

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СОБРАНИЕ  
ТРУДОВ

АКАДЕМИКА

А.Н.КРЫЛОВА

II

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР  
МОСКВА · ЛЕНИНГРАД

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

---

# СОБРАНИЕ ТРУДОВ

АКАДЕМИКА

# А. Н. КРЫЛОВА

II

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ЗЕМНОЙ МАГНЕТИЗМ  
И КОМПАСНОЕ ДЕЛО

— 10866 —

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР  
МОСКВА-ЛЕНИНГРАД  
1947

*Ответственный редактор  
профессор Н. И. ИДЕЛЬСОН*

---

## **ОТ КОМИССИИ ПО ИЗДАНИЮ ПОЛНОГО СОБРАНИЯ ТРУДОВ АКАДЕМИКА А. Н. КРЫЛОВА**

Настоящий выпуск собрания трудов академика А. Н. Крылова есть первый выпуск его работ, выходящий в свет не за подписью их знаменитого автора.

26 октября 1945 г. Алексей Николаевич Крылов скончался на 83-м году жизни, оставив значительное научное наследие—плод непрерывных трудов, продолжавшихся с неослабеваемой силой в течение шестидесяти лет и охвативших многообразные проблемы физико-математических и технических наук.

В самый день смерти Алексея Николаевича состоялось постановление Совета Народных Комиссаров СССР<sup>1</sup> «Об увековечении памяти выдающегося русского ученого-математика, механика и кораблестроителя, академика А. Н. Крылова». Пункт З-й его гласил:

«Обязать Академию Наук СССР издать в течение 1946—1948 гг. полное собрание сочинений академика А. Н. Крылова».

Во исполнение этого постановления Президиум Академии Наук 4 ноября 1945 г. назначил Комиссию в составе: академик В. И. Смирнов (председатель); инженер контр-адмирал член-корреспондент АН СССР [П. Ф. Папкович], член-корреспондент АН СССР Ю. А. Шиманский, член-корреспондент АН СССР Т. П. Кравец, профессор-доктор Н. И. Идельсон, инженер-подполковник; профессор-доктор И. Г. Ханович, секретарь М. И. Радовский.

Приступив незамедлительно к выполнению возложенной на нее обязанности, Комиссия произвела классификацию по разделам всех работ Алексея Николаевича как напечатанных при его жизни<sup>2</sup>, так и поступивших в Архив АН СССР в Ленинграде (фонд А. Н. Крылова, № 759). Вслед за тем Комиссия наметила общий план предстоящего издания, учтя и все

---

<sup>1</sup> Опубликовано в «Известиях ВЦИК» 27 октября 1945.

<sup>2</sup> Полный список их имеется в книге О. В. Динзе «Алексей Николаевич Крылов», изданной в серии «Материалы и библиографии трудов ученых СССР» (изд. Всесоюзной книжной палаты, М., 1945).

те указания, которые Алексей Николаевич давал в свое время относительно состава будущего издания его трудов.

В том I предположено отнести книгу «Мои воспоминания», статьи научно-популярного содержания, доклады и речи по истории науки, по вопросам педагогическим и методическим, а также литературные и общественные выступления А. Н. Крылова.

К тому II (первая часть которого вышла в 1943 г., к 80-летнему юбилею А. Н. Крылова, а вторая издается теперь) относится «Земной магнетизм и компасное дело».

В том III войдут «Лекции о приближенных вычислениях» и книга «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах».

Опубликованные уже до настоящего времени томы: IV (Баллистика), V (Математика и механика), VI (Астрономия), дополнительный к V—VI (Новая теория Луны Леонарда Эйлера в переводе А. Н. Крылова, с прибавлениями и примечаниями переводчика), VII («Математические начала Натуральной философии» Ньютона, перевод с латинского с примечаниями и приложениями А. Н. Крылова), до переиздания сохранят свою нынешнюю нумерацию, но к ним будут добавлены: дополнение к тому IV (Баллистика) и дополнение к тому V (Механика).

Дальнейшие четыре тома (VIII—XI) будут охватывать один из основных циклов творчества А. Н. Крылова, а именно корабельное дело.

