
Серия основана в 1999 году.

Библиотека
«Математическое просвещение»
Выпуск 30

Ю. П. Соловьёв

НЕРАВЕНСТВА

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2005

УДК 517.16
ББК 22.161
С60

Аннотация

В брошюре различными способами доказываются известные, в том числе из школьной программы, неравенства Коши, Йенсена, Коши—Буняковского. Многие утверждения сформулированы в виде упражнений, решения которых приведены в конце брошюры. Кроме того, приведён список задач для самостоятельного решения.

Текст брошюры представляет собой запись лекции, прочитанной автором 6 октября 2001 года на Малом мехмате МГУ для школьников 9—11 классов (запись А. А. Белкина).

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников, учителей.

Юрий Петрович Соловьёв
Неравенства

(Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“»)
М.: МЦНМО, 2005. — 16 с.: ил.

Художник *У. В. Сопова*. Редактор *Ю. Л. Притыкин*.
Техн. редакторы *М. Н. Вельтищев, М. Ю. Панов*.

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано к печати 14/XI 2005 года. Формат бумаги 60×88 1/16. Офсетная бумага № 1. Офсетная печать. Физ. печ. л. 1,00. Усл. печ. л. 0,98. Уч.-изд. л. 1,06. Тираж 3000 экз. Заказ .

Брошюра соответствует гигиеническим требованиям к учебным изданиям для общего и начального профессионального образования (заключение государственной санитарно-эпидемиологической службы Российской Федерации № 77.99.02.953.Д.003873.06.04 от 2/VI 2004 года).

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241 05 00.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ».
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.

ISBN 5-94057-190-5

ВВЕДЕНИЕ

В школьном курсе математики рассматриваются различные неравенства. Многие из них основаны на очень простом неравенстве — неравенстве о средних, появившемся ещё в древние времена:

$$\frac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab}, \tag{1}$$

где a, $b>0$.

Доказывается оно очень просто.

|| **1.** Докажите неравенство (1) *).

В начале XIX века французский математик Коши занимался обобщением этого неравенства. Самым интересным оказалось следующее обобщение:

$$\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}, \tag{2}$$

где a_1, a_2, ..., $a_n>0$.

Несложно доказать это неравенство для трёх, четырёх или пяти чисел, но дальше, если рассматривать отдельно каждое n, придётся очень повозиться.

2. Докажите неравенство (2) для $n=4$.

П о д с к а з к а. Сведите неравенство (2) к неравенству (1), объединив слагаемые и множители в пары.

3. Докажите неравенство (2) для $n=2m$, предположив, что оно верно для $n=m$.

4. Докажите, что если в неравенстве (2) заменить a_n на среднее арифметическое чисел a_1, a_2, ..., a_{n-1}, то получится то же неравенство (2), только для количества чисел, равного $n-1$.

Неравенство (2) было доказано в общем виде для произвольного n с большим трудом и имеет своё имя — неравенство Коши. Его также называют неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим. В книгах можно найти разные его доказательства, но многие из них трудные. В них требуется помнить много деталей. Мы же рассмотрим несколько очень простых способов, с помощью которых можно, кроме того, получить много частных неравенств и решить много задач. Первая часть будет посвящена этим доказательствам.

*) Двумя чертами слева выделены тексты упражнений. В конце брошюры (сс. 14—16) приведены их решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА КОШИ

Прежде всего нам необходимо познакомиться с одним широко известным и очень важным методом доказательства, на случай, если кто-либо из читателей с ним не знаком, — это метод математической индукции.

Метод математической индукции

Пусть есть утверждение, содержащее натуральное число n. Пусть также выполняются следующие условия.

1. База индукции: утверждение выполняется для $n=1$.
2. Шаг индукции: для любого n из того, что утверждение выполняется для n, следует, что оно выполняется для $n+1$. Предположение того, что утверждение верно для n, называется *предположением индукции*.

Тогда, согласно принципу математической индукции, утверждение верно для всех $n \geqslant 1$.

