

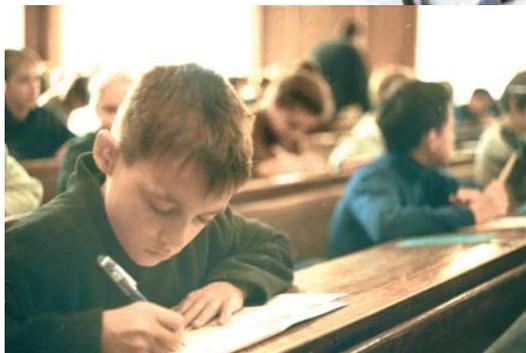
## МАЛЫЙ МЕХМАТ

— математические кружки для школьников при механико-математическом факультете МГУ. Занятия проходят по субботам в главном здании МГУ на Воробьёвых горах для учащихся 6—8 классов с 16<sup>00</sup> до 18<sup>00</sup>, для учащихся 9—11 классов с 18<sup>00</sup> до 20<sup>00</sup>. С вопросами обращайтесь по адресу электронной почты [mmmf@mmmf.mcsme.ru](mailto:mmmf@mmmf.mcsme.ru) или по телефону 939 39 43. ПРИГЛАШАЮТСЯ ВСЕ ЖЕЛАЮЩИЕ!



с задачами, которые, как правило, объединены одной темой. Свои решения школьники рассказывают преподавателям — студентам и аспирантам «большого» мехмата.

Каждую субботу сотни школьников стекаются в главное здание МГУ на Воробьёвых горах на занятия Малого мехмата. Здесь школьники учатся решать задачи и математически строго излагать найденные решения. Каждый школьник получает в начале занятия листок



кому интересен сам процесс решения задач, кто действительно хочет почувствовать красоту математики. А это, по большому счёту, оказывается значительно существеннее всевозможных льгот.

Основные принципы кружков: они открыты для всех желающих и бесплатны. Более того, можно посещать кружок, начиная с любого занятия.

Участие в кружке не даёт никаких льгот при поступлении в вузы и других формальных преимуществ. Поэтому сюда приходят только те,



ISBN 5-94057-004-6



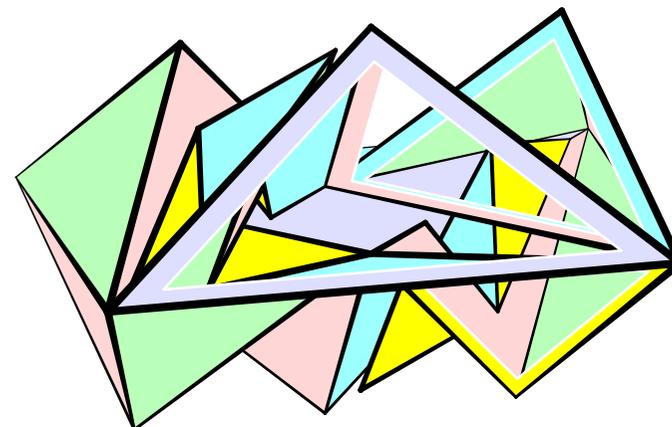
9 785940 570042

Фото  
М. Ю. Панова.

Библиотека  
«Математическое просвещение»

И. Х. Сабитов

# ОБЪЁМЫ МНОГОГРАННИКОВ



Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования  
Москва • 2002

Библиотека  
«Математическое просвещение»  
Выпуск 21

---

**И. Х. Сабитов**

**ОБЪЁМЫ  
МНОГОГРАННИКОВ**

*Рисунки М. Ю. Панова.*

Научно-редакционный совет серии:

*В. В. Прасолов, А. Б. Сосинский,  
В. М. Тихомиров (гл. ред.), И. В. Яценко.*

---

Серия основана в 1999 году.

---

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования  
Москва • 2002

УДК 514.113  
ББК 22.151  
С12

**Аннотация**

Изложение материала начинается с формулы, выражающей объём тетраэдра через длины его рёбер. Эту формулу можно найти почти во всех справочниках по математике, но мало кто знает её историю. В брошюре разбираются доказательства этой формулы, принадлежащие Тарталье (XVI век) и Эйлеру (XVIII век), и даются современные их варианты. Сформулирована и прокомментирована теорема, обобщающая формулу объёма тетраэдра на любые многогранники и дающая как простое следствие решение проблемы «кузнечных мехов», утверждающей постоянство объёма изгибаемого многогранника. Даются также примеры изгибаемых многогранников.

Текст брошюры представляет собой дополненную обработку записи лекции для школьников 9—11 классов, прочитанной автором на Малом мехмате МГУ 10 марта 2001 года (запись Е. А. Чернышёвой).

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов младших курсов, учителей.



Работа автора над брошюрой частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ), грант № 00-06-80437.

Издание осуществлено при поддержке Московской городской Думы и Московского комитета образования.

ISBN 5-94057-003-8

© Сабитов И. Х., 2002.  
© МЦНМО, 2002.

*Сабитов Иджад Хакович.*

Объёмы многогранников.

(Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“».)  
М.: МЦНМО, 2002. — 32 с.: ил.

Редактор *Т. А. Карпова.*

Техн. редактор *М. Ю. Панов.*

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано к печати 7/X 2002 года.  
Формат бумаги 60×88 1/16.      Офсетная бумага № 1.      Офсетная печать.  
Физ. печ. л. 2,00 + 0,25 (вкл.).   Уч.-изд. л. 2,43.   Тираж 3000 экз.   Заказ 3425.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.  
119002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241 05 00.

Отпечатано в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНТИ».  
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.

Всем старшеклассникам известна формула Герона, выражающая площадь  $S$  треугольника через длины его сторон  $a, b, c$ :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где  $p = \frac{a+b+c}{2}$  — полупериметр треугольника,  $a, b, c$  — длины его сторон. Если возвести обе части в квадрат и подставить выражение для  $p$ , то после упрощения получится формула

$$S^2 = \frac{1}{16}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4).$$

К сожалению, эта формула не распространяется на многоугольники более сложного вида. Рассмотрим, например, квадрат — простейшую фигуру с четырьмя сторонами длины  $a$ . Его площадь равна  $a^2$ . Однако, если не предполагать, что наш многоугольник является квадратом, его площадь при тех же длинах сторон может оказаться совершенно другой, так как площадь произвольного ромба со стороной  $a$  может принимать любое значение от 0 до  $a^2$  (рис. 1).

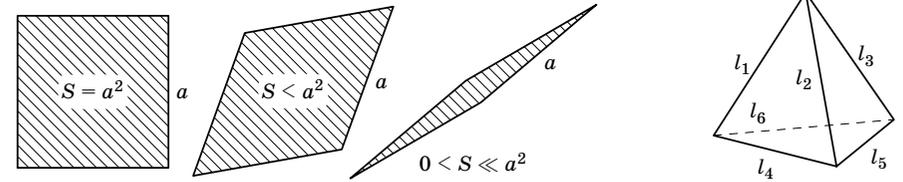


Рис. 1

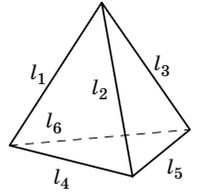


Рис. 2

Тем самым, формулы, выражающей связь между сторонами многоугольника и его площадью, не существует.

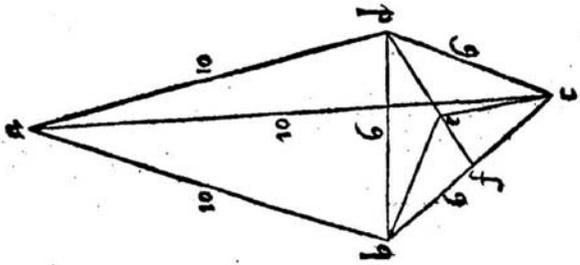
Оказывается, для многогранников это не так. Существует формула, которая даёт возможность найти объём многогранника, если известны лишь длины его рёбер. Этому замечательному факту и посвящена настоящая брошюра. А сначала покажем, что имеет место следующее обобщение формулы Герона —

**ФОРМУЛА ДЛЯ ОБЪЁМА ТЕТРАЭДРА:**

$$V^2 = \frac{1}{144} \left[ l_1^2 l_5^2 (l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_6^2 - l_1^2 - l_5^2) + l_2^2 l_6^2 (l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 - l_2^2 - l_6^2) + l_3^2 l_4^2 (l_1^2 + l_2^2 + l_5^2 + l_6^2 - l_3^2 - l_4^2) - l_1^2 l_2^2 l_4^2 - l_2^2 l_3^2 l_5^2 - l_1^2 l_3^2 l_6^2 - l_4^2 l_5^2 l_6^2 \right] \quad (1)$$

(рис. 2).

*Delle piramidi di quattro bafc triangolari, ma di lati diuerfi.*



8 **G**lie la piramide a b c d. che il triangolo b c d. della sua bafa, è equilatero, & è 6. per lato. gli altri tre lati a b a c. & a d. in aria elleuati, ciacheduno di loro è 10. fi adimanda quanto fia l'aria corporale di tal piramide, per foluere questa queftione, bifogna trouar l'afsis di tal piramide, & dappoi quadrar la bafa. b c d. & tal quadratura multiplicarla fia il terzo del detto affis ( come fu detto sopra la fefta di questo capo ) & il prodotto fara l'aria corporale di tal piramide.

Ma per trouar l'afsis di tal piramide fi puo procedere per qual fi voglia di quelli duoi vltimi modi narrati sopra la feconda di questo capo, ma per al presente vogliamo trouare per l'ultimo di detti modi, cioe trouando la linea, che va dal centro della bafa. b c d. ( qual è il ponto e. a gli angoli di tal bafa, la qual linea e b. ouer e c. ouer e d. è fempre in potenza fubtrippla al lato del triangolo ( per la ottaua del decimoterzo di Euclide ) e per tanto quadraremo quel 6 ( lato del triangolo ) fara 36. & ne pigliaremo il terzo, che farebbe 12. & così la radice 12 fara la detta linea e b. ouer e c. ouer e d. dappoi quadraremo il lato a b. fara 100. & di questo cauandone il quadrato di 12 ( che è 144 ) resta 56. & la 7. 8 fara l'afsis di tal piramide, & il terzo della quale fara 9  $\frac{1}{3}$ . & questo lo multiplicaremo fia l'aria superficiale della bafa. b c d. la qual aria superficiale ( per le regole ) si trouara effer 8243. multiplicando adunque 8243 per 9  $\frac{1}{3}$  fara 82376. & tanto fa l'aria corporale di detta piramide.

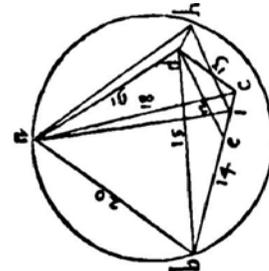
9 **N**ichora fi potera trouar la affis di tal piramide per quella feconda regola data sopra la feconda di questo capo, cioe trouando la perpendicolare del triangolo a b c. calante dal ponto a. sopra il lato b c. la qual perpendicolare cadera di neceffita nel mezzo della b c. in ponto f. & fara 91. & così hauereмо formato vn triangolo, delquale il lato a f. fara 91. & il lato d f. fara 17. & il lato d a. fara 10. Onde trouando la perpendicolare di questo triangolo, calante dal angolo a. sopra il lato d f. si trouara quella effer 88. & calante nel ponto e. lontano dal ponto f. 9. & questa tal perpendicolare 88. venira a effer l'afsis di tal piramide, fi come che per la precedente regola fu anchor trouato.

Ma la precedente è piu ifpediente quando che la bafa della piramide è vn triangolo equilatero, ma quando che il triangolo della bafa di tal piramide fusse di lati diuerfi bifogna vtar queft' altro modo, & con altre particolarità, come nella fequente intenderai.



10 **G**lie la piramide a b c d. che il lato b d. ( della sua bafa. b c d. ) è 15. b c. 14. & d c. 13. & de gli altri tre lati in aria elleuati ( di tal piramide ) il lato a b. è 10. a c. 8. & a d. 6. fi adimanda quanto fia l'afsis di detta piramide.