Наконец, том XII резервируется для различного рода ~~заметок~~ заметок по механике и технике, как имеющихся уже в фонде А. Н. Крылова, так и могущих еще поступить в Архив АН СССР, а также для полной библиографии трудов А. Н. Крылова.

Осуществление этого общего плана издания Комиссия начинает теперь со второй части тома II, часть которого была подготовлена к печати и прокорректирована в августе 1945 г. самим Алексеем Николаевичем. По его предположениям в нее должны были войти только две работы:

1) «О земном магнетизме» (изд. Гл. гидрограф. управл., Ленинград; 1922) и

2) «Возмущения показаний компаса, происходящие от качки корабля на волнении» (ИАН, 1938, Отд. мат. наук, ст. 439—475).

Однако Комиссия, ознакомившись со всеми материалами по земному магнетизму и компасному делу, сочла целесообразным добавить к этим двум работам еще следующие:

3) «Вычисление делений сил дефлектора компаса» (Записки по гидрографии, 1887, вып. 2, стр. 64—81). Как видно из примечания, сделанного к этой статье Алексеем Николаевичем в 1886 г., она примыкает к его первой научной работе, выполненной в 1884 г. и хранящейся теперь в Архиве Главного гидрографического управления. Однако ознакомиться с этой рукописью 1884 г. Комиссии не удалось.

4) «Об использовании Курской магнитной аномалии для достижения на самолетах и дирижаблях полного уничтожения девиации компаса, т. е. такого, что она остается уничтоженной для всех мест земной поверхности при всякой высоте полета».

Написана в 1940 г. и не напечатана.<sup>1</sup> По содержанию тесно примыкает к «Основаниям теории девиации компаса», опубликованной в ИАН, 1940 (см. также 1-ю часть настоящего тома, изд. 1943 г., стр. 3—64).

5) «О баллистической девиации гирокомпаса (без успокоителя)».

При жизни не напечатана; относится к 1935—1938 гг.; является непосредственным развитием содержания § 45, 90 и 91 книги А. Н. Крылова «Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений» (1932) и примыкает к § 7 статьи «О теории гирокомпаса Аншютца» (первая часть настоящего тома, стр. 140 и сл.).

6) «О баллистической погрешности гирокомпаса, снабженного гидравлическим успокоителем».

Статья, не напечатанная при жизни автора, содержит развитие теории гидравлических успокоителей для кренометров и гироскопов, данной в книге «Общая теория гироскопов», §§ 50—52. Как частный случай, в ней рассматривается теория кольцевого успокоителя, и потому настоящая статья относится к той же теме, что и статья «О курсовой и баллистической погрешностях гирокомпаса, снабженного кольцевым успокоителем, и об их уничтожении» (литогр. изд. 1938 г.; по списку в книге Динзе № 241а), достать которую не представилось пока возможным. Дополнение к этой статье содержит две заметки о формуле Пуазейля.

7) «О затухающих колебаниях гиросферы».

При жизни не напечатана; содержит теорию затухающих колебаний сферы, в которой имеется цистерна с жидкостью. Относится к 1936—1938 гг.

С опубликованием этих работ, вместе с имеющимися уже в первой части II тома, издание трудов А. Н. Крылова, относящихся к компасному делу и бывших, можно сказать, как первыми, так и последними по времени на его долгом пути в науке, является в основном завершенным. Но при этом Комиссия считает нужным отметить, что некоторые из них было признано ненадежным включать в настоящее издание. К ним относятся:

1) *Le dromoscope* (литогр. изд. Морск. м-ва, 1886), так как содержание ее полностью исчерпывается статьями «О новом дромоскопе» и «Заметка о теории и употреблении дромоскопов Фурнье» (1886), вошедшими уже в 1-ю часть настоящего тома (стр. 87—126).

2) «Опыт изложения способов уничтожения девиации компасов» (литогр. изд. Гл. гидрогр. управл. 1887, 2-е литогр. изд. 1889)—поскольку эта работа составлена А. Н. Крыловым совместно с другим лицом (Н. М. Яковлевым) и в настоящее время имеет только исторический интерес.