Метод математической индукции тем и хорош, что позволяет провести доказательство в общем виде, не рассматривая отдельно каждое n. Конечно, это не единственный способ провести доказательство в общем виде, но очень часто хорошо срабатывает именно он.

5. Докажите, что неравенство (2) верно для любых n, представимых в виде 2^k, где k — натуральное число.

Подсказка. Примените метод математической индукции и используйте результат упражнения 3.

6. Докажите, что если неравенство (2) верно для некоторого m, то оно верно и для любого $n<m$.

Подсказка. Примените метод математической индукции «вниз», использовав результат упражнения 4.

Первое доказательство

Упражнения 5 и 6 составляют наше первое доказательство неравенства Коши для произвольного n. Действительно, для любого натурального n всегда существует такое натуральное k, что $2^k>n$. А утверждение упражнения 5, основанное на упражнениях 1 и 2, состоит в том, что неравенство (2) верно для количества слагаемых, равного 2^k, где k — любое натуральное число. Тогда, в силу утверждения упражнения 6 (m следует положить равным 2^k), основанного на упражнении 4, получаем, что неравенство верно для нашего n, так как число n меньше 2^k в силу выбора k. Если кому-то не удалось самостоятельно проделать все упражнения, то их решения следует посмотреть в конце брошюры.

Второе доказательство

Прежде всего, давайте для краткости предполагать далее, что все введённые и вводимые числа положительны. Заменим наши переменные таким образом:

$$y_1=\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}},\quad y_2=\frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}},\quad \ldots,\quad y_n=\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}. \tag{3}$$

Тогда неравенство (2) примет вид

$$y_1+y_2+\ldots+y_n\geqslant n, \tag{4}$$

где имеет место условие

$$y_1y_2\ldots y_n=1. \tag{5}$$

В самом деле, условие (5) появилось от того, что $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — это уже не произвольные положительные числа, а только те, которые представимы в виде (3). Легко видеть, что для любых чисел, представимых в виде (3), выполнено условие (5), и любые положительные числа, удовлетворяющие условию (5), представимы в виде (3).

Итак, иными словами, в неравенстве Коши утверждается, что из (5) следует (4). Кстати, обратное, конечно, неверно.

Проведём доказательство по индукции. Наше утверждение, зависящее от n, — это утверждение о том, что из (5) следует (4).

База индукции. Очевидно, что в нашем случае она верна, так как при $n=1$ утверждение принимает вид «из $y_1=1$ следует $y_1\geqslant 1$».

Шаг индукции. Докажем, что из верности утверждения для n следует его верность для $n+1$, т. е. докажем, что если для произвольных n чисел из (5) следует (4), то для произвольных $n+1$ чисел из (5), принимающего вид

$$z_1z_2\ldots z_nz_{n+1}\geqslant 1, \tag{5$'$}$$

следует (4), принимающее вид

$$z_1+z_2+\ldots+z_n+z_{n+1}\geqslant n+1, \tag{4$'$}$$

где в (4′) и (5′) положено

$$z_1=\frac{a_1}{\sqrt[n+1]{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}}},\quad z_2=\frac{a_2}{\sqrt[n+1]{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}}},\quad \ldots$$

$$\ldots,\quad z_n=\frac{a_n}{\sqrt[n+1]{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}}},\quad z_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{\sqrt[n+1]{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}}}.$$

Доказательство шага. Числа $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ удовлетворяют условию

$$z_1z_2\ldots z_{n+1}=1.$$

Положим

$$z_1=y_1, \quad z_2=y_2, \quad \ldots, \quad z_{n-1}=y_{n-1}, \quad z_nz_{n+1}=y_n.$$