Per trouare bifogna che si troua la perpendicolare della bafa b c d. & per fuggir rotti trouaremo tal perpendicolare cadente dal ponto d. sopra il lato b c. ( qual lato è 14 ) onde procedendo per le regole dare trouaremo tal perpendicolare effer 13. cadente in ponto e. qual ponto è lontano 9. dal ponto c. & 9. dal ponto b. fatto questo bifogna anchora trouar il cateto, ouer perpendicolare della faccia, ouer triangolo a b c. che calchi dal ponto a. sopra il medesimo lato b c. la qual fia a i. che per le regole dare trouaremo tal perpendicolare a i. calcar appresso al ponto c. 4  $\frac{1}{2}$ . & effer longa 8205  $\frac{1}{2}$ . & dal ponto l. al ponto c. vien a effer 7  $\frac{1}{2}$ . & dal ponto a. al medesimo ponto l. i. vien 105  $\frac{1}{2}$ . & eguale alla medesima d e. & tiraremo la d h. la qual fara eguale, & equilidante alla e f. ( per la trentatre del primo di Euclide ) tiraremo anchora con la immaginaria vna linea dal a. al ponto h. foruindo il triangolo i h a. & per trouar quanto fia il lato a h. il quale perche il contien angolo re. co con la linea b d. ( per la 8 dell' vndecimo di Euclide ) & la a d. è la sua hypotumiffa, quadraremo la a d. fara 136. & di questo ne causeremo il quadrato della h d. che fara 13  $\frac{1}{2}$ . & reftara 122  $\frac{1}{2}$ . per il quadrato della linea, ouer lato a h. fuggira adunque il detto lato a h. effer 825  $\frac{1}{2}$ . & così hauereмо il detto triangolo. a i h. che il lato a i. è 8205  $\frac{1}{2}$ . & il lato i h. è 825  $\frac{1}{2}$ . & il lato a h. è 825  $\frac{1}{2}$ . & di questo bifogna parir per il doppio della bafa perpendicolare, calcante dal ponto a. sopra il lato i h. & tal perpendicolare fara l'afsis di tal piramide ( per la detta vndecima dell' v. decimo di Euclide ) & per trouarla bifogna procedere fecondo la sua regola, cioe trouar prima il ponto doue, che tal perpendicolare debba cadere sopra la i h. cioe fummur il quadrato del lato a i. il qual quadrato fara 8205  $\frac{1}{2}$ . infieme con il quadrato della bafa i h. qual fara 144. fara 449  $\frac{1}{2}$ . & di questa fomma causerne il quadrato dell' altro lato a h. il qual quadrato fara 15  $\frac{1}{2}$ . reftara 193  $\frac{1}{2}$ . & questo bifogna parir per il doppio della bafa i h. il qual doppio fara 14. il che facendo ne venira 8  $\frac{1}{2}$ . & tanto fara lontano il ponto del cadimento dal ponto i. sopra la linea i h. hor per trouar mo la detta perpendicolare, bifogna quadrar 8  $\frac{1}{2}$ . che fara 67  $\frac{1}{4}$ . & questo quadrato cauuto del quadrato del lato a i. reftara 240  $\frac{1}{4}$ . & la 8. 240  $\frac{1}{4}$ . fara la perpendicolare del detto triangolo a i h. & la anchora l'afsis di tal piramide, che è il propofito.



del triangolo. a i h.  
a i. 8205  $\frac{1}{2}$   
i h. — 12.  
a h. 825  $\frac{1}{2}$

l'afsis della piramide fara  
8240  $\frac{1}{3}$  13  $\frac{1}{3}$  7  $\frac{1}{3}$

Фрагмент «О пирамидах с четырьмя треугольными основаниями, но с разными ребрами» из книги Тартальи, в котором обосновывается способ нахождения высоты тетраэдра при известных

длинах его рёбер.

Задачу нахождения объёма тетраэдра через длины его сторон первым, по-видимому, решил Пьеро делла Франческа (1420?—1492?)\*, знаменитый итальянский художник эпохи раннего Возрождения. Затем эта же задача рассматривалась в книгах «Summa de arithmetica, geometria proportione et proportionalita» (1494) и «Divina proportione» (1509) Луки Пачоли. Её решение повторено в энциклопедическом труде «General trattato di numeri et misure» итальянского математика Никколо Фонтана (1499—1557), более известного и в жизни, и в научной литературе под фамилией Тарталья (Tartaglia по-итальянски значит «заика»: речь Никколо была затруднена с детства вследствие ранения гортани). Вообще история получения формулы объёма тетраэдра через длины его рёбер окончательно ещё не восстановлена, и само обсуждение этого вопроса в литературе уже имеет свою интересную историю с разными неожиданными открытиями и интерпретациями. Для автора брошюры первым доступным текстом из упомянутых выше была книга Тарталья, поэтому мы будем придерживаться его изложения. Заметим, что все три названных автора на самом деле не дали никакой общей формулы вида (1), а

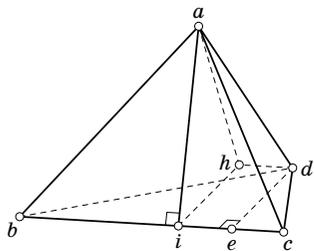


Рис. 3

решали задачу с конкретными длинами рёбер (см. на сс. 4—5 воспроизведённый оригинальный текст из книги Тарталья, из рисунка в котором видно, с какими значениями длин рёбер он работал).

Разберём подробно доказательство Тарталья, сохранив обозначения его рисунков. Пусть дан тетраэдр с вершинами  $a, b, c, d$ . Опустим на ребро  $bc$  перпендикуляры  $ai$  и  $de$  (в плоскостях треугольников  $abc$  и  $dbc$  соответственно, рис. 3). Заметим, что длины высот  $ai$  и  $de$  мы можем выразить

через известные величины (длины рёбер). Проведём через точку  $i$  прямую, параллельную  $ed$ , а через точку  $d$  — прямую, параллельную  $ei$ , и в их пересечении получим точку  $h$ . Докажем, что прямая  $dh$  перпендикулярна плоскости треугольника  $aih$ . Отрезок  $ei$  принадлежит основанию треугольников  $abc$  и  $dbc$ , поэтому  $ai \perp ei$ ,  $de \perp ei$ . Так как  $ih \parallel ed$ , то  $ei \perp ih$ . Получается, что отрезок  $ei$  перпендикулярен двум прямым, принадлежащим плоскости  $aih$ , следовательно,  $ei \perp aih$ , а поскольку  $dh \parallel ei$ , получаем, что  $dh \perp aih$ . В треугольнике  $adh$  мы знаем  $ad$  (это ребро тетраэдра) и  $hd = ei$  (это противоположные стороны в прямоугольнике), а  $ei$  мы можем найти, поскольку знаем стороны и высоты треугольников  $abc$  и  $dbc$ . Кроме того, треугольник  $adh$

\*) На самом деле по поводу годов его рождения и смерти разные исследователи высказывают разные мнения, сходясь лишь в том, что он родился в начале и умер в конце XV века; здесь мы привели даты его жизни по 3-му изданию БСЭ, т. 21 (1975), стр. 276.

прямоугольный, следовательно,

$$\sqrt{ad^2 - hd^2} = ah.$$

В треугольнике  $aih$  мы знаем теперь все стороны:  $ai$ ,  $ah$  и  $ih = ed$ .

Опустим в этом треугольнике высоту из  $a$  на основание  $ih$ , получим точку  $f$  (рис. 4). Докажем, что  $af \perp dbc$ . Предположим, что основание высоты, опущенной из  $a$  на плоскость треугольника  $dbc$ , — точка  $o$ . По теореме о трёх перпендикулярах отрезок  $oi$  перпендикулярен  $bc$ , но, так как  $if \perp bc$ , точка  $o$  должна лежать на прямой  $if$ . А поскольку  $af \perp if$ , точки  $o$  и  $f$  совпадают. Таким образом,  $af$  — высота тетраэдра, и мы можем выразить её через известные стороны треугольника  $aih$ .

Так как мы можем найти площадь основания  $bcd$  по формуле Герона, для нахождения объёма  $V$  тетраэдра остаётся использовать известную формулу

$$V = \frac{1}{3} af \cdot S_{\triangle bcd}. \quad (2)$$

Теперь, если в доказательстве Тарталья длины рёбер обозначить  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ , после возведения формулы (2) в квадрат получится в точности формула (1).

Однако в рассуждении Тарталья основные используемые им грани тетраэдра — треугольники  $abc$  и  $dbc$  — имели при общем основании  $bc$  острые углы, поэтому необходимо обобщить его доказательство на случай произвольных граней. Также не разобран случай, когда

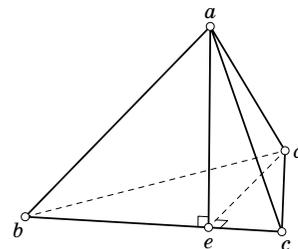


Рис. 5

где точки  $e$  и  $i$  совпадают (рис. 5). Давайте сначала разберём этот простой случай. Точка  $h$  совпадает с  $d$ , следовательно, основание высоты  $af$  попадает на  $ed$ . Вместо треугольника  $aih$  рассмотрим треугольник  $aed$ , и так же, как и выше, найдём объём.

Итак, рассмотрим общий случай. Возьмём треугольник  $ABC$ . Опустим высоту из вершины  $A$  на противоположную сторону  $BC$ , получим точку  $H$ . Высота в треугольнике

может падать как на сторону, так и на её продолжение (рис. 6). Чтобы не заботиться о том, где она находится по отношению к точкам  $B$  и  $C$ , воспользуемся методом координат. Пусть начало системы координат совпадает с точкой  $C$ , а оси сонаправлены с векторами  $\vec{CB}$  и  $\vec{CA}$  (рис. 7). Точки  $A, B, C$  и  $H$  имеют следующие координаты:  $(x, h)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(x, 0)$  (стороны треугольника  $a, b$  и  $c$  нам известны,  $h$  — его

высота, её мы можем найти по формуле  $h = 2S/a$ , в которой площадь  $S$  вычисляется по формуле Герона; нам неизвестна только величина  $x$ .

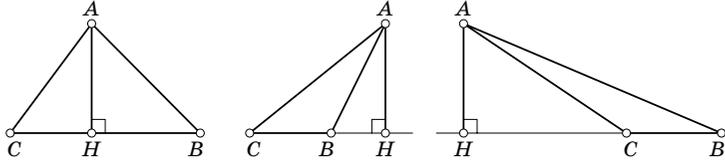


Рис. 6

Поскольку треугольники  $AHC$  и  $AHB$  являются прямоугольными с прямыми углами при вершине  $H$ , по теореме Пифагора  $AC^2 = AH^2 + HC^2$  и  $AB^2 = AH^2 + HB^2$  или

$$b^2 = h^2 + x^2 \quad \text{и} \quad c^2 = h^2 + (x-a)^2.$$

Преобразуем второе из этих равенств к виду  $x^2 - 2ax + a^2 + h^2 = c^2$ ,

и подставим в получившееся равенство значение  $x^2$ , равное  $b^2 - h^2$ . Получим

$$(b^2 - h^2) - 2ax + a^2 + h^2 = c^2, \quad \text{т. е.} \\ b^2 + a^2 - c^2 = 2ax.$$

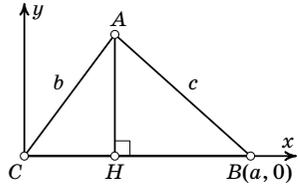


Рис. 7

Отсюда находим  $x$ :

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}. \quad (3)$$

Мы получили формулу, определяющую положение основания высоты. Если треугольник тупоугольный (например, если угол  $B$  тупой), то  $b^2 > a^2 + c^2$  (рис. 8, а), и тогда

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} > \frac{a^2 + a^2 - c^2 + c^2}{2a} = a,$$

т. е. абсцисса  $x$  больше  $a$ , и точка  $H$  попадает за вершину  $B$ . Если

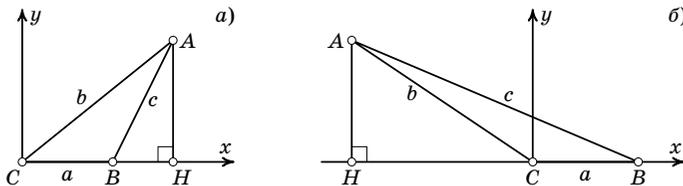


Рис. 8

тупым является угол при вершине  $C$ , то  $c^2 > a^2 + b^2$  (рис. 8, б), и

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} < \frac{a^2 + b^2 - a^2 - b^2}{2a} = 0,$$

т. е. точка  $H$  лежит слева от вершины  $C$ . Если углы  $B$  и  $C$  острые, то  $c^2 < a^2 + b^2$ ,  $b^2 < a^2 + c^2$ , тогда  $0 < x < a$ , и точка  $H$  попадает как раз на

сторону  $BC$ . Таким образом, формулой (3) действительно охватываются все случаи.

