin \psi = \psi; \quad \cos \psi = 1$$

$$\sin \varphi = \varphi; \quad \cos \varphi = 1$$

причем погрешность лишь в $\cos \Theta$ может составить 2%, что для всех наших расчетов мощности механизмов для стабилизации более чем достаточно.

Для расчетов креплений по-походному можно довольствоваться более грубым приближением и считать за малое даже углы размахов боковой качки до 30° , — погрешность не превзойдет 15%.

Итак, полагая в формулах (9)

$$\sin \Theta = \Theta; \quad \cos \Theta = 1; \quad \sin \psi = \psi; \quad \cos \psi = \cos \varphi = 1; \quad \sin \varphi = \varphi,$$

получаем следующую таблицу косинусов, точную до членов первого порядка включительно:

	x	y	z
ξ	1	$-\varphi$	ψ
η	φ	1	$-\Theta$
ζ	$-\psi$	Θ	1

(10)

Для всех расчетов мощности механизмов точность этой таблицы вполне достаточна при размахах боковой качки не более 12° на сторону.

Если бы по какой-либо причине было желательно получить большую точность при углах Θ до 30° и при $\psi \leq 7^\circ$; $\varphi \leq 4^\circ$, то для поверительных расчетов можно брать

$$\begin{aligned} \sin \Theta &= \Theta; \quad \cos \Theta = 1 - \frac{\Theta^2}{2}; \quad \sin \psi = \psi; \quad \sin \varphi = \varphi; \\ \cos \psi &= \cos \varphi = 1 \end{aligned}$$

В этом случае таблица косинусов была бы такова:

	x	y	z
ξ	1	$-\varphi$	$\psi \left(1 - \frac{\Theta^2}{2}\right)$
η	$\varphi \left(1 - \frac{\Theta^2}{2}\right)$	$1 - \frac{\Theta^2}{2}$	$-\Theta$
ζ	$-\psi$	Θ	$1 - \frac{\Theta^2}{2}$

(10')

Но эти формулы если и придется применять, то лишь как контрольные.

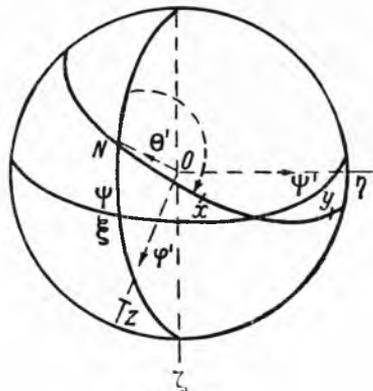
§ 8. Нам понадобятся выражения проекций угловых скоростей p, q, r на оси Gx, Gy, Gz , а также p_1, q_1, r_1 на оси $O\xi, O\eta, O\zeta$.

При „корабельных“ Эйлеровых углах получаем следующие выражения (фиг. 5):

$$\begin{aligned} p &= \psi' \cos(x\eta) + \Theta' \cos \varphi + \varphi' \cos(zx) \\ q &= \psi' \cos(y\eta) + \Theta' \cos(90^\circ + \varphi) + \varphi' \cos(zy) \\ r &= \psi' \cos(z\eta) + \Theta' \cos(NOz) + \varphi' \end{aligned}$$

Заменив $\cos(x\eta), \cos(y\eta), \cos(z\eta)$ их значениями по форме (9) и заметив, что $\cos(zx) = \cos(zy) = 0$, получим:

$$\begin{aligned} p &= \psi' \sin \varphi \cos \Theta + \Theta' \cos \varphi \\ q &= \psi' \cos \varphi \cos \Theta - \Theta' \sin \varphi \\ r &= -\psi' \sin \Theta + \varphi'. \end{aligned} \quad (11)$$



Фиг. 5.

Совершенно так же получим:

$$\begin{aligned} p_1 &= \psi' \cos(\eta\xi) + \varphi' \cos(z\xi) + \Theta' \cos \psi \\ q_1 &= \psi' \cos(\eta\eta) + \varphi' \cos(z\eta) + \Theta' \cos(NO\eta) \\ r_1 &= \psi' \cos(\eta\zeta) + \varphi' \cos(z\zeta) + \Theta' \cos(NO\zeta) \end{aligned}$$

Заметив, что $\cos(\eta\xi)=0$; $\cos(\eta\eta)=1$, $\cos(\eta\zeta)=0$, $\cos(NO\eta)=0$; $\cos(NO\xi)=\cos(90^\circ+\psi)=-\sin\psi$ и заменив прочие косинусы их выражениями по формуле (9), имеем:

$$\begin{aligned} p_1 &= \varphi' \sin\psi \cos\Theta + \Theta' \cos\psi \\ q_1 &= \psi' - \varphi' \sin\Theta \\ r_1 &= \varphi' \cos\psi \cos\Theta - \Theta' \sin\psi \end{aligned} \quad (12)$$

Принимая, что φ' , ψ' , Θ' суть также *малые* величины того же порядка, как φ , ψ , Θ и ограничиваясь членами первого порядка, имеем:

$$\begin{aligned} p &= \Theta' \\ q &= \psi' \\ r &= \varphi' \end{aligned} \quad (11)$$

Совершенно так же будет

$$\begin{aligned} p_1 &= \Theta' \\ q_1 &= \psi' \\ r_1 &= \varphi' \end{aligned} \quad (12')$$

Отсюда видно, что с точностью до членов первого порядка будет

$$\begin{aligned} p &= p_1 = \Theta' \\ q &= q_1 = \psi' \\ r &= r_1 = \varphi' \end{aligned} \quad (12'')$$

Из этих формул видно, что в первом приближении углы Θ , ψ , φ представляют соответственно качку боковую, килевую и рыскание.

§ 9. Нам будут нужны выражения проекций линейной скорости любой точки (x, y, z) корабля на оси координат $O\xi\eta\zeta$ и $Gxyz$.

Мы составим для этих выражений сперва точные формулы, а затем приближенные.

При движении корабля с течением времени изменяются координаты ξ_0 , η_0 , ζ_0 и Эйлеравы углы Θ , ψ , φ , а с ними и косинусы a_1, a_2, \dots, c_3 как функции этих углов; координаты же x, y, z точки, *принадлежащей кораблю или с ним неизменно связанной*, остаются постоянными.

Дифференцируя в этом предположении уравнение (6), имеем:

$$\begin{aligned} V_\xi &= \xi'_0 + a'_1x + a'_2y + a'_3z = \xi'_0 + v_\xi \\ V_\eta &= \eta'_0 + b'_1x + b'_2y + b'_3z = \eta'_0 + v_\eta \\ V_\zeta &= \zeta'_0 + c'_1x + c'_2y + c'_3z = \zeta'_0 + v_\zeta \end{aligned} \quad (13)$$

В этих формулах ξ'_0 , η'_0 , ζ'_0 представляют проекции скорости центра тяжести корабля G , остальные члены — проекции скорости вращательной, т. е. происходящей от угловых качаний корабля. Проекции первой обозначаем через ξ'_0 , η'_0 , ζ'_0 , второй — через v_ξ , v_η , v_ζ .

Из этих формул получаем следующие выражения проекций скорости на оси $Oxyz$, а именно:

$$\begin{aligned}
 V_x &= (a_1\xi'_0 + b_1\eta'_0 + c_1\zeta'_0) + (a_1a'_1 + b_1b'_1 + c_1c'_1)x + (a_1a'_2 + b_1b'_2 + c_1c'_2)y + \\
 &\quad + (a_1a'_3 + b_1b'_3 + c_1c'_3)z \\
 V_y &= (a_2\xi'_0 + b_2\eta'_0 + c_2\zeta'_0) + (a_2a'_1 + b_2b'_1 + c_2c'_1)x + (a_2a'_2 + b_2b'_2 + c_2c'_2)y + \\
 &\quad + (a_2a'_3 + b_2b'_3 + c_2c'_3)z \\
 V_z &= (a_3\xi'_0 + b_3\eta'_0 + c_3\zeta'_0) + (a_3a'_1 + b_3b'_1 + c_3c'_1)x + (a_3a'_2 + b_3b'_2 + c_3c'_2)y + \\
 &\quad + (a_3a'_3 + b_3b'_3 + c_3c'_3)z
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

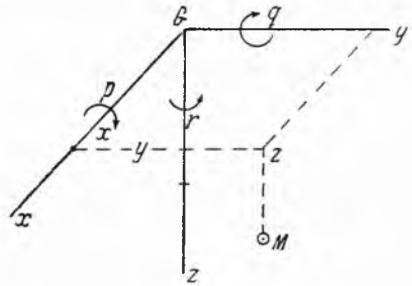
Заметим прежде всего, что на основании формулы (2) будет

$$\begin{aligned}
 a_1a'_1 + b_1b'_1 + c_1c'_1 &= 0 \\
 a_2a'_2 + b_2b'_2 + c_2c'_2 &= 0 \\
 a_3a'_3 + b_3b'_3 + c_3c'_3 &= 0
 \end{aligned}$$

и, значит, в правых частях равенств (14) члены, содержащие эти множители, пропадают.

Чтобы получить дальнейшие упрощения, выведем проекции вращательной скорости на оси координат $Gxyz$ геометрически.

Положим, что в течение бесконечно малого промежутка времени dt корабль повернулся около оси Gx на угол pdt ; тогда координата x точки m не изменится, перемещение же точки m по направлению оси z будет $ypdt$ и по направлению оси Gy оно будет $zpd t$ (фиг. 6). Совершенно так же от бесконечно малого поворота около оси Gy на угол qdt координата y не изменяется, перемещение же по направлению оси Gz будет $-xqdt$ и по оси Gx оно будет $zqdt$. Наконец, бесконечно малый поворот rdt около оси Gz дает, не изменяя координаты z , перемещение по оси Gx , равное $-yrdt$ и по оси Gy , равное $xrdt$, таким образом, полные перемещения будут:



Фиг. 6.

Перемещение

Ось	Угол поворота	По оси Gx	По оси Gy	По оси Gz
Gx	pdt	—	$-zpd t$	$ypdt$
Gy	qdt	$zqdt$	—	$-xqdt$
Gz	rdt	$-yrdt$	$xrdt$	—
Полное перемещение		$(zq - ry) dt$	$(xr - zp) dt$	$(yp - xq) dt$

Разделив на dt , получим проекции скорости перемещения точки m на оси Gx , Gy , Gz , а именно:

$$\begin{aligned} v_x &= zq - yr \\ v_y &= xr - zp \\ v_z &= yp - xq \end{aligned} \quad (15)$$

Сличая с формулами (14), имеем следующие выражения слагающих угловой скорости p , q , r через косинусы a_1, b_1, \dots, c_3 и их производные:

$$\begin{aligned} p &= (a_3 a_2' + b_3 b_2' + c_3 c_2') = -(a_2 a_3' + b_3 b_3' + c_2 c_3') \\ q &= (a_1 a_3' + b_1 b_3' + c_1 c_3') = -(a_3 a_1' + b_3 b_1' + c_3 c_1') \\ r &= (a_2 a_1' + b_2 b_1' + c_2 c_1') = -(a_1 a_2' + b_1 b_2' + c_1 c_2') \end{aligned} \quad (16)$$

Справедливость равенств

$$a_3 a_2' + b_3 b_2' + c_3 c_2' = -(a_2 a_3' + b_2 b_3' + c_2 c_3')$$

и других двух подобных следует из дифференцирования формул (3); в самом деле, дифференцируя последнюю из этих формул, имеем:

$$a_3 a_2' + b_3 b_2' + c_3 c_2' + a_2 a_3' + b_2 b_3' + c_2 c_3' = 0$$

откуда и следует предыдущее равенство; совершенно так же получатся и два других.

Ограничиваясь членами первого порядка из равенств (16), получим равенства (11').

Таким образом, на основании как равенств (15), так и равенств (16), имеем:

$$\begin{aligned} V_x &= (a_1 \xi_0' + b_1 \eta_0' + c_1 \zeta_0') + (qz - ry) \\ V_y &= (a_2 \xi_0' + b_2 \eta_0' + c_2 \zeta_0') + (rx - pz) \\ V_z &= (a_3 \xi_0' + b_3 \eta_0' + c_3 \zeta_0') + (py - qx) \end{aligned} \quad (17)$$

Формулам (13) можно придать другой вид, при котором они не содержат производных a_1', b_1', \dots, c_3' .

Возьмем формулы (17), умножим их соответственно на a_1, a_2, a_3 и сложим; тогда получим:

$$V_{\xi} = \xi_0' + z(a_1 q - a_2 p) + y(a_3 p - a_1 r) + x(a_2 r - a_3 q)$$

умножив на b_1, b_2 и b_3 и сложив, имеем:

$$V_{\eta} = \eta_0' + z(b_1 q - b_2 p) + y(b_3 p - b_1 r) + x(b_2 r - b_3 q) \quad (13')$$

умножив на c_1, c_2, c_3 и сложив, имеем:

$$V_{\zeta} = \zeta_0' + z(c_1 q - c_2 p) + y(c_3 p - c_1 r) + x(c_2 r - c_3 q)$$

Группируя члены иначе, придадим формулам (13') следующий вид:

$$\begin{aligned} V_{\xi} &= \xi'_0 + a_1(qz - ry) + a_2(rx - pz) + a_3(py - qx) \\ V_{\eta} &= \eta'_0 + b_1(qz - ry) + b_2(rx - pz) + b_3(py - qx) \\ V_{\zeta} &= \zeta'_0 + c_1(qz - ry) + c_2(rx - pz) + c_3(py - qx) \end{aligned} \quad (13'')$$

Все формулы (14)—(17) *точные*, т. е. они имеют место при *всяких* значениях Эйлеровых углов и соответствующих им косинусов a_1, b_1, \dots, c_3 .

Если не рассматривать скорости хода корабля, входящей в слагаемые в ξ'_0 , а считаться только с орбитальным движением и качкою, то, ограничиваясь членами первого порядка, т. е. таблицей (10) косинусов и выражениями $p = \Theta'$, $q = \Psi'$, $r = \Phi'$, получим следующие приближенные формулы:

$$\begin{aligned} V_x &= \xi'_0 + z\Psi' - y\Phi' \\ V_y &= \eta'_0 + x\Phi' - z\Theta' \\ V_z &= \zeta'_0 + y\Theta' - x\Psi' \end{aligned} \quad (18)$$

Это будут наши рабочие формулы; контрольными для них будут формулы (17).

§ 10. Для вычисления усилий, действующих на тело, находящееся на качающемся на волнении корабле, нам понадобятся проекции ускорения.

Чтобы составить проекции ускорения на *неподвижные оси координат*, надо продифференцировать формулы (13), считая в них попережнему x, y, z *постоянными*. Когда точка $m(x, y, z)$ по отношению к кораблю не движется, т. е. скреплена с ним неизменно, тогда получаем:

$$\begin{aligned} W_{\xi} &= \xi''_0 + a'_1x + a''_2y + a'''_3z \\ W_{\eta} &= \eta''_0 + b'_1x + b''_2y + b'''_3z \\ W_{\zeta} &= \zeta''_0 + c'_1x + c''_2y + c'''_3z + g \end{aligned} \quad (19)$$

где g есть ускорение силы тяжести, которое надо присовокупить к ускорениям, происходящим от движения корабля, ибо очевидно, что независимо от этого движения тяжесть действует на всякое тело, находящееся на корабле.

Сличая формулы (13) и формулы (13'), имеем равенства

$$\begin{aligned} a'_1 &= a_2r - a_3q; & a'_2 &= a_3p - a_1r; & a'_3 &= a_1q - a_2p \\ b'_1 &= b_2r - b_3q; & b'_2 &= b_3p - b_1r; & b'_3 &= b_1q - b_2p \\ c'_1 &= c_2r - c_3q; & c'_2 &= c_3p - c_1r; & c'_3 &= c_1q - c_2p \end{aligned} \quad (20)$$

Дифференцируя формулы (13''), получим проекции ускорения на неподвижные оси координат

$$W_{\xi} = \xi_0'' + (qz - ry)a_1' + (rx - pz)a_2' + (py - qx)a_3' + a_1(q'z - r'y) + a_2(r'x - p'z) + a_3(p'y - q'x)$$

$$W_{\eta} = \eta_0'' + (qz - ry)b_1' + (rx - pz)b_2' + (py - qx)b_3' + b_1(q'z - r'y) + b_2(r'x - p'z) + b_3(p'y - q'x)$$

$$W_{\zeta} = \zeta_0'' + (qz - ry)c_1' + (rx - pz)c_2' + (py - qx)c_3' + c_1(q'z - r'y) + c_2(r'x - p'z) + c_3(p'y - q'x) + g$$

Умножив первую из этих формул на a_1 , вторую — на b_1 третью — на c_1 , сложив эти произведения и заметив равенства

$$\begin{aligned} a_1a_1' + b_1b_1' + c_1c_1' &= 0; & a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1 \\ a_1a_2' + b_1b_2' + c_1c_2' &= -r; & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 &= 0 \\ a_1a_3' + b_1b_3' + c_1c_3' &= p = q; & a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 &= 0 \end{aligned}$$

и полагая

$$W_x^0 = a_1\xi_0'' + b_1\eta_0'' + c_1\zeta_0''$$

получим:

$$\begin{aligned} a_1W_{\xi} + b_1W_{\eta} + c_1W_{\zeta} &= W_x = W_x^0 - x(q^2 + r^2) + \\ &+ p(zr + qy) + (q'z - r'y) + c_1g \end{aligned}$$

Придавая к правой части $p^2x - prx$, получим:

$$W_x = W_x^0 - x(p^2 + q^2 + r^2) + p(px + qy + rz) + (q'z - r'y) + c_1g$$

Но $p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2$, где ω есть мгновенная угловая скорость корабля; таким образом, получим следующее выражение проекции ускорения точки $m(x, y, z)$ на ось Gx :

$$W_x = W_x^0 + p(px + qy + rz) - x\omega^2 + (q'z - r'y) + c_1g$$

пользуясь круговой перестановкой букв, имеем:

$$\begin{aligned} W_y &= W_y^0 + q(px + qy + rz) - y\omega^2 + (r'x - p'z) + c_2g \\ W_z &= W_z^0 + r(px + qy + rz) - z\omega^2 + (p'y - q'x) + c_3g \end{aligned} \quad (21)$$

Это и суть простейшие выражения проекций ускорения на оси координат Gx, Gy, Gz . Формулы эти точные.

§ 11. Ограничиваясь членами первого порядка, мы имеем на основании таблицы (10):

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + x - y\varphi + z\psi \\ \eta &= \eta_0 + y + x\varphi - z\Theta \\ \zeta &= \zeta_0 + z + y\Theta - x\psi \end{aligned} \quad (22)$$

Дифференцируя эти формулы, имеем следующие выражения проекций скорости на неподвижные оси:

$$\begin{aligned}\xi' &= V_{\xi} = \xi_0' + z\psi' - y\varphi' \\ \eta' &= V_{\eta} = \eta_0' + x\varphi' - z\theta' \\ \zeta' &= V_{\zeta} = \zeta_0' + y\theta' - x\psi'\end{aligned}\quad (23)$$

Дифференцируя еще раз, получим проекции ускорения на неподвижные оси:

$$\begin{aligned}W_{\xi} &= \xi_0'' + z\psi'' - y\varphi'' \\ W_{\eta} &= \eta_0'' + x\varphi'' - z\theta'' \\ W_{\zeta} &= \zeta_0'' + y\theta'' - x\psi'' + g\end{aligned}\quad (24)$$

Само собой разумеется, что эти формулы *приближенные*. Величина g прибавлена, чтобы учесть ускорение силы тяжести.

Ограничиваясь в формулах (21) членами первого порядка, получим:

$$\begin{aligned}W_x &= W_x^0 + z\psi'' - y\varphi'' + g\psi \\ W_y &= W_y^0 + x\varphi'' - z\theta'' + g\theta \\ W_z &= W_z^0 + y\theta'' - x\psi'' + g\end{aligned}\quad (25)$$

Величины

$$\begin{aligned}W_x^0 &= \xi_0'' + \eta_0''\varphi - \zeta_0''\psi \\ W_y^0 &= \eta_0'' + \zeta_0''\theta - \xi_0''\varphi \\ W_z^0 &= \zeta_0'' + \xi_0''\psi - \eta_0''\theta\end{aligned}\quad (26)$$

в том случае, когда ξ_0'' , η_0'' , ζ_0'' малые и произведениями $\xi_0''\theta$, $\xi_0''\psi$, $\eta_0''\varphi$, $\zeta_0''\theta$, $\zeta_0''\psi$, $\zeta_0''\theta$ можно пренебречь, берутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}W_x^0 &= \xi_0'' \\ W_y^0 &= \eta_0'' \\ W_z^0 &= \zeta_0''\end{aligned}\quad (27)$$

Здесь необходимо заметить, что величины W_{ξ} , W_{η} , W_{ζ} проекций ускорения на *неподвижные* координатные оси $O\xi\eta\zeta$ суть вместе с тем и слагающие ускорения точки m по этим осям, но это не имеет места для W_x , W_y , W_z , которые не представляют слагающих ускорения точки m по отношению к кораблю.

Точка $m(x, y, z)$ по отношению к кораблю, как с ним неизменно связанная, находится в *покое*, но во всякий момент времени оси координат Gx, Gy, Gz имеют в пространстве определенные направления. Величины W_x, W_y, W_z и представляют проекции абсолютного ускорения, т. е. ускорения по отношению к осям $O\xi\eta\zeta$ на сказанные направления.

§ 12. Положим, что на корабле имеется какое-нибудь твердое тело, с кораблем неизменно связанное и, значит, увлекаемое кораблем, так что по отношению к кораблю это тело неподвижно.

Всякое тело по отношению к другому имеет шесть степеней свободы; чтобы оно было неподвижно, надо установить не менее шести степеней связи. Когда тело увлекается кораблем, то эти связи будут испытывать от тела некоторые напряжения и, в свою очередь, оказывать на тело равные и противоположные реакции. Надо указать общий способ расчета этих реакций, иначе креплений тела к кораблю.

Пусть точка (x, y, z) есть одна из частиц тела, и пусть масса этой частицы есть m .

Произведение массы частицы на ее ускорение, взятое с обратным знаком, называется силой инерции частицы, так что для массы m , когда ее ускорение имеет слагающие W_ξ, W_η, W_ζ , слагающие силы инерции будут

$$-mW_\xi; \quad -mW_\eta; \quad -mW_\zeta$$

Исчислим главный вектор и главный момент сил инерции для заданного тела.

Отметим точку Q — центр тяжести тела — и проведем через эту точку координатные оси Qe, Qf, Qh соответственно параллельным осям $Oxyz$ корабля. Пусть координаты точки Q относительно этих осей будут x_0, y_0, z_0 .

Обозначим через e, f, h координаты частицы m относительно осей $Qefh$; тогда будет

$$x = x_0 + e; \quad y = y_0 + f; \quad z = z_0 + h \quad (28)$$

ибо оси $Qefh$ соответственно параллельны осям $Gxyz$; тогда формулы (25) примут вид

$$\begin{aligned} W_x &= (W_x^0 + g\psi) + (z_0 + h)\psi'' - (y_0 + f)\varphi'' \\ W_y &= (W_y^0 + g\theta) + (x_0 + e)\varphi'' - (z_0 + h)\theta'' \\ W_z &= (W_z^0 + g) + (y_0 + f)\theta'' - (x_0 + e)\psi'' \end{aligned}$$

Умножим эти выражения на $-m$ и возьмем суммы для всех частиц тела; получим проекции главного вектора сил инерции на оси Qe, Qf, Qh ; обозначим эти проекции через F_e, F_f, F_h , так что будет

$$\begin{aligned} F_e &= - \{ (W_x^0 - g\psi) \sum m + \psi'' [z_0 \sum m + \sum mh] - \varphi'' [y_0 \sum m + \sum mf] \} \\ F_f &= - \{ [W_y^0 + g\theta] \sum m + \varphi'' [x_0 \sum m + \sum me] - \theta'' [z_0 \sum m + \sum mh] \} \\ F_h &= - \{ [W_z^0 + g] \sum m + \theta'' [y_0 \sum m + \sum mf] - \psi'' (x_0 \sum m + \sum me) \} \end{aligned} \quad (29)$$

но $\sum m$ есть масса всего тела M , а суммы

$$\sum me + \sum mf + \sum mh = 0$$

ибо это суть моменты тела относительно плоскостей координат; плоскости же эти проведены через центр тяжести тела Q ; таким образом, будет

$$\begin{aligned} F_e &= -M[(W_x^0 - g\psi) + z_0\psi'' - y_0\varphi''] \\ F_f &= -M[(W_y^0 + g\Theta) + x_0\varphi'' - z_0\Theta''] \\ F_h &= -M[(W_z^0 + g) + y_0\Theta'' - x_0\psi''] \end{aligned} \quad (29')$$

Точка приложения этих сил есть Q .

Проекция главного момента сил инерции на оси Qe , Qf , Qh , иначе моменты сил инерции относительно этих осей, которые мы обозначим через K , L , N , будут

$$\begin{aligned} K &= -\sum m(W_z f - W_y h) \\ L &= -\sum m(W_x h - W_z e) \\ N &= -\sum m(W_y e - W_x f) \end{aligned}$$

Подставляя, вместо W_x , W_y , W_z их величины и замечая, что $\sum me = \sum mf = \sum mh = 0$, получим:

$$\begin{aligned} K &= -[\Theta'' \epsilon_m (f^2 + h^2) - \psi'' \sum m e f - \varphi'' \sum m e h] \\ L &= -[\psi'' \epsilon_m (h^2 + e^2) - \varphi'' \sum m h f - \Theta'' \sum m e f] \\ N &= -[\varphi'' \epsilon_m (e^2 + f^2) - \Theta'' \sum m e h - \psi'' \sum m f h] \end{aligned}$$

Суммы

$$\sum m (f^2 + h^2), \quad \sum m (h^2 + e^2), \quad \sum m (e^2 + f^2)$$

представляют моменты инерции тела относительно осей Qe , Qf , Qh ; обозначим их соответственно через I_e , I_f , I_h , так что

$$I_e = \sum m (f^2 + h^2); \quad I_f = \sum m (h^2 + e^2); \quad I_h = \sum m (e^2 + f^2) \quad (30)$$

Суммы $\sum m e f$, $\sum m e h$, $\sum m f h$ представляют так называемые центробежные моменты; обозначим их соответственно через

$$I_{ef} = \sum m e f; \quad I_{eh} = \sum m e h; \quad I_{fh} = \sum m f h \quad (30')$$

При таких обозначениях получим:

$$\begin{aligned} K &= -\{ I_e \Theta'' - I_{ef} \psi'' - I_{eh} \varphi'' \} \\ L &= -\{ I_f \psi'' - I_{fh} \varphi'' - I_{ef} \Theta'' \} \\ N &= -\{ I_h \varphi'' - I_{eh} \Theta'' - I_{fh} \psi'' \} \end{aligned} \quad (31)$$

Положим, что тело удерживается неподвижным по отношению к кораблю некоторыми связями, реакции которых обозначим через S_1 , S_2 , ..., S_n , и точки их приложения пусть будут

$$(e_1, f_1, h_1), \quad (e_2, f_2, h_2), \quad \dots, \quad (e_n, f_n, h_n) \quad (32)$$

Обозначим через $X_1Y_1Z_1, X_2Y_2Z_2, \dots, X_nY_nZ_n$ проекции этих реакций на оси координат Gx, Gy, Gz или, что то же, Qe, Qf, Qh , тогда проекции главного вектора этих связей будут

$$\begin{aligned} R_e &= X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum X \\ R_f &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum Y \\ R_h &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum Z \end{aligned} \quad (33)$$

проекции главного момента связей обозначим через M_e, M_f, M_h ; тогда будет

$$\begin{aligned} M_e &= \sum (Zf - Yh) \\ M_f &= \sum (Xh - Ze) \\ M_h &= \sum (Ye - Xf) \end{aligned} \quad (34)$$

Так как тело по отношению к кораблю, по предположению, находится в равновесии и покое, то реакции связей должны быть таковы, чтобы сообщить телу то самое движение, которое оно имеет, будучи увлекаемо кораблем; значит, должны иметь место равенства, выражающие условия равновесия сил инерции и реакций связей, т. е.

$$\begin{aligned} F_e + \sum X &= 0 \\ F_f + \sum Y &= 0 \\ F_h + \sum Z &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} K + \sum (Zf - Yh) &= 0 \\ L + \sum (Xh - Ze) &= 0 \\ N + \sum (Ye - Xf) &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь необходимо заметить, что в большей части случаев направления реакций связей по отношению к осям $Gxyz$, или, что то же, осям $Qefh$, известны и остаются при качке корабля неизменными, так что неизвестными являются лишь величины S_1, S_2, \dots, S_n этих реакций.

Пусть косинусы углов, составляемые направлениями реакций с осями координат, суть

$$\lambda_1\mu_1\nu_1, \lambda_2\mu_2\nu_2, \dots, \lambda_n\mu_n\nu_n \quad (37)$$

Тогда будет

$$\begin{aligned} X_1 &= S_1\lambda_1; & X_2 &= S_2\lambda_2; & X_n &= S_n\lambda_n \\ Y_1 &= S_1\mu_1; & Y_2 &= S_2\mu_2; & Y_n &= S_n\mu_n \\ Z_1 &= S_1\nu_1; & Z_2 &= S_2\nu_2; & Z_n &= S_n\nu_n \end{aligned} \quad (38)$$

тогда уравнения (35) и (36) можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} F_e + \sum_k S_k \lambda_k &= 0 \\ F_f + \sum_k S_k \mu_k &= 0 \\ F_h + \sum_k S_k \nu_k &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} K + \sum_k S_k (f_k \nu_k - h_k \mu_k) &= 0 \\ L + \sum_k S_k (h_k \lambda_k - e_k \nu_k) &= 0 \\ N + \sum_k S_k (e_k \mu_k - f_k \lambda_k) &= 0 \end{aligned} \quad (40)$$

в которых неизвестными являются S_1, S_2, \dots, S_n .

Часто уравнений (39) и (40) для определения реакций недостаточно; тогда недостающие уравнения доставляются рассмотрением упругих свойств самого тела и тех связей, которыми оно с кораблем скреплено. При составлении по правилам учения о сопротивлении материалов в этих уравнениях надо причислять к числу *внешних* сил (например, давлению) силы инерции, принимаемые за внешнюю нагрузку; величина проекций этих сил для каждого элемента m тела составляет

$$-mW_x; \quad -mW_y; \quad -mW_z$$

Эти силы, действующие на *связи* и происходящие от инерции каждой частицы тела, *включают* и действие силы тяжести, слагающие ускорения которой g входят в состав W_x, W_y, W_z в виде членов, содержащих множитель g , поэтому *не следует засчитывать еще отдельно нагрузку от силы тяжести или веса*.

Эти общие правила применимы во всех частных случаях, на которых здесь останавливаться не будем. Заметим лишь, что, взяв для выражений W_x, W_y, W_z выражения (21) и для p, q, r — их точные величины, можно было бы составить и *точные* уравнения (39) и (40); мы получили бы тогда так называемые уравнения Эйлера движения твердого тела, на чем также останавливаться не будем.

§ 13. В выражения ускорений вошли величины $\Theta'', \psi'', \varphi''$ вторых производных от тех функций, коими выражается зависимость углов Θ, ψ, φ от времени t . Эта зависимость предполагается *заданной*.

Для расчета креплений большей частью просто задают наибольшие амплитуды размахов, наблюдавшиеся для кораблей того типа, который рассматривается при разных условиях его плавания.

С грубым, но достаточным для целей практики приближением можно принимать, что амплитуда Θ не превосходит 30° ; килевая качка составит на такой зыби около 7° , рыскание около 4° .

Боковая качка выражается, вообще, формулой вида

$$\Theta = A \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha \right) + B \cos \left(\frac{2\pi t}{T} + \beta \right) \quad (41)$$

в которой τ_1 есть видимый или кажущийся период волны, T есть период свободных колебаний корабля на тихой воде.

Наибольшая амплитуда на каждую сторону может достигать значения

$$\Theta_{\max} = A + B$$

и тогда можно принять

$$A = \frac{1}{3} \Theta_{\max}; \quad B = \frac{2}{3} \Theta_{\max} \quad (42)$$

Видимый или кажущийся период зависит от *истинного* периода волны, *скорости* хода корабля и его *курса* по отношению к бегу волн.

Истинный период волн для правильной зыби связан с длиной волны λ следующим соотношением:

$$\tau = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}} \quad (43)$$

где g есть ускорение силы тяжести; так, например, при длине волны $\lambda = 100$ м будет

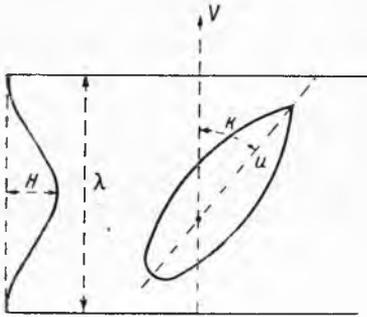
$$\tau = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 100}{9.8}} = 8 \text{ сек.}$$

Скорость бега волн V выражается формулами

$$V = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{g\tau}{2\pi} \quad (44)$$

так, в нашем случае будет

$$V = \frac{100}{8} = \frac{9.8 \cdot 8}{2\pi} = 12.5 \text{ м/сек.} = 25 \text{ узлов}$$



Фиг. 7.

Из фиг. 7 ясно, что если скорость хода корабля есть v , курс его, считаемый от направления бега волн, k , то видимая скорость бега волны по борту корабля будет

$$V - v \cos k$$

и видимый период τ_1 будет выражаться формулой

$$\tau_1 = \frac{\lambda}{V - v \cos k} = \frac{\lambda}{1 - \frac{v}{V} \cos k} = \frac{\tau}{1 - \frac{v}{V} \cos k} \quad (45)$$

Так, например, если скорость хода корабля 18 узлов, курс его $k = 60^\circ$, то будет в нашем случае

$$\tau_1 = \frac{8}{1 - \frac{18}{25} \cos 60^\circ} = \frac{8}{1 - \frac{9}{25}} = 12.5 \text{ сек.}$$

Если же корабль идет с той же скоростью, но курсом $k = 120^\circ$, то будет

$$\tau_1 = \frac{8}{1 - \frac{18}{25} \cos 120^\circ} = \frac{8}{1 + \frac{9}{25}} \approx 6 \text{ сек.}$$

Необходимо заметить, что в случае, когда

$$0.9 \leq \frac{\tau_1}{T} \leq 1.1$$

размахи боковой качки становятся настолько большими, что корабль будет вынужден или изменить свой ход, или изменить свой курс, или и то и другое.

Килевая качка состоит только из вынужденных колебаний и выражается, вообще, формулой

$$\psi = C \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \gamma \right) \quad (46)$$

причем наибольшая амплитуда C не превосходит $7^\circ = \frac{1}{8}$, ибо при большей амплитуде приходится или изменять курс, или изменять ход, или изменять и то и другое, чтобы, *уходя* от волны, иметь ее не прямо в корму, а в „раковину“ (курсовой угол около $30-45^\circ$), а идя навстречу волне, если нельзя держать в „разрез“ волны (курсовой угол 180°), то встречать волну „скулой“ (курсовой угол 150°).

Рыскание φ выражается формулой

$$\varphi = D \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \delta \right) \quad (47)$$

причем наибольшая амплитуда D не превышает 5° , обыкновенно даже $D \leq 3^\circ$.

Наибольшее рыскание происходит на *попутной* зыби (курсовой угол $k=0^\circ$), в особенности, когда волна обгоняет корабль.

Отсюда видно, насколько изменчивы в зависимости от курса, скорости хода, периода волн и прочего ускорения Θ'' , ψ'' , φ'' , и насколько бесполезно развивать более точные формулы, нежели те приближенные, которые приведены выше.

Точные формулы приведены для того, чтобы можно было, произведя контрольное вычисление, видеть пределы погрешностей, происходящие от пренебрежения членами порядка выше первого.

§ 14. *Орбитальное движение* корабля происходит в *плоскости бега волн*, в общем случае по эллиптической орбите с периодом, равным *видимому* периоду волн, но так как полуоси этого эллипса обыкновенно не превосходят *половины высоты волны*, то можно, так сказать, „с запасом“, принимать это движение за круговое и полагать

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{2} H \cos k \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \varepsilon \right) \\ r_0 &= \frac{1}{2} H \sin k \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \varepsilon \right) \\ \zeta_0 &= \frac{1}{2} H \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \varepsilon \right) \end{aligned} \quad (48)$$

где k есть курс корабля, считаемый от направления бега волн, и H — высота волны.

Высота волны H для очень крупной зыби составляет около $\frac{1}{20}$ от длины волны λ , в открытом же море $H \approx \frac{1}{25} \lambda$.

Таким образом, в изложенных в предыдущих параграфах выводах заключается всё, что нужно для расчета постоянных креплений судовых устройств и для закрепления разного рода грузов на корабле. Ход корабля мы считали равномерным и прямолинейным, случай же, когда корабль описывает циркуляцию или поворот, будет рассмотрен ниже.

Глава II

СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА СТАБИЛИЗОВАННОЕ ТЕЛО

§ 15. В предыдущих параграфах рассмотрен простейший случай, именно, равновесия и покоя тела по отношению к кораблю, качающемуся на волнении.

Перейдем теперь к рассмотрению следующего общего вопроса. *Тело должно двигаться заданным способом по отношению к кораблю, качающемуся на волнении, причём задано устройство связей, вынуждающих тело принимать заданное движение. Требуется определить реакции связей и те силы, которые надо к телу приложить.*

Мы попрежнему предположим, что ход корабля равномерный и прямолинейный: поэтому все движения по отношению к кораблю будут те же самые, как если бы он хода не имел, а лежал бы по отношению к направлению бега волн под заданным курсом, а период волн был бы не τ , а τ_1 , т. е. видимый, соответствующий действительному ходу и курсу корабля.

Сохраним для корабля те же оси координат Gx, Gy, Gz , которые указаны в § 4, и те же неподвижные в пространстве оси $O\xi\eta\zeta$.

Когда мы рассматривали, что тело с кораблем скреплено, то мы приняли, что оси в теле Qe, Qf, Qh соответственно параллельны осям Gx, Gy, Gz , около которых происходят качания Θ, ψ, φ , ибо тело на корабле закреплено, и мы в теле можем выбрать оси Qe, Qf, Qh указанным образом.

Но в случае, который мы теперь рассматриваем, такого выбора сделать нельзя, ибо эти оси в тех телах, с которыми мы будем иметь дело (например: дальномерные или визирные посты, башни, орудийные станки и т. п.), нельзя брать произвольно.

Все эти тела имеют плоскость симметрии, которая при креплении по-походному совпадает с диаметральной плоскостью корабля, а при визировании или при наводке орудия или башни составляет с нею курсовой угол σ , считаемый от носовой части от 0 до 180° вправо или влево, или, как для нас удобнее, от 0 до 360° вправо, т. е. против часовой стрелки, если смотреть на палубу сверху.

Ясно, что этот угол не остается малым, и хотя алгебраически он и складывается с углом φ , но нельзя во всех предыдущих формулах писать $\sigma + \varphi$, вместо φ .

Надо распорядиться так, чтобы качания засчитывались отдельно и их амплитуда оставалась малой, а курсовой угол или угол наводки считался отдельно; это тем более необходимо, что рыскание φ зависит от волны и есть периодическая функция времени, а угол наводки σ зависит не только от движения своего корабля, но и от движения цели.

Чтобы сделать указанное подразделение, надо ввести вспомогательные оси координат $Gx_1y_1z_1$, причем ось Gz_1 совпадает с осью Gz ; оси же Gx_1 и Gy_1 располагаются (фиг. 8) на плоскости Gxy , которая совпадает с плоскостью Gx_1y_1 ; качания корабля и надо относить к осям Gx_1y_1 , так что они будут:

$$\begin{aligned} \text{около оси } Gx_1 \quad \Theta_1 &= \Theta \cos \sigma - \psi \sin \sigma \\ \text{около оси } Gy_1 \quad \psi_1 &= \Theta \sin \sigma + \psi \cos \sigma \\ \text{около оси } Gz_1 \quad \varphi_1 &= \varphi \end{aligned} \quad (49)$$

Осям Gx_1, Gy_1, Gz_1 соответствуют в пространстве оси $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ и в теле — оси $Qefh$. По отношению к этим последним осям, как неизменно связанным с телом, координаты любой точки тела будут величины постоянные, положение же осей $Qefh$ будем задавать по отношению к осям $Gx_1Gy_1Gz_1$.

Положение осей Gx_1, Gy_1, Gz_1 по отношению к осям $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ будет определяться:

1) координатами $\xi_{1,0}\eta_{1,0}\zeta_{1,0}$ центра тяжести g корабля относительно осей $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, причем будет

$$\begin{aligned} \xi_{1,0} &= \xi_0 \cos \sigma - \eta_0 \sin \sigma \\ \eta_{1,0} &= \eta_0 \sin \sigma + \xi_0 \cos \sigma \\ \zeta_{1,0} &= \zeta_0 \end{aligned} \quad (50)$$

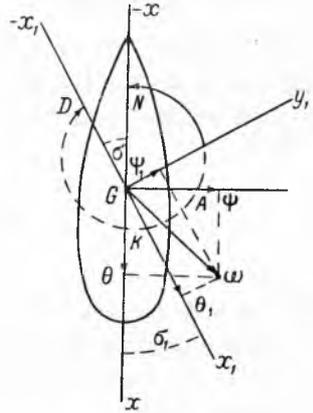
2) Эйлеровыми углами $\Theta_1, \psi_1, \varphi_1$, которые выражаются формулами (49) и остаются малыми, когда углы Θ, ψ и φ малы.

Обозначая косинусы углов между осями ξ_1, η_1, ζ_1 и осями x_1, y_1, z_1 буквами $a_1a_2a_3, \dots, c_3$ будем иметь таблицу:

	x_1	y_1	z_1
ξ_1	a_1	a_2	a_3
η_1	b_1	b_2	b_3
ζ_1	c_1	c_2	c_3

(51)

Эти косинусы будут выражаться через углы $\Theta_1, \psi_1, \varphi_1$ формулами (52), которые получаются заменой в формулах (9) Θ, ψ и φ через Θ_1, ψ_1 и φ_1 , так что получим:



Фиг. 8.

$$\begin{aligned}
 \cos(x_1 \xi_1) &= a_1 = \cos \varphi_1 \cos \psi_1 + \sin \varphi_1 \sin \psi_1 \sin \Theta_1 \\
 \cos(x_1 \eta_1) &= b_1 = \sin \varphi_1 \cos \Theta_1 \\
 \cos(x_1 \zeta_1) &= c_1 = -\cos \varphi_1 \sin \psi_1 + \sin \varphi_1 \cos \psi_1 \sin \Theta_1 \\
 \cos(y_1 \xi_1) &= a_2 = -\sin \varphi_1 \cos \psi_1 + \cos \varphi_1 \sin \psi_1 \sin \Theta_1 \\
 \cos(y_1 \eta_1) &= b_2 = \cos \varphi_1 \cos \Theta_1 \\
 \cos(y_1 \zeta_1) &= c_2 = \sin \varphi_1 \sin \psi_1 + \cos \varphi_1 \cos \psi_1 \sin \Theta_1 \\
 \cos(z_1 \xi_1) &= a_3 = \sin \psi_1 \cos \Theta_1 \\
 \cos(z_1 \eta_1) &= b_3 = -\sin \Theta_1 \\
 \cos(z_1 \zeta_1) &= c_3 = \cos \psi_1 \cos \Theta_1
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

Проекции угловой скорости корабля на оси Gx_1 , Gy_1 , Gz_1 будут выражаться формулами (53), которые получаются из формул (11) указанной выше заменой, так что будет

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \psi'_1 \sin \varphi_1 \cos \Theta_1 + \Theta'_1 \cos \varphi_1 \\
 q_1 &= \psi'_1 \cos \varphi_1 \cos \Theta_1 - \Theta'_1 \sin \varphi_1 \\
 r_1 &= -\psi'_1 \sin \Theta_1 + \varphi'_1
 \end{aligned}
 \tag{53}$$

Все эти формулы точные.

Так как углы Θ_1 , ψ_1 , φ_1 того же порядка малости, как и углы Θ , ψ , φ , то мы будем иметь следующую приближенную таблицу, подобную таблице (10):

	x_1	y_1	z_1	
ξ_1	1	$-\varphi_1$	ψ_1	(54)
η_1	φ_1	1	$-\Theta_1$	
ζ_1	$-\psi_1$	Θ_1	1	

и для угловых скоростей

$$p_1 = \Theta'_1; \quad q_1 = \psi'_1; \quad r_1 = \varphi'_1
 \tag{55}$$

Положение тела Q по отношению к кораблю, иначе осей $Qefh$ по отношению к осям Gx_1y_1z , будем определять координатами $x_{1,0}$, $y_{1,0}$, $z_{1,0}$ точки Q — центра тяжести тела — и тремя Эйлеровыми углами Θ_2 , ψ_2 , φ_2 , выбираемыми аналогично, как это сделано раньше.

Таблицу косинусов будем писать так:

	e	f	h	
x_1	λ_1	λ_2	λ_3	(56)
y_1	μ_1	μ_2	μ_3	
z_1	ν_1	ν_2	ν_3	

причем эти косинусы будут выражаться через углы $\Theta_2, \psi_2, \varphi_2$ формулами (52), в которых надо $\Theta_1, \psi_1, \varphi_1$ заменить на $\Theta_2, \varphi_2, \psi_2$. Формул этих поэтому выписывать не будем.

Также проекции угловой скорости будут:

$$\begin{aligned} \text{на ось } Qe \quad p_2 &= \psi_2' \sin \varphi_2 \cos \Theta_2 + \Theta_2' \cos \psi_2 \\ \text{на ось } Qf \quad q_2 &= \psi_2' \cos \varphi_2 \cos \Theta_2 - \Theta_2' \sin \varphi_2 \\ \text{на ось } Qh \quad r_2 &= -\psi_2' \sin \Theta_1 + \varphi_2' \end{aligned} \quad (57)$$

Соответствующая приближенная таблица и приближенные выражения p_2, q_2, r_2 будут:

	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>h</i>	
x_1	1	$-\varphi_2$	ψ_2	(58)
y_1	φ_2	1	$-\Theta_2$	
z_1	$-\psi_2$	Θ_2	1	

$$p_2 = \Theta_2'; \quad q_2 = \psi_2'; \quad r_2 = \varphi_2' \quad (59)$$

Обозначим через $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \gamma_3$ косинусы углов между осями *Qefh* и осями $O\xi_1 \eta_1 \zeta_1$, так что получим таблицу:

	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>h</i>	
ξ_1	α_1	α_2	α_3	(60)
η_1	β_1	β_2	β_3	
ζ_1	γ_1	γ_2	γ_3	

Тогда на основании таблиц (51) и (56) будем иметь:

$$\begin{aligned} \cos(e\xi_1) &= \alpha_1 = \lambda_1 a_1 + \mu_1 a_2 + \nu_1 a_3 \\ \cos(e\eta_1) &= \beta_1 = \lambda_1 b_1 + \mu_1 b_2 + \nu_1 b_3 \\ \cos(e\zeta_1) &= \gamma_1 = \lambda_1 c_1 + \mu_1 c_2 + \nu_1 c_3 \\ \cos(f\xi_1) &= \alpha_2 = \lambda_2 a_1 + \mu_2 a_2 + \nu_2 a_3 \\ \cos(f\eta_1) &= \beta_2 = \lambda_2 b_1 + \mu_2 b_2 + \nu_2 b_3 \\ \cos(f\zeta_1) &= \gamma_2 = \lambda_2 c_1 + \mu_2 c_2 + \nu_2 c_3 \\ \cos(h\xi_1) &= \alpha_3 = \lambda_3 a_1 + \mu_3 a_2 + \nu_3 a_3 \\ \cos(h\eta_1) &= \beta_3 = \lambda_3 b_1 + \mu_3 b_2 + \nu_3 b_3 \\ \cos(h\zeta_1) &= \gamma_3 = \lambda_3 c_1 + \mu_3 c_2 + \nu_3 c_3 \end{aligned} \quad (61)$$

На основании таблиц (54) и (58) получим следующую приближенную таблицу:

	e	f	h
α_1	$\alpha_1 = 1$	$\alpha_2 = -(\varphi_1 + \varphi_2)$	$\alpha_3 = (\psi_1 + \psi_2)$
β_1	$\beta_1 = (\varphi_1 + \varphi_2)$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = -(\Theta_1 + \Theta_2)$
γ_1	$\gamma_1 = -(\psi_1 + \psi_2)$	$\gamma_2 = (\Theta_1 + \Theta_2)$	$\gamma_3 = 1$

(62)

Заметим, что при стабилизации значениями углов $\Theta_2, \psi_2, \varphi_2$ управляют так, чтобы суммы

$$\Theta_1 + \Theta_2, \psi_1 + \psi_2, \varphi_1 + \varphi_2$$

были возможно близки к нулю, поэтому точность таблицы (62) не только не меньше, но даже больше точности прочих подобных таблиц.

Соответственно таблице (62) будем иметь следующие приближенные выражения проекций угловой скорости на оси Qe, Qf, Qh :

$$\begin{aligned} p_2 &= \Theta'_1 + \Theta'_2 \\ q_2 &= \psi'_1 + \psi'_2 \\ r_2 &= \varphi'_1 + \varphi'_2 \end{aligned} \tag{63}$$

§ 16. Теорема проекций дает следующие выражения:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_{1,0} + x_{1,0}a_1 + y_{1,0}a_2 + z_{1,0}a_3 + e\alpha_1 + f\alpha_2 + h\alpha_3 \\ \eta_1 &= \eta_{1,0} + x_{1,0}b_1 + y_{1,0}b_2 + z_{1,0}b_3 + e\beta_1 + f\beta_2 + h\beta_3 \\ \zeta_1 &= \zeta_{1,0} + x_{1,0}c_1 + y_{1,0}c_2 + z_{1,0}c_3 + e\gamma_1 + f\gamma_2 + h\gamma_3 \end{aligned} \tag{64}$$

Если бы мы эти формулы продифференцировали по времени, то получили бы проекции скорости тела по отношению к Земле. Так как тело Q вообще движется по отношению к кораблю, то в формулах (64) остаются постоянными лишь величины e, f, h ; все же остальные величины суть функции времени.

Таким образом, получим:

$$\begin{aligned} \xi'_1 &= \xi'_{1,0} + (a_1x'_{1,0} + a_2y'_{1,0} + a_3z'_{1,0}) + (x_{1,0}a'_1 + y_{1,0}a'_2 + z_{1,0}a'_3) + \\ &+ e\alpha'_1 + f\alpha'_2 + h\alpha'_3 \end{aligned}$$

и другие две формулы, этой подобные.

Дифференцируя вторично, мы получим:

$$\begin{aligned} \xi''_1 &= \xi''_{1,0} + (a_1x''_{1,0} + a_2y''_{1,0} + a_3z''_{1,0}) + 2(x'_{1,0}a'_1 + y'_{1,0}a'_2 + z'_{1,0}a'_3) + \\ &+ (x_{1,0}a''_1 + y_{1,0}a''_2 + z_{1,0}a''_3) + (e\alpha''_1 + f\alpha''_2 + h\alpha''_3) \end{aligned}$$

и другие две формулы, подобные этой.

Ясно, что ввиду сложности выражений $a'_1, a'_2, \dots, a'_3; a''_1, a''_2, \dots, a''_3; \alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_3; \alpha''_1, \alpha''_2, \dots, \alpha''_3$ эти формулы для расчетов не пригодны и тре-

буют преобразований, подобных изложенным в § 10, но для целей практики в этих преобразованиях нет надобности, ибо скорости движения центра тяжести Q тела по отношению к кораблю обыкновенно или равны нулю, или весьма малы; также малы и ускорения, т. е. величины $x''_{1,0}$, $y''_{1,0}$, $z''_{1,0}$, поэтому вторые члены в правых частях могут быть отброшены; во вторых формулах третьи члены, такие, как

$$2(x'_{1,0}a'_1 + y'_{1,0}a'_2 + z'_{1,0}a'_3)$$

также могут быть отброшены; останется

$$\zeta'_1 = \zeta'_{1,0} + (x_{1,0}a'_1 + y_{1,0}a'_2 + z_{1,0}a'_3) + e\alpha'_1 + fx'_2 + hx'_3$$

По таблице (54) будем в первом приближении иметь:

$$a'_1 = 0; a'_2 = -\varphi'; a'_3 = \psi'_1$$

и по таблице (62)

$$\alpha'_1 = 0; \alpha'_2 = -(\varphi'_1 + \varphi'_2); \alpha'_3 = (\psi'_1 + \psi'_2)$$

Таким образом, получим:

$$\zeta'_1 = \zeta'_{1,0} - y_{1,0}\varphi'_1 + z_{1,0}\psi'_1 - f(\varphi'_1 + \varphi'_2) + h(\psi'_1 + \psi'_2)$$

или, иначе,

$$\zeta'_1 = \zeta'_{1,0} + (z_{1,0} + h)\psi'_1 - (y_{1,0} + f)\varphi'_1 + (h\psi'_2 - f\varphi'_2) \quad (65)$$

Совершенно подобным образом получим:

$$\begin{aligned} \eta'_1 &= \eta'_{1,0} + (x_{1,0} + e)\varphi'_1 - (z_{1,0} + h)\theta'_1 + (e\varphi'_2 - h\theta'_2) \\ \zeta'_1 &= \zeta'_{1,0} + (y_{1,0} + f)\theta'_1 - (x_{1,0} + e)\psi'_1 + (f\theta'_2 - e\psi'_2) \end{aligned} \quad (65')$$

Дифференцируя формулы (65) и отбрасывая члены, содержащие $x'_{1,0}$, $y'_{1,0}$, $z'_{1,0}$, получим проекции ускорения на неподвижные оси координат:

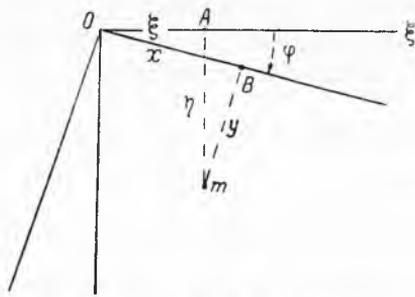
$$\begin{aligned} \zeta''_1 &= \zeta''_{1,0} + (z_{1,0} + h)\psi''_1 - (y_{1,0} + f)\varphi''_1 + (h\psi''_2 - f\varphi''_2) \\ \eta''_1 &= \eta''_{1,0} + (x_{1,0} + e)\varphi''_1 - (z_{1,0} + h)\theta''_1 + (e\varphi''_2 - h\theta''_2) \\ \zeta''_1 &= \zeta''_{1,0} + (y_{1,0} + f)\theta''_1 - (x_{1,0} + e)\psi''_1 + (f\theta''_2 - e\psi''_2) \end{aligned} \quad (66)$$

§ 17. Все приближенные формулы, которыми мы при расчетах будем пользоваться, мы получили из точных, что потребовало довольно длинных выкладок, постоянного применения сферической тригонометрии и пользования вспомогательной сферой, в которой инженеры обыкновенно навыка не имеют. Спрашивается, нельзя ли вывести все формулы первого приближения, не переходя через точные, а непосредственно?

Покажем такой вывод. Для этого стоит только заметить, что плоскости координат zx , xy , yz при „малых“ размахах качки составляют „малые“ углы с плоскостями $\zeta\xi$, $\xi\eta$, $\zeta\eta$, следовательно, если ограничи-

ваться членами первого порядка, то эти плоскости можно принимать параллельными между собою (фиг. 9—11).

Обозначив координаты точки m , как показано на фиг. 9, имеем по теореме проекций:



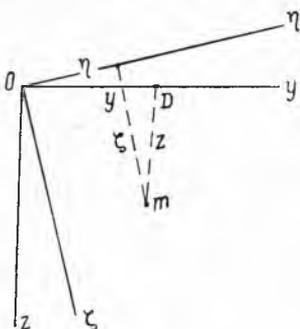
Фиг. 9.

$$\begin{aligned}\xi &= x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ \eta &= x \sin \varphi + y \cos \varphi\end{aligned}$$

Из фиг. 10, положив $\Theta = \eta Oy$, имеем:

$$\begin{aligned}\eta &= y \cos \Theta - z \sin \Theta \\ \zeta &= y \sin \Theta + z \cos \Theta\end{aligned}$$

а из фиг. 11



Фиг. 10.

$$\begin{aligned}\zeta &= z \cos \psi - x \sin \psi \\ \xi &= z \sin \psi + x \cos \psi\end{aligned}$$

Стоит только сопоставить эти формулы с формулами

$$\begin{aligned}\xi - \xi_0 &= a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ \eta - \eta_0 &= b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ \zeta - \zeta_0 &= c_1 x + c_2 y + c_3 z\end{aligned}$$

и положить

$$\begin{aligned}\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 &= 0 & \sin \Theta &= \Theta \\ \cos \Theta &= \cos \varphi = \cos \psi = 1 & \sin \varphi &= \varphi \\ & & \sin \psi &= \psi\end{aligned}$$

и мы получим следующую таблицу косинусов:

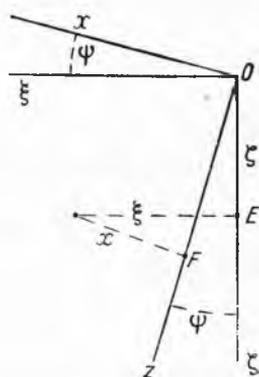
	x	y	z
ξ	1	$-\varphi$	ψ
η	φ	1	$-\Theta$
ζ	$-\psi$	Θ	1

(67)

Это есть как раз таблица (10), являющаяся основной в нашем вопросе.

Из этой таблицы следует:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + x - y\varphi + z\psi \\ \eta &= \eta_0 + x\varphi + y - z\Theta \\ \zeta &= \zeta_0 - x\psi + y\Theta + z\end{aligned}\tag{68}$$



Фиг. 11.

Если точка m по отношению к кораблю неподвижна, то, дифференцируя эти формулы и считая x, y, z от времени не зависящими, получим проекции скорости на оси $Q\xi\eta\zeta$:

$$\begin{aligned}\xi' &= V_{\xi} = \xi'_0 - y\varphi' + z\psi' \\ \eta' &= V_{\eta} = \eta'_0 + x\varphi' - z\theta' \\ \zeta' &= V_{\zeta} = \zeta'_0 - x\psi' + y\theta'\end{aligned}\quad (69)$$

Это суть формулы (23).

Поступая подобным образом, получим все приближенные формулы, которые мы имели.

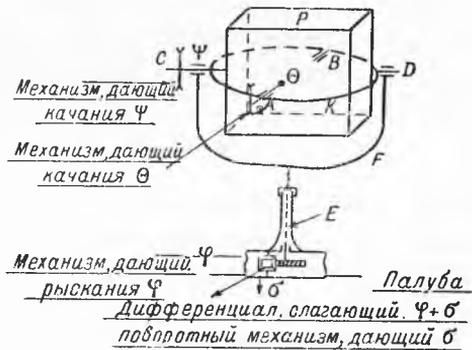
Глава III

СПОСОБЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ТЕЛ, НАХОДЯЩИХСЯ НА КАЧАЮЩЕМСЯ НА ВОЛНЕНИИ КОРАБЛЕ

§ 18. При стабилизации какого-либо тела на корабле необходимо, чтобы оно обладало по отношению к кораблю всеми тремя степенями свободы, соответствующими вращательному движению.

Положим, что дело идет о визирном или дальномерном poste. Связь такого поста с кораблем может быть двух типов.

1. Пост подвешен на цапфах A и B (фиг. 12) к кольцу K кардановского подвеса. Цапфы этого кольца лежат в подцапфенниках C и D вилки F , снабженной постаментом E , поставленным на прикрепленный к палубе погон или штыр, подобный боевому штыру орудийной установки.



Фиг. 12.

Таким образом, пост имеет три степени свободы:

- он может качаться около своих цапф A и B независимо от качаний кольца K ;
- кольцо K вместе с постом может качаться около цапф C и D кольца K ;
- вилка F , несущая всю систему, может поворачиваться около оси E , перпендикулярной к плоскости погона, причем захваты или боевой штыр удерживают ее от опрокидывания.

Все три оси, около которых вращение может происходить, регулируются так, чтобы они пересекались в одной точке, а пост уравнивается так, чтобы эта точка совпадала с его центром тяжести, который, таким образом, остается неподвижным по отношению к кораблю.

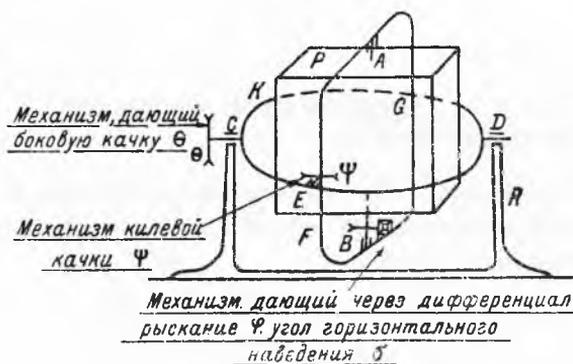
Обыкновенно ставят пост так, чтобы его центр тяжести лежал в диаметральной плоскости корабля, так что будет

$$x_{1,0} = \text{const.}; y_{1,0} = 0; z_{1,0} = \text{const.}$$

Поворотом около оси E вилке придается горизонтальное наведение σ и, кроме того, через дифференциал — качание φ_2 .

Другие два качания Θ_2 и ψ_2 совершаются около осей AB и CD которые можно принять за оси Ql и Qf тела.

2. Второй тип установки изображен схематически на фиг. 13. К палубе прикреплена рама R , несущая подцапфенники C и D кольца K ,



Фиг. 13.

несущего подцапфенники E и G для цапф кольца F , плоскость которого при равновесии и покое совпадает с плоскостью шпангоута. В кольце F укреплен подпятник B и подшипник A для цапф A и B поста P .

Как видно, разница со схемой фиг. 12 состоит в том, что здесь ось CD , около которой стабилизируется боковая качка, занимает постоянное положение

относительно корабля; наводка же и стабилизирование рыскания происходят около цапф A и B самого поста.

Само собою разумеется, что и та и другая схемы заключают механизмы, не имеющие между собою существенной разницы, ибо они исполняют одинаковые функции, но, повидимому, схема фиг. 12 имеет то преимущество, что механизмы горизонтального наведения и уничтожения рыскания, работающие через дифференциал, установлены на палубе; такая установка более надежна, нежели на раме F при схеме фиг. 13.

§ 19. Спрашивается, какую работу будут при стабилизации нести механизмы, сообщающие качательные движения посту, и какие усилия эти механизмы должны будут преодолевать.

Вообразим сперва простейший случай, а именно, что массы колец кардановского подвеса и поворотной рамы весьма малы по сравнению с массой самого поста.

При указанных выше схемах пост предполагается уравновешенным так, что центр тяжести его остается по отношению к кораблю неподвижным; следовательно, в формулах (64)

$$\xi_1 = \xi_{1,0} + a_1 x_{1,0} + a_2 y_{1,0} + a_3 z_{1,0} + e x_1 + f x_2 + h x_3$$

$$\gamma_1 = \gamma_{1,0} + b_1 x_{1,0} + b_2 y_{1,0} + b_3 z_{1,0} + e\beta_1 + f\beta_2 + h\beta_3$$

$$\zeta_1 = \zeta_{1,0} + c_1 x_{1,0} + c_2 y_{1,0} + c_3 z_{1,0} + e\gamma_1 + f\gamma_2 + h\gamma_3$$

величины $x_{1,0}$, $y_{1,0}$, $z_{1,0}$ будут постоянными, так что их производные

$$x'_{1,0} = y'_{1,0} = z'_{1,0} = x''_{1,0} = y''_{1,0} = z''_{1,0} = 0$$

Точно так же при правильной стабилизации поста он никаких *вращательных* движений относительно Земли, вследствие качаний корабля, не имеет, значит, все косинусы между осями e , f , h поста и неподвижными осями в пространстве $O\xi\eta\zeta$ остаются постоянными и их производные равны нулю; таким образом, при стабилизации будет

$$\zeta'_1 = \zeta'_{1,0}; \quad \gamma'_1 = \gamma'_{1,0}; \quad \zeta''_1 = \zeta''_{1,0}$$

$$\zeta''_1 = \zeta''_{1,0}; \quad \gamma''_1 = \gamma''_{1,0}; \quad \zeta'''_1 = \zeta'''_{1,0}$$

и остаются соответствующие этим ускорениям усилия

$$M\zeta''_{1,0}; \quad M\gamma''_{1,0}; \quad M\zeta'''_{1,0}$$

которые и воспринимаются *цапфами* подвесов, а на механизмы, производящие стабилизацию *вращательных* движений, никаких моментов не дают.

Это еще яснее видно из формул (31), выражающих главные моменты сил инерции, в которых, в первом приближении, надо, вместо Θ , φ и ψ писать соответственно $(\Theta_1 + \Theta_2)$, $(\varphi_1 + \varphi_2)$, $(\psi_1 + \psi_2)$, так что будет

$$\begin{aligned} K &= -[I_e(\Theta_1 + \Theta_2)'' - I_{ef}(\psi_1 + \psi_2)'' - I_{eh}(\varphi_1 + \varphi_2)''] \\ L &= -[I_f(\psi_1 + \psi_2)'' - I_{fh}(\varphi_1 + \varphi_2)'' - I_{ef}(\Theta_1 + \Theta_2)''] \\ N &= -[I_h(\varphi_1 + \varphi_2)'' - I_{eh}(\Theta_1 + \Theta_2)'' - I_{fh}(\psi_1 + \psi_2)''] \end{aligned} \quad (70)$$

Эти моменты сил инерции должны уравниваться моментами M_e , M_f , M_h реакций связей, т. е. моментами, производимыми стабилизирующими механизмами Θ_1 , ψ_1 , φ_1 .

Но эти механизмы при правильном своем действии должны удерживать пост так, чтобы

$$\Theta_1 + \Theta_2 = 0; \quad \psi_1 + \psi_2 = 0; \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 0$$

Значит, будет

$$K = L = N = 0 \quad (71)$$

т. е. механизмы эти не должны давать реакций на самый пост, а должны как бы освобождать его от корабля или, точнее говоря, давать возможность кораблю свободно качаться под постом, который сохраняет постоянное направление в пространстве.

Уравнения (70) являются лишь приближенными, значит, может предстать, что и равенства (71) также только приближенные, между тем *точные* уравнения приводят к тому же заключению.

Точные уравнения вращательного движения твердого тела в самом общем виде суть следующие:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} \right) + q \frac{\partial T}{\partial p} - p \frac{\partial T}{\partial q} &= \sum (xY - yX) = M_x = M_h \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) + p \frac{\partial T}{\partial r} - r \frac{\partial T}{\partial p} &= \sum (zX - xZ) = M_y = M_f \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}} \right) + r \frac{\partial T}{\partial q} - q \frac{\partial T}{\partial r} &= \sum (yZ - zY) = M_z = M_e \end{aligned} \quad (72)$$

где T есть живая сила тела, так что

$$\begin{aligned} 2T = M(\zeta_{1,0}^2 + \gamma_{1,0}^2 + \zeta_{2,0}^2) + I_x p^2 + I_y q^2 + I_z r^2 - 2I_{xy} pq - \\ - 2I_{xz} pr - 2I_{yz} q^2 \end{aligned}$$

причем p, q, r суть угловые скорости вращательного движения тела, M_x, M_y, M_z моменты всех сил, действующих на тело, взятые относительно его осей e, f, h , соответственно осям x_1, y_1, z_1 корабля, в данном случае моменты реакций связей, ибо сила тяжести моментов не дает.