Тогда, очевидно, верно условие (5). По предположению индукции из него следует неравенство (4), которое в силу наших новых обозначений имеет вид

$$z_1+z_2+\ldots+z_{n-1}+z_nz_{n+1}\geqslant n. \tag{6}$$

В шаге нужно доказать, что

$$z_1+z_2+\ldots+z_n+z_{n+1}\geqslant n+1. \tag{7}$$

Итак, далее будем предполагать, что не все z_i равны единице, так как иначе всё тривиально доказывается. В самом деле, сумма $n+1$ слагаемых, равных единице, равна $n+1$, и условие (7) заведомо выполнено. Так что по крайней мере пара чисел не является парой единиц. Более того, заметим, что тогда есть пара чисел, одно из которых больше единицы, а другое меньше. Просто иначе невыполнимо условие равенства произведения всех чисел единице. Перенумеруем числа z_i так, чтобы этой парой оказались два последних числа $z_n>1$ и $z_{n+1}<1$. Обратите внимание, что мы ничего не считаем, только переобозначаем переменные, и сейчас это удивительное доказательство «вылезет» из неравенства, которое выглядит так:

$$z_n+z_{n+1}-z_nz_{n+1}>1. \tag{8}$$

|| **7.** Докажите, что (8) следует из условий $z_n>1$, $z_{n+1}<1$.

Осталось сложить неравенство (8) с неравенством (6), и мы получили (7), а значит и доказательство шага индукции. Доказательство неравенства Коши для произвольного n тем самым завершено.

То, чему вы должны научиться больше, чем конкретным фактам — хранить математическую информацию. Почему-то ни в школах, ни в университетах обычно этому не учат. Дело в том, что человеческая память устроена так, что человек просто не в состоянии запомнить три тысячи теорем явным текстом. Даже если память очень хорошая — вдруг знак забыл, перепутал... и толку с этих знаний никакого. Возьмёте неверную формулу — и всё пропало. Поэтому важно не держать в голове лазерный диск с голыми формулами. Важны другие способы хранения информации в голове. Такие, чтобы можно было её получать в нужный момент и гарантированно верно, и желательно ещё и быстро. Вот, в частности, это доказательство очень мощного неравенства Коши именно такое. Его не страшно забыть в деталях, так как в нём нет ничего трудного. Прелесть науки в том и состоит, чтобы находить такой угол зрения, под которым всё становится просто. Наиболее важно в школьные годы суметь организовать все знания (формулы, теоремы)

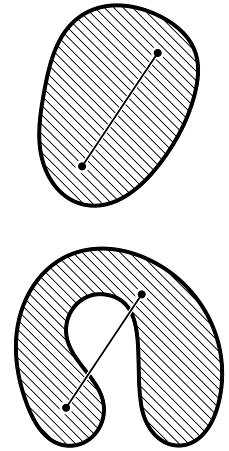
подобным образом, найдя этот простой подход, потому что тогда их нельзя потерять или забыть.

НЕРАВЕНСТВО ЙЕНСЕНА

Итак, мы доказали неравенство Коши. Из него можно получать огромное количество других задач. А теперь рассмотрим ещё одно очень мощное неравенство — неравенство Йенсена. Оно тоже очень просто доказывается, но посвежее, ему примерно сто лет.

Прежде всего введём несколько новых обозначений.

Определение. Множество называется *выпуклым*, если отрезок, соединяющий любые две его точки, сам целиком содержится в множестве (на рис. 1, *а* показан пример выпуклого множества, а вот множество, показанное на рис. 1, *б*, выпуклым не является).



а)

б)

Рис. 1

Пусть имеется функция $y=f(x)$, определённая на некотором интервале. У каждой функции имеется график. График функции, определённой на всей числовой прямой, разбивает плоскость на два множества: $y\geqslant f(x)$ и $y<f(x)$. Такие два множества называются надграфик и подграфик.

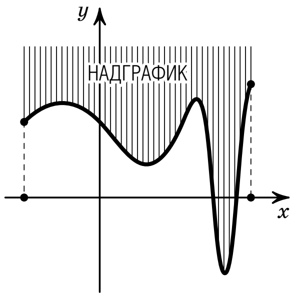


Рис. 2

Определение. Пусть $f(x)$ определена на некотором интервале. Тогда множество $y\geqslant f(x)$, где x принадлежит интервалу, называется *надграфиком* (рис. 2), а множество $y<f(x)$, где x принадлежит интервалу, — *подграфиком* (рис. 3).