3) «Балансировочные весы для выверки элементов гирокомпасов» (не опубликовано),—так как в ней содержатся исключительно данные по общему приборостроению и она по содержанию может быть отнесена к тому XII.

4) «О постановке преподавания в объеме курсов математики и механики для инженеров-специалистов по гироскопии и стабилизации» (не опубликовано)—потому что ее следует отнести, наряду с другими аналогичными статьями А. Н. Крылова, к тому I.

Ответственным редактором настоящего выпуска трудов А. Н. Крылова является проф. Н. И. Идельсон.

В работе над этим томом Комиссия пользовалась консультацией инженера вице-адмирала проф. Н. Н. Матусевича.

---

# О ЗЕМНОМ МАГНЕТИЗМЕ

## ГЛАВА I

### Краткое историческое введение

§ 1. Древним грекам, а от них и римлянам было известно свойство некоторого бурого камня притягивать железо и сообщать это свойство также притянутым и касающимся этого камня кускам железа, которые, в свою очередь, притягивают другие куски. Камень этот они называли или гераклейским, или магнитным (*μαγνητις*), по названию города Магнезия в Малой Азии, близ которого такие камни находили.

Философский ум древних греков был склонен к строгим отвлеченным суждениям и строгим выводам, недосягаемые образцы которых дошли до нас в творениях Евклида, Архимеда, Аполлония, но экспериментального метода исследования тогда не существовало, и прошло более 20 веков, пока он был установлен, развит и повел к быстрому движению вперед всех опытных наук, преобразовавших всю жизнь культурного человечества.

Отсутствие экспериментального метода изучения явлений природы оставляло полный простор фантазии и способствовало укоренению разного рода поверий и исканий таинственного. Понятно поэтому, что магнитный камень, обладавший необыкновенными свойствами, стал предметом суеверий. Ему приписывали свойства и останавливать кровь, и возбуждать меланхолию, и привлекать женщин, служить средством для убеждения в их целомудрии, терять свою силу, если его потереть чесноком, и приобретать ее вновь, если его обмыть козлиной кровью, терять способность притягивать железо в присутствии алмаза и т. п. Средние века, когда все основывалось на авторитете, а самый эксперимент почитался ересью, способствовали распространению этих поверий, прибавляя к ним и свои, как, напр., о том, что в странах гиперборейских существуют такие магнитные скалы и горы, приближение к которым опасно для судов с железным креплением—судно или притягивается скалой или же из него выдираются гвозди, и оно гибнет. почему там суда и делают с деревянным креплением. В этом поверии любопытно последнее: «штихи», в которых действительно нет ни одного гвоздя, существуют и поныне на Мурмане и Белом море.

Замечательно, что древним совершенно не были известны искусственные магниты, хотя они знали сталь, умели ее закалять и делали из нее ору-

жие и инструменты. Им не были даже известны ни «полярность» магнита, ни его способность принимать в пространстве определенное направление, будучи свободно подвешенным.

§ 2. Известия о пользовании компасом в Европе находятся в некоторых литературных памятниках XII в., из которых можно судить, что первоначальным компасом служили швейные иголки, которые тогда делались, повидимому, железными, а не стальными. Их касались магнитным камнем, и они намагничивались. Такую иголку клади на соломинке или на пробочке на воду в круглой чашке, и иголка своею длиной становилась в плоскости меридиана. Железо быстро теряло магнетизм, и иголку постоянно приходилось вновь намагничивать.

К XII или началу XIII в. относится описание и несколько более «усовершенствованного» компаса, где намагниченная иголка была пропущена через ось, оканчивающуюся остриями вверху и внизу, на которых она и покоялась свободно в подпятничках, сделанных в дне и прозрачной крышке котелка; через эту же ось перпендикулярно к магнитной пропускалась вторая, медная, стрелка—указатель востока и запада. И такой компас с железной стрелкой требовал постоянного намагничивания. Судя по довольно неясному описанию, оно производилось без вынимания стрелки из котелка—просто поднесением магнитного камня, т. е. через индукцию, которая, таким образом, нашла практическое применение гораздо ранее, нежели она стала предметом научного исследования. Устройство компаса с картушкою, стальной стрелкой, с топкою, которой картушка накладывается на шпильку, укрепленную в центре котелка, приписывается по большей части итальянцу Флавию Джоя из Амальфи, жившему в конце XIII в. По дошедшим сведениям, уже тогда было замечено, что стрелка не показывает точно на север. Но эта погрешность считалась постоянной, и указывался способ ее исправления—наклеиванием картушки так, чтобы линия NS уклонялась на  $10^{\circ}$  своим северным концом вправо от северного конца стрелки.