При стабилизации тело не должно иметь вращательных движений, значит p, q, r должны при всяком значении времени t быть равными нулю, а тогда левые части уравнений (72) будут нули, следовательно, и правые, т. е. при правильной стабилизации стабилизирующие механизмы не оказывают на тело никаких реакций, каковы бы размахи корабля ни были.

Само собой разумеется, что мы здесь рассматриваем чисто теоретический случай, не учитывая трения в цапфах кардановского подвеса — механизмы должны преодолевать это трение. Но трение это при правильном устройстве подшипников ничтожно мало.

Необходимо также иметь в виду, что на ходу корабля пост будет закреплен по походному и стабилизируется лишь по „боевой тревоге“, следовательно, есть краткий промежуток времени, когда углы

$$\Theta_1 + \Theta_2, \varphi_1 + \varphi_2, \psi_1 + \psi_2$$

не равны нулю, а равны нулю углы $\Theta_2, \varphi_2, \psi_2$. Прочность механизмов и их мощность должны быть рассчитаны на нагрузки в течение короткого времени, соответствующего нескольким (скажем, 5—10) размахам, при которых механизмы должны преодолевать усилия, соответствующие угловым ускорениям, изменяющимся от $\Theta_1'', \varphi_1'', \psi_1''$ до их малых значений, соответствующих моменту, когда пост будет стабилизирован.

Механизм горизонтального наведения σ , как уже указано, рассчитывается и работает на дифференциал отдельно от механизма стабилизирующего рыскания.

§ 20. Управление стабилизирующими механизмами просто вручную при таких размахах качки, когда угловая скорость превышает $1\frac{1}{2} - 2^\circ$

в секунду, не дает, как можно было заключить из опытов на лодке „Уралец“, достаточной точности, ибо уже при угловой скорости в $1\frac{1}{2}^\circ$ в секунду погрешность в вертикальном наведении составляет до 0.004 дистанции, следовательно, стабилизация должна быть или автоматическая, или полуавтоматическая и притом *раздельная* для каждого из углов $\theta_1, \psi_1, \varphi_1$, поэтому достаточно пояснить схему устройства механизма для одного из этих углов, она одинакова и для двух других.

Возьмем, например, угол θ_1 и положим, что гировертикали на корабле нет, а есть лишь гироскомпас, а если они и есть, то требуется устроить автономную систему стабилизации.

Как при автоматической, так и при полуавтоматической стабилизации стабилизирующий механизм должен работать не тогда, когда угол θ_1 отклонился на заданную величину ϵ от нуля, а когда угловая скорость $\dot{\theta}_1$ отклонилась от нуля на достаточно малую величину ω_1 . Чтобы этого достигнуть, надо применять в качестве дающего прибора малый весьма чувствительный гироскоп, как это было уже давно предложено профессором Минорским, когда он был еще мичманом.

Простейшая схема Минорского, применяемая для управления стабилизатором качки корабля по системе Сперри, состоит в следующем.

Положим, что в стабилизуемом посту установлен малый весьма чувствительный гироскоп, ось вращения которого параллельна оси Qh , т. е. этот гироскоп вместе с рамой, несущей его подпятники, может качаться в диаметральной плоскости корабля, подобно гироскопическому стабилизатору Сперри.

Отсюда ясно, что, ограничив величину размахов этих качаний, мы получим дающую систему, которая действует соответственно угловой скорости качаний поста около оси Qe ; эта дающая система будет удерживать эту угловую скорость в весьма тесных пределах и, значит, при этой малой скорости, действуя вручную на отдельный механизм вертикального наведения, соединенный со стабилизирующим через дифференциал, можно придать углу θ начальное значение $\theta = 0$, которое затем и будет удерживаться.

Само собой разумеется, можно составить и множество других схем, например, с сервомотором, с пружинным регулятором, воспользовавшись тем, что гироскопический момент будет пропорционален θ' , и т. д.

В рассмотрение таких схем мы здесь входить не будем, ограничиваясь чисто принципиальной стороной дела.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НА КОРАБЛЕ ПОГРЕШНОСТИ ПОКАЗАНИЙ ГИРОКОМПАСА ¹

§ 1. Обычный способ определения погрешности гирокомпаса состоит в сличении истинного азимута светила с компасным.

Но обыкновенные способы определения истинного азимута, применяемые на корабле, во многих случаях не обладают той точностью, которая требуется от гирокомпаса, предназначенного для надобностей морской артиллерии, где надо иметь погрешность не более $0^{\circ}05$, т. е. $3'$.

Само собою разумеется, что при наблюдениях на берегу такая точность легко достигается, но на море определение истинного азимута светила (скажем Солнца) с точностью до $3'$ сопряжено с большими затруднениями, когда корабль на ходу, по следующим причинам:

а) место идущего корабля, т. е. его широта и долгота, не всегда известно с требуемую точностью;

б) плоскость азимутального круга компаса не остается неизменно горизонтальной;

в) цапфы зеркала пеленгатора имеют также наклонное положение вместе с плоскостью азимутального круга;

г) отсчеты азимута, когда они производятся невооруженным глазом, могут заключать погрешность более $3'$, т. е. $\frac{1}{10}$ видимого диаметра Солнца.

Все перечисленные погрешности могут иметь место одновременно, поэтому следует прежде всего определить, с какою точностью надо знать вышеперечисленные элементы, чтобы совокупное влияние погрешностей в них не давало в истинном азимуте светила вероятную ошибку, превышающую $3'$.

В настоящей записке и рассмотрен вопрос об определении погрешностей гирокомпаса с требуемую точностью.

§ 2. Прежде всего рассмотрим влияние погрешностей в широте и долготе места корабля на море, а затем рассмотрим влияние наклонности азимутального круга, предполагая, что ось цапф зеркала выверена точно при самом изготовлении прибора.

¹ Публикуется впервые по рукописи. (Архив АН СССР, ф. 759, оп. 1, № 13).
(Ред.).

В курсах сферической астрономии выводятся следующие дифференциальные формулы для любого сферического треугольника ABC :

$$da = \cos Cdb + \cos Bdc + \sin b \sin Cda \quad (1)$$

$$\text{ctg } ada + \text{ctg } BdB = \text{ctg } bdb + \text{ctg } AdA \quad (2)$$

$$\sin adB = \sin Cdb - \cos a \sin Bdc - \sin b \cos Cda \quad (3)$$

$$dA = -\cos cdB - \cos bdC + \sin b \sin Cda \quad (4)$$

Как видно, каждая из этих формул заключает по *четыре* элемента треугольника и этими формулами исчерпываются все обычные случаи задания.

Так, формула (1), связывая дифференциалы da , db , dc и dA , соответствует заданиям:

I) b , c , A , искомая a , т. е. двух сторон треугольника и угла между ними, а также:

II) a , b , c , искомая A , т. е. трех сторон треугольника.

Формула (2) связывает дифференциалы da , db , dA и dB и соответствует заданию:

III) a , b , A , искомая B , т. е. двух сторон и угла, противоположащего одной из них, или же:

IV) A , B , a , искомая b , т. е. двух углов и стороны, противоположащей одному из них.

Формула (3) связывает дифференциалы dA , dB , dc , db , т. е. соответствует формуле котангенсов, в которую входят четыре сряду лежащих элемента, из которых три заданы и четвертый ищется, например:

V) A , B , c , искомая b .

Формула (4) связывает дифференциалы dA , dB , dC и da и соответствует заданию трех углов, или стороны и двух углов, к ней прилежащих:

VI) A , B , C , искомая a , или B , C , a , искомая A .

§ 3. В астрономических задачах приходится, по большей части, иметь дело с так называемым полярным треугольником, который в проекции на плоскость горизонта изображен на фиг. 1, причем P — полюс мира; Z — зенит места наблюдения; S — наблюдаемое светило, так что элементы этого треугольника суть:

$PZ = l = 90^\circ - \lambda$ — дополнение широты;

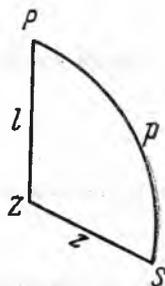
$PS = p = 90^\circ - \delta$ — полярное расстояние;

$ZS = z = 90^\circ - h$ — зенитное расстояние;

P — часовой угол;

Z — азимут;

S — параллактический угол.



Фиг. 1.

Чтобы применять к этому треугольнику дифференциальные формулы и избежать путаницы, следует вписать буквы ABC , a , b , c , как пока-

зано (фиг. 2), и, написав соответствующую формулу из группы (1)—(4), сделать замену букв.

Так, например, в нашем случае данные элементы будут

$$P, l, p$$

и искомый Z . Надо взять формулу (3) для треугольника ABC , т. е.

$$\sin adB = \sin Cdb - \cos a \sin Bdc - \sin b \cos CdA$$

и положить $db = 0$, ибо полярное расстояние или склонение выбирается из „Астрономического ежегодника“ („Nautical Almanac“) и в нем погрешности нет; будем иметь:

$$\sin adB = -\cos a \sin Bdc - \sin b \cos CdA$$

Отсюда следует

$$dB = -\operatorname{ctg} a \sin Bdc - \frac{\sin b}{\sin a} \cos CdA$$

и после замены букв будет

$$dZ = -\left[\operatorname{ctg} z \sin Zdl + \frac{\sin p}{\sin z} \cos SdP \right]$$

но $dl = -d\lambda$ и предыдущая формула, показывающая влияние погрешности $d\lambda$ в широте места и dP в часовом угле или, что то же, в долготе на азимут, будет

$$dZ = \operatorname{ctg} z \sin Zd\lambda - \frac{\sin p}{\sin z} \cos SdP \quad (5)$$

Погрешность dZ в истинном азимуте целиком переходит в вычисляемую погрешность гирокомаса и надо чтобы dZ было меньше $0^\circ 3'$.

В нашей широте зенитное расстояние Солнца лежит в пределах

$$83^\circ 30' > z > 36^\circ 30'$$

полярное расстояние p лежит в пределах

$$113^\circ 30' > p > 66^\circ 30'$$

Сделаем грубую прикидку, взяв

$$z = 60^\circ \text{ и } Z = 45^\circ$$

тогда

$$\operatorname{ctg} z \sin Z = 1.73 \cdot 0.7 = 1.2$$

следовательно,

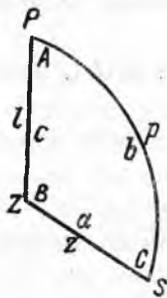
$$d\lambda \leq \frac{0^\circ 3'}{1.2} = 0^\circ 2.5'$$

т. е. в широте ошибка должна быть меньше $0^\circ 2.5'$.

Взяв для примера

$$\frac{\sin p}{\sin z} \cos S = 1,$$

получим $dP \leq 3'$, т. е. в долготе ошибка должна быть меньше $3'$.



Фиг. 2.

При плавании в Финском заливе это вполне достижимо, т. е. можно довольствоваться счислимой широтой и долготой, проверяемым по пеленгам маяков.

Более точная формула есть

$$\varepsilon \leq \sqrt{(\operatorname{ctg} z \sin Zd\lambda)^2 + \left(\frac{\sin p}{\sin z} \cos Sdp\right)^2} \leq 0^\circ 2'$$

Следует просчитать, скажем, через каждые полчаса от восхода до захода Солнца, при разных его склонениях, коэффициенты при $d\lambda^2$ и dP^2 , считая их равными, и, соответственно, вывести границы, в которых должны заключаться $d\lambda$ и dP , чтобы предыдущее неравенство было удовлетворено в благоприятное для наблюдений время.

§ 4. Перейдем теперь к определению влияния наклонности азимутального круга и к способу нахождения самой этой величины на корабле, когда уровнем пользоваться нельзя.

Хотя в „Lehrbuch der sphärischen Astronomie“ (von Dr. F. Brünnow, Berlin, 1871) в главе II отдела VII, стр. 434—444, изложена полная теория так называемого *альтазимута*, т. е. инструмента, служащего для определения высот и азимутов светила, но здесь предположено, что инструмент установлен на неподвижном фундаменте на берегу и всё основано на пользовании уровнями, поэтому эти выводы к гирокомпасу, находящемуся на корабле, при ходе корабля не применимы.

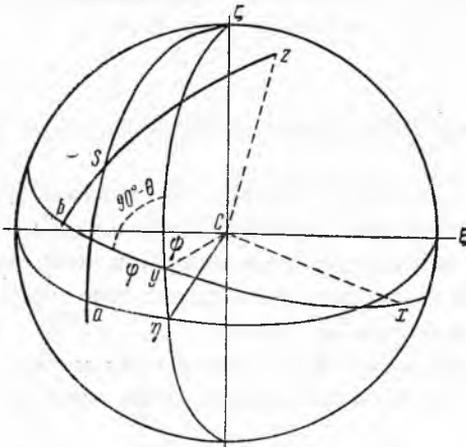
Чтобы вывести формулы, по которым найдется наклонность азимутального круга и ее влияние на определение поправки компаса, применим общий способ, который мы применяли к гироскопическому компасу вообще.

Изберем оси координат $C\xi\eta\zeta$ (фиг. 3), неизменно связанные с Землей, так, что плоскость $C\xi\zeta$ есть меридиан места и ось $C\xi$ направлена к S ,¹ и ось $C\zeta$ — вверх, и для определения положения осей $Cxyz$, связанных с гирокомпасом, возьмем „корабельную“ систему Эйлеровых углов, показанных на фиг. 3, и составим, как обыкновенно, таблицу косинусов, которая будет

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos(x\xi) = \cos \varphi \cos \theta \approx 1 \\ b_1 &= \cos(x\eta) = \cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \sin \theta \approx \varphi \\ c_1 &= \cos(x\zeta) = \sin \psi \sin \varphi - \cos \psi \cos \varphi \sin \theta \approx -\theta \\ a_2 &= \cos(y\xi) = -\sin \varphi \cos \theta \approx -\varphi \\ b_2 &= \cos(y\eta) = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \sin \theta \approx 1 \\ c_2 &= \cos(y\zeta) = \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \sin \theta \approx \psi \\ a_3 &= \cos(z\xi) = \sin \theta \approx \theta \\ b_3 &= \cos(z\eta) = -\sin \psi \cos \theta \approx -\psi \\ c_3 &= \cos(z\zeta) = \cos \psi \cos \theta \approx 1 \end{aligned} \tag{6}$$

¹ Эйнд (Ред.).

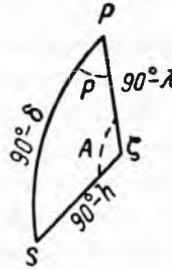
Таким образом имеем *точную* таблицу косинусов:



Фиг. 3.

	x	y	z
ξ	a_1	a_2	a_3
η	b_1	b_2	b_3
ζ	c_1	c_2	c_3

(7)



Фиг. 4.

и приближенную:

	x	y	z
ξ	1	$-\varphi$	θ
η	φ	1	$-\psi$
ζ	$-\theta$	ψ	1

(7')

Пусть δ есть наблюдаемое светило (скажем, Солнце). Построив треугольник ζPS (фиг. 4), имеем в нем: $\zeta = A$ — истинный азимут; $SP = 90^\circ - \delta$ — полярное расстояние; $\zeta P = 90^\circ - \lambda$; $\zeta PS = P$ — часовой угол; ζS — зенитное расстояние.

По формуле котангенсов имеем:

$$\operatorname{ctg} A \sin P = \operatorname{tg} \delta \cos \lambda - \cos P \sin \lambda \quad (8)$$

и по формуле косинусов:

$$\sin h = \sin \delta \sin \lambda + \cos \delta \cos \lambda \cos P \quad (8')$$

причем формула синусов

$$\frac{\sin P}{\cos h} = \frac{\sin A}{\cos \delta} \quad (8'')$$

служит проверкою. По этим формулам, зная склонение δ , широту λ и часовой угол P , вычисляем истинный азимут A и высоту светила h .

Компасный азимут, т. е. отсчет по азимутальному кругу есть \widehat{xb} , причем точка b лежит в пересечении большого круга zS с большим кругом xy (фиг. 3).

Чтобы найти координаты точки b не осложняя чертежа, заметим, что радиус Cb представляет пересечение плоскостей zCS и xCy , поэтому стоит только составить уравнения этих плоскостей, то мы получим уравнения прямой Cb , тогда угол xCb , ею составляемый с осью Cx , и будет компасный азимут.

Обозначая радиус сферы через R (в окончательных формулах он пропадет), имеем координаты точки S :

$$\xi_1 = R \cos h \cos A; \quad \eta_1 = R \cos h \sin A; \quad \zeta_1 = R \sin h \quad (9)$$

координаты точки z суть:

$$\xi_2 = Ra_3; \eta_2 = Rb_3; \zeta_2 = Rc_3 \quad (10)$$

так как в дальнейшем величина R сокращается, то без ущерба общности можно в формулах (9) и (10) принимать $R=1$.

Уравнение плоскости $zSCb$ будет вида

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0$$

Условия, чтобы эта плоскость проходила через точку $S(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ и через точку $z(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ суть:

$$\alpha\xi_1 + \beta\eta_1 + \gamma\zeta_1 = 0; \quad \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = 0$$

следовательно, уравнение плоскости $zSCb$ есть

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Развивая этот определитель по элементам первой строки, имеем:

$$\xi(c_3\eta_1 - b_3\zeta_1) - \eta(c_3\xi_1 - a_3\zeta_1) + \zeta(b_3\xi_1 - a_3\eta_1) = 0 \quad (11)$$

уравнение же плоскости xCy есть $z=0$, т. е.

$$a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta = 0 \quad (12)$$

Полагая для краткости письма

$$(c_3\eta_1 - b_3\zeta_1) = N_1; \quad -(c_3\xi_1 - a_3\zeta_1) = N_2; \quad (b_3\xi_1 - a_3\eta_1) = N_3 \quad (13)$$

напишем уравнение (11) в виде

$$N_1\xi + N_2\eta + N_3\zeta = 0 \quad (11')$$

Из этих уравнений следует

$$\frac{\xi}{c_3N_1 - b_3N_3} = \frac{\eta}{a_3N_3 - c_3N_1} = \frac{\zeta}{b_3N_1 - a_3N_2} = \frac{1}{H} \quad (14)$$

где

$$H = \sqrt{(c_3N_1 - b_3N_3)^2 + (a_3N_3 - c_3N_1)^2 + (b_3N_1 - a_3N_2)^2}$$

следовательно будет, при само собою понятном обозначении,

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{b\zeta}) &= \frac{c_3N_1 - b_3N_3}{H} = \frac{A}{H} \\ \cos(\widehat{b\eta}) &= \frac{a_3N_3 - c_3N_1}{H} = \frac{B}{H} \\ \cos(\widehat{b\xi}) &= \frac{b_3N_1 + a_3N_2}{H} = \frac{C}{H} \end{aligned} \quad (15)$$

значит, будет

$$\cos(\widehat{bx}) = a_1 \cos(\widehat{b\zeta}) + b_1 \cos(\widehat{b\eta}) + c_1 \cos(\widehat{b\zeta}) = \frac{a_1 A + b_1 B + c_1 C}{H} \quad (16)^*$$

Но величины a_1, b_1, c_1 содержат углы φ, ψ и θ , которые неизвестны и которые надо определить.

Положим, что к кругу xu прикреплены две трубы, у которых оптическая ось одной параллельна оси Cx , другой — параллельна оси Cy и обе трубы снабжены или вертикальным микрометром, или вертикальной сеткой. Наводя эти трубы на видимый горизонт, наклонение которого известно или определено прибором Пульфриха, получим наклонение осей Cx и Cy , т. е. углы ζx и ζy , а так как эти углы близки к 90° , то обозначим их через

$$\zeta x = \frac{\pi}{2} + n_1; \quad \zeta y = \frac{\pi}{2} + n_2$$

причем отсчеты n_1 и n_2 считаются вниз от истинного горизонта положительными.

* Величина \widehat{bx} может быть вычислена и иначе. Отнесем плоскости zSb и xSy к координатам xuz ; для этого составим, на основании формул (9), положив в них $R=1$, следующие выражения координат точки S :

$$x_1 = a_1 \xi_1 + b_1 \eta_1 + c_1 \zeta_1$$

$$y_1 = a_2 \xi_1 + b_2 \eta_1 + c_2 \zeta_1$$

$$z_1 = a_3 \xi_1 + b_3 \eta_1 + c_3 \zeta_1$$

координаты же точки z суть:

$$x = 0; \quad y = 0; \quad z = 1$$

Уравнение всякой плоскости, проходящей через прямую Cz (ось z), есть

$$x + \mu y = 0 \quad (*)$$

где μ есть любое постоянное число. Чтобы эта плоскость проходила и через прямую CS , надо, чтобы координаты точки S , т. е. $x_1 y_1$, уравнению (*) удовлетворяли, т. е. чтобы было

$$x_1 + \mu y_1 = 0$$

откуда

$$\mu = -\frac{x_1}{y_1}$$

и уравнение (*) примет вид

$$y = \frac{y_1}{x_1} x$$

Значит

$$\operatorname{tg}(\widehat{xb}) = \frac{y_1}{x_1} \quad (16')$$

Это есть другой вид формулы (16), более удобный для вычисления, нежели формула (16).

Во второй части показано, как величина \widehat{xb} вычисляется по формулам сферической тригонометрии.

Составив схематический чертеж (фиг. 5), берем треугольники:

$$\Omega \zeta x; \quad \Omega \eta x; \quad \Omega \zeta x$$

$$\Omega \zeta y; \quad \Omega \eta y; \quad \Omega \zeta y$$

в которых имеем соответственно:

$$\Omega x = 90^\circ - \varphi; \quad \Omega \zeta = 90^\circ; \quad x\Omega \zeta = \theta$$

Значит,

$$\cos(x\zeta) = \cos \varphi \cos \theta \quad (1')$$

$$\Omega \eta = \psi; \quad \Omega x = 90 - \varphi; \quad x\Omega \eta = \theta_1 = 90^\circ - \theta$$

$$\cos(x, \eta) = \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \sin \theta \quad (2')$$

$$\begin{aligned} \cos(x, \zeta) &= -\sin n_1 = \\ &= \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \sin \theta \quad (I) \end{aligned}$$

$$\Omega y = \varphi, \quad y\Omega \zeta = \theta_1 = 180^\circ - \theta$$

$$\cos(y\zeta) = -\sin \varphi \cos \theta \quad (3')$$

$$\Omega y = \varphi; \quad \Omega \eta = \psi; \quad \eta\Omega y = 90^\circ + \theta$$

$$\cos y\eta = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \sin \theta \quad (4')$$

$$\zeta y = \frac{\pi}{2} + n_2; \quad \Omega y = \psi; \quad y\Omega \zeta = 90^\circ - \theta$$

$$\cos \hat{y}\zeta = -\sin n_2 = \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \sin \theta \quad (II)$$

Но $\hat{x}y = 90^\circ$, следовательно должно быть

$$\cos(x\zeta) \cos(y\zeta) + \cos(x\eta) \cos(y\eta) + \cos(x\zeta) \cos(y\zeta) = 0$$

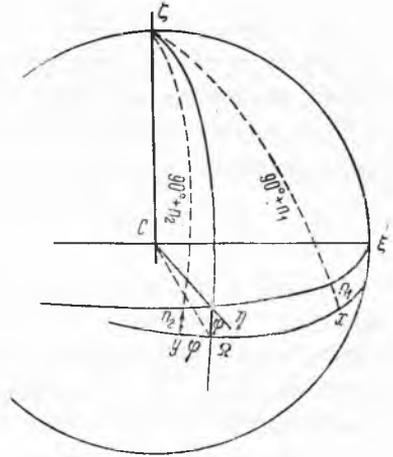
Подставляя вместо этих косинусов их значения (1'), (2'), (I), (3'), (4'), (II), получим равенство

$$\begin{aligned} 0 &= -\cos \varphi \cos \theta \sin \varphi \cos \theta + (\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \sin \theta) \times \\ &\times (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \sin \theta) + \sin n_1 \sin n_2 \quad (III) \end{aligned}$$

Но при самом составлении уравнений (1)—(6) уже принято, что $\hat{x}y = 90^\circ$, ибо мы положили $y\Omega = \varphi$ и $\Omega x = 90^\circ - \varphi$, поэтому равенство (III) не есть уравнение, а есть *тождество*.

Таким образом видно, что мы имеем лишь два независимых уравнения (I) и (II), из которых легко найти углы ψ и θ в функции угла φ , который остается произвольным; именно будет

$$\begin{aligned} \sin \psi &= -(\sin n_2 \cos \varphi + \sin n_1 \sin \varphi) \quad (17) \\ \cos \psi \sin \theta &= \sin n_1 \cos \varphi - \sin n_2 \sin \varphi \end{aligned}$$



Фиг. 5.

т. е.

$$\sin \theta = \frac{\sin n_1 \cos \varphi - \sin n_2 \sin \varphi}{\cos \psi} \quad (18)$$

Формулы (17) и (18) суть формулы *точные*, т. е. имеют место при *любых* значениях входящих в них букв.

При *малых* углах φ , ψ , θ , n_1 , n_2 из этих точных формул следуют приближенные:

$$\psi \approx -n_2 \quad (17')$$

$$\theta \approx n_1 \quad (18')$$

Углами ψ и θ определяется положение азимутального круга $xу$ относительно круга $\zeta\eta$, т. е. эти два круга как бы скрепляются между собою, но не определяется ориентировка круга $\zeta\eta$, ибо угол φ остается произвольным, т. е. можем, оставляя круги $xу$ и $\zeta\eta$ скрепленными, поворачивать всю систему около $C\zeta$ или Cz , углы ψ и θ изменяться не будут; в первом случае круг $\zeta\eta$ будет скользить в своей плоскости, увлекая за собою круг $\zeta\eta$ и скрепленный с этим последним круг $xу$, причем наклонность ω этих кругов будет оставаться постоянной. Во втором случае круг $xу$ будет скользить в своей плоскости, увлекая за собою круги $\zeta\eta$ и $\xi\eta$. Отсюда ясно, что для определения угла φ недостаточно знать n_1 и n_2 , надо еще при помощи астрономических или земных наблюдений определить ориентировку круга $\zeta\eta$ или, что то же, круга $\zeta\xi$, как о том будет сказано ниже.

§ 5. Положим сперва, что

$$n_1 = n_2 = 0$$

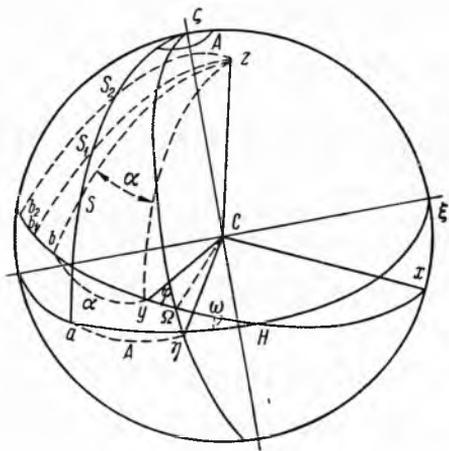
тогда круг $xу$ совпадал бы с кругом $\zeta\eta$, т. е. с горизонтом, но точка x , от которой производятся отсчеты по азимутальному кругу (компасные азимуты) не совпадала бы с точкою ξ , т. е. не лежала бы в плоскости географического меридиана места, а отстояла бы от него на угол φ к W .¹

Обратимся к фиг. 6, и пусть S есть наблюдаемое светило; его

истинный азимут A есть угол $\zeta\xi S$, измеряемый дугой $\widehat{\xi a}$ истинного горизонта, компасный азимут есть угол xzb , измеряемый дугою \widehat{xb} ; предполагая, что в точке x стоит 0° , отсчет по компасу будет

$$\alpha = \widehat{xb} = A - \varphi$$

¹ Вест. (Ред.).



Фиг. 6.

Если условиться называть „поправкой компаса“ величину k , определяемую равенством:

$$\text{поправка компаса} = \text{истинный азимут} - \text{компасный азимут} \quad (19)$$

то будет в рассматриваемом случае

$$k = A - \alpha = A - (A - \varphi) = \varphi \quad (19')$$

Положим, что компас выверен так, что, когда корабль хода не имеет, $\varphi = 0$, но положим, что круг xy наклонен на угол ω так, что

$$\psi \approx -n_2; \quad \theta = n_1$$

Возьмем светила S, S_1, \dots , лежащие на одном вертикале — их истинный азимут есть ξa независимо от высоты, компасные же их азимуты $x b, x b_1, \dots$ различны между собою, поэтому если поправку компаса при наклонном положении его азимутального круга вычислять по формуле (19):

$$k = \text{поправка компаса} = \text{истинный азимут} - \text{компасный}$$

то мы получили бы различные результаты, смотря по тому, какое светило мы наблюдали и какова его высота Sb, Sb_1, Sb_2, \dots над азимутальным кругом xy , или его истинная высота Sa . Высоты Sb, Sb_1 и пр. легко наблюдать, истинная же высота Sa легко вычисляется.

Фиг. 6 показывает, что в выражении (19) угол φ войдет в *компасный* азимут простым слагаемым, величина же истинного азимута от углов φ, ψ, θ не зависит, таким образом формула (19) будет вида

$$k = A - [f(\psi, \theta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1) + \varphi]$$

причем функция $f(\psi, \theta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ может быть заменена функцией $F(n_1, n_2, \xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ ибо ψ и θ выражаются через n_1 и n_2 , которыми определяется наклонность азимутального круга xy компаса и астрономическими координатами ξ, η, ζ наблюдаемого светила.

Мы получим выражение $f(\psi, \theta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1)$, положив $\varphi = 0$ в общих формулах, выведенных выше, в § 4.

Все формулы § 4 выражены через косинусы углов между осями и через астрономические координаты светила S и зенита Z , а именно:

$$(S) \dots \xi_1 = \cos h \cos A; \quad \eta_1 = \cos h \sin A; \quad \zeta_1 = \sin h \quad (9')$$

$$(z) \dots \xi_2 = a_3; \quad \eta_2 = b_3; \quad \zeta_2 = c_3 \quad (10')$$

при $\varphi = 0$ косинусы углов будут

$$a_1^0 = \cos(x, \hat{\xi}) = \cos \theta \quad \approx 1 \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$b_1^0 = \cos(x, \hat{\eta}) = \sin \psi \sin \theta \quad \approx 0 \approx \psi \theta$$

$$c_1^0 = \cos(x, \hat{\zeta}) = -\cos \psi \sin \theta \approx -\theta$$

$$\begin{aligned}
 a_2^0 &= \cos(\widehat{y\zeta}) = 0 & = 0 & 0 \\
 b_2^0 &= \cos(\widehat{y\eta}) = \cos \psi & \approx 1 & \approx 1 - \frac{\psi^2}{2} \\
 c_2^0 &= \cos(\widehat{y\zeta}) = \sin \psi & \approx \psi & \approx \psi \\
 a_3^0 &= \cos(\widehat{z\zeta}) = \sin \theta & \approx \theta & \approx \theta \\
 b_3^0 &= \cos(z, \eta) = \sin \psi \cos \theta & \approx \psi & \approx \psi \\
 c_3^0 &= \cos(z\zeta) = \cos \psi \cos \theta & \approx 1 & \approx 1 - \frac{\psi^2}{2} - \frac{\theta^2}{2}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Приближенные значения до членов первого порядка применимы при $\psi \leq 2^\circ$; $\theta \leq 2^\circ$

Приближенные значения до членов второго порядка применимы при $\psi \leq 8^\circ$; $\theta \leq 8^\circ$

так что даже при грубой стабилизации, до 2° , формулы первого порядка достаточны для нашей цели.

Составим чертеж на плоскости меридиана, и для ясности будем считать пеленги и азимуты от первого вертикала, т. е. истинные азимуты от плоскости $\zeta\eta$ или точки η горизонта, компасные — от точки y круга xu , т. е. от плоскости zy .

Пусть S есть наблюдаемое светило, тогда истинный его азимут будет $\widehat{\eta a} = A$, компасный $\widehat{yb} = \alpha$.

Когда мы положим $\varphi = 0$, то точка y будет совпадать с точкою Ω и разность $A - \alpha$ представит влияние наклонности круга xu к горизонту.

Если сместить азимутальный круг в его плоскости на угол φ , то очевидно, что по компасу вместо отсчета \widehat{yb} , равного α , мы получили бы отсчет $\alpha_1 = \alpha - \varphi$, так что разность $\alpha - \alpha_1 = \varphi$ представила бы погрешность показаний компаса, *происходящую от смещения азимутального круга в его плоскости*, как это имеет, например, место при курсовой погрешности.

Величина α_1 непосредственно наблюдается, величина α вычисляется по формулам, приводимым ниже.

Обыкновенно берут разность

$$k_1 = A - \alpha_1$$

и принимают k_1 за поправку компаса, вместо правильной формулы

$$k = \alpha - \alpha_1$$

Очевидно, будет

$$k - k_1 = \alpha - A$$

т. е. „поправка“, которую надо присовокупить, есть $\alpha - A$ и будет:

$$k = k_1 + (\alpha - A) = (k_1 + \Delta) \quad (20)$$

Величина A вычисляется по формуле (8) или находится по таблицам Бардвуда.

Величина $y_b = \Omega b$ получится, если определить пересечение плоскости xu , уравнение которой есть $z = 0$, с плоскостью zSb , проходящей через ось z и светило S , координаты которого $\xi_1 \gamma_1 \zeta_1$ указаны выше. Относительно осей $x_1 y_1 z_1$ эти координаты будут (при $\varphi = 0$)

$$x_1 = a_1^0 \zeta_1 + b_1^0 \gamma_1 + c_1^0 \xi_1$$

$$y_1 = a_2^0 \zeta_1 + b_2^0 \gamma_1 + c_2^0 \xi_1$$

$$z_1 = a_3^0 \zeta_1 + b_3^0 \gamma_1 + c_3^0 \xi_1$$

в которых $a_1^0, b_1^0, \dots, c_3^0$ означают те значения косинусов a_1, b_1, \dots, c_3 , когда в них будет положено $\varphi = 0$:

Уравнение всякой плоскости, проходящей через ось z , есть

$$x + \lambda y = 0$$

Чтобы эта плоскость проходила через точку $\delta(x_1, y_1, z_1)$, надо, чтобы было

$$x + \lambda y_1 = 0$$

Откуда

$$\lambda = -\frac{x_1}{y_1}$$

значит будет

$$y = \frac{y_1}{x_1} x$$

следовательно,

$$\text{tg } \hat{x}b = \text{tg } (90^\circ + \hat{y}b) = \frac{y_1}{x_1} = -\text{ctg } \alpha$$

Итак, искомый угол α будет определяться формулой

$$\text{ctg } \alpha = -\frac{y_1}{x_1} \quad (21)$$

и поправка компаса будет

$$k = (A - \alpha_1) + (\alpha - A) \quad (22)$$

в которой ясно видна погрешность обычной формулы.

О НАЧАЛЬНОЙ ОСТОЙЧИВОСТИ ГИРОСФЕРЫ, КОГДА В НЕЕ НАЛИТО МАСЛО¹

Влияние налитого в гиросферу смазочного масла выражается в различных формах, представляющих, однако, *одну и ту же* величину разности метацентрической высоты, рассчитанной в предположении, что масло затвердело (заморожено) и что оно жидкое.

В этой записке и выводятся относящиеся сюда формулы.

§ 1. Примем центр гиросферы C_0 (он же и центр плавучести) за начало координат и плоскость наклона гиросферы — за плоскость yz , направив ось C_0z вертикально вниз.

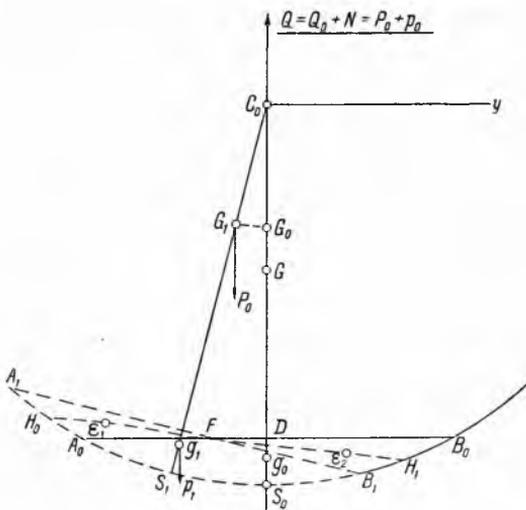
Пусть вес гиросферы без масла есть P_0 и центр ее тяжести G_0 , так что его координаты суть (фиг. 1):

$$\begin{aligned} x_0 &= 0; & y_0 &= 0; \\ z_0 &= C_0G_0 = a_0 \end{aligned} \quad (1)$$

пусть вес масла, налитого в гиросферу, есть $p_0 = qu_0$, где u_0 есть объем масла, q — его плотность и точка g_0 — центр тяжести масла, при прямом положении гиросферы. Координаты точки g_0 будут

$$x'_0 = 0; \quad y'_0 = 0; \quad z'_0 = C_0g_0 = b_0 \quad (2)$$

Примем, что при этом прямом положении масло заморожено, после чего гиросфера наклонена около оси C_0x на угол θ . Центр плавучести C_0 , удерживаемый дутьем, сохраняет свое положение, и гиросфера



Фиг. 1.

¹ Публикуется впервые по рукописи (Архив АН СССР, ф. 759, оп. 1, № 16). (Ред.).

сфера из положения $C_0 A_0 S_0 B_0$ перейдет в положение $C_0 A_1 S_1 B_1$, нанесенное на чертеже пунктиром, причем „вершина“ S_0 перейдет в точку S_1 .

Замороженное масло займет положение $H_0 S_1 H_1$, его центр тяжести будет в точке g_1 , соответственно чему центр тяжести гиросферы будет в точке G_1 , такой, что расстояние

$$C_0 G_1 = C_0 G_0 = a_0 \quad (3)$$

точка g_0 перейдет в точку g_1 , такую, что

$$C_0 g_1 = C_0 g_0 = b_0 \quad (4)$$

и обе точки G_1 и g_1 лежат на прямой $C_0 S_1$.

При таком положении этих точек, действующие на гиросферу силы расположатся так, как показано на схеме (фиг. 2) и „восстанавливающий“ момент будет

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(\theta) &= P_0 C_0 G_0 \sin \theta + p_0 C_0 g_1 \sin \theta = \\ &= (P_0 a_0 + p_0 b_0) \sin \theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Полный вес гиросферы есть $P_0 + p_0$. Эта сила уравнивается:

а) плавучестью

$$Q_0 = q V_0 \quad (6)$$

б) дутьем

$$N \quad (7)$$

причем будет

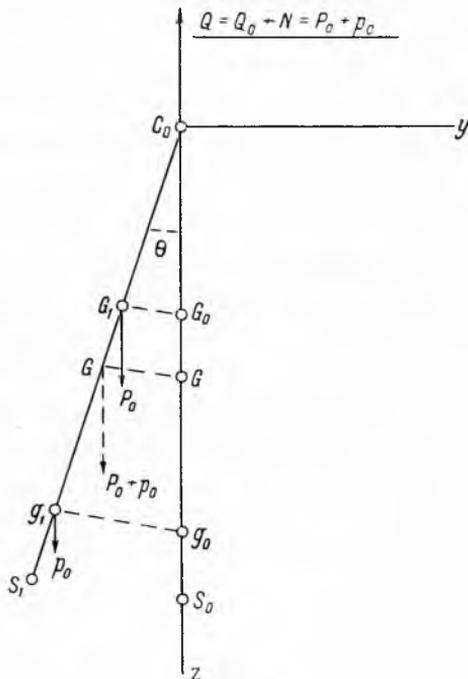
$$(P_0 + p_0) - (Q_0 + N) = 0 \quad (8)$$

Чтобы уравновесить восстанавливающий момент $\mathfrak{M}(\theta)$, надо для удержания гиросферы в наклонном положении приложить кренящий момент — M такой, чтобы было

$$\mathfrak{M}(\theta) - M = 0 \quad (9)$$

При расчете подводных лодок восстанавливающий момент относят, подобно тому, как для надводных судов, к *полному* весу (водоизмещению лодки), считая все грузы как *твердые*, а затем для жидких грузов, имеющих свободные поверхности, делают соответствующий учет потери остойчивости. Если поступать таким образом в нашем случае, то формулу (5) надо писать в следующем виде:

$$\mathfrak{M}(\theta) = (P_0 + p_0) \left[\frac{P_0}{P_0 + p_0} a_0 + \frac{p_0}{P_0 + p_0} b_0 \right] \sin \theta \quad (10)$$



Фиг. 2.

Но величина, стоящая в квадратных скобках представляет расстояние $C_0G = a$ от точки C_0 до точки G общего центра тяжести гиросферы и замороженного масла, так что формула (10) будет

$$\mathfrak{M}(\theta) = (P_0 + p_0) a \sin \theta \quad (11)$$

и „плечо остойчивости“ $R(\theta)$ будет

$$R(\theta) = \frac{1}{P_0 + p_0} \mathfrak{M}(\theta) = a \sin \theta \quad (12)$$

За „меру остойчивости“ принимается производная $\frac{dR(\theta)}{d\theta}$, т. е. в нашем случае

$$\left(\frac{dR(\theta)}{d\theta}\right)_{\theta=0} = a \cos \theta \quad (13)$$

и при малых углах θ мера начальной остойчивости будет

$$\left(\frac{dR(\theta)}{d\theta}\right)_{\theta=0} = a = C_0G \quad (14)$$

Положим теперь, что масло *растаяло*, и рассмотрим, как тогда выразятся величины $\mathfrak{M}(\theta)$ и $R(\theta)$, которые для отличия будем обозначать через

$$\mathfrak{M}_1(\theta) \text{ и } R_1(\theta)$$

Если масло жидкое, то при крене θ оно перетечет в положение $A_0S_0B_0$ (фиг. 1) в сторону *наклонения* гиросферы и центр тяжести масла перейдет из точки g_1 в точку g_0 (фиг. 3), которая лежит на одной вертикали с точкою C_0 , так что сила P_0 момента относительно оси наклонения C_0x не дает, следовательно, будет *восстанавливающий момент*

$$\mathfrak{M}_1(\theta) = P_0 a_0 \sin \theta \quad (15)$$

т. е.

$$\mathfrak{M}_1(\theta) = P_0 a_0 \sin \theta = \mathfrak{M}(\theta) - \frac{p_0}{P_0 + p_0} b_0 \sin \theta \quad (16)$$

Значит, плечо остойчивости, относя его к полному весу $(P_0 + p_0)$ гиросферы вместе с маслом, будет

$$R_1(\theta) = R(\theta) - \frac{p_0}{P_0 + p_0} b_0 \sin \theta \quad (17)$$

и мера остойчивости при том же условии

$$\left(\frac{dR_1(\theta)}{d\theta}\right)_{\theta=0} = a - \frac{p_0}{P_0 + p_0} b_0$$

но выражение

$$\mathfrak{M}_1(\theta) = P_0 a_0 \sin \theta \quad (15)$$

представляет восстанавливающий момент *порожней* (т. е. без масла и выключенном дутье) гиросферы, поэтому можно формулу (15) высказывать так: *восстанавливающая пара гиросферы с налитым в нее сма-*

зочным маслом равна таковой же паре для порожней (т. е. без масла) гиросферы.

Формула (11) выражает следующее свойство: если восстанавливающую пару рассчитывать по *полному* весу ($P_0 + p_0$) гиросферы вместе с маслом и по соответствующему расстоянию a от центра плавучести до общего центра тяжести G порожней гиросферы и масла, то при угле крена θ из рассчитанного по формуле (11) восстанавливающего момента при замороженном масле надо вычесть при жидком масле поправку, рассчитываемую по формуле

$$\mu(\theta) = \frac{P_0}{P_0 + p_0} b_0 \sin \theta$$

Так что будет

$$\mathfrak{M}_1(\theta) = \mathfrak{M}(\theta) - \mu(\theta) \quad (16')$$

Мера начальной остойчивости при жидком масле, относя эту меру к *полному* весу ($P_0 + p_0$) гиросферы вместе с маслом и при действии дутья, величине a не равна и выражается формулой

$$c = a - \frac{P_0}{P_0 + p_0} b_0 \quad (18)$$

где величина

$$a = \frac{P_0}{P_0 + p_0} b_0 \quad (18')$$

представляет уменьшение меры начальной остойчивости вследствие переливания масла при крене гиросферы.

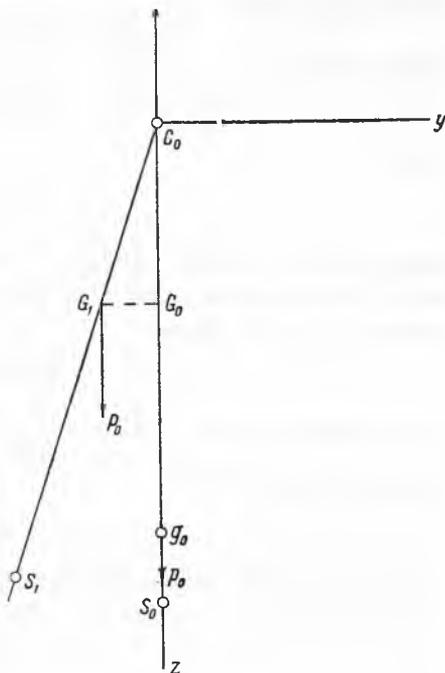
Это выражение поправки относится не только к тому случаю, когда масло налито в гиросферу и занимает в ней сферический сегмент, но, как легко видеть, и к *любой* форме сосуда или сосудов, лишь бы при прямом положении центр тяжести масла лежал на одной отвесной линии с центром плавучести C_0 .

§ 2. Выражению поправки на переливание масла

$$\mu(\theta) = \frac{P_0}{P_0 + p_0} b_0 \sin \theta$$

можно придать другой вид, рассматривая, что переливанию масла (фиг. 1) соответствует перемещение объема A_0FA_1 в положение B_0FB_1 .

Обозначим эти равные между собою клиновые объемы через v и их центры тяжести через ϵ_1 и ϵ_2 , и разделим эти объемы плоскостями,



Фиг. 3.

параллельными плоскости наклонения, на элементарно малые призмы толщиной по Δx , тогда момент перемещения будет:

$$\begin{aligned} \overline{v\varepsilon_1\varepsilon_2} &= \lim \sum \frac{1}{2} \overline{B_0F} \overline{B_1F} \overline{\varepsilon_1\varepsilon_2} \Delta x \sin \theta = \\ &= \sin \theta \lim \sum \frac{1}{2} \overline{B_0F} \overline{B_1F} \frac{2}{3} H_0 H_1 \Delta x \end{aligned}$$

но в пределе при бесконечно малом угле θ будет для каждой элементарной призмы:

$$\overline{B_0F} = \overline{B_1F} = H_0 H_1 = DB_0$$

значит будет:

$$\lim (\overline{v\varepsilon_1\varepsilon_2}) = \frac{1}{3} \sin \theta \lim \sum \overline{DB_0^3} \Delta x = i \sin \theta$$

где

$$i = \frac{1}{3} \lim \sum \overline{DB_0^3} \Delta x$$

представляет момент инерции площади $A_0 B_0$ свободной поверхности масла относительно оси D . Перемещение центра тяжести полного объема v_0 масла будет

$$\overline{g_1 g_0} = \frac{i}{v_0} \sin \theta$$

но в нашем случае

$$\overline{g_0 g_1} = b_0 \sin \theta$$

следовательно,

$$\frac{i}{v_0} = b_0 \quad (19)$$

Переходя от объема v_0 к весу p_0 масла, имеем:

$$p_0 = q v_0 \text{ и } v_0 = \frac{p_0}{q}$$

где q есть вес 1 см³ масла, выражая все длины в сантиметрах; весовой момент перемещения масла будет

$$p_0 \overline{g_0 g_1} = p_0 b_0 \sin \theta = q \frac{i}{v_0} \sin \theta \quad (20)$$

и, значит, момент остойчивости будет

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1(\theta) &= \mathfrak{M}(\theta) - p_0 \overline{g_0 g_1} = \mathfrak{M}(\theta) - q \frac{i}{v_0} \sin \theta = \\ &= (P_0 + p_0) \left[a - \frac{q}{P_0 + p_0} \cdot \frac{i}{v_0} \right] \sin \theta \end{aligned} \quad (21)$$

и, значит, мера начальной остойчивости выразится так:

$$c = a - \frac{q}{P_0 + p_0} \cdot \frac{i}{v_0} \quad (22)$$

Эта формула оказывается общей для любой формы помещений для жидких грузов, почему ею и пользуются в теории корабля.

§ 3. При изложенных выводах мы принимали, что наклонение гиросферы происходит около оси C_0x ; положим теперь, что осью наклонения служит ось Gx , где G есть общий центр тяжести всей системы, т. е. порожней гиросферы и масла, при прямом положении гиросферы. В этом случае расположение сил и точек их приложения показано на фиг. 4.

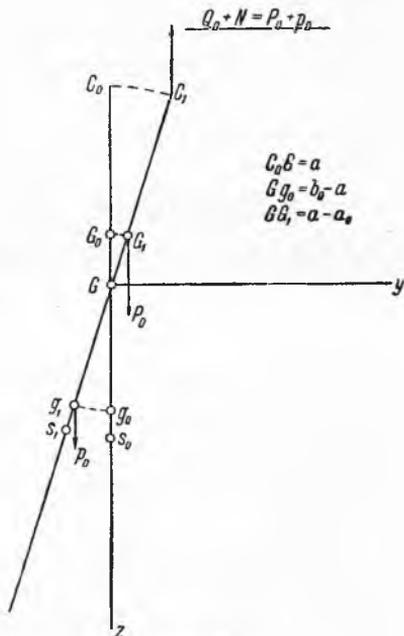
Соответственно этому расположению видим, что моменты относительно оси наклонения Gx будут

- 1) силы Q . . . $+(P_0 + p_0) a \sin \theta$;
 - 2) силы P_0 . . . $-P_0 (a - a_0) \sin \theta$;
 - 3) силы p_0 . . . $+p_0 (b_0 - a) \sin \theta$.
- следовательно, будет

$$\mathfrak{M}(\theta) = [(P_0 + p_0) a - P_0 (a - a_0) + p_0 \times (b_0 - a)] \sin \theta = (P_0 a_0 + p_0 b_0) \sin \theta$$

т. е. та же формула (5), как и для случая, рассмотренного в § 1, следовательно, и все прочие формулы останутся без перемены; таким образом, за ось наклонения можно брать точку G , здесь для статики брать ли точку G или C_0 безразлично, но для динамики, т. е. для рассмотрения движения гиросферы, необходимо брать за начало точку G , чтобы пользоваться законом движения центра тяжести системы при замороженном масле, вводя затем поправку на его перетекание.

21 ноября 1939 г.



Фиг. 4.

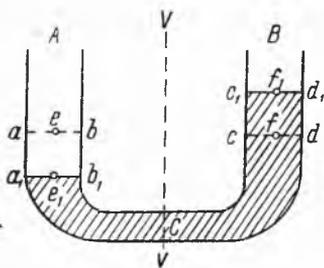
О КРЕНОМЕТРЕ, ПОКАЗЫВАЮЩЕМ НА КАЧКЕ ТО ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ, ОКОЛО КОТОРОГО КОРАБЛЬ КАЧАЕТСЯ¹

§ 1. На совещании 19 марта 1939 г. „о стандарте таблиц непотопляемости“ выяснилось, что приискание отсеков, подлежащих затоплению для выравнивания корабля, осуществляется всего проще, если за исходный аргумент брать крен и дифферент, полученные кораблем вследствие пробойны.

Этот крен и дифферент легко определить, когда корабль находится на тихой воде, но при качаниях корабля на зыби кренометр обыкновенного устройства показывает не то равновесное положение, которое нужно для входа в таблицы, а размахи, совершаемые кораблем около этого положения.

Между тем, нетрудно устроить такой кренометр, который при любой качке показывает то статическое положение равновесия, около которого корабль качается и которое он бы принял на тихой воде.

В настоящей записке излагаются теория и описание устройства такого кренометра, являющегося существенным дополнением к таблицам непотопляемости и облегчающим пользование ими.



Фиг. 1.

коленах будет стоять на одинаковом уровне: ab в колене A и cd в колене B .

§ 2. Обыкновенный кренометр в сущности представляет собою физический маятник. Для предлагаемого кренометра исходным пунктом является так называемый гидравлический маятник Ньютона, являющийся основой для теории и устройства систем Фрама (фиг. 1) A и B , заполненных жидкостью, скажем водою, и соединенных водопротоком C . Очевидно, что при покое и прямом положении такого маятника жидкость в обоих его

¹ Впервые опубликовано в „Трудах Военно-морской академии кораблестроения и вооружения им. А. Н. Крылова“, вып. II, 1948, стр. 27—34. (Ред.).

Если прикрыть, например, колено A , то нагнетая воздух, можно перегнать жидкость из колена A в колено B , так что уровень ее будет a_1b_1 в колене A и c_1d_1 в колене B ; если затем внезапно колено A открыть и воздух выпустить, то жидкость будет совершать гармонические колебания, закон которых выведен при изложении теории успокоительных систем Фрама.

Пусть точки e и f суть центры тяжести сечений ab и cd при прямом положении маятника; e_1 и f_1 — положения точек e и f при наклонном его положении; очевидно, что угол α между прямыми ef и e_1f_1 представит угол крена корабля, если маятник установлен в плоскости шпангоута, и угол дифферента, если маятник установлен в диаметральной плоскости корабля.

Очевидно, что (фиг. 2)

$$ee_1 = ff_1 = o'f \operatorname{tg} \alpha \approx of \alpha$$

Значит, поставив надлежащую тангенсовую шкалу, можно отсчитать углы α , т. е. крен или дифферент корабля соответственно положению маятника.

Но для нашей цели, если водопроток широкий, собственный период колебания жидкости будет малый и угол α будет следить за колебаниями корабля с некоторым опаздыванием по фазе, т. е. такой кренометр будет давать то же самое, как и обыкновенный, т. е. *мгновенное* и притом искаженное значение крена или дифферента, а не то среднее значение, которое нам надо.

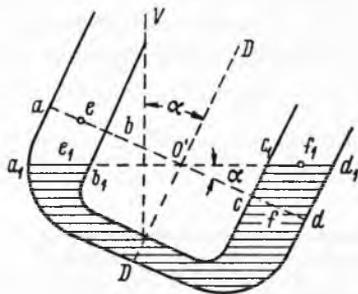
§ 3. Еще в 1894 г. я устроил кренометр-замыкатель для артиллерийской стрельбы на качке; там был мною применен успокоитель, представляющий в сущности маятник Ньютона с периодом в 120 секунд, что достигалось тем, что водопроток представлял длинную и тонкую свинцовую трубку от воздушного звонка, но после весьма продолжительной работы я это дело оставил, ибо не мог достигнуть требуемой точности ($0^{\circ}1'30''$) замыкания.

В настоящее время в гирокомпасах Аншютца применен гидравлический успокоитель, представляющий в сущности тот же маятник Ньютона, но с периодом собственных колебаний до 5000 секунд.

Такой период достигается надлежащим подбором жидкости и тем, что водопроток заменен трубками весьма малого внутреннего диаметра, к тому же стесненными проволокой, протянутой по их оси.

Протекание жидкости через узкую и длинную трубку следует так называемому закону Пуазейля, который для ясности дальнейшего изложения здесь выведен.

Пусть фиг. 3а представляет часть осевого сечения трубки весьма малого диаметра, по которой протекает жидкость, коэффициент внутрен-



Фиг. 2.

него трения (вязкости) которой равен μ . Фиг. 3 б представляет поперечное сечение этой трубки.

Некоторые наблюдения показали, что скорость тока у стенок трубки равна нулю; требуется при этом предположении определить распределение скоростей по поперечному сечению трубки при установившемся течении жидкости.

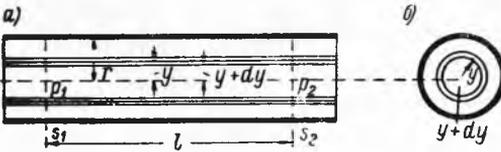
По симметрии можно считать, что скорость течения во всех точках поперечного сечения бесконечно тонкого цилиндрического слоя, заключенного между цилиндрами радиусов y и $y + dy$ (фиг. 3 б), одинакова. Обозначим эту скорость v и плотность (массу единицы объема жидкости) через σ .

Возьмем поперечные сечения трубки s_1 и s_2 , расстояние между которыми l и соответствующие давления p_1 и p_2 .

При таких обозначениях масса рассматриваемого слоя

$$m = \sigma 2\pi y l dy$$

Сила P_1 , действующая на эту массу параллельно оси трубки и происходящая от давления p_1 , есть



$$P_1 = p_1 2\pi y dy$$

и от давления p_2

$$P_2 = - p_2 2\pi y dy$$

Фиг. 3.

Силы, происходящие от вязкости, будут по поверхности радиуса $y + dy$:

$$F_1 = - \mu 2\pi (y + dy) \left(v + \frac{dv}{dy} dy \right) l$$

и по поверхности радиуса y :

$$F_2 = \mu 2\pi v l$$

Так как течение — равномерное, т. е. скорость v от времени t не зависит, то должно быть

$$P_1 + P_2 + F_1 + F_2 = 0$$

т. е. отбрасывая бесконечно малые второго порядка:

$$2\pi y (p_1 - p_2) - 2\pi \mu l \frac{dv}{dy} = 0$$

откуда следует

$$\frac{dv}{dy} = \frac{p_1 - p_2}{2\mu l} y$$

Значит,

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} y^2 + C$$

а так как при $y=r$ должно быть

$$(v)_{y=r} = 0$$

то будет

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (r^2 - y^2) \quad (1)$$

На основании этой формулы объем Q жидкости, протекающей по трубке в единицу времени, будет

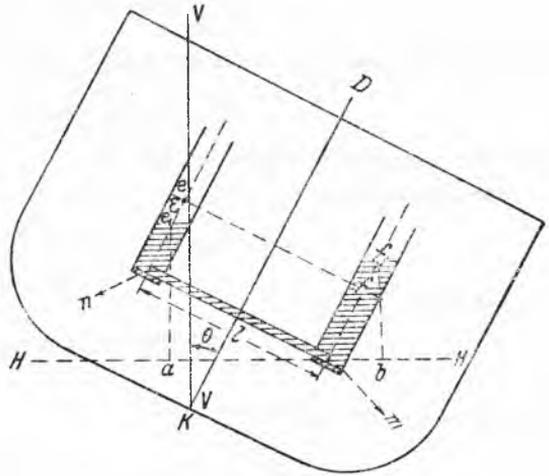
$$\begin{aligned} Q &= \int_0^r v 2\pi y dy = \pi \frac{p_1 - p_2}{2\mu l} \int_0^r (r^2 - y^2) y dy = \\ &= \frac{\pi (p_1 - p_2)}{2\mu l} \left[\frac{r^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^r = \frac{\pi r^4}{8\mu l} (p_1 - p_2) \end{aligned} \quad (2)$$

т. е. „расход“ пропорционален не r^2 или площади сечения трубки, а r^4 , т. е. квадрату площади сечения и градиенту $\frac{p_1 - p_2}{l}$ давления.

Это свойство движения жидкости по тонким трубкам открыл экспериментальным путем доктор медицины Пуазейль, представил Французской Академии наук, которой оно и было опубликовано в 1841 г., но еще в 1839 г. этот закон также экспериментальным путем был открыт в Германии физиком Хагеном (Hagen).

Будем для краткости и определенности речи называть Ньютонов маятник с весьма тонкой и длинной соединительной трубкой „маятником Пуазейля“.

§ 4. Положим, что на корабле, качающемся на зыби около некоторого наклонного положения равновесия, установлен в плоскости шпангоута маятник Пуазейля, и рассмотрим, как будет колебаться его уровень. Пусть фиг. 4 представляет мгновенное положение корабля в момент времени t и уровни жидкости в коленях маятника; составим



Фиг. 4.
 KD — диаметральной плоскость; KV — отвесная линия; HH — горизонт.

$$e_1 a = h_1 \approx z_1 + l\theta$$

$$f_2 b = h_2 \approx z_2$$

$$e_1 n = z_1$$

$$f_1 m = z_2$$

$$ee_1 = ff_1 = \epsilon$$

$$P_1 - p_2 = \sigma y (h_1 - h_2)$$

дифференциальное уравнение движения жидкости, иначе колебания ее уровней ab (фиг. 1) и cd , или, что то же, точек e и f .

Примем с приближением, достаточным для нашей цели, что боковая качка корабля представляется, согласно теории Фруда, уравнением

$$\Theta = \Theta_0 + M \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \gamma\right) + N \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \delta\right)$$

где Θ_0 — крен в положении статического равновесия корабля, около которого корабль качается, T — период свободных качаний корабля, τ — период волн. Делая указанные на фиг. 4 построения и обозначения и считая, что угол Θ „малый“, имеем:

$$\sin \Theta \approx \text{tg } \Theta = \Theta, \quad \cos \Theta \approx 1$$

Высота уровня в колене A . . . $h_1 = z_0 - \varepsilon + l\Theta$.

Высота уровня в колене B . . . $h_2 = z_0 + \varepsilon$.

Высота напора $h_1 - h_2 = l\Theta - 2\varepsilon$.

Разность давлений $p_1 - p_2 = \sigma g (h_1 - h_2) = \sigma g (l\Theta - 2\varepsilon)$.

Повышение уровня в колене B . . . $\varepsilon = z_2 - z_0$.

Скорость изменения уровня в колене B

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{dz_2}{dt} = \frac{Q}{F}$$

где F есть площадь сечения колен, так что

$$F = \pi R^2$$

где R — радиус сечения колен.

Но мы имели:

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\mu l} (p_1 - p_2) = \frac{\pi r^4}{8\mu l} \sigma g (l\Theta - 2\varepsilon)$$

Значит,

$$\frac{Q}{F} = \frac{r^4}{R^2} \cdot \frac{\sigma g}{8\mu l} (l\Theta - 2\varepsilon) =: \lambda [l\Theta - 2(z_2 - z_0)]$$

сделав для сокращения письма

$$\frac{r^4}{8\mu l R^2} \sigma g = \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{r^2 \sigma g}{8\mu l} =: \lambda$$

мы получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dz_2}{dt} + 2\lambda z_2 = \lambda l\Theta + 2z_0$$

причем

$$\Theta = \Theta_0 + M \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \gamma\right) + N \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \delta\right)$$

Общий интеграл этого уравнения будет вида

$$z_2 = C_2 e^{-2\lambda t} + Z_2 \tag{3}$$

где C_2 есть произвольная постоянная, определяемая по начальным условиям и Z_2 — частное решение уравнения

$$\frac{dZ_2}{dt} + 2\lambda Z_2 = \lambda l \Theta_0 + 2\lambda z_0 + \lambda l M \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \gamma\right) + \lambda l N \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \delta\right)$$

Ввиду множителя $e^{-2\lambda t}$ первый член погашается и исчезает, так что по истечении некоторого времени останется

$$z_2 = Z_2$$

Решение Z_2 будет вида

$$Z_2 = \frac{1}{2} l \Theta + z_0 + A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \gamma\right) + B \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \gamma\right) + D \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \delta\right) + E \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \delta\right)$$

где A, B, D, E — неопределенные коэффициенты.

Определим сперва величины A и B , после чего D и E получим простой заменой букв.

Итак, пусть

$$U = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \gamma\right) + B \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \gamma\right)$$

тогда U должно удовлетворять уравнению

$$\frac{dU}{dt} + 2\lambda U = \lambda l M \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \gamma\right)$$

Подставляя вместо U его значение и отождествляя, получаем для определения A и B уравнения

$$\frac{\pi}{T} A + \lambda B = 0;$$

$$\lambda A - \frac{\pi}{T} B = \frac{1}{2} \lambda l M$$

из которых следует:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^2 T^2}{\pi^2 + \lambda^2 T^2} l M; \quad B = -\frac{1}{2} \frac{\pi \lambda T}{\pi^2 + \lambda^2 T^2} l M$$

и затем через замену букв

$$D = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 \tau^2}{\pi^2 + \lambda^2 \tau^2} l N; \quad E = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \lambda \tau}{\pi^2 + \lambda^2 \tau^2} l N$$

Но мы видели, что

$$\lambda = \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{r^2 \sigma g}{8\mu l}$$

Ясно, что выбором отношения $\frac{r}{R}$ можно сделать λ сколь угодно малым, а тогда и величины A, B, D, E будут столь малые, что после того как член $Ce^{-2\lambda t}$ погасится, будет

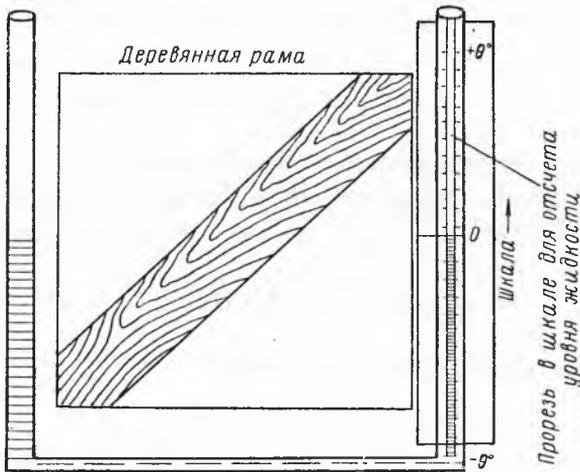
$$z_2 = z_0 + \frac{1}{2} l \theta_0$$

где z_0 есть уровень воды в колене B , от которого ведется счет.

Очевидно, что шкалу можно так установить, что при $\theta_0 = 0$ было бы и $z_0 = 0$, тогда останется

$$z_2 = \frac{1}{2} l \theta$$

т. е. маятник Пуазейля будет показывать угол θ_0 , т. е. тот угол крена, который корабль имел бы на тихой воде.



Фиг. 5. Схема гидравлического кренометра системы
А. Н. Крылова.

На основании вышеприведенного анализа мною выработано показанное на схеме (фиг. 5) устройство гидравлического кренометра, которое по своей простоте не требует описания.

Для крена удобно брать $l = 600$ мм.

Для дифферента удобно брать $l = 1200$ мм.

21 марта 1939 г.

НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О ПРОЕКТИРОВАНИИ МОЩНОГО ЛЕДОКОЛА В 40 000 *HP*¹

§ 1. Основные задания. Прежде всего необходимо выяснить основные задания, указав, на основании каких соображений они выработаны и в чем именно состоят.

Если задана только мощность ледокола, а остальное предоставлено составителям проекта, то из мощности и надо исходить, добавив к этому заданию необходимые дополнительные требования.

Дополнительные требования прежде всего должны состоять в установлении того, на какую работу будет тратиться развиваемая мощность в 40 000 сил, ибо здесь возможен целый ряд вариантов, как то:

- а) развитие возможно большего хода на чистой воде;
- б) развитие возможно большего хода в сплошном льду заданной толщины (например 2 м);
- в) преодоление льда *наибольшей* толщины, при самом малом ходе (4—5 узлов);

Представляется, что наиболее рациональным является *последнее* требование, ибо при исполнении этого требования мощному ледоколу будут доступны такие районы Арктики, которые существующим ледоколам типа „Сталин“ недоступны. Другой вопрос, нужно это или нет?

г) с вопросами „а“, „б“, „в“ весьма тесно связан вопрос об углублении ледокола в полном грузу. Должно ли это углубление быть 9 или 10 м вообще, *какое именно и почему именно?*

д) как только будут установлены эти основные пункты, то сейчас же устанавливается и тип винтов, т. е. должны ли винты быть *скоростные* или *ледокольные*, т. е. иметь наибольший к. п. д. при *наибольшей* скорости ледокола, или же *давать* наибольшее *упорное* давление при весьма малой скорости.