Слова ужасные, но любого человека спроси — ему будет ясно, что имеется в виду. Кстати, совершенно неважно, куда отнести саму кривую. Мы, например, отнесли её к надграфику.

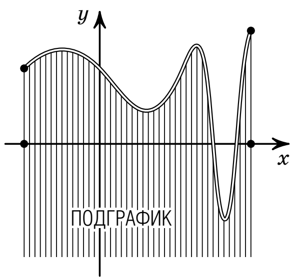


Рис. 3

Определение. Функция называется *выпуклой* на некотором интервале, если её надграфик на этом интервале выпуклый, и *вогнутой*, если выпуклым является подграфик.

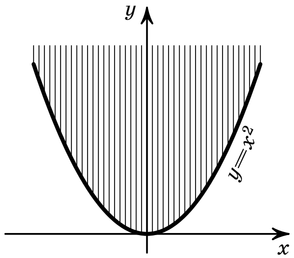


Рис. 4

Пример 1. Парабола $y=x^2$ — выпуклая на всей числовой оси функция (рис. 4).

8. Докажите это.

Пример 2. Функция $y=1/x$ на полупрямой $x<0$ — вогнутая (рис. 5).

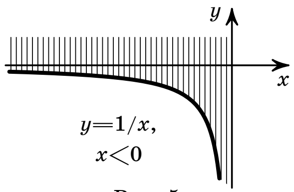


Рис. 5

Пример 3. На всей числовой оси синусоида, любой многочлен нечётной степени больше единицы и гипербола не являются ни выпуклыми, ни вогнутыми (рис. 6—8).

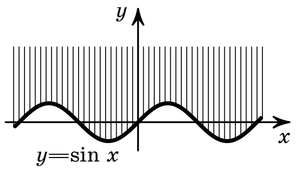


Рис. 6

9. Приведите пример функции, являющейся одновременно и выпуклой, и вогнутой.

Замечание. Функцию, являющуюся согласно нашему определению выпуклой, ещё называют *выпуклой вниз*, а функцию, являющуюся вогнутой, — *выпуклой вверх*. Такие названия были даны им в XIX веке, и сейчас сохранились только в математических кружках, а в университетских курсах их называют наоборот: выпуклая вниз функция — вогнутая, выпуклая вверх — выпуклая.

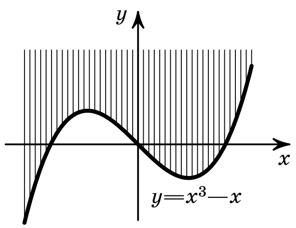


Рис. 7

Теорема Йенсена

Теорема. Пусть $y=f(x)$ — функция, выпуклая на некотором интервале; x_1, x_2, ..., x_n — некоторые числа из этого интервала; m_1, m_2, ..., m_n — положительные числа, сумма которых равна единице. Тогда выполняется неравенство Йенсена

$$f(m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n)\leqslant \leqslant m_1f(x_1)+m_2f(x_2)+\ldots+m_nf(x_n). \quad (9)$$

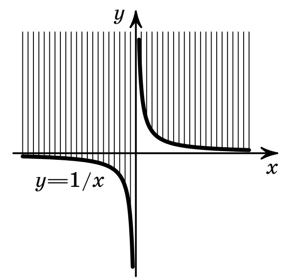


Рис. 8

Из этого неравенства можно получить важнейшие неравенства, которые знает современная математика. Для доказательства нам понадобится один чисто математический факт, который обычно в школах не освещают.

Центр масс

Предположим, что с каждой точкой плоскости связано некоторое число, которое будем называть «массой» этой точки («масса» не обязательно должна быть положительной). Тогда можно определить «центр масс» двух точек.