Вторично склонение компаса было открыто Колумбом во время его первого плавания через Атлантический океан, причем он обратил внимание и на изменяемость склонения с местом.

§ 3. Поггендорф, излагая в своей «Истории физики» историю изобретения компаса, приводит содержание письма знаменитого китаеведа Клапрота к Александру Гумбольту, опубликованного последним в 1834 г.

Клапрот, по данным китайских летописей, приводит доказательства, что в Китае за 120 лет до н. э. были известны «полярность» магнитов и свойство намагниченных иголок указывать юг. Китайцам было известно также и склонение стрелки и применение этого для мореплавания, причем их картушка делилась на 24 румба.

Кроме компаса для целей мореплавания, в китайских летописях повествуется о магнитных путеуказательных повозках, изобретение которых приписывается императору Чжеу-Кунгу, жившему за 1100 лет до н. э.;

ему же приписывают изобретение компаса. Но Клапрот, выражая сомнение, что оба изобретения принадлежат одному лицу, приводит ссылки на еще более древние летописи, по которым путеводная повозка была изобретена императором Хуанг-ти и дала ему возможность победить своего со-перника Чжису, преследуя последнего в тумане и в облаках пыли. Это относится к 2364 г. до н. э.

По Клапроту, известия о путеводных повозках, в которых маленькая поворотная фигурка воина или жреца указывала рукою направление юга, приводится во множестве китайских летописей и не относится к числу тех сообщений о китайском приоритете в великих изобретениях, как, напр., было с логарифмами, когда по сличении оказалось, что в китайской таблице повторяются те же самые ошибки и опечатки, как и в таблицах Влака, изданных в Голландии в 1628 г.; они были перевычислены Влаком по таблицам Бригга и Геллинбранда, изданным в Англии и ими самими вычисленным.

§ 4. К XVI в. компас стал обычным в мореплавании прибором, нашел применение также и в горном деле, но самые явления магнетизма еще не подвергались систематическому исследованию, и лишь в письме от 3 марта 1544 г. Георг Гартман, пастор собора св. Себальда в Нюренберге, сообщает герцогу Альбрехту Прусскому о своих работах по исследованию свойств магнита, причем указывает, что магнит не только стремится стать своею длиною так, чтобы один конец был направлен к северу, а другой — к югу, но и что северный конец стремится уклониться вниз. Таким образом, кроме «склонения» магнитной стрелки, есть еще и «наклонение». Но Гартман оценил величину наклонения неправильно — всего в  $9^{\circ}$ , тогда как оно около  $70^{\circ}$ .

Независимо от Гартмана, письмо которого оставалось неизвестным, компасный мастер Норман в Лондоне в 1576 г. обратил внимание, что изготовленные им стрелки, тщательно уравновешенные на топках и до намагничивания остававшиеся горизонтальными, после намагничивания получали, не изменяя своего веса, перевес и опускались северными концами вниз, и ему приходилось вновь их уравновешивать передвижным грузиком. Норман решил подвергнуть это явление изучению. Он изготовил весьма тщательно уравновешенную стрелку, в которой, вместо топки, была укреплена тонкая ось перпендикулярно к плоскости стрелки, и этой осью положил стрелку на маленькие выемочки в двух агатовых пластинках, так что выемочки служили подшипниками для оси, и стрелка могла свободно колебаться в вертикальной плоскости перед разделенным кругом. Приведя этот круг в плоскость магнитного меридиана, Норман заметил, что стрелка становилась всегда под постоянным углом наклонения, который он нашел равным  $71^{\circ}50'$ .