Мне кажется, что надо заботиться о винтах ледокольных.

§ 2. Установив задания, указанные в § 1, надо исследовать тот первичный источник, которым энергия будет доставляться. Здесь опять целый ряд возможных вариантов, причем обыкновенные поршневые паровые механизмы сами собою отпадают и остаются:

¹ Публикуется впервые по рукописи. (Архив АН СССР, ф. 759, оп. 1, № 224). (Ред.).

А. Дизеля.

Б. Турбинные механизмы.

Как от дизелей, так и от турбин передача работы гребному валу может быть разнообразная.

А. От дизелей:

а) гидравлической муфтой Фетингера или иной *испытанной системы*;

б) электричеством;

в) возможность зубчатой передачи является весьма сомнительной.

Б. Паротурбинная установка:

а) паровые котлы надо взять *водотрубные* с нефтяным отоплением, или же

б) с пылевидным угольным отоплением, но водотрубные же.

Турбины. Здесь опять могут быть разные варианты:

а) зубчатая передача непосредственно на гребной вал, с промежуточной сдающей муфтой (электромагнитной или иной);

б) передача гидромуфтой Фетингера или иной испытанной системы;

в) электропередача с промежуточной сдающей муфтой между валом мотора и дейдвудной частью гребного вала.

Все варианты должны быть разработаны в эскизном виде на основании имеющихся данных как литературных, так, главным образом, наших, по отношению к весу и потребному месту, со всеми вспомогательными механизмами.

В сборании и обработке всех потребных для составления эскизов данных и должна состоять *первая* стадия исследовательской работы по проекту мощного ледокола.

§ 3. Одновременно с разработкой типа и системы главных механизмов должна идти и разработка эскизного проекта корпуса.

Разработка проекта корпуса должна быть основана всецело на данных, полученных по опыту постройки ледоколов „Сталин“, „Молотов“, „Каганович“, ибо относительно этих ледоколов имеются все данные, проверенные: 1) опытом разработки чертежей с надлежащими расчетами; 2) опытом приемных испытаний; 3) опытом плаваний ледокола „Сталин“.

Результаты этой практики получены *нашими* инженерами при вполне определенных условиях, поэтому все эти данные заслуживают несравненно большего доверия, нежели литературные, особенно заграничные, относительно которых весьма трудно установить, где кончается действительность и где начинается реклама и кому сколько за рекламу „*дадено*“.

Не на моделях в бассейне с „парафиновым“ льдом, и даже не на моделях, испытываемых в прудах и озерах, покрытых тонким льдом, надо почерпать требуемые данные, а в анализе того, что известно о плавании ледокола „Сталин“ и о сорокалетней службе ледокола „Ермак“. Какие бы тщательные опыты с моделями ни были произведены, они

ничего не дадут, ибо неизвестно, как от модельных результатов переходить к натурным.

Чтобы установить такой переход, надо бы испытать *всесторонне* в Арктике ледокол „Сталин“ и параллельно его модель — в пруду или бассейне.

Натурные испытания даже обычных судов на мерной миле или на открытой воде в Балтике или Черном море представляют большие трудности, а *систематические испытания*, которые надо отличать от *наблюдений при плавании* ледокола по „назначению“, практически едва ли исполнимы и потребуют не одну, а несколько кампаний.

„Сталин“, „Молотов“, „Каганович“ и старик „Ермак“ — вот те модели, которые надо исследовать и использовать при проектировании мощного ледокола, а не задаваться фантастическими испытаниями моделей в малом виде.

Единственные модельные испытания, которые необходимо произвести, это испытания для выработки *винтов*: может оказаться, что найдется единый винт, соединяющий качества скоростного и ледокольного. Здесь последнее слово должно принадлежать Эд. Эд. Папмелю с его непревзойденной опытностью в этом деле.

Главной документацией по отношению к плавающим ледоколам должны служить:

- 1) Общие их чертежи и расчеты не только геометрические, но и прочности;
- 2) весовые журналы как по корпусу, так и механизмам;
- 3) журналы и акты приемных испытаний;
- 4) вахтенные журналы по их плаваниям в Арктике;
- 5) сведения об авариях (поломки гребных валов, лопастей винтов, вмятины корпуса и т. п.).

Эти сведения должны быть приведены в полную ясность, представлены, где возможно, в табличной форме, и сопоставлены между собою, в особенности по отношению ледоколов „Сталин“, его *sister-ship* „Молотов“ и „Каганович“, который построен другим заводом.

Как уже сказано, исходным данным для проектируемого ледокола служит его мощность 40 000 сил, при поршневых махинациях — *индикаторная*, при турбинах — *на валу*.

По этому исходному данному и надо определить сперва:

1. *Главные размерения* ледокола. Здесь можно применить, как известно, разные способы:

а) самый простой, но и самый грубый, это по мощности механизмов, приходящейся на 1 т водоизмещения в полном грузу. На всех наших больших ледоколах, эта мощность составляет 1 силу на тонну водоизмещения; для проектируемого ледокола это дало бы водоизмещение в 40 000 т, а так как углубление должно бы оставаться приблизительно одинаковым, то главные размерения были бы пропорциональны корню

квадратному из отношения мощностей и мы пришли бы к совершенно неприемлемому результату, что длина и ширина проектируемого ледокола должны быть взяты в два раза больше, нежели у ледокола „Сталин“, т. е.

$$\begin{aligned} \text{Длина} & L \approx 220 \text{ м} \\ \text{Ширина} & B \approx 44 \text{ „} \\ \text{Углубление} & H \approx 9 \text{ „} \end{aligned}$$

Это показывает, что надо брать на тонну водоизмещения не 1 силу, а больше, и мы увидим, что при постоянстве углубления, надо предыдущие числа делить на \sqrt{n} , где n есть число сил на тонну, и мы получим такую табличку:

Таблица главных размерений

$n = \frac{IHP}{D}$	D в тоннах	\sqrt{n}	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	L в метрах	B в метрах	H в метрах
1.0	40000	1.00	1.000	220	44.0	9.0
1.2	33300	1.09	0.917	201	40.2	D°
1.4	28600	1.18	0.848	186	37.2	D°
1.6	25000	1.26	0.794	175	35.0	D°
1.8	22200	1.34	0.746	164	32.8	D°
2.0	20000	1.41	0.709	156	31.2	D°
2.2	18200	1.48	0.676	149	29.8	D°
2.4	16100	1.55	0.645	144	28.8	D°
2.6	15400	1.61	0.621	137	27.4	D°
2.8	14300	1.67	0.599	132	26.4	D°
3.00	13300	1.73	0.578	127	25.4	9.0

Из этой таблички видно, что значения n , равные 2.6, 2.8, 3.0, приводят к приемлемым главным размерениям, и взяв, например,

$$D = 15000 \text{ т}$$

мы получим:

$$n = 2.67; L = 135 \text{ м}; B = 27.0 \text{ м}; H = 9.0 \text{ м}$$

Такие размерения уже являются практически приемлемыми.

Само собою разумеется, что эти размерения можно, как обычно, варьировать и уточнять, несколько изменяя отношения между ними, изменяя меры полноты и другие характеристики обводов ледокола, соответственно избранным прототипам — ледоколам „Сталин“, „Красин“, „Ермак“.

Так, например, если бы было признано, что углубление может быть увеличено, скажем, вместо

$$H = 9.00 \text{ м}$$

на

$$H_1 = 9.1, 9.2, \dots, 9.5 \text{ м}$$

то, сохраняя значения D и отношения $\frac{B}{L}$, надо было бы предыдущие числа умножить на $\sqrt{\frac{H}{H_1}}$, и мы получили бы, например, при

$$D = 15000 \text{ т и } H_1 = 9.5 \text{ м}$$

$$\sqrt{\frac{H}{H_1}} = 0.973; L_1 = 132 \text{ м}; B_1 = 26.4 \text{ м}$$

а если бы мы пожелали сохранить $B = 27.0$ м, то было бы

$$L_1 = \frac{H}{H_1} L = 129.8 \text{ м} \sim 130 \text{ м}$$

Очевидно, что таких вариантов можно выбрать сколько угодно.

II. Следующим весьма важным элементом является протяжение ледового пояса по высоте и толщина его.

Для определения этого элемента можно рассуждать следующим образом.

Сопротивление льда излому пропорционально h^2 , согласно одной гипотезе, и пропорционально h^3 , согласно другой гипотезе; вместе с тем, *если принять*, что скорость хода в сплошном льду для проектируемого ледокола и для прототипа *одинакова*, то упорное давление должно быть пропорционально сопротивлению ломаемого льда.

При этих предположениях мы будем иметь или пропорцию

$$h^2 : h_1^2 = P : P_1 = \epsilon : \epsilon_1 = 10000 : 40000 \quad (1)$$

или

$$h^3 : h_1^3 = P : P_1 = \epsilon : \epsilon_1 = 10000 : 40000 \quad (2)$$

здесь h, h_1 — толщины льда; P и P_1 — упорные давления; ϵ и ϵ_1 — мощности, отношения которых есть

$$\frac{10000}{40000} = \frac{1}{4}$$

Из первой пропорции следует

$$h_1 = 2h \quad (1')$$

из второй

$$h_1 = \sqrt[3]{4} h = 1.59 h \approx 1.6 h \quad (2')$$

Если принять, что ледокол „Сталин“ преодолевает полярный лед толщиной $h = 0.8$ м, то для проектируемого ледокола будет

$$h_1 = 2 \cdot 0.8 = 1.6 \text{ м} \quad (1'')$$

или

$$h_1 = 1.6 \cdot 0.8 \approx 1.3 \text{ м} \quad (2'')$$

Поэтому можно принять приближенно

$$h_1 \approx 1.5 \text{ м}$$

Считая, что ледовой пояс должен возвышаться примерно на 0.75 м выше грузовой ватерлинии в полном грузу и опускаться примерно на 1 м ниже льда, получим, что высота ледового пояса должна быть

$$a = 1.5 + 0.75 + 1 = 3.25 \text{ м}$$

В следующей табличке приведены толщины преодолеваемого льда (h) и соответственные высоты ледового пояса (a), полученные подобным же образом, принимая, что ледокол „Сталин“ способен преодолевать полярный лед толщиной не 0.8 м, а 1, 1.5 и 2 м.

h	h_1	a
0.8	1.5	3.25
1.0	1.8	3.5
1.5	2.7	4.5
2.0	3.6	5.5

Вмятины в ледовом поясе получают, главным образом, вследствие ударов о лед, когда ледокол идет по разводьям; эти удары пропорциональны количеству движения, т. е. водоизмещению ледокола; так как продолжительность удара, вследствие разрушения льда и жесткости ледового пояса, велика по сравнению с периодом колебания того участка ледового пояса, которым удар поглощается, то прочность ледового пояса можно рассчитывать *статически*.

Для расчета веса корпуса надо толщину основной обшивки и набора считать, исходя от прототипа и к этому весу прибавлять вес добавочной ледовой обшивки и усиленного набора ледового пояса по действительному их протяжению и размерам.

Огульный же счет будет неправилен, ибо высота ледового пояса не следует подобию с прототипом.

Вот те основные положения, которых, по моему мнению, следует придерживаться при составлении первоначального эскизного проекта; само собою разумеется, что здесь упущен целый ряд подробностей, которые должны быть разработаны в технических условиях на проектирование ледокола. Эти технические условия должны быть согласованы с условиями, которые были даны для проектирования прототипа, и со всеми в них дополнениями и отступлениями, внесенными по требованиям практики во время постройки.

29 декабря 1940 г.

КАРДАНОВ ПОДВЕС НА КОРАБЛЕ¹

Глава I

МАЯТНИКОВЫЙ КРЕНОМЕТР

§ 1. Простейшим и наиболее употребительным прибором, служащим для измерения крена корабля, а также и размахов его боковой качки, является *маятниковый кренометр*.

С изложения теории этого прибора мы и начнем, чтобы выяснить причины и величины возможных погрешностей его показаний.

Простейший случай качки корабля на волнении имеет место, когда корабль на крупной и правильной океанской зыби идет к волне лагом.

В этом случае корабль, кроме хода, имеет двоякое движение:

а) центр тяжести корабля описывает в плоскости бега волн, с которою совпадает плоскость шпангоутов, круговую орбиту, диаметр которой можно принять равным высоте волны; время обращения по этой орбите равно *периоду волн*, движение равномерное;

б) кроме этого орбитального поступательного и одинакового для всех точек корабля движения, он совершает еще вращательное колебательное движение около своей продольной оси, проходящей через его центр тяжести. Это колебательное движение представляет так называемую боковую качку корабля, состоящую из наложения двух родов колебаний, из коих одно имеет период, равный периоду волны, другое — период свободных качаний корабля на тихой воде.

Подробное изложение теории качаний корабля на волнении можно найти в моем курсе „Качка корабля“, изданном в 1938 г. Военно-морской академией имени К. Е. Ворошилова.²

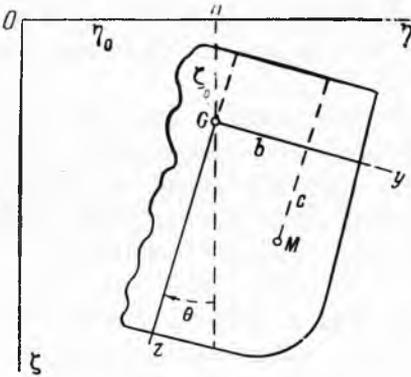
¹ Публикуемый труд академика А. Н. Крылова „Карданов подвес на корабле“ подписанный автором 12 апреля 1941 г., представляет собой наиболее полный из вариантов, хранящихся в Архиве Академии Наук СССР, и состоит из трех глав: Глава I. Маятниковый кренометр. Глава II. Карданов подвес. Глава III. О колебательном движении тела в сопротивляющейся среде. Третья глава, в форме приложения, почти целиком вошла в труд „О боковой качке корабля“ (Собрание трудов, т. XI, стр. 370—390), почему Комиссией было решено не включать ее в настоящий том. В полном объеме „Карданов подвес на корабле“ напечатан в „Трудах Военно-морской академии кораблестроения и вооружения им. А. Н. Крылова“, вып. VI, стр. 7—112. (Ред.).

² А. Н. Крылов, Собрание трудов, т. XI, 1951, стр. 136—194. (Ред.).

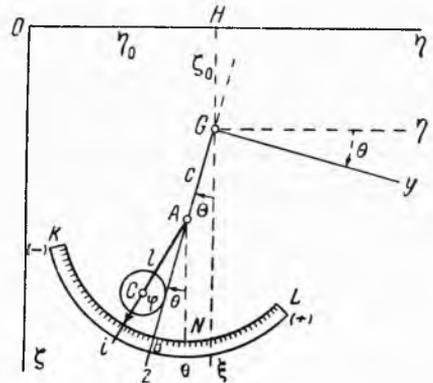
§ 2. Таким образом, движение любой точки корабля совершается параллельно плоскости бега волн, которую мы примем за координатную плоскость $\eta\zeta$, неподвижную в пространстве (предполагая, что корабль хода не имеет), направив ось ζ вертикально *вниз*.

Начало координат возьмем в точке O , в которой находился бы центр тяжести G корабля при равновесии и покое на тихой воде. Эту точку можно принять за центр описываемой центром тяжести ($\underline{\text{Ц. Т.}}$) корабля орбиты.

В корабле примем за неизменно с ним связанные оси координат $Gxyz$, начало коих G совпадает с $\underline{\text{Ц. Т.}}$ корабля. Ось Gx есть горизонтально-продольная ось корабля, направленная в нос; ось Gy есть поперечная ось корабля, направленная перпендикулярно диаметральной плоскости к правому борту; ось Gz — в диаметральной плоскости вниз.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Таким образом, положение корабля во всякий момент времени t определяется (фиг. 1) координатами

$$\eta_0 = OH; \quad \zeta_0 = HG \quad (1)$$

его центра тяжести G и углом его крена θ . Положение всякой точки E в корабле определяется ее координатами

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c \quad (2)$$

Положение этой точки в пространстве будет

$$\begin{aligned} \zeta &= a \\ \eta &= \eta_0 + b \cos \theta - c \sin \theta \\ \zeta &= \zeta_0 + b \sin \theta + c \cos \theta \end{aligned} \quad (3)$$

Положим теперь, что на корабле в точке A , координаты которой суть

$$x = 0; \quad y = 0; \quad z = c \quad (4)$$

подвешен маятник, чечевица коего представляет плоский диск, $\underline{\text{Ц. Т.}}$ которого вместе со стержнем есть точка C и длина (фиг. 2)

$$AC = l \quad (5)$$

причем на продолжении стержня укреплен указатель i , показывающий угол φ наклона маятника к диаметральной плоскости корабля, по дуге KL . Требуется определить движение этого маятника на корабле, идущем лагом к волне и, значит, совершающем только орбитальное движение и боковую качку.

§ 3. На основании сказанного в §§ 1 и 2, орбитальное движение определяется уравнениями

$$\begin{aligned} r_0 &= r \sin \frac{2\pi t}{\tau} \\ \zeta_0 &= r \cos \frac{2\pi t}{\tau} \\ \xi_0 &= \text{const.} \end{aligned} \quad (6)$$

где r есть полувысота волны, τ — период волны.

Боковая качка определяется уравнением вида

$$0 = A \sin \left(\frac{2\pi t}{T_0} + \alpha \right) + B \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau} + \beta \right) \quad (7)$$

причем T_0 есть период свободных качаний корабля, A, α, B, β — постоянные, представляющие амплитуду и начальную фазу свободных и вынужденных качаний корабля.

Все эти величины предполагаются заданными и движение корабля вполне определенным.

Очевидно, что положение кренометра в любой момент времени t вполне определяется значением угла φ в этот момент, т. е. движением маятника кренометра.

Чтобы составить уравнения этого движения, воспользуемся их второй Лагранжевой формой:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \Phi \quad (8)$$

где T есть живая сила маятника, рассматриваемая как функция параметра φ , Φ — множитель при $\delta\varphi$ в выражении элементарной работы

$$\delta U = \Phi \delta\varphi \quad (9)$$

Живая сила маятника найдется из равенства

$$2T = 2T_1 + 2T_2 \quad (10)$$

причем T_1 есть живая сила поступательного движения маятника, T_2 — живая сила вращательного (колебательного) его движения, ибо ось подвеса маятника параллельна главной оси инерции его, которая перпендикулярна к плоскости диска, совпадающей с плоскостью шпангоута.

Итак, будет

$$\begin{aligned} 2T_1 &= M(\gamma'^2 + \zeta'^2) \\ 2T_2 &= I_0(\varphi' + \theta')^2 \end{aligned} \quad (11)$$

где M есть масса маятника (диск и стержень), I_0 — момент инерции маятника относительно оси, проведенной через его центр тяжести C , параллельно оси подвеса, проходящей через точку A .

На основании формул (3) и (4) имеем:

$$\begin{aligned} \eta_c &= \eta_0 - c \sin \theta - l \sin (\theta + \varphi) \\ \zeta_c &= \zeta_0 + c \cos \theta + l \cos (\theta + \varphi) \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 2T_1 &= M \{ [\eta_0 - c \sin \theta - l \sin (\theta + \varphi)]^2 + \\ &+ [\zeta_0 + c \cos \theta + l \cos (\theta + \varphi)]^2 \} = M [\eta_0'^2 + \zeta_0'^2 + c^2 \theta'^2 + l^2 (\theta' + \varphi')^2 - \\ &- 2c\eta_0' \theta' \cos \theta - 2c\zeta_0' \theta' \sin \theta] - 2Ml (\theta' + \varphi') [\eta_0' \cos (\theta + \varphi) + \\ &+ \zeta_0' \sin (\theta + \varphi) + c\theta' \cos \varphi] \end{aligned} \quad (12)$$

Живая же сила вращательного движения маятника около его главной оси инерции будет

$$2T_2 = I_0 (\theta' + \varphi')^2$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = (I_0 + MI^2) (\theta' + \varphi') - Ml [\eta_0' \cos (\theta + \varphi) + \zeta_0' \sin (\theta + \varphi) - c\theta' \cos \varphi]$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'} \right) &= (I_0 + MI^2) \cdot (\theta'' + \varphi'') - Ml [\eta_0'' \cos (\theta + \varphi) + \\ &+ \zeta_0'' \sin (\theta + \varphi) - c\theta'' \cos \varphi] + Ml (\theta' + \varphi') [\eta_0' \sin (\theta + \varphi) - \\ &- \zeta_0' \cos (\theta + \varphi)] - Mlc\theta' \varphi' \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -Ml (\theta' + \varphi') [-\eta_0' \sin (\theta + \varphi) + \zeta_0' \cos (\theta + \varphi) - c\theta' \sin \varphi]$$

$$\Phi \delta \varphi = Mg \frac{\partial \zeta_0}{\partial \varphi} \delta \varphi = -Mgl \sin (\theta + \varphi) \delta \varphi$$

Значит,

$$\Phi = Mgl \sin (\theta + \varphi)$$

Таким образом, уравнение движения маятника будет

$$\begin{aligned} (I_0 + MI^2) (\theta'' + \varphi'') - Ml [\eta_0'' \cos (\theta + \varphi) + \zeta_0'' \sin (\theta + \varphi) - \\ - c\theta'' \cos \varphi] - Mlc\theta'^2 \sin \varphi = -Mgl \sin (\theta + \varphi) \end{aligned} \quad (13)$$

Положим $I_0 + MI^2 = I$.

Очевидно, что I есть момент инерции маятника относительно оси подвеса, $\theta'' + \varphi''$ — абсолютное угловое ускорение маятника.

Заметим, что формулы (12) имеют место для всякого орбитального движения корабля, а не только для равномерного кругового, поэтому уравнение (13), которое напомним так:

$$\begin{aligned} I (\theta'' + \varphi'') + Mgl \sin (\theta + \varphi) = Ml [\eta_0'' \cos (\theta + \varphi) + \\ + \zeta_0'' \sin (\theta + \varphi) - c\theta'' \cos \varphi + c\theta'^2 \sin \varphi] \end{aligned}$$

является общим, какими бы функциями времени t не выражались переменные $\gamma_0, \zeta_0, \theta$, которыми определяется движение корабля, идущего лагом к волне.

Очевидно, что если бы корабль находился на тихой воде и лежал неподвижно с креном θ_0 , то маятник мог бы совершать свободные колебания, уравнение которых было бы

$$I(\theta_0 + \varphi)'' + Mgl \sin(\theta_0 + \varphi) = 0 \quad (14)$$

иначе

$$I\varphi'' + Mgl \sin(\theta_0 + \varphi) = 0 \quad (14')$$

Это уравнение показывает, что положение равновесия маятника есть

$$\varphi = -\theta_0$$

т. е. стержень маятника стоял бы вертикально и индекс i показывал бы по дуге kL отсчет θ_0 — крен корабля.

Разделим уравнение (13) на I и положим

$$\frac{Mgl}{I} = n^2 \quad (14'')$$

тогда это уравнение может быть написано так:

$$(\theta + \varphi)'' + n^2 \sin(\theta + \varphi) = n^2 \left[\frac{\gamma_0''}{g} \cos(\theta + \varphi) + \frac{\zeta_0''}{g} \sin(\theta + \varphi) - \frac{c\theta''}{g} \cos \varphi + \frac{c\theta'^2}{g} \sin \varphi \right] \quad (15)$$

Сличая это уравнение с предыдущими, видим, что оно представляет то же уравнение (14), к которому прибавлен стоящий в правой части член, происходящий от орбитального движения и боковой качки корабля, значит, возмущения показаний кренометра этими движениями производимые.

В общем виде уравнение (15) точно проинтегрировано быть не может и для него могут быть найдены лишь приближенные решения, например, по методе последовательных приближений.

§ 4. Положим сперва, что углы

$$\theta, \varphi, \theta + \varphi \quad (16)$$

малые, так что можно принимать

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \theta, \quad \sin \varphi = \varphi, \quad \sin(\theta + \varphi) = \theta + \varphi \\ \cos \theta &= \cos \varphi = \cos(\theta + \varphi) = 1 \end{aligned} \quad (16')$$

тогда уравнение (15) примет вид

$$(\theta + \varphi)'' + n^2(\theta + \varphi) = n^2 \left[\frac{\gamma_0''}{g} + \frac{\zeta_0''}{g}(\theta + \varphi) - \frac{c\theta''}{g} + \frac{c\theta'^2}{g}\varphi \right] \quad (17)$$

Мы покажем, что члены

$$\frac{\gamma_0''}{g}, \quad \frac{\zeta_0''}{g} \text{ и } \frac{c\theta'^2}{g}$$

„малые“, приблизительно того же порядка, как θ , φ , $(\theta + \varphi)$, который мы принимаем за первый, поэтому члены

$$\frac{\zeta_0''}{g} (\theta + \varphi), \quad \frac{c\theta'^2}{g} \varphi$$

будут порядка выше первого и могут в первом приближении быть отброшены, тогда уравнение (17) напишется в таком виде:

$$(\theta + \varphi)'' + n^2(\theta + \varphi) = \frac{n^2}{g} \gamma_0'' \quad (18)$$

Когда корабль идет к волне лагом, то по формуле (6) будет

$$\gamma_0 = r \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

Значит,

$$\frac{1}{g} \gamma_0'' = -\frac{4\pi^2 r}{\tau^2 g} \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

Но для трохоидаальных волн период

$$\tau = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}$$

где λ есть длина волны, тогда

$$\frac{4\pi^2 r}{\tau^2 g} = \frac{2\pi r}{\lambda} = \theta_0$$

где θ_0 есть наибольший волновой склон. Пусть будет

$$\frac{2\pi}{\sigma} = n, \text{ т. е. } n^2 = \frac{4\pi^2}{\sigma^2}$$

тогда σ есть период свободных колебаний маятника кренометра.

Уравнение (18) примет вид

$$(\theta + \varphi)'' + \frac{4\pi^2}{\sigma^2} (\theta + \varphi) = -\frac{4\pi^2}{\sigma^2} \theta_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \quad (19)$$

и его общий интеграл будет

$$\theta + \varphi = C_1 \cos \frac{2\pi t}{\sigma} + C_2 \sin \frac{2\pi t}{\sigma} \frac{\frac{4\pi^2}{\sigma^2}}{\frac{4\pi^2}{\sigma^2} - \frac{4\pi^2}{\tau^2}} \theta_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \quad (20)$$

где C_1 и C_2 — постоянные произвольные, которые определяются по начальным условиям, но в нашем случае в этом нет надобности, ибо эти члены с течением времени погашаются вследствие сопротивления воздуха качаниям маятника. В уравнение (19) это сопротивление не

включено по его малости и потому, что оно, кроме погашения *свободных* колебаний маятника, практически других влияний не оказывает.

Множитель

$$-\frac{\frac{4\pi^2}{\sigma^2}}{\frac{4\pi^2}{\sigma^2} - \frac{4\pi^2}{\tau^2}} = -\frac{\tau^2}{\tau^2 - \sigma^2} \quad (21)$$

поэтому после погашения свободных колебаний будет

$$\theta + \varphi = -\frac{\tau^2}{\tau^2 - \sigma^2} \theta_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \quad (22)$$

Фиг. 2 показывает, что наклонение (крен) корабля в рассматриваемый момент есть $+\theta$ и кренометр показывает по дуге KL отсчет $-\varphi$, вместо отсчета $ON = \theta$, следовательно, погрешность показания кренометра есть

$$\varepsilon = \theta - (-\varphi) = \theta + \varphi$$

формула (22) и дает величину этой погрешности, происходящую от *орбитального* движения, когда кренометр помещен в наиболее благоприятном месте, т. е. или в \square . Т. корабля, или так, что ось подвеса его по продолжении проходит через \square . Т. корабля.

Формула (22) показывает, что погрешность ε зависит от множителя

$$\frac{\tau^2}{\tau^2 - \sigma^2} = \frac{1}{1 - \frac{\sigma^2}{\tau^2}}$$

который в свою очередь зависит от отношения $\frac{\sigma^2}{\tau^2}$.

Наиболее замечательны два крайних случая:

- 1) отношение $\frac{\sigma}{\tau}$ весьма мало;
- 2) отношение $\frac{\sigma}{\tau}$ весьма велико.

Случай, когда отношение $\frac{\sigma}{\tau}$ близко к 1, мы исключаем из нашего рассмотрения, как соответствующий резонансу, когда необходимо принимать во внимание погашение размахов сопротивлением среды или иным устройством.

В первом случае величина $\frac{\sigma^2}{\tau^2}$ будет весьма мала по сравнению с 1, и множитель

$$-\frac{\tau^2}{\tau^2 - \sigma^2} = \frac{1}{1 - \frac{\sigma^2}{\tau^2}} \approx 1$$

так что

$$\varepsilon = -\theta_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \quad (23)$$

где θ_0 есть наибольший волновой склон.

С тою степенью приближения, с которою ведется весь наш расчет, т. е. когда вместо трохондального волнового профиля взят синусоидаль-

ный, тогда уравнение волны, бегущей в сторону положительной оси $O\eta$, будет

$$\zeta = r \cos 2\pi \left(\frac{\eta}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right) \quad (24)$$

Когда корабль идет лагом к волне, то центр тяжести его колеблется в плоскости $O\zeta\eta$ от $+r$ до $-r$, что в фазе $2\pi \left(\frac{\eta}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right)$ составляет погрешность не более $\theta_0 = \frac{2\pi r}{\lambda}$.

Уклон волнового профиля составляет

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = -\frac{2\pi r}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{\eta}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right) = -\theta_0 \sin 2\pi \left(\frac{\eta}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right) \quad (25)$$

и, значит, с точностью до членов второго порядка относительно θ , будет

$$\frac{d\zeta}{d\eta} \approx \theta_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \quad (26)$$

для точки $\eta = 0$ близ которой находится все время \square . Т. корабля G . Таким образом, величина

$$-\theta_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \approx n\hat{G}\zeta \quad (27)$$

представляет угол между нормалью Gn в точке G к волновому профилю и осью $O\zeta$, иными словами, кренометр весьма малого периода, *подвешенный на уровне центра тяжести корабля*, показывает при ходе корабля лагом к волне его крен не относительно истинной вертикали, а относительно нормали к волновому профилю, иначе, наклонение грузовой ватерлинии не к истинной горизонтальной плоскости, а к поверхности волны в том месте, где корабль находится в рассматриваемое мгновение.

§ 5. Обыкновенные кренометры, отпускаемые на большие суда, имеют период σ (двойного размаха) около 1 сек., т. е. *весьма малый* как по сравнению с периодом T_0 корабля, так и по сравнению с периодом τ волны, причем один из этих кренометров помещается в машинном отделении приблизительно на уровне грузовой, т. е. близко к \square . Т. корабля по высоте; период двойного размаха корабля составляет 6—15 сек., значит, погрешность ϵ составит от $\left(1 + \frac{1}{36}\right) \theta_0$ до $\left(1 + \frac{1}{225}\right) \theta_0$, т. е. практически $\sim \theta_0$, и можно сказать, что *кренометр, находящийся в машинном отделении показывает „наклон к волне“*.

Но, кроме кренометра, находящегося в машинном отделении, ставят еще кренометр на мостике в ходовой или штурманской рубке; для этого кренометра координата s , т. е. возвышение над \square . Т. корабля, на больших судах составляет 10 м и более, и в уравнении (18) член

$$-\frac{n^2 c \theta''}{g}$$

отброшен быть не может и к правой части уравнения (19) надо прибавить член

$$-\frac{n^2}{g} c \theta'' = -\frac{4\pi^2}{\sigma^2} \cdot \frac{c}{g} \left[\frac{4\pi^2}{T_0^2} A \sin\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \alpha\right) + \frac{4\pi^2}{\tau^2} B \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \beta\right) \right] \quad (28)$$

соответственно чему к частному решению (20) прибавится выражение

$$\left[\frac{A}{T_0^2 - \sigma^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \alpha\right) + \frac{B}{\tau^2 - \sigma^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \beta\right) \right] \quad (29)$$

и вместо формулы (22) будет

$$\theta + \varphi = -\frac{\tau^2}{\tau^2 - \sigma^2} \theta_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} + \frac{4\pi^2}{\sigma^2} \cdot \frac{c}{g} \left[\frac{A}{T_0^2 - \sigma^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \alpha\right) + \frac{B}{\tau^2 - \sigma^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \beta\right) \right] \quad (30)$$

Так как начальные фазы α и β могут иметь самые разнообразные значения, то наибольшая величина $\theta + \varphi$ может составлять сумму абсолютных значений коэффициентов при синусах правой части предыдущего равенства, т. е.

$$|\theta + \varphi| \leq \frac{\tau^2}{\tau^2 - \sigma^2} \theta_0 + \frac{4\pi^2 c}{\sigma^2 g} \left| \frac{A}{T_0^2 - \sigma^2} \right| + \frac{4\pi^2 c}{\sigma^2 g} \left| \frac{B}{\tau^2 - \sigma^2} \right| \quad (31)$$

Возьмем для примера

$$T_0 = 15 \text{ сек.}; \tau = 10 \text{ сек.}; \sigma = 1 \text{ сек.}; c = 10 \text{ м}; A = 20^\circ; B = 10^\circ; \\ \theta_0 = 7^\circ$$

тогда будет

$$\varepsilon = |\theta + \varphi| \leq \frac{100}{100 - 1} \theta_0 + \frac{40 \cdot 10}{9.8} \cdot \frac{20^\circ}{225 - 1} + \frac{40 \cdot 10}{9.8} \cdot \frac{10^\circ}{100 - 1} \\ \varepsilon = |\theta + \varphi| \leq 7^\circ.1 + 3^\circ.7 + 4.4 = 15^\circ.2 \quad (32)$$

Таким образом, погрешность показаний кренометра в этом случае может достигать $15^\circ.2$ и когда истинный размах качки составляет 30° , кренометр будет иногда показывать 45° , а иногда 15° .

Отсюда ясно, сколь малого доверия заслуживают показания кренометра малого периода, находящегося в штурманской рубке, расположенной высоко над Ц. Т. корабля.

Еще хуже „усовершенствованные“ кренометры с двойным маятником и с периодом около 7 сек. Для такого кренометра будет

$$\varepsilon = |\theta + \varphi| \leq \frac{100}{100 - 49} \cdot 7 + \frac{40 \cdot 10}{9.8} \cdot \frac{20}{225 - 49} + \frac{40 \cdot 10}{9.8} \cdot \frac{10^\circ}{100 - 49} \\ \varepsilon = |\theta + \varphi| \leq 13.7 + 4.6 + 7.8 = 26^\circ.1 \quad (33)$$

т. е. при истинных размахах качки в 30° кренометр будет показывать то 4° , то 56° ; вот почему и приходится встречать в донесениях капи-

танов сообщения о размахах качки свыше 50° на сторону — таковы были показания находящегося в рубке кренометра, а не качания корабля.¹ Погрешность такого кренометра, поставленного в машинном отделении ($c=0$) составит 13.7, так что показания его составят кругло от 16 до 44° вместо 30° .

§ 6. Другой крайний случай есть тот, когда период σ кренометра весьма велик по сравнению как с периодом волны τ , так и с периодом корабля T_0 . Такой кренометр был почти одновременно и независимо друг от друга построен Фрудом в Англии и Бертенем во Франции для автоматической записи качки корабля.

Период σ для кренометра Бертена составляет 80 сек. при тех же численных данных, как в § 3, будет

$$|\varepsilon| = |\theta + \varphi| = \left| \frac{10 \cdot 100}{100 - 6400} 7^\circ \right| + \left| \frac{40 \cdot 10}{9.8} \cdot \frac{20^\circ}{225 - 6400} \right| + \left| \frac{40 \cdot 10}{9.8} \cdot \frac{10^\circ}{100 - 6400} \right|$$

$$|\varepsilon| = |\theta + \varphi| = 0.11 + 0.13 + 0.07 = 0.31$$

т. е. наибольшая абсолютная величина погрешности показаний такого кренометра составит 0.31, что было более чем достаточно для целей записи качки.

Описания кренометра Бертена дано в моем курсе „Качка корабля“. Не входя в подробности устройства, укажем ее сущность. Как известно, период физического маятника

$$\sigma = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgl}} \quad (34)$$

где I есть момент инерции маятника относительно оси подвеса, Mgl — статический момент его.

Но $I = Mr^2$, где r есть радиус инерции; l есть расстояние между Ц. Т. маятника и осью подвеса; таким образом, будет

$$\sigma = \frac{2\pi r}{\sqrt{gl}} \quad (35)$$

Эта формула показывает, что для получения возможно большей величины σ надо брать r возможно большое и l возможно малое, т. е. придавать маятнику форму маховика с массивным ободом, вполне уравни-

¹ По поводу этого вывода может быть сделано возражение, что замена

$$\sin(\theta + \varphi) = (\theta + \varphi) \text{ и } \cos(\theta + \varphi) = 1$$

когда $(\theta + \varphi) = 50^\circ = 0.873$ недопустима, ибо $\sin 50^\circ = \sin(0.873) = 0.766$, а не 0.873; $\cos 50^\circ = \cos(0.873) = 0.643$, а не 1. Относительная погрешность этих равенств составляет 12 и 36%. Не входя в подробности, можно найти, что в величине ε погрешность составит около 3° , так что вместо $|\varepsilon| = 26.1$ надо брать $|\varepsilon| = 23^\circ$, что не влияет на сущность дела.

вешенного на своей оси, а затем, прикрепляя к маховику ниже его оси маленький грузик, получить эксцентриситет l в его нагрузке.

Покажем на численном примере, с какими величинами здесь придется иметь дело.

Возьмем маховик, диаметр которого $1.05 \text{ м} = 105 \text{ см}$ и толщина обода 5 см , вес $98 \text{ кг} = 98\,000 \text{ г}$, масса $M = 100$. Для такого маховика будет $\rho = 50 \text{ см}$, и пусть $\sigma = 80 \text{ сек.}$, тогда имеем:

$$80 = \frac{2\pi \cdot \rho}{\sqrt{gl}} = \frac{2\pi \cdot 50}{\sqrt{980 \cdot l}}$$

Отсюда находим: $6\,400 \cdot 980l = 40 \cdot 2\,500 = 100\,000$

$$l \approx \frac{1}{64} \text{ см} = 0.156 \text{ мм}$$

Положим, что грузик, вес коего p , прикрепляется к ободу, тогда имеем для определения p уравнение

$$98\,000 \cdot 0.156 = 500 \cdot p$$

откуда $p \approx 30 \text{ г}$.

Кренометр Бертена вполне удовлетворял своему назначению регистрировать качку корабля, но он не мог бы служить для артиллерийских целей, ибо вследствие малого эксцентриситета, составляющего $\frac{1}{3200}$ радиуса, температурные деформации изменяли бы положение его равновесия, сохранение которого не нужно для регистрации качки, но необходимо для артиллерийских надобностей.

Г л а в а II

КАРДАНОВ ПОДВЕС

§ 1. Устройство карданова подвеса предполагается настолько известным, что достаточно привести его схему в плане, показанную на фиг. 3, и условиться в терминах.

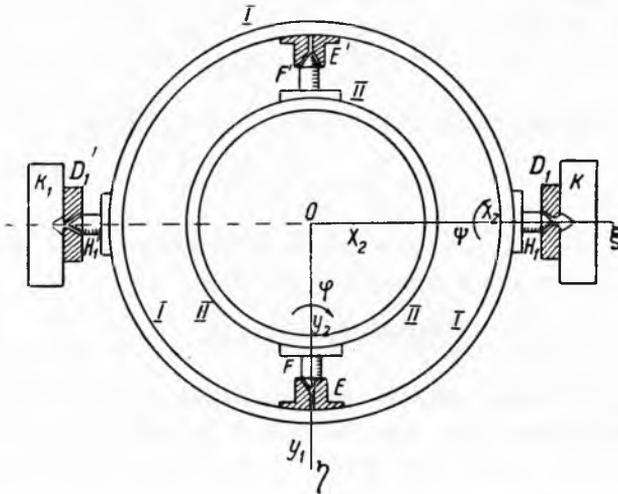
Наружное кольцо, которое будем называть первым, помеченное на схеме I, I, I , лежит своими цапфами $H_1 H'_1$ в подцапфенниках D_1 и D'_1 , неподвижно укрепленных или к треноге на берегу, или к вилке, неизменно скрепленной с кораблем.

Внутреннее кольцо будем называть вторым, на схеме оно помечено цифрами II, II, II , его цапфы F и F' лежат в подцапфенниках E и E' , укрепленных на внутреннем кольце. Оси цапф выверены так, что они пересекаются в центре O обоих колец, который, таким образом, при поворотах колец около своих осей остается неподвижным или в пространстве, или относительно корабля.

К внутреннему кольцу укрепляется тот прибор, для которого подвес служит, и противовес, чтобы при равновесии и покое внутреннее кольцо

вместе с прибором занимало горизонтальное положение и это равновесие было устойчивое, т. е. центр тяжести G кольца с прибором и противовесом лежал бы ниже точки O и прямая OG была перпендикулярна к плоскости внутреннего кольца.

Положим сперва, что вся система находится на берегу и ось $H_1H'_1$ занимает горизонтальное положение, подцапфенники D_1, D'_1 неподвижны



Фиг. 3.

и на систему, кроме силы тяжести, никаких других сил не действует, так что система может совершать около своего положения равновесия только *свободные* колебания. Эти колебания остаются неизменными, когда вся система будет установлена на корабле, но к ним присоединятся *вынужденные* колебания, происходящие от действия возмущающих сил, выражения которых выведены в гл. I.

§ 2. Начнем с изучения свободных колебаний колец. Возьмем в пространстве неподвижные координатные оси $O\xi\eta\zeta$, направив ось $O\xi$ по оси $H_1H'_1$ первого кольца и ось $O\zeta$ вертикально *вверх*. В первом кольце возьмем оси $Ox_1y_1z_1$, причем ось Ox_1 направим по оси $H_1H'_1$ и ось Oy_1 направим по линии EE' оси подцапфенников, укрепленных на первом кольце (фиг. 3).

Во втором кольце возьмем оси координат $Ox_2y_2z_2$, причем ось Oy_2 направлена по оси FF' цапф этого кольца, так что оси Oy_1 и Oy_2 совпадают, другие две оси Ox_2 и Oz_2 направим так, чтобы они совпадали с осями Ox_1 и Oz_1 первого кольца, когда плоскости колец совпадают между собою.

Из устройства подвеса видно, что наружное кольцо может совершать колебательное движение около оси $O\xi$, с которой совпадает ось Ox_1 , остающаяся неподвижной в пространстве, когда колебания происходят на берегу. Угол этого колебания обозначим через ψ ; в это колебание

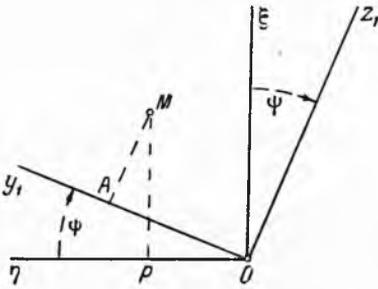
увлекается и второе кольцо, которое, независимо от колебаний ψ , может совершать около Oy_1 , с которой совпадает ось Oy_2 , свое колебание, которое обозначим через φ .

Так как все три системы осей $O\xi\eta\zeta$, $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$ имеют общее начало, то для перехода от одних осей к другим достаточно составить выражения косинусов углов между осями в функции углов φ и ψ .

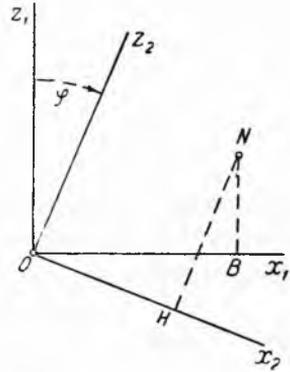
Мы имеем три системы координатных осей:

$$O\xi\eta\zeta, Ox_1y_1z_1, Ox_2y_2z_2 \quad (1)$$

Система $O\xi\eta\zeta$ неподвижная в пространстве, система $Ox_1y_1z_1$ неизменно связана с первым кольцом, система $Ox_2y_2z_2$ неизменно связана со вторым кольцом.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

При повороте ψ , который происходит около оси Ox_1 , совпадающей с $O\xi$, плоскость Oy_1z_1 совпадает с $O\eta\zeta$ и расположение осей представлено на фиг. 4, на основании которой имеем:

$$\begin{aligned} \eta &= y_1 \cos \psi - z_1 \sin \psi, \text{ и обратно } y_1 = \eta \cos \psi + z_1 \sin \psi \\ \zeta &= y_1 \sin \psi + z_1 \cos \psi, \quad z_1 = -\eta \sin \psi + \zeta \cos \psi \end{aligned} \quad (2)$$

вместе с тем $x_1 = \xi$.

Поворот φ происходит около оси Oy_1 , причем плоскость Ox_2z_2 совпадает с плоскостью Ox_1z_1 , ибо ось Oy_2 совпадает с осью Oy_1 при всяком положении первого круга; на фиг. 5 представлено расположение осей после поворота φ .

На основании фиг. 5 имеем:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos \varphi - z_1 \sin \varphi \\ z_2 &= x_1 \sin \varphi + z_1 \cos \varphi \end{aligned} \quad (3)$$

вместе с тем $y_2 = y_1$.

Исключая из равенств (2) и (3) величины x_1 , y_1 , z_1 , имеем:

$$\begin{aligned} x_2 &= \xi \cos \varphi - (-\eta \sin \psi + \zeta \cos \psi) \sin \varphi \\ y_2 &= \eta \cos \psi + \zeta \sin \psi \\ z_2 &= \xi \sin \varphi + (-\eta \sin \psi + \zeta \cos \psi) \cos \varphi \end{aligned} \quad (4)$$

и, развив, получаем:

$$\begin{aligned} x_2 &= \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi \sin \psi - \zeta \sin \varphi \cos \psi \\ y_2 &= \xi 0 + \eta \cos \varphi + \zeta \sin \psi \\ z_2 &= \xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi \sin \psi + \zeta \cos \varphi \cos \psi \end{aligned}$$

Эти формулы дают следующую таблицу косинусов:

	ξ	η	ζ
x_2	$\cos \varphi$	$\sin \varphi \sin \psi$	$-\sin \varphi \cos \psi$
y_2	0	$\cos \varphi$	$\sin \psi$
z_2	$\sin \varphi$	$-\cos \varphi \sin \psi$	$\cos \varphi \cos \psi$

(5)

а. Составим выражения абсолютных координат Ц. Т. колец. Имеем относительные координаты:

первое кольцо

$$x_1 = 0; \quad y_1 = 0; \quad z_1 = l_1$$

второе кольцо

$$x_2 = 0; \quad y_2 = 0; \quad z_2 = l_2 \tag{6}$$

На основании формулы (3) и таблицы (5) имеем:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0; & \eta_1 &= -l_1 \sin \psi; & \zeta_1 &= l_1 \cos \psi \\ \xi_2 &= l_2 \sin \varphi; & \eta_2 &= -l_2 \cos \varphi \sin \psi; & \zeta_2 &= l_2 \cos \varphi \cos \psi \end{aligned} \tag{7}$$

б. Отсюда получаем проекции скорости Ц. Т. колец:

первое кольцо

$$\xi'_1 = 0; \quad \eta'_1 = -l_1 \psi' \cos \psi; \quad \zeta'_1 = -l_1 \psi' \sin \psi$$

второе кольцо

$$\xi'_2 = l_2 \varphi' \cos \varphi \tag{8}$$

$$\eta'_2 = l_2 \varphi' \sin \varphi \sin \psi - l_2 \psi' \cos \varphi \cos \psi$$

$$\zeta'_2 = -l_2 \varphi' \sin \varphi \cos \psi - l_2 \psi' \cos \varphi \sin \psi$$

Отсюда

$$v_1^2 = (\zeta_1'^2 + \eta_1'^2 + \xi_1'^2) = l_1^2 \psi'^2$$

$$v_2^2 = (\zeta_2'^2 + \eta_2'^2 + \xi_2'^2) = l_2^2 \varphi'^2 + l_2^2 \psi'^2 \cos^2 \varphi = l_2^2 (\varphi'^2 + \psi'^2 \cos^2 \varphi) \tag{9}$$

в. Составим еще проекции угловых скоростей φ' и ψ' на оси координат $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$.

Первое кольцо имеет только вращение ψ' около оси Ox_1 , ибо вращение второго кольца, происходящее около цапф EE' , не передается первому, поэтому, будет

$$p_1 = \psi'; \quad q = 0; \quad r_1 = 0 \tag{10}$$

Второе кольцо имеет собственное вращение φ' около оси Oy_2 и увлекается первым кольцом в его вращении ψ' , происходящем около оси Ox_1 ; таким образом, будет

$$\begin{aligned} p_2 &= 0 + \psi' \cos(x_1, x_2) = 0 + \psi' \cos \varphi = \psi' \cos \varphi \\ q_2 &= \varphi' + \psi' \cos(x_1, y_2) = \varphi' + 0 = \varphi' \\ r_2 &= 0 + \psi' \cos(x_1, z_2) = 0 + \psi' \sin \varphi = \psi' \sin \varphi \end{aligned} \quad (11)$$

§ 3. Положим, что первое кольцо, кроме второго кольца, добавочных противовесов или грузов не несет, второе же кольцо несет на себе какой-то измерительный прибор и противовесы.

Пусть будет

для первого кольца:

$$\text{масса } M_1, \text{ моменты инерции } A_1 = B_1; C_1 \approx 2A_1$$

для второго кольца:

$$\text{масса } M_2, \text{ моменты инерции } A_2 = B_2; C_2 \approx 2A_2 \quad (12)$$

причем последние равенства могут быть достигнуты надлежащей установкой противовесов.

Составим уравнения движения колец, пользуясь второй Лагранжевой формой, принимая φ и ψ за обобщенные координаты.

Уравнения Лагранжа будут

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= \Phi \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \psi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= \Psi \end{aligned} \quad (13)$$

где T есть полная живая сила системы, так что

$$2T = 2T_1 + 2T_2$$

причем T_1 есть живая сила первого кольца, T_2 — второго. На основании формул (9) и (10) будет

$$\begin{aligned} 2T_1 &= M_1 l_1^2 \dot{\psi}^2 + A_1 \dot{\psi}^2 = (A_1 + M_1 l_1^2) \dot{\psi}^2 = I_1 \dot{\psi}^2 \\ 2T_2 &= M_2 l_2^2 (\dot{\varphi}'^2 + \dot{\psi}'^2 \cos^2 \varphi) + A_2 \dot{\psi}'^2 \cos^2 \varphi + A_2 \dot{\varphi}'^2 + \\ &+ C_2 \dot{\psi}'^2 \sin^2 \varphi = (A_2 + M_2 l_2^2) (\dot{\varphi}'^2 + \dot{\psi}'^2 \cos^2 \varphi) + C_2 \dot{\psi}'^2 \sin^2 \varphi = \\ &= I_2 (\dot{\varphi}'^2 + \dot{\psi}'^2 \cos^2 \varphi) + C_2 \dot{\psi}'^2 \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

Следовательно

$$2T = I_1 \dot{\psi}^2 + I_2 (\dot{\varphi}'^2 + \dot{\psi}'^2 \cos^2 \varphi) + C_2 \dot{\psi}'^2 \sin^2 \varphi \quad (14)$$

Здесь

$$I_1 = A_1 + M_1 l_1^2; \quad I_2 = A_2 + M_2 l_2^2 \quad (15)$$

суть момент инерции первого кольца относительно оси Ox_1 и момент инерции второго кольца относительно оси Oy_2 . Затем имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = I_2 \varphi'; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'} \right) = I_2 \varphi''; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = (C_2 - I_2) \varphi'^2 \sin 2\varphi$$

$$\Phi = -M_1 g \frac{\partial \zeta_1}{\partial \varphi} - M_2 g \frac{\partial \zeta_2}{\partial \varphi} = M_2 g I_2 \sin \varphi \cos \psi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = (I_1 + I_2 \cos^2 \varphi + C_2 \sin^2 \varphi) \psi'$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \psi'} \right) = (I_1 + I_2 \cos^2 \varphi + C_2 \sin^2 \varphi) \psi'' + (C_2 - I_2) \varphi' \psi' \sin 2\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0$$

$$\Psi = -M_1 g \frac{\partial \zeta_1}{\partial \psi} - M_2 g \frac{\partial \zeta_2}{\partial \psi} = M_1 g l_1 \sin \psi + M_2 g l_2 \sin \psi \cos \varphi$$

Таким образом, уравнения движения будут

$$I_2 \varphi'' - (C_2 - I_2) \psi'^2 \sin 2\varphi = M_2 g l_2 \sin \varphi \cos \psi \quad (16)$$

$$\begin{aligned} (I_1 + I_2 \cos^2 \varphi + C_2 \sin^2 \varphi) \psi'' + (C_2 - I_2) \varphi' \psi' \sin 2\varphi = \\ = M_1 g l_1 \sin \psi + M_2 g l_2 \sin \psi \cos \varphi \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнения (16) и (17) точные в том смысле, что при составлении их никаких допущений относительно углов φ и ψ , масс M_1 и M_2 , координат l_1 и l_2 не делалось, но нам придется иметь дело с „малыми“ колебаниями прибора, подвешенного на кардане, поэтому в первом приближении полагаем:

$$\sin \varphi = \varphi; \quad \cos \varphi = 1$$

$$\sin \psi = \psi; \quad \cos \psi = 1$$

и будем ограничиваться в уравнениях (16) и (17) членами первого порядка относительно φ , ψ и их производных φ' и ψ' . Кроме того, обыкновенно первое кольцо уравнивается на своих цапфах, так что

$$l_1 = 0 \quad (18)$$

Ясно, что для устойчивости равновесия второго кольца должно быть $l_2 < 0$, поэтому полагаем

$$l_2 = -h \quad (19)$$

На основании равенств (15) будет

$$I_1 = A_1 \quad (20)$$

$$I_2 = A_2 + M_2 h^2$$

Величина $C_2 \sin^2 \psi$ будет второго порядка и мала по сравнению с $I_2 \cos^2 \psi$, члены, содержащие множителей $\varphi' \psi' \sin 2\psi$, $\psi'^2 \sin 2\psi$, будут третьего порядка; таким образом, отбрасывая эти величины, получим в первом приближении уравнения свободных колебаний нашей системы в таком виде:

$$I_2 \varphi'' + M_2 g h \varphi = 0 \quad (21)$$

$$(I_1 + I_2) \psi'' + M_2 g h \psi = 0 \quad (22)$$

или, положив

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{M_2gh}{I_2}; & n_1 &= \frac{2\pi}{\tau_1}; & \tau_1 &= \sqrt{\frac{I_2}{M_2gh}} \\ n_2^2 &= \frac{M_2gh}{I_1 + I_2}; & n_2 &= \frac{2\pi}{\tau_2}; & \tau_2 &= \sqrt{\frac{I_1 + I_2}{M_2gh}} \end{aligned} \quad (23)$$

Из уравнений (21) и (22) получаем:

$$\varphi = C_1 \cos \frac{2\pi}{\tau_1} t + C_2 \sin \frac{2\pi}{\tau_1} t \quad (23')$$

$$\psi = C_3 \cos \frac{2\pi}{\tau_2} t + C_4 \sin \frac{2\pi}{\tau_2} t \quad (24)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям, так, например, если принять, что при $t=0$ должно быть

$$\begin{aligned} (\varphi)_{t=0} &= \varphi_0; & (\dot{\varphi})_{t=0} &= 0 \\ (\psi)_{t=0} &= \psi_0; & (\dot{\psi})_{t=0} &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

то будет

$$C_1 = \varphi_0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \psi_0, \quad C_4 = 0 \quad (26)$$

и мы имеем:

$$\varphi = \varphi_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau_1} \quad (27)$$

$$\psi = \psi_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau_2} \quad (28)$$

т. е. каждое кольцо совершает простое гармоническое колебание со своим периодом и своей амплитудой, независимо одно от другого.

§ 4. Если вообразить, что ко второму кольцу прикреплен указатель, координаты которого

$$x_2 = 0, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = -c$$

то при колебании колец, определяемом уравнениями (27) и (28), этот указатель будет описывать в пространстве траекторию, уравнения которой на основании таблицы (5) будут:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= -c \sin \varphi = -c\varphi = -c\varphi_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau_1} \\ \eta_2 &= c \cos \varphi \sin \psi \approx c\psi = c\psi_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau_2} \\ \zeta_2 &= -c \cos \varphi \cos \psi \approx -c = -c \end{aligned} \quad (29)$$

т. е. с принятой степенью приближения можно считать, что эта траектория лежит в плоскости $\zeta_2 = -c$ и уравнения ее суть

$$\xi_2 = a \cos \frac{2\pi t}{\tau_1}; \quad \eta_2 = b \cos \frac{2\pi t}{\tau_2} \quad (30)$$

причем

$$a = -c\varphi_0; \quad b = c\psi_0$$

как видно, вся траектория лежит внутри прямоугольника

$$\xi = \pm a; \quad \eta = \pm b$$

причем если периоды τ_1 и τ_2 между собою несоизмеримы, то эта кривая состоит из бесчисленного множества завитков, заполняющих весь указанный прямоугольник. В том же случае, когда τ_1 и τ_2 соизмеримы, то траектория будет замкнутая и легко строится графически.

Так, например, пусть

$$\tau_1 : \tau_2 = 3 : 5 = 6 : 10$$

Строю прямоугольник $ABCD$, у которого стороны $AB = 2a$ и $BC = 2b$. На стороне AB , как диаметре, строю полуокруг AFB и разделяю его на 6 равных частей, нумерую точки деления, начиная от точки A , как показано на фиг. (6), и проектирую эти точки на сторону AB . Совершенно так же строю на стороне BC полуокруг, разделяю его на 10 равных частей, нумерую точки деления и проектирую их на сторону BC .

Через полученные на стороне AB точки 1, 2, 3, 4, 5 провожу прямые, параллельные стороне BC и через 1, 2, 3, ..., 9 стороны BC провожу параллели стороне AB . Таким образом, внутри прямоугольника $ABCD$ получится сетка маленьких прямоугольников. Затем, начав от точки A , иду по диагоналям маленьких прямоугольников, как показано и получаю искомую кривую.

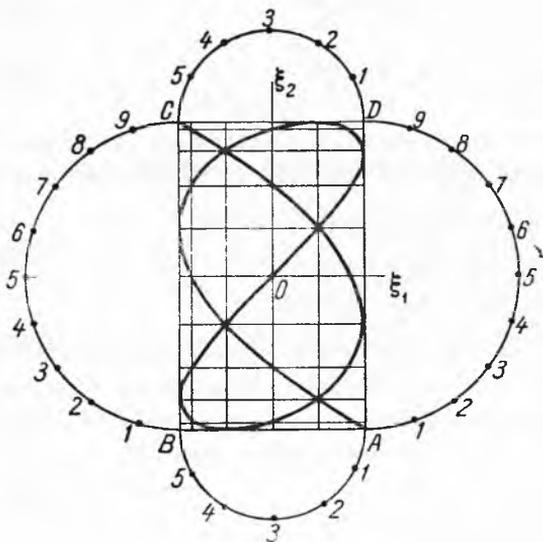
Эти кривые называются фигурами Лиссажу.

Из описанного построения ясно, насколько разнообразны могут быть эти фигуры, при разных, даже соизмеримых, отношениях периодов.

§ 5. Уравнения (21) и (22) показывают, что каждое кольцо представляет собою маятник, следовательно, на качающемся корабле кольца карданова подвеса будут совершать вынужденные колебания, рассмотренные выше в гл. I.

На корабле на кардановом подвесе всегда находится какой-либо прибор, прикрепленный ко второму кольцу, поэтому подвес должен обладать надлежащею устойчивостью, которая определяется расстоянием h центра тяжести второго кольца до плоскости осей цапф.

Кардан обыкновенно устанавливается так, что его ось Ox_1 направлена по диаметральной плоскости корабля параллельно грузовой ватер-



Фиг. 6.

линии или, что то же, продольной оси корабля, с этим надо считаться при составлении выражений моментов возмущающих сил, происходящих от качаний корабля, действующих на кардан.

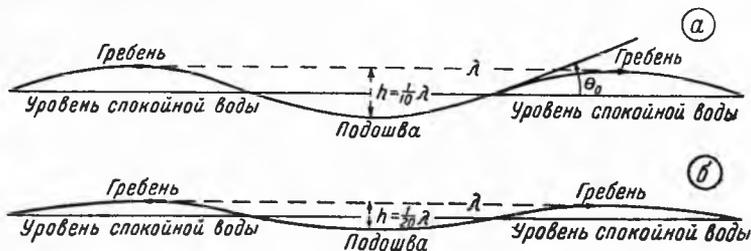
В гл. I и в §§ 1—4 гл. II рассмотрены как колебания кренометра, так и колебания колец карданова подвеса при частном предположении относительно качаний корабля, т. е. что он, не имея хода, лежит лагом к волне и имеет только орбитальное движение и чисто боковую качку, общий же случай таков: *на заданной празильной зыби корабль идет со скоростью v курсом γ относительно напрвления бега волн; в заданной точке корабля установлен карданов подвес, требуется определить вынужденные колебания кардана, происходящие от качаний корабля.*

Для решения этого вопроса можно было бы применить общие формулы и уравнения относительного движения, но решение становится более ясным, если вопрос расчленить на составные его части и не упускать из вида физической стороны дела.

Видимые или действующие элементы синусоидальной волны

Для простоты формул мы примем профиль волны *синусоидальным*, а не трохоидальным, как в теории волн Герстнера, это приближение практически вполне достаточно, зависимость же между элементами волны сохраним такую же, которая имеет место для трохоидальных волн.

Элементы волны (фиг. 7) суть:



Фиг. 7.

а) длина λ , т. е. расстояние между двумя последовательными гребнями или подошвами;

б) период волны τ_0 , т. е. продолжительность времени, в течение которого волна пробегает путь, равный ее длине;

в) полувысота волны r или высота волны $h = 2r$ — вертикальное превышение гребня над подошвою. Кроме этих основных элементов, рассматривают еще

г) скорость бега волны

$$V = \frac{\lambda}{\tau} \quad (31)$$

д) наибольший волновой склон θ_0 , определяемый равенством

$$\sin \theta_0 = \frac{2\pi r}{\lambda} \quad \text{или} \quad \theta_0 \approx \frac{2\pi r}{\lambda} \quad (32)$$

е) период τ_0 связан с длиной волны равенством

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}} \quad (33)$$

где g есть ускорение силы тяжести;

ж) на основании этого равенства и предыдущих формул будет

$$\lambda = \frac{g}{2\pi} \tau^2; \quad V = \frac{g}{2\pi} \tau \quad (34)$$

Для крупной океанской зыби (длина $\lambda \geq 100$ м) высота волны составляет около $\frac{1}{25} \lambda$, поэтому наибольший волновой склон будет

$$\theta_0 = \frac{2\pi}{50} = 0.125 = 7.2 = \frac{1}{8} \quad (35)$$

Для замкнутых морей (Черное, Балтийское, Каспийское, Японское) зыбь бывает более крутая, с высотой волны $h = \frac{1}{20} \lambda$, и наибольший

волновой склон составит

$$\theta_0 = \frac{2\pi}{40} = 0.157 \approx 9^\circ = \frac{2}{13} \quad (36)$$

Период в секун- дах	Длина в метрах	Скорость в м/сек.	Скорость в узлах
3.0	14	4.7	9.2
4.0	25	6.3	12.2
5.0	37	7.4	14.4
6.0	55	9.2	17.9
7.0	75	10.7	20.8
8.0	98	12.3	24.0
9.0	125	14.0	27.3
10.0	154	15.4	30.0
11.0	186	17.0	33.1
12.0	222	18.5	36.0
13.0	260	20.0	38.9
14.0	302	21.6	42.0
15.0	347	23.1	45.0

В приводимой здесь таблице даны элементы волн в зависимости от их периода.

Волны длиной 300 м в Атлантическом океане встречаются весьма редко (1 раз в год). В южной части Тихого океана (антарктическая область) встречаются волны и в 350 м длиной; высота таких волн достигает 14 м.

При землетрясениях бывают так называемые „придонные“ или, по английской терминологии, „приливные“ волны (tide waves); их так называют потому,

что, достигая берегов, эти волны их заливают, снося все на своем пути. Так, в 1755 г. при лиссабонском землетрясении от такой волны погибло около 100 000 человек. При извержении и взрыве Кракатао в 1882 г. погибло от придонной волны также около 100 000 человек. Обыкновенно эти волны одиночные; в открытом море высота их наблюдалась до 20 м. Явление это исключительное и мы его рассматривать не будем.

Пусть на фиг. 8 линии AB , A_1B_1 представляют одновременные положения двух последовательных гребней системы волн, бегущих по направлению CD со скоростью $V = \frac{\lambda}{\tau}$, где λ — длина и τ — период волн.

Пусть EF есть диаметральной плоскость и G — центр тяжести корабля, идущего со скоростью v по курсу γ относительно направления бега волн, тогда будет

$$EF = \lambda_1 = \frac{\lambda}{\cos \gamma} \quad \text{— действующая длина по килю}$$

$$HK = \lambda_2 = \frac{\lambda}{\sin \gamma} \quad \text{— действующая длина по плоскости шпангоута}$$

$$\theta_1 = \frac{2\pi r}{\lambda_1} = \frac{2\pi r}{\lambda} \cos \gamma = \theta_0 \cos \gamma \quad \text{— действующий волновой склон по килю}$$

$$\theta_2 = \frac{2\pi r}{\lambda_2} = \frac{2\pi r}{\lambda} \sin \gamma = \theta_0 \sin \gamma \quad \text{— действующий волновой склон по шпангоуту}$$
(37)

Эти формулы пишутся сразу, сравнив косые сечения EF и HK волн с прямым их сечением CD .

Если бы корабль лежал на курсе γ , не имея хода, то видимая скорость бега волны по борту корабля была бы

$$V_1 = \frac{V}{\cos \gamma}$$

когда же корабль идет со скоростью v , то видимая скорость будет

$$V_1 = \frac{V}{\cos \gamma} - v$$

и видимый период τ_1 будет

$$\tau_1 = \frac{\lambda_1}{V_1} = \frac{\lambda}{V - v \cos \gamma} = \frac{\frac{\lambda}{V}}{1 - \frac{v \cos \gamma}{V}} = \frac{\tau}{1 - \frac{v \cos \gamma}{V}}$$

иначе

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{v \cos \gamma}{V} \right) \quad (38)$$

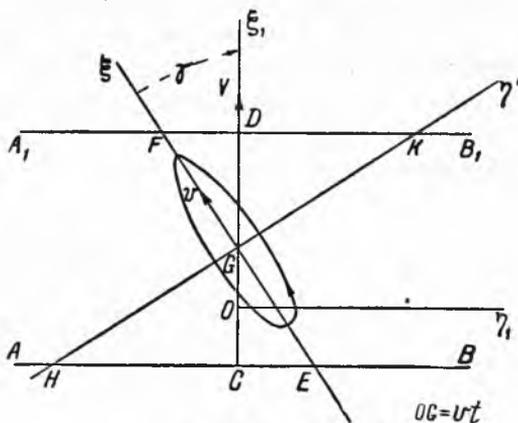
Само собою разумеется, что $\cos \gamma$ надо брать с приличествующим ему знаком соответственно величине угла γ , так, например, пусть: $\gamma = 60^\circ$; $\tau = 10$ сек.; $V = 30$ узлов; $v = 12$ узлов.