Определение. *Центром масс* двух точек A и B будем называть такую точку C на отрезке AB, что $\frac{AC}{BC}=\frac{m_B}{m_A}$, где m_A и m_B — массы точек A и B соответственно.

Это и есть знаменитое правило рычага. В XVIII веке люди пытались его доказать, но оказывается, оно эквивалентно пятому постулату Евклида*).

Декартовы координаты точки C выражаются через координаты точек A и B очень просто:

$$x_C=\frac{m_Ax_A+m_Bx_B}{m_A+m_B}, \quad y_C=\frac{m_Ay_A+m_By_B}{m_A+m_B}.$$

Кстати, видно, что обе координаты точки C выражаются одинаково. Легко обобщить это определение до определения центра масс системы точек. Действительно, центр масс трёх точек определим как центр масс центра масс первых двух точек и третьей. В координатах это выглядит так:

$$\left.\begin{aligned} x_C&=\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}(m_1+m_2)+m_3x_3\right)\frac{1}{(m_1+m_2)+m_3}=\\ &=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3},\\ y_C&=\left(\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}(m_1+m_2)+m_3y_3\right)\frac{1}{(m_1+m_2)+m_3}=\\ &=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}.\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Легко проверить, что от порядка, в котором берутся точки, положение центра масс не зависит, так как от него не зависит получаемое выражение для координат точки.

10. Убедитесь, что это действительно так.

*) Пятый постулат Евклида (или аксиома о параллельных) гласит, что через точку вне прямой можно провести не более одной прямой, параллельной данной. В течение более чем двух тысячелетий считалось, что аксиоматика Евклида (включающая в себя и пятый постулат) не является независимой, что пятый постулат можно доказать, основываясь на других аксиомах этой аксиоматики. Но в XIX веке сразу несколько математиков (среди которых Лобачевский, Гаусс и Бойаи) почти одновременно показали, что доказать его невозможно. Так родилась новая, неевклидова геометрия.

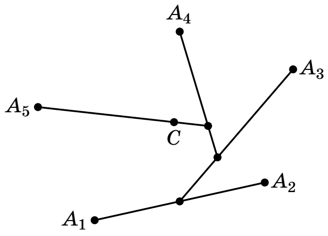


Рис. 9

Поэтому ясно, что центр масс C системы n точек будет определяться следующими выражениями для его декартовых координат (рис. 9):

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

$$y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Лемма. Пусть имеется выпуклая фигура, и внутри неё взяты n точек. Тогда центр масс этих точек тоже принадлежит фигуре.

Доказательство проведём по индукции.

Докажем базу: центр масс двух точек по определению принадлежит соединяющему их отрезку, который в силу выпуклости фигуры принадлежит фигуре.

База доказана, теперь шаг индукции. Центр масс $n+1$ точек — это в силу определения центр масс двух точек: любой одной и центра масс всех остальных, которых n штук. В силу предположения индукции центр масс этих остальных n точек принадлежит фигуре, а значит, центр масс его и $(n+1)$-й точки тоже принадлежит фигуре, так как по определению лежит на отрезке, соединяющем эти две точки нашей выпуклой фигуры. Лемма доказана.

Доказательство теоремы Йенсена

Рассмотрим функцию из условия теоремы. На графике возьмём точки, у которых абсциссы имеют значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и обозначим эти точки через $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (рис. 10). Возьмём для этих точек совершенно произвольные массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$, сумма которых равна 1. Согласно условию, наша функция выпуклая и, значит, надграфик — выпуклое множество. Тогда центр масс точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ тоже является точкой надграфика. Выпишем координаты центра масс и условие того, что он принадлежит надграфику:

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n,$$

$$y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = m_1f(x_1) + m_2f(x_2) + \ldots + m_nf(x_n),$$

$$y_C \geqslant f(x_C). \tag{11}$$

Теперь подставим в условие (11) координаты центра масс и получим неравенство (9) теоремы Йенсена. Оказывается, что неравен-