Вернёмся к доказательству Тартальи. На рис. 4 в обозначениях вершин изменим «малые» буквы на соответствующие «большие» (так как сейчас буквы  $a, b, c$  заняты в (3) для обозначения длин сторон). Применим формулу (3) к треугольникам  $ABC$  и  $DBC$ , расположив для каждого из них систему координат так, как показано на рис. 9, а, б:

$$x_I = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2BC}, \quad x_E = \frac{DB^2 + BC^2 - DC^2}{2BC}.$$

Поскольку в пространстве точки  $E$  и  $I$  лежат на одной оси, являющейся осью абсцисс в каждой плоскости, и начала отсчёта совпадают, координаты  $x_E$  и  $x_I$  однозначно определяют положение точек  $E$  и  $I$  на прямой  $BC$ . Как и раньше, построим  $IH \parallel DH$ . Также, как и в доказательстве Тартальи, точка  $F$  попадает на прямую  $IH$ . Опять же, если мы будем знать стороны треугольника  $AIH$ , то легко найдём  $AF$ . Значит, осталось найти  $AH$ , причём, так как треугольник  $ADH$  прямоугольный, достаточно найти  $DH^2 = (x_E - x_I)^2$ . Получается, что метод Тартальи с указанными сейчас поправками проходит для любого тетраэдра.

Некоторым ревностным ценителям геометрической чистоты применённый выше метод координат может и не понравиться, как нечто искусственное, приводящее к результату формальными вычислениями, а не геометрическими построениями. Действительно, оказывается, метод Тартальи можно «оправдать» и без применения какого-либо нового рассуждения. Что было в нём важным? Достаточно было иметь две грани, у которых при общем ребре нет ни одного неострого плоского угла (на рисунке Тартальи таким было ребро  $bc$ ). Но известно, что такое свойство верно для любого многогранника с треугольными гранями. Действительно, если взять ребро наибольшей длины, то обе прилегающих к нему грани будут иметь при этом ребре острые углы, иначе нашлось бы ребро длины большей, чем рассматриваемое. Значит, в любом тетраэдре мы можем найти ребро, для которого построения Тартальи приводят к рис. 3 с ребром  $bc$ .

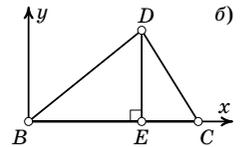
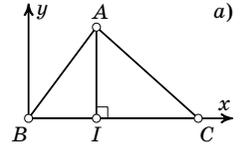


Рис. 9

Прошло почти двести лет, прежде чем Леонард Эйлер в 1752 году провёл вычисление объёма тетраэдра уже не для конкретных числовых значений длин рёбер, а в буквенных обозначениях\*). Вот его рассуждения.

\*) Впервые формула для объёма тетраэдра с буквенными обозначениями длин рёбер была получена, по-видимому, лет за сто до Эйлера, но мы не можем дать точных ссылок.

Обозначим известные длины рёбер:  $AB=a$ ,  $AC=b$ ,  $BC=c$ ,  $AD=d$ ,  $BD=e$ ,  $CD=f$ .

В треугольнике  $ADC$  опустим из  $D$  перпендикуляр на ребро  $CA$ , получим точку  $Q$ ; перпендикуляр из той же точки  $D$  в плоскости  $ABD$  на ребро  $AB$  даст точку  $P$  (рис. 10). Из точек  $Q$  и  $P$  в плоскости треугольника  $ABC$  восстановим перпендикуляры к сторонам  $AC$  и  $AB$  соответственно. Точку их пересечения обозначим через  $O$  (рис. 11); отрезок  $DO$  окажется высотой тетраэдра (рис. 12), т. е.  $DO \perp ABC$  (это следует из теоремы о трёх перпендикулярах). Поэтому треугольник  $AOD$  — прямоугольный, и  $DO = \sqrt{AD^2 - AO^2}$ . Таким образом, чтобы найти  $DO$ , необходимо вычислить длину отрезка  $AO$ .

Длины отрезков  $AP$  и  $AQ$  мы можем найти из треугольников  $ABD$  и  $ACD$ . Используя формулу (3), получаем:

$$AP = \frac{a^2 + d^2 - e^2}{2a}, \quad AQ = \frac{b^2 + d^2 - f^2}{2b}.$$

Из прямоугольного треугольника  $APO$  имеем (см. рис. 11):  $AO = \sqrt{AP^2 + PO^2}$ . Длина  $AP$  известна, нужно найти  $PO$ . Рассмотрим прямоугольный треугольник  $AQS$ :

$$QS = AQ \operatorname{tg} \alpha, \quad AS = \frac{AQ}{\cos \alpha}, \quad PS = AS - AP,$$

где  $\alpha = \angle BAC$ . Прямоугольные треугольники  $AQS$  и  $OPS$  подобны по двум углам, поэтому отношения соответствующих сторон равны:

$$\frac{QS}{PS} = \frac{AQ}{PO} = \frac{AS}{OS}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} PO &= \frac{PS \cdot AQ}{QS} = \frac{PS}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{AS - AP}{\operatorname{tg} \alpha} = \\ &= \frac{AQ}{\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha} - \frac{AP}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{AQ}{\sin \alpha} - \frac{AP}{\operatorname{tg} \alpha}. \end{aligned}$$

Величины  $AQ$  и  $AP$  известны, вычислим  $\sin \alpha$ . Площадь треугольника  $ABC$  равна

$$\frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} ab \sin \alpha,$$

но её мы можем узнать из формулы Герона, следовательно,

$$\sin \alpha = \frac{2S_{\triangle ABC}}{ab}.$$

Теперь, если проделать все оставшиеся вычисления, получится формула (1).

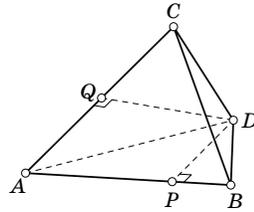


Рис. 10

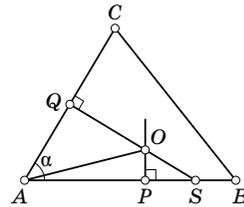


Рис. 11

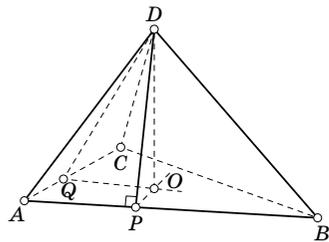


Рис. 12

Однако и рассуждения Эйлера зависят от конкретного вида тетраэдра и его граней. Их следует уточнить, так как, например, точка  $O$  — основание высоты из вершины  $D$  — может быть вне треугольника  $ABC$  (а существуют такие тетраэдры, у которых высота из каждой вершины падает в точку вне треугольника в соответствующем основании), точки  $Q$  и  $P$  могут лежать на продолжениях сторон треугольника  $ABC$ , и тогда точки  $O$  и  $S$  будут лежать вне треугольника; кроме того, если  $\alpha > 90^\circ$ , то формула для  $PO$  будет неверной, так как  $PO$  — длина, т. е. положительна, а  $\operatorname{tg} \alpha < 0$ .

Приведём доказательство Эйлера в общем виде, не зависящее от того, какие углы в треугольниках: тупые или острые.

В плоскости треугольника  $ABC$  отметим точку  $D'$  такую, что  $AD' = AD$ ,  $CD' = CD$ . Для нахождения точки  $D'$  достаточно мысленно повернуть грань  $ACD$  вокруг прямой  $AC$  до положения, когда  $ACD$  окажется на плоскости основания  $ABC$ . Таких положений два; выберем то положение, когда вершина  $D$  попадёт в точку, лежащую с той же стороны, что и вершина  $B$ . Эту точку и отметим как  $D'$ . Введём теперь систему координат с началом в вершине  $A$  и с осью абсцисс вдоль ребра  $AB$  (рис. 13). Когда мы уточняли доказательство Тарталья, то вычислили координаты точки  $C$ , поэтому будем считать, что координаты  $C(x_c, y_c)$  нам известны. А координаты точки  $Q(x_q, y_q)$  (основания перпендикуляра, опущенного из  $D'$  на  $AC$ ) надо найти. Заметим, что построенная таким образом точка  $Q$  совпадает с точкой  $Q$  из доказательства Эйлера. Чтобы убедиться в этом, повернём треугольник  $ACD$  вокруг прямой  $AC$ , чтобы он принадлежал плоскости  $ABC$ . При этом точка  $D$  займёт положение  $D'$ , а перпендикуляр  $DQ$  перейдёт в  $D'Q$ .

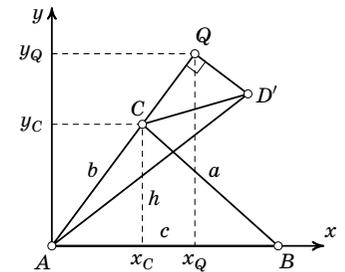


Рис. 13

Координаты точек прямой  $AC$  определяются уравнением  $y = kx$ , где  $k = \operatorname{tg} \alpha$ , поэтому  $y_q = kx_q$  и  $y_c = kx_c$ . Следовательно,

$$AQ^2 = x_q^2 + k^2 x_q^2 \quad \text{и} \quad CQ^2 = (x_q - x_c)^2 + k^2 (x_q - x_c)^2.$$

Поскольку угол  $AQD'$  прямой,

$$\begin{aligned} AQ^2 + QD'^2 &= AD'^2, \quad \text{т. е.} \\ x_q^2 + k^2 x_q^2 + QD'^2 &= AD'^2, \end{aligned} \quad (4)$$

аналогично,

$$\begin{aligned} CQ^2 + QD'^2 &= CD'^2, \quad \text{т. е.} \\ (x_q - x_c)^2 + k^2 (x_q - x_c)^2 + QD'^2 &= CD'^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Вычтем (5) из (4), получится

$$2x_Q x_C - x_C^2 + 2k^2 x_Q x_C - k^2 x_C^2 = AD'^2 - CD'^2 = AD^2 - CD^2 = d^2 - f^2,$$

$$x_Q = \frac{1}{2} x_C + \frac{d^2 - f^2}{2x_C(1+k^2)}.$$

Далее, рассмотрев треугольник  $DAB$ , по формуле (3) мы можем вычислить абсциссу  $x_P$  точки  $P$  в нашей системе координат. Таким образом, координаты  $P(x_P, 0)$  нам тоже известны.

Абсцисса точки  $O$  пересечения перпендикуляров, восстановленных в плоскости  $ABC$  к  $AB$  в точке  $P$  и к  $AC$  в точке  $Q$ , равна  $x_O = x_P$ . Чтобы определить её ординату  $y_O$ , найдём уравнение прямой  $OQ$ . Поскольку эта прямая перпендикулярна прямой  $AC$ , её угловой коэффициент равен  $-\frac{1}{k}$ , где  $k$  — угловой коэффициент  $AC$ . Воспользовавшись тем, что  $Q$  принадлежит рассматриваемой прямой, запишем окончательное уравнение:

$$y = -\frac{1}{k}(x - x_Q) + y_Q.$$

Подставим в это уравнение  $x = x_O = x_P$  и получим  $y_O$ :

$$y_O = -\frac{1}{k}(x_P - x_Q) + y_Q.$$

Теперь можно получить выражение для высоты  $DO$  тетраэдра:

$$DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{d^2 - x_O^2 - y_O^2},$$

в которой все величины выражаются через длины рёбер.

Таким образом, мы доказали формулу (1), и теперь можем вычислять объём тетраэдра, зная лишь длины его рёбер. А можно ли вычислить

### ОБЪЁМ ПРОИЗВОЛЬНОГО МНОГОГРАННИКА,

зная лишь длины его рёбер? Оказывается, можно, правда, многогранник должен быть специального вида, а именно, он должен быть ориентированным (позже мы уточним, что это означает), а все грани должны быть треугольниками\*). Далее нам понадобятся некоторые новые понятия и определения. Прежде всего определим, что такое «объём ориентированного тетраэдра». Перенумеруем вершины его основания числами 1, 2, 3 (рис. 14). Эти вершины можно обойти двумя способами: либо  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ , либо  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ . Если смотреть на основание

\*) Если у многогранника есть грань с числом рёбер, большим чем 3, разобьём её на треугольники (например, диагоналями) так, чтобы вершинами получившихся треугольников были только вершины граней. Будем считать, что эти треугольники — грани многогранника, принадлежащие одной плоскости, а их стороны — рёбра многогранника (и, тем самым, нам известны их длины).

из вершины  $O$ , в одном случае обход получается по часовой стрелке, в другом случае — против часовой стрелки. Пусть наш тетраэдр *ориентирован*, т. е. задано направление, в котором обходятся вершины основания. Будем считать, что, если обход по часовой стрелке, то ориентированный объём тетраэдра меньше нуля, если против часовой стрелки — больше, а по модулю он равен обычному объёму.