Тогда будет

$$\tau_1 = \frac{10}{1 - \frac{12}{30} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{10}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{50}{4} = 12.5 \text{ сек.}$$

Положим теперь, что $\gamma = 120^\circ$ при прежних остальных значениях, то будет

$$\tau_1 = \frac{10}{1 - \frac{12}{30} \left(-\frac{1}{2} \right)} = \frac{10}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{50}{6} = 8.3 \text{ сек.}$$



Фиг. 8.

Видимые или действующие волновые склоны будут

$$\theta_1 = \theta_0 \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \theta_0 \approx 3^\circ 6$$

$$\theta_2 = \theta_0 \sin 60^\circ = 0.86 \theta_0 \approx 6^\circ 2$$

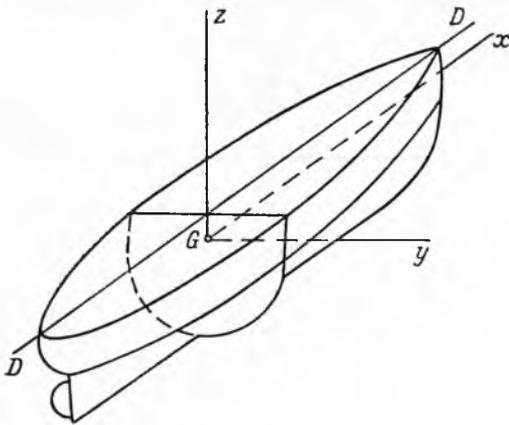
$$\theta_1 = \theta_0 \cos 120^\circ = -3^\circ 6$$

$$\theta_2 = \theta_0 \sin 120^\circ = 6^\circ 2$$

§ 6. В дальнейшем нам постоянно придется переходить от одних координатных осей в пространстве и в корабле к другим.

Для удобства ссылок и справок мы соединим в этом параграфе необходимые формулы, сюда относящиеся.

1. Для определения положения точки в корабле возьмем неизменные в нем оси координат $Gxyz$, начало коих полагаем в центре тяжести корабля G , за плоскость Gxz берем диаметрально плоскость корабля, за плоскость Gyz берем плоскость шпангоута, проходящего через точку G , за плоскость Gxy берем плоскость, перпендикулярную к двум прочим;



Фиг. 9.

когда корабль сидит на „ровном киле“, то эта плоскость будет параллельна плоскости грузовой ватерлинии корабля, на нем накрашенной.

Эти три плоскости своими пересечениями определяют оси координат, на которых принимаем за положительные направления следующие:

- а) ось Gx — в нос,
- б) ось Gy — к правому борту,
- в) ось Gz — вверх.

Таким образом, схематически расположение положительных частей осей корабля представляется фиг. 9.

2. Для определения положения точки по отношению к Земле, которую будем считать неподвижной, избираем систему осей $O\xi\eta\zeta$, неизменно связанных с Землею и взятых так, что когда корабль находится в покое и прямом положении равновесия, то оси $Gxyz$ совпадают соответственно с осями $O\xi\eta\zeta$.

Очевидно, что обе системы осей прямолинейные и прямоугольные. Положение осей $Gxyz$ относительно неподвижных осей $O\xi\eta\zeta$ определяется:

- а) координатами ξ_g, η_g, ζ_g точки G (фиг. 10) и б) тремя Эйлеровыми углами φ, ψ, θ , которые берем *корабельные*, а не астрономические, т. е. такие, которые при *малых* отклонениях корабля от прямого положения

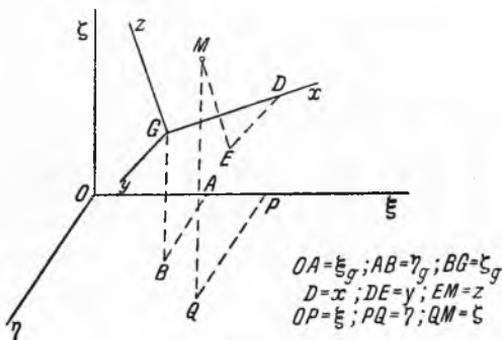
все три остаются малыми. Такой выбор Эйлеровых углов был указан мною в 1898 г. и дал возможность развить общую теорию качаний корабля на волнении.

Формулы преобразования координат получаются из схемы косинусов между осями:

	ξ	η	ζ
x	a_1	b_1	c_1
y	a_2	b_2	c_2
z	a_3	b_3	c_3

(39)

применяя теорему проекций к фиг. 10.



Фиг. 10.

Эти формулы суть

$$\begin{aligned}
 \xi &= \xi_g + a_1x + a_2y + a_3z \\
 \eta &= \eta_g + b_1x + b_2y + b_3z \\
 \zeta &= \zeta_g + c_1x + c_2y + c_3z
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

и обратно:

$$\begin{aligned}
 x &= a_1(\xi - \xi_g) + b_1(\eta - \eta_g) + c_1(\zeta - \zeta_g) \\
 y &= a_2(\xi - \xi_g) + b_2(\eta - \eta_g) + c_2(\zeta - \zeta_g) \\
 z &= a_3(\xi - \xi_g) + b_3(\eta - \eta_g) + c_3(\zeta - \zeta_g)
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

Для проекций силы будем иметь аналогичные формулы

$$\begin{aligned}
 \Xi &= a_1X + a_2Y + a_3Z; & X &= a_1\Xi + b_1H + c_1L \\
 H &= b_1X + b_2Y + b_3Z; & Y &= a_2\Xi + b_2H + c_2L \\
 L &= c_1X + c_2Y + c_3Z; & Z &= a_3\Xi + b_3H + c_3L
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

Заметим, что когда углы δ , χ , θ_1 малые, то для корабля они имеют определенные физические значения, а именно:

δ — угол дифферента или килевой качки,

θ_1 — угол крена или боковой качки,

χ — угол рыскания.

Заменяя в точных формулах

$$\cos \delta = 1 - \frac{\delta^2}{2}; \quad \cos \chi = 1 - \frac{\chi^2}{2}; \quad \cos \theta_1 = 1 - \frac{\theta_1^2}{2}$$

$$\sin \delta = \delta; \quad \sin \chi = \chi; \quad \sin \theta_1 = \theta_1$$

получим выражения косинусов до членов второго порядка включительно, откинув все члены, порядок коих выше второго. Такое развитие дает возможность применять методу последовательных приближений, но мы ограничимся первым приближением, ибо самые формулы качаний корабля и теории волн развиты лишь до членов первого порядка.

Соответственно таблице (44) имеем приближенные формулы преобразования координат

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_g + x - y\chi + z\delta \\ \eta &= \eta_g + x\chi + y - z\theta_1 \\ \zeta &= \zeta_g - x\delta + y\theta_1 + z \end{aligned} \quad (45)$$

и обратно:

$$\begin{aligned} x &= (\xi - \xi_g) + (\eta - \eta_g)\chi - (\zeta - \zeta_g)\delta \\ y &= -(\xi - \xi_g)\chi + (\eta - \eta_g) + (\zeta - \zeta_g)\theta_1 \\ z &= (\xi - \xi_g)\delta - (\eta - \eta_g)\theta_1 + (\zeta - \zeta_g) \end{aligned} \quad (46)$$

Совершенно также для проекции сил

$$\begin{aligned} \Xi &= X - Y\chi + Z\delta & \text{и} & \quad X = \Xi + H\chi - L\delta \\ H &= X\chi + Y - Z\theta_1 & \text{и} & \quad Y = -\Xi\chi + H + L\theta_1; \\ L &= -X\delta + Y\theta_1 + Z & \text{и} & \quad Z = \Xi\delta - H\theta_1 + L \end{aligned} \quad (47)$$

Обыкновенно в теории качаний корабля угол дифферента обозначают через ψ и угол рыскания через φ , но эти буквы были уже использованы для наклонений колец кардана, поэтому мы и заменили их через δ и χ .

§ 7. Положим теперь, что на корабле, идущем со скоростью v , относительным курсом γ , находится карданов подвес, центр (точки пересечения осей) которого имеет координаты

$$x = a; \quad y = b; \quad z = c \quad (48)$$

и ось наружного кольца поставлена параллельно диаметральной плоскости корабля.

Требуется определить качания кардана, когда качания корабля на волне заданы, т. е. величины

$$\xi_g, \eta_g, \zeta_g, \theta_1, \delta, \chi \quad (49)$$

заданы как функции времени.

Чтобы вывести координаты ξ_g, η_g, ζ_g центра тяжести G корабля при орбитальном его движении, составим чертеж (фиг. 12). Пусть AB и A_1B_1 суть положения двух последовательных гребней правильной системы волн (зыби), бегущих по направлению оси $O\rho$ координат $O\rho\sigma\zeta$, неподвижных в пространстве и имеющих с осями $O\xi\eta\zeta$ общее начало O и общую вертикальную ось $O\xi$.

Положим, что корабль правит по отношению к направлению бега волн курсу $\rho O\xi = \gamma$ и идет с постоянной скоростью v , причем в начальный момент ($t=0$) Ц. Т. корабля совпадал с точкою O . По истечении времени t , если бы корабль орбитального движения не имел, его Ц. Т. находился бы в точке G_0 , которой координаты суть

$$\begin{aligned} \rho_0 &= vt \cos \gamma; & \sigma_0 &= vt \sin \gamma; \\ \zeta_0 &= 0 \end{aligned} \quad (50)$$

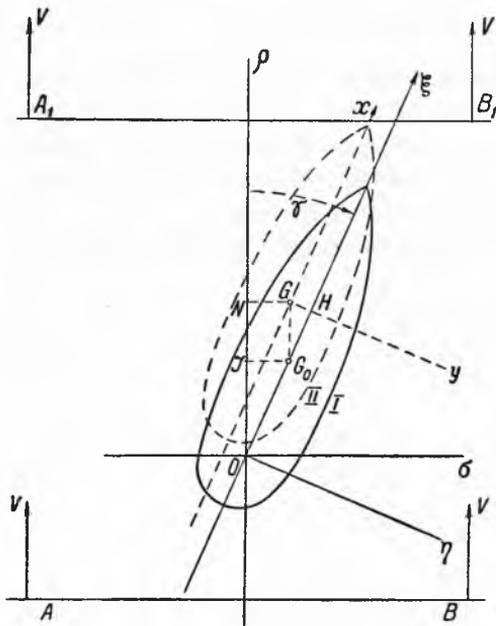
Орбитальное движение корабля происходит в плоскости бега волн $O\rho\zeta$. Вследствие этого движения, налагающегося на ход корабля, Ц. Т. корабля будет находиться не в точке G_0 , а в некоторой точке G его орбиты, так что прямая G_0G параллельна плоскости $O\rho\zeta$ и корабль будет занимать не положение I , нанесенное на чертеж сплошной линией, а то положение, проекция которого на горизонтальную плоскость $O\rho\sigma$ или, что то же, $O\xi\eta$ изображена прерывистой линией.

Проекция орбиты, описываемой точкою G на плоскости, совпадающей с $O\rho\zeta$ и скользящей по ней со скоростью хода корабля, представляет некоторый эллипс, уравнение которого на этой подвижной плоскости, отнесенное к осям $G_0\rho_1\sigma_1\zeta_1$, параллельным $O\rho\sigma\zeta$, есть

$$\begin{aligned} \rho_1 &= k_1 r \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha \right) \\ \sigma_1 &= 0, \\ \zeta_1 &= k_2 r \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha \right) \end{aligned} \quad (51)$$

где k_1 и k_2 — некоторые постоянные,¹ вычисление которых можно найти в моем курсе „Качка корабля“, так что координаты точки G суть

¹ Величины k_1 и k_2 суть постоянные в том смысле, что они не зависят от времени t , но они зависят от размеров корабля и волны и от курса γ .



Фиг. 12.

$$\begin{aligned} \rho_g &= \rho_0 + \rho_1 = vt \cos \gamma + k_1 r \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha \right) \\ \sigma_g &= \sigma_0 + \sigma_1 = vt \sin \gamma \\ \zeta_g &= \zeta_1 = k_2 r \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau} + \alpha \right) \end{aligned} \quad (52)$$

Чтобы от координат $O\rho\sigma\zeta$ перейти к координатам $O\xi\eta\zeta$, имеем общие формулы

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos \gamma + \sigma \sin \gamma \\ \eta &= -\rho \sin \gamma + \sigma \cos \gamma \end{aligned}$$

Таким образом, будет

$$\begin{aligned} \xi_g &= \left[vt \cos \gamma + k_1 r \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha \right) \right] \cos \gamma + vt \sin^2 \gamma = \\ &= vt + k_1 r \cos \gamma \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha \right) \\ \eta_g &= - \left[vt \cos \gamma + k_1 r \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha \right) \right] \sin \gamma + \\ &+ vt \sin \gamma \cos \gamma = -k_1 r \sin \gamma \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha \right) \\ \zeta_g &= k_2 r \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha \right) \end{aligned} \quad (53)$$

В этих формулах τ_1 есть видимый период волны, r — „радиус производящего круга“, равный полувысоте волны.

Случай маневрирования корабля на тихой воде и в особенности на волнении требует особого рассмотрения.

Собственно качания корабля на волнении, т. е. углы

$$\theta_1, \delta, \chi$$

боковой качки, килевой качки, рыскания, выражаются уравнениями

$$\begin{aligned} \theta_1 &= A \sin \left(\frac{2\pi t}{T_0} + \alpha_1 \right) + B \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \beta_1 \right) \\ \delta &= E \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + E_1 \right) \\ \chi &= F \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + E_2 \right) \end{aligned} \quad (54)$$

где A, B, E, F суть некоторые постоянные, зависящие от размеров корабля, размеров волны, курсового угла γ , периода T_0 свободных качаний корабля на тихой воде, видимого периода τ_1 волны, $\alpha_1, \beta_1, E_1, E_2$ — начальные фазовые углы.

Подробное изложение учения о качаниях корабля на волнении можно найти в моем сочинении „Качка корабля“, изданном Военно-морской академией имени К. Е. Ворошилова, здесь же приведены основные понятия, необходимые для уяснения сущности дела.

§ 8. Нам будут нужны общие выражения абсолютных координат ξ_1, η_1, ζ_1 точки P — центра тяжести первого кольца и ξ_2, η_2, ζ_2 точки Q — центра тяжести второго кольца.

Составим сперва координаты этих точек относительно корабельных осей $Gxyz$, после чего, применив формулы § 6, получим и абсолютные координаты.

Положение точки A — центра карданова подвеса на корабле — задается непосредственно координатами этой точки:

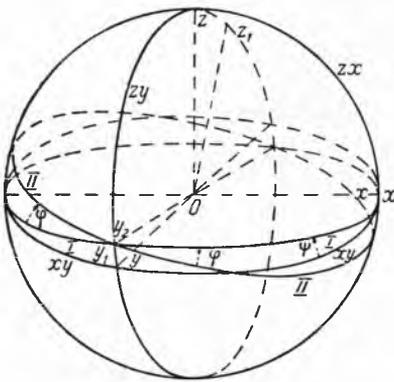
$$x_a = a; \quad y_a = b; \quad z_a = c \quad (55)$$

Пусть l_1 и l_2 суть соответственно расстояния P и Q от плоскостей соответствующих колец; тогда, как мы видели, будет для точки P

$$\begin{aligned} x_p &= a \\ y_p &= b - l_1 \sin \psi \\ z_p &= c + l_1 \cos \psi \end{aligned} \quad (56)$$

а для точки Q

$$\begin{aligned} x_q &= a + l_2 \sin \varphi \\ y_q &= b - l_2 \cos \varphi \sin \psi \\ z_q &= c + l_2 \cos \varphi \cos \psi \end{aligned} \quad (57)$$



Фиг. 13.

По формулам (40) и таблице косинусов (43) получим требуемые абсолютные координаты этих точек. Затем, принимая углы ψ и φ за обобщенные координаты и поступая как обыкновенно, составим уравнения Лагранжа во второй форме, интегрирование которых и доставит конечные уравнения движения колец подвеса.¹

¹ Расположение колец представлено схематически на фиг. 13. При чем за плоскость чертежа принята плоскость, параллельная плоскости Zx , т. е. диаметральной плоскости корабля, толстыми линиями представлены кольца карданова подвеса, тонкими — круги, соответствующие координатным плоскостям, как это и помечено на схеме.

Координатные оси кругов обозначены, как на фиг. (3), через $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$. Непосредственно имеем таблицы:

	x	y	z
x_1	1	0	0
y_1	0	$\cos \psi$	$\sin \psi$
z_1	0	$-\sin \psi$	$\cos \psi$

	x_1	y_1	z_1
x_2	$\cos \varphi$	0	$-\sin \varphi$
y_2	0	1	0
z_2	$\sin \varphi$	0	$\cos \varphi$

При составлении уравнений Лагранжа, если окончательно в них надо затем ограничиться членами первого порядка, можно распорядиться так, чтобы те члены, которые будут отбрасываться совсем, не вычислялись, — этим выкладки значительно упрощаются.

В нашем случае это достигается на основании следующих замечаний:

а. Каждая из величин, коими определяются орбитальные движения и качания корабля, т. е.

$$\xi_g, \eta_g, \zeta_g, \delta, \theta_1, \chi \quad (*)$$

выражается произведением некоторой постоянной (амплитуда) на синус или косинус аргумента, линейно зависящего от времени t , или суммой членов такого вида. Все амплитуды мы считаем „малыми первого порядка“.

Для членов *указанного вида* квадраты и произведения попарно будут *второго* порядка, кратко говоря, сумма показателей при величинах (*) в выражении члена укажет его порядок. На основании этого замечания различаются порядки членов, не развивая их.

б. При дифференцировании по *времени* t порядок членов сохраняется. При дифференцировании по обобщенным координатам φ или ψ , или их производным, порядок членов вообще понижается на одну единицу для каждого дифференцирования.

в. В нашем случае в дифференциальных уравнениях, служащих для получения приближенных решений, являющихся вообще исходными, надо сохранить лишь члены *первого* порядка, но в большей части случаев это *исходное* приближение является и *окончательным*, ибо самые качания корабля могут быть рассчитаны лишь с грубым приближением, соответствующим *первому* порядку, вследствие изменчивости элементов отдельных волн даже правильной зыби. Для получения таких приближенных дифференциальных уравнений в выражении живой силы надо удержать лишь члены не выше *второго* порядка включительно, все же прочие отбросить.

Ось Oy_1 и совпадающая с ней Oy_2 являются линией узлов и применение основной формулы сферической тригонометрии к сферическим треугольникам, коих вершины $x_1y_2x_2$, $x_1y_2z_2$; $y_1y_2x_2$, $y_1y_2z_2$; $z_1y_2x_2$, $z_1y_2z_2$ дают верхнюю и нижнюю строки следующей таблицы, средняя строка пишется непосредственно из рассмотрения чертежа:

	x	y	z
x_2	$\cos \varphi$	$\sin \psi \sin \varphi$	$-\cos \psi \sin \varphi$
y_2	0	$\cos \psi$	$\sin \psi$
z_2	$\sin \varphi$	$-\sin \psi \cos \varphi$	$\cos \psi \cos \varphi$

На основании этого в самом выражении живой силы, а не только в окончательных уравнениях, можно делать замены:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \delta; \quad \sin \theta_1 = \theta_1; \quad \sin \chi = \chi; \quad \sin \psi = \psi; \quad \sin \varphi = \varphi \\ \cos \delta &= 1 - \frac{\delta^2}{2}; \quad \cos \theta_1 = 1 - \frac{1}{2} \theta_1^2 \\ \cos \chi &= 1 - \frac{1}{2} \chi^2; \quad \cos \psi = 1 - \frac{1}{2} \psi^2; \quad \cos \varphi = 1 - \frac{1}{2} \varphi^2 \end{aligned}$$

г. Карданов подвес имеет теперь самые разнообразные применения на корабле, о чем можно судить хотя бы по весу подвешиваемых предметов, составляющему от долей килограмма до 40 т. Ввиду этого, кроме упрощенного вывода дифференциальных уравнений движения, в которых сохранены только члены первого порядка, изложено составление и „полных“ уравнений, в которых ничего не отбрасывается.

Эти полные уравнения могут служить для контроля приближенных и для получения дальнейших приближений, если бы таковые потребовались. Но надо иметь в виду, что в любом техническом вопросе для применения к его решению математики приходится делать разные предположения и допущения, а когда эти предположения и допущения не верны, то чем вычисление сложнее и с чем большей точностью оно произведено, тем оно бесполезнее.

§ 9. Полная живая сила карданова подвеса складывается из живой силы первого кольца плюс живая сила второго кольца.

При избранных координатных осях живая сила каждого кольца складывается из живой силы его поступательного движения, считая, что его масса сосредоточена в его центре тяжести, и живой силы вращательного движения около этой точки.

Сделаем следующие обозначения.

Первое кольцо: M_1 — масса; ξ_1, η_1, ζ_1 — абсолютные координаты Ц. Т., A_1, B_1, C_1 — главные моменты инерции; $p_1 q_1 r_1$ — проекции угловой скорости на главные оси инерции.

Второе кольцо: аналогичные обозначения с заменой значка 1 на 2.

Обозначим через $2T$ полную удвоенную живую силу системы, так что будет

$$\begin{aligned} 2T &= M_1 (\varepsilon_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2) + M_2 (\varepsilon_2'^2 + \eta_2'^2 + \zeta_2'^2) + \\ &+ (A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2) + (A_2 p_2^2 + B_2 q_2^2 + C_2 r_2^2) \end{aligned} \quad (58)$$

Уравнения движения системы составим во второй Лагранжевой форме по схеме

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = \Psi \quad (59)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \Phi \quad (60)$$

причем так как единственная внешняя сила есть сила тяжести, то при избранном направлении осей координат будет

$$\Psi = - \left(M_1 g \frac{\partial \zeta_1}{\partial \psi} + M_2 g \frac{\partial \zeta_2}{\partial \psi} \right) \quad (61)$$

$$\Phi = - \left(M_1 g \frac{\partial \zeta_1}{\partial \varphi} + M_2 g \frac{\partial \zeta_2}{\partial \varphi} \right) \quad (62)$$

Мы имели вообще для любой точки (x, y, z) (40):

$$\xi = \xi_g + a_1 x + a_2 y + a_3 z$$

$$\eta = \eta_g + b_1 x + b_2 y + b_3 z$$

$$\zeta = \zeta_g + c_1 x + c_2 y + c_3 z$$

Координаты x_p, y_p, z_p точки P — центра тяжести первого кольца суть (56)

$$x_p = a$$

$$y_p = b - l_1 \sin \psi$$

$$z_p = c + l_1 \cos \psi$$

и координаты x_q, y_q, z_q точки Q центра тяжести второго кольца суть (57)

$$x_q = a + l_2 \sin \varphi$$

$$y_q = b - l_2 \cos \varphi \sin \psi$$

$$z_q = c + l_2 \cos \varphi \cos \psi$$

Подставляя эти величины в формулу (40) имеем:

$$\xi_1 = \xi_g + (a_1 a + a_2 b + a_3 c) - l_1 (a_2 \sin \psi - a_3 \cos \psi)$$

$$\eta_1 = \eta_g + (b_1 a + b_2 b + b_3 c) - l_1 (b_2 \sin \psi - b_3 \cos \psi) \quad (63)$$

$$\zeta_1 = \zeta_g + (c_1 a + c_2 b + c_3 c) - l_1 (c_2 \sin \psi - c_3 \cos \psi)$$

Совершенно так же будет

$$\xi_2 = \xi_g + (a_1 a + a_2 b + a_3 c) - l_2 (a_2 \sin \psi -$$

$$- a_3 \cos \psi) \cos \varphi + a_1 l_2 \sin \varphi$$

$$\eta_2 = \eta_g + (b_1 a + b_2 b + b_3 c) - l_2 (b_2 \sin \psi -$$

$$- b_3 \cos \psi) \cos \varphi + b_1 l_2 \sin \varphi \quad (64)$$

$$\zeta_2 = \zeta_g + (c_1 a + c_2 b + c_3 c) - l_2 (c_2 \sin \psi -$$

$$- c_3 \cos \psi) \cos \varphi + c_1 l_2 \sin \varphi$$

В этих выражениях a, b, c, l_1 и l_2 — заданные постоянные; $\xi_g, \eta_g, \zeta_g, a_1, a_2, a_3, \dots, c_3$ — заданные функции времени, так что обобщенные координаты ψ и φ входят только под знаками синуса и косинуса в члены, содержащие множители l_1 и l_2 .

Ввиду симметрии формул (63) и (64) достаточно проводить выкладку по отношению к одной из переменных в каждой группе — мы возьмем ξ_1 и ξ_2 .

Обозначим через $2S$ удвоенную живую силу поступательного движения:

$$2S = M_1 (\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2) + M_2 (\xi_2'^2 + \eta_2'^2 + \zeta_2'^2)$$

Очевидно, что в состав левых частей уравнений (59) и (60) войдут выражения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \psi'} \right) - \frac{\partial S}{\partial \psi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi'} \right) - \frac{\partial S}{\partial \varphi}$$

Чтобы составить эти выражения, достаточно составить выражения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \psi'} \xi_1'^2 \right) - \frac{\partial}{\partial \psi} \xi_1'^2 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \psi'} \xi_2'^2 \right) - \frac{\partial}{\partial \psi} \xi_2'^2$$

и

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi'} \xi_1'^2 \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \xi_1'^2 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi'} \xi_2'^2 \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \xi_2'^2$$

затем, умножив их соответственно на M_1 и M_2 , взять их сумму; члены, соответствующие переменным η_1 и η_2 , ζ_1 и ζ_2 , получатся простою заменю букв.

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \xi_1' + \xi_2' + (a_1 a + a_2 b + a_3 c) - l_1 (a_2 \sin \psi - a_3 \cos \psi) - \\ - l_1 (a_2 \cos \psi + a_3 \sin \psi) \psi' \end{aligned} \quad (65)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \psi'} \xi_1'^2 = \xi_1' \frac{\partial \xi_1'}{\partial \psi'}; \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \psi'} \xi_2'^2 = \xi_2' \frac{\partial \xi_2'}{\partial \psi'}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \psi} \xi_1'^2 = \xi_1' \frac{\partial \xi_1'}{\partial \psi}; \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \psi} \xi_2'^2 = \xi_2' \frac{\partial \xi_2'}{\partial \psi}$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi'} \xi_1'^2 = -l_1 \xi_1' (a_2 \cos \psi + a_3 \sin \psi)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \psi'} \xi_1'^2 \right) = -l_1 \xi_1'' (a_2 \cos \psi + a_3 \sin \psi) -$$

$$-l_1 \xi_1' (a_2 \cos \psi + a_3 \sin \psi) - l_1 \xi_1' (-a_2 \sin \psi + a_3 \cos \psi) \psi' -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \psi} \xi_1'^2 = \dots + l_1 \xi_1' (a_2 \cos \psi + a_3 \sin \psi) +$$

$$+ l_1 \xi_1' (-a_2 \sin \psi + a_3 \cos \psi) \psi'$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \psi'} \xi_1'^2 \right) - \frac{\partial}{\partial \psi} \xi_1'^2 \right] = -l_1 \xi_1'' (a_2 \cos \psi + a_3 \sin \psi) \quad (*)$$

Совершенно так же имеем:

$$\begin{aligned} \xi_2' = \xi_2' + (a_1 a + a_2 b + a_3 c) - l_2 (a_2 \sin \psi - \\ - a_3 \cos \psi) \cos \varphi - l_2 (a_2 \cos \psi + a_3 \sin \psi) \psi' \cos \varphi + \\ + l_2 (a_2 \sin \psi - a_3 \cos \psi) \varphi' \sin \varphi + l_2 a_1 \sin \varphi + \\ + a_1 l_2 \varphi' \cos \varphi \end{aligned} \quad (66)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \psi'} \xi_2'^2 = -l_2 \xi_2' (a_2 \cos \psi + a_3 \sin \psi) \cos \varphi \quad (**)$$

Затем имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \psi'} \xi_2'^2 \right) = -l_2 \xi_2'' (a_2 \cos \psi + a_3 \sin \psi) \cos \varphi - \\ & - l_2 \xi_2' (a_2' \cos \psi + a_3' \sin \psi) \cos \varphi - l_2 \xi_2' (-a_2 \sin \psi + a_3 \cos \psi) \psi' \cos \varphi + \\ & + l_2 \xi_2' (a_2 \cos \psi + a_3 \sin \psi) \varphi' \sin \varphi \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \psi} \xi_2'^2 = +l_2 \xi_2' (a_2' \cos \psi + a_3' \sin \psi) \cos \varphi - \\ & - l_2 \xi_2' (-a_2 \sin \psi + a_3 \cos \psi) \psi' \cos \varphi - \\ & - l_2 \xi_2' (a_2 \cos \psi + a_3 \sin \psi) \varphi' \sin \varphi \\ & \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial (\xi_2'^2)}{\partial \psi'} - \frac{\partial}{\partial \psi} \xi_2'^2 \right] = -l_2 \xi_2'' (a_2 \cos \psi + a_3 \sin \psi) \cos \varphi \end{aligned}$$

На основании выражений (*) и (**), умножив их соответственно на M_1 и M_2 , сделав замену букв и сложив полученные равенства, имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \psi'} - \frac{\partial S}{\partial \psi} \right) = -M_1 l_1 [\xi_1'' (a_2 \cos \psi + a_3 \sin \psi) + \\ & + \eta_1'' (b_2 \cos \psi + b_3 \sin \psi) + \zeta_1'' (c_2 \cos \psi + c_3 \sin \psi)] + \\ & + M_2 l_2 [\xi_2'' (a_2 \cos \psi + a_3 \sin \psi) + \eta_2'' (b_2 \cos \psi + b_3 \sin \psi) + \\ & + \zeta_2'' (c_2 \cos \psi + c_3 \sin \psi) \cos \varphi \end{aligned} \quad (67)$$

Совершенно подобным образом составим количество

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi'} \right) - \frac{\partial S}{\partial \varphi}$$

Величины ξ_1' , η_1' , ζ_1' букв φ' и φ не содержат, следовательно, количество $M_1 (\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2)$ в левую часть уравнения (60) никаких членов не внесет, поэтому достаточно вычислить те члены, которые вносит $M_2 \xi_2'^2$ и составить остальные члены заменой букв так, как это сделано выше.

Из выражения ξ_2' следует

$$\frac{\partial \xi_2'}{\partial \varphi'} = l_2 [(a_2 \sin \psi - a_3 \cos \psi) \sin \varphi + a_1 \cos \varphi]$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi'} \xi_2'^2 = \xi_2' l_2 [(a_2 \sin \psi - a_3 \cos \psi) \sin \varphi + a_1 \cos \varphi] \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi'} \xi_2'^2 \right) = l_2 \xi_2'' [(a_2 \sin \psi - a_3 \cos \psi) \sin \varphi + a_1 \cos \varphi] + \\ & + l_2 \xi_2' [(a_2' \sin \psi - a_3' \cos \psi) \sin \varphi + a_1' \cos \varphi] + \\ & + l_2 \xi_2' [(a_2 \cos \psi + a_3 \sin \psi) \psi' \sin \varphi - a_1 \varphi' \sin \varphi] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + l_2 \zeta'_2 [(a_2 \sin \psi - a_3 \cos \psi) \varphi' \cos \varphi \\
 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \zeta_2'^2 & = -l_2 \zeta'_2 [(a'_2 \sin \psi - a'_3 \cos \psi) \sin \varphi + a'_1 \cos \varphi] - \\
 & - l_2 \zeta'_2 [(a_2 \cos \psi + a_3 \sin \psi) \psi' \sin \varphi - a_1 \varphi' \sin \varphi] - \\
 & - l_2 \zeta'_2 [(a_2 \sin \psi - a_3 \cos \psi) \varphi' \cos \varphi] \\
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi'} \zeta_2'^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi'} \zeta_2'^2 = \\
 & = l_2 \zeta_2'' [(a_2 \sin \psi - a_3 \cos \psi) \sin \varphi + a_1 \cos \varphi]
 \end{aligned}$$

Значит, будет

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi'} \right) - \frac{\partial S}{\partial \varphi} & = M_2 l_2 (a_1 \zeta_2'' + b_1 \eta_2'' + c_1 \zeta_2''') \cos \varphi + \\
 + M_2 l_2 [\zeta_2'' (a_2 \sin \psi - a_3 \cos \psi) + \eta_2'' (b_2 \sin \psi - b_3 \cos \psi) + & \quad (68) \\
 + \zeta_2'' (c_2 \sin \psi - c_3 \cos \psi)] \sin \varphi
 \end{aligned}$$

Для полного развития выражений (68) и (69) надо составить величины

$$\zeta_1'', \eta_1'', \zeta_1'' \text{ и } \zeta_2'', \eta_2'', \zeta_2''$$

проекции ускорения точек P и Q на абсолютные оси координат.

В нашем случае достаточно составить величины ζ_1'' и ζ_2'' , остальные получатся через замену букв.

Мы имели формулу (65)

$$\begin{aligned}
 \zeta_1' & = \zeta_g' + (a_1' a + a_2' b + a_3' c) - l_1 (a_2' \sin \psi - a_3' \cos \psi) - \\
 & - l_1 (a_2 \cos \psi + a_3 \sin \psi) \psi'
 \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}
 \zeta_1'' & = \zeta_g'' + (a_1'' a + a_2'' b + a_3'' c) - l_1 (a_2'' \sin \psi - a_3'' \cos \psi) - \\
 - 2l_1 (a_2' \cos \psi + a_3' \sin \psi) \psi' - l_1 (-a_2 \sin \psi + a_3 \cos \psi) \psi'^2 - & \quad (69) \\
 - l_1 (a_2 \cos \psi + a_3 \sin \psi) \psi''
 \end{aligned}$$

Точно так же из формулы (66)

$$\begin{aligned}
 \zeta_2' & = \zeta_g' + (a_1' a + a_2' b + a_3' c) - l_2 (a_2' \sin \psi - a_3' \cos \psi) \cos \varphi - \\
 - l_2 (a_2 \cos \psi + a_3 \sin \psi) \psi' \cos \varphi + l_2 (a_2 \sin \psi - a_3 \cos \psi) \varphi' \sin \varphi + & \\
 + l_2 a_1' \sin \varphi + a_1 l_2 \varphi' \cos \varphi
 \end{aligned}$$

следует

$$\begin{aligned}
 \zeta_2'' & = \zeta_g'' + (a_1'' a + a_2'' b + a_3'' c) - l_2 (a_2'' \sin \psi - a_3'' \cos \psi) + \\
 + l_2 a_1'' \sin \varphi - l_2 (a_2 \cos \psi + a_3 \sin \psi) \psi'' \cos \varphi + & \\
 + l_2 (a_2 \sin \psi - a_3 \cos \psi) \varphi'' \sin \varphi + l_2 a_1 \varphi'' \cos \varphi - & \\
 - l_2 (-a_2 \sin \psi + a_3 \cos \psi) \psi'^2 \cos \varphi + l_2 (a_2 \sin \psi - & \quad (70) \\
 - a_3 \cos \psi) \varphi'^2 \cos \varphi - l_2 a_1 \varphi'^2 \sin \varphi + \\
 + 2l_2 (a_2' \sin \psi - a_3' \cos \psi) \varphi' \sin \varphi + 2l_2 (a_2 \cos \psi + a_3 \sin \psi) \psi' \varphi' \sin \varphi - & \\
 - 2l_2 (a_2' \cos \psi + a_3' \sin \psi) \psi' \cos \varphi + 2l_2 a_1 \varphi' \cos \varphi
 \end{aligned}$$

Мы не будем выписывать прочих выражений, ибо наша цель состояла в том, чтобы показать, насколько сложны будут выражения (67) и (68), если в них удерживать *все члены*, не взирая на их порядок, т. е. относительную величину.¹

Такое полное развитие тем более бесполезно, что величины

$$\xi_g, \eta_g, \zeta_g, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$$

зависящие от качаний корабля, а значит, и от изменчивости волн, могут быть известны лишь с грубым приближением, которому соответствуют развитые формулы, если в них удержать только члены *первого* порядка, как это объяснено в конце § 8.¹

§ 10. Чтобы выделить члены первого порядка нет надобности в полном развитии равенств (67) и (68) при помощи формул (69) и (70), а надо обратиться к таблице (44), которую мы перепишем так:

	ξ	η	ζ
x	$a_1 = 1$	$b_1 = \chi$	$c_1 = -\delta$
y	$a_2 = -\chi$	$b_2 = 1$	$c_2 = \theta_1$
z	$a_3 = \delta$	$b_3 = -\theta_1$	$c_3 = 1$

(44')

Эта таблица показывает, что все косинусы, кроме стоящих по главной диагонали и равных 1, суть малые величины первого порядка.

Величины

$$\xi''_1, \eta''_1, \zeta''_1; \xi''_2, \eta''_2, \zeta''_2; \psi, \varphi$$

также приняты за малые первого порядка, поэтому, ограничиваясь в выражениях (67) и (68) членами первого порядка, получим:

¹ Вполне развитые уравнения движения по своей сложности и по своему составу подобны уравнениям движения Луны в том виде, как они представлены в сочинении Л. Эйлера „Новая теория движения Луны“. Л. Эйлер в сотрудничестве со своим сыном И. Л. Эйлером и академиками В. Л. Крафтом и И. А. Лекселем применил к интегрированию этих уравнений методу последовательных приближений и разложения в ряды по степеням малых параметров, входящих в уравнения. Решение он довел до конца, т. е. до численного вычисления координат Луны для всякого заданного момента времени.

Развитие этих вычислений занимает в его сочинении 450 страниц *in 4°*.

Чисто математическая часть этого сочинения Эйлера, т. е. изложение его методы, поясненное несколькими у него же взятыми примерами, переведена мною на русский язык и издана Академией Наук под заглавием: Леонард Эйлер. Новая теория движения Луны. Изд. АН СССР, Л., 1934. (А. Н. Крылов, Собрание трудов, Дополнение к тт. V и VI, 1937). (Ред.).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{\psi}'} \right) - \frac{\partial S}{\partial \dot{\psi}} = -M_1 l_1 r_1'' - M_2 l_2 r_2'' \quad (68a)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{\varphi}'} \right) - \frac{\partial S}{\partial \dot{\varphi}} = M_2 l_2 \dot{\zeta}_2'' \quad (69a)$$

По таблице (44) будет вообще (45)

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_g + x - \chi y + \delta z \\ \eta &= r_g + \chi x + y - \theta_1 z \\ \zeta &= \zeta_g - \delta x + \theta_1 y + z \end{aligned}$$

Но для точек P и Q центров тяжести колец, с точностью до членов 1-го порядка, на основании (56) и (57)

$$\begin{aligned} x_p &= a \\ y_p &= b - l_1 \psi \\ z_p &= c + l_1 \end{aligned} \quad (56')$$

$$\begin{aligned} x_q &= a + l_2 \varphi \\ y_q &= b - l_2 \psi \\ z_q &= c + l_2 \end{aligned} \quad (57')$$

Подстановка этих величин, отбросив члены высших порядков, дает

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_g + a - b\chi + (c + l_1)\delta \\ r_1 &= r_g + a\chi + b - l_1\psi - (c + l_1)\theta_1 \end{aligned} \quad (63a)$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \zeta_g - a\delta + b\theta_1 + c + l_1 \\ \xi_2 &= \xi_g + a + l_2\varphi - b\chi + (c + l_2)\delta \\ r_2 &= r_g + a\chi + b - l_2\psi - (c + l_2)\theta_1 \\ \zeta_2 &= \zeta_g - a\delta + b\theta_1 + (c + l_2) \end{aligned} \quad (64a)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \xi_g' - b\chi' + (c + l_1)\delta' \\ r_1' &= r_g' + a\chi' - l_1\psi' - (c + l_1)\theta_1' \\ \zeta_1' &= \zeta_g' - a\delta' - b\theta_1' \end{aligned} \quad (70a)$$

$$\begin{aligned} \xi_2' &= \xi_g' + l_2\varphi' - b\chi' + (c + l_2)\delta' \\ r_2' &= r_g' + a\chi' - l_2\psi' - (c + l_2)\theta_1' \\ \zeta_2' &= \zeta_g' - a\delta' + b\theta_1' \end{aligned} \quad (70b)$$

Живая сила поступательного движения

$$2S = M_1 (\xi_1'^2 + r_1'^2 + \zeta_1'^2) + M_2 (\xi_2'^2 + r_2'^2 + \zeta_2'^2)$$

Затем имеем:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\psi}'} = -M_1 l_1 r_1' - M_2 l_2 r_2'; \quad \frac{\partial S}{\partial \dot{\psi}} = 0$$

Следовательно, будет

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial S}{\partial \psi} = -M_1 l_1 \gamma_1'' - M_2 l_2 \gamma_2'' \quad (68б)$$

Это есть как раз равенство (68а).

Точно так же

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\varphi}'} = M_2 l_2 \zeta_2'; \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0$$

Значит, будет

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{\varphi}'} \right) - \frac{\partial S}{\partial \varphi} = M_2 l_2 \zeta_2'' \quad (69б)$$

Это есть как раз равенство (69а).

Выше эти равенства были получены из „точных“ формул (67) и (68), „точных“ в том смысле, что в них были удержаны *все* члены и ничего не отбрасывалось, и члены высших порядков были отброшены в окончательных формулах (68а) и (69а).

Формулы же (68б) и (69б) были получены, отбросив все члены высших порядков с *самого начала*. Тожественность полученных результатов подтверждает справедливость сделанных в § 9 замечаний.

На основании формул (63) и (64), даже не переходя через формулы (65) и (66), можем сразу написать нужные нам выражения γ_1'' , γ_2'' и ζ_2'' , именно будет

$$\begin{aligned} \gamma_1'' &= \gamma_g'' + a\chi'' - l_1 \psi'' - (c - l_1) \theta_1'' \\ \gamma_2'' &= \gamma_g'' + a\chi'' - l_2 \psi'' - (c + l_2) \theta_1'' \\ \zeta_2'' &= \zeta_g'' + l_2 \varphi'' - b\chi'' + (c + l_2) \delta'' \end{aligned} \quad (***)$$

Умножив первое из этих равенств на $-M_1 l_1$, второе на $-M_2 l_2$ и сложив, получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial S}{\partial \psi} &= (M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2) (\psi'' + \theta_1'') - \\ &- (M_1 l_1 + M_2 l_2) (\gamma_g'' - a\chi'' - c\theta_1'') \end{aligned} \quad (71)$$

Третье равенство (***) , по умножении на $M_2 l_2$, дает

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{\varphi}'} \right) - \frac{\partial S}{\partial \varphi} = M_2 l_2^2 (\varphi'' + \delta'') + M_2 l_2 (\zeta_g'' - b\chi'') \quad (72)$$

Выражения (71) и (72) представляют те члены, которые вносятся в *левые* части уравнений движения (59) и (60) и которые происходят от живой силы *поступательного* движения колец кардана.

Остается исчислить члены, происходящие от вращательного их движения.

§ 11. Живая сила вращательного движения колец определяется равенством

$$2W = (A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2) + (A_2 p_2^2 + B_2 q_2^2 + C_2 r_2^2) \quad (73)$$

¹ Здесь и далее a считается отрицательным. (Ред.).

где A_1, B_1, C_1 суть главные моменты инерции первого кольца, взятые для главных осей, проведенных через *центр тяжести* первого кольца и параллельных осям Ox_1, Oy_1, Oz_1 , проходящим через центр O подвеса; A_2, B_2, C_2 — аналогичные элементы второго кольца; p_1, q_1, r_1 — проекции угловой скорости ω_1 первого кольца; p_2, q_2, r_2 — проекции угловой скорости ω_2 второго кольца на их главные оси инерции.

Каждое из колец имеет *собственное движение* по отношению к осям Gx, Gy, Gz или параллельных им Ox, Oy, Oz и *переносное движение*, происходящее от качки корабля, состоящей из качаний: около поперечной оси Gy , именуемых *килевою* качкою, около продольной оси Gx , именуемых боковою качкою, и около оси Gz , перпендикулярной к палубе корабля, именуемых *рысканием*. На фиг. 11 показаны Эйлеровы углы δ, θ_1, χ , соответствующие этим качаниям.

В §§ 6 и 8 даны таблицы косинусов углов между координатами, с которыми мы имеем дело, а именно: между абсолютными осями $O\xi\eta\zeta$ и корабельными $Gxyz$, между осями $Ox_1y_1z_1$ первого кольца и осями $Ox_2y_2z_2$ второго кольца, когда плоскости колец наклонены друг к другу, и, наконец, между корабельными осями и осями колец.

Положим, что в рассматриваемый момент корабль обладает мгновенною угловою скоростью ω ; от этой угловой скорости изменяются Эйлеровы углы δ, θ_1, χ ; быстроты этих изменений $\delta', \theta'_1, \chi'$ представляют слагающие угловой скорости ω по тем осям, около которых происходят соответствующие вращения, а именно (фиг. 11):

$$\begin{aligned} \delta' & \text{ около оси } O\eta \\ \theta'_1 & \text{ около оси } O\Omega \\ \chi' & \text{ около оси } Oz \end{aligned}$$

Эти слагающие представляются соответствующими векторами, причем вектор ω будет их геометрической суммой.

Проектируя эти векторы на оси Ox, Oy, Oz по теореме проекций, получим равенства:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega \cos(\hat{\omega x}) = \delta' \cos(\hat{\eta x}) + \theta'_1 \cos(\hat{\Omega x}) + \\ &+ \chi' \cos(\hat{z x}) = b_1 \delta' + \theta'_1 \cos \chi \\ \omega_y &= \omega \cos(\hat{\omega y}) = \delta' \cos(\hat{\eta y}) + \theta'_1 \cos(\hat{\Omega y}) + \\ &+ \chi' \cos(\hat{z y}) = b_2 \delta' - \theta'_1 \sin \chi \\ \omega_z &= \omega \cos(\hat{\omega z}) = \delta' \cos(\hat{\eta z}) + \theta'_1 \cos(\hat{\Omega z}) + \\ &+ \chi' \cos(\hat{z z}) = b_3 \delta' + \chi' \end{aligned} \tag{74}$$

В таблице (43) даны как точные, так и приближенные значения величин b_1, b_2, b_3 .

В § 8 приведены таблицы косинусов углов между осями $Ox_1y_1z_1$ первого кольца, осями $Ox_2y_2z_2$ второго кольца и корабельными осями $Oxyz$.

Собственное вращение ψ , угловая скорость которого есть ψ' , происходит около оси Ox_1 , значит его слагающие по осям первого кольца суть

$$\begin{aligned} \text{по оси } Ox_1 & \dots \psi' \\ \text{по оси } Oy_1 & \dots 0 \\ \text{по оси } Oz_1 & \dots 0 \end{aligned} \quad (75)$$

Первое кольцо в свое вращение увлекает второе кольцо и при наклонении этого кольца на угол φ к первому скорость ψ' дает слагающие

$$\begin{aligned} \text{по оси } Ox_2 & \dots \psi' \cos \varphi \\ \text{по оси } Oy_2 & \dots 0 \\ \text{по оси } Oz_2 & \dots \psi' \sin \varphi \end{aligned} \quad (76)$$

К этим слагающим надо присовокупить угловую скорость вращения φ' второго кольца относительно первого. Это вращение происходит около оси Oy_2 .

Таким образом, собственные вращения колец дают для второго кольца слагающие угловой скорости

$$\begin{aligned} \text{по оси } Ox_2 & \dots \psi' \cos \varphi \\ \text{по оси } Oy_2 & \dots \varphi' \\ \text{по оси } Oz_2 & \dots \psi' \sin \varphi \end{aligned} \quad (77)$$

Применив теорему проекции к равенствам (74), (75) и (77), получаем, на основании таблиц § 8:

$$\begin{aligned} p_1 &= \psi' + \omega_x \cos(\widehat{xx}_1) + \omega_y \cos(\widehat{yx}_1) + \omega_z \cos(\widehat{zx}_1) = \psi' + \omega_x \\ q_1 &= \omega_x \cos(\widehat{xy}_1) + \omega_y \cos(\widehat{yy}_1) + \omega_z \cos(\widehat{zy}_1) = \\ &= \omega_y \cos \psi + \omega_z \sin \psi \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} r_1 &= \omega_x \cos(\widehat{xz}_1) + \omega_y \cos(\widehat{yz}_1) + \omega_z \cos(\widehat{zz}_1) = \\ &= -\omega_y \sin \psi + \omega_z \cos \psi \\ p_2 &= \psi' \cos \varphi + \omega_x \cos(\widehat{xx}_2) + \omega_y \cos(\widehat{yx}_2) + \omega_z \cos(\widehat{zx}_2) = \\ &= \psi' \cos \varphi + \omega_x \cos \varphi + \omega_y \sin \psi \sin \varphi - \omega_z \cos \psi \sin \varphi \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned} q_2 &= \omega_x \cos(\widehat{xy}_2) + \omega_y \cos(\widehat{yy}_2) + \omega_z \cos(\widehat{zy}_2) + \varphi' = \\ &= \varphi' + \omega_y \cos \varphi + \omega_z \sin \psi \end{aligned}$$

$$r_2 = \psi' \sin \varphi + \omega_x \sin \varphi - \omega_y \sin \psi \cos \varphi + \omega_z \cos \psi \cos \varphi$$

причем

$$\begin{aligned} \omega_x &= a_2 \delta' + \theta_1' \cos \chi \\ \omega_y &= b_2 \delta' - \theta_1' \sin \chi \\ \omega_z &= c_2 \delta' + \chi' \end{aligned} \quad (80)$$

На основании формул (78) — (80) и составляется выражение (73):

$$2W = (A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2) + (A_2 p_2^2 + B_2 q_2^2 + C_2 r_2^2)$$

Поступая подобно тому, как мы поступали с количествами $2S$, мы могли бы развить выражения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{\psi}'} \right) - \frac{\partial W}{\partial \psi} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{\varphi}'} \right) - \frac{\partial W}{\partial \varphi} \quad (81)$$

тех членов, которые вносятся в левые части уравнений движения и которые происходят от вращательных движений корабля и колец. Развивать эти сложные выражения мы не будем, ибо необходимые для этого выкладки исполняются совершенно так, как в § 9 и, кроме некоторой длинноты, затруднений не представляют.

§ 12. Из формул (74) следует, что с точностью до членов первого порядка будет

$$\omega_x = \theta'_1; \quad \omega_y = \delta'; \quad \omega_z = \chi'$$

Тогда из формул (78) и (79) имеем:

$$p_1 = \psi' + \theta'_1$$

$$q_1 = \delta' \quad (82)$$

$$r_1 = \chi'$$

$$p_2 = \psi + \theta'_1$$

$$q_2 = \varphi' + \delta' \quad (83)$$

$$r_2 = \chi'$$

Следовательно, будет

$$2\mathcal{W} = A_1 (\psi' + \theta'_1)^2 + B_1 \delta'^2 + C_1 \chi'^2 + A_2 (\psi + \theta'_1)^2 + \\ + B_2 (\varphi' + \delta')^2 + C_2 \chi'^2 \quad (84)$$

Таким образом, вращательное движение доставляет в левую часть уравнений движения члены

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{\psi}'} \right) - \frac{\partial W}{\partial \psi} = A_1 (\psi'' + \theta''_1) + A_2 (\psi'' + \theta''_1) \quad (85)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{\varphi}'} \right) - \frac{\partial W}{\partial \varphi} = B_2 (\varphi'' + \delta'') \quad (86)$$

Придавая эти величины соответственно к равенствам (71) и (72) и замечая, что

$$T = S + \mathcal{W} \quad (87)$$

получим равенства

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = [(A_1 + M_1 l_1^2) + (A_2 + M_2 l_2^2)] (\psi'' + \theta''_1) - \\ - (M_1 l_1 + M_2 l_2) (\gamma''_g - a\chi'' - c\theta''_1) \quad (88)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = (B_2 + M_2 l_2^2) (\varphi'' + \delta'') + \\ + M_2 l_2 (\xi''_g - b\chi'') \quad (89)$$

Это и будут левые части уравнений движения. Что касается правых частей, то они выражаются общими формулами (61) и (62)

$$\Psi = - \left(M_1 g \frac{\partial \zeta_1}{\partial \psi} + M_2 g \frac{\partial \zeta_2}{\partial \psi} \right)$$

$$\Phi = - \left(M_1 g \frac{\partial \zeta_1}{\partial \varphi} + M_2 g \frac{\partial \zeta_2}{\partial \varphi} \right)$$

При вычислении величин

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial \varphi}$$

надо иметь в виду п. „б“ замечания, сделанного в § 8, что при дифференцировании по переменным φ и ψ порядок членов понижается на одну единицу, значит, чтобы результат был точен до членов первого порядка, надо в выражениях ζ_1 , ζ_2 удерживать члены *второго* порядка, как это сделано по отношению к живой силе, или же следует взять точные формулы (63) и (64):

$$\zeta_1 = \zeta_g + (c_1 a + c_2 b + c_3 c) - l_2 (c_2 \sin \psi - c_3 \cos \psi)$$

$$\zeta_2 = \zeta_g + (c_1 a + c_2 b + c_3 c) - l_2 (c_2 \sin \psi - c_3 \cos \psi) \cos \varphi + c_1 l_2 \sin \varphi$$

Мы возьмем точные формулы, ибо отбрасывание членов высших порядков здесь не вносит упрощения, тогда имеем:

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial \psi} = -l_2 (c_2 \cos \psi + c_3 \sin \psi); \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial \psi} = -l_2 (c_2 \cos \psi + c_3 \sin \psi) \cos \varphi$$

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial \varphi} = l_2 (c_2 \sin \psi - c_3 \cos \psi) \sin \varphi + c_1 l_2 \cos \varphi$$

В этих выражениях и можно удерживать члены первого порядка, полагая (43):

$$\cos \psi = \cos \varphi = 1; \quad \sin \psi = \psi; \quad \sin \varphi = \varphi$$

$$c_1 = -\delta; \quad c_2 = \theta_1; \quad c_3 = 1$$

тогда будет:¹

¹ Если бы для вычисления величин

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial \varphi}$$

были взяты приближенные выражения (63а) и (64а), в которых удержаны лишь члены первого порядка

$$\zeta_1 = \zeta_g - a\delta + b\theta_1 + (c + l_1)$$

$$\zeta_2 = \zeta_g - a\delta + b\theta_1 + (c + l_2)$$

то получилось бы

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial \psi} = 0; \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial \psi} = 0; \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial \varphi} = 0$$

$$\Psi = g [M_1 l_1 + M_2 l_2] (\psi + \theta_1) \quad (90)$$

$$\Phi = g M_2 l_2 (\varphi + \delta) \quad (91)$$

Таким образом, уравнения движения карданова подвеса на качающемся на волнении корабле будут в первом приближении:

$$(I_1 + I_2) (\psi'' + \theta_1'') - (M_1 l_1 + M_2 l_2) (\gamma'' - a\chi'' - c\theta_1'') = \\ = g (M_1 l_1 + M_2 l_2) (\psi + \theta_1) \quad (92)$$

$$K_2 (\varphi'' + \delta'') + M_2 l_2 (\xi_g'' - b\chi'') = g M_2 l_2 (\varphi + \delta) \quad (93)$$

Здесь положено

$$I_1 = A_1 + M_1 l_1^2, \quad I_2 = A_2 + M_2 l_2^2, \quad K_2 = B_2 + M_2 l_2^2 \quad (94)$$

так что I_1 есть момент инерции первого кольца относительно оси Ox_1 , около которой оно качается в корабле, увлекая с собою второе кольцо I_2 есть момент инерции второго кольца относительно оси Ox_2 , совпадающей с Ox_1 ; K_2 есть момент инерции второго кольца относительно оси Oy_2 , около которой оно качается в первом кольце (фиг. 3).

Предполагается, что как первое кольцо, так и второе, вместе с прибором, на нем укрепленным, уравновешены добавочными грузами так, что упомянутые оси суть главные оси инерции колец.

Величины

$$\xi_g, \quad \gamma_g, \quad \theta_1, \quad \delta, \quad \chi$$

предполагаются, как указано выше, заданными функциями времени t и притом периодическими или суммами таковых.

Неизвестными, для определения которых уравнения (92) и (93) служат, являются величины ψ и φ ; из них ψ представляет наклонение плоскости $x_1 O y_1$ первого кольца к плоскости палубы $x O y$, угол θ_1 есть наклонение плоскости палубы к горизонту, так что $\psi + \theta_1$ есть наклонение первого кольца к горизонту, считаемое в плоскости шпангоута. Угол $\varphi + \delta$ представляет наклонение второго кольца к горизонту, считая в диаметральной плоскости корабля. Обыкновенно именно эти величины и требуются на практике.

Разделим уравнение (92) на $I_1 + I_2$, уравнение (93) на K_2 и перенесем члены, содержащие неизвестные, в левую часть, а известные функции времени — в правую, уравнения (92) и (93) примут вид

$$(\psi + \theta_1)'' - g \frac{M_1 l_1 + M_2 l_2}{I_1 + I_2} (\psi + \theta_1) = \\ = \frac{M_1 l_1 + M_2 l_2}{I_1 + I_2} (\gamma_g'' - a\chi'' - c\theta_1'') \quad (95)$$

$$(\varphi + \delta)'' - g \frac{M_2 l_2}{K_2} (\varphi + \delta) = - \frac{g M_2 l_2}{K_2} (\xi_g'' - b\chi'') \quad (96)$$

результаты явно не верные. Здесь ложность результатов очевидна, но могут быть и такие случаи, где она скрыта, так что указанное замечание существенно важно.

Из второго уравнения сразу видно, что движения колец будут колебательными при

$$\begin{aligned} l_2 < 0 \\ M_1 l_1 + M_2 l_2 < 0 \end{aligned} \quad (97)$$

ибо величины $I_1 + I_2$ и K_2 существенно положительные, поэтому можно положить

$$-g \frac{M_1 l_1 + M_2 l_2}{I_1 + I_2} = n_1^2; \quad -g \frac{M_2 l_2}{K_2} = n_2^2 \quad (98)$$

и, приняв величины $\psi + \theta_1$ и $\varphi + \delta$ за новые неизвестные, т. е., положив:

$$\psi + \theta_1 = u; \quad \varphi + \delta = w \quad (99)$$

писать уравнения (95) и (96) так:

$$u'' + n_1^2 u = -n_1^2 \frac{1}{g} (\gamma_g'' - a\chi'' - c\theta_1'') \quad (100)$$

$$w'' + n_2^2 w = n_1^2 \frac{1}{g} (\zeta_g'' - b\chi'') \quad (101)$$

Интегрирование уравнений этого вида и свойства получаемых решений настолько известны, что останавливаться на них нет надобности, но следует заметить, что достаточно составить только их частные решения (вынужденные колебания), ибо в обоих уравнениях не написан член, представляющий влияние сопротивления качаниям, вследствие которого свободные качания быстро погашаются и остаются одни вынужденные; подробнее об этом вопросе будет сказано ниже.

Условия (97) показывают, что центр тяжести второго кольца, вполне нагруженного, должен лежать *ниже* точки пересечения осей кардана, вместе с тем неравенство

$$M_1 l_1 + M_2 l_2 < 0$$

которое при $l_2 = -h$ принимает вид

$$M_2 h > M_1 l_1 \quad (102)$$

показывает, что статический момент второго кольца должен быть больше статического момента первого, а это всегда может быть достигнуто и имеет место при $l_1 = 0$.

§ 13. При расчете некоторых устройств на корабле приходится иметь дело с уравнениями вида

$$s'' + k^2 s = \sum H_i \sin(\lambda_i \psi) \quad (103)$$

причем

$$\psi = \sum A_i \sin(p_i t + \beta_i) \quad (104)$$

Такое уравнение простым развитием правой части приводится к уравнению вида

$$s'' + k^2 s = \sum_i K_i \sin(a_i \sin p_i t) + \sum L_i \sin(a_i \cos p_i t) + \\ + \sum M_i \cos(a_i \sin p_i t) + \sum N_i \cos(a_i \cos p_i t)$$

где

$$k^2, K_i, L_i, M_i, N_i, a_i, p_i$$

суть заданные постоянные для ряда значений указателя i , по которому производится суммирование, короче говоря, приходится иметь дело с уравнением вида

$$s'' + k^2 s = K \sin(\varepsilon \sin pt) \tag{105}$$

или подобным ему, причем ε „малая“ величина, скажем не больше $\frac{1}{2}$.

Обозначим на время

$$\varepsilon \sin pt = \alpha$$

тогда будет

$$\sin(\varepsilon \sin pt) = \sin \alpha = \alpha - \frac{1}{6} \alpha^3 + \frac{1}{120} \alpha^5 - \dots = \\ = \varepsilon \sin pt - \frac{1}{6} \varepsilon^3 \sin^3 pt + \frac{1}{120} \varepsilon^5 \sin^5 pt$$

Но, как известно,

$$\sin^3 pt = \frac{3}{4} \sin pt - \frac{1}{4} \sin 3pt$$

$$\sin^5 pt = \frac{1}{16} \sin 5pt - \frac{5}{16} \sin 3pt + \frac{5}{8} \sin pt$$

Таким образом, $\sin(\varepsilon \sin pt)$ представится в виде суммы, составленной из синусов кратных аргументов, именно будет:

$$\sin(\varepsilon \sin pt) = \left(\varepsilon - \frac{1}{8} \varepsilon^3 + \frac{1}{192} \varepsilon^5 + \dots \right) \sin pt + \\ + \left(\frac{1}{24} \varepsilon^3 + \frac{1}{384} \varepsilon^5 + \dots \right) \sin 3pt + \frac{1}{1920} \varepsilon^5 \sin 5pt \dots$$

После такого разложения правой части уравнения (105) по синусам кратных аргументов интегрирование этого уравнения затруднений не представляет.

Приводим здесь общие формулы, которыми выражаются степени синуса и косинуса через синусы и косинусы кратных аргументов.

n четные

$$2^{n-1} (-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n a = \cos na - \frac{n}{1} \cos(n-2)a + \\ + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos(n-4)a \dots \pm \\ \pm \frac{n(n-1) \dots \left(\frac{n}{2} + 2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \left(\frac{n}{2} - 1\right)} \cos 2a \mp \frac{n(n-1) \dots \left(\frac{n}{2} + 1\right)}{1 \cdot 2 \dots \frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

Этот параграф включен сюда потому, что приходилось иногда замечать, что интегрирование уравнений вида (104) и (105) представляло затруднения для техников.

§ 14. Приступая к изучению способов успокоения качаний кардана подвеса, надо прежде всего определенно поставить задачу.

Карданов подвес устраивается для того прибора, который устанавливается на его *втором* кольце, и желательно, чтобы качания этого прибора по отношению к истинной горизонтальной плоскости были возможно малые, иначе, чтобы угол между осью Oz_2 и $O\zeta$ оставался возможно малым.

Мы имели выражения косинусов углов, составляемых направлением оси Oz_2 с корабельными осями Ox , Oy , Oz . Обозначим эти косинусы через λ , μ , ν , так что будет

$$\begin{aligned}\lambda &= \cos(\widehat{z_2x}) = \sin \varphi; & \mu &= \cos(\widehat{z_2y}) = -\sin \psi \cos \varphi; \\ \nu &= \cos(\widehat{z_2z}) = \cos \psi \cos \varphi\end{aligned}$$

вместе с тем

$$\cos(\widehat{x\zeta}) = c_1; \quad \cos(\widehat{y\zeta}) = c_2; \quad \cos(\widehat{z\zeta}) = \cos \delta \cos \theta_1$$

Следовательно, будет

$$\cos u = \cos(\widehat{z_2\zeta}) = c_1\lambda + c_2\mu + c_3\nu \quad (106)$$

Угол u между осями Oz_2 и $O\zeta$ предполагается малым; определять малый угол по его косинусу не следует, надо это определение делать по синусу, мы этого достигнем, воспользовавшись тождеством Эйлера, согласно которому

$$\begin{aligned}(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - (c_1\lambda + c_2\mu + c_3\nu)^2 &= \\ = (c_2\lambda - c_1\mu)^2 + (c_1\nu - c_3\lambda)^2 + (c_3\mu - c_2\nu)^2\end{aligned}$$

а так как

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1; \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

то предыдущее тождество дает

$$1 - \cos^2 u = \sin^2 u = (c_2\lambda - c_1\mu)^2 + (c_1\nu - c_3\lambda)^2 + (c_3\mu - c_2\nu)^2 \quad (107)$$

В формуле (107) можно заменить величины λ , μ , ν и c_1 , c_2 , c_3 их приближенными значениями [в формуле (106) этого делать нельзя — мы получили бы просто $\cos u = 1$]

$$\lambda = \varphi; \quad \mu = -\psi; \quad \nu = 1; \quad c_1 = -\delta; \quad c_2 = \theta_1; \quad c_3 = 1$$

подставляя которые в формулу (107), имеем:

$$\sin^2 u = (\theta_1\varphi - \psi\delta)^2 + (\varphi + \delta)^2 + (\psi + \theta_1)^2$$

Первый член правой части этого равенства четвертого порядка, остальные два члена — второго, поэтому можно писать:

$$\sin^2 u = (\psi + \theta_1)^2 + (\varphi + \delta)^2 = u^2 + w^2$$

причем u и w определяются уравнениями (100) и (101):

$$u'' + n_1^2 u = -n_1^2 \frac{1}{g} (\gamma_g'' - a\chi'' - c\theta_1'')$$

$$w'' + n_2^2 w = n_2^2 \frac{1}{g} (\zeta_g'' - b\chi'')$$

Эти уравнения существенно упрощаются, если взять

$$a = 0; \quad d = 0, \quad c = 0$$

т. е. поместить на корабле подвес так, чтобы центр подвеса (точка пересечения его осей) совпадал с центром тяжести корабля. В этом случае угловые качания корабля на кардан не влияют и он качается только вследствие орбитального движения корабля.

Уравнения (100) и (101) принимают тогда вид

$$u'' + n_1^2 u = -n_1^2 \frac{1}{g} \gamma_g''$$

$$w'' + n_2^2 w = n_2^2 \frac{1}{g} \zeta_g''$$

Всегда можно распорядиться противовесами так, чтобы центр тяжести первого кольца совпадал с точкой пересечения осей, тогда

$$l_1 = 0$$

и пусть попрежнему

$$l_2 = -h$$

тогда будет

$$n_1^2 = -g \frac{M_1 l_1 + M_2 l_2}{I_1 + I_2} = g \frac{M_2 h}{A_1 + I_2} \approx g \frac{M_2 h}{I_2}$$

ибо $I_2 \gg A_1$

$$n_2^2 = -g \frac{M l_2}{B_2 + M_2 h^2} = g \frac{M_2 h}{K_2} \approx n_1^2 = n^2$$

ибо

$$I_2 = A_2 + M_2 l_2^2, \quad K_2 = B_2 + M_2 l_2^2 \quad \text{и} \quad A_2 \approx B_2$$

Величины

$$\gamma_g = k_1 r \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + a\right); \quad \zeta_g = k_2 r \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \beta\right)$$

где k_1 и k_2 — некоторые численные множители, вычисление которых можно найти в моем сочинении „Качка корабля“, r — полувысота волны, τ_1 — видимый период волны.