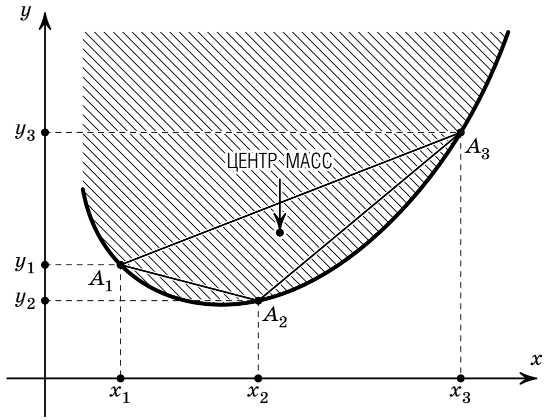


Рис. 10

ство Йенсена — это всего лишь утверждение о том, что центр масс точек графика выпуклой функции лежит в надграфике!

ПРИМЕРЫ

Возникает вопрос, о котором стоило бы поговорить отдельно: как определить, является ли некоторая функция выпуклой? Многие из вас знают, что если задана функция, то выпуклость проверить можно так: если вторая производная на интервале не меньше нуля, то функция на этом интервале выпуклая, а если не больше нуля, то она вогнутая.

Вывод неравенства Коши из неравенства Йенсена

Оказывается, неравенство Коши несложно выводится из неравенства Йенсена. Мы уже доказали неравенство Коши, даже двумя способами. Можете в книжках посмотреть, какое оно там сложное бывает, это доказательство. А сейчас мы докажем его ещё проще! Давайте просто прологарифмируем неравенство (2). Обе части положительные, а логарифм во всей области своего определения возрастающая функция, поэтому получим эквивалентное неравенство

$$\log\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) \geqslant \log(\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}).$$

Логарифм произведения — это сумма логарифмов, а степень можно вынести как множитель:

$$\log\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)\geqslant\frac{1}{n}\log a_1+\frac{1}{n}\log a_2+\ldots+\frac{1}{n}\log a_n.$$

А это и есть неравенство Йенсена для логарифма, который является вогнутой функцией в своей области определения в силу того, что его вторая производная везде в этой области отрицательна. Так как полученное неравенство Йенсена верно и является эквивалентным исходному, то исходное неравенство Коши тоже верно. Всё, это и есть доказательство.

Вывод неравенства Коши—Буняковского из неравенства Йенсена

Ещё одно неравенство, которое появилось в XIX веке, — это неравенство Коши—Буняковского. Оно выглядит так:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2\leqslant n(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2). \qquad (12)$$

«В лоб» доказать и не мечтайте. Докажем его, используя неравенство Йенсена. Доказательство основано на том, что $y=x^2$ — функция выпуклая (см. упражнение 8). Запишем для неё неравенство Йенсена, положив $m_1=m_2=\ldots=m_n=\frac{1}{n}$:

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2\leqslant\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}.$$

А теперь если мы умножим обе части на n^2, то и получится как раз неравенство (12)!

Получилось, что неравенство Коши—Буняковского — это тривиальное следствие неравенства Йенсена.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Докажите следующие неравенства (11—22, 25—27).

11. $x_1\leqslant\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\leqslant x_n$, где $x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n$.

12. $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n}\geqslant\frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n\geqslant 1$, $n\geqslant 2$.

13. $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, где $a, b>0$.

14. $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\leqslant$

$\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n>0$.

15. $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\geqslant n$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n>0$.

16. $(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n>0$.

17. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, где n — натуральное число.

18. $|\sin(x_1+x_2+\ldots+x_n)|\leqslant|\sin x_1|+|\sin x_2|+\ldots+|\sin x_n|$, где $0\leqslant x_1\leqslant\pi$, $0\leqslant x_2\leqslant\pi$, $\ldots$, $0\leqslant x_n\leqslant\pi$.

19. $a_1+a_2^2+\ldots+a_n^n\leqslant na_1a_2\ldots a_n$, где $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n\geqslant 1$.