Теперь перейдём к многогранникам с большим числом вершин. Пусть есть некоторое множество плоских треугольников и указано, какие стороны каких треугольников склеиваются (отождествляются) друг с другом. При склеивании соблюдаются следующие правила:

1) отождествление проходит по всей стороне, так что склеиваются стороны равной длины, и при этом указываются также отождествляемые вершины;

2) каждая сторона является общим ребром только двух треугольников, и два треугольника могут приклеиваться только по одной стороне;

3) треугольники, которые после склеивания имеют одну общую вершину  $A$ , можно перенумеровать в некотором порядке так, что каждый следующий имеет с предыдущим общую сторону, исходящую из  $A$ . Последний же имеет общую сторону с предпоследним и первым (число треугольников, имеющих общую вершину  $A$ , должно быть не меньше чем 3).

Множество треугольников с некоторым указанным законом склеивания, удовлетворяющим правилам 1)–3), называется *развёрткой*, а закон склеивания или отождествления вершин и сторон треугольников называется *комбинаторным строением* развёртки. Таким образом, комбинаторное строение развёртки можно задать списком всех треугольников и всех отождествляемых вершин и сторон. Для краткости будем обозначать этот список одной буквой  $K$  и будем говорить, что развёртка имеет комбинаторное строение  $K$ . Многогранник с комбинаторным строением  $K$  получается склеиванием развёртки. Для этого достаточно совместить те вершины треугольников, которые должны перейти в одну вершину многогранника согласно  $K$ , и склеить треугольники по сторонам, которые согласно  $K$  должны перейти в одно ребро многогранника. При таком склеивании получается многогранник  $P(K)$  с комбинаторным строением  $K$ , гранями которого являются треугольники нашей развёртки.

Заметим, что по внешнему виду такая конструкция может сильно отличаться от привычных нам форм многогранников. Сравните, например, октаэдры рис. 15,  $a$ ,  $b$ : они оба имеют одно и то же

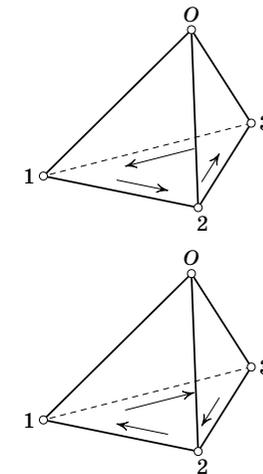


Рис. 14

комбинаторное строение. В  $P(K)$  могут быть самопересечения (как, например, в октаэдре рис. 15, б).

С первого взгляда не ясно, что же называть объёмом такого сложного объекта. Поэтому сначала надо обобщить понятие объёма.

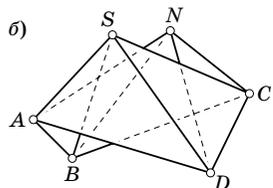
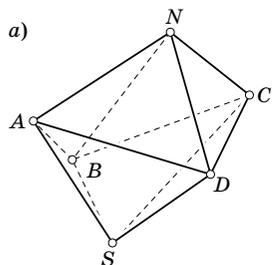


Рис. 15

Пусть комбинаторное строение развёртки таково, что она может быть *ориентирована*, т. е. границу каждого плоского треугольника можно обойти так, чтобы общие рёбра любых двух соседних треугольников проходились бы в противоположных направлениях. Про такие треугольники говорят, что они ориентированы *согласованно*. Ориентацию же граней многогранника  $P(K)$  мы определяем, сохраняя при склеивании развёртки правила обхода треугольников. Многогранник, который можно ориентировать, называется *ориентируемым многогранником*, в противном случае он называется *неориентируемым*.

Развёртки «большинства» известных многогранников, например, всех правильных многогранников и вообще всех выпуклых многогранников\*), являются ориентируемыми. Но существуют и неориентируемые раз-

вёртки. На рис. 16 приведена неориентируемая развёртка, соответствующая *многограннику с краем* (в данном случае это лист Мёбиуса); край состоит из рёбер, к которым примыкает только одна грань. Определите край развёртки и проверьте, что если для треугольника  $AB_1C_1$  дан обход в направлении от  $A$  к  $B_1$ , то при склеивании сторон с одинаковыми обозначениями вершин сторона  $AB_1$  в треугольнике  $AB_1C_3$  обходится в том же направлении, что и  $AB_1$  в треугольнике  $AB_1C_1$ , а по правилу согласованной ориентации общие рёбра двух соседних треугольников должны обходиться в противоположных направлениях. (Как показать, что это свойство наличия несогласованной ориентации не зависит от того, в каком треугольнике сделан начальный выбор ориентации?) На рис. 17 приведён пример неориентируемой развёртки замкнутого многогранника (т. е. многогранника без края). Проверьте, что это множество треугольников действительно удовлетворяет перечисленным выше условиям определения развёртки и что на этой развёртке действительно нельзя ввести согласованные ориентации всех треугольников. Если вы будете пытаться расположить треугольники на плоскости так, чтобы склеиваемые треугольники имели на рисунке общую сторону,

\*) Конечно, формально, их надо триангулировать, т. е. разбить диагоналями все нетреугольные грани на треугольники, но существует и другое определение ориентируемости, пригодное для развёрток и с нетреугольными гранями.

то надо иметь в виду, что ориентируемость или неориентируемость развёртки не зависит от длин сторон треугольников, поэтому их можно выбирать произвольно, «подгоняя» треугольники один к другому. Но, конечно, всё равно останутся отождествляемые стороны, расположенные не вместе, иначе весь многогранник реализовался бы на плоскости.

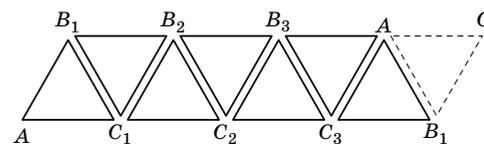


Рис. 16

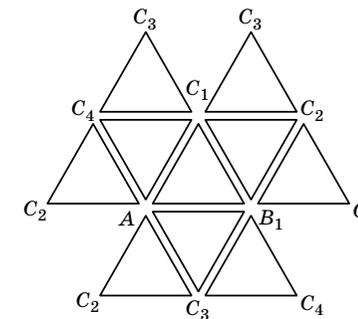


Рис. 17

Пусть у нас есть ориентированный многогранник. Выберем в пространстве точку  $O$  и к каждой грани «пристроим» тетраэдр с вершиной в точке  $O$  (рис. 18, здесь тетраэдр «пристроен» к грани  $ABC$ ). Для каждого тетраэдра определён ориентированный объём. *Обобщённым объёмом ориентированного многогранника* назовём сумму этих объёмов тетраэдров. Используя понятие смешанного произведения векторов, можно показать, что значение этого обобщённого объёма

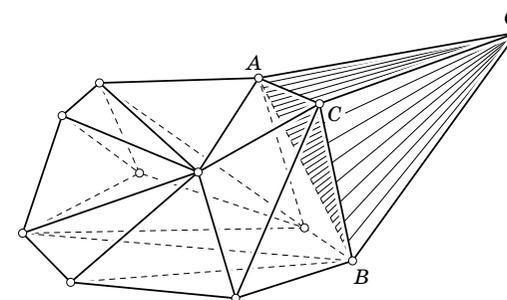


Рис. 18

не зависит от выбора точки  $O$  (для этого и нужно требование об ориентируемости многогранника). Заметим, что, если мы выберем точку  $O$  внутри выпуклого многогранника, то объёмы всех тетраэдров будут одного знака, и обобщённый объём в данном случае будет совпадать по модулю с обычным объёмом. Оказывается, этот факт верен для любого многогранника без самопересечений.

Найдём объём  $v$  многогранника, у которого пять вершин. Проведём сечение  $ACE$  и получим два тетраэдра (рис. 19, а, б). Объём  $v$  равен либо сумме, либо разности объёмов  $v_1$  и  $v_2$  тетраэдров  $ABCE$

и  $ACDE$ . Для обобщённых объёмов можем записать

$$V = \pm V_1 \pm V_2$$

( $|V| = v, |V_1| = v_1, |V_2| = v_2$ ). Преобразуем это выражение так, чтобы удалось избавиться от знаков  $\pm$ . Сначала возведём равенство в квадрат:

$$V^2 = V_1^2 + V_2^2 \pm 2V_1V_2,$$

затем перенесём члены  $V_1^2$  и  $V_2^2$  в левую часть и после повторного возведения в квадрат для  $V$  получим уравнение

$$V^4 - 2(V_1^2 + V_2^2)V^2 + (V_1^2 - V_2^2)^2 = 0. \quad (6)$$

Так как  $V_1^2$  и  $V_2^2$  выражаются по формуле (1) через длины рёбер исходного многогранника, все коэффициенты уравнения (6) зависят только от квадратов длин рёбер многогранника. Получаем, что объём любого многогранника вида  $ABCDE$  с данными длинами рёбер обязательно удовлетворяет уравнению вида (6).

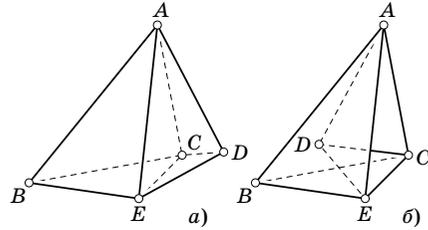


Рис. 19

Рассмотрим несколько частных случаев.

I. Пусть объёмы тетраэдров  $ABCE$  и  $ADCE$  равны:  $V_1 = V_2$ . Тогда имеем два возможных расположения этих тетраэдров: 1) они находятся по разные стороны от плоскости  $ACE$ ; тогда объём многогранника  $ABCDE$  равен сумме объёмов составляющих его тетраэдров, что соответствует корню  $V^2 = 4V_1^2$  и  $V = \pm 2V_1$  (знак зависит от выбора ориентации, при соглашении, что через  $V_1$  обозначен геометрический, т. е. положительный объём тетраэдра); 2) тетраэдры расположены по одну сторону от плоскости  $ACE$  и тогда при вычислении объёма  $ABCDE$  объёмы тетраэдров должны вычитаться, что соответствует корню  $V^2 = 0$ .

II.  $V_2 = 0$ , т. е. тетраэдр  $ADCE$  вырождается в область на плоскости и вершина  $D$  расположена на плоскости  $ACE$ . Тогда объём многогранника  $ABCDE$  равен объёму тетраэдра  $ABCE$  (с точностью до ориентации), и этот факт согласуется с решением уравнения (6):

$$V^4 - 2V_1^2V^2 + V_1^4 = 0 \Leftrightarrow (V^2 - V_1^2)^2 = 0 \Leftrightarrow V^2 = V_1^2 \Leftrightarrow V = \pm V_1.$$

III.  $V_1 = 0, V_2 = 0$ . Оба тетраэдра  $ABCE$  и  $ADCE$  вырождены и весь многогранник  $ABCDE$  расположен на одной плоскости  $ACE$  (если треугольник  $ACE$  не вырождается в отрезок) и его объём поэтому равен нулю, что согласуется с получаемым в этом случае уравнением  $V^4 = 0$ .

Таким образом, мы видим, что во всех рассмотренных случаях объём многогранника  $ABCDE$  непременно является корнем соответствующего уравнения (6). Кроме того, заметим, что уравнение (6) всегда имеет не более, чем два корня  $V^2$  и есть такие значения длин

рёбер рассматриваемого многогранника, когда уравнение (6) имеет два разных корня  $V^2$ , соответствующие двум реально существующим в пространстве многогранникам  $ABCDE$  с разными объёмами. Это значит, что для объёма  $ABCDE$  не может существовать многочлен степени меньше чем 4 (так как с учётом изменения ориентации имеем четыре разных обобщённых объёма), т. е. уравнение (6) является уравнением наименьшей степени, которому удовлетворяют объёмы всех возможных расположений многогранника  $ABCDE$  в пространстве, при условии, что длины рёбер остаются без изменения.

Оказывается, и в общем случае можно показать, что обобщённые объёмы многогранников — корни полиномиальных уравнений с коэффициентами, которые не зависят от расположения вершин многогранника в пространстве, а представляют собой многочлены от квадратов длин его рёбер. Числовые коэффициенты этих многочленов определяются комбинаторным строением многогранника, т. е. у многогранников с одинаковым комбинаторным строением уравнение для обобщённого объёма одно и то же.