Таким образом, уравнения (100) и (101) примут вид

$$u'' + n^2 u = n^2 k_1 \frac{1}{g} \cdot \frac{4\pi^2}{\tau_1^2} r \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha\right) \quad (100')$$

$$w'' + n^2 w = n^2 k_2 \frac{1}{g} \cdot \frac{4\pi^2}{\tau_1^2} r \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \beta\right) \quad (101')$$

Полагая $n^2 = \frac{4\pi^2}{\sigma^2}$, где σ есть период качаний кардана (безразлично около которой оси, ибо эти периоды близки между собою), видим, что частные решения уравнений (100') и (101'), т. е. вынужденные колебания кардана, будут

$$u_1 = \frac{k_1 r \frac{4\pi^2}{\sigma^2} \frac{4\pi^2}{\tau_1}}{\frac{4\pi^2}{\sigma^2} - \frac{4\pi^2}{\tau_1^2}} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha\right) = \frac{4\pi^2 k_1 r}{g} \cdot \frac{1}{\tau_1^2 - \sigma^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha\right)$$

$$w_1 = \frac{k_2 r \cdot \frac{4\pi^2}{\sigma^2} \cdot \frac{4\pi^2}{\tau_1^2}}{\frac{4\pi^2}{\sigma^2} - \frac{4\pi^2}{\tau_1^2}} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \beta\right) = \frac{4\pi^2 k_2 r}{g} \cdot \frac{1}{\tau_1^2 - \sigma^2} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \beta\right)$$

Значит,

$$\sin u = \sqrt{u_1^2 + w_1^2} =$$

$$= \frac{4\pi^2}{g} r \frac{1}{\tau_1^2 - \sigma^2} \sqrt{k_1^2 \sin^2\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha\right) + k_2^2 \cos^2\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \beta\right)}$$

но

$$\sin^2\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha\right) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{4\pi t}{\tau_1} + 2\alpha\right) \right]$$

$$\cos^2\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \beta\right) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi t}{\tau_1} + 2\beta\right) \right]$$

Так как фазовые углы α и β близки между собою, то можно принять

$$2\alpha = \frac{2\alpha + 2\beta}{2} = \alpha + \beta; \quad 2\beta = \frac{2\alpha + 2\beta}{2} = \alpha + \beta \quad (*)$$

и, полагая $\alpha + \beta = \gamma$, получим:

$$k_1^2 \sin^2\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha\right) + k_2 \cos^2\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \beta\right) =$$

$$= \frac{1}{2} k_1^2 \left[1 - \cos\left(\frac{4\pi t}{\tau_1} + \gamma\right) \right] + \frac{1}{2} k_2^2 \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi t}{\tau_1} + \gamma\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} (k_1^2 + k_2^2) + \frac{1}{2} (k_2^2 - k_1^2) \cos\left(\frac{4\pi t}{\tau_1} + \gamma\right)$$

Положим что

$$k_1^2 > k_2^2$$

Так как $\cos\left(\frac{4\pi t}{\tau_1} + \gamma\right)$ изменяется от $+1$ до -1 , то наибольшее значение предыдущей величины будет

$$\frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2) - \frac{1}{2}(k_2^2 - k_1^2) = k_1^2$$

и наименьшее

$$\frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2) + \frac{1}{2}(k_2^2 - k_1^2) = k_2^2$$

Значит, подкоренная величина в выражении $\sin u$ колеблется между значениями k_1^2 и k_2^2 , следовательно, по абсолютной величине будет

$$|\sin u| \leq \left| \frac{4\pi^2}{g} \cdot \frac{r}{\tau_1^2 - \sigma^2} k_1 \right|$$

$$|\sin u| \geq \left| \frac{4\pi^2}{g} \cdot \frac{r}{\tau_1^2 - \sigma^2} k_2 \right|$$

Выражая длины в метрах и время в секундах, имеем приближенно

$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{40}{10} = 4$$

и тогда будет

$$|\sin u| \leq \left| \frac{4r}{\tau_1^2 - \sigma^2} k_1 \right|; \quad |\sin u| \geq \left| \frac{4r}{\tau_1^2 - \sigma^2} k_2 \right| \quad (108)$$

К этому же результату можно придти и не делая предположения

$$\alpha = \beta = \frac{\alpha + \beta}{2} = \gamma$$

на чем останавливаться не будем.

Формулу (108) и решается вопрос о пределах, между которыми колеблется карданов подвес при установке его в центре тяжести кофля.

Возьмем пример: пусть будет $r = 3$ м, $\tau_1 = 10$ сек., $\sigma = 30$ сек., $k_1 = 1$, $k_2 = 0.75$, тогда будет

$$\sin u \leq \frac{4 \cdot 3}{900 - 100} 1 = \frac{4 \cdot 3}{800} = \frac{3}{200}$$

$$u \leq 0.015 = 0^\circ 50'$$

$$\sin u \geq \frac{4 \cdot 3}{900 - 100} 0.75 = 0.011$$

$$u \geq 0^\circ 40'$$

т. е. нормаль к плоскости второго кольца будет описывать около отвесной линии некоторый конус, заключенный между двумя круговыми конусами, один с углом при центре, равным $1^\circ 20'$, другой с углом $1^\circ 40'$.

Эти выводы получены в предположении, что погашение свободных колебаний весьма слабое.

Положим теперь, что мы введем более сильное погашение. Очевидно, что это погашение можно ввести, воздействуя на углы ψ и φ , ибо углы θ_1 и δ представляют качания корабля.

Положим, что моменты вводимых сопротивлений выражаются формулами

$$N_1\psi' \text{ и } N_2\varphi'$$

причем эти члены должны быть приписаны к левым частям уравнений (95) и (96), тогда, сохраняя прежние обозначения (98) и (99), полагаем

$$\frac{N_1}{I_1 + I_2} = 2h_1; \quad \frac{N_2}{K_2} = 2h_2$$

Величины N_1 и N_2 всегда могут быть отрегулированы так, чтобы было

$$\frac{N_1}{I_1 + I_2} = \frac{N_2}{K_2} = 2h$$

тогда мы получим вместо уравнений (100') и (101'):

$$\begin{aligned} u'' + 2h\psi' + n^2u &= -\frac{1}{g} n^2 r_g'' \\ w'' + 2h\varphi' + n^2w &= \frac{1}{g} n^2 \zeta_g'' \end{aligned} \quad (109)$$

Придавая к обеим частям первого уравнения $2h\theta'$ и второго $2h\delta'$, мы будем иметь на основании (99) уравнения:

$$\begin{aligned} u'' + 2hu' + n^2u &= -\frac{1}{g} n^2 r_g'' + 2h\theta' \\ w'' + 2hw' + n^2w &= \frac{1}{g} n^2 \zeta_g'' + 2h\delta' \end{aligned} \quad (110)$$

По общему свойству линейных уравнений можно для каждого из этих уравнений вычислять в отдельности частное решение для каждого из членов правой части и взять затем сумму этих решений. Чтобы получить общие формулы, рассмотрим вообще уравнение

$$y'' + 2hy' + n^2y = A \sin(pt + \alpha)$$

и пусть

$$Y = H \sin[(pt + \alpha) - \beta]$$

где H и β суть неизвестные постоянные, есть искомое частное решение, т. е. должно быть

$$Y'' + 2hY' + n^2Y = A \sin(pt + \alpha)$$

при всяком значении t .

Получим:

$$\begin{aligned} (n^2 - p^2)H \cos \beta + 2hp \sin \beta &= A \\ -2hpH \cos \beta + (n^2 - p^2)H \sin \beta &= 0 \end{aligned}$$

Взяв сумму квадратов этих величин, имеем:

$$[(n^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2]H^2 = A^2 \quad (*)$$

$$H \cos \beta = \frac{(n^2 - p^2)A}{(n^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2}$$

$$H \sin \beta = \frac{2hp \cdot A}{(n^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2} \quad (**)$$

Из равенств (*) и (**), взяв перед корнем знак +, ибо амплитуда, т. е. величина размахов, есть количество по существу положительное, имеем:

$$H = \frac{A}{+ \sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2}}$$

Затем

$$\cos \beta = \frac{n^2 - p^2}{H}; \quad \sin \beta = \frac{2hp}{H}$$

Найдем амплитуду колебаний H и изменение фазы β , причем знаки косинуса и синуса укажут ту четверть, в которой надо брать угол β , если его вычислять по формуле

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{2hp}{n^2 - p^2} \right|$$

Таким образом, будет

$$Y = \frac{A}{+ \sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2}} \quad (111)$$

Для уравнения же

$$z'' + n^2z = A \sin(pt + \alpha)$$

частное решение есть

$$z = \frac{A}{n^2 - p^2} \sin(pt + \alpha) \quad (112)$$

Отсюда видно, что введение сопротивления, пропорционального первой степени скорости, изменяет как амплитуду колебаний, так и фазу их.

В нашем случае изменение фазы практического значения не имеет, по формуле же (111) мы сразу можем рассчитывать величину амплитуды вынужденных колебаний, когда даны частоты

$$n = \frac{2\pi}{\sigma}, \quad p = \frac{2\pi}{\tau_1}$$

коэффициент сопротивления h и наибольшее значение возмущающей силы A .

Предыдущим формулам часто придают несколько иной вид, положив

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2}} = \frac{1}{n^2 \sqrt{(1 - q^2)^2 + \mu^2 q^2}}$$

где

$$q = \frac{p}{n} = \frac{\sigma}{\tau_1} = \frac{\text{период свободных колебаний}}{\text{период возмущающей силы}}$$

$$\mu = \frac{2h}{n}$$

Если вместо периодической силы мы возьмем постоянную силу A , то уравнение движения будет

$$y'' + n^2 y = A$$

и частное решение будет

$$Y_0 = \frac{A}{n^2}$$

представляющее „статическое“ отклонение системы от ее положения равновесия, поэтому амплитуда колебаний, иначе динамическое отклонение, будет

$$H = \frac{A}{n^2 \sqrt{(1 - q^2)^2 + \mu^2 q^2}} = Y_0 \lambda$$

где

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - q^2)^2 + \mu^2 q^2}} \quad (113)$$

Множитель λ часто называют: „множитель динамичности“ или „резонансный множитель“.

Для этого множителя составлены таблицы с аргументами q и μ , а также графики. Такой график приложен к книге „Общая теория гироскопов“,¹ таблица и график — к книге „О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики“.²

Заметим еще, что погашение свободных колебаний совершается по показательному закону e^{-ht} , так что амплитуда *полного* размаха убывает в геометрической прогрессии с отношением:

$$e^{-h\sigma} : 1 = e^{-\frac{2h\pi}{n}} = e^{-\mu\pi}$$

В следующей таблице даны величины $e^{-\mu\pi}$ по аргументу $\mu\pi$:

$\mu\pi$	$e^{-\mu\pi}$								
0.1	0.90	0.6	0.55	1.2	0.30	2.2	0.111	3.2	0.041
0.2	0.82	0.7	0.50	1.4	0.25	2.4	0.091	3.4	0.033
0.3	0.74	0.8	0.45	1.6	0.20	2.6	0.074	3.6	0.027
0.4	0.67	0.9	0.41	1.8	0.175	2.8	0.061	3.8	0.022
0.5	0.61	1.0	0.37	2.0	0.135	3.0	0.050	4.0	0.018

Эта таблица показывает, что при периоде $\sigma = 30$ сек. погашение свободных колебаний будет весьма быстрое при малых значениях h . Так, например, возьмем $\mu\pi = 1.2$, тогда $-h\sigma = 30$, $h = 1.2$, значит $2h = 0.04$; $e^{-\mu\pi} = 0.30$, так что, если начальное отклонение есть 10° , то последовательные отклонения будут: 10° , 3° , 0.9 и т. д., т. е. *свободные* колебания затухают весьма быстро, но нам надо гасить *вынужденные* колебания, а сопротивление, пропорциональное скорости, не оказы-

¹ А. Н. Крылов, Собрание трудов, т. VIII, 1950. (Ред.).

² А. Н. Крылов, Собрание трудов, т. III, ч. II, 1949. (Ред.).

вает на них почти никакого влияния, что всего яснее видно, если взять выше рассмотренный частный пример, где взято

$$\sigma = 30 \text{ сек.}, \tau_1 = 10 \text{ сек. и пусть } \mu\pi = 1.2$$

тогда

$$q = \frac{1}{3}; \quad q^2 = \frac{1}{9}; \quad 1 - q^2 = \frac{8}{9}; \quad (1 - q^2)^2 = \frac{64}{81} = 0.80$$

$$\mu^2\pi^2 = 1.44; \quad \mu^2 = 0.15; \quad \mu^2q^2 = \frac{1}{9} 0.15 = 0.016$$

так что

$$\frac{\mu^2q^2}{(1 - q^2)^2} = 0.02$$

Следовательно, будет

$$\sqrt{(1 - q^2)^2 + \mu^2q^2} = (1 - q^2) \sqrt{1 + 0.02} \approx 1.01 (1 - q^2) \approx (1 - q^2)$$

т. е. амплитуда колебаний, происходящих от членов, пропорциональных γ''_y и ξ''_y , сохраняет для обоих уравнений свою величину.

К правым частям прибавляются еще члены $2h_1\theta'$ и $2h\delta'$. Но множитель $2h$ — весьма малый; в самом деле, в нашем примере

$$2h\sigma = 1.2; \quad \sigma = 30; \quad 2h = 0.04 = \frac{1}{25}$$

так что вынужденные колебания, происходящие от этих двух членов, будут малы и результат, полученный при отсутствии сопротивления, практически сохраняется. Однако введение сопротивления, пропорционального скорости, хотя оно и не влияет на вынужденные колебания, *полезно*, ибо оно быстро погашает *свободные колебания*.

§ 15. Предыдущие выводы показывают, что введение сопротивления, пропорционального первой степени скорости, погашает свободные колебания, но не оказывает существенного влияния на колебания вынужденные, следовательно, надо искать другие способы погашения.

Прежде всего, является вопрос: введение вдобавок к сопротивлению, пропорциональному первой степени, сопротивления, пропорционального второй степени, не будет ли воздействовать на вынужденные колебания?

Такое сопротивление может быть осуществлено или электрическим путем, или гидравлическим.

Идея электрического успокоителя состоит в следующем: вообразим динамо, статор которой укреплен на фундаменте, несущем подшипники оси первого кольца. Этот статор питается током постоянной силы, ротор же получает свое вращение от оси первого кольца с угловою скоростью, пропорциональной ψ' , тогда вольтаж и сила тока, а значит, и реактивный момент ротора будет пропорционален ψ' .

Этим током будем питать статор второй динамо, ротор которой получает свое вращение также от оси первого кольца, т. е. имеет

угловую скорость, пропорциональную ψ' , вольтаж второй динамо, сила тока и реактивный момент будут пропорциональны ψ'^2 , так что полное сопротивление, действующее на первое кольцо, будет

$$M_R = N_1 \psi' + N_2 \psi'^2$$

Но если введение такого приспособления для первого кольца и представляется сравнительно простым, ибо динамо его успокоителя могут быть расположены не на самом кольце, а на фундаменте, несущем подшипники его оси, то для второго кольца динамо и всё приспособление придется располагать на первом кольце, что может оказаться не всегда приемлемым, так что такой способ по идее возможен, но едва ли практически удобен.

Идея гидравлического успокоителя, дающего сопротивление, пропорциональное второй степени скорости, состоит в применении как к первому, так и ко второму кольцу приспособления, подобного оружейному компрессору, в котором жидкость проталкивается через малое отверстие или из одной полости цилиндра в другую или перекачивается из одного сосуда в другой.

Сопротивление, оказываемое при этом жидкостью, пропорционально квадрату скорости и легко может быть регулируемо.

Такой компрессор может быть сделан весьма компактным, особенно если за жидкость взять ртуть, как это сделал А. П. Меллер для 75-миллиметровых морских скорострельных пушек.

Наконец, так называемая, „крылатка“ Фуко тоже должна давать сопротивление, пропорциональное квадрату скорости.

Таким образом, физическая возможность ввести сопротивление, пропорциональное второй степени скорости, существует, поэтому надо исследовать теоретически, поведет ли это к нашей цели погашения вынужденных колебаний.

Такое исследование приводится к изучению решения уравнений вида

$$u'' + 2hu' + \epsilon ku'^2 + n^2 u = \sum_i a_i \cos(p_i t + \omega_i) \quad (114)$$

причем ϵ есть прерывный множитель, принимающий значения

$$\epsilon = +1, \quad \text{когда } u' > 0$$

$$\epsilon = -1, \quad \text{когда } u' < 0$$

Начальные условия таковы: при $t=0$ должно быть

$$(u)_{t=0} = \sigma; \quad (u')_{t=0} = 0 \quad (115)$$

Если бы члена $\epsilon kt'^2$ не было, то вынужденные колебания [частное решение уравнения (114)] были бы

$$V = \sum_i \frac{a_i}{\lambda_i} \cos(p_i t + \omega_i - \beta_i) \quad (116)$$

(Значения λ_i и β_i приведены ниже). Наибольшая абсолютная величина V есть

$$|V_{\max}| = \sum_i \left| \frac{a_i}{\lambda_i} \right|$$

Эту величину обозначим через σ и положим:

$$a_i = \sigma b_i \lambda_i$$

тогда уравнение (114) напишется так:

$$u'' + 2hu' + \varepsilon ku'^2 + n^2 u = \sigma \sum b_i \lambda_i \cos(p_i t + \omega_i) \quad (117)$$

Мы будем искать решение вида

$$u = \sigma y_1 + \sigma^2 y_2 + \sigma^3 y_3 + \dots \quad (118)$$

Подставив эту величину в предыдущее уравнение, имеем равенство

$$\begin{aligned} & (\sigma y_1'' + \sigma^2 y_2'' + \sigma^3 y_3'' + \dots) + 2h(\sigma y_1' + \sigma^2 y_2' + \sigma^3 y_3' + \dots) + \\ & + \varepsilon k(\sigma y_1' + \sigma^2 y_2' + \sigma^3 y_3' + \dots)^2 + n^2(\sigma y_1 + \sigma^2 y_2 + \sigma^3 y_3 + \dots) = \\ & = \sigma \sum b_i \lambda_i \cos(p_i t + \omega_i) \end{aligned}$$

Отсюда, собирая члены с одинаковыми степенями σ и отождествляя, имеем:

$$\left. \begin{aligned} y_1'' + 2hy_1' + n^2 y_1 &= \sum_i b_i \lambda_i \cos(p_i t + \omega_i) \quad (1) \\ y_2'' + 2hy_2' + n^2 y_2 &= -\varepsilon k y_1'^2 \quad (2) \\ y_3'' + 2hy_3' + n^2 y_3 &= -2\varepsilon k y_1' y_2' \quad (3) \\ &\dots \dots \dots \text{и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

Равенства (119) дают для y_1, y_2, y_3 , как легко видеть, следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} (y_1)_{t=0} &= 1; \quad (y_1')_{t=0} = 0 \\ (y_2)_{t=0} &= 0; \quad (y_2')_{t=0} = 0 \\ (y_3)_{t=0} &= 0; \quad (y_3')_{t=0} = 0 \\ &\dots \dots \dots \text{и т. д.} \end{aligned} \quad (120)$$

Каждая из величин y_1, y_2, y_3, \dots , определяемая соответствующим уравнением системы (119), содержит две произвольные постоянные, которые и находятся из условий (120). Таков обычный процесс решения, но нам достаточно знать только наибольшие амплитуды размахов и их погашение, а не самый закон движения в продолжение каждого размаха этого можно достигнуть, не вычисляя произвольных постоянных, т. е. пользуясь условиями (120), поступая так, как это показано ниже.

Несколько изменив обозначения в уравнениях (53) и (54), мы имеем:

$$\eta_\theta = -k_1 r \sin \gamma \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha_1 \right) \quad (53')$$

$$\theta_1 = A \sin \left(\frac{2\pi t}{T_0} + \alpha_2 \right) + B \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \delta_1 \right) \quad (54')$$

так что будет

$$\eta_g'' = \frac{4\pi^2}{\tau_1^2} k_1 r \sin \gamma \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha_1 \right)$$

$$\theta' = \frac{2\pi}{T_0} A \cos \left(\frac{2\pi t}{T_0} + \alpha_2 \right) + \frac{2\pi}{\tau_1} B \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \delta_1 \right)$$

и правая часть уравнения (110) будет

$$-\frac{4\pi^2}{\tau_1^2} \cdot \frac{n^2}{g} k_1 r \sin \gamma \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha_1 \right) +$$

$$+ \frac{4\pi h}{T_0} A \cos \left(\frac{2\pi t}{T_0} + \alpha_2 \right) + \frac{4\pi h}{\tau_1} B \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \delta_1 \right) \quad (*)$$

В этом выражении первый и третий член могут быть соединены в один член вида

$$N_1 \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \omega_1 \right) \quad (**)$$

стоит только, развив $\sin \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha_1 \right)$ и $\cos \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \delta_1 \right)$, положить

$$N_1 \sin \omega_1 = \frac{4\pi^2}{\tau_1^2} \cdot \frac{n^2 k_1 r}{g} \sin \gamma \cos \alpha_1 + \frac{4\pi h}{\tau_1} B \sin \delta_1$$

$$N_1 \cos \omega_1 = \frac{4\pi h}{\tau_1^2} B \cos \delta_1 - \frac{4\pi^2}{\tau_1^2} \cdot \frac{k_1 r}{g} \sin \gamma \sin \alpha_1$$

тогда получим:

$$N_1 = + \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{\tau_1^2} \cdot \frac{n^2 k_1 r}{g} \sin \gamma \right)^2 + \left(\frac{4\pi h}{\tau_1} B \right)^2}$$

и

$$\sin \omega_1 = \frac{1}{N_1} \left(\frac{4\pi^2}{\tau_1^2} \cdot \frac{n^2 k_1 r}{g} \sin \gamma \cos \alpha_1 + \frac{4\pi h}{\tau_1} B \sin \delta_1 \right)$$

$$\cos \omega_1 = \frac{1}{N_1} \left(\frac{4\pi h}{\tau_1} B \cos \delta_1 - \frac{4\pi^2}{\tau_1^2} \cdot \frac{n^2 k_1 r}{g} \sin \gamma \sin \alpha_1 \right)$$

и выражение (*) примет вид

$$N_1 \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \omega_1 \right) + \frac{4\pi h}{T_0} A \cos \left(\frac{2\pi t}{T_0} + \alpha_2 \right) \quad (***)$$

Ввиду малости величины $\frac{4\pi h}{T_0}$ главный член в выражении (***) есть первый, по сравнению с которым второй член может быть отброшен, тогда первое из уравнений (110) примет вид

$$u'' + 2hu' + \varepsilon ku'^2 + n^2 u = N_1 \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \omega_1 \right)$$

соответственно которому система (119) будет

$$\left. \begin{aligned} y_1'' + 2hy_1' + n^2 y_1 &= N_1 \cos(p_1 t + \omega_1) & (1) \\ y_2'' + 2hy_2' + n^2 y_2 &= -\varepsilon ky_1'^2 & (2) \\ y_3'' + 2hy_3' + n^2 y_3 &= -2\varepsilon ky_1' y_2' & (3) \\ &\dots \dots \dots \text{и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

причем положено

$$\frac{2\pi}{\tau_1} = p_1$$

Условия (120) остаются без изменения.

Таким образом, решение уравнения (114) нелинейного сведено к нахождению решений системы (119), удовлетворяющих начальным условиям (120).

Из первого уравнения (119) и соответствующих ему начальных условий (120) найдем y_1 и подставляем в уравнение второе, находим величину y_2 ; найденные выражения y_1 и y_2 подставляем в уравнение (3) и т. д. Этот процесс никаких затруднений не представляет, но требует продолжительных и громоздких выкладок, от которых желательно избавиться, изменив порядок вычислений так, как об этом упомянуто выше.

При этом нам постоянно придется находить решения уравнений вида

$$y'' + 2hy' + n^2y = B_1 \cos(p_1t + \alpha_1) \quad (121)$$

поэтому здесь сгруппированы необходимые формулы.

1. Общий интеграл уравнения (121) имеет вид

$$y = e^{-ht} (C \cos n_1t + D \sin n_1t) + Y \quad (122)$$

причем C и D — произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям, Y есть частное решение уравнения (121)

$$n_1 = +\sqrt{n^2 - h^2}$$

предполагается, что $n^2 > h^2$.

2. Выражение

$$e^{-ht} (C \cos n_1t + D \sin n_1t)$$

представляет так называемые „свободные колебания“, величина Y — „вынужденные колебания“.

3. Частное решение Y уравнения (121) будем писать так:

$$Y = \frac{B_1}{\lambda_1} \cos(p_1t + \alpha_1 - \beta) \quad (123)$$

Применив методу неопределенных коэффициентов, получим:

$$\lambda_1 = +\sqrt{(n^2 - p_1^2) + 4h^2p_1^2}$$

$$\cos \beta_1 = \frac{n^2 - p_1^2}{\lambda_1}; \quad \sin \beta_1 = \frac{2hp_1}{\lambda_1} \quad (124)$$

$$\left| \operatorname{tg} \beta_1 \right| = \left| \frac{2hp_1}{n^2 - p_1^2} \right|$$

Знаки синуса и косинуса укажут ту четверть, в которой лежит угол β_1 , определяемый по абсолютной величине его тангенса.

4. Если последний член в уравнении (121) вида

$$B_j \cos(jp_1 t + \delta_j) \quad (125)$$

то частное решение, этому члену соответствующее, будем писать так:

$$Y_j = \frac{B_j}{\lambda_j} \cos[(jp_1 t + \delta_j) + \beta_j]$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_j &= + \sqrt{(n^2 - j^2 p_1^2)^2 + 4j^2 h^2 p_1^2} \\ \cos \beta_j &= \frac{n^2 - j^2 p_1^2}{\lambda_j}; \quad \sin \beta_j = \frac{2jhp_1}{\lambda_j} \\ |\operatorname{tg} \beta_j| &= \left| \frac{2jhp_1}{n^2 - j^2 p_1^2} \right| \end{aligned} \quad (126)$$

5. Если последний член в уравнении (121) будет вида

$$\sum_j B_j \cos[jp_1 t + \delta_j] \quad (127)$$

то

$$Y = \sum_j y_j \quad (128)$$

6. Если правая часть уравнения (121) содержит член вида

$$Be^{-ct} \cos(ft + \alpha) \quad (129)$$

то соответствующий член в составе частного решения будет вида

$$Y = \frac{B}{\mu} e^{-ct} \cos(ft + \alpha - \gamma) \quad (130)$$

причем

$$\begin{aligned} \mu &= + \sqrt{[n_1^2 - f^2 + (h - c)^2]^2 + 4f^2(h - c)^2} \\ \cos \gamma &= \frac{n_1^2 - f^2 + (h - c)^2}{\mu} \\ \sin \gamma &= \frac{2f(h - c)}{\mu} \\ |\operatorname{tg} \gamma| &= \left| \frac{2f(h - c)}{n_1^2 - f^2 + (h - c)^2} \right| \end{aligned} \quad (131)$$

Очевидно, что эта формула содержит в себе все остальные как частные случаи, а именно:

1°. Положив $c = 0$, $f = p_1$, $B = B_1$, получим:

$$\begin{aligned} \mu &= \sqrt{(n^2 - p_1^2) + 4h^2 p_1^2} = \lambda_1 \\ \cos \gamma &= \frac{n^2 - p_1^2}{\lambda_1} = \cos \beta_1; \quad \sin \gamma = \frac{2hp_1}{\lambda_1} = \sin \beta_1 \end{aligned}$$

т. е. формулы (124).

2°. Положив $B = B_j$, $c = 0$; $f = jp_1$, имеем

$$\begin{aligned} \mu &= \sqrt{(n^2 - j^2 p_1^2)^2 + 4j^2 p_1^2 h^2} = \lambda_j \\ \cos \gamma &= \frac{n^2 - j^2 p_1^2}{\mu} = \frac{n^2 - j^2 p_1^2}{\lambda_j} = \cos \beta_j \\ \sin \gamma &= \frac{2hj p_1}{\mu} = \frac{2hj p_1}{\lambda_j} = \sin \beta_j \end{aligned}$$

Это суть формулы (126).

Формула (130) показывает, что вынужденные колебания, возбуждаемые силою, убывающей с течением времени по показательному закону, также убывают по этому закону.

Все эти замечания и формулы, хорошо известные, приведены здесь, чтобы решения уравнений системы (119) писать непосредственно без всяких выкладок.

§ 16. Нам надо проследить, будут ли погашаться вынужденные колебания при сопротивлении, пропорциональном квадрату скоростей.

Свободные колебания погашаются сопротивлением, пропорциональным первой степени скорости, и после того, как решение уравнения (114) приведено к решению системы линейных уравнений (119), нет надобности рассматривать свободные колебания и определять постоянные произвольные по начальным условиям, ибо в окончательном результате вследствие множителя e^{-ht} и его степеней члены, содержащие этот множитель, исчезают.

В самом деле, стоит только вообразить, что вместо переменной t взята переменная $2m\pi + s$, где s — столь большое целое число, что множитель $e^{-2hm\pi}$ настолько мал, что членами, его содержащими, можно пренебречь при той ограниченной точности, которая нужна для практики.

При такой замене левые части всех уравнений системы (119) свой вид сохраняют, все члены правой части, содержащие множитель e^{-ht} или вообще множитель e^{-ct} , обращаются соответственно в $e^{-2hm\pi}$ или в $e^{-2cm\pi}$ и исчезают, члены, показательных множителей не содержащие, — остаются без изменения, только вместо буквы t будет стоять буква s , а так как для нас важно знать лишь амплитуды, т. е. величины размахов на сторону, а не фазы, и в разные моменты времени, то можно сохранить и букву t , не заменяя ее буквою s .

Чтобы удовлетворить начальным условиям, следовало бы сперва вычислить вынужденные колебания (частные решения Y), а затем соответственно этим решениям определить произвольные постоянные; эти постоянные входят только в состав членов, содержащих показательный множитель, которые исчезают, значит, нет надобности их и вычислять.

Здесь необходимо, однако, обратить внимание на обстоятельство, указанное в книге „Общая теория гироскопов“ (§ 22); чтобы его устранить, надо брать коэффициент сопротивления h настолько большим, чтобы свободные качания погашались после 3—4 ординарных размахов.

Перейдем теперь к интегрированию уравнений системы (119).

Первое уравнение есть

$$y_1'' + 2hy_1' + n^2y_1 = N_1 \cos(p_1t + \omega_1)$$

Общий интеграл этого уравнения при сделанных выше обозначениях есть

$$y_1 = e^{-ht} [c_1 \cos n_1t + c_2 \sin n_1t] + \frac{N_1}{\lambda_1} \cos(p_1t + \omega_1 - \beta_1) \quad (132)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются по начальным условиям; так, например, если бы требовалось, чтобы при $t=0$ было

$$(Y_1)_{t=0} = L; \quad (Y_1')_{t=0} = 0$$

то мы имели бы равенства

$$L = C_1 + \frac{N_1}{\lambda_1} \cos(\omega_1 - \beta_1)$$

$$0 = -hC_1 + n_1C_2 - \frac{N_1p_1}{\lambda_1} \sin(\omega_1 - \beta_1)$$

из которых следует

$$C_1 = L - \frac{N_1}{\lambda_1} \cos(\omega_1 - \beta_1)$$

$$C_2 = \frac{h}{n_1} \left[L - \frac{N_1}{\lambda_1} \cos(\omega_1 - \beta_1) \right] + \frac{N_1}{\lambda_1} \cdot \frac{p_1}{n_1} \sin(\omega_1 - \beta_1)$$

Как видно, первый член формулы (132) представляет затухающие по показательному закону колебания с периодом

$$T_1 = \frac{2\pi}{n_1}$$

Второй член — незатухающие, чисто периодические колебания с периодом $\tau_1 = \frac{2\pi}{p_1}$ и постоянной амплитудой $\frac{N_1}{\lambda_1}$, представляющей безразмерное отвлеченное число.

По истечении достаточно большого числа периодов τ_1 , член, содержащий показательный множитель, станет столь малым при любом значении аргумента, что им можно будет пренебречь, после чего установится движение, состоящее из одних только вынужденных колебаний, так что будет

$$\begin{aligned} y_1 = Y_1 &= \frac{N_1}{\lambda_1} \cos \left[p_1 \left(\frac{2\pi}{p_1} m + s + \frac{\omega_1 - \beta_1}{p_1} \right) \right] = \\ &= \frac{N_1}{\lambda_1} \cos [2\pi m + p_1(s + \nu_1)] = \frac{N_1}{\lambda_1} \cos p_1(s + \nu_1) \end{aligned}$$

причем

$$\nu_1 = \frac{\omega_1 - \beta_1}{p_1}$$

Но так как начальная фаза безразлична, то можно писать

$$y_1 = Y_1 = \frac{N_1}{\lambda_1} \cos p_1s$$

Такое движение мы получили бы, исключив сопротивление, пропорциональное квадрату скорости, тогда размахи совершались бы между крайними положениями

$$+\frac{N_1}{\lambda_1} \text{ и } -\frac{N_1}{\lambda_1}$$

достигая этих положений в те моменты времени, когда

$$p_1 s_1 = 2\pi, \text{ т. е. } s_1 = \frac{2\pi}{p_1} = \tau_1$$

$$p_1 s_2 = 2\pi + \pi, \text{ т. е. } s_2 = \frac{2\pi}{p_1} + \frac{\pi}{p_1} = \tau_1 + \frac{\tau_1}{2}$$

Положим, что в момент s_1 мы включаем сопротивление ky'^2 , и так как на всем протяжении от s_1 до s_2 угловая скорость $y'_1 < 0$, то будет $\varepsilon = -1$ и для промежутка

$$s_1 \leq s \leq s_2$$

имеет место второе уравнение системы (119):

$$y_2'' + 2hy_2' + n^2 y_2 = ky_1'^2$$

Но

$$y_1' = -\frac{N_1}{\lambda_1} p_1 \sin p_1 s$$

то

$$ky_1'^2 = k \left(\frac{N_1}{\lambda_1} \right)^2 p_1^2 \sin^2 p_1 s = \frac{k}{2} \left(\frac{N_1}{\lambda_1} \right)^2 p_1^2 [1 - \cos 2p_1 s]$$

Второе уравнение системы (119) будет

$$y_2'' + 2h_2' + n^2 y_2 = \frac{k}{2} \left(\frac{N_1}{\lambda_1} \right)^2 p_1^2 [1 - \cos 2p_1 s]$$

Частное решение этого уравнения

$$y_2 = Y_2 = \frac{k}{2} \left(\frac{N_1}{\lambda_1} \right)^2 \frac{p_1^2}{n^2} + \frac{k}{2} \left(\frac{N_1}{\lambda_1} \right)^2 \frac{p_1^2}{\lambda_2} \cos(2p_1 s - \beta_2)$$

Третье уравнение системы будет

$$y_3'' + 2hy_3' + n^2 y_3 = 2ky_1' y_2'$$

Мы имеем

$$y_1' = -\frac{N_1}{\lambda_1} p_1 \sin p_1 s$$

$$y_2' = -k \left(\frac{N_1}{\lambda_1} \right)^2 \frac{p_1^3}{\lambda_2} \sin(2p_1 s - \beta_2)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 2ky_1' y_2' &= 2k^2 \left(\frac{N_1}{\lambda_1} \right)^3 \frac{p_1^4}{\lambda_2} \sin p_1 s \sin(2p_1 s - \beta_2) = \\ &= k^2 \left(\frac{N_1}{\lambda_1} \right)^3 \frac{p_1^4}{\lambda_2} [\cos(p_1 s - \beta_2) - \cos(3p_1 s - \beta_2)] \end{aligned}$$

так что третье уравнение будет

$$y_3'' + 2hy_3' + n^2 y_3 = k^2 \left(\frac{N_1}{\lambda_1} \right)^3 \frac{p^4}{\lambda_2} [\cos(p_1 s - \beta_2) - \cos(3p_1 s - \beta_2)]$$

Значит, частное решение будет

$$y_3 = Y_3 = k_2 \left(\frac{N_1}{\lambda_1} \right)^3 \frac{p^4}{\lambda_2} \left[\frac{1}{\lambda_2} \cos(p_1 s - \beta_2 - \beta_1) - \frac{1}{\lambda_3} \cos(3p_1 s - \beta_2 - \beta_3) \right]$$

и мы получим для промежутка $s_1 \leq s \leq s_2$:

$$u = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

Подставляя вместо Y_1, Y_2, Y_3 их величины, имеем:

$$u = \frac{N_1}{\lambda_1} \cos p_1 s + \frac{k}{2} \left(\frac{N_1}{\lambda_1} \right)^2 \left[\frac{p_1^2}{n^2} + \frac{p_1^2}{\lambda_2} \cos(2p_1 s - \beta_2) \right] +$$

$$+ k^2 \left(\frac{N_1}{\lambda_1} \right)^3 \frac{p_1^4}{\lambda_2} \left[\frac{1}{\lambda_1} \cos(p_1 s - \beta_2 - \beta_1) - \frac{1}{\lambda_3} \cos(3p_1 s - \beta_2 - \beta_3) \right]$$

Таким образом, само собою получилось решение, разложенное по степеням установившейся амплитуды колебаний $\left(\frac{N_1}{\lambda_1} \right)$, иначе — по степеням амплитуды, имеющей место, когда квадратичное сопротивление выключено.

§ 17. При определении вынужденных колебаний, когда сопротивление включает член, пропорциональный квадрату скорости, возникает то неудобство, что выражение сопротивления содержит прерывный множитель

$$\varepsilon = (-1)^n$$

где n есть номер колебания, соответственно чему само уравнение изменяет свой вид и приходится в сущности рассматривать две системы уравнений, из которых одна соответствует четным значениям n , другая — нечетным, беря поочередно уравнения то первой, то второй системы.

Сопротивление воды колебательному движению корабля обыкновенно известно с грубым приближением, скажем, 10—15% в среднем.

Если сопротивление выражается нечетною степенью скорости, то вышеуказанной прерывности решений нет. Угловая скорость качаний корабля, при которой меткость стрельбы еще не вполне утрачивается, не превосходит примерно 6° в секунду или в числовой мере $\frac{1}{10}$ (м/сек.), поэтому возникает вопрос: нельзя ли так выбрать коэффициенты α и β , чтобы в промежутке

$$a \leq v \leq A \tag{133}$$

было приближенно

$$v^2 \approx \alpha v + \beta v^3 \tag{134}$$

причем можно довольствоваться вышеуказанным грубым приближением.

§ 18. Выбор коэффициентов α и β может быть выполнен разными способами, из которых отметим следующий.

Промежуток $A - a$ разделим на несколько равных или неравных частей и возьмем следующие частные значения переменной v :

$$v_0, v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_k \quad (135)$$

На основании равенства (134) имеем следующие условные уравнения:

$$\alpha v_i + \beta v_i^3 = v_i^2 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k) \quad (136)$$

Применяя методу наименьших квадратов, получим следующие *нормальные* уравнения для определения α и β :

$$\alpha \sum v_i^2 + \beta \sum v_i^4 = \sum v_i^3; \quad \alpha \sum v_i^4 + \beta \sum v_i^6 = \sum v_i^5 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k) \quad (137)$$

Очевидно, что значения (135) можно выбирать на бесчисленное множество манер.

Способ нахождения наилучшей системы значений приводит к вопросу, поставленному и решенному Чебышевым в его теории „функций, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке“.

Изложение этой теории Чебышева завлекло бы нас слишком далеко от нашей прямой задачи, поэтому, чтобы несколько ограничить произвол в выборе значений (135), поступим следующим образом.

Разделим промежуток $A - a$ на k равных частей и обозначим

$$\frac{A - a}{k} = h \quad (138)$$

тогда значения (135) будут

$$a; a + h; a + 2h; \dots; a + ih; \dots; a + (k - 1)h; a + kh = A \quad (135')$$

Умножим уравнения (137) на h , тогда будет

$$\begin{aligned} M \sum v_i^2 h + N \sum v_i^4 h &= \sum v_i^3 h \\ M \sum v_i^4 h + N \sum v_i^6 h &= \sum v_i^5 h \end{aligned} \quad (137')$$

Затем положим, что A и a свои значения сохраняют, число же k неопределенно возрастает, и перейдем к пределу; тогда в пределе будет

$$\begin{aligned} \text{пред. } \sum v_i^2 h &= \int_a^A v^2 dv = \frac{1}{3} (A^3 - a^3) \\ \text{пред. } \sum v_i^3 h &= \int_a^A v^3 dv = \frac{1}{4} (A^4 - a^4) \\ \text{пред. } \sum v_i^4 h &= \int_a^A v^4 dv = \frac{1}{5} (A^5 - a^5) \end{aligned} \quad (139)$$

$$\text{пред. } \sum v_i^5 h = \int_a^A v^5 dv = \frac{1}{6} (A^6 - a^6)$$

$$\text{пред. } \sum v_i^6 h = \int_a^A v^6 dv = \frac{1}{7} (A^7 - a^7)$$

В нашем случае надо брать $a=0$, тогда уравнения (137') будут

$$\frac{1}{3} A^3 M + \frac{1}{5} A^5 N = \frac{1}{4} A^4; \quad \frac{1}{5} A^5 M + \frac{1}{7} A^7 N = \frac{1}{6} A^6$$

или по сокращении:

$$\frac{1}{3} M + \frac{1}{5} A^2 N = \frac{1}{4} A; \quad \frac{1}{5} M + \frac{1}{7} A^2 N = \frac{1}{6} A \quad (140)$$

Отсюда следует

$$M = \frac{5}{16} A; \quad N = \frac{35}{48} \frac{1}{A}; \quad v^2 \approx \frac{5}{48} \frac{v}{A} (3A^2 + 7v^2) \quad (141)$$

В нашем случае $A=0.10$, тогда будет

$$v^2 = 1.04v(0.03 + 7v^2) \quad (142)$$

Взяв для v последовательные значения через 0.01, получаем следующую таблицу:

v	$v^2_{\text{точн.}}$	$v^2_{\text{прибл.}}$
0.00	0.00000	0.00000
0.01	0.00010	0.00032
0.02	0.00040	0.00069
0.03	0.00090	0.00113
0.04	0.00160	0.00172
0.05	0.00250	0.00247
0.06	0.00360	0.00344
0.07	0.00490	0.00468
0.08	0.00640	0.00622
0.09	0.00810	0.00811
0.10	0.01000	0.01040

Положим $A=0.20$ и посмотрим, какова будет точность приближенного равенства

$$v^2 \approx \frac{5}{48} \cdot \frac{v}{A} (3A^2 + 7v^2) = 0.52 \cdot v(0.12 + 7v^2)$$

Вычисления по этой формуле сведены в таблицу:¹

¹ Приводятся лишь окончательные результаты вычислений. (Ред.).

1	2	3	4	5	6
v	$7v^2$	$7v^2 + 0.1200$	$0.52v$	v^2 точн.	v^2 прибл.
0.00	0.00000	0.1200	0.0000	0.00000	0.00000
0.02	0.0028	0.1228	0.0104	0.00040	0.00123
0.04	0.0112	0.1312	0.0208	0.00160	0.00273
0.06	0.0252	0.1452	0.0312	0.00360	0.00453
0.08	0.0448	0.1648	0.0416	0.00640	0.00686
0.10	0.0700	0.1900	0.0520	0.01000	0.00988
0.12	0.1008	0.2208	0.0624	0.01440	0.01385
0.14	0.1372	0.2572	0.0728	0.01960	0.01872
0.16	0.1792	0.2992	0.0832	0.02560	0.02500
0.18	0.2268	0.3468	0.0936	0.03240	0.03250
0.20	0.2800	0.4000	0.1040	0.04000	0.04160

Рассмотрение чисел этой таблицы показывает, что получится гораздо лучшее приближение, если множитель 1.04 заменить через 1.00, т. е. вместо формулы (141) брать

$$v^2 \approx \frac{v}{A} (3A^2 + 7v^2) \quad (143)$$

Чтобы иметь полную проверку, не будем основываться на числах предыдущей таблицы, а произведем все вычисление наново:

1	2	3	4	5	6	7
v	$7v^2$	$7v^2 + 0.0300$	$(3) \cdot 1$	v^2 ист	$(4) \cdot 1 = v^2$ прибл.	$(4) \cdot 1.04 = v^2$ прибл.
0.00	0.0000	0.0300	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.01	0.0007	0.0307	0.00031	0.00010	0.00031	0.00032
0.02	0.0028	0.0328	0.00066	0.00040	0.00066	0.00069
0.03	0.0063	0.0363	0.00109	0.00090	0.00109	0.00113
0.04	0.0112	0.0412	0.00165	0.00160	0.00165	0.00172
0.05	0.0175	0.0475	0.00238	0.00250	0.00238	0.00247
0.06	0.0252	0.0552	0.00331	0.00360	0.00331	0.00344
0.07	0.0343	0.0643	0.00450	0.00490	0.00450	0.00468
0.08	0.0448	0.0748	0.00598	0.00640	0.00598	0.00622
0.09	0.0567	0.0867	0.00780	0.00810	0.00780	0.00811
0.10	0.0700	0.1000	0.01000	0.01000	0.01000	0.01040

§ 19. Итак, вместо уравнения

$$y'' + 2hy' + ky^2 + n^2y = H \sin(pt + \alpha) \quad (144)$$

возьмем уравнение

$$y'' + 2hy' + k[My' + Ny^3] + n^2y = H \sin(pt + \alpha) \quad (145)$$

или, полагая

$$(2h + kM) = 2l; \quad kN = c \quad (146)$$

уравнение

$$y'' + 2ly' + cy^3 + n^2y = H \sin(pt + \alpha) \quad (147)$$

Начальные значения возьмем

$$(y)_{t=0} = 0; (y')_{t=0} = 0 \quad (148)$$

т. е. что в начальный момент качающееся тело, скажем корабль, находилось в равновесии и покое, и требуется определить, как его раскачает периодическая сила.

В уравнении (147) величина H вообще малая, поэтому искомую функцию y будем разлагать по степеням параметра H .

Полагаем

$$y = Hu_1 + H^2u_2 + H^3u_3 + \dots$$

тогда будет

$$y' = Hu'_1 + H^2u'_2 + H^3u'_3 + \dots$$

$$y'' = H^3u''_1 + \dots$$

После подстановки этих выражений уравнение (147) будет выглядеть так:

$$Hu''_1 + H^2u''_2 + H^3u''_3 + \dots + 2l(Hu'_1 + H^2u'_2 + H^3u'_3 + \dots) + cH^3u_1{}^3 + \dots + n^2(Hu_1 + H^2u_2 + H^3u_3 + \dots) = H \sin(pt + \alpha)$$

Так как это равенство должно иметь место при всяком значении H , то оно требует, чтобы было

$$\left. \begin{aligned} u''_1 + 2lu'_1 + n^2u_1 &= \sin(pt + \alpha) & (1) \\ u''_2 + 2lu'_2 + n^2u_2 &= 0 & (2) \\ u''_3 + 2lu'_3 + n^2u_3 &= -cu_1{}^3 & (3) \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Вместе с тем, начальные условия дают

$$\left. \begin{aligned} (u_1)_{t=0} &= 0; & (u'_1)_{t=0} &= 0 & (1) \\ (u_2)_{t=0} &= 0; & (u'_2)_{t=0} &= 0 & (2) \\ (u_3)_{t=0} &= 0; & (u'_3)_{t=0} &= 0 & (3) \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Из уравнений (I, 2) и (II, 2) следует

$$u_2 = 0$$

так что будет

$$y = Hu_1 + H^3u_3 + \dots$$

и в системе (I) останутся только уравнения (I, 1) и (I, 3) и начальные условия (II, 1) и (II, 3).

Таким образом, решение нелинейного уравнения (147) приведено к решению *линейных* уравнений вида

$$z'' + 2lz' + n^2z = \sin(qt + \alpha) \quad (III)$$

и

$$x'' + 2lx' + n^2x = \cos(qt + \delta)$$

при начальных условиях

$$\left. \begin{aligned} (z)_{t=0} &= 0; & (z')_{t=0} &= 0 \\ (x)_{t=0} &= 0; & (x')_{t=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ГИРОВЕРТИКАЛИ ¹

I. Маятниковый кренометр

§ 1. Простейшим и наиболее употребительным прибором для суждения о величине размахов качки корабля является маятниковый кренометр. С изложения теории этого прибора мы и начнем, чтобы выяснить причины и величины возможных погрешностей его показаний.

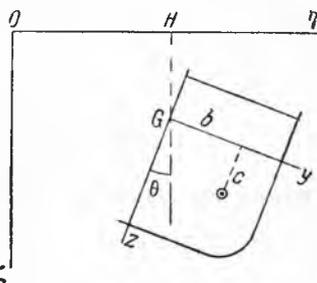
Простейший случай качки корабля на волнении имеет место, когда корабль на крупной и правильной океанской зыби идет к волне лагом.

В этом случае корабль, кроме хода, имеет двоякое движение: 1) центр тяжести корабля описывает в плоскости бега волн, с которою совпадает плоскость шпангоутов, круговую орбиту, диаметр которой можно принять равным высоте волны; время обращения по этой орбите равно периоду волны, движение равномерное; 2) кроме этого орбитального движения, корабль совершает колебательное (вращательное) движение около своей продольной оси, проходящей через его центр тяжести. Это движение представляет так называемую боковую качку корабля и состоит из наложения двух родов колебаний, из коих одно имеет период равный периоду волны, другое — период свободных колебаний корабля на тихой воде.

§ 2. Таким образом, движение любой точки корабля совершается параллельно плоскости бега волн, которую мы примем за координатную плоскость $\eta\zeta$, неподвижную в пространстве, направив ось ζ вертикально вниз.

Начало координат возьмем в точке O , в которой находился бы центр тяжести корабля при равновесии и покое на тихой воде. Эту точку можно принять за центр описываемой центром тяжести корабля орбиты (фиг. 1).

В корабле примем за неизменно с ним связанные оси координат $Gxyz$, начало коих G есть центр тяжести корабля; ось Gx есть горизонтально-



Фиг. 1.

¹ Публикуется впервые по рукописи (Архив АН СССР, ф. 759, оп. 1, № 10). Работа состоит из трех глав, материал первых двух глав имеется, в основном, в статье „Карданов подвес на корабле“. (Ред.).

продольная ось корабля, направленная в нос; ось Gy — горизонтально-поперечная, направленная к правому борту; ось Gz — в диаметральной плоскости вниз.

Таким образом, положение корабля во всякий момент времени определяется координатами

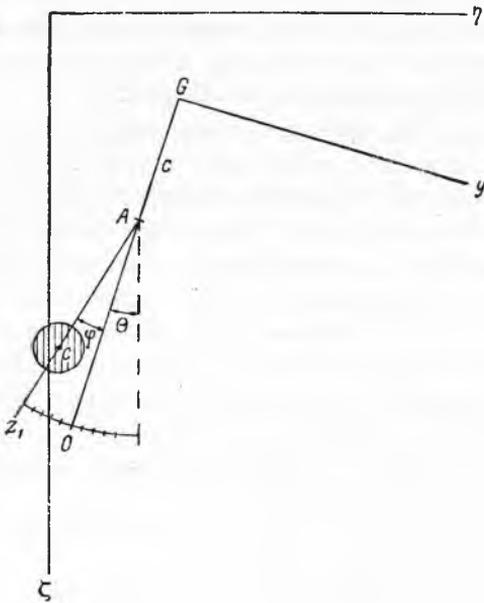
$$\eta_0 = OH; \quad \zeta_0 = HG$$

его центра тяжести и углом его крена θ .

Положение всякой точки в корабле определяется ее координатами

$$x = a; \quad y = b; \quad z = c$$

положение этой точки в пространстве будет

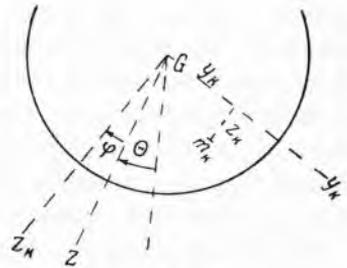


Фиг. 2.

$$\begin{aligned} \xi &= a \\ \eta &= \eta_0 + b \cos \theta - c \sin \theta \quad (1) \\ \zeta &= \zeta_0 + b \sin \theta + c \cos \theta \end{aligned}$$

Положим теперь, что на корабле в точке A , координаты которой суть

$$x = 0; \quad y = 0; \quad z = c$$



Фиг. 3.

повешен маятник, центр тяжести коего есть точка C , такая, что

$$AC = l$$

и чечевица коего представляет плоский диск (фиг. 2).

Требуется определить движение этого маятника на качающемся корабле.

Возьмем в маятнике за ось Cz_1 продолжение прямой AC , и пусть в точке m , координаты коей суть y_1, z_1 , находится элементарная масса m , тогда координаты этой точки будут (фиг. 3)

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_0 - c \sin \theta - l \sin(\varphi + \theta) + y_1 \cos(\varphi + \theta) - z_1 \sin(\varphi + \theta) \\ \zeta_1 &= \zeta_0 + c \cos \theta + l \cos(\varphi + \theta) + y_1 \sin(\varphi + \theta) + z_1 \cos(\varphi + \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

Чтобы составить уравнения движения, воспользуемся их второй Лагранжевой формой:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \Phi$$

где T есть живая сила системы, $\delta U = \Phi \delta \varphi$ — элементарная работа и φ есть угол отклонения маятника от диаметральной плоскости — единственный в нашем случае координатный параметр.

Живая сила системы найдется из равенства

$$2T = 2T_1 + 2T_2$$

где T_1 есть живая сила массы M всей системы, как бы сосредоточенной в ее центре тяжести C и T_2 — живая сила вращательного движения около центра тяжести; таким образом, будет

$$\begin{aligned} 2T_1 &= M[(\dot{\gamma}_0 - c \sin \theta - l \sin(\theta + \varphi))^2 + (\dot{\zeta}_0 + c \cos \theta + l \cos(\varphi + \theta))^2] = \\ &= M[(\dot{\gamma}'_0 - c \cos \theta \theta' - l \cos(\theta + \varphi)(\varphi' + \theta'))^2 + (\dot{\zeta}'_0 - c \sin \theta \theta' - \\ &- l \sin(\theta + \varphi)(\theta' + \varphi'))^2] = M[\dot{\gamma}'_0{}^2 + \dot{\zeta}'_0{}^2 + c^2 \theta'^2 + l^2(\theta' + \varphi')^2 - \\ &- 2c\dot{\gamma}'_0 \theta' \cos \theta - 2c\dot{\zeta}'_0 \theta' \sin \theta - 2l\dot{\gamma}'_0(\theta' + \varphi') \cos(\theta + \varphi) - \\ &- 2l\dot{\zeta}'_0 \sin(\theta + \varphi)(\theta' + \varphi') + 2cl\theta'(\theta' + \varphi') \cos \varphi] \end{aligned}$$

Живая же сила вращательного движения около центра тяжести че-
чевицы C будет

$$2T_2 = I_0(\theta' + \varphi')^2$$

где I_0 есть момент инерции маятника относительно оси, проведенной через его центр тяжести C параллельно оси качания. Отсюда следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}'} &= (I_0 + Ml^2)(\theta' + \varphi') - Ml[\dot{\gamma}'_0 \cos(\theta + \varphi) + \\ &+ \dot{\zeta}'_0 \sin(\theta + \varphi) - c\theta' \cos \varphi] \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}'} \right) &= (I_0 + Ml^2)(\theta'' + \varphi'') - Ml[\dot{\gamma}''_0 \cos(\theta + \varphi) + \\ &+ \dot{\zeta}''_0 \sin(\theta + \varphi) - c\theta'' \cos \varphi + (\theta' + \varphi')[\dot{\zeta}'_0 \cos(\theta + \varphi) - \\ &- \dot{\gamma}'_0 \sin(\theta + \varphi)] + c\varphi'\theta' \sin \varphi] - \\ - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= -Ml\dot{\zeta}'_0(\theta' + \varphi') \sin(\theta + \varphi) + Ml\dot{\gamma}'_0(\theta' + \varphi') \cos(\theta + \varphi) + \\ &+ Mcl\theta'(\theta' + \varphi') \sin \varphi \\ \Phi &= Mg \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} = -Mgl \sin(\theta + \varphi) \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение движения маятника будет

$$\begin{aligned} I(\theta'' + \varphi'') + Mlg \sin(\theta + \varphi) &= Ml\dot{\zeta}''_0 \sin(\theta + \varphi) + \\ + Ml\dot{\gamma}''_0 \cos(\theta + \varphi) - Mlc\theta'' \cos \varphi - Mlc\theta'^2 \sin \varphi \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$I = I_0 + Ml^2$$

Очевидно, что если бы корабль был неподвижен, то уравнение движения маятника было бы

$$I(\theta + \varphi)'' - Mgl \sin(\theta + \varphi) = 0 \quad (4)$$

и угол крена θ был бы постоянный, следовательно, члены, стоящие в правой части, представляют моменты возмущающих сил, происходящих от движения корабля, и нетрудно убедиться, что первые два члена

$$Ml\zeta_0'' \sin(\theta + \varphi) + Ml\gamma_0'' \cos(\theta + \varphi)$$

представляют сумму моментов сил $-M\zeta_0''$ и $-M\gamma_0''$, т. е. сил инерции переносного орбитального движения корабля, отнесенных к массе маятника, сосредоточенной в ее центре тяжести C . Последние два члена представляют момент силы инерции массы M , сосредоточенной в точке C , при том переносном движении вследствие боковой качки корабля, которая обладает точка подвеса A .

Из уравнения (3) видно, что при

$$c = 0,$$

т. е. когда маятник подвешен в *центре тяжести* корабля, качания корабля, т. е. боковая, а также и килевая качка на маятник никакого возмущающего влияния не оказывают и всё возмущение происходит только от орбитального движения корабля.

Уравнение (3) в этом случае можно писать так:

$$I(\theta'' + \varphi'') + Ml(g - \zeta_0'') \sin(\theta + \varphi) = Ml\gamma_0'' \cos(\theta + \varphi) \quad (5)$$

Для весьма крупной зыби

$$r = \frac{h}{2} = 3 \text{ м}$$

и длина волны

$$\lambda = 25h = 150 \text{ м.}$$

Период волны

$$\tau = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}} = 9.8 \text{ сек.}$$

$$\zeta_0 = r \cos \frac{2\pi t}{\tau}; \quad \gamma_0 = r \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

$$\zeta_0'' = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} r \cos \frac{2\pi t}{\tau}; \quad \gamma_0'' = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} r \sin \frac{2\pi t}{\tau} = -\frac{2\pi r}{\lambda} g \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

т. е.

$$|\zeta_0''| \leq 1.3 \text{ м/сек.}^2 \quad |\gamma_0''| \leq 1.3 \text{ м/сек.}^2$$

Для первого приближения можно величиною ζ_0'' пренебречь сравнительно с g и брать

$$\sin(\theta + \varphi) = (\theta + \varphi); \quad \cos(\theta + \varphi) = 1$$

вместе с тем

$$\frac{2\pi r}{\lambda} = \theta_0 \text{ — наибольший волновой склон,}$$

и уравнение (5) примет вид

$$I(\theta + \varphi)'' + Mgl(\theta + \varphi) = -\theta_0 Mgl \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

Положив

$$\frac{Mgl}{I} = n^2 = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \quad (6)$$

имеем:

$$(\theta + \varphi)'' + n^2(\theta + \varphi) = -n^2\theta_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \quad (7)$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$\theta + \varphi = c_1 \cos nt + c_2 \sin nt - \frac{n^2}{n^2 - \frac{4\pi^2}{\tau^2}} \theta_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

Вообразив, что свободные колебания, вследствие сопротивления воздуха, исчезли и остались одни вынужденные, получим:

$$\theta + \varphi = \frac{\tau^2}{\tau^2 - T_0^2} \theta_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \quad (8)$$

Величина $\theta + \varphi$ представляет отклонение маятника от отвесной линии, т. е. погрешность его показаний, которую мы обозначили через ε , так что по абсолютной величине ε может достигать значения

$$\varepsilon = \frac{\tau^2}{\tau^2 - T_0^2} \theta_0 = \frac{1}{1 - \frac{T_0^2}{\tau^2}} \theta_0$$

Из этого выражения видно, что в двух крайних случаях будет:

1) когда $\frac{T_0}{\tau} = \frac{\text{период маятника}}{\text{период волны}}$ — малой величине,

то

$$\varepsilon = \theta_0 \approx 8^\circ$$

2) когда $\frac{T_0}{\tau} = \frac{\text{период маятника}}{\text{период волны}}$ — весьма большой величине,

то

$$\varepsilon \approx \frac{\tau^2}{T_0^2} \theta_0 \text{ — весьма малая величина.}$$

Отсюда видно, что маятник или кренометр, собственный период которого весьма велик по сравнению с периодом волны, возмущается лишь весьма мало движениями корабля и весьма мало отклоняется от истинной отвесной линии, т. е. дает на корабле вертикаль.

Положим, для примера, что $T_0 = 100$ сек., $\tau = 10$ сек., тогда

$$\varepsilon = \frac{10^2}{100^2} \theta_0 = \frac{1}{100} 8^\circ = 0.08 \approx 0^\circ 5'$$

и при

$$T_0 = 130 \text{ сек.}$$

было бы

$$\varepsilon = \frac{1}{132} \theta_0 \approx 0^\circ 3'$$

Посмотрим теперь, какова практическая возможность осуществления такого кренометра.

Так как

$$T_0 = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{M\rho^2}{Mgl}} \approx \frac{1}{5} \frac{\rho}{\sqrt{l}}$$

где ρ — радиус инерции и l — расстояние центра тяжести маятника от оси подвеса, выраженное в *сантиметрах*.

Отсюда следует

$$l = \frac{1}{25T_0^2} \rho^2,$$

т. е. при $T_0 = 100$ сек. будет

$$l = \frac{1}{250000} \rho^2$$

при $T_0 = 130$ сек.

$$l = \frac{1}{422500} \rho^2$$

Даже взяв $\rho = 50$ см, что соответствует маховику около 1 м диаметром, имеем:

при $T_0 = 100$ сек.

$$l = \frac{1}{100} \text{ см} = 0.1 \text{ мм}$$

при $T_0 = 130$ сек.

$$l = \frac{1}{169} \text{ см} \approx 0.06 \text{ мм}$$

Маятники с периодом около 100 сек. были осуществлены в конце 1860-х годов Фрудом в Англии и Бертенем во Франции — для записи качаний корабля — и действовали хорошо, ибо не было надобности в строгом сохранении ими неизменного положения, достаточно было, чтобы оно сохранялось в продолжение нескольких размахов корабля.

Для целей артиллерийских, как кренометры-замыкатели, такие маятники не пригодны, ибо вследствие температурных деформаций или потоков воздуха они не обладают постоянством показаний.

Это обстоятельство и заставило для получения вертикали на корабле обратиться к разного рода гироскопическим устройствам.

II. Карданов подвес

§ 1. Рассмотрим теперь качания тела, подвешенного на кардановом подвесе.

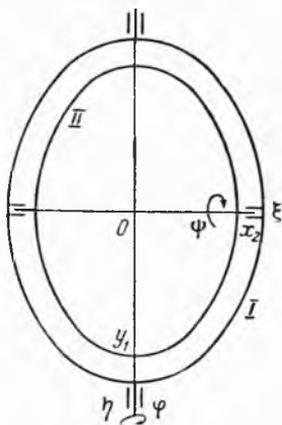
Сперва составляем уравнения, которыми определяются свободные колебания, после чего для определения вынужденных колебаний оста-

нется только рассмотреть действие возмущающих сил, выражения которых выведены ранее.

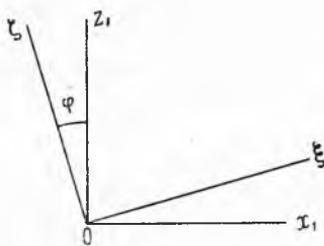
Пусть имеется карданов подвес. Условимся называть его наружное кольцо первым (I), а внутреннее — вторым (II) (фиг. 4).

В пространстве возьмем неподвижные оси $O\xi\eta\zeta$, причем ось $O\zeta$ направим вверх. В первом кольце возьмем оси $Ox_1y_1z_1$, причем ось Oy_1 совпадает с осью $O\eta$ и угол поворота около этой оси обозначим через φ (фиг. 5).

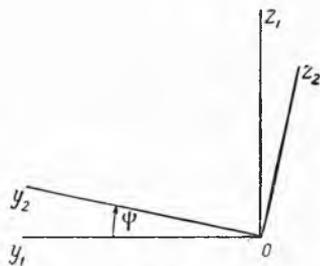
Оси второго кольца обозначим через $Ox_2y_2z_2$, причем ось Ox_2 совпадает с осью Ox_1 и угол ψ — поворот второго кольца относительно первого.



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

При таких обозначениях угол φ представит угол наклона плоскости первого кольца к горизонтальной плоскости $O\xi\eta$; угол ψ представит наклон плоскости второго кольца к плоскости Ox_1y_1 первого.

Таким образом, мы имеем три системы координатных осей $O\xi\eta\zeta$, $Ox_1y_1z_1$, $Ox_2y_2z_2$; составим выражения косинусов углов между ними, причем сперва составим косинусы между осями $O\xi\eta\zeta$ и $Ox_1y_1z_1$, затем между $Ox_2y_2z_2$ и $Ox_1y_1z_1$ (фиг. 6) и по этим косинусам составляются косинусы углов между осями $Ox_2y_2z_2$ и $O\xi\eta\zeta$:

	ξ	η	ζ
x_1	$\cos \varphi$	0	$-\sin \varphi$
y_1	0	1	0
z_1	$\sin \varphi$	0	$\cos \varphi$

(1)

	x_1	y_1	z_1
x_2	1	0	0
y_2	0	$\cos \psi$	$\sin \psi$
z_2	0	$-\sin \psi$	$\cos \psi$

(2)

Пользуясь этим двумя таблицами, составляем следующую по схеме:

$$\cos(x_2\xi) = \cos(x_2x_1)\cos(x_1\xi) + \cos(x_2y_1)\cos(y_1\xi) + \cos(x_2z_1)\cos(z_1\xi)$$

$$\cos(y_2\xi) = \cos(y_2x_1)\cos(x_1\xi) + \cos(y_2y_1)\cos(y_1\xi) + \cos(y_2z_1)\cos(z_1\xi)$$

$$\cos(z_2\xi) = \cos(z_2x_1)\cos(x_1\xi) + \cos(z_2y_1)\cos(y_1\xi) + \cos(z_2z_1)\cos(z_1\xi)$$

и т. д., и мы получим:

	ξ	η	ζ
x_2	$\cos \varphi$	0	$-\sin \varphi$
y_2	$\sin \varphi \sin \psi$	$\cos \psi$	$\cos \varphi \sin \psi$
z_2	$\sin \varphi \cos \psi$	$-\sin \psi$	$\cos \varphi \cos \psi$

(3)

Затем составляем проекции угловых скоростей.

Первое кольцо. Вращение φ' около оси Oy_1 :

$$\begin{aligned} \text{Ось } Ox_1 & \dots p_1 = 0 \\ \text{Ось } Oy_1 & \dots q_1 = \varphi' \\ \text{Ось } Oz_1 & \dots r_1 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Второе кольцо. Вращение φ' около Oy_1 и ψ' около Ox_2 :

$$\begin{aligned} \text{Ось } Ox_2 & \dots p_2 = \psi' + \varphi' \cos(x_2y_1) = \psi' \\ \text{Ось } Oy_2 & \dots q_2 = 0 + \varphi' \cos(y_2y_1) = \varphi' \cos \psi \\ \text{Ось } Oz_2 & \dots r_2 = 0 + \varphi' \cos(z_2y_1) = -\varphi' \sin \psi \end{aligned} \tag{5}$$

Координаты центра тяжести:

Первое кольцо:

$$x_1 = 0; \quad y_1 = 0; \quad z_1 = -l_1$$

Второе кольцо:

$$x_2 = 0; \quad y_2 = 0; \quad z_2 = -l_2 \tag{6}$$

Отсюда следуют.