Норман описал свой прибор и свое открытие в изданной им в 1581 г. брошюре под заглавием «The New Attractive».

Прибор Нормана стал впоследствии одним из основных приборов по изучению земного магнетизма и получил название инклинатора.

§ 5. В 1600 г. в Лондоне вышла в свет книга: *Guilielmi Gilberti, Colcestrensis, medici londinensis, «De magnete magneticisque corporibus et de magno magnetе tellure Physiologia nova plurimis et argumentis et experimentis demonstrata»*, являющаяся не только первым систематическим экспериментальным исследованием явлений магнетизма, но и одним из первых и образцовых экспериментальных исследований вообще.

Вильям Гильберт, или, по английскому произношению, Джильберт, родился в Кольчестере в 1540 г. и умер в Лондоне в 1603 г. По образованию он был врачом и пользовался такой славой, что королева Елизавета сделала его своим лейб-медиком, положив ему вместе с тем особое содержание для продолжения научных изысканий. Предполагают, что Гильберт был в общении с лордом Бэконом, входившим также в число приближенных королевы Елизаветы. Бэкон в своих философских произведениях проповедывал необходимость экспериментального метода при изучении природы, Гильберт осуществил это на деле.

Сочинение Гильbertа подразделено на шесть книг, а каждая книга — на ряд глав.

В первой книге он устанавливает основные явления магнетизма, показывая, прежде всего, что всякий естественный магнит, независимо от своей формы, обладает двумя полюсами — северным и южным. Для дальнейших опытов он приготовляет из магнитного камня шар, который служит ему как модель земного шара, представляющего также магнит. Он называет свой шаровой магнит «Terrella» — землица. Чтобы обнаруживать присутствие и малых магнитных сил, Гильберт применяет способ подвешивания стрелки, магнита или железной полосы на длинной коконовой нити или на пучке таких между собою не скрученных нитей. Он показывает, что если магнит разрезать на два или на несколько кусков, то каждый кусок остается магнитом с двумя полюсами. Благодаря чувствительности своего способа подвеса, он показывает, что мягкое отожженное железо без действия магнита (а лишь под действием Земли) приобретает магнитные свойства, и полоса такого железа, подвешенная горизонтально при надлежащих предосторожностях (полное спокойствие воздуха в комнате), становится сама в плоскость магнитного меридиана. Все опыты, описываемые Гильбертом, вошли впоследствии в учебники идерживаются в них и поныне, так же как и его терминология.

Вторая книга посвящена, главным образом, явлениям притяжений и отталкиваний между магнитами, изучению модели Земли (*Terrella*) и установлению ее «магнитных меридианов» и «параллелей», а также изучению электрических явлений, причем Гильберт разъясняет отличие их от магнитных и показывает явление магнитной индукции (пользуясь именно этим термином) в мягком железе, которое, в отличие от магнита, не имеет постоянных полюсов: они обмениваются местами, смотря по тому, под действием

какого полюса постоянного магнита железо находится, ибо в ближайшем к этому полюсу конце полосы возбуждается противоположный возбуждающему полюсу магнетизм. Все это подтверждается разнообразными и систематически расположенными опытами.

Книга третья носит заглавие «О направлении». Здесь исследуется способность магнита становиться под действием Земли или другого магнита в определенном направлении, причем Гильберт показывает существование около магнита силового поля (употребляя теперешний термин), которое он изучает на своей модели Земли, чтобы объяснить ее действие на магнит. В этой же главе, поясняя, почему и мягкое железо в земном поле проявляет магнитные свойства, он описывает свой ставший классическим опыт с двумя подвешенными рядом полосками мягкого железа, которые, как только к ним снизу поднести полюс магнита, расходятся, отталкиваясь друг от друга, и нити подвеса заметно отклоняются от вертикальной линии.

Книга четвертая имеет заглавие «О склонении». Склонение Гильберт объясняет различием в строении Земли в разных местах и скоплением в них магнитных масс, поясняет необходимость его изучения для мореплавания, высказывая мысль, что по величине склонения, когда его распределение будет известно, можно будет находить также долготу на море, и, со своей стороны, приводит известные в его время данные о склонении компаса в разных местах.