В окончательном виде обобщение формулы (1) на объём произвольного многогранника даёт

**Основная теорема.** Пусть  $\mathcal{P}$  — множество всех многогранников, имеющих одинаковое комбинаторное строение  $K$  и одинаковый набор длин рёбер  $l_1, \dots, l_n$ , где  $n$  — число рёбер. Тогда можно указать многочлен

$$Q(V) = V^{2N} + a_1V^{2N-2} + \dots + a_{N-1}V^2 + a_N, \quad (7)$$

такой что обобщённый объём каждого многогранника из  $\mathcal{P}$  является корнем этого многочлена. Коэффициенты  $a_i, 1 \leq i \leq N$ , сами являются многочленами от  $l_1^2, \dots, l_n^2$  с числовыми коэффициентами, зависящими лишь от комбинаторного строения  $K$ .

Мы не можем, конечно, дать здесь хотя бы краткое изложение доказательства основной теоремы, заметим лишь, что оно конструктивное и проводится методом индукции по числу вершин и по топологическому роду многогранника.

Базой индукции служит формула (1) для объёма тетраэдра. Алгоритм построения многочлена (7) неоднозначен, т. е. на каждом шаге построения есть выбор следующего шага, поэтому таких многочленов вида (7) можно построить, вообще говоря, очень много. По той же причине мы не можем сказать, чему равна наименьшая степень таких многочленов (7).

Рассмотрим некоторые

## ПРИМЕРЫ,

иллюстрирующие утверждение основной теоремы о многочлене для объёма многогранников.

Первый пример — это, конечно, многочлен (1) для объёма тетраэдра. Он имеет два корня, соответствующие двум разным выборам ориентации тетраэдра. Это уравнение содержит 23 монома (слагаемых): один моном от  $V$  и 22 монома от длин рёбер.

Второй пример даётся биквадратным уравнением (6), содержащим уже около тысячи мономов.

Следующий по сложности многогранник — это октаэдр, имеющий шесть вершин (случай другого многогранника с шестью вершинами, рис. 20, читателю не составит труда разобраться самостоятельно — должен получиться многочлен степени 8; рекомендуем убедиться, что все четыре корня  $V^2$  действительно реализуются в виде объёмов четырёх разных многогранников). Многочлен для объёма тетраэдра, получаемый по методу доказательства основной теоремы, имеет степень  $2^{10} = 1024$ . Его впервые нашла О. Павлова в 1991 году. Впоследствии А. Астрелин и автор этой брошюры предложили новый способ построения многочлена, степень которого оказалась равной 16 (фактически 8, так как в нём только чётные степени объёма).

Как пример приведём многочлен для объёма октаэдра, длины рёбер которого заданы соотношениями

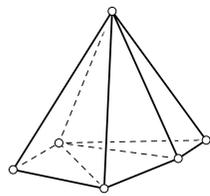


Рис. 20

$$AB^2 = CD^2 = a, \quad BC^2 = DA^2 = b, \quad NB^2 = SD^2 = c, \\ ND^2 = SB^2 = d, \quad NA^2 = SC^2 = e, \quad NC^2 = SA^2 = f$$

(см. рис. 15), тогда уравнение для объёма принимает следующий вид:

$$w^8 - 4(ab(c+d+e+f-a-b) + cd(a+b+e+f-c-d) + ef(a+b+c+d-e-f) - eac - fad - fbc - ebd)w^7 = 0$$

(где  $w = 36V^2$ ). Корень  $w = 0$  соответствует октаэдру

рис. 15, б, ненулевой корень — октаэдру рис. 15, а.

Для октаэдра общего вида (т. е. с 12 разными буквенными значениями длин рёбер) многочлен минимальной степени содержит уже много миллионов слагаемых, и поэтому выписать его, конечно, практически невозможно. Но при помощи компьютера с ним вполне удаётся работать. Вы вводите конкретные численные значения длин рёбер, и компьютер выдаёт искомый многочлен с численными значениями коэффициентов.

Вот пример такого вычисления (проведённого С. Михалёвым): пусть длины рёбер октаэдра заданы равенствами  $NA^2 = 41$ ,  $NB^2 = 34$ ,  $NC^2 = 29$ ,  $ND^2 = 26$ ,  $SA^2 = 52$ ,  $SB^2 = 45$ ,  $SC^2 = 40$ ,  $SD^2 = 37$ ,  $AB^2 = 25$ ,  $BC^2 = 13$ ,  $CD^2 = 5$ ,  $DA^2 = 17$  (рис. 21) Тогда получаем следующее уравнение для объёма ( $w = 36V^2$ ):

$$w^8 - 97\,600w^7 + 2150\,278\,656w^6 - 14\,733\,233\,766\,400w^5 + \\ + 28\,949\,731\,124\,248\,576w^4 - 16\,429\,559\,369\,328\,230\,400w^3 + \\ + 2\,673\,932\,358\,387\,945\,701\,376w^2 - 135\,342\,229\,652\,751\,620\,505\,600w + \\ + 1\,546\,362\,629\,160\,356\,875\,862\,016 = 0.$$

Оно имеет восемь корней: 69 696, 17 424, 7744, 1936, 576, 144, 64 и 16, которые соответствуют 16 объёмам (со знаком  $\pm$ ) восьми реально существующих октаэдров с указанными длинами рёбер (рис. 21).

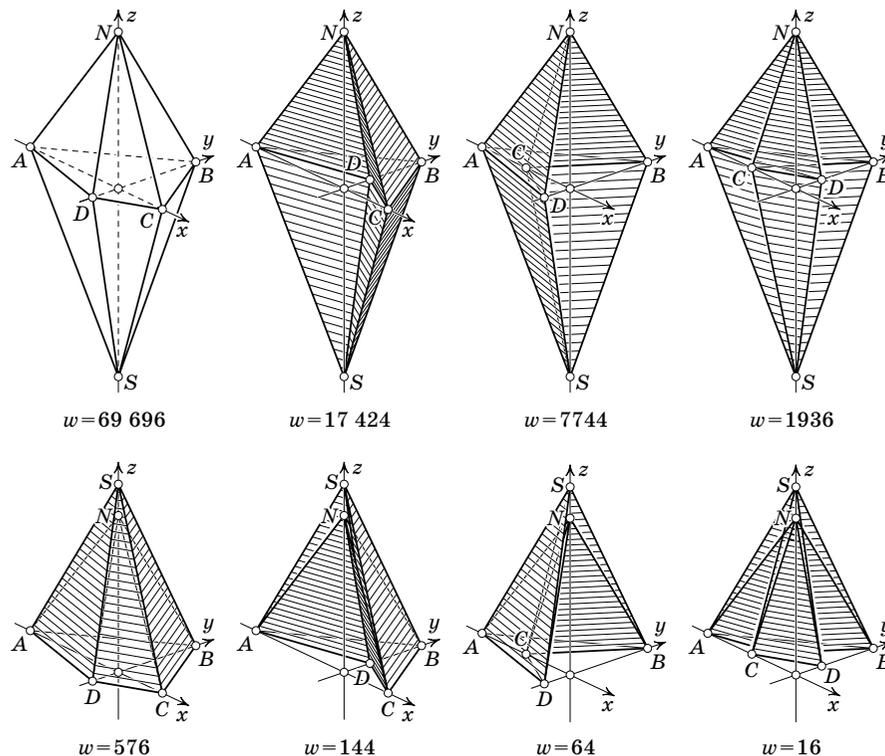


Рис. 21

Строятся они так: первый октаэдр имеет вершины  $A(-4, 0, 0)$ ,  $B(0, 3, 0)$ ,  $C(2, 0, 0)$ ,  $D(0, -1, 0)$ ,  $N(0, 0, 5)$ ,  $S(0, 0, -6)$ , а остальные получаются поочерёдными зеркальными отражениями относительно плоскостей координат (всего  $2^3 = 8$  комбинаций, включая начальное положение). Следовательно, для октаэдров минимально возможная степень многочлена  $Q(V)$  равна 16, так как ни один многочлен степени меньшей 16 не может иметь в качестве своих корней все эти 16 значений.

Основная теорема открывает совершенно новые возможности для работы с многогранниками. Прежде всего, не имея даже самого многогранника, а зная только его натуральную развёртку (развёртка

называется *натуральной*, если все треугольники развёртки и только они суть будущие грани многогранника), можно составить уравнение  $Q(V)=0$  (см. формулу (7)) для объёма и ещё до построения многогранника сказать, что значение его объёма должно быть среди корней этого уравнения. Получается, что мы ещё не построили многогранник по его развёртке, а уже знаем возможные значения его объёма! Более того, если окажется, что для выписанного уравнения все его корни  $V^2$  — отрицательные или комплексные числа, значит, из такой развёртки нельзя склеить ни одного многогранника\*).

Далее, можно вывести уравнения, позволяющие в общем случае определять двугранные углы между склеиваемыми гранями. Возможных значений этих углов оказывается конечное число; построение многогранника по его граням на каждом шаге сводится к правильному выбору угла между склеиваемыми гранями, и поэтому путём хотя бы перебора вариантов либо удастся склеить многогранник, либо будет доказана невозможность этого. Таким образом, открывается путь алгоритмического решения задачи о построении многогранника по его натуральной развёртке.

Все эти действия по аналогии с известным термином «решение треугольников» логично назвать «решением многогранников». Но соответствующие вычисления настолько большие, что мощности персональных компьютеров пока не хватает даже для того, чтобы найти многочлен (7) для объёма многогранника Штеффена (этот многогранник имеет девять вершин, рис. Ц16—Ц18, см. также с. 29). Тем не менее важно, что задачи метрической геометрии многогранников теперь становятся в принципе конечно-вычислимыми по крайней мере в том же смысле, в каком шахматы являются конечной игрой.

Но пожалуй самым «лакомым» следствием является возможность применения основной теоремы для решения проблемы «кузнечных мехов», появившейся в теории изгибаний многогранников.

## ИЗГИБАНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

— это непрерывные деформации, при которых изменяется хотя бы один из двугранных углов при рёбрах, но грани остаются равными исходным. Иначе говоря, в теории изгибаний грани многогранников рассматриваются как абсолютно твёрдые пластины, способные вращаться вокруг рёбер и вершин. Если многогранник допускает деформацию такого вида, он называется *изгибаемым*, в противном

\*) Критерий того, можно ли склеить из данной (не обязательно натуральной) развёртки многогранник, даёт также теорема А. Д. Александрова. См. брошюру Н. П. Долбилина «Жемчужины теории многогранников», М.: МЦНМО, 2000 (вып. 5 серии «Библиотека „Математическое просвещение“»). Правда, если дана развёртка и для неё выполняются условия теоремы Александрова, т. е. из развёртки можно склеить многогранник, то эта теорема не даёт никаких сведений о том, как будет выглядеть склеенный многогранник (известно только, что он будет выпуклым). — *Прим. ред.*

случае — *неизгибаемым*. Движения многогранника в пространстве как твёрдого тела не являются его изгибаниями, так как при таком движении ни один двугранный угол не изменяется. Поэтому такие движения иногда называют *тривиальными* изгибаниями, а те деформации, о которых шла речь в определении изгибаний, называют *нетривиальными изгибаниями*. Очевидно, требование изменения в ходе нетривиального изгибания хотя бы одного двугранного угла можно заменить требованием изменения хотя бы одной диагонали многогранника.

**З а м е ч а н и е.** Возможность простого перемещения многогранника в пространстве как твёрдого тела, т. е. без изменения его двугранных углов, используется для фиксации положения каких-либо «элементов» многогранника в ходе его изгибания. Делается это так: к деформации нетривиального изгибания многогранника добавляют движение, подобранное так, чтобы рассматриваемый элемент вернулся в исходное положение. Пусть, например, требуется, чтобы данная треугольная грань  $ABC$  была неподвижна. Если после деформации изгибания грань «ушла» из своего исходного положения, то сначала параллельным переносом вернём, скажем, точку  $A$  из нового в старое её положение, затем вращением вокруг точки  $A$  приведём в совпадение с прежними положениями вершины  $B$  и  $C$ .

Простейший пример изгибания многогранника — открывание или закрывание книги с твёрдой обложкой (многогранник может иметь край). Примеры посложнее: трёхгранный угол неизгибаем, а  $n$ -гранный угол при  $n > 3$  изгибаем. Если многогранник ещё сложнее, а особенно если он замкнутый, т. е. не имеет края, исследование его изгибаемости — сложная задача, так как изгибания всех многогранных углов должны быть согласованы между собой.