Абсолютные координаты Ц. Т. колец:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -l_1 \sin \varphi; \quad \eta_1 = 0; \quad \zeta_1 = -l_1 \cos \varphi \\ \xi_2 &= -l_2 \sin \varphi \cos \psi; \quad \eta_2 = l_2 \sin \psi; \quad \zeta_2 = -l_2 \cos \varphi \cos \psi \end{aligned} \tag{7}$$

Моменты инерции колец.

Первое кольцо:

$$A_1 = B_1; \quad C_1 \approx 2A_1$$

Второе кольцо:

$$A_2 = B_2; \quad C_2 \approx 2A_2 \tag{8}$$

Скорость поступательного движения Ц. Т.

Первое кольцо:

$$\xi'_1 = -l_1 \cos \varphi \varphi'; \quad \eta'_1 = 0; \quad \zeta'_1 = l_1 \sin \varphi \varphi'$$

Второе кольцо:

$$\xi'_2 = -l_2 (\cos \varphi \cos \psi \varphi' - \sin \varphi \sin \psi \psi') \tag{9}$$

$$r'_2 = l_2 \cos \psi \psi'$$

$$\zeta'_2 = -l_2 (-\sin \varphi \cos \psi \varphi' - \cos \varphi \sin \psi \psi')$$

Значит

$$\begin{aligned} v_1^2 &= l_1^2 \varphi'^2 \\ v_2^2 &= l_2^2 (\varphi'^2 \cos^2 \psi + \psi'^2) \end{aligned} \quad (10)$$

Живая сила.

Первое кольцо:

$$\begin{aligned} 2T_1 &= A_1(p_1^2 + q_1^2) + C_1 r_1^2 + M_1 v_1^2 = A_1 \varphi_1'^2 + M_1 l_1^2 \varphi'^2 = \\ &= (A_1 + M_1 l_1^2) \varphi'^2 = K_1 \varphi'^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Второе кольцо:

$$\begin{aligned} 2T_2 &= A_2(p_2^2 + q_2^2) + C_2 r_2^2 + M_2 v_2^2 = A_2(\psi'^2 + \varphi'^2 \cos^2 \psi) + \\ &+ C_2 \varphi'^2 \sin^2 \psi + M_2 l_2^2 (\psi'^2 + \varphi'^2 \cos^2 \psi) = K_2(\psi'^2 + \varphi'^2 \cos^2 \psi) + \\ &+ C_2 \varphi'^2 \sin^2 \psi = K_2(\psi'^2 + \varphi'^2) + (C_2 - K_2) \varphi'^2 \sin^2 \psi \approx K_2(\psi'^2 + \varphi'^2) \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, полная живая сила системы будет приближенно

$$2T = 2T_1 + 2T_2 = (K_1 + K_2) \varphi'^2 + K_2 \psi'^2 \quad (13)$$

где

$$K_1 = A_1 + M_1 l_1^2; \quad K_2 = A_2 + M_2 l_2^2$$

суть моменты инерции колец около их осей вращения Oy_1 и Ox_2 .

Элементарная работа:

$$\begin{aligned} \delta U &= -M_1 g \frac{\partial \zeta_1}{\partial \varphi} \delta \varphi - M_2 g \frac{\partial \zeta_2}{\partial \varphi} \delta \varphi - M_2 g \frac{\partial \zeta_2}{\partial \psi} \delta \psi = \\ &= -(M_1 g l_1 \sin \varphi + M_2 g l_2 \sin \varphi \cos \psi) \delta \varphi - M_2 g l_2 \sin \psi \cos \varphi \delta \psi \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} (K_1 + K_2) \varphi'' + M_1 g l_1 \sin \varphi + M_2 g l_2 \sin \varphi \cos \varphi &= 0 \\ K_2 \psi'' + M_2 g l_2 \sin \psi \cos \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

В первом приближении полагаем

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \varphi; & \cos \varphi &= 1 \\ \sin \psi &= \psi; & \cos \psi &= 1 \end{aligned}$$

тогда получим:

$$\begin{aligned} (K_1 + K_2) \varphi'' + (M_1 g l_1 + M_2 g l_2) \varphi &= 0 \\ K_2 \psi'' + M_2 g l_2 \psi &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

или, полагая

$$\frac{M_1 g l_1 + M_2 g l_2}{K_1 + K_2} = n_1^2, \quad \frac{M_2 g l_2}{K_2} = n_2^2 \quad (17)$$

имеем:

$$\begin{aligned} \varphi'' + n_1^2 \varphi &= 0 \\ \psi'' + n_2^2 \psi &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Из этих уравнений следует:

$$\begin{aligned}\varphi &= C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t \\ \psi &= C_3 \cos n_2 t + C_4 \sin n_2 t\end{aligned}\tag{19}$$

причем постоянные произвольные C_1, C_2, C_3, C_4 определяются по начальным условиям, так, например, если при $t=0$ должно быть

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0; & \varphi' &= 0 \\ \psi &= \psi_0; & \psi' &= 0\end{aligned}$$

то будет

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0 \cos n_1 t = \varphi_0 \cos \frac{2\pi t}{T_1} \\ \psi &= \psi_0 \cos n_2 t = \psi_0 \cos \frac{2\pi t}{T_2}\end{aligned}\tag{20}$$

т. е. каждое кольцо совершает простое гармоническое колебание соответственно с периодами T_1 и T_2 .

§ 2. Если вообразить, что ко второму кольцу прикреплен указатель, координаты которого суть

$$x_2 = 0; \quad y_2 = 0; \quad z_2 = c,$$

то при колебании колец этот указатель будет описывать траекторию, уравнения которой суть

$$\begin{aligned}\xi_2 &= c \sin \varphi \cos \psi \approx c\varphi = c\varphi_0 \cos n_1 t \\ \eta_2 &= -c \sin \psi \approx -c\psi = -c\psi_0 \cos n_2 t \\ \zeta_2 &= c \cos \varphi \cos \psi \approx c\end{aligned}\tag{21}$$

т. е. с принятой степенью приближения можно считать, что эта траектория лежит в плоскости $\xi_2 = c$ и уравнения ее суть

$$\begin{aligned}\xi_2 &= a \cos n_1 t \\ \eta_2 &= -b \sin n_2 t\end{aligned}\tag{22}$$

причем

$$a = c\varphi_0; \quad b = c\psi_0$$

Как видно, вся траектория лежит внутри прямоугольника

$$\xi = \pm a; \quad \eta = \pm b$$

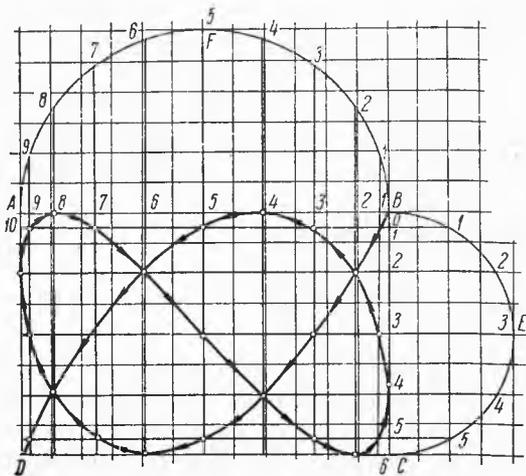
причем если числа n_1 и n_2 или, что то же, периоды T_1 и T_2 между собой не соизмеримы, то эта кривая состоит из бесчисленного множества завитков, заполняющих весь упомянутый прямоугольник. В том же случае, когда T_1 и T_2 соизмеримы, то траектория будет замкнутая и легко строится.

Так, например, пусть

$$T_1 : T_2 = 5 : 3 = 10 : 6$$

Строим прямоугольник $ABCD$ (фиг. 7), у которого сторона $AB = 2a$ и $BC = 2b$. На стороне AB как диаметре строим полуокруг AB и разделяем его на 10 равных частей, нумеруя точки деления, начиная от точки b (координаты $+a, +b$), как показано, и проектируем их на сторону AB . Совершенно так же строим на стороне BC полуокруг, разделяем его на шесть частей, нумеруем точки деления и проектируем на сторону BC .

Через полученные на стороне AB точки 1, 2, 3, ..., 9 проводим прямые, параллельные стороне BC , и через точки 1, 2, ..., 5 стороны BC проводим параллели стороне AB ; таким образом, внутри прямоугольника $ABCD$ получится сетка маленьких прямоугольничков. Начиная от точки B , идем последовательно по их диагоналям, как показано стрелками на прочерченной кривой, и, дойдя до точки D , по этой же кривой возвращаемся обратно. Эта кривая и представляет траекторию указателя на плоскости $\zeta_2 = c$, причем по этой кривой указатель и колеблется между крайними своими положениями B и D .



Фиг. 7.

Отсюда ясно, насколько разнообразными могут быть эти кривые при разных, даже соизмеримых, отношениях периодов. Эти кривые называют фигурами Лиссажу.

§ 3. Уравнения (16) показывают, что каждое из колец при малых колебаниях представляет собою маятник и, следовательно, на качающемся корабле будет совершать вынужденные колебания, рассмотренные выше в теории маятникового кренометра.

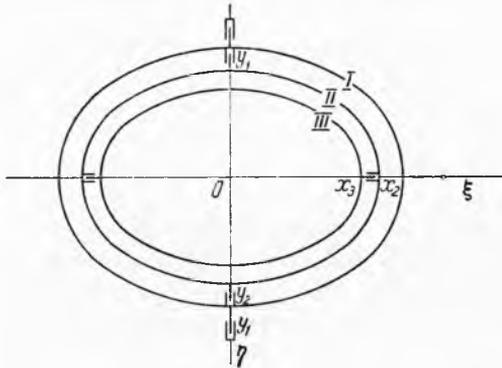
Так как на кардановом подвесе обыкновенно находится какой-либо прибор, то подвес должен обладать большою устойчивостью, чтобы не опрокидываться, и, следовательно, его собственные периоды T_1 и T_2 будут малые, а тогда, если не сделать соответствующих приспособлений, то свободные колебания будут погашаться медленно и, что еще хуже, вследствие неправильной изменчивости возмущающих сил, их действием поддерживаться.

Само собою разумеется, погашающие приспособления должны быть укреплены на самих кольцах, а не на качающемся корабле.

Такого рода приспособлением может быть гидравлический успокоитель, теория которого будет разобрана ниже. Но этот прибор может оказаться недостаточно эффективным и надо иметь возможность применять другие средства успокоения, как то: 1) катаракт, 2) электромагнитный успокоитель, 3) крылатка и пр.

Так как размахи ψ второго кольца совершаются по отношению к первому, то для этого кольца устройство успокоителя, имеющего своим основанием первое кольцо, затруднений не представляет.

Чтобы поставить в подобные же условия и первое кольцо, вообразим, что его цапфы будут лежать не в подцапфенниках, неизменно укрепленных на корабле, а в подцапфенниках, укрепленных на таком же качающемся кольце, которое теперь называть *первым*.



Фиг. 8.

Схема устройства такова (фиг. 8).

Оси:

$O\xi_1, \zeta_1$ — неподвижны в пространстве;

$Ox_1y_1z_1$ — первого кольца Oy_1 совпадает с $O\xi_1$;

$Ox_2y_2z_2$ — второго кольца Oy_2 совпадает с Oy_1 ;

$Ox_3y_3z_3$ — третьего кольца Ox_3 совпадает с Ox_2 .

Углы поворотов:

первое кольцо... σ около оси

$O\xi_1$ совпадает с Oy_1 ;

второе кольцо... φ около оси

Oy_2 совпадает с Oy_1 (угол φ считается от плоскости первого кольца);
третье кольцо... ψ около оси Ox_3 совпадает с Ox_2 .

Ограничиваясь в выражениях проекций угловых скоростей лишь членами первого порядка, мы получим:

для первого кольца

$$p_1 = 0; \quad q_1 = \sigma'; \quad r_1 = 0$$

для второго кольца

$$p_2 = 0; \quad q_2 = \sigma' + \varphi'; \quad r_2 = 0$$

для третьего кольца

$$p_3 = \psi'; \quad q_3 = \sigma' + \varphi'; \quad r_3 = 0$$

и полная живая сила при понятном обозначении будет

$$2T = K_1\sigma'^2 + K_2(\sigma' + \varphi')^2 + K_3\psi'^2 + K_3(\sigma' + \varphi')^2$$

Элементарная работа будет

$$\begin{aligned} \delta U = & -M_1gl_1 \sin \sigma \delta\sigma - M_2gl_2 \sin(\sigma + \varphi) (\delta\sigma + \delta\varphi) - M_3gl_3 \sin(\sigma + \varphi) (\delta\sigma + \delta\varphi) - \\ & - M_3gl_3 \sin \psi \delta\psi = - [M_1gl_1 \sin \sigma + (M_2gl_2 + M_3gl_3) \sin(\sigma + \varphi)] \delta\sigma - \\ & - (M_2gl_2 + M_3gl_3) \sin(\sigma + \varphi) \delta\varphi - M_3gl_3 \sin \psi \delta\psi = \\ & = - [(M_1gl_1 + M_2gl_2 + M_3gl_3) \sigma + \\ & + (M_2gl_2 + M_3gl_3) \varphi] \delta\sigma - (M_2gl_2 + M_3gl_3) (\sigma + \varphi) \delta\varphi - M_3gl_3 \psi \delta\psi \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения свободных колебаний без сопротивления будут

$$\begin{aligned} (K_1 + K_2 + K_3)\sigma'' + (K_2 + K_3)\varphi'' + (M_1gl_1 + M_2gl_2 + M_3gl_3)\sigma + \\ + (M_2gl_2 + M_3gl_3)\varphi = 0 \\ (K_2 + K_3)(\sigma'' + \varphi'') + (M_2gl_2 + M_3gl_3)(\sigma + \varphi) = 0 \\ K_3\psi'' + M_3gl_3\psi = 0 \end{aligned}$$

Эти уравнения можно писать в следующем виде, который получим, вычтя второе уравнение из первого и положив $\sigma + \varphi = \omega$:

$$\begin{aligned} K_1\sigma'' + M_1gl_1\sigma = 0 \\ (K_2 + K_3)\omega'' + (M_2gl_2 + M_3gl_3)\omega = 0 \\ K_3\psi'' + M_3gl_3\psi = 0 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что σ , ω , ψ будут представляться простыми независимыми гармоническими колебаниями.

Положим теперь, что между кольцами введены катаракты или электромагнитные успокоители.

Так как относительная скорость второго кольца по отношению к первому равна φ' , то момент сопротивления будет пропорционален φ' , и, принимая его взаимным, видим, что ко второму уравнению прибавится член $+N_1\varphi'$ и к первому член $-N_1\varphi'$, так что эти два уравнения будут

$$\begin{aligned} (K_1 + K_2 + K_3)\sigma'' + (K_2 + K_3)\varphi'' + (M_1gl_1 + M_2gl_2 + M_3gl_3)\sigma + \\ + (M_2gl_2 + M_3gl_3)\varphi - N_1\varphi' = 0 \\ (K_2 + K_3)(\sigma'' + \varphi'') + (M_2gl_2 + M_3gl_3)(\sigma + \varphi) + N_1\varphi' = 0 \end{aligned}$$

Третье кольцо связано со вторым, следовательно, можно ввести катаракт или успокоитель, дающий момент сопротивления $-N_2\psi'$ около оси Ox_2 . На второе кольцо этот момент не влияет, значит, третье уравнение будет

$$K_3\psi'' + N_2\psi' + M_3gl_3\psi = 0$$

Подобно предыдущему, отсюда получим уравнения

$$\begin{aligned} K_1\sigma'' + M_1gl_1\sigma - 2N_1(\omega' - \sigma') = 0 \\ (K_2 + K_3)\omega'' + (M_2gl_2 + M_3gl_3)\omega + N_1(\omega' - \sigma') = 0 \\ K_3\psi'' + N_2\psi' + M_3gl_3\psi = 0 \end{aligned}$$

Третье уравнение, очевидно, представляет затухающие гармонические колебания.

Первые два уравнения напомним так:

$$\begin{aligned} K_1\sigma'' + 2N_1\sigma' + M_1gl_1\sigma - 2N_1\omega' = 0 \\ -N_1\sigma' + (K_2 + K_3)\omega'' + N_1\omega' + (M_2gl_2 + M_3gl_3)\omega = 0 \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение будет

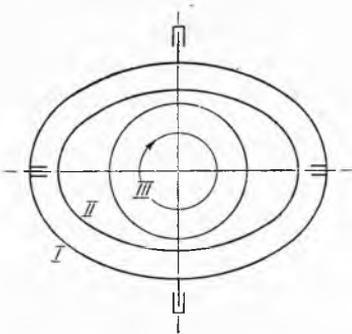
$$(K_1\lambda^2 + 2N_1\lambda + M_1gl_1)[(K_2 + K_3)\lambda^2 + N_1\lambda + M_2gl_2 + M_3gl_3] + 2N_1^2\lambda^2 = 0$$

и, очевидно, можно так распорядиться величинами входящих в него постоянных, чтобы это уравнение имело две пары сопряженных мнимых корней, вещественная часть коих отрицательная, т. е. колебания будут затухающие.

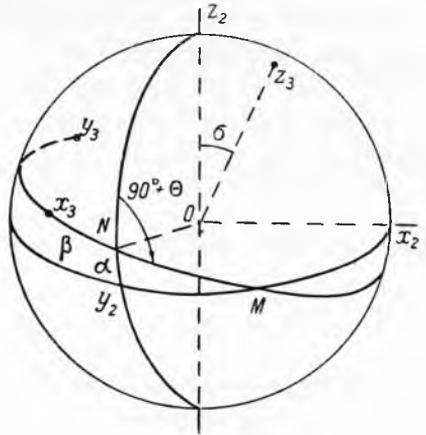
Такое устройство карданова подвеса может иметь разнообразные применения при установке точных приборов на корабле.

III. Гировертикаль Сперри

§ 1. Положим, что ко второму кольцу обыкновенного карданова подвеса прикреплен статор, поддерживающий электрическим дутьем вращение шара около оси, перпендикулярной плоскости второго кольца, так что схема устройства такова (фиг. 9).



Фиг. 9.



Фиг. 10.

Оси шара обозначим через $Ox_3y_3z_3$ и пусть шар вращается около оси z_3 , составляющей малый угол σ с осью Oz_2 второго кольца. Требуется составить уравнения движения шара при разных предположениях, о которых будет сказано ниже.

Составляем выражения косинусов углов между осями $Ox_2y_2z_2$ и $Ox_3y_3z_3$.

Положение плоскости Ox_3y_3 относительно Ox_2y_2 определяем (фиг. 10):

- 1) дугою $y_2N = \alpha$ и углом $z_2NM = 90^\circ + \theta$;
- 2) положение оси Ox_3 в плоскости Ox_3y_3 определяем дугою $Nx_3 = \beta$, считаемою от линии узлов ON .

Дуга α и угол θ предполагаются малыми, угол β — какой угодно.

$\Delta x_2 N x_3$ (фиг. 10, 11):

$$N x_3 = \beta; \quad N x_2 = 90^\circ; \quad \angle N = 180^\circ - \theta$$

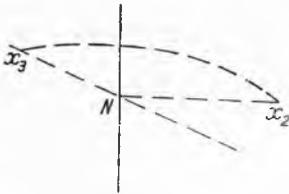
$$\cos(x_2 x_3) = -\sin \beta \cos \theta \quad (1)$$

$\Delta x_2 N y_3$:

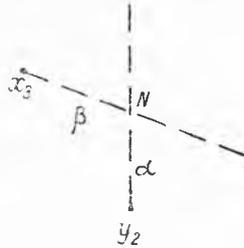
$$N y_3 = 90^\circ + \beta; \quad N x_2 = 90^\circ; \quad \angle N = 180^\circ - \theta$$

$$\cos(x_2 y_3) = -\cos \beta \cos \theta \quad (2)$$

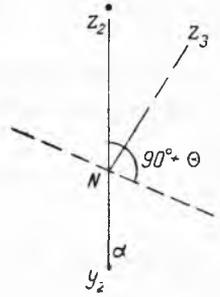
$$\cos(x_2 z_3) = \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta \quad (3)$$



Фиг. 11.



Фиг. 12.



Фиг. 13.

$\Delta y_2 N x_3$ (фиг. 10, 12):

$$N y_2 = \alpha; \quad \angle N = 90^\circ + \theta; \quad N x_3 = \beta$$

$$\cos(y_2 x_3) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \sin \theta \quad (4)$$

$\Delta y_2 N y_3$:

$$N y_2 = \alpha; \quad \angle N = 90^\circ + \theta; \quad N y_3 = 90^\circ + \beta$$

$$\cos(y_2 y_3) = -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \sin \theta \quad (5)$$

$\Delta y_2 N z_3$ (фиг. 10, 13):

$$N y_2 = \alpha; \quad \angle N = 180^\circ - \theta; \quad N z_3 = 90^\circ$$

$$\cos(y_2 z_3) = -\sin \alpha \cos \theta \quad (6)$$

$\Delta z_2 N x_3$:

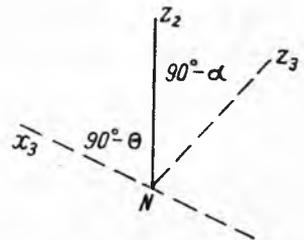
$$z_2 N = 90^\circ - \alpha; \quad \angle N = 90^\circ - \theta; \quad N x_3 = \beta$$

$$\cos(z_2 x_3) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \sin \theta \quad (7)$$

$\Delta z_2 N y_3$:

$$z_2 N = 90^\circ - \alpha; \quad \angle N = 90^\circ - \theta; \quad N y_3 = 90^\circ + \beta$$

$$\cos(z_2 y_3) = -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \sin \theta \quad (8)$$



Фиг. 14.

$\Delta z_2 N z_3$ (фиг. 10, 14):

$$z_2 N = 90^\circ - \alpha; \quad \angle N = \theta; \quad N z_3 = 90^\circ$$

$$\cos(z_2 z_3) = \cos \alpha \cos \theta. \quad (9)$$

Таким образом, таблица косинусов будет:

	x_3	y_3	z_3
x_2	$-\sin \beta \cos \theta$	$-\cos \beta \cos \theta$	$\sin \theta$
y_2	$\cos \alpha \cos \beta -$ $-\sin \alpha \sin \beta \sin \theta$	$-\cos \alpha \sin \beta -$ $-\sin \alpha \cos \beta \sin \theta$	$-\sin \alpha \cos \theta$
z_2	$\sin \alpha \cos \beta +$ $+\cos \alpha \sin \beta \sin \theta$	$-\sin \alpha \sin \beta +$ $+\cos \alpha \cos \beta \sin \theta$	$\cos \alpha \cos \theta$

Угловые скорости:

около оси $ON \dots \theta'$:

$$Ox_3 \dots \dots \dots \theta' \cos \beta$$

$$Oy_3 \dots \dots \dots -\theta' \sin \beta$$

$$Oz_3 \dots \dots \dots 0$$

около оси $Ox_2 \dots \alpha'$:

$$Ox_3 \dots \dots \dots \alpha' \cos(x_2 x_3) = -\alpha' \sin \beta \cos \theta$$

$$Oy_3 \dots \dots \dots \alpha' \cos(x_2 y_3) = -\alpha' \cos \beta \cos \theta$$

$$Oz_3 \dots \dots \dots \alpha' \cos(x_2 z_3) = \alpha' \sin \theta$$

около оси $Oz_3 \dots \beta'$:

$$Ox_3 \dots \dots \dots 0$$

$$Oy_3 \dots \dots \dots 0$$

$$Oz_3 \dots \dots \dots \beta'$$

Значит, для движения гироскопа относительно второго кольца будет

$$p_3 = -\alpha' \sin \beta \cos \theta + \theta' \cos \beta$$

$$q_3 = -\alpha' \cos \beta \cos \theta - \theta' \sin \beta$$

$$r_3 = \beta' + \alpha' \sin \theta$$

§ 2. Простейший случай есть тот, когда второе кольцо удерживается неподвижным, тогда уравнения Эйлера суть

$$A \frac{dp_3}{dt} = M_{x_3}; \quad A \frac{dq_3}{dt} = M_{y_3}; \quad A \frac{dr_3}{dt} = M_{z_3} = M - F = 0$$

где M_{x_3} , M_{y_3} , M_{z_3} суть моменты всех внешних сил, действующих на гироскоп, взятые относительно соответствующих осей. При установившемся движении движущий момент M статора уравновешивает момент F трения.

Из уравнения (3) следует

$$r_3 = \beta' + \alpha' \sin \theta = \text{const.} = \omega,$$

но $\alpha' \sin \theta$ ничтожно мало по сравнению с β' , поэтому

$$\beta' = \omega$$

и, значит,

$$\beta = \omega t$$

На основании этого равенства будет

$$\begin{aligned} p_3 &= -\alpha' \sin \omega t \cos \theta + \theta' \cos \omega t \\ q_3 &= -\alpha' \cos \omega t \cos \theta - \theta' \sin \omega t \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} -\alpha' \cos \theta &= p_3 \sin \omega t + q_3 \cos \omega t \\ \theta' &= p_3 \cos \omega t - q_3 \sin \omega t \end{aligned} \quad (11)$$

Затем имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dp_3}{dt} &= -\alpha'' \cos \theta \sin \omega t + \theta'' \cos \omega t - \omega (\alpha' \cos \omega t \cos \theta + \\ &\quad + \theta' \sin \omega t) + \alpha' \theta' \sin \omega t \sin \theta \end{aligned}$$

Очевидно, что член $\alpha' \theta' \sin \omega t \sin \theta$ ничтожно мал по сравнению с членом $\omega \theta' \sin \omega t$ и может быть отброшен, так что будет, на основании формул (10):

$$\frac{dp_3}{dt} = -\alpha'' \sin \omega t \cos \theta + \theta'' \cos \omega t + \omega q_3 \quad (12)$$

Совершенно так же получим:

$$\begin{aligned} \frac{dq_3}{dt} &= -\alpha'' \cos \omega t \cos \theta - \theta'' \sin \omega t + \omega (\alpha' \sin \omega t \cos \theta - \theta' \cos \omega t) + \\ &\quad + \alpha' \theta' \sin \theta \cos \omega t = -\alpha'' \cos \omega t \cos \theta - \theta'' \sin \omega t - \omega p_3 \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{dq_3}{dt} = -\alpha'' \cos \omega t \cos \theta - \theta'' \sin \omega t - \omega p_3. \quad (13)$$

Таким образом, будет

$$\begin{aligned} A(-\alpha'' \sin \omega t \cos \theta + \theta'' \cos \omega t + \omega q_3) &= M_{x_3} \\ A(-\alpha'' \cos \omega t \cos \theta - \theta'' \sin \omega t - \omega p_3) &= M_{y_3} \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} A[-\alpha'' \cos \theta + \omega (q_3 \sin \omega t - p_3 \cos \omega t)] &= M_{x_3} \sin \omega t + M_{y_3} \cos \omega t \\ A[\theta'' + \omega (q_3 \cos \omega t + p_3 \sin \omega t)] &= M_{x_3} \cos \omega t - M_{y_3} \sin \omega t \end{aligned}$$

Множители при ω суть соответственно $-\theta'$ и $-\alpha' \cos \theta$. По малости угла θ можем принять $\cos \theta = 1$. Выражения, стоящие в правых частях, представляют моменты внешних сил около оси, перпендикулярной к ON (взятой со знаком минус), и около оси ON . Эти моменты соответственно равны $H\alpha$ и $-H\theta$ и мы получим, заменив $\cos \theta$ через 1:

$$A\alpha'' + A\omega\theta' + H\alpha = 0; \quad -A\alpha'\omega + A\theta'' + H\theta = 0 \quad (15)$$

или, разделив на A и полагая

$$\frac{H}{A} = k \quad (16)$$

будем иметь уравнения:

$$\alpha'' + \omega\theta' + k\alpha = 0; \quad -\omega\alpha' + \theta'' + k\theta = 0 \quad (17)$$

Будем искать решение этих уравнений под видом

$$\alpha = C_1 \cos(\lambda t + \gamma_1); \quad \theta = C_2 \sin(\lambda t + \gamma_1) \quad (18)$$

по подстановке получим:

$$\begin{aligned} [(-\lambda^2 + k) C_1 + \omega\lambda C_2] \cos(\lambda t + \gamma_1) &= 0 \\ [\omega\lambda C_1 + (-\lambda^2 + k) C_2] \sin(\lambda t + \gamma_1) &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Откуда следует

$$(-\lambda^2 + k) C_1 + \omega\lambda C_2 = 0; \quad \omega\lambda C_1 + (-\lambda^2 + k) C_2 = 0 \quad (*)$$

Чтобы эти уравнения были совместны и допускали для C_1 и C_2 решения, отличные от нуля, надо чтобы было

$$(-\lambda^2 + k)^2 - \omega^2 \lambda^2 = 0$$

иначе

$$[(-\lambda^2 + k) - \omega\lambda][(-\lambda^2 + k) + \omega\lambda] = 0$$

т. е. λ должно удовлетворять уравнениям:

$$\lambda^2 + \omega\lambda - k = 0; \quad \lambda^2 - \omega\lambda - k = 0 \quad (20)$$

Первое из этих уравнений дает значения

$$\lambda_1 = -\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\omega^2 + 4k}; \quad \lambda_2 = -\frac{\omega}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\omega^2 + 4k} \quad (21)$$

Второе уравнение дает

$$\lambda_3 = \frac{\omega}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\omega^2 + 4k}; \quad \lambda_4 = \frac{\omega}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\omega^2 + 4k} \quad (22)$$

Отсюда видно, что

$$\lambda_2 = -\lambda_3; \quad \lambda_4 = -\lambda_1 \quad (23)$$

Из уравнений (*) следует

$$C_2 = -\frac{-\lambda^2 + k}{\omega\lambda} C_1 \quad (\text{при } \lambda = \lambda_1 \text{ или } \lambda = \lambda_3)$$

Но на основании первого уравнения

$$-\lambda_1^2 + k = \omega\lambda_1$$

значит,

$$C_2 = -C_1 \quad (\text{при } \lambda = \lambda_1) \quad (24)$$

На основании второго уравнения

$$-\lambda_3^2 + k = -\omega\lambda_3$$

Значит,

$$C_4 = +C_3 \quad (\text{при } \lambda = \lambda_3) \quad (25)$$

Таким образом, независимые решения суть

$$C_1 \cos(\lambda_1 t + \gamma_1) \quad \text{и} \quad -C_1 \sin(\lambda_1 t + \gamma_1) \\ C_3 \cos(\lambda_3 t + \gamma_2) \quad \text{и} \quad C_3 \sin(\lambda_3 t + \gamma_2)$$

Таким образом, будет

$$\alpha = C_1 \cos(\lambda_1 t + \gamma_1) + C_3 \cos(\lambda_3 t + \gamma_2) \\ \theta = -C_1 \sin(\lambda_1 t + \gamma_1) + C_3 \sin(\lambda_3 t + \gamma_2) \quad (26)$$

где C_1 , C_3 , γ_1 и γ_2 — произвольные постоянные.

Заметим, что каковы бы ни были значения этих произвольных постоянных,

$$\alpha^2 + \theta^2 = C_1^2 + C_3^2 = \text{const.} \quad (27)$$

Но мы имели

$$\cos(z_2 z_3) = \cos \sigma = \cos \alpha \cos \theta \quad (28)$$

При малых значениях α и θ величина σ тоже малая, и мы получим

$$1 - \frac{\sigma^2}{2} = \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = 1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\theta^2}{2}.$$

Откуда следует

$$\sigma^2 = \alpha^2 + \theta^2 = \text{const.} \quad (29)$$

т. е. угол между осью z_2 второго кольца, предполагая, что оно удерживается в неподвижном положении, и осью z_3 вращения шара остается *постоянным*, т. е. ось z_3 описывает около оси z_2 круговой конус постоянного угла растворения 2σ , каковы бы начальные условия ни были.

Положив

$$C_1 \cos \gamma_1 = D; \quad C_1 \sin \gamma_1 = E; \quad C_3 \cos \gamma_2 = F; \quad C_3 \sin \gamma_2 = G \quad (30)$$

мы можем написать уравнения (26) в таком виде:

$$\alpha = D \cos \lambda_1 t - E \sin \lambda_1 t + F \cos \lambda_3 t - G \sin \lambda_3 t \\ \theta = -D \sin \lambda_1 t - E \cos \lambda_1 t + F \sin \lambda_3 t + G \cos \lambda_3 t \quad (31)$$

Положим, для примера, что начальные условия таковы:

при $t = 0$

$$\alpha = \alpha_0; \quad \alpha' = 0 \\ \theta = \theta_0; \quad \theta' = 0$$

т. е. шару придано некоторое наклонное положение и он пущен без толчка, имея, однако, свое собственное вращение около оси z_3 с угловою скоростью ω ; тогда начальные условия дают:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= D + F \\ \theta_0 &= -E + G \\ 0 &= -E\lambda_1 - G\lambda_3 \\ 0 &= -D\lambda_1 + F\lambda_3 \end{aligned} \quad (32)$$

Из этих уравнений следует:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\alpha_0 \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3}; & F &= \frac{\alpha_0 \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_3} \\ E &= -\frac{\theta_0 \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3}; & G &= \frac{\theta_0 \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_3} \end{aligned} \quad (33)$$

Величина ω угловой скорости собственного вращения шара весьма велика (около 1200), поэтому будет

$$\frac{1}{2} \sqrt{\omega^2 + 4k} = \frac{1}{2} \omega \left(1 + \frac{4k}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \omega \left(1 + \frac{2k}{\omega^2}\right) = \frac{1}{2} \omega + \frac{k}{\omega}$$

следовательно,

$$\lambda_1 = \frac{k}{\omega}; \quad \lambda_3 = \omega + \frac{k}{\omega} \approx \omega \quad (34)$$

и мы получим:

$$\begin{aligned} D &= \alpha_0 \frac{\omega + \frac{k}{\omega}}{\omega + \frac{2k}{\omega}} \approx \alpha_0 \\ F &= \alpha_0 \frac{\frac{k}{\omega}}{\omega + \frac{2k}{\omega}} \approx 0 \\ E &= -\theta_0 \frac{\omega + \frac{k}{\omega}}{\omega + \frac{2k}{\omega}} \approx -\theta_0 \\ G &= \theta_0 \frac{\frac{k}{\omega}}{\omega + \frac{2k}{\omega}} \approx 0 \end{aligned} \quad (35)$$

следовательно, будет

$$\alpha = \sigma_0 \cos(\lambda_1 t + \gamma_1) = \sigma_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_1} + \gamma_1\right) \quad (36)$$

$$\theta = -\sigma_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T_1} + \gamma_1\right) = \sigma_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T_1} + \gamma_1 + \pi\right) \quad (37)$$

причем

$$T_1 = \frac{2\pi\omega}{k} \quad (38)$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_0^2 + \theta_0^2}} = \frac{\alpha_0}{\sigma_0}$$

$$\sin \gamma_1 = - \frac{\theta_0}{\sqrt{\alpha_0^2 + \theta_0^2}} = - \frac{\theta_0}{\sigma_0} \quad (39)$$

$$\sigma_0 = + \sqrt{\alpha_0^2 + \theta_0^2}$$

Период $T_1 = \frac{2\pi\omega}{k}$ будет весьма большой, ибо величина ω весьма большая.

Мы приняли величины F и G равными нулю, на самом же деле

$$F = \alpha_0 \frac{k}{\omega^2}; \quad G = \theta_0 \frac{k}{\omega^2} \quad (40)$$

так что будет

$$F \cos \lambda_3 t - G \sin \lambda_3 t = \frac{k}{\omega^2} \sigma_0 \cos \left(\frac{2\pi t}{T_2} + \gamma_2 \right) = \varepsilon \cos \left(\frac{2\pi t}{T_2} + \gamma_2 \right)$$

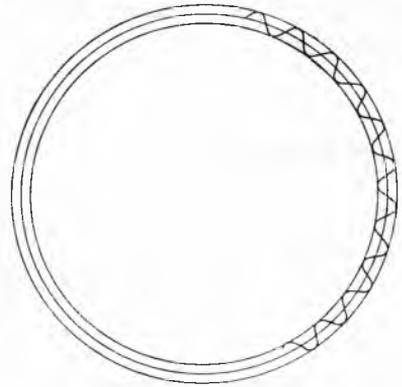
$$F \sin \lambda_3 t + G \cos \lambda_3 t = \frac{k}{\omega^2} \sigma_0 \sin \left(\frac{2\pi t}{T_2} + \gamma_2 \right) = \varepsilon \sin \left(\frac{2\pi t}{T_2} + \gamma_2 \right)$$

причем

$$T_2 = \frac{2\pi}{\lambda_3} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{\alpha_0}{\sigma_0}; \quad \sin \gamma_2 = \frac{\theta_0}{\sigma_0}; \quad \varepsilon = \frac{k}{\omega^2} \sigma_0 \quad (41)$$

Отсюда видно, что период $T_2 = T_1 \frac{k}{\omega^2}$ и амплитуда $\varepsilon = \frac{k}{\omega^2} \sigma_0$ будут весьма малы по сравнению с T_1 и σ_0 , поэтому, в проекции на горизонтальную плоскость, движение будет представлять прецессию с периодом обращения T_1 и амплитудой σ_0 , на которую накладывается малая нутация с периодом T_2 и амплитудой $\frac{k}{\omega^2} \sigma_0$ (фиг. 15).



Фиг. 15.

Обратим еще раз внимание, что эти результаты получены в предположении, что погашения нет и колебания α и θ не встречают сопротивления.

§ 3. Укрепленный на втором кольце статор, поддерживающий собственное вращение шара, не только сообщает шару восстанавливающие моменты Hx и $H\theta$, стремящиеся привести шар в такое положение, при котором ось Oz_3 совпадает с осью Oz_2 , но и погашает колебания шара.

В самом деле, при колебаниях шара в магнитном поле статора в шаре развиваются токи Фуко и вследствие них получаются моменты около линии узлов и линии, ей перпендикулярной. Эти моменты, ввиду малости скоростей α' и θ' , можно считать линейными функциями этих величин и полагать:

$$\mathfrak{M}_\alpha = H_1 \alpha' + F_1 \theta';$$

$$\mathfrak{M}_\theta = H_2 \theta' + F_2 \alpha' \quad (42)$$

причем вследствие симметрии будет

$$H_1 = H_2; \quad F_1 = F_2$$

так что можно брать

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_x &= H_1 \alpha' + F_1 \theta' \\ \mathfrak{M}_\theta &= H_1 \theta' + F_1 \alpha' \end{aligned} \quad (43)$$

и уравнения движения будут:

$$\begin{aligned} A\alpha'' + A\omega\theta' + H\alpha + H_1\alpha' + F_1\theta' &= 0; \\ A\theta'' - A\omega\alpha' + H\theta + H_1\theta' + F_1\alpha' &= 0 \end{aligned} \quad (44)$$

В первом уравнении член $F_1\theta'$ сложится с членом $A\omega\theta'$, и сумма будет $(A\omega + F_1)\theta'$. Величина $A\omega$ весьма большая, так что F_1 мало по сравнению с $A\omega$, поэтому вместо суммы этих двух членов можно писать $A\omega\theta'$. Точно так же во втором уравнении вместо суммы $(-A\omega + F_1)\alpha'$ можно писать $-A\omega\alpha'$, так что по разделении на A , положив

$$\frac{H_1}{A} = h \quad (45)$$

и попрежнему

$$\frac{H}{A} = k$$

получим:

$$\begin{aligned} \alpha'' + h\alpha' + k\alpha + \omega\theta' &= 0 \\ -\omega\alpha' + \theta'' + h\theta' + k\theta &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

Будем искать решение вида

$$\alpha = C_1 e^{\lambda t}; \quad \theta = C_2 e^{\lambda t} \quad (47)$$

тогда получим:

$$(\lambda^2 + h\lambda + k)C_1 + \omega\lambda C_2 = 0; \quad -\omega\lambda C_1 + (\lambda^2 + h\lambda + k)C_2 = 0 \quad (48)$$

Следовательно, характеристическое уравнение будет

$$(\lambda^2 + h\lambda + k)^2 + \omega^2\lambda^2 = 0 \quad (49)$$

Найдем сперва точные значения этих корней. Уравнение (49) разлагается на следующие два:

$$\lambda^2 + (h + \omega i)\lambda + k = 0; \quad \lambda^2 + (h - \omega i)\lambda + k = 0 \quad (50)$$

Обозначим корни первого из этих уравнений через λ_1 и λ_2 и пусть будет

$$\lambda_1 = f + ni; \quad \lambda_2 = g + mi \quad (51)$$

тогда корни второго уравнения будут

$$\lambda_3 = f - ni; \quad \lambda_4 = g - mi \quad (52)$$

Возьмем первый корень $\lambda = \lambda_1$, тогда получим:

$$C_{21} = -\frac{\lambda_1^2 + h\lambda_1 + k}{\omega\lambda_1} C_{11}$$

но на основании первого из уравнений (50)

$$\lambda_1^2 + h\lambda_1 + k = -\omega\lambda_1 i$$

и мы получим:

$$C_{21} = iC_{11} \quad (53)$$

Совершенно так же будет при само собою понятном обозначении:

$$C_{22} = iC_{12} \quad (54)$$

Для корня $\lambda = \lambda_3$ получим:

$$C_{23} = -\frac{\lambda_3^2 + h\lambda_3 + k}{\omega\lambda_3} C_{13}$$

но на основании второго уравнения (50) будет

$$\lambda_3^2 + h\lambda_3 + k = \omega i\lambda_3$$

Следовательно, будет

$$C_{23} = -iC_{13} \quad (55)$$

и совершенно так же

$$C_{24} = -iC_{14} \quad (56)$$

Таким образом, общий интеграл системы (46) будет вида

$$\begin{aligned} \alpha &= e^{ft} (C_{11}e^{nti} + C_{13}e^{-nti}) + e^{gt} (C_{12}e^{mti} + C_{14}e^{-mti}) \\ \theta &= ie^{ft} (C_{11}e^{nti} - C_{13}e^{-nti}) + ie^{gt} (C_{12}e^{mti} - C_{14}e^{-mti}) \end{aligned} \quad (57)$$

но

$$\begin{aligned} e^{nti} &= \cos nt + i \sin nt; & e^{-nti} &= \cos nt - i \sin nt \\ e^{mti} &= \cos mt + i \sin mt; & e^{-mti} &= \cos mt - i \sin mt \end{aligned}$$

Следовательно, будет:

$$\begin{aligned} \alpha &= e^{ft} [(C_{11} + C_{13}) \cos nt + i(C_{11} - C_{13}) \sin nt] + \\ &+ e^{gt} [(C_{12} + C_{14}) \cos mt + i(C_{12} - C_{14}) \sin mt] \\ \theta &= ie^{ft} [(C_{11} - C_{13}) \cos nt + i(C_{11} + C_{13}) \sin nt] + \\ &+ ie^{gt} [(C_{12} - C_{14}) \cos mt + i(C_{12} - C_{14}) \sin mt] \end{aligned}$$

Введем теперь вместо произвольных постоянных C_{11} , C_{12} , C_{13} , C_{14} другие постоянные D , E , F , G так, чтобы было

$$C_{11} + C_{13} = D; \quad i(C_{11} - C_{13}) = E; \quad C_{12} + C_{14} = F; \quad i(C_{12} - C_{14}) = G$$

тогда получим:

$$\begin{aligned} \alpha &= e^{ft} (D \cos nt + E \sin nt) + e^{gt} (F \cos mt + G \sin mt) \\ \theta &= e^{ft} (E \cos nt - D \sin nt) + e^{gt} (G \cos mt - F \sin mt) \end{aligned} \quad (58)$$

где D, E, F, G — произвольные постоянные, которые мы ниже и определим по начальным условиям.

Вычислим теперь значения корней λ_1 и λ_2 уравнения

$$\lambda^2 + (h + i\omega)\lambda + k = 0$$

Имеем:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}(h + i\omega) + \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + 2ih\omega - \omega^2 - 4k}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}(h + i\omega) - \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + 2ih\omega - \omega^2 - 4k}$$

но

$$\sqrt{h^2 + 2ih\omega - \omega^2 - 4k} = i\sqrt{\omega^2 + 4k - h^2 - 2hi\omega} = i\sqrt{s - 2hi\omega}$$

причем для краткости письма положено

$$s = \omega^2 + 4k - h^2$$

Положив

$$\sqrt{s - 2hi\omega} = x - iy$$

имеем уравнения

$$s = x^2 - y^2; \quad 2h\omega = 2xy \quad (*)$$

Отсюда следует

$$s^2 + 4h^2\omega^2 = (x^2 + y^2)^2$$

Значит, будет

$$x^2 + y^2 = +\sqrt{s^2 + 4h^2\omega^2} \quad (**)$$

Из равенств (*) и (**) получаем

$$2x^2 = \sqrt{s^2 + 4h^2\omega^2} + s; \quad 2y^2 = \sqrt{s^2 + 4h^2\omega^2} - s$$

Отсюда

$$x = +\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{s^2 + 4h^2\omega^2} + s}; \quad y = +\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{s^2 + 4h^2\omega^2} - s} \quad (59)$$

и мы получим:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{h}{2} - \frac{\omega i}{2} + \frac{1}{2}i(x - iy) = -\frac{1}{2}(h - y) - \frac{1}{2}(\omega - x)i \\ \lambda_2 &= -\frac{h}{2} - \frac{\omega i}{2} - \frac{1}{2}i(x - iy) = -\frac{1}{2}(h + y) - \frac{1}{2}(\omega + x)i \end{aligned} \quad (60)$$

Следовательно, будет

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2}(h - y) + \frac{1}{2}(\omega - x)i; \quad \lambda_4 = -\frac{1}{2}(h + y) + \frac{1}{2}(\omega + x)i \quad (61)$$

т. е.

$$\begin{aligned} f &= -\frac{1}{2}(h - y); \quad n = \frac{1}{2}(\omega - x) \\ g &= -\frac{1}{2}(h + y); \quad m = \frac{1}{2}(\omega + x). \end{aligned} \quad (62)$$

Все эти формулы точные и имеют место при любых значениях h, k, ω .

§ 4. Положим теперь, что начальные условия таковы:

$$\text{при } t=0 \text{ должно быть } \theta = \theta_0; \alpha = \alpha_0; \theta' = 0; \alpha'_0 = 0$$

и определим постоянные D, E, F, G в формулах (58). Имеем:

$$\alpha_0 = D + F; \quad \alpha'_0 = 0 = fD + nE + gF + mG$$

$$\theta_0 = E + G; \quad \theta'_0 = 0 = -nD + fE - mF + gG$$

Отсюда следует:

$$F = \alpha_0 - D; \quad G = \theta_0 - E$$

и по подстановке:

$$(f - g)D + (n - m)E = -g\alpha_0 - m\theta_0$$

$$-(n - m)D + (f - g)E = m\alpha_0 - g\theta_0$$

Следовательно,

$$D = -\frac{(g\alpha_0 + m\theta_0)(f - g) + (n - m)(m\alpha_0 - g\theta_0)}{(f - g)^2 + (n - m)^2} \quad (63)$$

$$E = \frac{(f - g)(m\alpha_0 - g\theta_0) - (n - m)(g\alpha_0 + m\theta_0)}{(f - g)^2 + (n - m)^2} \quad (64)$$

§ 5. Предположим теперь, что ω весьма велика по сравнению с h и k , разложим f, g, n, m, D, E, F, G по степеням $\frac{1}{\omega}$ и удержим в этих разложениях лишь главные члены.

Мы имеем:

$$s = \omega^2 + 4k - h^2$$

$$2x^2 = \sqrt{s^2 + 4h^2\omega^2} + s; \quad 2y^2 = \sqrt{s^2 + 4h^2\omega^2} - s$$

Отсюда следует:

$$2y^2 = s \left[\left(1 + \frac{4h^2\omega^2}{s^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] = s \left(1 + \frac{2h^2\omega^2}{s^2} - \frac{2h^4\omega^4}{s^4} - 1 \right)$$

$$y^2 = \frac{h^2\omega^2}{s} \left(1 - \frac{h^2\omega^2}{s^2} \right)$$

$$y = \frac{h\omega}{\sqrt{s}} \left(1 - \frac{h^2\omega^2}{s^2} \right)^{\frac{1}{2}} = h \left(1 + \frac{4k - h^2}{\omega^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{h^2}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= h \left(1 - \frac{1}{2} \frac{4k - h^2}{\omega^2} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{h^2}{\omega^2} \right) = h \left(1 - \frac{2k}{\omega^2} \right)$$

$$x = \frac{h\omega}{y} = \frac{\omega}{1 - \frac{2k}{\omega^2}} = \omega \left(1 + \frac{2k}{\omega^2} \right) = \omega + \frac{2k}{\omega}$$

$$f = -\frac{1}{2} h + \frac{1}{2} y = -\frac{kh}{\omega^2}; \quad n = \frac{1}{2} \omega - \frac{1}{2} x = -\frac{k}{\omega} \quad (65)$$

$$g = -\frac{1}{2} h - \frac{1}{2} y = -h; \quad m = \frac{1}{2} \omega + \frac{1}{2} x = \omega + \frac{k}{\omega} \quad (66)$$

$$f - g = h - \frac{kh}{\omega^2}; \quad n - m = -\left(\omega + \frac{2k}{\omega}\right) \quad (67)$$

$$g\alpha_0 + m\theta_0 = \omega\theta_0 + \frac{k\theta_0}{\omega} - h\alpha_0; \quad m\alpha_0 - g\theta_0 = \omega\alpha_0 + \frac{k\alpha_0}{\omega^2} + h\theta_0 \quad (68)$$

Подставляя эти значения, получаем приближенно:

$$\begin{aligned} D &= \alpha_0 + \frac{3k}{\omega^2} \alpha_0; & E &= \theta_0 + \frac{3k}{\omega^2} \theta_0 \\ F &= -\frac{3k}{\omega^2} \alpha_0; & G &= -\frac{3k}{\omega^2} \theta_0 \end{aligned} \quad (69)$$

Таким образом, будет

$$\begin{aligned} \alpha &= e^{-\frac{kh}{\omega^2} t} \left(\alpha_0 \cos \frac{k}{\omega} t + \theta_0 \sin \frac{k}{\omega} t \right) - \frac{3k}{\omega^2} e^{-ht} (\alpha_0 \cos \omega t + \theta_0 \sin \omega t) \\ \theta &= e^{-\frac{kh}{\omega^2} t} \left(\theta_0 \cos \frac{k}{\omega} t - \alpha_0 \sin \frac{k}{\omega} t \right) - \frac{3k}{\omega^2} e^{-ht} (\theta_0 \cos \omega t - \alpha_0 \sin \omega t) \end{aligned} \quad (70)$$

Эти формулы показывают, что главные колебания долгого периода суть

$$\begin{aligned} \alpha &= e^{-\frac{kh}{\omega^2} t} \left(\alpha_0 \cos \frac{k}{\omega} t + \theta_0 \sin \frac{k}{\omega} t \right) \\ \theta &= e^{-\frac{kh}{\omega^2} t} \left(\theta_0 \cos \frac{k}{\omega} t - \alpha_0 \sin \frac{k}{\omega} t \right) \end{aligned} \quad (71)$$

на которые накладываются весьма малой амплитуды колебания малого периода.

Из формул (71) следует

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{kh}{\omega^2} t} \quad (72)$$

т. е. растворение конуса прецессии убывает по показательному закону.

§ 6. Формулы, выведенные в предыдущем параграфе, дают возможность определить по испытанию динамические характеристики или элементы прибора.

В самом деле, положим, что второе кольцо, несущее статор, поставлено и удерживается горизонтально; в этом положении гироскоп запускается и доводится до полного числа оборотов.

Быстрым движением кольца сообщается наклонное положение, в котором оно закрепляется, ось гироскопа начнет описывать затухающую прецессию.

Определив ряд положений оси гироскопа в определенные моменты времени, выбираем из них те, которые соответствуют диаметрально противоположным положениям оси гироскопа — эти моменты разнятся один от другого на *полпериода* $\frac{1}{2} T_1 = \frac{\pi\omega}{k}$, зная ω , находим отсюда величину k и зная момент инерции A , из формулы

$$\frac{H}{A} = k$$

находим величину H в уравнениях (44).

По значениям σ в вышеупомянутых моментах находим логарифмический декремент $\frac{hk}{\omega^2} = f$ и, зная k определяем h , после чего по формуле

$$\frac{H_1}{A} = h$$

находим H_1 .

§ 7. Рассмотрим теперь вынужденные колебания гироскопа периодическими силами.

Приведенные уравнения таких колебаний будут:

$$\begin{aligned} \alpha'' + h\alpha' + k\alpha + \omega\theta' &= a \cos pt + b \sin pt \\ -\omega\alpha' + \theta'' + h\theta' + k\theta &= c \cos pt + d \sin pt \end{aligned} \quad (73)$$

положив:

$$x = M \cos pt + N \sin pt; \quad \theta = P \cos pt + Q \sin pt \quad (74)$$

где M , N , P и Q — неопределенные коэффициенты, мы получим для их определения уравнения:

$$\begin{aligned} (k - p^2)M + hpN + OP + \omega pQ &= a \\ -hpM + (k - p^2)N - \omega pP + OQ &= b \\ OM - p\omega N + (k - p^2)P + hpQ &= c \\ p\omega M + ON - hpP + (k - p^2)Q &= d \end{aligned} \quad (75)$$

Отсюда M , N , P и Q легко находятся, когда k , h , p , a , b , c , d заданы численно, на буквах же выкладка довольно громоздкая.

Эта выкладка может быть упрощена следующим образом.

Заменим $\cos pt$ и $\sin pt$ через показательные функции по формулам

$$\cos pt = \frac{1}{2}(e^{ipt} + e^{-ipt}); \quad \sin pt = \frac{1}{2i}(e^{ipt} - e^{-ipt})$$

Тогда будет

$$a \cos pt + b \sin pt = \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2i}b\right)e^{ipt} + \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2i}b\right)e^{-ipt} = a_1 e^{ipt} + b_1 e^{-ipt}$$

причем

$$a_1 = \frac{1}{2}(a - bi); \quad b_1 = \frac{1}{2}(a + bi) \quad (76)$$

совершенно так же будет

$$c \cos pt + d \sin pt = c_1 e^{ipt} + d_1 e^{-ipt} \quad (77)$$

где

$$c_1 = \frac{1}{2}(c - di); \quad d_1 = \frac{1}{2}(c + di)$$

и предложенные уравнения будут

$$\begin{aligned} \alpha'' + h\alpha' + k\alpha + \omega\theta' &= a_1 e^{ipt} + b_1 e^{-ipt} \\ -\omega\alpha' + \theta'' + h\theta' + k\theta &= c_1 e^{ipt} + d_1 e^{-ipt} \end{aligned} \quad (78)$$

Будем искать решение вида

$$\begin{aligned} \alpha &= M_1 e^{ipt} + N_1 e^{-ipt} \\ \theta &= M_2 e^{ipt} + N_2 e^{-ipt} \end{aligned} \quad (79)$$

тогда для определения M_1 и M_2 получим уравнения:

$$\begin{aligned} M_1[-p^2 + iph + k] + i\omega p M_2 &= a_1 \\ -i\omega p M_1 + [-p^2 + iph + k] M_2 &= c_1 \end{aligned} \quad (80)$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{a_1[-p^2 + iph + k] - c_1 ip\omega}{[-p^2 + iph + k]^2 - \omega^2 p^2} = \frac{a_1(k - p^2) + ip(a_1 h - c_1 \omega)}{[(k - p^2)^2 - p^2 h^2 - p^2 \omega^2] + 2iph(k - p^2)} \\ M_2 &= \frac{c_1[-p^2 + iph + k] + a_1 ip\omega}{[-p^2 + iph + k]^2 - \omega^2 p^2} = \frac{c_1(k - p^2) + ip(c_1 h + a_1 \omega)}{[(k - p^2)^2 - p^2 h^2 - p^2 \omega^2] + 2iph(k - p^2)} \end{aligned} \quad (81)$$

Заменив в этих формулах i на $-i$, a_1 на b_1 и c_1 на d_1 , получим:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{b_1[-p^2 - ihp + k] + d_1 ip\omega}{[-p^2 - ihp + k]^2 - \omega^2 p^2} = \frac{b_1(k - p^2) - ip(b_1 h - d_1 \omega)}{[(k - p^2)^2 - p^2 h^2 - p^2 \omega^2] - 2iph(k - p^2)} \\ N_2 &= \frac{d_1[-p^2 - ihp + k] - b_1 ip\omega}{[-p^2 - ihp + k]^2 - \omega^2 p^2} = \frac{d_1(k - p^2) - ip[d_1 h + b_1 \omega]}{[(k - p^2)^2 - p^2 h^2 - p^2 \omega^2] - 2iph(k - p^2)} \end{aligned} \quad (82)$$

Из формул (79) следует:

$$\begin{aligned} \alpha &= (M_1 + N_1) \cos pt + i(M_1 - N_1) \sin pt \\ \theta &= (M_2 + N_2) \cos pt + i(M_2 - N_2) \sin pt \end{aligned} \quad (83)$$

Нас интересуют амплитуды колебаний α и θ . Эти амплитуды суть

$$\begin{aligned} \sqrt{(M_1 + N_1)^2 - (M_1 - N_1)^2} &= \sqrt{4M_1 N_1} \\ \sqrt{(M_2 + N_2)^2 - (M_2 - N_2)^2} &= \sqrt{4M_2 N_2} \end{aligned} \quad (84)$$

Составим $4M_1 N_1$. Знаменатели у выражений M_1 и N_1 суть величины сопряженные, значит, знаменатель их произведения будет

$$D = [(k - p^2)^2 - p^2 h^2 - p^2 \omega^2]^2 + 4p^2 h^2 (k - p^2)^2 \quad (85)$$

На основании значений (76), (77), (81) и (82) мы видим, что и числители величин M_1 и N_1 суть величины сопряженные, поэтому достаточно составить числитель величины M_1 ; обозначая этот числитель через R , имеем по подстановке:

$$\begin{aligned} 2R &= (a - bi)(k - p^2) + ip[(a - bi)h - \omega(c - di)] = \\ &= [a(k - p^2) + p(bh - \omega d)] + i[-b(k - p^2) + p(ah - \omega c)] \end{aligned}$$

следовательно, будет

$$4M_1 N_1 = \frac{[a(k - p^2) + p(bh - \omega d)]^2 + [-b(k - p^2) + p(ah - \omega c)]^2}{[(k - p^2)^2 - p^2 h^2 - p^2 \omega^2]^2 + 4p^2 h^2 (k - p^2)^2} \quad (86)$$

Совершенно так же получим

$$4M_2N_2 = \frac{[c(k-p^2) + p(hd-b\omega)]^2 + [-d(k-p^2) + p(hc-a\omega)]^2}{[(k-p^2)^2 - p^2h^2 - p^2\omega^2]^2 + 4p^2h^2(k-p^2)^2} \quad (87)$$

Эти выражения и представляют соответственно квадраты амплитуд колебаний α и колебаний θ .

Так как практически имеют место лишь колебания медленного периода T_1 , соответствующего прецессии, то будет

$$T_1 = \frac{2\pi\omega}{k} \quad \text{и} \quad k = \frac{2\pi\omega}{T_1}$$

Заменив k этой величиной, получим знаменатель

$$D = \left[\left(\frac{2\pi\omega}{T_1} - p^2 \right)^2 - p^2h^2 - p^2\omega^2 \right]^2 + 4p^2h^2 \left(\frac{2\pi\omega}{T_1} - p^2 \right)^2$$

Обозначим через τ период возмущающей силы, так что

$$p = \frac{2\pi}{\tau}$$

эта величина будет весьма мала по сравнению с ω , тогда получим:

$$\begin{aligned} D &= \omega^4 \left\{ \left[\left(\frac{2\pi}{T_1} - \frac{p^2}{\omega} \right)^2 - \frac{p^2h^2}{\omega^2} - p^2 \right]^2 + \frac{4p^2h^2}{\omega^2} \left[\frac{2\pi}{T_1} - \frac{p^2}{\omega} \right]^2 \right\} \approx \\ &\approx \omega^4 \left[\frac{4\pi^2}{T_1^2} - \frac{4\pi^2}{\tau^2} \right]^2 \approx \frac{16\pi^4}{\tau^4} \omega^4 \end{aligned} \quad (88)$$

Числитель же выражения $4M_1N_1$ будет

$$\begin{aligned} &\left[a \left(\frac{2\pi\omega}{T_1} - \frac{4\pi^2}{\tau^2} \right) + \frac{2\pi}{\tau} (bh - \omega d) \right]^2 + \left[-b \left(\frac{2\pi\omega}{T_1} - \frac{4\pi^2}{\tau^2} \right) + p(ah - \omega c) \right]^2 = \\ &= \omega^2 \left\{ \left[a \left(\frac{2\pi}{T_1} - \frac{4\pi^2}{\tau^2\omega} \right) + \frac{2\pi}{\tau} \left(\frac{bh}{\omega} - d \right) \right]^2 + \left[-b \left(\frac{2\pi}{T_1} - \frac{4\pi^2}{\tau^2\omega} \right) + \frac{2\pi}{\tau} \left(\frac{ah}{\omega} - c \right) \right]^2 \right\} = \\ &= \omega^2 \left\{ \left[a \frac{2\pi}{T_1} - \frac{d2\pi}{\tau} \right]^2 + \left[-b \frac{2\pi}{T_1} - c \frac{2\pi}{\tau} \right]^2 \right\} = \\ &= 4\pi^2\omega^2 \left[\frac{a^2 + b^2}{T_1^2} + \frac{c^2 + d^2}{\tau^2} - 2 \frac{(ad - bc)}{\tau T_1} \right] \approx 4\pi^2\omega^2 \frac{c^2 + d^2}{\tau^2} \end{aligned}$$

так как величина T_1 весьма велика по сравнению с τ . Значит, будет:

$$\begin{aligned} 4M_1N_1 &= \frac{1}{4\pi^2\omega^2} \frac{c^2 + d^2}{\tau^2} \tau^4 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\tau^2}{\omega^2} (c^2 + d^2) \\ \sqrt{4M_1N_1} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\tau}{\omega} \sqrt{c^2 + d^2} \end{aligned} \quad (89)$$

Совершенно так же получим:

$$\sqrt{4M_2N_2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\tau}{\omega} \sqrt{a^2 + b^2} \quad (90)$$

Сравним эти амплитуды со статическими отклонениями, которые были бы соответственно

$$\alpha_{st} = \frac{1}{k} \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{и} \quad \theta_{st} = \frac{1}{k} \sqrt{c^2 + d^2},$$

так что статическая величина отклонения σ была бы

$$\frac{1}{k} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \frac{T_1}{2\pi\omega} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

динамическая же равна

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\tau}{\omega} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Значит, отношение этих амплитуд равно

$$\frac{\tau}{T_1} = \frac{\text{период возмущающей силы}}{\text{период прецессии}} \quad (91)$$

Все эти формулы выведены в предположении, что отношение $\frac{\tau}{T_1}$ малое, так что его квадратом можно пренебрегать по сравнению с самим отношением, например, для крупной зыби $\tau = 8$ сек. и если $T_1 = 300$ сек., то будет кругло $\frac{\tau}{T_1} = \frac{1}{40}$.

Формула (91) в нашем вопросе является основною, поэтому мы и остановились столь подробно на ее выводе, чтобы было ясно, какова степень приближения этой формулы и при каких условиях она применима.

§ 8. Здесь необходимо обратить внимание на одно рассуждение, которое приводит к ложным результатам.

В § 5 показано, что величина α выражается вообще формулою вида

$$\alpha = e^{-ft} (C_1 \cos nt + C_2 \sin nt) \quad (92)$$

причем

$$f = \frac{hk}{\omega^2}; \quad n = \frac{k}{\omega}$$

Подобная величина удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\alpha'' + 2f\alpha' + (n^2 + f^2)\alpha = 0$$

или, положив

$$n^2 + f^2 = n_1^2$$

уравнению

$$\alpha'' + 2f\alpha' + n_1^2\alpha = 0 \quad (93)$$

Может представиться, что вынужденные колебания будут определяться уравнением

$$\alpha'' + 2f\alpha' + n_1^2\alpha = a \cos pt + b \sin pt \quad (94)$$

положив

$$\alpha = M \cos pt + N \sin pt$$

получаем для определения M и N уравнения

$$M(n_1^2 - p^2) + 2pfN = a; \quad -2pfM + (n_1^2 - p^2)N = b$$

откуда следует

$$M^2 + N^2 = \frac{a^2 + b^2}{(n_1^2 - p^2)^2 + 4p^2 f^2} \approx \frac{a^2 + b^2}{\left(\frac{4\pi^2}{T_1^2} - \frac{4\pi^2}{\tau^2}\right)^2 + \frac{16\pi^2}{\tau^2} f^2}$$

Так как T_1 велико по сравнению с τ , величина же f весьма малая, то предыдущая формула может быть написана так:

$$\alpha_{dyn.} = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{4\pi^2} \tau^2$$

из уравнения же (94) следует

$$\alpha_{st.} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{n_1^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{4\pi^2} T_1^2$$

и мы получаем:

$$\frac{\alpha_{dyn.}}{\alpha_{st.}} = \frac{\tau^2}{T_1^2}$$

т. е. результат, не согласный с формулой (91).

Более того, из уравнения (94) следует

$$\alpha = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{4\pi^2} \tau^2 (\cos pt + \gamma)$$

где γ — некоторая постоянная.

Из уравнений же (73) следует

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\tau}{\omega} \sqrt{c^2 + d^2} \cos(pt + \gamma); \quad \theta = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\tau}{\omega} \sqrt{a^2 + b^2} \cos(pt + \gamma) \quad (95)$$

т. е. отклонение по углу α пропорционально моменту сил, действующих вокруг оси θ , и наоборот. Это последнее явление легко обнаруживается на любой модели гироскопа или на любом малом гироскопе, которые показывают в физических кабинетах.

Таким образом, уравнения (73) сами собою приводят к явлению, подтверждающемуся опытом, уравнение же (93) и в этом смысле приводит к ложному результату.

Причина этого противоречия состоит в том, что в уравнениях (73)

$$\begin{aligned} \alpha'' + h\alpha' + k\alpha + \omega\theta' &= a \cos pt + b \sin pt \\ -\omega\alpha' + \theta'' + h\theta' + k\theta &= c \cos pt + d \sin pt \end{aligned}$$

находятся члены $\omega\theta'$ и $-\omega\alpha'$ с большим коэффициентом ω ; этими членами и устанавливается связь между колебаниями α и колебаниями θ ; когда же мы пишем уравнение (93), то эта связь, в которой и заклю-

чается самая сущность гироскопических явлений, оказывается отброшенной и понятно, что уравнения:

$$\alpha'' + 2f\alpha' + n_1^2\alpha = a \cos pt + b \sin pt$$

$$\theta'' + 2f\theta' + n_1^2\theta = c \cos pt + d \sin pt$$

представляющие колебания α и θ без связи между ними, гироскопических явлений не передают.

На это обстоятельство надо обратить внимание, чтобы, увлекаясь простотой решения, не впасть в ошибку.

§ 9. Мы имеем следующие уравнения свободных колебаний колец карданова подвеса (18):

$$\varphi'' + n_1^2\varphi = 0; \quad \psi'' + n_2^2\psi = 0$$

причем было положено (17)

$$\frac{M_1gl_1 + M_2gl_2}{K_1 + K_2} = n_1^2; \quad \frac{M_2gl_2}{K_2} = n_2^2$$

и предполагалось, что оба кольца свободны и между ними никакой иной связи нет, кроме той, что цапфы ($x_2, -x_2$) второго кольца лежат в подшипниках ($x_1 - x_1$), укрепленных на первом.