20. $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}$, где n — натуральное число, $n\geqslant 3$.

21. $\frac{\sin x_1+\sin x_2+\ldots+\sin x_n}{n}\leqslant\sin\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$, где $0\leqslant x_1\leqslant\pi$, $0\leqslant x_2\leqslant\pi$, $\ldots$, $0\leqslant x_n\leqslant\pi$.

22. $\frac{m^p}{p}+\frac{n^q}{q}\geqslant mn$, где $m, n, p, q>0$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

23. Докажите, что из всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный.

24. Докажите, что из всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет правильный.

25. $\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2\geqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\frac{a+b}{2}$, где $a, b\geqslant\frac{1}{2}$.

26. $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n\geqslant x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n>0$, $a_1, a_2, \ldots, a_n\geqslant 0$ и $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$.

27. $\left(\frac{x_1^a+x_2^a+\ldots+x_n^a}{n}\right)^{1/a}\leqslant\left(\frac{x_1^b+x_2^b+\ldots+x_n^b}{n}\right)^{1/b}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n>0$, $a<b$.

РЕШЕНИЯ УПРАЖНЕНИЙ

1. Это неравенство является простым следствием неотрицательности квадрата разности чисел $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqslant 0.$$

2. Объединим слагаемые в пары a_1, a_2 и a_3, a_4, а затем для каждой из них применим неравенство Коши для $n=2$:

$$\frac{a_1+a_2}{2}\geqslant\sqrt{a_1a_2},\qquad \frac{a_3+a_4}{2}\geqslant\sqrt{a_3a_4}.$$

Используем эти два неравенства и ещё раз неравенство Коши для $n=2$:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}\geqslant\frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}}=\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}.$$

3. Решается аналогично упражнению 2, только вместо сведения к неравенству Коши для $n=2$ нужно сводить к неравенству Коши для $n=m$.

4. Рассмотрим левую часть, т. е. среднее арифметическое. Ясно, что среднее арифметическое n чисел равно среднему арифметическому себя и этих же n чисел. Это всё равно что к системе точек добавить в её центр масс ещё одну точку и снова рассчитать центр масс, который, естественно, не сдвинется. Подставьте и убедитесь. Теперь осталось возвести всё в степень n, разделить на сумму $a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}$ и извлечь корень $(n-1)$-й степени.

5. Доказательство индукцией по k. База индукции ($k=1$) — это уже доказанное в упражнении 1 неравенство Коши для $2^k=2^1=2$ чисел. А шаг индукции — уже доказанное утверждение упражнения 3, которое позволяет перейти к неравенству Коши для 2^{k+1} чисел, если для 2^k чисел оно уже доказано.

6. Что такое метод математической индукции «вниз»? Очень просто! Если в шаге доказывать, что из предположения индукции следует верность высказывания не для $n+1$, а для $n-1$, то высказывание окажется верным для всех n, не больших, а меньших базового. Таким образом, для решения данного упражнения нужно всего лишь доказать этот шаг «вниз». Заметим, что именно он и был доказан в упражнении 4.

7. Умножим обе части неравенства $z_n>1$ на положительное число $1-z_{n+1}$. Получим:

$$z_n-z_nz_{n+1}>1-z_{n+1}.$$

Перенеся слагаемое $(-z_{n+1})$ в левую часть с переменой знака, получим искомое неравенство (8).

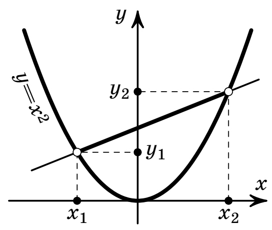


Рис. 11

8. Вот как можно доказать выпуклость функции $y=x^2$, не используя производных.