Книга пятая озаглавлена «О наклонении». Описав инклиноватор того времени, он показывает на своей модели Земли расположение магнитного экватора и параллелей и обращает внимание на изменяемость наклонения с широтой места и даже на противоположный его характер в южном полушарии. Необходимо заметить, что тогда наклонение было измерено только в Лондоне, и Гильберт, можно сказать, вперед указал все главные особенности этого явления, подтвердившиеся впоследствии наблюдениями.

В книге шестой, озаглавленной «О великом магните—Земле», Гильберт распространяет по аналогии явления, которые он наблюдал над магнитным шаром—моделью Земли, на самый земной шар, большую же часть книги посвящает вопросам о суточном вращении Земли, постоянстве магнитной оси Земли, предварении равноденствий.

Из этого беглого очерка можно составить лишь общее понятие о богатстве и оригинальности содержания сочинения Гильberta. Несколько он опередил свое время и подвинул вперед учение о магнетизме, можно видеть по тому, что в это учение в течение почти двух столетий не было прибавлено ничего существенного, чего не было бы в книге Гильберта и что не являлось бы или повторением, или развитием сделанного им.

§ 6. Развитие мореплавания заставило английские торговые компании войти с представлением к правительству о необходимости изучения склонения компаса, и в 1698 г. адмиралтейство назначило Галлея, известного уже тогда по опубликованной им теории магнетизма, командиром военного судна «Paramour Pink», поручив ему обследовать магнитное склоне-

ние в Атлантическом океане, а на следующие два года — и в Тихом. Галлей по возвращении в Англию свел как свои определения склонения, так и другие, ему известные, и издал в 1701 г. первую «магнитную карту», нанеся на неё линии равного склонения. Эта метода представления магнитных элементов была затем распространена на наклонение и напряжение, а потом и на представление разного рода метеорологических данных помошью «изолиний». Еще в 1630-х годах математик Геллибранд, сотрудник, продолжатель и завершитель работ Бригга по вычислению первой таблицы обыкновенных логарифмов, обратил внимание, что склонение компаса, определенное за 50 лет перед тем Норманом, отличалось на  $7^{\circ}$  от наблюденного им. Сперва заподозрили ошибку в наблюдениях Нормана, но затем обнаружилось, что наблюдения и Нормана и Геллибранда верны, а склонение непрерывно изменяет свою величину с течением времени.

В 1772 г. Грахэм в Лондоне заметил, что даже в течение дня магнитная стрелка не остается в покое, а изменяет свое направление на  $10-15'$ , в некоторые же дни — и до  $\frac{1}{2}^{\circ}$  и более. Таким образом были подмечены как суточная изменяемость склонения, так и неправильные изменения, ставшие через 100 лет после этого предметом систематических исследований и тогда названные магнитными бурями.

§ 7. В середине XVIII в. академии Парижская, Петербургская, Берлинская неоднократно ставили как темы на свои премии вопросы теории и практики магнетизма, сводившейся тогда к наивыгоднейшему способу изготовления сильных стальных магнитов, постепенно вытеснявших естественные. В конкурсах принимали участие Л. Эйлер, члены семьи математиков Бернулли, Эпинус, Ламберт и другие. Способы намагничивания были разработаны, с несомненностью был установлен факт, что при намагничивании вес магнита не изменяется, были предложены разные теории, но основанием их служили гипотезы, недостаточно проверенные опытом. Так продолжалось до 1789 г., когда появился мемуар Куломба под заглавием «Sur le magnétisme». В этом мемуаре Куломб для объяснения магнитных явлений принимает уже ранее высказанную гипотезу двух магнитных жидкостей, с тою разницей от электрических, что, как он считает, при намагничивании в каждой частице железа или стали происходит разделение магнетизмов северного и южного, и частица становится маленьким магнитиком с двумя полюсами. Совокупность этих частиц, ориентированных по одному направлению, и дает полный магнит с двумя полюсами. В подтверждение своего воззрения он показал на опыте, что из множества маленьких магнитиков можно составить один большой магнит с двумя полюсами по концам, а не со множеством промежуточных. Но Куломб не остановился на этом: свою гипотезу он рассматривал лишь как средство подчинить явления магнетизма математическому расчету, подобно тому как он это сделал для электричества. Поэтому он ввел понятие о количестве магнетизма, или о магнитной массе, чтобы при помощи его иметь возможность сравнивать «мощность» магнитов, причем определением понятия магнитной массы