Положим теперь, что на втором кольце установлен гироскопический шар Сперри, приведенный в движение статором, укрепленным на сказанном кольце.

Мы видели, что при наклонении гироскопа на углы α и θ ко второму кольцу между статором и шаром появляются силы, дающие на шар моменты (43)

$$\mathfrak{M}_\alpha = -(H_1\alpha' + F_1\theta' + H\alpha); \quad \mathfrak{M}_\theta = -(H_1\theta' + F_1\alpha' + H\theta)$$

Ввиду малости углов α и θ эти моменты целиком передаются кольцам, и можно полагать

$$M_{x_2} = -\mathfrak{M}_\alpha; \quad M_{y_2} = -\mathfrak{M}_\theta$$

Таким образом, уравнения движения колец под действием реактивных моментов, происходящих от гироскопа, будут:

$$\begin{aligned} (K_1 + K_2)\varphi'' + (M_1gl_1 + M_2gl_2)\varphi - F_1\alpha' - H_1\theta' - H\theta &= 0 \\ K_2\psi'' + M_2gl_2\psi - H_1\alpha' - F_1\theta' - H\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (96)$$

Обозначим через α_1 и θ_1 углы, аналогичные углам α и θ , но считаемые от неподвижных в пространстве оси Ox и плоскости ξOx .

Если бы на шар никаких внешних сил приложено не было, то уравнения его движения были бы:

$$A\alpha_1'' + A\omega\theta_1' = 0; \quad A\theta_1'' - A\omega\alpha_1' = 0$$

Но к гироскопу приложены силы, происходящие от статора, дающие моменты:

$$\mathfrak{M}_x = -(H_1\alpha' + F_1\theta' + H\alpha); \quad \mathfrak{M}_\theta = -(H_1\theta' + F_1\alpha' + H\theta)$$

упомянутые выше.

Эти моменты зависят от углов α и θ и их производных α' и θ' , причем эти углы определяются по отношению к осям $Ox_2y_2z_2$ второго кольца, подвижным в пространстве.

Ограничиваясь членами первого порядка, можем полагать

$$\alpha_1 = \alpha + \psi; \quad \theta_1 = \theta + \varphi \quad (97)$$

так что будет

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_x &= \mathfrak{M}_{\alpha_1} = -[H_1(\alpha'_1 - \psi') + F_1(\theta'_1 - \varphi') + H(\alpha_1 - \psi)] \\ \mathfrak{M}_\theta &= \mathfrak{M}_{\theta_1} = -[H_1(\theta'_1 - \varphi') + F_1(\alpha'_1 - \psi') + H(\theta_1 - \varphi)] \end{aligned}$$

и уравнения движения гироскопа будут:

$$\begin{aligned} A\alpha''_1 + A\omega\theta'_1 + [H_1(\alpha'_1 - \psi') + F_1(\theta'_1 - \varphi') + H(\alpha_1 - \psi)] &= 0 \\ A\theta''_1 - A\omega\alpha'_1 + [H_1(\theta'_1 - \varphi') + F_1(\alpha'_1 - \psi') + H(\theta_1 - \varphi)] &= 0 \end{aligned} \quad (98)$$

Разделив соответственно уравнения (96) на $K_1 + K_2$ и K_2 , уравнения (98) на A и положив:

$$\begin{aligned} \frac{M_1gl_1 + M_2gl_2 + H}{K_1 + K_2} &= p_1; & \frac{F_1}{K_1 + K_2} &= f_1; & \frac{H_1}{K_1 + K_2} &= h_1; & \frac{H}{K_1 + K_2} &= k_1 \\ \frac{M_2gl_2 + H}{K_2} &= p_2; & \frac{F_1}{K_2} &= f_2; & \frac{H_1}{K_1 + K_2} &= h_2; & \frac{H}{K_2} &= k_2 \\ \frac{H}{A} &= k; & \frac{F_1}{A} &= f; & \frac{H_1}{A} &= h \end{aligned} \quad (99)$$

мы получим, по замене в уравнениях (96) величин α и θ их выражениями (97):

$$\begin{aligned} \varphi'' + h_1\varphi' + p_1\varphi - f_1\alpha'_1 - h_1\theta'_1 + f_1\psi' - k_1\theta_1 &= 0 \\ \psi'' + h_2\psi' + p_2\psi - h_2\alpha'_1 - f_2\theta'_1 + f_2\varphi' - k_2\alpha_1 &= 0 \\ \alpha''_1 + h\alpha'_1 + k\alpha_1 + \omega\theta'_1 + f\theta'_1 - h\psi' - f\varphi' - k\psi &= 0 \\ \theta''_1 + h\theta'_1 + k\theta_1 - \omega\alpha'_1 + f\alpha'_1 + h\varphi' - f\psi' - k\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (100)$$

В последних двух уравнениях члены $f\theta'_1$ и $f\alpha_1$ можно отбросить по малости величины f по сравнению с ω .

Эти уравнения могут быть еще упрощены на основании следующих соображений: период колебаний α_1 и θ_1 весьма велик (около 300 сек.), амплитуды их весьма малые (порядка $\frac{1^\circ}{4}$), период колебаний колец — около 1—2 сек., амплитуда $5-10^\circ$, ясно, что угловые скорости α'_1 и θ'_1 будут ничтожно малы по сравнению с φ' и ψ' и члены, содержащие α'_1 и θ'_1 , в первых двух уравнениях могут быть отброшены.

Таким образом, уравнения движения колец с гироскопом на них будут:

$$\begin{aligned} \varphi'' + h_1\varphi' + p_1\varphi + f_1\psi' - k_1\theta_1 &= 0 \\ \psi'' + h_2\psi' + p_2\psi + f_2\varphi' - k_2\alpha_1 &= 0 \\ \alpha_1'' + h\alpha_1' + k\alpha_1 + \omega\theta_1' - h\psi' - f\varphi' - k\psi &= 0 \\ \theta_1'' + h\theta_1' + k\theta_1 - \omega\alpha_1' - h\varphi' - f\psi' - k\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (101)$$

§ 10. Не разбирая пока свободных колебаний, рассмотрим вынужденные, предполагая, что гироскоп на кардановом подвесе установлен на корабле.

Качания корабля не будут непосредственно передаваться гироскопу, а будут давать возмущающие силы, выведенные в теории маятникового кренометра, которому уподобляется каждое из колец подвеса.

Эти силы периодические, так что в правых частях уравнений (101) будут стоять члены вида

$$a \cos pt + b \sin pt; \quad c \cos qt + d \sin qt$$

Применяя методу, изложенную в § 7, достаточно рассмотреть уравнения:

$$\begin{aligned} \varphi'' + h_1\varphi' + p_1\varphi + f_1\psi' - k_1\theta_1 &= ae^{iqt} \\ \psi'' + h_2\psi' + p_2\psi + f_2\varphi' - k_2\alpha_1 &= ce^{iqt} \\ \alpha_1'' + h\alpha_1' + k\alpha_1 + \omega\theta_1' - h\psi' - f\varphi' - k\psi &= 0 \\ \theta_1'' + h\theta_1' + k\theta_1 - \omega\alpha_1' - h\varphi' - f\psi' - k\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (102)$$

Будем искать решение вида

$$\varphi = M_1 e^{iqt}; \quad \psi = M_2 e^{iqt}; \quad \alpha_1 = M_3 e^{iqt}; \quad \theta_1 = M_4 e^{iqt}$$

тогда для определения неизвестных M_1, M_2, M_3, M_4 будем иметь уравнения

$$\begin{aligned} (p_1 - q^2 - iqh_1)M_1 + iqf_1M_2 - k_1M_4 &= a \\ iqf_2M_1 + (p_2 - q^2 + iqh_2)M_2 - k_2M_3 &= c \\ -iqfM_1 - (k + iqh)M_2 + (k - q^2 + iqh)M_3 + \omega iqM_4 &= 0 \\ (k + iqh)M_1 - iqfM_2 + \omega iqM_3 + (k - q^2 + iqh)M_4 &= 0 \end{aligned} \quad (103)$$

Решение этой системы уравнений не представляет затруднений, ибо, выразив из первых двух уравнений величины M_1 и M_2 через M_3 и M_4 , подставляем найденные значения в последние два уравнения, из которых и найдем нужные нам значения M_3 и M_4 , тогда как M_1 и M_2 нам не нужны, ибо нам надо знать отклонения вращения шара от истинной вертикали, а не величины размахов колец подвеса.

Имеем:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{(a + k_1M_4)(p_2 - q^2 + iqf_2) - (c + k_2M_3)iqf_1}{(p_1 - q^2 + iqh_1)(p_2 - q^2 + iqh_2) + q^2f_1f_2} \\ M_2 &= \frac{(c + kM_3)(p_1 - q^2 + iqf_2) - (a + k_1M_1)iqf_2}{(p_1 - q^2 + iqh_1)(p_2 - q^2 + iqh_2) + q^2f_1f_2} \end{aligned} \quad (104)$$

Даже не развивая этих выражений, видно, что они буквы ω не содержат, из последних же двух уравнений видно, что в состав знаменателя в выражениях M_3 и M_4 войдет весьма большая величина $\omega^2 q^2$, представляющая произведение $-\omega i q \omega i q$, в числителе же величина ω будет входить в первой степени, значит, величины M_3 и M_4 будут порядка ω^{-1} , т. е. весьма малые величины; значит, от членов $k_1 M_4$ и $k_2 M_3$, входящих в числители дробей (104), произойдут в выражениях для M_3 и M_4 члены порядка ω^{-2} , тогда как от членов, содержащих a и c , будут происходить величины порядка ω^{-1} . Ясно, что члены порядка ω^{-2} могут быть отброшены в окончательном результате и выгоднее их отбросить заранее, чем их напрасно вычислять. Это же равносильно тому, чтобы в уравнениях (103) отбросить члены $-k_1 M_4$ и $M_3 k_2$, а это то же самое, что отбросить члены $k_1 \theta_1$ и $k_2 x_1$ в первых двух уравнениях (102).

Таким образом, первые два уравнения можно писать так:

$$\begin{aligned} \varphi'' + h_1 \varphi' + p_1 \varphi + f_1 \psi &= a \cos qt + b \sin qt \\ \psi'' + h_2 \psi' + p_2 \psi + f_2 \varphi &= c \cos qt + d \sin qt \end{aligned}$$

и искать их решение непосредственно в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= A \cos qt + B \sin qt \\ \psi &= C \cos qt + D \sin qt \end{aligned}$$

где A, B, C, D — неопределенные коэффициенты, для определения которых получаем уравнения

$$\begin{aligned} (p_1 - q^2)A + qh_1 B + qf_1 D &= a \\ -qh_1 A + (p_1 - q^2)B - qf_1 C &= b \\ qf_2 B + (p_2 - q^2)C + qh_2 D &= c \\ -qf_2 A - qh_2 C + (p_2 - q^2)D &= d \end{aligned} \tag{105}$$

решение этих уравнений затруднений не представляет, и после того как A, B, C, D будут найдены, подставляем величины φ и ψ в уравнения третье и четвертое системы (102), которые тогда примут вид

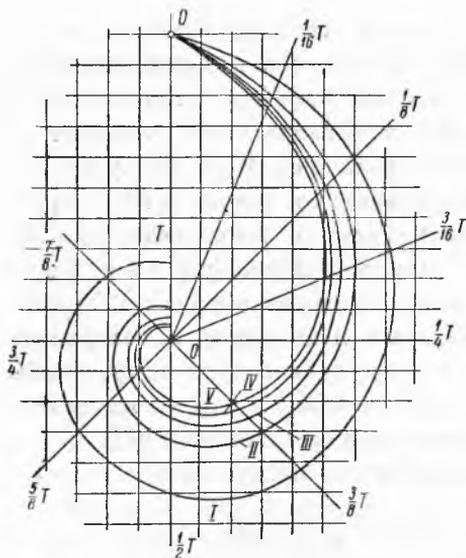
$$\begin{aligned} x_1'' + hx_1' + kx_1 + \omega \theta' &= a_1 \cos qt + b_1 \sin qt \\ \theta_1' + h\theta_1 + k\theta_1 - \omega x_1' &= c_1 \cos qt + d_1 \sin qt \end{aligned}$$

и решаются совершенно подобно предыдущим, что подробно рассмотрено в § 7.

Численные примеры

Рассмотрим теперь некоторые численные примеры, на которых выяснится способ определения динамических постоянных прибора, а затем и поверительный его расчет.

1. Мы видели, что ось шара при неподвижности второго кольца описывает около истинной вертикали конус, угол раствора которого σ выражается формулой



$$\sigma = \sigma_0 e^{-f_1 t} \quad (1)$$

где f_1 — некоторая постоянная, t — время, которое будем выражать в долях периода прецессии T , положив $\sigma_0 = 100$ и взяв за масштаб чертежа $1.00 = 100$ мм, построим несколько траекторий по уравнению (1) в полярных координатах (фиг. 16).

Взяв последовательно

$$e^{-fT} = \frac{1}{4}; \frac{1}{10}; \frac{1}{15}; \frac{1}{20}; \frac{1}{25}$$

полагаем

$$t = 0; \frac{1}{16} T; \frac{1}{8} T; \frac{3}{16} T; \frac{1}{4} T; \frac{3}{8} T;$$

$$\frac{1}{2} T; \frac{5}{8} T; \frac{3}{4} T; \frac{7}{8} T; T$$

Фиг. 16. Траектории апекса гировертикали при различном погашении. Начальное отклонение во всех случаях $\sigma_0 = 100$.

N	I	II	III	IV	V
e^{-fT}	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$

вычисляем по формуле (1) соответствующие значения и получаем табл. 1.

Таблица 1

N°	$\frac{t}{T}$	$e^{-fT} = \frac{1}{4}$	$e^{-fT} = \frac{1}{10}$	$e^{-fT} = \frac{1}{15}$	$e^{-fT} = \frac{1}{20}$	$e^{-fT} = \frac{1}{25}$
		σ	σ	σ	σ	σ
0	0	100	100	100	100	100
1	$\frac{1}{16}$	92	87	84	83	82
2	$\frac{1}{8}$	84	75	71	69	67
3	$\frac{3}{16}$	77	66	59	57	55
4	$\frac{1}{4}$	71	56	51	47	45
5	$\frac{3}{8}$	60	42	36	32	30
6	$\frac{1}{2}$	50	32	26	22	20
7	$\frac{5}{8}$	42	24	18	15	13
8	$\frac{3}{4}$	35	18	13	10	9
9	$\frac{7}{8}$	30	14	9	7	6
10	1	25	10	7	5	4

По этим данным построена прилагаемая диаграмма (фиг. 16), которая показывает, что вид вычисленных кривых близко подходит к наблюдаемым, значит предположение о пропорциональности сопротивления первой степени как угловой скорости α' , так и угловой скорости θ' практически близко к истине.

Таблица 2

N°	Углы γ°	Время t в секундах	$T = \frac{360^\circ}{\gamma} t$	r в мм
0	0	0	—	125
1	30	25	300	97
2	60	51	306	75
3	90	74	296	58
4	120	102	306	45
5	150	124	300	34

Среднее $T=301.6 \approx 302$ сек.

2. Рассмотрим теперь обратный вопрос, т. е. положим, что путем фотографическим или иным снята траектория, описываемая индексом прибора, требуется определить величины f и T . Величина T периода прецессии сейчас же определяется, наблюдая углы поворота радиуса-вектора, соединяющего положение индекса с точкою O . Пусть, например, наблюдается (табл. 2).

Чтобы найти f_1 , располагаем вычисления так, как указано в табл. 3.

Таблица 3

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
N°	t	r	$\lg r$	$\lg \frac{r_0}{r}$	$\frac{(5)}{(2)}$	$f=2.30(6)$
1	25	97	1.987	0.110	0.00440	0.0101
2	51	75	1.875	0.222	435	100
3	74	58	1.763	0.334	452	104
4	102	45	1.653	0.444	435	100
5	124	34	1.531	0.566	0.00456	0.0105

Среднее $f_1 = 0.0102$

Так как $T=302$, то будет

$$fT = 3.08; e^{fT} = 21.76 \approx 21 \frac{3}{4}$$

$$e^{-fT} = \frac{4}{87}$$

Мы имели формулы:

$$-f_1 = -\frac{kh}{\omega^2}; T = \frac{\omega}{k} 2\pi$$

В нашем случае $\omega = 2\pi \cdot 200 \approx 1250$.

По абсолютной величине

$$f_1 T = \frac{kh}{\omega^2} T = \frac{2\pi h}{\omega} = 3.08$$

$$h = \frac{3.08}{2\pi} \omega = 0.49\omega = 616$$

При выводе упрощенных приближенных формул (65) и (66) предположено, что величина h^2 мала по сравнению с ω^2 , в рассматриваемом случае это не имеет места, поэтому надо пользоваться точными формулами (62):

$$f_1 = -f = + \frac{1}{2} (h - y); \quad n_1 = \frac{1}{2} (x - \omega) = -n$$

$$T = \frac{2\pi}{n_1}; \quad h\omega = xy$$

Из этих уравнений следует

$$x = \omega + \frac{4\pi}{T}; \quad 2f_1 = h \left(1 - \frac{\omega}{x} \right) = h \left(1 - \frac{\omega}{\omega + \frac{4\pi}{T}} \right);$$

$$h = \frac{f_1}{2\pi} T \omega = \frac{f_1 T 2\pi 200}{2\pi} = 200 f_1 T$$

что в нашем случае дает

$$h = 200 \cdot 0.0102 \cdot 302 = 616$$

Затем имеем уравнение

$$4k = x^2 - y^2 - \omega^2 + h^2$$

которое следует из уравнений

$$s = \omega^2 + 4k - h^2; \quad s = x^2 - y^2$$

которые мы имели в § 3.

Но

$$x = \omega + \frac{4\pi}{T}; \quad y = h - 2f_1$$

Подставляя, имеем:

$$4k = \frac{8\pi\omega}{T} + \frac{16\pi^2}{T^2} + 4hf_1 - 4f_1^2 \approx \frac{8\pi\omega}{T} + 4hf_1$$

т. е.

$$k = \frac{2\pi\omega}{T} + hf_1 = 26.0 + 6.2 = 32.2$$

Ясно, что приближенная формула

$$k = \frac{2\pi\omega}{T}$$

в нашем случае недостаточно точна.

Таким образом, мы получим все численные значения коэффициентов уравнений

$$\alpha'' + h\alpha' + k\alpha + \omega\theta' = 0$$

$$-\omega\alpha' + \theta'' + h\theta' + k\theta = 0$$

а именно:

$$\omega = 1250; \quad h = 616; \quad k = 32.2$$

Момент инерции шара A определяется по обычному способу про-
качкой, приближенная же его величина может быть вычислена по фор-
муле

$$A = \frac{2}{5} MR^2$$

где M — масса шара и R — его радиус. Так, в нашем случае при весе
шара 14 кг и радиусе 7.5 см будет

$$M = \frac{14}{980} = \frac{1}{70}; \quad A = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{70} (7.5)^2 = 0.321$$

Само собою разумеется, что и во всех дальнейших расчетах надо
все длины выражать в сантиметрах, веса в килограммах и время в се-
кундах.

На основании формул (16) и (45)

$$\frac{H}{A} = k; \quad \frac{H_1}{A} = h$$

имеем:

$$H = k \cdot A = 32.2 \cdot 0.321 = 10.34$$

$$H_1 = h \cdot A = 616 \cdot 0.321 = 197.5$$

$$A\omega = 0.321 \cdot 1250 = 401$$

и в уравнениях

$$Ax'' + H_1\alpha' + H\alpha + A\omega\theta' = 0$$

$$-A\omega\alpha' + A\theta'' + H_1\theta' + H\theta = 0$$

все коэффициенты, т. е. динамические характеристики прибора, будут
известны, и все уравнения, относящиеся к его исследованию, будут
с численными коэффициентами, благодаря чему решение их значительно
упрощается.

3. Покажем теперь численное решение той системы уравнений, с кото-
рой нам придется иметь дело.

Пусть дана система:

$$\alpha'' + 616\alpha' + 32.2\alpha + 1250\theta' = 0$$

$$-1250\alpha' + \theta'' + 616\theta' + 32.2\theta = 0$$

требуется найти общий интеграл этой системы.

Характеристическое уравнение будет

$$(\lambda^2 + 616\lambda + 32.2)^2 - 1250^2\lambda^2 = 0$$

Это уравнение разлагается на два:

$$\lambda^2 + (616 + 1250i)\lambda + 32.2 = 0$$

$$\lambda^2 + (616 - 1250i)\lambda + 32.2 = 0$$

(*)

Возьмем первое из этих уравнений. Его корни суть

$$\lambda_1 = -308 - 625i + \sqrt{(308 + 625i)^2 - 32.2}$$

$$\lambda_2 = -308 - 625i - \sqrt{(308 + 625i)^2 - 32.2}$$

Вычислим λ_1 . Для этого достаточно вычислить

$$\sqrt{(308 + 625i)^2 - 32.2}$$

Очевидно, что квадрат модуля величины $(308 + 625i)^2$, равный $(308^2 + 625^2)^2$, есть весьма большая величина по сравнению с 32.2, поэтому можно положить

$$\sqrt{(308 + 625i)^2 - 32.2} = (308 + 625i) + \varepsilon + \eta i$$

величины ε и η будут весьма малые. Имеем:

$$-32.2 + (308 + 625i)^2 = (308 + 625i)^2 +$$

$$+ 2(\varepsilon + \eta i)(308 + 625i) + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\eta i - \eta^2$$

Отсюда в первом приближении следует

$$-16.1 = 308\varepsilon - 625\eta;$$

$$0 = 625\varepsilon + 308\eta$$

Отсюда

$$\varepsilon = -\frac{16.1 \cdot 308}{(308)^2 + 625^2} = -16.1 \frac{308}{485489}$$

$$\eta = \frac{16.1 \cdot 625}{308^2 + 625^2} = 16.1 \frac{625}{485489}$$

$$\lg 16.1 = 1.20683$$

$$\lg 16.1 = 1.20683$$

$$\lg 308 = 2.48855$$

$$\lg 625 = 2.79588$$

$$\text{colg } 485500 = \bar{6}.31381$$

$$\text{colg } 485500 = \bar{6}.31381$$

$$\lg \varepsilon = \bar{2}.00919$$

$$\lg \eta = \bar{2}.31652$$

$$\varepsilon = -0.010231$$

$$\eta = 0.020727$$

Нетрудно видеть, что поправка от отброшенных членов $\varepsilon^2 + 2\eta\varepsilon i - \eta^2$ будет настолько мала, что первым приближением можно ограничиться и мы получим:

$$\sqrt{(308 + 625i)^2 - 32.2} = 308 + 625i - 0.010231 + 0.020727i$$

Значит,

$$\lambda_1 = -0.010231 + 0.020727i$$

$$\lambda_2 = -616 - 1250i + 0.010231 - 0.020727i \approx -616 - 1250i$$

Совершенно так же получим из второго уравнения

$$\lambda_3 = -(308 - 625i) + \sqrt{(308 - 625i)^2 - 32.2}$$

$$\lambda_4 = -(308 - 625i) - \sqrt{(308 - 625i)^2 - 32.2}$$

и на основании предыдущего будет

$$\lambda_3 = -(308 - 625i) + (308 - 625i) - 0.010231 - 0.020727i$$

$$\lambda_4 = -(308 - 625i) - (308 - 625i) + 0.010231 + 0.020727i$$

т. е.

$$\lambda_3 = -0.010231 - 0.020727i; \quad \lambda_4 \approx -616 + 1250i$$

Каждому корню λ соответствует свое решение вида:

$$\alpha = C_1 e^{\lambda t}; \quad \theta = C_2 e^{\lambda t}$$

причем между C_1 и C_2 в нашем случае имеют место соотношения:

$$(\lambda^2 + 616\lambda + 32.2) C_1 + 1250\lambda C_2 = 0;$$

$$-1250\lambda C_1 + (\lambda^2 + 616\lambda + 32.2) C_2 = 0$$

т. е. для корня

$$\lambda = \lambda_1$$

будет:

$$(\lambda_1^2 + 616\lambda_1 + 32.2) C_{11} + 1250\lambda_1 C_{21} = 0;$$

$$-1250\lambda_1 C_{11} + (\lambda_1^2 + 616\lambda_1 + 32.2) C_{21} = 0$$

причем, на основании характеристического уравнения, второе из этих уравнений есть следствие первого. Вместе с тем, на основании уравнения (*)

$$\lambda_1^2 + 616\lambda_1 + 32.2 + 1250i\lambda_1 = 0$$

Значит,

$$\lambda_1^2 + 616\lambda_1 + 32.2 = -1250i\lambda_1$$

и первое уравнение дает

$$C_{21} = iC_{11}$$

Таким образом, корню $\lambda = \lambda_1$ соответствует решение

$$\alpha = C_{11} e^{\lambda_1 t} = C_{11} e^{-0.010231t} e^{i0.020727t}$$

$$\theta = iC_{11} e^{\lambda_1 t} = iC_{11} e^{-0.010231t} e^{i0.020727t}$$

иначе

$$\alpha = C_{11} e^{-0.010231t} (\cos 0.020727t + i \sin 0.020727t)$$

$$\theta = C_{11} e^{-0.010231t} (-\sin 0.020727t + i \cos 0.020727t)$$

Совершенно так же для сопряженного с λ_1 корня будет $\lambda = \lambda_3$.

$$\alpha = C_{13} e^{-0.010231t} (\cos 0.020727t - i \sin 0.020727t)$$

$$\theta = C_{13} e^{-0.010231t} (-\sin 0.020727t - i \cos 0.020727t)$$

Сумма этих решений есть также решение, поэтому паре корней $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_3$ соответствует решение

$$\alpha = e^{-0.010231t} [(C_{11} + C_{13}) \cos 0.020727t + i(C_{11} - C_{13}) \sin 0.020727t]$$

$$\theta = e^{-0.010231t} [-(C_{11} + C_{13}) \sin 0.020727t + i(C_{11} - C_{13}) \cos 0.020727t]$$

Полагая теперь:

$$C_{11} + C_{13} = D; \quad i(C_{11} - C_{12}) = E$$

получим

$$\alpha = e^{-0.010231t} (D \cos 0.020727t + E \sin 0.020727t)$$

$$\theta = e^{-0.010231t} (-D \sin 0.020727t + E \cos 0.020727t)$$

Совершенно так же для корней λ_2 и λ_4 будет

$$\alpha = e^{-616t} (F \cos 1250t - G \sin 1250t)$$

$$\theta = e^{-616t} (F \sin 1250t + G \cos 1250t)$$

Положим для сокращения письма

$$0.010231 = f; \quad 0.020727 = n; \quad 616 = g; \quad 1250 = \omega$$

тогда общее решение будет

$$\alpha = e^{-ft} (D \cos nt + E \sin nt) + e^{-gt} (F \cos \omega t - G \sin \omega t)$$

$$\theta = e^{-ft} (-D \sin nt + E \cos nt) + e^{-gt} (F \sin \omega t + G \cos \omega t)$$

где D, E, F, G — произвольные постоянные. Положим, что начальные условия суть: при $t=0$ должно быть

$$\alpha = 4^\circ; \quad \theta = 3^\circ; \quad \alpha' = 0; \quad \theta' = 0$$

тогда для определения произвольных постоянных имеем уравнения

$$4^\circ = D + F; \quad 3^\circ = E + G$$

$$0 = -fD + nE - gF - \omega G; \quad 0 = -nD - fE + \omega F - gG$$

Подставляя в последние два уравнения значения

$$F = 4^\circ - D; \quad G = 3^\circ - E$$

получим:

$$(g - f)D + (\omega + n)E = 3^\circ \omega + 4^\circ g; \quad -(\omega + n)D + (g - f)E = 3^\circ g - 4^\circ \omega$$

Так как величины f и n весьма малы по сравнению с ω и g , то приближенно будет

$$gD + \omega E = 3^\circ \omega + 4^\circ g; \quad -\omega D + gE = 3^\circ g - 4^\circ \omega$$

откуда, очевидно, следует

$$D \approx 4^\circ; \quad E = 3^\circ$$

Пусть более точные значения D и E суть $D + \delta$ и $E + \varepsilon$, тогда будем иметь:

$$g\delta + \omega\varepsilon = 4^\circ f - 3^\circ n = 0.04 - 0.6 = -0.02;$$

$$-\omega\delta + g\varepsilon = 4^\circ n + 3^\circ f = 0.11$$

Откуда

$$\delta = \frac{-0^{\circ}02g - 0^{\circ}11\omega}{\omega^2 + g^2} = \frac{-150^{\circ}}{1942000} = 0^{\circ}000077 = -F$$

$$\varepsilon = \frac{-0^{\circ}02\omega + 0^{\circ}11g}{\omega^2 + g^2} = \frac{43^{\circ}}{1942000} = 0^{\circ}000022 = -G$$

Отсюда видно, что значения F и G ничтожно малы, к тому же благодаря множителю e^{-618t} эти члены погашаются через несколько сотых долей секунды, поэтому будет

$$\alpha = e^{-ft} (4^{\circ} \cos nt + 3^{\circ} \sin nt); \quad \theta = e^{-ft} (-4^{\circ} \sin nt + 3^{\circ} \cos nt)$$

отсюда следует

$$\sqrt{\alpha^2 + \theta^2} = \sigma = \sigma_0 e^{-ft} = 5^{\circ} e^{-ft}$$

причем

$$\sigma_0 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5^{\circ}$$

Период прецессии T будет

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{0.020727}$$

$$\lg \pi = 0.49715$$

$$\lg 2 = 0.30103$$

$$\text{colg } 0.020727 = 1.68348$$

$$\lg T = 2.48166; \quad T = 303.1.$$

Таким образом, мы через интегрирование системы наших уравнений пришли вновь к тем самым величинам, по которым мы определили динамические характеристики системы в нашем примере, что служит контролем как общих формул, так и численных выкладок.

Погашение за полный период обращения составляет

$$e^{-fT} = e^{-3.10} = \frac{1}{22.2}$$

и соответствующая кривая

$$\sigma = \sigma_0 e^{-ft}$$

ложится на диаграмме между кривыми IV и V (фиг. 16).

ОБ УЧЕТЕ ПОПРАВОК ПРИ СТРЕЛЬБЕ ПО АЭРОПЛАНАМ

§ 1. Начнем с самого простого случая:

- а) корабль стоит на якоре,
- б) мертвый штиль,
- в) движение аэроплана равномерное и прямолинейное,
- г) высота полета постоянная.

В этих предположениях выведем сперва *точные* формулы для учета „упреждений“, затем разовьем полученные выражения в ряды и, взяв в этих рядах первые члены, определим на численных примерах, сколько членов надо удерживать, чтобы получить требуемую практикою точность.

Такой анализ необходимо произвести, чтобы на основании его результатов проектировать те счетные приборы, которыми сказанные упреждения учитываются.

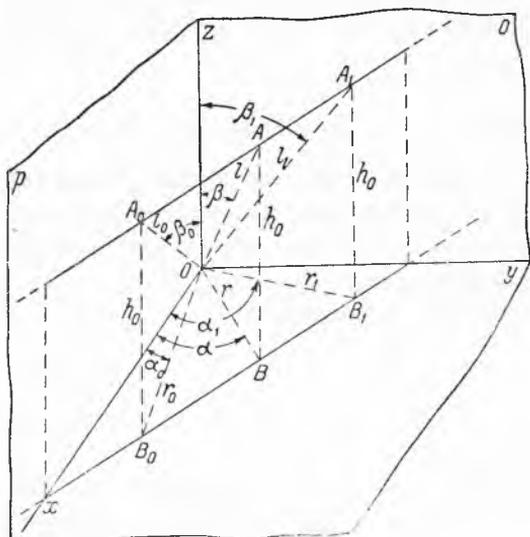
§ 2. Движение аэроплана отнесем к прямолинейной, прямоугольной системе координат, начало коих положим в пункте наблюдения, каковой предположим совпадающим со стреляющим орудием или группой орудий.

Пусть прямая A_0A_1 (см. рисунок) есть путь аэроплана, B_0B_1 — проекция этой прямой на горизонтальную плоскость xOy .

Сделаем следующие обозначения:

- 1) точка $A_0(x_0y_0z_0)$ — положение аэроплана в момент $t=t_0$;
- 2) точка $A_1(x_1y_1z_1)$ — положение аэроплана в момент попадания $t=t_1$;

¹ Впервые опубликовано в „Известиях Военно-морской академии ВМФ им. г. Ворошилова“, 1941, вып. 9, стр. 5—20. (Ред.).



3) $B_0A_0 = B_1A_1 = h_0$ — высота полета аэроплана;
 4) $OB_0 = r_0$, $OB_1 = r_1$ — укороченные дистанции (горизонтальные дальности);

5) углы α_0 и α_1 — пеленги аэроплана в моменты t_0 и t_1 ; углы β_0 и β_1 — угловые зенитные расстояния в моменты t_0 и t_1 ;

6) l_0 и l_1 — дистанции в моменты t_0 и t_1 ;

7) $t - t_0$ — продолжительность полета;

8) v — скорость полета аэроплана;

$$9) v \cos(\hat{v}x) = a; v \cos(\hat{v}y) = b; v \cos(\hat{v}z) = 0 \quad (1)$$

суть проекции скорости v на оси координат, причем скорость v только берется по своей абсолютной величине, косинусы же с принадлежащими им знаками, при обычном счете угла $\hat{v}x$ от положительной части Ox оси x от 0 до 2π , так что угол $\hat{v}y = \frac{\pi}{2}$; следовательно, будет

$$v \cos(\hat{v}x) = a; v \cos(\hat{v}y) = v \cos\left(\frac{\pi}{2} + \hat{v}x\right) = -v \sin(\hat{v}x) = b$$

или, полагая $(\hat{v}x) = \delta$,

$$a = v \cos \delta; b = -v \sin \delta \quad (2)$$

Кроме того, заметим здесь же, что наблюдение может доставить лишь значения углов: α_0 — пеленга, т. е. азимута; β_0 — зенитного расстояния и длины l_0 — наклонной дальности.

При этом угол α_0 считается, как указано выше, от 0 до 2π ; угол же β_0 практически всегда будет $0 < \beta_0 < \frac{\pi}{2}$, ибо при стрельбе по аэроплану углов снижения не бывает.

Таким образом, переходя от непосредственно наблюдаемых полярных координат α_0 , β_0 , l_0 к прямоугольным x_0 , y_0 , z_0 , имеем:

$$\begin{aligned} x_0 &= l_0 \sin \beta_0 \cos \alpha_0 \\ y_0 &= l_0 \sin \beta_0 \sin \alpha_0 \\ z_0 &= l_0 \cos \beta_0 = h_0 \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения движения самолета будут:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a(t - t_0) \\ y &= y_0 + b(t - t_0) \\ z &= h_0 \end{aligned} \quad (4)$$

Эти формулы доставляют теоретическую возможность определить слагающие a и b скорости полета аэроплана, когда произведены наблюдения в моменты $t = t_0$ и $t = t_1$.

В самом деле, положим

$$t_1 - t_0 = \tau$$

и обозначим через

$$l_1, \alpha_1, \beta_1$$

значения, наблюдаемые в момент $t=t_1$; тогда будет

$$x_1 = l_1 \sin \beta_1 \cos \alpha_1; \quad y_1 = l_1 \sin \beta_1 \sin \alpha_1; \quad z = l_1 \cos \beta_1 \quad (3')$$

Уравнения (4) принимают вид

$$x_1 = x_0 + a\tau; \quad y_1 = y_0 + b\tau \quad (4)$$

Отсюда следует

$$a = \frac{x_1 - x_0}{\tau} = (l_1 \sin \beta_1 \cos \alpha_1 - l_0 \sin \beta_0 \cos \alpha_0) \frac{1}{\tau} \quad (5)$$

$$b = \frac{y_1 - y_0}{\tau} = (l_1 \sin \beta_1 \sin \alpha_1 - l_0 \sin \beta_0 \sin \alpha_0) \frac{1}{\tau}$$

Этими величинами мы и будем пользоваться при выводе всех дальнейших формул.

Заметим здесь же, что формулы (5) *практически* обладают тем недостатком, что величины l_1 и l_0 — величины „большие“, разность же их — величина „малая“, поэтому, хотя углы α и β наблюдаются с достаточной точностью, но расстояния l_1 и l_0 наблюдаются сравнительно грубо, и *абсолютная* погрешность в них переходит в *абсолютную* погрешность величин a и b .

Чтобы по возможности устранить этот недостаток, необходимо как бы замкнуть дальномер сам на себя, т. е. чтобы „совмещение изображений“ производилось не непосредственно наблюдателем от руки, а через „обезличенный“ микрометр, подобно тому как в теперешних астрономических инструментах, т. е. чтобы наблюдатель или действовал на регулятор скорости перемещения изображения, или же, действуя на „дифференциал“, вводил к этой скорости „поправку“ так, чтобы совмещение изображений сохранялось.

Эти детали относятся к устройству приборов, а не к общей их теории.

Чтобы достигнуть непрерывной подачи углов α и β к счетным автоматам, эти углы должны быть наблюдаемы *раздельно* двумя наблюдателями при помощи „горизонтального“ и „вертикального“ кругов, каждый из которых снабжен своим обезличенным микрометром; тогда один круг будет подавать углы α , другой круг — углы β , подобно тому как производится „раздельная“ ручная наводка орудия при стрельбе на море, где каждый наводчик делает только *одно*, а не *два* дела одновременно.

Само собою разумеется, что на корабле „наблюдательный пост“ должен быть стабилизирован.

Таким образом, будем считать a и b известными; тогда получим: дистанция начальная

$$l_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + h_0^2} \quad (5')$$

дистанция в момент t

$$l = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2} \quad (6)$$

пеленг в момент t

$$\alpha = \text{arc tg } \frac{y}{x} \quad (7)$$

угол местности в момент t

$$\mu = \frac{\pi}{2} - \beta \text{ arc sin } \frac{h_0}{l} \quad (8)$$

В момент t :

$$\text{ВИР} = \frac{dl}{dt} = \frac{ax + by}{l} = \sigma \quad (9)$$

$$\text{ВИП} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{bx - ay}{r^2} = \omega \quad (10)$$

$$\text{ВИМ} = \frac{d\mu}{dt} = -\frac{h_0}{l} \cdot \frac{\frac{dl}{dt}}{\sqrt{l^2 - h_0^2}} = \frac{\sigma}{l} \cdot \frac{h_0}{r} = \theta \quad (11)$$

Укороченная дальность

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (12)$$

Из этих формул следует на основании (4): $bx - ay = bx_0 - ay_0 = \text{const.}$; следовательно, полагая

$$\omega_0 = \frac{bx_0 - ay_0}{r_0^2}$$

имеем на основании формулы (10):

$$\omega r^2 = \omega_0 r_0^2 = \text{постоянной} \quad (13)$$

Это равенство представляет критерий того, что при постоянной высоте и скорости полета движение аэроплана *прямолинейное*.

Из формулы (11) следует:

$$\frac{\theta}{\sigma} lr = h_0 = \text{постоянной} \quad (14)$$

Формула (14) представляет критерий того, что аэроплан держит постоянную высоту полета, равную h_0 .

Итак, имеем формулы:

при $t_0 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \text{ВИР: } \sigma_0 &= \frac{1}{l_0} (ax_0 + by_0) \\ \text{ВИП: } \omega_0 &= \frac{bx_0 - ay_0}{r_0^2} \\ \text{ВИМ: } \theta_0 &= \frac{h_0}{l_0 r_0} \sigma_0 \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

при произвольном t :

$$\left. \begin{aligned} \text{ВИР: } \sigma &= \frac{1}{l} (ax + by) \\ \text{ВИП: } \omega &= \omega_0 \frac{r_0^2}{r^2} \\ \text{ВИМ: } \theta &= \frac{h_0 \sigma}{lr} \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Затем имеем:

$$l^2 = x^2 + y^2 + h_0^2 = [x_0 + a(t - t_0)]^2 + [y_0 + b(t - t_0)]^2 + h_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + h_0^2 + 2(ax_0 + by_0)(t - t_0) + v^2(t - t_0)^2 \quad (15)$$

Но мы имеем равенства

$$ax_0 + by_0 = l_0\sigma_0; \quad -ay_0 + bx_0 = \omega_0 r_0^2$$

следовательно,

$$a = \frac{l_0\sigma_0 x_0 - \omega_0 r_0^2 y_0}{x_0^2 + y_0^2} = -\omega_0 y_0 + \frac{l_0 x_0 \sigma_0}{r_0^2};$$

$$b = \frac{l_0 y_0 \sigma_0 + x_0 r_0^2 \omega_0}{x_0^2 + y_0^2} = \omega_0 x_0 + \frac{l_0 y_0 \sigma_0}{r_0^2}$$

и затем

$$v^2 = a^2 + b^2 = \frac{\sigma_0^2 l_0^2}{r_0^2} + \omega_0^2 r_0^2 \quad (16)$$

Заметив, что

$$l_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + h_0^2$$

мы можем формулу (15) написать так:

$$l^2 - l_0^2 = (l - l_0)(l + l_0) = 2\sigma_0(t - t_0)l_0 + \left(\frac{\sigma_0^2 l_0^2}{r_0^2} + \omega_0^2 r_0^2\right)(t - t_0)^2 \quad (17)$$

Отсюда следует

$$\Delta l_0 = l - l_0 = \frac{2\sigma_0 l_0}{l + l_0} \tau + \left(\frac{\sigma_0^2 l_0^2}{r_0^2} + \omega_0^2 r_0^2\right) \frac{\tau^2}{l + l_0} \quad (III)$$

Формулы (I), (II), (III) суть формулы точные в том смысле, что при выводе их никакие члены не отбрасывались, хотя бы они были малы по сравнению с прочими.

Если вообразить, что момент t_0 есть момент выстрела и t_1 — момент попадания или разрыва, то разность $t_1 - t_0$ представит время полета, которое обозначим через τ ; вместе с тем разность $l_1 - l_0$, которую обозначим через λ , представит величину изменения наклонной дальности за время полета τ .

Время полета можно считать известной функцией наклонной дальности, ибо по этому времени делается установка трубки.

В счетный автомат от дальномера должна непрерывно подаваться дальность l , имеющая место во всякий момент t ; следовательно, будет подана и дальность l_0 , имеющая место в момент выстрела $t = t_0$.

Этот счетный автомат должен бы подавать величину $l_1 - l_0 = \lambda$, представляемую формулой

$$l_1 - l_0 = \lambda = \frac{2\sigma_0 l_0}{l_1 + l_0} \tau + \left(\frac{\sigma_0^2 l_0^2}{r_0^2} + \omega_0^2 r_0^2\right) \frac{\tau^2}{l_1 + l_0} \quad (IV)$$

но это неисполнимо, ибо величина l_1 не известна; поэтому вместо точной формулы (IV) надо взять такую приближенную, обладающую точностью, достаточной для практических целей, так чтобы в эту приближенную формулу входили бы лишь величины, заданные или по ним непосредственно вычисляемые автоматом.

Мы этого достигнем, разлагая величину λ , даваемую формулой (IV), в ряд по степеням τ , ограничиваясь в этом ряду членами второго порядка и вместе с тем беря в формуле (IV) члены, относящиеся к значению l_0 .

§ 3. В формуле (IV) главным членом является первый.

Мы имеем в виду сперва ограничиться второю степенью τ , поэтому можно полагать:

$$1) \text{ в первом члене: } l_1 + l_0 = 2l_0 + \sigma_0\tau = 2l_0 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_0\tau}{l_0}\right);$$

$$2) \text{ во втором члене: } l_1 + l_0 = 2l_0.$$

Заметим, что величина $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_0\tau}{l_0}$ есть величина безразмерная, т. е. отвлеченное число, по степеням которого и надо вести разложение; для этого надо разлагать в ряд не величину λ , представляющую некоторую длину, а безразмерную величину $\frac{\lambda}{l_0}$, т. е. обе части равенства (IV) разделить на l_0 ; тогда будет

$$\frac{\lambda}{l_0} = \frac{2\sigma_0\tau}{2l_0 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_0\tau}{l_0}\right)} + \left(\frac{\sigma_0^2\tau^2}{r_0^2} + \omega_0^2\tau^2 \frac{r_0^2}{l_0^2} \right) \frac{1}{2}$$

или, заменяя

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_0\tau}{l_0}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_0\tau}{l_0}$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{l_0} &= \frac{\sigma_0\tau}{l_0} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_0^2\tau^2}{l_0^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_0^2\tau^2}{r_0^2} + \frac{1}{2} \omega_0^2\tau^2 \frac{r_0^2}{l_0^2} = \\ &= \frac{\sigma_0\tau}{l_0} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_0^2\tau^2}{l_0^2} \left(1 - \frac{l_0^2}{r_0^2}\right) + \frac{1}{2} \omega_0^2\tau^2 \frac{r_0^2}{l_0^2} \end{aligned}$$

Но $r_0^2 = l_0^2 - h_0^2$; следовательно,

$$1 - \frac{l_0^2}{r_0^2} = - \frac{h_0^2}{r_0^2}$$

и мы получим:

$$\frac{\lambda}{l_0} = \frac{\sigma_0\tau}{l_0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_0^2\tau^2}{l_0^2} \cdot \frac{h_0^2}{r_0^2} + \frac{1}{2} \omega_0^2\tau^2 \frac{r_0^2}{l_0^2} \quad (18)$$

Таким образом, будет

$$\lambda = \sigma_0\tau + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_0^2\tau^2}{l_0^2} \right) \frac{h_0^2}{r_0^2} l_0 + \frac{1}{2} \omega_0^2\tau^2 \frac{r_0^2}{l_0} \quad (V)$$

При выводе этой формулы разложение сперва намеренно сделано по степеням безразмерной величины

$$\frac{\sigma_0 \tau}{l_0}$$

а не величины $\sigma_0 \tau$, имеющей размерность длины. Разложение по степеням величин, имеющих какую бы то ни было размерность, смысла не имеет и, даже в промежуточных выкладках, не должно быть допускаемо.

§ 4. Чтобы получить наглядное суждение о степени точности приближенной формулы (V), поступим следующим образом: зададим величину скорости v (на самом деле это будет одна из искомым) и вместе с тем будем задавать величину a , по которой найдется и соответствующее b , и, задавши также x_0 , y_0 и l_0 , вычислим точные значения l_1 и λ , а затем, задавшись величиною τ , вычислим λ и l_1 по приближенной формуле (V). Сличая результаты такого вычисления и получим наглядное суждение о точности формулы (V). Само собою разумеется, что таких вычислений надо проделать целую серию для исследования вопроса о том, можно ли при постройке автоматов ограничиться формулою (V) или надо взять более точные формулы.

Мы ограничимся одним примером, чтобы показать расположение вычислений.

Необходимо обратить внимание, что по большей части стрельба производится, когда самолет летит в атаку на батарею; тогда величины a и b — отрицательные.

Надо также иметь в виду, что при пролете аэроплана через зенит будет $\beta = 0$ и формула (V) принимает неопределенный вид и требует отдельного рассмотрения, которое приводится ниже.

Таблица 1

Вычисление точных значений

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
№	a в м/сек.	b в м/сек.	x_1 в метрах	y_1 в метрах	$\left(\frac{x_1}{100}\right)^2$	$\left(\frac{y_1}{100}\right)^2$	$\left(\frac{r_1}{100}\right)^2$	$\left(\frac{l_1}{100}\right)^2$	l_1 в метрах	$\lambda = l_1 - l_0$ в метрах
1	-100	0.00	5500	0	3025	0	3025	3800	6164	-1836
2	-90	-43.6	5700	-872	3249	76	3325	4100	6403	-1597
3	-80	-60	5900	-1200	3481	144	3625	4400	6633	-1367
4	-70	-71.4	6100	-1428	3721	204	3925	4700	6856	-1144
5	-60	-80	6300	-1600	3969	256	4225	5000	7071	-929
6	-43.6	-90	6628	-1800	4393	324	4717	5442	7377	-623

Итак, возьмем следующий пример:

$$v_0 = 100 \text{ м/сек.}; \quad l_0 = 8000 \text{ м};$$

$$x_0 = 7500 \text{ м}; \quad y_0 = 0;$$

тогда

$$h_0 = \sqrt{l_0^2 - x_0^2} = 2784 \text{ м}$$

При таком задании будем брать различные величины a , как показано в табл. 1, и расчет произведем по *точным* формулам (I)—(V).

Вычислим теперь величину λ по приближенной формуле (V) и, чтобы выделить каждый член в отдельности, напишем ее так:

$$\lambda = A + B + C$$

тогда получаем табл. 2 и 3.

Таблица 2

Вычисление членов A и B

$$\sigma_0 = \frac{1}{l_0} (ax_0 + by_0) = a \frac{x_0}{l_0} = 0.9375a; \quad A = \sigma_0 \tau = \sigma_0 20;$$

$$B = \frac{1}{2} \frac{h_0^2}{r_0^2 l_0} (\sigma_0 \tau)^2 = 8.61 \left(\frac{\sigma_0 \tau}{1000} \right)^2$$

$$B = \frac{1}{16000} \left(\frac{2784^2}{7500} \right)$$

$$\lg 2784 = 3.4446$$

$$\operatorname{colg} 7500 = 4.1249$$

$$\overline{1.5695}$$

$$\overline{1.1390}$$

$$\operatorname{colg} 16000 \quad \overline{5.7959}$$

$$\overline{6.9349}$$

$$B = 8.61 \left(\frac{\sigma_0 \tau}{1000} \right)^2$$

1	2	3	4	5	6
a в м/сек.	$\frac{ax_0}{l_0}$ в м/сек.	σ_0 в м/сек.	$A = \sigma_0 \tau$ в метрах	$\left(\frac{\sigma_0 \tau}{1000} \right)^2$	$B = 8.61 \left(\frac{\sigma_0 \tau}{1000} \right)^2$
-100	-93.75	-93.8	-1876	3.52	30.3
-90	-84.3	-84.3	-1686	2.84	24.5
-80	-75.0	-75.0	-1500	2.25	19.4
-70	-65.6	-65.6	-1312	1.72	14.8
-60	-56.2	-56.2	-1124	1.26	10.8
-43.6	-40.9	-40.9	- 818	0.67	5.8

Таблица 3

Вычисление члена C

$$C = \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2 r_0^2}{l_0} \tau^2; \quad \text{при } y_0 = 0 \text{ будет}$$

$$\omega_0 r_0 = b; \quad C = \frac{1}{2} b \tau \frac{b \tau}{l_0} = \frac{1}{2} y_1 \frac{y_1}{l_0}$$

1	2	3	4
№	$\frac{1}{2} y_1$	$\frac{y_1}{l_0}$	C
1	0	0	0
2	436	0.109	+ 47
3	600	0.150	+ 90
4	714	0.179	+128
5	800	0.200	+160
6	900	0.225	+202

На основании табл. 2 и 3 составляем сводную табл. 4.

Сводная таблица

1	2	3	4	5	6	7	8	9
№	A	B	C	λ приближенное в метрах	λ точное в метрах	l_1 приближенное	l_1 точное	погрешность $\varepsilon = (8) - (7)$
1	-1876	+30	0	-1846	-1836	6154	6164	+10
2	-1686	+24	+ 47	-1615	-1597	6385	6403	+18
3	-1500	+19	+ 90	-1391	-1367	6609	6633	+24
4	-1312	+15	+128	-1169	-1144	6830	6856	+25
5	-1124	+11	+160	- 953	- 929	7047	7071	+24
6	- 818	+ 6	+202	- 610	- 623	7390	7377	-12

Этот пример показывает, что формула (V) для вычисления „упрежденной“ наклонной дальности в нашем случае достаточно точна; но если взять

$$\lambda = A = \sigma_0 \tau = (\text{ВИР}) \cdot (\text{время полета})$$

то получатся результаты, указанные в табл. 5.

Таблица 5

№	λ точное	A	l_1 точное	$l_0 + A$	Погрешность ε
1	-1836	-1876	6164	6124	+ 40
2	-1597	-1686	6403	6314	+ 89
3	-1367	-1500	6633	6500	+133
4	-1144	-1312	6856	6688	+168
5	- 929	-1124	7071	6876	+195
6	- 623	- 818	7377	7182	+195

Отсюда ясно видно, что формула

$$\lambda = A = (\text{ВИР}) \cdot (\text{время полета})$$

недостаточно точна и погрешность в наклонной дальности достигает

$$\varepsilon = 195 \text{ м}$$

По поводу взятого примера и примененного расчета необходимо заметить, что для упрощения расчета не было взято какое-либо действительное орудие и не были взяты таблицы стрельбы, а взято условно, что *время полета имеет постоянное значение $\tau = 20$ сек.*, т. е. как будто бы каждый выстрел производился с такою начальною скоростью, что это условное допущение выполнено.

Само собой разумеется, что при подробном исследовании надо взять реально существующее орудие для зенитной стрельбы и значения τ брать из таблиц стрельбы.

Пример же и фиктивный расчет был взят, чтобы рассмотреть, какую погрешность может давать упрощенная формула:

$$\text{упреждение по дальности} = (\text{ВИР}) \cdot (\text{время полета})$$

Упомянутое исследование имеет существенную важность для проектирования и построения приборов управления огнем зенитной артиллерии, ибо сколь бы точно приборы ни воспроизводили неточную формулу, дающую значительные погрешности, точных результатов от таких приборов ожидать нельзя.

§ 5. Перейдем теперь к рассмотрению поправки пеленга и учету бокового отклонения.

Мы имели формулы $\text{tg } \alpha_0 = \frac{y_0}{x_0}$;

$$\text{tg } \alpha = \frac{y}{x} = \frac{y_0 + bt}{x_0 + at}$$

следовательно, будет

$$\text{tg } (\alpha_1 - \alpha_0) = \frac{\frac{y_0 + b(t - t_0)}{x_0 + a(t - t_0)} - \frac{y_0}{x_0}}{1 + \frac{y_0 + b(t - t_0)}{x_0 + a(t - t_0)} \cdot \frac{y_0}{x_0}} = \frac{(bx_0 - ay_0)(t - t_0)}{(x_0^2 + y_0^2) + (ax_0 + by_0)(t - t_0)}$$

Но мы имели:

$$(ax_0 + by_0) = \sigma_0 l_0; \quad \frac{bx_0 - ay_0}{r_0^2} = \omega_0$$

Значит, будет вообще

$$\text{tg } (\alpha_1 - \alpha_0) = \omega_0 \tau \frac{1}{1 + \frac{l_0 \sigma_0}{r_0^2} \tau} \quad (19)$$

Приблизленно же будет

$$\text{tg } (\alpha_1 - \alpha_0) = \omega_0 \tau \left[1 - \frac{l_0 \sigma_0}{r_0^2} \tau + \left(\frac{l_0 \sigma_0 \tau}{r_0^2} \right)^2 \right] \quad (VI)$$

Для нашего примера $\alpha_0 = 0$, поэтому

$$\text{tg } (\alpha_1 - \alpha_0) = \text{tg } \alpha_1 = \frac{y_1}{x_1} \quad (20)$$

и мы имеем табл. 6.

Затем заметим, что при $y_0 = 0$ будет

$$\omega_0 = \frac{bx_0}{r_0^2} = b \frac{1}{7500}$$

следовательно,

$$\omega_0 \tau = \frac{1}{375} b$$

и мы получим табл. 7.

Таблица 6

№	x_1	y_1	$\text{tg } \alpha_1 = \frac{y_1}{x_1}$
1	5500	0	0.0000
2	5700	— 872	—0.1530
3	5900	—1200	—0.2035
4	6100	—1428	—0.2342
5	6300	—1600	—0.2540
6	6628	—1800	—0.2715

Вычисление $\text{tg } \alpha_1$ по приближенной формуле (VI).

[Примечание: $\text{tg } \alpha_1$ (точный) берется из предыдущей таблицы].

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
№	b	$\omega_0 \tau \equiv (I)$	$\sigma_0 \tau$	$\frac{I_0}{r_0} \sigma_0 \tau$	$(3) \times (5) \equiv (II)$	$(6) \times (5) \equiv (III)$	$(3) \times (6) \equiv (I) + (II)$	$(8) + (7) \equiv (I) + (II) + (III)$	$\left. \begin{matrix} \text{tg } \alpha_1 \\ \text{(точный)} \end{matrix} \right\} - (8)$	$\left. \begin{matrix} \text{tg } \alpha_1 \\ \text{(точный)} \end{matrix} \right\} - (9)$
1	0.00	0.0000	-1876	0.2670	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	-43.6	0.1172	-1686	0.2400	0.0281	-0.0067	-0.1453	-0.1520	-0.0077	-0.0010
3	-60.0	0.1600	-1500	0.2135	0.0342	-0.0071	-0.1942	-0.2013	-0.0093	-0.0022
4	-71.4	0.1905	-1312	0.1865	0.0355	-0.0066	-0.2260	-0.2326	-0.0082	-0.0016
5	-80.0	0.2132	-1124	0.1598	0.0341	-0.0055	-0.2473	-0.2528	-0.0067	-0.0012
6	-90.0	0.2400	- 818	0.1165	0.0280	-0.0033	-0.2680	-0.2713	-0.0035	-0.0002

Числа последнего столбца табл. 7 показывают, что формула (VI) обладает достаточною точностью, так как погрешность в $\text{tg } \alpha_1$, вычисляемого по этой формуле, отличается от его истинной величины не более как на 0.0022, т. е. на величину около $\frac{2}{1000}$ дистанции.

На основании чисел столбцов 3, 8 и 9 табл. 7, положив

$$\varepsilon_1 = [\text{tg } \alpha_1 - (I)], \quad \varepsilon_2 = [\text{tg } \alpha_1 - (I) + (II)], \quad \varepsilon_3 = [\text{tg } \alpha_1 - (I) + (II) + (III)]$$

по умножении этих чисел на r_1 получим величины линейных погрешностей в боковом отклонении, когда в формуле (VI) будет удерживаться или один первый ее член (I), или сумма первого и второго [(I) + (II)], или сумма всех трех членов.

Таким образом, обозначая величины этих погрешностей через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (табл. 8), получим:

$$\gamma_1 = \varepsilon_1 r_1; \quad \gamma_2 = \varepsilon_2 r_1; \quad \gamma_3 = \varepsilon_3 r_1 \tag{21}$$

Таблица 8

Вычисление величин $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	$\text{tg } \alpha_1$ (точное)	$(I) \equiv \omega_0 \tau$	$(I) + (II)$	$(I) + (II) + (III)$	ε_1	ε_2	ε_3	γ_1 в метрах	γ_2 в метрах	γ_3 в метрах
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0
2	-0.1530	-0.1172	-0.1453	-0.1520	-0.0358	-0.0077	-0.0010	-197	-42	- 5
3	-0.2035	-0.1600	-0.1942	-0.2013	-0.0435	-0.0093	-0.0022	-251	-54	-13
4	-0.2342	-0.1905	-0.2260	-0.2326	-0.0437	-0.0082	-0.0016	-253	-48	- 9
5	-0.2540	-0.2132	-0.2473	-0.2528	-0.0408	-0.0067	-0.0012	-236	-39	- 7
6	-0.2715	-0.2400	-0.2680	-0.2713	-0.0315	-0.0035	-0.0002	-182	-20	- 1

Значения величин τ_1 показывают, сколь велика погрешность, если пользоваться формулой:

боковое отклонение = (ВИП) · (время полета) · (укороченная дистанция)
 поэтому в формуле (VI) надо брать все три члена.

§ 6. Практически ВИП используется не для учета линейной величины бокового отклонения, а для придания орудию надлежащего угла упреждения в горизонтальном наведении; линейные же величины боковых отклонений приведены лишь для наглядного представления погрешностей, получаемых при удержании в формуле (VI) лишь первого ее члена.

Стоит только числа ε_1 умножить на 1000, и мы получим величину бокового отклонения в „тысячных дистанции“.

§ 7. Перейдем теперь к рассмотрению изменения угла местности. Мы имеем формулы

$$\sin \mu_1 = \frac{h_0}{l_1} \text{ и } \sin \mu_0 = \frac{h_0}{l_0} \quad (22)$$

Величина наклонной дальности l_1 вычислена в § 4, притом как по точной формуле, так и по приближенной; поэтому, вычисляя значения упреждения в угле местности

$$\nu = \mu_1 - \mu_0$$

как по точным значениям l_1 , так и по приближенным ($l_0 + \lambda$), получим затем погрешность δ в этом угле, а именно будет

$$\delta = \nu_{\text{точн.}} - \nu_{\text{прибл.}}$$

Этот расчет выполнен в табл. 9 и 10.

Таблица 9

Вычисление угла местности по точной формуле

$$\sin \mu_1 = \frac{h_0}{l_1}; \quad l_1 - \text{точные};$$

$$h_0 = 2784; \lg h_0 = 3.4447; \mu_0 = 20^\circ 22'$$

1	2	3	4	5	6
№	l_1	$\text{colg } l_1$	(3) + $\lg h_0 =$ $= \sin \mu_1$	μ_1	$\nu_{\text{точн.}} =$ $= \mu_1 - \mu_0$
1	6164	$\bar{4} 2101$	$\bar{1}.6548$	$26^\circ 51'$	$6^\circ 29'$
2	6403	$\bar{4}.1936$	$\bar{1}.6383$	25 46	5 24
3	6633	$\bar{4}.1783$	$\bar{1}.6230$	24 49	4 27
4	6856	$\bar{4}.1639$	$\bar{1}.6086$	23 58	3 36
5	7071	$\bar{4}.1505$	$\bar{1}.5952$	23 11	2 49
6	7377	$\bar{4}.1321$	$\bar{1}.5768$	22 10	1 48

Вычисление угла местности по приближенной формуле $\sin \mu = \frac{h_0}{l_0 + \lambda}$

1	2	3	4	5	6	7
№	$l_0 + \lambda$	$\text{colg}(2)$	$(3) + \lg h_0 =$ $= \sin \mu$	μ	$\nu_{\text{прибл.}} =$ $= \mu - \mu_0$	δ
1	6154	$\bar{4}.2108$	$\bar{1}.6555$	26°54'	6°32'	-0°03'
2	6385	$\bar{4}.1948$	$\bar{1}.6395$	25 51	5 29	-0 05
3	6609	$\bar{4}.1799$	$\bar{1}.6246$	24 55	4 33	-0 06
4	6830	$\bar{4}.1656$	$\bar{1}.6103$	24 04	3 42	-0 06
5	7057	$\bar{4}.1514$	$\bar{1}.5961$	23 14	2 52	-0 03
6	7390	$\bar{4}.1314$	$\bar{1}.5771$	22 11	1 49	-0 01

Для наглядности вычислим влияние погрешности в угле местности на высоту разрыва H .

Имеем:

$$H = l \sin \mu$$

следовательно, будет

$$\zeta = \frac{dH}{d\mu} d\mu = -l \cos \mu d\mu = -l \cos \mu \frac{\delta}{3438} \quad (23)$$

причем погрешность δ надо выражать в минутах дуги.

Наибольшая погрешность $\delta = -0^{\circ}06'$, средняя величина наклонной дальности $l = 6800$, средняя величина $\mu = 25^{\circ}$, так что $\cos \mu = 0.91$; таким образом, наибольшая погрешность в высоте разрыва будет:

$$\zeta_{\text{max}} = \frac{6800 \cdot 0.91 \cdot 6}{3438} \approx 1.82 \cdot 6 = 11 \text{ м}$$

Отсюда видно, что точность наших формул превышает точность пушки, ибо „рассеяние“ больше погрешностей формул.

§ 8. Исследование, произведенное в этой статье, является лишь предварительным и требует следующих дополнений:

- 1) систематической серии примеров, близких к действительной практике зенитной стрельбы, и согласования с таблицами ее;
- 2) приведения расчетных формул к такому виду, чтобы в них входили непосредственно наблюдаемые величины, подаваемые в автомат, т. е. l — наклонная дальность по дальномеру, α — азимут цели, β — зенитное расстояние.

Необходимо заметить, что величины α и β , которые получаются по теодолиту, весьма просто могут быть передаваемы куда угодно.

Хуже обстоит дело с дистанцией, в особенности при дальномере стереоскопическом, и определение дистанции заключает гораздо бóльшую относительную погрешность, нежели определение углов α и β .

Всё вышеизложенное относится к стрельбе по самолету с береговой батареи; при стрельбе с корабля добавляются погрешности, вносимые гиравертикалью и гироскопом, а также влиянием хода своего корабля.

КАЧКА КОРАБЛЯ ¹

Качка называется боковой, если корабль качается около своей продольной оси (с боку на бок), и килевой, если корабль качается около поперечной оси, т. е. погружаясь попеременно то носом, то кормой. Плавная, спокойная, небольших размахов качка на волнении есть одно из важнейших мореходных качеств корабля, поэтому выяснением тех условий, от которых оно зависит, занимались почти все ученые, писавшие о теории корабля, начиная с Иоанна и Даниила Бернулли и Эйлера, но лишь в 1861 г. В. Фруд дал теорию боковой качки на волнении, хотя и приближенную, но достаточно удовлетворительную. Оказывается, что о качке корабля на волнении можно судить по качаниям корабля на тихой воде. Если корабль на тихой воде вывести каким-нибудь образом из прямого положения, наклонив его на бок на небольшой угол, и предоставить самому себе, то вследствие остойчивости он будет стремиться вернуться в прямое положение и поэтому начнет вращаться около продольной оси, проходящей через его центр тяжести; придя в прямое положение, корабль не остановится в нем, а по инерции будет продолжать вращение и уклонится на другую сторону на некоторый угол, который вследствие сопротивления воды будет несколько меньше первого. Таким образом, корабль будет совершать ряд размахов убывающей величины подобно маятнику, качающемуся в сопротивляющейся среде. Пока величина размаха на сторону (амплитуда) не превышает 10—15°, то продолжительность их почти не зависит от величины размаха. Эта продолжительность одного размаха называется периодом естественных качаний корабля и зависит от его момента инерции относительно продольной оси, проходящей через центр тяжести корабля, и расстояния от центра тяжести до метацентра и выражается такою формулой:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{P(\rho - a)}} \quad (a)$$

где I — сказанный момент инерции корабля; P — его вес; $(\rho - a)$ — расстояние от центра тяжести корабля до метацентра; T — период двойного размаха. Самое же движение корабля выразится формулой

¹ Впервые опубликовано в Энциклопедическом словаре, изд. Брокгауза и Ефрона, т. XIV-А, вып. 28, 1895, стр. 812—814. (Ред.).

$$\varphi = C_1 \sin \frac{2\pi t}{T} + C_2 \cos \frac{2\pi t}{T}$$

где φ — угол наклона корабля в момент t ; C_1 и C_2 — некоторые постоянные, значения которых определяются по начальным условиям, например, если при $t=0$ корабль был наклонен на угол $\varphi = \varphi_0$ и затем был предоставлен самому себе без начальной скорости, то $C_1=0$, $C_2 = \varphi_0$ и движение корабля выразится формулой $\varphi = \varphi_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$. Эта формула, совершенно подобная формуле физического маятника, выведена в предположении, что вода не представляет сопротивления движению. Но сопротивление среды изменяет величину размахов, лишь в слабой степени влияя на их продолжительность, так что формула (а) остается справедливой и при сопротивлении. Закон уменьшения амплитуды размахов зависит от того, как выражается сопротивление среды в функции скорости. Так, если сопротивление пропорционально первой степени скорости, то амплитуды размахов убывают в геометрической прогрессии, когда число их возрастает в арифметической, если же сопротивление пропорционально второй степени скорости, то амплитуды убывают по такому закону:

$$\theta_{n+1} - \theta_n = -\alpha \theta_n^2 \quad (1)$$

где θ_n — амплитуда n -го размаха; θ_{n+1} — амплитуда $(n+1)$ -го; α — некоторая постоянная.