Первый значительный результат в теории изгибаний многогранников получил в 1813 году О. Коши, чья знаменитая теорема утверждает, что любой выпуклый многогранник неизгибаем. Вопрос о том, бывают ли замкнутые многогранники изгибаемыми, долгое время оставался открытым. Лишь в 1897 году бельгийский инженер Р. Брикар доказал, что существуют

## ИЗГИБАЕМЫЕ ОКТАЭДРЫ,

и дал их полную классификацию. Оказалось, что все изгибаемые октаэдры можно разбить на три типа. Сейчас мы опишем первые два, а так же их непрерывные деформации в пространстве с сохранением длин рёбер.

Сначала сформулируем две леммы (простые доказательства которых оставляем читателю).

**Лемма 1.** Пусть в пространстве дан четырёхугольник  $ABCD$  с равными противоположными сторонами  $AB=CD$ ,  $AD=BC$ . Тогда

у этого четырёхугольника есть ось симметрии, проходящая через середины диагоналей  $AC$  и  $BD$ , а в частном случае, когда четырёхугольник является параллелограммом, ось симметрии проходит через точку пересечения диагоналей перпендикулярно плоскости параллелограмма.

**Лемма 2.** Пусть в пространстве дан четырёхугольник  $ABCD$  с парно равными сторонами  $AB=AD$ ,  $CB=CD$ . Тогда этот четырёхугольник имеет плоскость симметрии, проходящую через диагональ  $AC$  перпендикулярно диагонали  $BD$ .

Эти леммы позволяют нам описать изгибаемые октаэдры Брикара первого и второго типа. Рассмотрим четырёхзвенный механизм  $ABCD$  (т. е. четыре стержня, соединённые шарнирами и имеющие возможность вращаться вокруг них) и удовлетворяющий условиям леммы 1. Пусть  $l$  — его ось симметрии. Пусть  $N$  — произвольная точка пространства, отличная от  $A, B, C, D$  и не лежащая на оси  $l$  (рис. 22, *a* и *б* изображают два разных вида четырёхугольника  $ABCD$ , дающих четырёхгранный угол  $NABCD$  без самопересечений и с самопересечениями, соответственно). Соединим  $N$  с вершинами четырёхзвенника  $ABCD$  и полученные «проволочные» треугольники  $NAB, NBC, NCD, NDA$  заклеим плоскими треугольниками (эта операция образно называется «обшивкой каркаса гранями»). Получится четырёхгранный угол с известными длинами рёбер. Этот четырёхгранный угол при фиксированных длинах рёбер может изгибаться, причём его нетривиальные изгибания определяются изменяющимся значением одного параметра — угла  $\alpha = \angle ABC$ . Действительно, угол  $\alpha$  определяет поло-

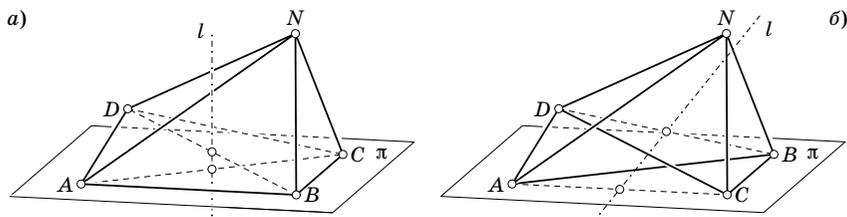


Рис. 22

жение треугольника  $ABC$  на плоскости  $\pi$ , а знание расстояний от трёх точек  $A, B, C$  до  $N$  определяет положение  $N$  однозначно (на самом деле точка  $N$  может иметь два положения, симметричных относительно плоскости  $\pi$ , но мы рассматриваем только непрерывные изменения исходного положения точки  $N$ ), а знание положения точек  $A, B, N$  и расстояний от них до  $D$  однозначно определяет непрерывные изменения положения точки  $D$ .

Итак, четырёхгранник  $NABCD$  изгибается, но он является многогранником с краем, его край — четырёхугольник  $ABCD$ . Возьмём

теперь точку  $S$ , симметричную  $N$  относительно прямой  $l$ , и повторим построения четырёхгранного угла с вершиной в  $S$  и основанием  $ABCD$ . Объединение, или склеивание двух четырёхгранных углов  $NABCD$  и  $SABCD$  по их общему краю  $ABCD$  даст замкнутый многогранник (рис. Ц1—Ц3; эти рисунки сделаны для октаэдра, построенного на базе четырёхугольника из рис. 22, *a*), так как после такой операции край  $ABCD$  исчезает. Вместе с тем этот многогранник будет изгибаемым, так как изгибания новой его части  $SABCD$  можно взять просто как симметричные относительно прямой  $l$  повторения изгибаний части  $NABCD$  (заметим, что положение прямой  $l$  в ходе изгибания изменяется, но она всегда остаётся осью симметрии четырёхугольника  $ABCD$  в ходе его изгибания; покажите, используя замечание на стр. 21, что прямую  $l$  всегда можно считать направленной вдоль фиксированной оси  $z$ ).

Многогранник  $NABCD S$  имеет 6 вершин, 8 треугольных граней и 12 рёбер, для длин которых выполнены равенства

$$AB=CD, BC=AD, NB=SD, NA=SC, ND=SB, NC=SA. \quad (8)$$

Комбинаторно эти рёбра и грани соединены как рёбра и грани обычного правильного октаэдра (см. рис. 15, *a*), поэтому  $NABCD S$  тоже можно назвать октаэдром, только расположение его вершин в пространстве отличается от расположения вершин выпуклого октаэдра, и поэтому из рис. Ц1 трудно сразу увидеть, что мы имеем дело с другими, непривычными нам реализациями в пространстве модели октаэдра. На самом деле эти реализации октаэдра физически построить нельзя, так как в них есть пересекающиеся грани. Например, на рис. 22, *б* уже четырёхгранник  $NABCD$  имеет пересекающиеся грани  $NAB$  и  $NCD$ , а на рис. Ц2 каждый из четырёхгранных углов  $NABCD$  и  $SABCD$  не имеет самопересечений, но в их объединении грань  $SBC$  пересекается с гранями  $NAB$  и  $NAD$ , а грань  $NDC$  пересекается с гранью  $SDC$ .

Заметим следующее свойство построенных октаэдров: если взять любые две вершины, не соединённые между собой ребром, то из равенств (8) видно, что оставшиеся четыре вершины образуют четырёхугольник (называемый *экватором* октаэдра) с равными противоположными сторонами. Тем самым по лемме 1 каждый экватор имеет ось симметрии, но на самом деле все эти оси совпадают, и поэтому в проведённом построении все экваторы равноправны.

Описанный выше октаэдр относится к *первому типу* изгибаемых октаэдров Брикара. *Второй тип* октаэдров Брикара получается на основании леммы 2 аналогично октаэдрам первого типа. Возьмём четырёхугольник  $ABCD$ , удовлетворяющий условиям леммы 2. У него есть плоскость симметрии  $\pi$ . Возьмём любую точку  $N$ , не лежащую на плоскости  $\pi$  и отличную от вершин четырёхугольника  $ABCD$ . Соединив  $N$  с точками  $A, B, C$  и  $D$  и заклеив «проволочные» треугольники плоскими, получаем изгибаемый четырёхгранный угол  $NABCD$

с краем  $ABCD$ . Пусть  $S$  — точка, симметричная  $N$  относительно плоскости  $\pi$ . Построим четырёхгранный угол  $SABCD$ , и он вместе с четырёхгранным углом  $NABCD$  даст второй тип изгибаемых октаэдров Брикара, которые тоже имеют самопересечения. У построенного октаэдра имеем следующие равенства длин рёбер:

$$AB=AD, CB=CD, ND=SB, NB=SD, NA=SA, NC=SC. \quad (9)$$

В отличие от октаэдров первого типа, в данном случае не все экваторы равноправны. А именно, у экватора  $NBSD$  равны противоположные стороны, поэтому он имеет ось симметрии, а у экватора  $NASC$  есть равные пары прилегающих сторон, поэтому он имеет плоскость симметрии, совпадающую, конечно, с плоскостью  $\pi$ .

Существует ещё третий тип изгибаемых октаэдров, но их описание существенно сложнее (и к тому же для дальнейшего они нам не понадобятся). Ещё более сложно доказать, что эти три типа исчерпывают все изгибаемые октаэдры.

Используем теперь изгибаемые октаэдры Брикара, чтобы построить

### ИЗГИБАЕМЫЕ МНОГОГРАННИКИ КОННЕЛЛИ,

которые уже не имеют самопересечений (т. е. являются *вложенными* в пространство). Основная идея — попытаться построить изгибаемый многогранник, устранив самопересечения в октаэдрах Брикара. Рассмотрим изгибаемый октаэдр Брикара первого типа, у которого

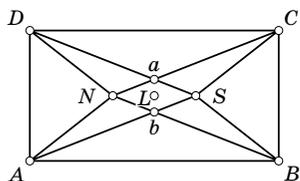


Рис. 23

границы дважды покрывают прямоугольник  $ABCD$  (рис. 23);  $L$  — точка пересечения диагоналей прямоугольника, через которую перпендикулярно к плоскости чертежа проходит ось симметрии  $l$  четырёхзвенника  $ABCD$ . Сначала сведём к минимуму возможные самопересечения. Для этого в четырёхгранном угле  $NABCD$  заменим каждую грань тремя боковыми гранями тетраэдров, обращённых вершинами вверх, оставив рёбра основания на своём месте в прямоугольнике, причём выберем расположения всех 12 граней так, чтобы они между собой не пересекались (для чего достаточно, чтобы вершины тетраэдров проектировались внутрь треугольников, которые они заменяют). Получим многогранник, составленный из четырёх тетраэдров без основания, как на рис. 24, и назовём этот многогранник «крышкой».

Аналогичным образом заменим грани четырёхгранного угла  $SABCD$  тетраэдрами вершинами вниз и получим «дно» будущего многогранника (рис. 25).

При изгибании четырёхгранных углов  $NABCD$  и  $SABCD$  их рёбра

как-то перемещаются, и они автоматически определяют движения боковых граней построенных тетраэдров.

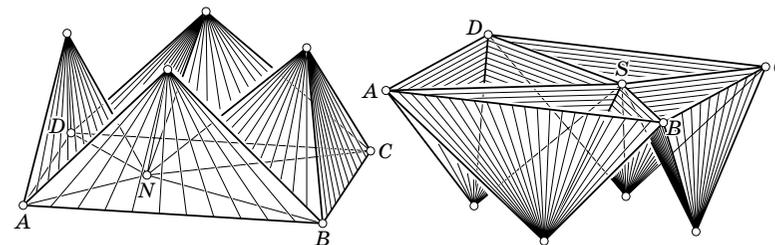


Рис. 24

Рис. 25

«Крышка» и «дно» склеены между собой по сторонам прямоугольника  $ABCD$ , и они вместе образуют замкнутый изгибаемый многогранник  $Q$ , состоящий из 24 боковых граней 8 тетраэдров. В отдельности на «крышке» и «дне» по построению самопересечений нет. Боковые грани и рёбра тетраэдров «крышки» и «дна» располагаются

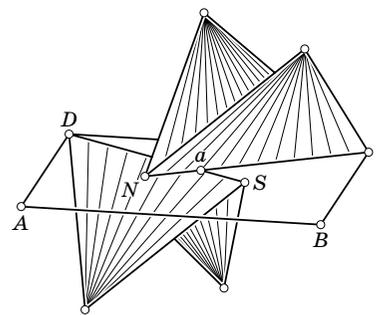


Рис. 26

по разные стороны от общей плоскости их оснований, поэтому они тоже не пересекаются. Но рёбра на основании тетраэдров остались те же, что были в прямоугольнике на рис. 23. Видно, что есть всего две точки самопересечения — точки  $a$  и  $b$ . Наша задача — убрать эти самопересечения.

В многограннике  $Q$  самопересечение выглядит как на рис. 26, т. е. фактически оно является самокасанием: в точке  $a$  касаются рёбра двух двугранных углов. Коннелли сумел

изменить один двугранный угол в окрестности точки  $a$  так, чтобы исчезло самокасание, а новые элементы конструкции изгибались согласованно с изгибанием изменённого двугранного угла, состоящим в непрерывном изменении расстояния двугранного угла.