служило условие, что сила взаимодействия двух масс пропорциональна произведению их. Оставалось еще найти закон этого взаимодействия в зависимости от расстояния. В «Началах» Ньютона (книга II<sup>1</sup>, предложение 6, следствие 5) содержится указание, что, судя по некоторым грубым испытаниям, им произведенным, магнитная сила убывает пропорционально кубам расстояний, но никаких подробностей Ньютон не дает. Куломб решил получить ответ из опыта на поставленный им вопрос, но не о взаимодействии магнитов, состоящих непременно из двух равных и противоположных магнитных масс, а о взаимодействии отдельной массы на другую, отдельную же. Физически уединить магнитную массу, подобно электрической, невозможно. Куломб применил косвенный прием и двумя различными способами—крутильными весами и качанием маленького магнита,—показал, что сила взаимодействия магнитных масс обратно пропорциональна квадратам расстояний.

§ 8. Прием—наблюдение времени одного размаха магнита, свободно качающегося в горизонтальной плоскости, примененный Куломбом, был обобщен для изучения относительной величины магнитной силы Земли, действующей на тот же магнит в разных ее местах, иными словами, для изучения распределения напряжения земного магнетизма. Если магнит не изменяет своей силы, то время одного его размаха обратно пропорционально корню квадратному из напряжения земного магнетизма, именно горизонтальной его слагающей, когда магнит качается в горизонтальной плоскости. Зная эту слагающую и наклонение, определяемое инклинометром, сейчас же получаем и полное напряжение.

Такое изучение напряжения, по почину знаменитого Александра Гумбольдта, производилось с начала 1800-х годов многими путешественниками и мореплавателями, в том числе и русскими—Крузенштерном, Лисянским, Литке и пр. Суда в то время были парусные, берега отдаленных от Европы стран мало обследованы, плавание судов в дальние воды продолжалось 4—5 лет, и положиться с уверенностью на постоянство магнита в течение такого срока было невозможно. Рекомендовали брать с собой несколько магнитов, наблюдать качание их всех и пользоваться теми, которые были согласны между собой. По возвращении в порт отправления—опять произвести качания, а вместе с тем непрерывно следить и в нем за изменяемостью напряжения, прокачивая периодически тот же самый магнит. Но ясно, таким путем нельзя было определить, что изменяется с течением времени—напряжение ли, сила ли магнита, или и то и другое вместе, ибо в выражение времени размаха входит произведение этих величин. Вот, например, что говорится в курсе физики, читавшемся Био в Парижской политехнической школе в 1816 г.: «Для будущих успехов физики было важно определять с точностью теперешнее напряжение земного магнетизма, подобно тому как наблюдается давление атмосферы и температура в разных местах земного шара. Повторив те же наблюдения через несколько столетий, можно было узнать, изменяют ли магнитные силы свою величину, подобно тому как установлено, что меняется их направление».

«Простейший способ, который приходит на ум,—это наблюдать склонение, наклонение и напряжение при помощи трех стрелок, для этого предназначенные, которые бы тщательно сохранялись, чтобы подвергать их вновь испытаниям из века в век. Но так как за такой промежуток времени они могли бы изменить свой магнетизм, то их следовало бы каждый раз подвергать перед наблюдением вновь намагничиванию при помощи весьма сильных магнитов и по методе двойного натирания, которому им сообщается предельная сила намагничивания... Этот способ становится еще более верным, если иметь по нескольку стрелок каждого рода» и т. д. Сама собою очевидна практическая неисполнимость этого предложения. Сохранились ли до нашего времени древние меры, древние инструменты и пр.? Приходится ответить, что нет: веками хранятся лишь числа, слова и истины, запечатленные в книгах. И значит, надо было изыскать способы выражать в числах в отдельности напряжение и силу магнита (магнитный момент его), а не только их произведение. Био был известным физиком, хорошим математиком, опытным астрономом, но, как видно, и ему и его современникам задача казалась неразрешимой, пока за нее не взялся «Princeps mathematicorum»—Гаусс, поставивший науку о земном магнетизме на совершенно новые основания и не только внесший в магнитные измерения астрономическую точность, но и приведший их к абсолютной мере.