Запишем уравнение прямой, проходящей через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) на параболе (рис. 11), в виде

$$y-y_1=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(y_2-y_1)$$

и сложим с ним неравенство $x^2-y<0$, которое нам необходимо доказать для всех x из интервала (x_1, x_2):

$$x^2-y_1<\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(y_2-y_1).$$

Если мы докажем это неравенство, это будет означать, что указанный отрезок прямой полностью лежит выше параболы, т. е. весь принадлежит надграфику, что, в свою очередь, будет означать его выпуклость. Итак, разделим полученное неравенство на $x-x_1$:

$$\frac{x^2-y_1}{x-x_1}<\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Осталось подставить вместо y_1 и y_2 соответствующие значения $y_1=x_1^2$, $y_2=x_2^2$, а затем сократить полученные дроби на разности $x-x_1$ и x_2-x_1. Получим:

$$x+x_1\leqslant x_2+x_1.$$

Это, очевидно, верное неравенство, которое в силу наших преобразований является эквивалентным исходному. Утверждение доказано.

9. Прямая является выпуклой и вогнутой одновременно. Этот пример очень хорош, потому как иллюстрирует, что почти в любых определениях существуют предельные моменты. Кстати, можно доказать, что других одновременно и выпуклых, и вогнутых функций нет.

10. Докажем это утверждение по индукции. База для одной точки очевидна, потому что одну точку мы можем брать только в одном порядке. Теперь докажем шаг индукции. Пусть для n точек мы уже доказали, что независимо от порядка, в котором мы берём точки для вычисления координат центра масс, всё равно получаются выражения наподобие (10), т. е.

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \quad y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Теперь попробуем доказать то же самое для произвольных $n+1$ точек. Выберем произвольный порядок, в котором мы будем брать точки для вычисления координат центра масс. Без ограничения общности будем считать, что последней добавляется точка (x_{n+1}, y_{n+1}) (это означает, что такого можно добиться простой перенумерацией точек). Таким образом, центр масс всей системы из $n+1$ точек совпадает с центром масс системы двух точек — точки массы m_{n+1} с координатами (x_{n+1}, y_{n+1}) и точки массы $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ с координатами

$$\left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \quad \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \right)$$

(эту вторую точку мы получаем по предположению индукции). Мы уже знаем, что центр масс системы из этих двух точек имеет координаты

$$x_C = \frac{\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) + x_{n+1}m_{n+1}}{(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) + m_{n+1}},$$

$$y_C = \frac{\frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) + y_{n+1}m_{n+1}}{(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) + m_{n+1}}.$$

А именно это и нужно было доказать в шаге индукции. Поскольку мы с самого начала взяли произвольный порядок выбора точек, то формулы будут верны в любом случае, а значит, они не зависят от порядка выбора точек. Что и требовалось.

БИБЛИОТЕКА «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ»

Вып. 1. *В. М. Тихомиров*. Великие математики прошлого и их великие теоремы.

Вып. 2. *А. А. Болибрух*. Проблемы Гильберта (100 лет спустя).

Вып. 3. *Д. В. Аносов*. Взгляд на математику и нечто из неё.

Вып. 4. *В. В. Прасолов*. Точки Брокара и изогональное сопряжение.

Вып. 5. *Н. П. Долбилин*. Жемчужины теории многогранников.

Вып. 6. *А. Б. Сосинский*. Мыльные плёнки и случайные блуждания.

Вып. 7. *И. М. Парамонова*. Симметрия в математике.

Вып. 8. *В. В. Острик*, *М. А. Цфасман*. Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические кривые.

Вып. 9. *Б. П. Гейдман*. Площади многоугольников.

Вып. 10. *А. Б. Сосинский*. Узлы и косы.

Вып. 11. *Э. Б. Винберг*. Симметрия многочленов.

Вып. 12. *В. Г. Сурдин*. Динамика звёздных систем.

Вып. 13. *В. О. Бугаенко*. Уравнения Пелля.

Вып. 14. *В. И. Арнольд*. Цепные дроби.

Вып. 15. *В. М. Тихомиров*. Дифференциальное исчисление (теория и приложения).

(*См. 4-ю стр. обложки.*)

ISBN 5-94057-190-5
9 785940 571902