Для этого рассмотрим октаэдр Брикара второго типа, построенный, однако, иначе, чем это делалось выше, а именно, исходя из наличия у него экватора с осью симметрии, как это было замечено выше. Пусть дан самопересекающийся плоский четырёхзвенный механизм  $ABCD$  с равными противоположными сторонами  $AB=CD$ ,  $BC=AD$  (рис. 27). Легко показать, что вершины этого четырёхугольника являются вершинами

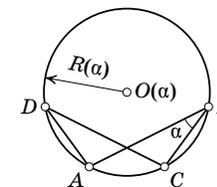


Рис. 27

равнобокой трапеции, поэтому вокруг  $ABCD$  можно описать окружность. Центр  $O$  и радиус  $R$  окружности зависят от  $\alpha = \angle ABC$ . Четырёхзвенник  $ABCD$  может изменять свою форму с сохранением длин своих сторон (т. е. он может изгибаться), оставаясь на плоскости и имея сторону  $DC$  в неподвижном положении. При этом в новых положениях вершины четырёхугольника по-прежнему будут вершинами равнобокой трапеции и новое положение центра  $O(\alpha)$  описанной окружности и её радиус  $R(\alpha)$  при изгибании четырёхугольника  $ABCD$  на плоскости изменяются непрерывно вместе с  $\alpha$ . Возьмём теперь над и под точкой  $O(\alpha)$  две точки  $N$  и  $S$  на одинаковом расстоянии  $h(\alpha)$  от  $O(\alpha)$  (можно и на разных расстояниях, с соответствующими изменениями в дальнейших рассуждениях), таком, чтобы  $R^2(\alpha) + h^2(\alpha) = d^2 = \text{const}$  и соединим  $N(\alpha)$  и  $S(\alpha)$  отрезками длины  $d$  с точками  $A(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$ ,  $C$  и  $D$  (рис. ЦЗ—Ц5).

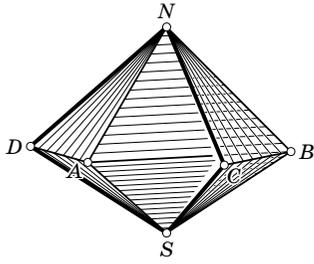


Рис. 28

После «обшивки» каркаса плоскими треугольниками получится октаэдр  $P$ , у которого есть плоскость симметрии, проходящая через точки  $N$  и  $S$  перпендикулярно прямой  $AC$ , т. е. мы получили октаэдр Брикара второго типа. Его изгибания определяются изгибаниями плоского четырёхзвенного механизма  $ABCD$ . Удалим из  $P$  две грани, дающие самопересечения:  $NDC$  и  $SDC$ . Останется многогранник  $P'$  с краем, изображённый на рис. 28. Хотя ребра  $CD$  и нет, в ходе изгибания многогранника  $P'$  как части  $P$  расстояние  $CD$  остаётся постоянным, так как оно равно длине ребра  $CD$  в октаэдре  $P$ . При этом же изгибании расстояние  $NS$ , равное  $2h(\alpha)$ , изменяется, поэтому изменяется угол между плоскостями удалённых граней  $NDC$  и  $SDC$ , причём точки  $D$  и  $C$  при этом можно считать остающимися на месте. Используем это обстоятельство для того, чтобы изменить двугранный угол на рис. 26, вставив туда соответствующим образом подобранный многогранник  $P'$ , который для краткости и большей ясности будем называть «зарубкой Коннелли».

Пусть  $T$  — биссекторная плоскость, скажем, верхнего двугранного угла на рис. 26. Расположим четырёхзвенник  $ABCD$  на плоскости  $T$  так, чтобы отрезок  $DC$  шёл по ребру двугранного угла, отрезки  $ND$  и  $NC$  были на одной полуплоскости, а  $DS$  и  $CS$  были на другой полуплоскости двугранного угла (рис. Ц7—Ц9). Части  $ND$  и  $NC$ ,  $SD$  и  $SC$  края многогранника  $P'$  — «зарубки Коннелли» — прилегают к соответствующим частям граней двугранного угла. Изменение величины  $\beta$  двугранного угла приводит к изгибанию многогранника  $P'$ , согласованному с движением граней двугранного угла, в который он был встроен (т. е. ребра  $ND$  и  $NC$ ,  $SD$  и  $SC$  края многогранника  $P'$  не изменяют свою длину и остаются на гранях двугранного угла). Расположение точек  $D$  и  $C$  на ребре двугранного угла

может быть выбрано так, чтобы точка  $a$  оказалась на отрезке  $DC$ , не попадая, однако, на ребро  $AB$ , т. е. чтобы изменённый верхний двугранный угол на рис. 26 не касался нижнего двугранного угла. Такое же построение можно провести и в окрестности точки  $b$  — второй точки самокасания, причём размеры встроеного многогранника  $P'$  можно подобрать так, чтобы в пределах некоторого изменения раствора двугранного угла не появились новые самопересечения. Таким образом получится изгибаемый многогранник без самопересечений с 26 вершинами.

Легко видеть, что эту конструкцию можно сразу же упростить, а именно, в исходном дважды покрытом прямоугольнике можно оставить на месте грани  $AND$  и  $BSC$  (см. рис. 23), не заменяя их тетраэдрами, тогда получится изгибаемый многогранник с 24 вершинами. Его развёртку с подходящими размерами треугольников можно найти в журнале «Квант», № 7 за 1979 год, а на рис. Ц10—Ц12 изображены различные положения этого многогранника в ходе его изгибания.

Существенное упрощение получается, если в исходном октаэдре Брикара добавлять тетраэдры так, чтобы была необходимость использовать «зарубку Коннелли» только один раз, как это предложили П. Делинь и Н. Кёйпер. Делается это так. Отправным положением будет изгибаемый октаэдр Брикара первого типа, изображённый на рис. 29. На нём вершины  $A$  и  $C$  лежат на горизонтальной плоскости (условно с координатой  $z=0$ ), вершины  $B'$  и  $D'$  подняты на высоту  $\epsilon > 0$ , а вершины  $N'$  и  $S'$  — на высоту  $\delta > \epsilon$  и всё это проектируется ортогонально на прямоугольник рис. 23 (где  $L$  по-прежнему обозначает точку пересечения этого прямоугольника с вертикально расположенной осью симметрии рассматриваемого октаэдра). В новом положении ребро  $AS'$  проходит под ребром  $N'B'$ , ребро  $N'C$  — под ребром  $S'D'$ , так что прежних точек самопересечения нет, но есть новые пересечения граней. Построим теперь «дно» следующим образом: в исходном четырёхгранном угле  $S'AB'CD'$  с вершиной  $S'$  заменим грань  $S'CD'$  тетраэдром вершиной вниз (рис. 30). Краем построенного многогранника является четырёхугольник  $AB'CD'$ , но теперь есть «яма» в виде тетраэдра  $S_0S'CD'$ . Далее строим «крышу» так. Над фигурой рис. 31 возьмём две точки  $T$  и  $K$  и построим неполные пирамиды с гранями  $N'D'T$  и  $D'CT$ ,  $N'B'K$  и  $B'CK$ . Получится многогранник без самопересечений и с двумя четырёхугольными краями  $AB'CD'$  и  $N'KCT$  (рис. 32). Он пересекается с построенным ранее

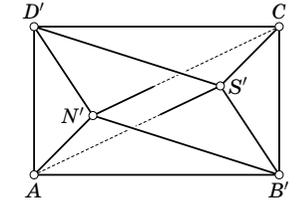


Рис. 29

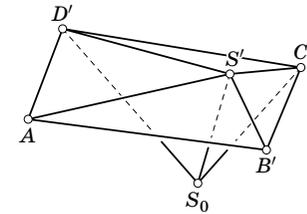


Рис. 30

Он пересекается с построенным ранее

«дном» только вдоль контура  $AB'CD'$  и после склеивания «крышки» с «дном» вдоль этого контура получится многогранник (обозначим его  $\Gamma$ ) без самопересечений и с одним четырёхугольным краем  $N'KCT$ .

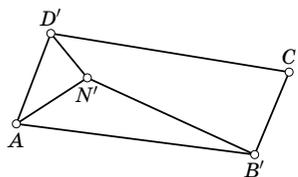


Рис. 31

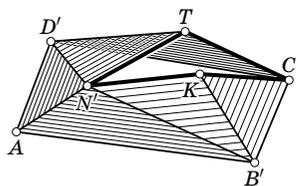


Рис. 32

Многогранник  $\Gamma$  изгибается, причём его исходные вершины просто повторяют те движения, которые были у начального изгибаемого октаэдра Брикара первого типа на рис. 29, поэтому, в частности, расстояние  $N'C$  остаётся постоянным, так как оно соответствует длине ребра  $N'C$  исходного октаэдра. Теперь подберём «зарубку Коннелли» так, чтобы её добавление закрыло отверстие с краем  $N'KCT$ . Для этого выберем положения точек  $T$  и  $K$  с условием  $TC = TN' = KN' = KC$ , что вполне возможно. Возьмём «зарубку Коннелли» как на рис. 28, но с изменёнными в соответствии с рис. 33 обозначениями вершин и со сторонами  $TN' = TP = TQ = TC = KN' = KC = KP = KQ$ .

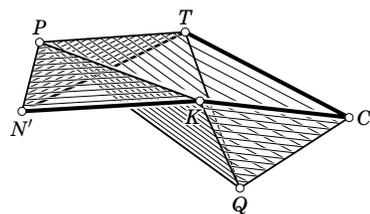


Рис. 33

Можем считать, что изгибания многогранника  $\Gamma$  происходят с сохранением плоскости трёх вершин  $N', K, T$ , и точки  $K$  и  $T$  перемещаются по фиксированной прямой  $KT$  так, что середина отрезка  $KT$  остаётся неподвижной. Этими условиями движения точек  $K, T, N'$  и  $C$ , а значит, и остальных вершин многогранника  $\Gamma$  определены однозначно. При этих же условиях изгибания «зарубки Коннелли» тоже определяются однозначно, поэтому движения её вершин  $K, T, N'$  и  $C$  будут теми же самыми, что и у соответствующих вершин многогранника  $\Gamma$ . Это значит, что когда мы склеим край  $N'KCT$  «зарубки Коннелли» с таким же краем многогранника  $\Gamma$ , изгибания  $\Gamma$  и «зарубки» будут согласованными. Остаётся позаботиться, чтобы «зарубка» поместилась в «яму», пересекаясь с многогранником  $\Gamma$  только по их общему краю, для чего нужно выбрать то положение плоскости механизма  $PQCN'$ , когда точка  $Q$  окажется внутри тетраэдра  $S_0D'S'C$ , а точка  $P$  — выше треугольника  $AS'D'$ , и тогда получится изгибаемый многогранник без самопересечений, имеющий 11 вершин и 18 граней (на рис. Ц13—Ц15 изображены три его положения в процессе изгибания).

Оба построенных выше изгибаемых многогранника трудны для моделирования, так как имеют довольно сложное строение, но оказывается, существует

## ИЗГИБАЕМЫЙ МНОГОГРАННИК ШТЕФФЕНА,

имеющий всего 9 вершин и 14 граней. Этот многогранник был найден в 1978 г. немецким математиком Клаусом Штеффеном. Опишем его строение и объясним, почему он изгибается.