Наконец, если сопротивление среды выражается двумя членами, из которых один пропорционален первой, другой — второй степени скорости, то закон убывания амплитуд выражается формулой

$$\theta_{n+1} - \theta_n = -(a\theta_n + b\theta_n^2) \quad (2)$$

где a и b — некоторые постоянные.

По испытаниям, произведенным Фрудом и Бертэном, оказывается, что обе формулы достаточно точно согласуются с опытом.

Вопрос о качке корабля на волнении решен Фрудом при таких предположениях: 1) что размахи корабля изохронны, т. е. продолжительность их не зависит от амплитуды; 2) продольная ось корабля параллельна гребню волны; 3) что поперечные размеры корабля весьма малы относительно размеров волны; 4) что волны трохонидальные и волнение установившееся. При таких предположениях, не принимая во внимание сопротивления воды, Фруд показал, что закон качаний корабля может быть выражен формулой

$$\psi = (\varphi + \theta) = C_1 \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) + C_2 \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) + \frac{\tau^2 \theta}{\tau^2 - T^2} \sin \frac{2\pi t}{\tau} \quad (3)$$

где ψ — угол наклона корабля от отвесной линии; φ — угол наклона корабля относительно поверхности волны; θ — наклонение поверхности волны в точке, занимаемой в момент t кораблем, к горизонту;

T — период естественных качаний корабля; τ — период волны; Θ — наибольшее отклонение поверхности волны к горизонту. Заметим, что когда высота волны незначительна относительно ее длины, то

$$\theta = \Theta \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

C_1 и C_2 — некоторые постоянные, зависящие от начальных условий, т. е. от начального наклона корабля и его начальной угловой скорости.

Из этой формулы можно вывести следующие главнейшие заключения.

1) Если отношение $\frac{\tau}{T}$, т. е. $\frac{\text{период волны}}{\text{период корабля}}$ весьма мало, то последний член формулы можно отбросить по его малости и, значит, корабль будет качаться совершенно так же, как на тихой воде, при тех же начальных условиях; иными словами, волны, период которых мал относительно периода корабля, не влияют на него.

2) Если отношение $\frac{\tau}{T}$ весьма велико, то последний член формулы можно написать так:

$$\Theta \sin \frac{2\pi t}{\tau}, \text{ и тогда } \varphi = C_1 \sin \frac{2\pi t}{T} + C_2 \cos \frac{2\pi t}{T}$$

т. е. корабль будет качаться относительно волновой поверхности точно так же, как он при тех же начальных условиях качался на тихой воде относительно ее поверхности, при этом, если принять в расчет сопротивление воды, то эти размахи, зависящие от начальных условий, быстро пропадут и останется $\varphi = 0$ и $\psi = \theta$, т. е. корабль будет следовать за волной, оставаясь своими мачтами нормальным к ее поверхности.

Если $\tau = T$, т. е. период волны равен периоду корабля, то формула (3) не имеет места и вместо нее будет такая:

$$\varphi = C_1 \sin \frac{2\pi t}{T} + C_2 \sin \frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{\tau} \Theta t \cos \frac{2\pi t}{T}$$

которая показывает, что размахи неопределенно возрастают вместе с временем t , т. е. не могут оставаться малыми, как предполагалось при выводе формулы.

Фруд на опыте над моделями кораблей показал, что когда модели подвергались действию волн периода, равного их периоду качаний, то после нескольких волн они опрокидывались. Этого не будет с настоящими кораблями, благодаря сопротивлению воды его качаниям, но все-таки его качка будет весьма сильная.

Чтобы оценить влияние сопротивления воды на качания корабля, можно из опытов над уменьшением размахов качки на тихой воде определить величину сопротивления воды качаниям корабля; приняв, например, это сопротивление пропорциональным второй степени скорости и допуская, что этот коэффициент пропорциональности сохраняет свою

величину и при качке на волнении, можно составить уравнения его движения на волне; интегрирование их и дает требуемый закон качаний корабля на данной волне. Но Фруд показал, что можно с достаточным приближением принять, что уменьшение амплитуды размахов при качке на волнении будет выражаться тою же формулой и с теми же коэффициентами, как и на тихой воде. Тогда нетрудно рассчитать предельную величину размаха корабля для того случая, когда он встретит волны, период которых равен его собственному; это будет

$$\varphi_{\max} = \sqrt{\frac{\pi \Theta}{2 a}}$$

если предположить, что убывание амплитуд выражается формулой (1).

Для увеличения сопротивления воды качаниям корабля устраивают боковые кили. Кроме того, на некоторых английских судах („Inflexible“, „Edinburgh“) устраивали особые отделения, заполнявшиеся водою наполовину, — вода, переливаясь в них с борта на борт, погашает размахи качки. После начала постройки броненосного флота во Франции были образованы особые комиссии для выяснения мореходных качеств этого нового типа кораблей. Особенно замечательны результаты наблюдений, полученных в 1863 г. при испытании броненосных фрегатов, сравнительно с деревянными винтовыми кораблями. На них постоянно тщательно наблюдалась величина размахов боковой качки и результаты этих наблюдений были сведены в табл. 1.

Таблица 1

Название корабля		Относительная величина размахов качки по сравнению с размахами корабля „Napoléon“	Полупериод $\frac{T}{2}$ боковой качки в секундах
„Tourville“	деревянный корабль .	0.815	5.51
„Solferino“	} броненосные корабли	0.820	5.91
„Magenta“			
„Napoléon“	винтовой корабль . .	1.000	5.82
„Couronne“	броненосный фрегат .	1.168	4.94
„Invincible“	} броненосные фрегаты	1.780	4.83
„Normandie“			

Во время плавания 1870—1872 гг. броненосный корабль „Océan“ обращал на себя внимание почти полным отсутствием качки, размахи которой не превышали 3—4° на сторону; в это же время броненосные крейсера „Armide“, „Thetis“, „Reine Blanche“ качались с размахами от 30 до 40°. „Océan“ обладал весьма малою метацентрическою высотой ($\rho - a$) = 0.60 м, и полупериод его был 9.93 секунды, полупериод же сказанных фрегатов был 5.70, 5.18 и 6.02 сек. В 1879 г. был снова

произведен целый ряд систематических наблюдений над качкою кораблей, результаты чего и данные о кораблях сгруппированы в табл. 2.

Таблица 2

Название корабля	Водоизмещение в тоннах	Длина корабля в метрах	Метацентрическая высота ($\rho - a$) в метрах	Полупериод раз- махов $\frac{T}{2}$ в се- кундах	Средняя ампли- туда размахов в градусах
„Richelieu“	8790	98.70	0.63	8.95	1—2
„Trident“	8814	98.00	0.67	9.00	2—3
„Suffren“	7604	88.70	0.71	8.75	1—2
„Colbert“	8617	98.00	0.80	7.63	2—3
„Friedland“	8824	95.70	0.80	8.00	3—4
„Redoutable“	8858	96.70	0.94	7.34	3—4
„Revanche“, броненосный фрегат . . .	5900	81.60	1.35	6.00	16—17
„Duquesne“, крейсер I ранга	5824	99.64	1.67	5.18	21
„Tourville“, крейсер I ранга	5740	99.00	1.66	5.04	16—17
„Hirondelle“	1162	76.65	1.09	5.83	25—27
„Desaix“	1684	77.00	1.40	4.51	25—27

Из последних двух столбцов табл. 2 особенно ясно видно, какое значение имеет период качки корабля на величину ее размахов.

МОРЕХОДНАЯ АСТРОНОМИЯ¹

Мореходная астрономия есть тот отдел практической астрономии, в котором излагаются способы определения места корабля на море и поправки компаса с помощью астрономических наблюдений. Место корабля на море определяется его широтой и долготой, считаемой от какого-нибудь меридиана, за который у нас на флоте принят гринвичский.

В астрономии вообще существует два рода производства наблюдений для определения географического места, именно, наблюдение „прохождений“ светил через меридиан или первый вертикал и наблюдение „высот“. На море наблюдение прохождений невозможно, почему и могут быть применяемы только приемы, основанные на наблюдении высот до видимого горизонта, причем ввиду трудности наблюдать звезды пользуются главным образом Солнцем.

Способы определения широты на море были известны и применялись уже древними мореплавателями, пользовавшимися как Солнцем, так и Полярной звездой; для получения широты места достаточно знать меридиональную высоту Солнца и его склонение; первая получается из наблюдений, второе дается в астрономических таблицах. Для измерения высот на море, начиная с XV в., употреблялся градшток, пока в 1731 г. Гадлей не изобрел октант или секстант, который в течение XVIII в. и вошел во всеобщее употребление мореплавателей. Для определения долготы места надо найти разность местного времени и времени в Гринвиче в тот же момент.

Местное время может быть определено по известной широте и наблюдаемой высоте светила; наибольшую трудность представляло определение соответствующего времени в Гринвиче или вообще на первом меридиане и можно сказать, что до XVIII в. не было способов, применимых с удобством на море для определения долготы. В 1714 г. английский парламент, на основании доклада Ньютона, в котором указывались все трудности задачи об определении долготы на море, издал указ назначивший премию в 10 000 фунтов стерлингов автору способа определения,

¹ Впервые опубликовано в Энциклопедическом словаре Брокгауза и Ефрона, т. XIX-А, вып. 38, 1896, стр. 848—852. Символические обозначения приведены в соответствии с существующими стандартами. (Ред.).

долготы с точностью до 1° , в 15 000 фунтов, если эта точность будет доведена до $40'$ и в 20 000 фунтов, если точность определения долготы будет до $30'$; вместе с тем был учрежден и комитет, обязанный рассматривать делаемые ему по сему поводу предложения и имевший право требовать от адмиралтейства сумму до 2000 фунтов на испытания тех предложений, которые, по мнению комитета, того заслуживают.

Англичанин Джон Гаррисон, бывший сперва плотником в Ливерпуле, переселился в Лондон и занялся с необыкновенною настойчивостью и талантом усовершенствованием часовых механизмов. В 1726 г. он изобрел компенсацию маятника у стенных часов и уже в 1735 г. он испытал на небольшом судне первый из построенных им хронометров; эти испытания показали ему, что он находится на верном пути. Постепенно совершенствуя устройство своих механизмов, Гаррисон в 1760 г. представил свои часы в вышеупомянутый комитет, который и постановил подвергнуть их испытаниям на море, и 18 ноября 1761 г. на корабле „Deptfort“ сын Гаррисона, Вильям, был отправлен с хронометром на о. Ямайку. По приходе в Кингстон, после 75-дневного плавания, по этому хронометру была определена долгота Кингстона в 5 час. 2 мин. 46 сек., что отличалось лишь на 5 сек. от долготы этого пункта, определенной в 1743 г. по прохождению Меркурия через диск Солнца. Из Кингстона В. Гаррисон отправился в Англию на небольшом бриге и, несмотря на выдержанные во время перехода штормы, оказалось, по сличению в Портсмуте, что по прошествии 161 дня хронометр Гаррисона имел погрешность в 1 мин. 5 сек., что соответствует $16'$ ошибки в долготе. После нового шестинедельного испытания Гаррисону была выдана премия в 5000 фунтов. После этого от него потребовали, чтобы он ознакомил комиссию с механизмом своих часов и изготовил несколько таковых. Гаррисон-сын снова был отправлен с хронометрами в Америку и в 1764 г. было уплачено еще 5000 фунтов и, наконец, в 1765 г. были выданы 75-летнему Джону Гаррисону и остальные 10 000 фунтов обещанной и столь заслуженной им премии.

Тем же актом парламента было назначено 3000 фунтов знаменитому Эйлеру и такая же сумма наследникам Тобиаса Мейера за составление теории и более точных таблиц движения Луны, нежели были до того времени. Эта награда была выдана на том основании, что, благодаря удобству и точности наблюдения углов секстантом, начал входить в практику способ определения долготы по лунным расстояниям. Идея этого способа состоит в следующем: Луна собственным движением проходит в сутки около 13° , поэтому угловые расстояния ее до Солнца, звезд и планет меняются достаточно быстро для того, чтобы служить для определения времени, если только составлены точные таблицы ее движения, так как тогда стоит только сличить наблюденное в какой-нибудь момент угловое расстояние Луны, например до Солнца, с показанным в таблицах, чтобы найти и соответствующее ему время в Гринвиче.

Видимое расстояние Луны до Солнца или звезды изменяется приблизительно на $\frac{1^\circ}{2}$ в час, значит ошибка в этом расстоянии на 1' дает ошибку в долготе на 2 мин. во времени, т. е. на $\frac{1^\circ}{2}$, отсюда и видно, что пока не был изобретен секстант, давший возможность измерять углы на море с точностью до 20—30", не могло быть и речи об успешном применении способа лунных расстояний, так как градусок давал ошибки до $\frac{1^\circ}{4}$, что в широте и давало ошибку в 15', а при этом способе в долготе дало бы ошибку на $\frac{1}{2}$ часа или $7\frac{1^\circ}{2}$. Отсюда ясно, что при употреблении секстанта весь успех способа зависел от точности лунных таблиц, поэтому-то английский парламент и оценил труды Эйлера и Мейера.

Впервые на море этот способ был применен французским астрономом Лакайлем в 1751 г., во время его путешествия на мыс Доброй Надежды; чтобы сделать этот способ доступным и морякам, Лакайль предложил показывать в „*Connaissance des Temps*“, издававшихся тогда парижской обсерваторией, вычисленные расстояния Луны до Солнца и ярких, удобных для наблюдения звезд в моменты среднего парижского полдня и полночи; впоследствии стали давать эти расстояния через каждые 3 часа. Маскелайн, занявший после Брадлея место королевского астронома, в 1761 г., во время путешествия на о. св. Елены для наблюдения прохождения Венеры через диск Солнца, имел случай оценить значение и применять способ лунных расстояний. По его настоянию с 1767 г. начато издание знаменитого „*Nautical Almanac*“, издаваемого теперь за пять лет вперед, и в его же книге „*British Mariners Guide*“ подробно изложен способ лунных расстояний. В „*Almanac*“ или в „*Connaissance des Temps*“ показываются через каждые 3 часа гринвичского или парижского времени вычисленные истинные расстояния Луны до Солнца или звезд, т. е. каковыми эти угловые расстояния усматривались бы из центра Земли, но из наблюдений может быть получено только видимое расстояние, т. е. как оно усматривается с поверхности Земли, и, значит, измененное влиянием рефракции и параллакса.

Для того, чтобы по видимому расстоянию рассчитать истинное, предложено множество способов, из которых в астрономии Лаланда приведено 18, что не помешало ему предложить еще от себя 19-й. Лучшим примером того значения, которое придавалось способу определения долготы по лунным расстояниям, служат изданные в 1772 г., по постановлению английской комиссии долгот, таблицы поправок для приведения видимых лунных расстояний в истинные. Эти таблицы расположены по трем аргументам (видимое расстояние, высота Луны и высота звезды или Солнца), а так как расстояния даны от 10 до 120°, высоты Луны от 5 до 85° и высоты звезды от 5 до 75°, то в таблицах заключаются

более 500 000 вычисленных поправок, и эти таблицы представляют собою огромный том формата малое in folio в 1500 страниц мелкого шрифта, но постепенное удешевление и усовершенствование хронометров заставило в настоящее время лишь в редких случаях прибегать к лунным расстояниям, так что этот громадный труд теперь почти совсем забыт.

Для измерения высот светил на море пользуются теперь исключительно отражательными угломерными инструментами, т. е. секстантом и реже кругом Пистора, причем высоту приходится брать до видимого горизонта. Делалось много попыток, чтобы и на море пользоваться искусственными горизонтами, но из всех этих попыток только гироскоп-коллиматор Флерье, изобретенный в 1885 г., дает удовлетворительные результаты.

Из способов, предлагаемых в астрономии для определения места, применяются на море: для определения широты — 1) наблюдения полуденной высоты Солнца, 2) близмеридиональных высот Солнца и 3) высоты Полярной звезды. Для определения местного времени, а значит, и долготы по хронометру — наблюдения высот Солнца вблизи первого вертикала, лунными же расстояниями теперь если и пользуются на море, то для определения поправок хронометров. Для определения поправки ксмпаса пользуются наблюдениями высоты Солнца и азимута по компасу в тот же момент, или же замечают азимуты по компасу и момент по хронометру, а также азимуты при восходе и заходе Солнца. Наконец, в настоящее время в большом употреблении способ Сомнера для определения всех трех вышешоименованных элементов по наблюдениям или двух высот Солнца и соответствующих им моментов по хронометру часа через 2—3 одна после другой, или же одновременных высот двух светил. Для облегчения вычислений составлено множество различных таблиц, которые могут представиться излишними для специалиста астронома. Цель этих таблиц — сделать эти вычисления доступными для шкиперов даже и мелких коммерческих судов, которые могут быть превосходными моряками-практиками, совершенно не зная ни математики, ни теоретической астрономии, а умеют лишь применять к делу готовые правила и таблицы.

Для определения времени по высотам Солнца необходимо наблюдения производить, когда Солнце находится вблизи первого вертикала, для определения же широты — когда оно вблизи меридиана или на меридиане, поэтому на море в большем употреблении следующий прием определения места в полдень. Утром, часов около 8—9, наблюдают высоту Солнца и замечают соответствующий момент по хронометру. Тщательно следят за курсом¹ и скоростью хода корабля и затем в полдень наблюдают меридиональную высоту Солнца. Избрав из „Nautical

¹ Приблизительно до 1914 г. на флоте выражения „курс“ и „истинный курс“ употреблялись в смысле указания пути корабля. (Ред.).

„Almanac“ склонение Солнца во время наблюдений, по этому склонению и полуденной высоте находят полуденную широту корабля. Зная его курс и проплытое расстояние за время от утренних до полуденных наблюдений, вычисляют разность широт и разность долгот мест корабля в полдень и утром. По полуденной широте и разности широт находят широту при утренних наблюдениях, зная же склонение его по „Almanac“ и имея высоту из наблюдений вычисляют соответствующий часовой угол Солнца, а по нему и местное время, сличив которое с гринвичским, даваемым хронометром, находят долготу при утренних наблюдениях. Стоит только к этой долготе присовокупить разность долгот, соответствующую проплытому расстоянию, и получится долгота корабля в полдень, а значит — и место его.

Для вычисления широты служит следующая формула:

$$90^\circ - \varphi = H \pm \delta$$

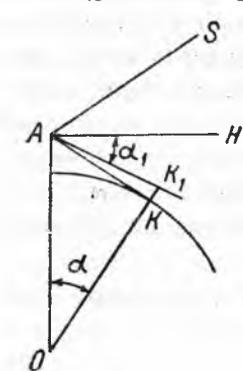
где φ есть широта в полдень, H — меридиональная высота и δ — склонение Солнца в момент наблюдений; знак минус берется, если склонение и высота разноименные и плюс, если одноименные, т. е., например, и склонение Солнца южное, и высота наблюдалась на южной части меридиана.

Для вычисления часового угла пользуемся формулой

$$\sin^2 \frac{1}{2} t = \frac{\cos \frac{1}{2} (\varphi + \Delta + h) \sin \frac{1}{2} (\varphi + \Delta - h)}{\cos \varphi \sin \Delta}$$

где t есть часовой угол Солнца; φ — широта при утренних наблюдениях; Δ — полярное расстояние Солнца в момент утренних наблюдений и h — высота его.

При этом, для облегчения вычислений, составлены таблицы $\lg \sin^2 \frac{1}{2} t$, т. е. такие таблицы, где по $\lg \sin^2 \frac{1}{2} t$ сразу находится угол t . Наконец, чтобы совсем избавить от вычисления по этой формуле, Жером де Лаланд издал таблицы часовых углов, где по φ , δ и h находится прямо t . Входящие в эти формулы высоты H и h суть истинные высоты центра



Солнца — наблюдения же дают высоту его края, обыкновенно нижнего. Чтобы по отсчету секстанта получить истинную высоту, надо присоединить к этому отсчету следующие поправки: 1) поправку индекса, 2) наклонение горизонта, 3) рефракцию, 4) параллакс, 5) полудиаметр. Из этих поправок лишь наклонение горизонта составляет особенность мореходной астрономии, остальные поправки необходимы и при береговых наблюдениях.

Поправка, называемая наклоном горизонта состоит в следующем. Пусть O (см. рисунок) есть

центр Земли; A — глаз наблюдателя, возвышенный на a от уровня моря; видимая высота светила есть угол SAH , наблюдаемая — угол SAK_1 , причем угол $\alpha_1 = HAK_1$ между горизонтальной плоскостью и лучом AK_1 , идущим касательно к видимой поверхности моря, и есть наклонение горизонта. Из треугольника AOK имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AK}{R} = \sqrt{\frac{(R+a) - R^2}{R}} = \sqrt{\frac{2a}{R} + \frac{a^2}{R^2}}$$

где $R = OK$ есть радиус Земли.

Так как возвышение глаза над уровнем моря весьма мало сравнительно с R , то дробь $\frac{a^2}{R^2}$ весьма мала относительно $\frac{2a}{R}$ и приближенно можно писать $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{2a}{R}}$. По этой формуле легко вычисляется угол α , но вследствие земной рефракции точка K кажется приподнятой в точку K_1 , причем угол $KA K_1$, в среднем, составляет 0.08 угла HAK или α . Значит, наклонение горизонта $\alpha_1 \approx 0.92\alpha$.

По вышеприведенным формулам и составлены таблицы, в которых по данному возвышению глаза находят соответствующее наклонение горизонта. Как видно, эту поправку надо вычитать из наблюдаемой высоты. В море не требуется, да и невозможно получать при измерении высоты точность большую, чем $1'$, поэтому для исправления высот Солнца составлены таблицы, заключающие в себе сумму всех вышепоименованных поправок, при средней величине в $16'$ солнечного диаметра.

Таблица поправок для приведения наблюдаемых высот нижнего края Солнца в истинные (поправку придавать)

Высота Солнца	Возвышение глаза в футах							
	10	12	14	16	18	20	22	24
10°	8'	7'	7'	7'	7'	6'	6'	6'
11	8	8	7	7	7	7	7	6
12	8	8	8	8	7	7	7	7
14	9	9	9	8	8	8	8	7
16	9	9	9	9	8	8	8	8
18	10	10	9	9	9	9	9	8
20	10	10	10	9	9	9	9	9
22	10	10	10	10	9	9	9	9
25	11	11	10	10	10	10	9	9
30	11	11	11	11	10	10	10	10
35	12	12	11	11	11	11	10	10

Не излагая остальных способов, которые по сущности своей ничем не отличаются от применяемых на берегу, укажем подробнее способ

Сомнера, который в настоящее время получил большое распространение как ввиду его общности, так и простоте вычислений, для облегчения которых теперь составлено много таблиц. Идея этого способа состоит в следующем: вообразим, для простоты рассуждений, что Земля имеет точную форму шара, тогда, если провести линию, соединяющую центр Земли с центром Солнца, эта прямая пересечет земную поверхность в некоторой точке M , для которой в этот момент Солнце находится в зените. Все точки земной поверхности, отстоящие от M , например, на 10° , будут иметь и зениты свои на 10° от зенита точки M , и, значит, для всех этих точек в рассматриваемый момент Солнце будет иметь зенитное расстояние, равное 10° , а, значит, высота его будет 80° . Таким образом, все точки земной поверхности, для которых в некоторый момент высота Солнца одна и та же, располагаются на земной поверхности по некоторому малому кругу, полюс которого находится в той точке M земной поверхности, для которой в этот момент Солнце находится в зените, и сферический радиус которого равен дополнению высоты Солнца. Очевидно, что если гринвичское время в этот момент известно, то сейчас же определяются и координаты точки M , а значит, и сказанный малый круг, называемый кругом равных высот.

Пусть в некотором месте, широту и долготу которого и надо определить, пронаблюдали высоту Солнца и соответствующий ей мсмент по хронометру, поправка которого относительно гринвичского времени известна; по этой высоте и моменту можно бы построить на глобусе и соответствующий ей круг. Если затем часа через 2—3 в том же месте снова будут произведены такие же наблюдения, то, построив по ним второй круг равных высот, и получим в пересечении этих двух кругов требуемое место, так как весьма легко отличить, которая из двух точек пересечения этих кругов есть место наблюдателя и которая нет, стоит только обратить внимание, в каких четвертях горизонта находилось Солнце в момент наблюдений. Вычерчивание целых кругов ни на карте, ни на глобусе не производится; надо только нанести на карту весьма малые их части вблизи места наблюдения, так как приближенные его координаты всегда известны. Эти малые части круга можно всегда заменить дугою локсодромии, которая на меркаторской карте изобразится прямой линией. Эти прямые называются сомнеровыми линиями.

Таким образом, искомое место на карте определится пересечением двух сомнеровых линий, из которых одна соответствует первой высоте Солнца, а другая второй. Для построения сомнеровой линии, соответствующей данной высоте Солнца и данному моменту по хронометру, можно поступать по одному из следующих приемов.

Первый прием. Пусть приближенная широта места, известная по счислению, есть φ_c , тогда нам надо построить только тот участок сомнеровой линии, который прилегает к точке с широтою φ_c . Поэтому берем две широты $\varphi_1 = \varphi_c - \alpha$ и $\varphi_2 = \varphi_c + \alpha$, где $\alpha = 10' - 20'$, и вычислим долготы

точек P_1 и P_2 сомнеровой линии, имеющих эти широты. Для этого вычисления имеются следующие данные. Для точки P_1 : широта ее φ_1 , наблюдаемая высота Солнца h_1 и склонение Солнца, выбранное из „Almanac“, δ (а значит, и полярное его расстояние $\Delta = 90^\circ \pm \delta$). По этим данным и по формуле

$$\sin^2 \frac{1}{2} t_1 = \frac{\cos \frac{1}{2} (\varphi_1 + \Delta + h_1) \sin \frac{1}{2} (\varphi_1 + \Delta - h_1)}{\cos \varphi_1 \sin \Delta}$$

вычисляем часовой угол Солнца t_1 , по нему местное время, сличив которое с гринвичским, даваемым хронометром, получим долготу λ_1 точки P_1 ; совершенно так же, по широте φ_2 , Δ и высоте h_1 вычислится долгота λ_2 точки P_2 . Нанеся на карту по координатам φ_1 , λ_1 и φ_2 , λ_2 точки P_1 и P_2 , проводят прямую P_1P_2 , которая и будет требуемой сомнеровой линией.

Второй прием состоит в том, что задают себе долготы λ_1 и λ_2 двух точек, близких к искомому месту, коего счислимая долгота λ_c известна, и вычисляют соответствующие им широты φ_1 и φ_2 , по которым и наносят точки P_1 и P_2 .

Третий прием состоит в том, что задавшись счислимую широту φ_c , вычисляют соответствующую ей долготу λ_1 точки P_1 сомнеровой линии и направление этой линии, которое, очевидно, перпендикулярно к азимуту Солнца в момент наблюдения, который вычисляется по формуле

$$\cos^2 \frac{1}{2} A_c = \frac{\cos \frac{1}{2} (\varphi_c + h_1 + \Delta) \cos \frac{1}{2} (\varphi_c + h_1 - \Delta)}{\cos \varphi_c \cos h_1}$$

Четвертый прием состоит в том, что, задавшись счислимой широтой φ_c и счислимой долготой λ_c , вычисляют высоту и азимут Солнца, соответствующие замеченному моменту по хронометру, по формулам:

$$\begin{aligned} \sin h_c &= \sin \varphi_c \sin \delta + \cos \varphi_c \cos \delta \cos t_m \\ \text{ctg } A_c &= \text{tg } \delta \cos \varphi_c \text{ cosec } t_m - \sin \varphi_c \text{ ctg } t_m \end{aligned}$$

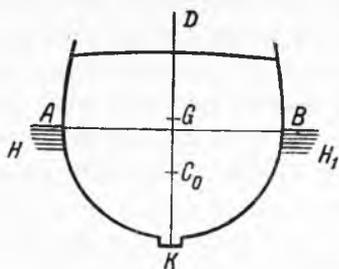
Так как направление сомнеровой линии перпендикулярно азимуту Солнца, то через точку P_0 и проводят участок этой линии, но эта линия не будет отвечать наблюдаемой высоте h , а соответствует высоте h_c , стоит только переместить ее параллельно самой себе на величину $h - h_c$ (т. е. на столько морских миль по масштабу карты, сколько в разности $h - h_c$ минут) в сторону к Солнцу, если $h - h_c$ положительная и в сторону обратную, если эта разность отрицательная — получится искомая сомнерова линия для высоты h и азимута A .

Этот последний прием предложен Марком Сент-Илерсом — он один из наиболее употребительных. Для облегчения вычислений по этим прие-

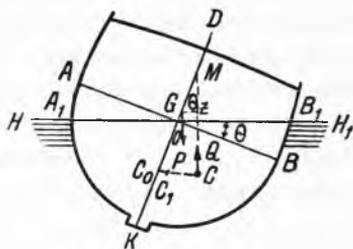
мам В. Томсон (ныне лорд Кельвин) составил чрезвычайно остроумно расположенные таблицы, в которых по данной широте, склонению и высоте находятся сразу оба угла t и A . Совершенно так же по вторым наблюдениям построится вторая сомнерова линия B_1B_2 , пересечение которой с первой и доставит искомое место корабля на карте. Вместе с тем, если был замечен азимут Солнца по компасу, то, сличив его с направлением перпендикуляра к сомнеровой линии, получим поправку компаса. Если за время между первыми и вторыми наблюдениями корабль не оставался на месте, а прошел по направлению k путь l , то, построив линии P_1P_2 и B_1B_2 , стоит только вместить между ними длину l так, чтобы один ее конец лежал на P_1P_2 , другой на B_1B_2 и она была бы параллельна данному направлению k : точка пересечения этой линии с B_1B_2 и будет место корабля при вторых наблюдениях. Заметим еще, что в мореходной астрономии излагаются также способы определения поправки хронометра, правила ухода за хронометрами и пр., но эти отделы ее ничем не отличаются от соответствующих отделов общей практической астрономии.

ОСТОЙЧИВОСТЬ¹

Остойчивость — качество корабля находиться в равновесии в прямом положении, и, будучи из него выведенным действием какой-либо силы, снова к нему возвращаться по прекращении ее действия. Это качество одно из важнейших для безопасности плавания; было много примеров гибели судов от недостаточной их остойчивости. Остойчивость корабля зависит как от его обводов, т. е. формы его наружной поверхности, так и от распределения грузов; пусть ABK (фиг. 1) представляет сечение корабля вертикально-поперечной плоскостью, проходящей через центр тяжести его G , DK — пересечение диаметральной плоскости с плоскостью чертежа. При прямом положении корабля диаметральной



Фиг. 1.



Фиг. 2.

плоскость его перпендикулярна к горизонту воды $H:H_1$ и тогда центр давления C_0 , совпадающий с центром тяжести вытесненного объема воды и называемый в теории корабля центром величины, располагается на одной отвесной линии с точкою G , вес же вытесненной воды равен весу корабля. Пусть (фиг. 2) A_1B_1K представляет тот же корабль наклоненным около продольной оси на угол θ . От этого форма подводной части корабля изменилась, ибо часть A_1OA вышла из воды, часть же BOB_1 вошла в воду, вследствие этого центр величины из положения C_0 переместится в другое положение C и уже не будет находиться на одной отвесной линии с точкою G . В точке G приложен вес корабля P , в точке C равнодействующая давления воды Q ; обе эти силы направ-

¹ Впервые опубликовано в Энциклопедическом словаре, изд. Брокгауза и Ефрона, т. XXII, вып. 43, 1897, стр. 342—343. (Ред.).

лены вертикально, первая вниз, вторая вверх, и если при наклонении водоизмещение не изменилось, то $Q=P$ и тогда эти силы составляют пару, момент которой равен $P \cdot Gz$ и которая, в зависимости от относительного положения точек G и C , стремится или вернуть корабль к прямому положению, если центр величины будет в C , или еще более наклонить корабль, если центр величины переместился не в C , а в C_1 . В первом случае корабль остойчив, во втором нестойчив. При наклонении на данный угол перемещение центра величины зависит только от обводов корабля, положение же центра тяжести его G от распределения на корабле грузов — значит остойчивость зависит от обеих этих причин. Вместо того, чтобы рассматривать относительное положение точек G и C , из которых первая постоянна для данной нагрузки корабля, положение же второй изменяется с наклоном, продолжают направление силы Q до пересечения в точке M с диаметральной плоскостью, тогда видно, что корабль остойчив, если точка M лежит выше центра тяжести корабля G , и нестойчив в противном случае. Оказывается, что для малых углов наклона (для высокобортных судов до 10° , для низкобортных — пока палуба их не начнет уходить в воду) положение точки M постоянное, независимое от наклона корабля. Эта точка называется *метацентром* и условие остойчивости выражается тем, чтобы центр тяжести корабля лежал ниже метацентра. Положение метацентра зависит только от обводов корабля и вычисляется, пользуясь теоретическим чертежом корабля, для всякого его углубления, для чего наносят соответствующую грузовую ватерлинию и вычисляют при ней водоизмещение корабля V (по объему) и положение центра величины C_0 — метацентр находится над ним на той же отвесной линии в расстоянии

$$C_0M = \rho = \frac{I}{V} = \frac{\int_0^L y^3 dx}{V}$$

Входящая в эту формулу величина

$$I = \frac{2}{3} \int_0^L y^3 dx$$

представляет собою момент инерции площади грузовой ватерлинии относительно продольной оси и вычисляется, обыкновенно, по одной из приближенных формул квадратур, трапеций или Симпсона, т. е.

$$I = \frac{2}{3} h \left(\frac{1}{2} y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + \dots + y_{n-1}^3 + \frac{1}{2} y_n^3 \right)$$

или же

$$I = \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{6} \cdot (y_1^3 + 4y_2^3 + 2y_3^3 + 4y_4^3 + \dots + 4y_{2k}^3 + y_{2k+1}^3)$$

где h есть промежуток между ординатами, а y_1, y_2, \dots — ординаты, т. е. полуширины грузовой ватерлинии при соответствующих шпангоутах, число которых при пользовании второй из этих формул должно быть нечетное.

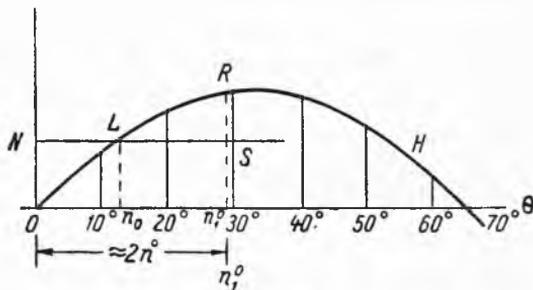
Мерою остойчивости корабля служит момент $P \cdot Gz$ восстанавливающей пары, но плечо ее $Gz = GM \sin \theta$. Полагая $C_0G = a$, видим, что $GM = \rho - a$, так что

$$P \cdot Gz = P(\rho - a) \sin \theta = P \left(\frac{l}{V} - a \right) \sin \theta$$

Величина a возвышения центра тяжести корабля над его центром величины вычисляется при составлении проекта корабля и, кроме того, непременно определяется из опыта, сущность которого состоит в том, что поперек корабля перемещают груз p , составляющий около $\frac{1}{100}$ водоизмещения корабля P с одного борта к другому, и замечают по длинным отвесам происходящие от этого наклоны корабля θ , тогда величина

$$GM = \rho - a = \frac{pl}{P} \operatorname{ctg} \theta,$$

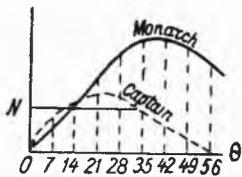
где l есть перемещение груза p . Эта величина для больших паровых судов составляет около $2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}$ футов. При больших углах наклона величина ρ , входящая в формулу восстанавливающей пары, не может считаться постоянной и эта формула не имеет места. Поэтому, чтобы судить об остойчивости корабля и для углов, больших указанных выше пределов, проводят ряд ватерлиний, отсекающих данный подводный объем V и наклоненных к грузовой ватерлинии под углами $10, 20, 30^\circ$ и т. д., и вычисляют соответствующее каждой из них положение центра величины, а по нему и плечи Gz восстанавливающей пары. Результаты такого вычисления представляют графически, откладывая по одной оси углы наклона θ , а по другой — соответствующие плечи Gz или моменты $P \cdot Gz$. Полученная кривая называется диаграммой статической остойчивости или диаграммой Рида, предложившего ее. Имея такую диаграмму, можно тотчас же найти угол наклона корабля под действием данной кренящей пары, для чего, отложив момент этой пары ON по оси моментов (фиг. 3), проводят прямую NL параллельно оси θ до пересечения с кривою в точке L ; соответствующий угол n° и будет искомым, в котором корабль под действием данной пары будет нахо-



Фиг. 3.

в котором корабль под действием данной пары будет нахо-

даться в равновесии. Если кренящая пара не будет постепенно и медленно возрастать от 0 до величины ON , а будет сразу приложена полностью, как, например, при действии порыва ветра, то корабль перейдет за положение равновесия и наибольший угол наклонения его будет не n° , а иной, который определится из того условия, чтобы при наклонении до него работа кренящей пары равнялась работе пары восстанавливающей. Действительно, пока корабль под действием внезапно приложенной пары с моментом ON наклоняется до угла n° , кренящая пара больше восстанавливающей и, значит, корабль, повинувшись разности их, будет вращаться ускоренно и, дойдя до угла n° , будет иметь такую угловую скорость, при которой живая сила вращательного движения его равна разности работ кренящей и восстанавливающей пар (пренебрегая сопротивлением воды). На диаграмме эта работа изображается площадью ONL . Вследствие приобретенной скорости корабль перейдет за положение равновесия и при этом его дальнейшем наклонении восстанавливающая пара больше кренящей, значит, движение будет замедленное и продолжится до тех пор, пока угловая скорость не станет равна 0, т. е. пока живая сила, которую обладал корабль при наклонении на n° , не сравняется с разностью работ восстанавливающей и кренящей пар, т. е. пока площадь LRS не станет равной ONL . Таким образом, корабль наклонится на угол n_1° , который обыкновенно больше чем в два раза превосходит такой угол n° , при котором корабль этою парюю удерживается в равновесии, ибо диаграмма обращена выпуклостью вверх. Работа восстанавливающей пары при наклонении корабля служит мерою так называемой динамической его остойчивости, на которую стали обращать внимание после гибели в 1870 г. английского броненосца „Captain“; при первом же пробном плавании „Captain“ был опрокинут налетевшим шквалом, не принеся никакого вреда другим кораблям эскадры, что и было за полтора года перед тем предсказано Ридом в его докладе английскому обществу корабельных инженеров Institution of Naval Architects. Из 550 человек команды „Captain“ спаслись только 17. На фиг. 4 представлены диаграммы остойчивости „Captain“ и „Monarch“, одинакового с ним по размерам и водоизмещению, но имевшего надводный борт высотой в 14 футов, тогда как у „Captain“ было всего $5\frac{1}{2}$ футов; как



Фиг. 4.

видно, шквал, который накренил бы „Monarch“ до 25° , достаточен, чтобы опрокинуть „Captain“, между тем для малых углов „Captain“ был остойчивее „Monarch“.

П. Д. КУЗЬМИНСКИЙ¹

I

7 апреля скончался от разрыва аорты Павел Дмитриевич Кузьминский, бывший 30 лет членом нашего общества. Деятельность Павла Дмитриевича протекала главным образом в двух отделах: IV — военноморском и VII — воздухоплавательном. В обоих отделах он участвовал с самого их основания, причем был одним из инициаторов открытия VII отдела, которого он был первым секретарем, при председателе М. А. Рыкачеве.

Работы Павла Дмитриевича сосредоточиваются над исследованиями сопротивления воды и воздуха движущимся в них телам и над исследованиями винта и подобных ему движителей.

Двадцать лет тому назад П. Д. был прикомандирован в распоряжение Д. И. Менделеева для производства опытов над сопротивлением воды. Тогда же он увидал, что недостаточно для целей практики одних лабораторных опытов, что нужны испытания в большом виде с самими судами, на ходкость которых влияет не только их форма, но и полезное действие их движителей и машин. Тогда же у него зародилась идея его динамометра, который впоследствии был выполнен на Балтийском заводе, в виде опыта для измерения работы до 8 сил. Точность, практичность, остроумие устройства замечательны и если бы не свойственная нам косность и постоянное отсутствие средств на испытания и исследования не шаблонные, то применение динамометра Кузьминского параллельно с испытаниями моделей уяснило бы многое в вопросах механики корабля. Еще 15 лет назад Павел Дмитриевич делал у нас в обществе доклад „О тетраэдровидных судах“, предлагая целый класс поверхностей, могущих служить для образования судов. Им была исполнена одна из предельных поверхностей этого класса в виде тетраэдровидной лодки, и если эта форма оказалась не вполне удачной, то это не значит, чтобы и все остальные бесчисленные формы, заключенные в предлагаемом им классе поверхностей, были неприменимы. Так, в прошлом году в „Marine Rundschau“ для быстроходных океанских

¹ Впервые опубликовано в „Записках Русского Технического общества“, 1900, № 5, Деятельность общества, стр. 136—138. (Ред.).

пароходов предложено, независимо от Павла Дмитриевича, тетраэдровидное образование, подкрепляемое авторитетом профессора Рина.

Много работая над винтами, Павел Дмитриевич и здесь для образования формы лопастей предложил особый класс поверхностей, названных им „руссоидами“. Им за три дня до кончины передана для исследования в Опытном судостроительном бассейне модель такой поверхности, и я надеюсь поделиться впоследствии с Техническим обществом результатами этих исследований. Вперед можно сказать, что винты его формы не будут хуже обыкновенных.

Не перечисляя других работ Павла Дмитриевича, упомяну лишь о двух последних — газород и турбина, теперь исполняемые на высочайше дарованные средства на Патронном заводе. И здесь, как и везде, у Павла Дмитриевича новая идея воспользоваться для работы в машине не только парами но и всеми продуктами горения, не выпуская их с температурой в 300° в небо через дымовую трубу, а заставляя работать в турбине и затем идти в холодильник. Самая турбина, опять-таки, новой конструкции — может работать на передний и задний ход.

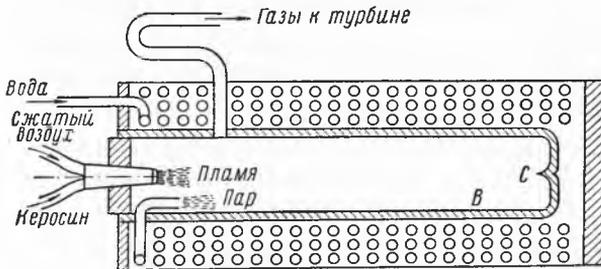
Газород, турбина и руссоиды главным образом разрабатывались Павлом Дмитриевичем для целей воздухоплавания.

II

Сообщаю, что помню о „газопаророде“ инженер-механика Павла Дмитриевича Кузьминского.

П. Д. Кузьминский [скончался в мае 1900 г.] года за три до своей смерти занялся разработкою и осуществлением в малом виде проекта газопаровой турбины, на что по ходатайству адмирала Н. Н. Лимена ему были отпущены небольшие средства, кажется около 100 рублей.

Сущность его проекта состояла в следующем: в „газопаророде“ происходило горение керосина в замкнутой камере, куда поступал и образующийся пар, который вместе с продуктами горения шел в турбину.



Фиг. 1.

„Газопарород“, как он его называл, он устроил по такой схеме (фиг. 1): Стальной наружный кожух заключал прочную и огнеупорную камеру В. Пространство между камерой и кожухом заполнено змеевиком

¹ Впервые опубликовано в кн.: Ю. Ломоносов и Э. Швeтер. Проекты тепловозов. Берлин, 1926, Приложения стр. 20. (Ред.).

из тонкой (около 5 мм наружного и 3 мм внутреннего диаметра) трубки красной меди. Через эту трубку сильной помпой под давлением свыше 50 атм. прогонялась вода, которая на своем пути в трубке перегревалась. Трубка выводилась в камеру, по выходе в которую перегретая вода и обращалась в пар.

В эту же камеру через герметическую крышку форсункой подавалось горючее, насколько помню — керосин и воздух под давлением свыше 10 атм., и горение происходило в замкнутом пространстве камеры, давление в которой держалось около 10 атм.

Как видно, в камере происходило как горение, так и парообразование, и смесь пара и продуктов горения и давала „рабочие газы“.

Этот газ из камеры шел прямо в турбину, которую Кузьминский также спроектировал и построил оригинально.

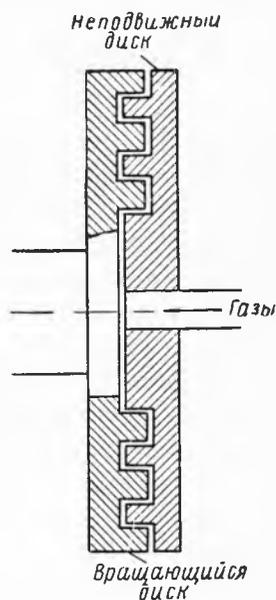
Турбина состояла из кожуха, в котором находились два диска с лопатками, выступающими, или лучше сказать, нарезанными по концентрическим кольцам на плоском основании каждого диска, так сказать елочкой в разные стороны.

Газы подводились к центру через неподвижный диск и растекаясь к окружности действовали на лопатки подвижного диска (лопатки неподвижного служили направляющими) и сообщали ему вращение. Турбина могла давать и задний ход, для этого обращали направление тока газов, заставляя рабочие газы поступать у окружности и уходить у центра.

Газопарород и турбина предназначались для небольшого катера; размеры газопаророда были примерно: наружный кожух — длина около 1 м, диаметр около 30 см; внутренняя камера — диаметр около 20 см, длина около 80 см; он был закончен постройкой и подвергался испытаниям, причем продукты отводились или через детандер в атмосферу, или в бак с водой.

Кузьминский имел большие затруднения с регулированием температуры горения и вообще температуры внутри камеры, постоянно что-нибудь плавилось или прогорало, хотя делалось из самых огнеупорных материалов, диск С, в который пламя ударяло, чуть ли даже не из вольфрама, по крайней мере, Кузьминский показывал мне его как нечто необыкновенное.

Турбина была почти закончена, но ее испытать не пришлось, так как сперва умер мастер инструментального отдела Патронного завода Шмидт, который ее исполнял своими руками, а вскоре затем и сам Кузьминский.



Фиг. 2.

Одно время газопарород и турбина находились на Патронном заводе, на котором в то время (1900 г.) был начальником товарищ Кузьминского по корпусу генерал Гахович, затем все было передано брату Павла Дмитриевича — Георгию Дмитриевичу Кузьминскому, и что случилось с газопарородом и турбиною, я не знаю.

15 марта 1923 г.

ЗАПИСКА ОБ УЧЕНЫХ ТРУДАХ В. Г. ШУХОВА¹

Владимир Григорьевич Шухов родился в 1852 г. в г. Грайвороне Курской губернии и провел свое детство в деревне. Среднее образование он получил в б. 5-й С.-Петербургской гимназии, по окончании которой перешел в Московское высшее техническое училище. Здесь он учился у ряда выдающихся профессоров и выказал блестящие способности, особенно к математике и механике. Окончив в 1876 г. курс с отличием, молодой инженер-механик Шухов был командирован в Америку для усовершенствования. Там он провел около года, изучая американскую технику. Деятельность профессора не была по характеру Шухову. По возвращении из-за границы он отказывается от ученой карьеры и идет на практическую работу инженера. Он поступает начальником чертежного бюро Варшавской железной дороги. Во время своего пребывания в Петербурге Шухов познакомился с академиком П. Л. Чебышевым, который обратил внимание на выдающиеся математические способности молодого инженера. П. Л. Чебышев сделал новую попытку склонить Шухова к работам в области чистой математики и аналитической механики, но молодой инженер уже почувствовал свое истинное призвание и отклонил лестное предложение П. Л. Чебышева.

В 1878 г. Шухов занимает должность главного инженера в технической конторе А. В. Бари и К⁰, тогда очень скромном предприятии. В 1880 г. контора эта была переведена в Москву под названием „Строительная контора инж. А. В. Бари“, где и получила свою всероссийскую известность. С тех пор вся деятельность Шухова протекала в Москве в стенах этого технического предприятия.

По состоянию своего здоровья Шухов должен был отправиться на юг и он поселился в г. Баку, в котором тогда начала развиваться нефтяная промышленность. Здесь Шухов скоро присмотрелся к нефтяному делу, с которым он даже не был раньше знаком, и тотчас же

¹ Впервые опубликовано в „Известиях Академии Наук СССР“, VII серия, Отделение физико-математических наук, 1928, № 8—10, стр. 669—674. Записка написана академиками А. Н. Крыловым и П. П. Лазаревым в связи с представлением В. Г. Шухова в члены-корреспонденты Академии Наук СССР по разряду технических наук. В. Г. Шухов был утвержден в этом звании 14 января 1928 г. (Ред.).

приступил к практическому разрешению важнейших технических задач в отношении хранения, транспорта, перегонки и сжигания нефти.

Для хранения нефти и нефтяных продуктов Шухов предложил и впервые построил в России железные клепанные резервуары. Теперь это кажется делом весьма простым (одна фирма А. В. Бари построила более 20 000 резервуаров). Тогда сооружение железных нефтехранилищ было задачей новой, неразработанной и потому трудной. В то время такой простой вопрос, как устройство основания для резервуара, представлялся очень сложным (думали, что необходимо особое дорогостоящее фундаментное устройство). Не менее трудным делом было изготовление шаблонов для точной пробивки заклепочных дыр в железных листах резервуаров. Все эти затруднения были просто разрешены Шуховым и он научил русских техников, как надо производить работы этого рода.

Для транспорта нефти на суше Шухов предложил перекачивать ее по трубопроводам, подобно воде, и в 1879 г. построил первый в России нефтепровод в г. Баку, для фирмы Лианозова. При этом он заметил, что перекачка мазута сопряжена с затруднениями и предложил для ее облегчения предварительно подогревать мазут. Таким образом, Шухов является первым изобретателем способа перекачки нефтепродуктов с подогревом, что лишь впоследствии было применено в Америке.

Для транспорта нефтепродуктов по воде Шухов предложил нефтеналивные суда, в частности нефтеналивные баржи, и явился первым строителем их в России. Фирма А. В. Бари имела судостроительный завод в г. Саратове, где по чертежам Шухова построены были огромные железные баржи (до 150 м длиной). Следует заметить, что такие громадные сооружения из железа были новостью в России, и на чествовании Шухова 26 мая с. г., устроенном Нефтяной подсекцией Всесоюзного Авиационного института, один из ораторов вспоминал, как казалось в то время почти невозможным правильно собрать громадное сооружение из отдельных мелких частей: тогда ведь еще не имели понятия о точной разбивке шаблонов, и Шухов научил этому русских техников, он научил их, как по чертежам, изготовленным в Москве, с чудесной быстротой и без какой бы то ни было неполадки можно собирать громадные клепанные из железных листов конструкции. С тех пор были построены многие тысячи таких железных наливных барж. Шухов не ограничивается этим, он разрабатывает и способы буксирования морских барж.

Вопросы перегонки нефти немало занимали Шухова во время его пребывания в г. Баку, и совместно с Инчиком он создает свою собственную систему непрерывной дробной перегонки нефти, патент на которую был заявлен в 1887 г. и получен в 1888 г. за № 13200. Аппарат был осуществлен в 1899 г. в г. Баку и с разными переделками работает до сих пор. В этом аппарате перегоняемая нефть вводилась навстречу парам дистиллата. Второй патент на дефлегматоры для кубов

периодической и непрерывной перегонки заявлен в 1888 г. и получен в 1890 г. за № 9783. Третий патент на прибор для дробной перегонки и разложения нефти под значительным давлением заявлен в 1890 г. и получен в 1891 г. за № 12926.

По самому существу идей, положенных в основу этих установок, Шухов является первым и истинным изобретателем так называемого крэкинг-процесса, опередившим на 20 лет Америку, где лишь около 1912 г. появился патент Бортона, по существу не отличающийся от патента Шухова. Однако по тогдашним экономическим условиям нужды в больших количествах бензина, а значит, и в применении крэкинга не было: наоборот, бензин являлся чуть ли не вредным побочным продуктом перегонки нефти, его некуда было девать, и потому изобретение Шухова распространения не получило.

Для удобного сжигания нефти и нефтяных остатков в топках Шухов пришел к счастливой мысли превращать нефть в мельчайшую пыль, используя для этого живую силу стремительно вытекающего из узкого отверстия пара. В 1880 г. он взял патент на форсунку для сжигания нефти — первый аппарат этого рода и поныне являющийся одним из лучших.

Но Шухов не ограничился одной конструктивной, практической стороной в деле осуществления своих изобретений, и на основе анализа и механики приступает к решению стоящих перед ним технических задач из области нефтяного дела. В 1884 г. в журнале Министерства путей сообщения¹ появляется его работа под заглавием „Механические сооружения нефтяной промышленности“. Шухов задался целью строить резервуары не только прочно, но и дешево; путем простого, но остроумного анализа, он определяет размеры, которые должен иметь железный резервуар при условии наименьшей затраты материала на его сооружение. Формулы, данные автором, стали классическими и вошли в учебники и в справочники.

В 1895 г. появляется вторым изданием (первое 1884 г.) большая работа Шухова „Трубопроводы и их применение в нефтяной промышленности“ (издание Московского политехнического общества, состоявшего при Московском высшем техническом училище). В ней автор со свойственным ему остроумием и большой практической находчивостью дает теорию рационального пользования трубопроводами, раскрывая при этом в простой и общедоступной форме все условия наивыгоднейшей эксплуатации трубопроводов при самых разнообразных практических требованиях.

В своей „Заметке о нефтепроводах“, напечатанной в № 2 журнала „Нефтяное и сланцевое хозяйство“ за 1924 г., Шухов возвращается вновь к этому вопросу. Он всё еще стоит на своей прежней точке зрения, высказанной около 40 лет тому назад, относительно способа

¹ Журнал „Инженер“, 1883, т. III, кн. 13. (Ред.).

расчета и выбора наивыгоднейших размеров труб нефтепровода. В конце статьи Шухов показывает, что в довоенное время перевозка нефти по Волге обходилась дешевле себестоимости перекачки ее по трубопроводу. Этим он произносит свой приговор проекту устройства прямого нефтепровода из наших основных районов нефтедобычи прямо в центр страны.

Вопросу об откачке нефти и воды из скважин Шухов тоже посвятил не мало внимания. Известны преимущества так называемых прямодействующих насосов (изобретенных в Америке). Шухов в своей работе „Насосы прямого действия“¹ (издание Московского политехнического общества, М., 1897) дает исследование вопроса об определении наивыгоднейшего соотношения между размерами паровой части насосов-компаунд и о расчете таких насосов при работе без компенсатора и с компенсатором. Теория его вошла в справочники и в учебники. Для откачки нефти и воды из глубоких скважин Шухов в 1890 г. разработал своеобразную усовершенствованную конструкцию инерционного поршневого насоса с одним клапаном и гибким шатуном. Применение этого [насоса] позволяет весьма значительно (в $1\frac{1}{2}$ —3 раза) увеличить рабочую скорость поршня. Вместе с тем Шухов дал теорию работы этих насосов (см. труд проф. П. К. Худякова „Построение насосов“, 230 стр., М., 1899). Насосы эти были неоднократно осуществлены на практике. В 1886 г. Шухов построил впервые в России так называемые шнуровые насосы, основанные на увлечении, благодаря прилипанию и внутреннему трению, жидкости, быстро бегущей бесконечной лентой. Один насос этого рода (без направляющего рукава) был построен Шуховым для откачки воды в Подольской губернии, где проработал несколько лет. Другой насос (с направляющим рукавом) производил весьма успешно откачку нефти. Однако оба упомянутые типа насосов Шухова не получили распространения в г. Баку, так как в те времена фонтанов было много, нефть была дешева, и нефтепромышленники могли довольствоваться примитивным способом тартания желонкой (нефть как топливо не экономили).

В связи с этой группой работ Шухова по нефтяному делу следует указать на выработанные и построенные им различные конструкции подогревателей, перегонных кубов, водоочистителей и в особенности так называемых водотрубных котлов Шухова. Котлы эти чрезвычайно простой и остроумной конструкции, весьма удобные для перевозки вследствие простоты сборки, чистки и ремонта, получили громадное распространение в России.

Весьма существенным обстоятельством является легкая возможность приспособления системы котлов Шухова для выработки современного типа котла высокого давления (доходящего до 100 атм.), позволяющего

¹ Насосы прямого действия. Теоретические и практические данные для расчета их. (Ред.).

паровой турбине конкурировать в своей экономичности с двигателями внутреннего сгорания.

В деле построения своих котлов Шухов остался верен самому себе: в основу проектирования их он положил требования чистой науки.

Шухов не ограничился работами только в области нефтяного дела, и нет почти области строительного дела и машиностроения, которой не уделил бы своего внимания Шухов и в которую он не внес бы тотчас же усовершенствований или новых изобретений. Он везде ищет наиболее выгоднейших соотношений между элементами конструкции и наиболее выгоднейших условий постройки и эксплуатации. Он всегда стремится удовлетворить условиям прочности, и потому вопросам теории сопротивления материалов, этой основе инженерной науки, посвящено было столько внимания Шуховым. В архивах фирмы А. В. Бари (ныне Государственная Строительная контора) находится много интереснейших исследований по вопросам прочности железных конструкций при условии их наименьшего веса. Ввиду сложности встречавшихся ему задач из области теории сопротивления материалов и необходимости быстрого их решения Шухов естественно пришел к выработке своеобразного геометрического метода исследования, быстро ведущего к окончательному результату. Отражение этих исследований можно найти в курсе „Сопротивление материалов“ проф. П. К. Худякова,¹ для которого Шухов дал немало своего конструктивного материала и задач (см. предисловие проф. П. К. Худякова к его книге).

На Нижегородской выставке 1896 г. впервые появилась гиперболическая железная башня системы Шухова. Она была основана на простом свойстве однополлого гиперболоида, по которому он может быть собран из прямолинейных образующих. Башни эти получили большое распространение в России, причем Шухову удалось добиться их наиболее выгоднейших конструктивных соотношений. В 1911 г. Шухову удалось построить 40-саженный маяк в Херсоне, в виде клепанной железной гиперболической башни. В недавнее время в Шабаловке (в Москве) воздвигнута железная башня для нужд радио в 160 м высоты, составленная из ряда гиперболоидов, насаженных друг на друга. В Соединенных Штатах система гиперболических башен Шухова была применена для постройки мачт на военных судах.

Шухов был в России пионером в области построения железных остовов зданий. Особенно следует отметить постройку в 1911 г. холодильника на Московско-Павеледской железной дороге.

Шухов немало занимался также постройкой железных мостов и выполнил огромное количество кессонов своей собственной конструкции. В эпоху недостатка железа, в разгар революции, Шухов с успехом

¹ П. К. Худяков. Сопротивление материалов. М., 1898, 450 стр. Сборник задач на теорию растяжения и сжатия, составленный инженер-механиками В. Г. Шуховым и П. К. Худяковым, стр. 396—442.

использовал дерево для постройки разнообразных типов стропил и на основании простых теоретических соображений смог сократить чуть не вдвое расход материала и труда. В связи с этим Шухов напечатал в 1921 г. в журнале „Нефтяное и сланцевое хозяйство“ (№ 5—8) интересную статью „О деревянных трубопроводах“, в которой в простой и общедоступной форме выработал законы сопротивления деревянных труб, скрепленных железными обручами, и выяснил область выгодного их применения, после чего становится ясной причина широкого распространения деревянных трубопроводов в Америке.

Шуховым исполнены многочисленные сооружения собственной конструкции дебаркадеров, дроболитейных башен, механического оборудования доменных печей и кауперов-газгольдеров, выработан новый тип хранилищ для цемента и т. д. Особенно оригинально устройство непроницаемых плоских висячих крыш для железных резервуаров, впервые осуществленных в Майкопе. В основе их устройств лежит остроумная теоретическая мысль Шухова; все элементы этой конструкции чрезвычайно легки и рационально размещены.

Всё творчество Шухова основано на его научных работах и весьма часто являлось результатом глубокой теоретической мысли.

На основании изложенного, нижеподписавшиеся предлагают кандидатуру В. Г. Шухова в члены-корреспонденты Академии Наук.

О ПРОЕКТЕ ИНЖЕНЕРА ДЕЛЬ-ПРОПОСТО¹

Сущность предлагаемого проекта состоит в том, что под водой работают те же самые моторы Дизеля, как и над водой, за счет запасаемого в особые резервуары сжатого воздуха, причем можно ими развивать на $1\frac{1}{2}$ часа ту же полную мощность, как и при надводном плавании.

В записке перечисляются основные элементы и данные, относящиеся к лодке водоизмещением в 360 т, и сравниваются с таковыми же лодки „Акула“, дабы с ясностью показать преимущества предлагаемой системы над электрическими аккумуляторами для подводного хода.

Проект по своим элементам как по сравнению с лодкой „Акула“, так и сам по себе представляется весьма совершенным и составляет значительный успех в деле подводного плавания, почему дальнейшая его разработка и осуществление представляются желательными.

Совершенно иначе обстоит дело с предлагаемым г. Дель-Пропосто проектом контракта, который, можно сказать, по всем пунктам является неприемлемым. Дело в том, что в § 1 этого проекта г. Дель-Пропосто перечисляет особенности своей системы и требует, чтобы Балтийский завод признал их новыми и чтобы Морское министерство признало право его, Дель-Пропосто, собственности, а Балтийский завод обязался бы уплачивать ему вознаграждение в течение 15 лет за применение к построенным лодкам какой-либо из перечисленных им особенностей.

Это требование основано на явном недоразумении, ибо основная идея системы — использование под водой того же двигателя с внутренним сгоранием, что и для надводного хода, за счет запасаемого в резервуары сжатого воздуха, — не только не составляет новизны, но уже осуществлена и испытана на построенной по проекту г-на Джевецкого Металлическим заводом лодке „Почтовый“. Сверх того, в Техническом комитете имеется поданный Металлическим заводом еще в 1905 г. проект также г-на Джевецкого лодки „Подводно-Водобронной“ с двигателями Дизеля, являющийся дальнейшим развитием примененных при

¹ Впервые опубликовано в сборнике „Из истории отечественной техники. Исследования и материалы“, Л., 1950, стр. 163—165. (Ред.).

постройке лодки „Почтовый“ идей. Но, кроме основной идеи и многие детали, которые г. Дель-Пропосто перечисляет и на которые требует признания права собственности, также уже осуществлены и испытаны на лодке „Почтовый“, а именно, запасенный в резервуары воздух сперва подогревается и увлажняется частью за счет теплоты отработавших газов, частью особою горелкою и работает в воздушном двигателе и выпускается в лодку, причем выпуск воздуха происходит в одной ее оконечности, а всасывание в тепловой двигатель — в другой, дабы иметь постоянную вентиляцию.

Всё отличие в том, что г. Дель-Пропосто предлагает отделять для этой работы часть цилиндров главных моторов. На лодке „Почтовый“ для этой цели имеется отдельный, совершенно независимый воздушный двигатель.

На лодке „Почтовый“ работа этого двигателя идет на выкачивание отработавших в тепловом моторе газов. Удаление газов и составляет главное техническое затруднение, а образующиеся от них пузыри — главный технический недостаток лодок этой системы и именно до окончательного выяснения этого последнего обстоятельства опытами на лодке „Почтовый“ и было отложено дальнейшее рассмотрение проекта Металлического завода.

В перечне особенностей своей системы г. Дель-Пропосто не указывает способов удаления отработавших газов, почему и нельзя судить, какого рода усовершенствование им здесь введено.

Здесь необходимо оговорить, что если г. Дель-Пропосто предлагает работать тепловым мотором, выпуская газы в вспомогательный резервуар, из которого они выходят через невозвратный клапан прямо в воду, когда давление в резервуаре будет соответствовать глубине погружения, удерживая всё время и в лодке то же давление, что и в резервуаре отработанных газов, т. е. чтобы давление выпускаемых газов и давление всасываемого воздуха были равны, то такое предложение также не составляет новизны и его имеется в виду проверить опытами на лодке „Почтовый“.

По отношению к устранению пузырей г. Дель-Пропосто указывает на возможность работать воздухом в предназначенной для того части цилиндров моторов Дизеля и выпускать воздух в лодку, повышая в ней давление, пока это не будет вредить находящимся в ней людям.

Это предложение по отношению к тому, что имеется на лодке „Почтовый“, является новым, но надо иметь в виду, что пребывание в воздухе с повышенным и притом изменчивым давлением утомляет людей.

Можно сказать, что это есть единственная особенность [проекта] г. Дель-Пропосто, ибо всё остальное из перечисленного им, или уже осуществлено на лодке „Почтовый“, или предложено в проекте Металлического завода, представленном в 1905 г.

На основании вышеизложенного совершенно не видно причин, по которым Морское министерство могло бы приписать перечисленным в проекте контракта характеристикам системы новизну и, признав их за особенности системы г. Дель-Пропосто, тем самым признать за ним право собственности на идеи, которые не только не им предложены, но большею частью уже осуществлены и испытаны на лодке, состоящей в списках флота.

Само собою разумеется, что заключение Балтийским заводом, т. е. одним из органов Морского министерства, договора, которым на 15 лет Морское министерство лишалось бы права применять уже использованные им идеи и притом изложенные в весьма общей, допускающей какое угодно распространительное толкование форме, является совершенно неприемлемым.

13 февраля 1909 г.

ИСПРАВЛЕНИЯ И ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
6	2 сверху	В. Г. Чехович	Г. В. Чехович
14	13 снизу	$P_1 P' = R_1 R'$	$PP' = RR'$
19	Формула (20)	$\delta T = (K\delta x + 2\Pi\delta\alpha + \Lambda\delta\lambda) A$	$\delta T = (K\delta x + 2\Pi\delta\omega + \Lambda\delta\lambda) A$
29	3 снизу	$T = \kappa p$	$T = \kappa P$
43	1 "	прогрессическими	прогрессивными
113	8 "	$\Omega = U$	$\Omega - U$
137	11 "	$\eta = \dots$	$r = \dots$
306	Формула (17)	$\left(\frac{\sigma_0^2 l_0^2}{r_0^2} + \omega_0^2 r^2 \right)$	$\left(\frac{\sigma_0^2 l_0^2}{r_0^2} + \omega_0^2 r_0^2 \right)$
312	Таблица 7, столбец 5, 2-я строка сверху	0.2400	0.2490
327	6 сверху, формула, в знаменателе	$\cos \varphi \sin \Delta$	$\cos \varphi_1 \sin \Delta$

*Утверждено к печати
Редакционно-издательским советом
Академии Наук СССР*

*

Технический редактор *А. В. Смирнова*
Корректор *К. Н. Феноменов*

*

РИСО АН СССР № 3—1Р. М-55230.

Подписано к печати 15/XI 1955 г.

Бумага 70×108¹/₁₆. Бум. л. 10⁷/₈.

Печ. л. 28.79. Уч.-изд. л. 27.5+1 вкл.

(0.34 уч.-издат. л.). Тираж 1500.

Зак. № 166. Цена 20 р. 95 к.

1-я тип. Издательства АН СССР.
Ленинград, В. О., 9 лин., д. 12.