Возьмём «зарубку Коннелли», изображённую на рис. 34. Она представляет собой октаэдр Брикара второго типа с удалёнными гранями  $CDS$  и  $CDN$ . Её нетривиальные изгибания можно представить как вращение вершины  $N$  вокруг неподвижной прямой  $DC$ , при неподвижных отрезках  $SD$  и  $SC$  (так как расстояние  $DC$  постоянно как длина удалённого ребра изгибаемого октаэдра, три точки  $S, D, C$  можно считать неподвижными). При вращении  $N$  вершины  $A$  и  $B$  перемещаются соответственным образом. Для данного рисунка если  $N$  уходит влево (вправо), то  $A$  смещается вниз (вверх),  $B$  уходит вверх (вниз), но вообще направления их движений зависят от конкретных длин рёбер. Рассмотрим движения точки  $N$  более подробно, для чего введём следующую систему координат: направим ось  $Ox$  вдоль прямой  $DC$ , от  $D$  к  $C$ , плоскость  $SDC$  примем за плоскость  $xOz$ , направив ось  $Oz$  вверх, начало координат поместим в середине отрезка  $DC$  (см. рис. 34). Пусть длина ребра  $DC$  равна  $2a$ , длина  $SD = SC = b > a$ . Тогда  $D, C, S$  имеют, соответственно, координаты  $(-a, 0, 0), (a, 0, 0), (0, 0, -\sqrt{b^2 - a^2})$ . Точка  $N$  вращается вокруг оси  $Ox$ , на постоянном расстоянии  $d$  от  $D$  и  $C$ . Тогда её координаты суть

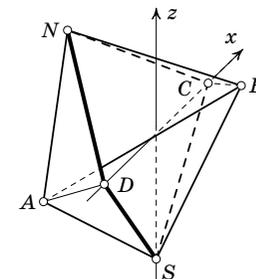


Рис. 34

$$(0, \sqrt{d^2 - a^2} \sin \varphi, \sqrt{d^2 - a^2} \cos \varphi). \quad (10)$$

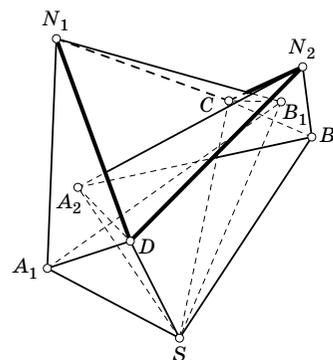


Рис. 35

Возьмём теперь второй экземпляр той же самой «зарубки Коннелли», идентичный рассмотренному. Расположим их сначала с полным совпадением. Если затем в первой «зарубке» точку  $N$  повернём влево, а во второй — вправо, то точки  $D, C, S$  останутся на месте, а точки  $N, A, B$  разойдутся, приняв соответственно новые положения  $N_1, A_1, B_1$  и  $N_2, A_2, B_2$ . Зафиксируем некоторые положения точек  $N_1$  и  $N_2$ , симметричные относительно неподвижной плоскости  $DSC$  и склеим (отождествим) в этом положении рёбра  $SD$  и  $SC$  из первой «зарубки» с такими же рёбрами из второй «зарубки». Получится многогранник  $M'$ , изображённый на рис. 35 и имеющий край  $N_1DN_2C$ . Далее вершины

$N_1$  и  $N_2$  можно вращать согласованно так, чтобы расстояние  $N_1N_2$  оставалось постоянным. Следовательно, отрезок  $N_1N_2$  тогда можно принять за ребро и если мы закроем отверстие с краем  $N_1DN_2C$  двумя треугольниками  $N_1DN_2$  и  $N_1CN_2$ , то полученный многогранник будет замкнутым, причём при соответственно подобранных размерах сторон и положениях вершин  $N_1$  и  $N_2$  он будет без самопересечений. Этот изгибаемый многогранник имеет всего 9 вершин и 14 граней (на рис. Ц16—Ц18 изображены три его положения в ходе изгибания). При подборе нужных длин рёбер возникают трудности: если многогранные углы при вершинах  $A$  и  $B$  сделать слишком «утопленными» (или, по-другому, слишком «пузатыми»), то при разведении вершин  $N_1$  и  $N_2$  грани при  $A_1$  и  $B_1$  будут пересекаться с гранями при  $A_2$  и  $B_2$ ; если же сделать эти многогранные углы слишком выступающими (или, по-другому, слишком «острыми»), то они будут пересекаться с «крышей» многогранника, состоящей из треугольников  $N_1DN_2$  и  $N_1CN_2$ . Хороший набор длин указан на развёртке рис. 36. На ней сплошные линии соответствуют рёбрам,

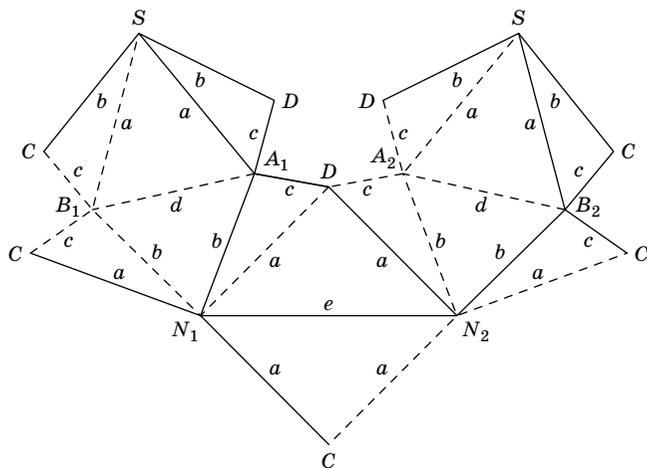


Рис. 36. При размерах (в см)  $a=9$ ,  $b=7,5$ ,  $c=3,75$ ,  $d=8,25$ ,  $e=12,75$  развёртку можно поместить на одном листе бумаги формата А4. Но для большей наглядности модели рекомендуем сделать модель из плотного картона и с размерами  $a=12$ ,  $b=10$ ,  $c=5$ ,  $d=11$ ,  $e=17$ .

которые в склеенном многограннике расположены как «хребты», т. е. определяемые ими двугранные углы в многограннике обращены ребром наружу, к наблюдателю; а пунктирные линии соответствуют рёбрам, которые в многограннике расположены «во впадине», т. е. двугранные углы при них обращены ребром внутрь многогранника.

Нам осталось обосновать, что для многогранника  $M'$  возможны изгибания, при которых расстояние  $N_1N_2$  остаётся постоянным.

Для этого обратимся к формуле (10). Пусть  $N_1=(0, \sqrt{d^2-a^2} \sin \varphi_0, \sqrt{d^2-a^2} \cos \varphi_0)$ ,  $\varphi_0 > 0$ ,  $N_2=(0, -\sqrt{d^2-a^2} \sin \varphi_0, \sqrt{d^2-a^2} \cos \varphi_0)$  и пусть начиная с этого положения угол поворота для  $N_1$  равен  $\varphi_0 + \varepsilon$ , а для  $N_2$  угол пусть равен  $-\varphi_0 + \varepsilon$ . Тогда квадрат расстояния между точками  $N_1$  и  $N_2$  равен

$$2(d^2 - a^2)(\cos^2 \varepsilon \sin^2 \varphi_0 + \sin^2 \varepsilon \sin^2 \varphi_0) = 2(d^2 - a^2) \sin^2 \varphi_0,$$

т. е. является постоянным относительно  $\varepsilon$ , что и требовалось показать.

Сразу же после построения этих примеров было замечено, что при изгибании объёмы изгибаемых многогранников остаются постоянными. Для многогранника Штеффена это утверждение представляется довольно очевидным ввиду полной симметрии движений: грани одной «половины» многогранника движутся так, что движения граней другой его «половины» восполняют изменяемый при этом объём. Для более убедительного доказательства воспользуемся тем фактом, что обобщённый объём изгибаемых октаэдров Брикара равен нулю (примем это без доказательства). Изменим многогранник Штеффена следующим образом. Добавим две грани  $DCN_1$  и  $DCN_2$  и с их помощью образуем многогранник  $R$ , составленный из двух октаэдров Брикара (без грани  $SDC$ ). Комбинаторно это представляется так: у двух многогранников убрали две конгруэнтные треугольные грани и склеили их вдоль двух одинаковых границ образовавшихся отверстий (рис. 37); в нашем случае убираемой (исчезнувшей) гранью является грань  $SCD$ . Обобщённый объём многогранника  $R$  равен нулю, как сумма двух нулевых объёмов. Оставшаяся часть многогранника Штеффена вместе с добавленными гранями образует новый тетраэдр с вершинами  $N_1, D, C, N_2$ . Следовательно, объём многогранника Штеффена в любом его положении в процессе изгибания равен объёму тетраэдра с постоянными длинами рёбер, т. е. в ходе изгибания он не изменяется.

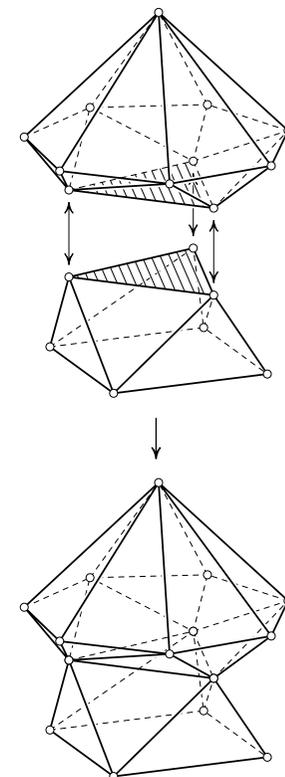


Рис. 37

Что касается объёмов изгибаемых многогранников из первых двух примеров, то постоянство их объёма тоже можно доказать, или применяя указанный выше факт о равенстве нулю обобщённого объёма любого октаэдра

Брикара или проводя довольно длинные вычисления. Но этого делать фактически не нужно, так как мы сейчас докажем, что справедлива

### ГИПОТЕЗА КУЗНЕЧНЫХ МЕХОВ.

Факт неизменности объёма в построенных примерах изгибаемых многогранников естественно привёл к вопросу о справедливости этого свойства для любого изгибаемого многогранника. Коннелли назвал предположение о постоянстве объёма изгибаемого многогранника в ходе его изгибания «гипотезой кузнечных мехов». Происхождение этого термина очень простое. Вспомним из физики закон Бойля—Мариотта, который утверждает, что в газах произведение давления на объём постоянно, т. е.  $pV = \text{const}$ , где  $p$  — давление,  $V$  — объём газа. Следовательно, если  $V = \text{const}$ , то и  $p = \text{const}$ , поэтому гипотезу кузнечных мехов по другому можно переформулировать так: математически идеальные кузнечные мехи нельзя сделать в виде изгибаемого многогранника с отверстием на грани, так как из таких мехов воздух дуть не будет. Эта гипотеза была сформулирована в 1977—78 гг. рядом авторов. Попытки её опровержения путём построения контрпримеров не привели к успеху, наоборот, все новые примеры изгибаемых многогранников, которые удалось построить, только подтвердили факт неизменности объёма. Теперь ясно, что её и нельзя было опровергнуть. На самом деле, основная теорема об объёме многогранника говорит, что для множества многогранников с данным комбинаторным строением и данным набором длин рёбер существует лишь конечное число возможных значений объёма — все они должны быть среди корней полиномиального уравнения (7), которых, по известной теореме алгебры, не больше, чем степень полинома. А так как при изгибании происходит непрерывная деформация многогранника, то и объём должен быть непрерывной функцией параметра деформации. А непрерывная функция, которая может принимать только конечное число значений, обязана быть постоянной! Как видим, гипотеза кузнечных мехов, около 20 лет считавшаяся одной из самых красивых и трудных задач метрической теории многогранников, оказалась простым следствием основной теоремы, являющейся обобщением формулы Герона на объёмы многогранников.

В заключение отметим, что эта теорема до сих пор не доказана для многогранников в многомерных пространствах. Это удивительно, так как в многомерных пространствах изгибаемость многогранников и вообще поверхностей существенно более редкое явление чем в трёхмерном пространстве.

### БИБЛИОТЕКА «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ»

- |           |  |           |   |
|-----------|--|-----------|---|
| ВЫПУСК 1  | В. М. Тихомиров. Великие математики прошлого и их великие теоремы.   | ВЫПУСК 11 | Э. Б. Винберг. Симметрия многочленов.                               |
| ВЫПУСК 2  | А. А. Боллбрух. Проблемы Гильберта (100 лет спустя).   | ВЫПУСК 12 | В. Г. Сурдин. Динамика звёздных систем.                             |
| ВЫПУСК 3  | Д. В. Аносов. Взгляд на математику и нечто из неё.   | ВЫПУСК 13 | В. О. Бугаенко. Уравнения Пелля.                                    |
| ВЫПУСК 4  | В. В. Прасолов. Точки Брокара и изогональное сопряжение.   | ВЫПУСК 14 | В. И. Арнольд. Цепные дроби.  |
| ВЫПУСК 5  | Н. П. Долбилин. Жемчужины теории многогранников.   | ВЫПУСК 15 | В. М. Тихомиров. Дифференциальное исчисление (теория и приложения). |
| ВЫПУСК 6  | А. Б. Сосинский. Мыльные плёнки и случайные блуждания.   | ВЫПУСК 16 | В. А. Скворцов. Примеры метрических пространств.                    |
| ВЫПУСК 7  | И. М. Пармонова. Симметрия в математике.   | ВЫПУСК 17 | В. Г. Сурдин. Пятая сила.   |
| ВЫПУСК 8  | В. В. Острик, М. А. Цфасман. Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические кривые. | ВЫПУСК 18 | А. В. Жуков. О числе $\pi$ .  |
| ВЫПУСК 9  | Б. П. Гейдман. Площади многоугольников.  | ВЫПУСК 19 | А. Г. Мякишев. Элементы геометрии треугольника.                     |
| ВЫПУСК 10 | А. Б. Сосинский. Узлы и косы.  | ВЫПУСК 20 | И. В. Яценко. Парадоксы теории множеств.                            |
|           |  | ВЫПУСК 21 | И. Х. Сабитов. Объёмы многогранников.                               |
|           |  | ВЫПУСК 22 | А. Л. Семёнов. Математика текстов.                                  |