§ 9. Гаусс имел обыкновение, докладывая свои научные открытия Геттингенскому Королевскому ученому обществу для напечатания в его известиях, представлять и извлечение из них, в котором он без формул и выкладок излагал сущность дела; поэтому мы и будем передавать сообщение о его трудах его собственными словами.

15 декабря 1832 г. в названном обществе Гаусс сделал доклад под названием: «Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata», т.е. «Напряжение земной магнитной силы, приведенное к абсолютной мере». Этим докладом он, можно сказать, преобразовал науку о магнетизме. Но чтобы его сообщение стало вполне понятным, необходимо предпослать несколько слов об измерениях и единицах мер вообще.

Всякая величина измеряется величиною, с нею однородною, принимаемою за единицу: длина—длиною, площадь—площадью, объем—объемом, сила—силою и т. д.; значит, сколько существует родов величин, столько надо иметь и единиц для их измерения, причем каждая из единиц остается произвольною. Такою, напр., была система наших торговых мер: для длины принята единица—аршин, для площади—десятина, для объема—четверть и ведро, для силы—пуд и т. д. Единицы между собою или совсем не связаны, или связаны сложными соотношениями, и вряд ли кто, не справляясь в таблицах, сумеет сосчитать, сколько четвертей верна войдет в амбарный сусек емкостью, напр., 10 кубических аршин. Такая система—не абсолютная, а произвольная. Гаусс обратил прежде всего внимание, что во всех физико-механических вопросах достаточно принять три произвольных независимых друг от друга единицы, а именно единицу длины, единицу

массы, единицу времени, все же остальные единицы выражать при помощи этих трех основных. Так, напр., за единицу площади принять площадь такого квадрата, коего сторона равна единице длины, за единицу объема — объем такого куба, коего ребро равно единице, за единицу скорости принять скорость такого равномерного движения, в котором единица длины проходится в единицу времени, за единицу ускорения — ускорение такого равномерно-переменного движения, в котором в единицу времени изменение скорости равно единице (т. е. скорости, принятой за единицу), за единицу силы принять такую силу, которая массе, равной единице, сообщает ускорение, равное единице ускорений, и т. д. Соответственно этой системе за единицу магнитной массы принимается такая магнитная масса, которая действует на массу, ей равную, при расстоянии, равном единице, силою, принятую за единицу, и т. д. Такая система мер или единиц и названа Гауссом абсолютною, причем за основные единицы он принял миллиметр, миллиграмм (массу) и секунду среднего солнечного времени. Понятно, что при таком выборе единиц всякий произвол устраниется, результат измерения становится независимым от прибора или способа измерения, и все результаты становятся сравнимыми между собою.

После этого вводного замечания перейдем к передаче слов Гаусса:

«Из трех элементов, определяющих проявления земного магнетизма в данном месте, склонения, наклонения и напряжения, прежде всего стало предметом наблюдений и изысканий первое, гораздо позднее второе и лишь в последнее время третье. Это объясняется главным образом тем, что склонение представляет непосредственный интерес для мореплавателей и землемеров, наклонение же находится в более тесной связи с склонением, нежели с напряжением. Но для естествоиспытателя, как такового, интерес ко всем трем элементам одинаков. Наше познание о земном магнетизме в целом будет оставаться составленным из незаконченных отрывков, если не все эти отрасли будут изучаться с одинаковой тщательностью.

«Первыми данными о напряжении земного магнетизма мы обязаны А. фон Гумбольдту, который в своих путешествиях обратил на этот элемент свое главное внимание и доставил большое количество наблюдений, из которых обнаружилось постепенное уменьшение горизонтальной слагающей этого напряжения от магнитного экватора к магнитным полюсам. После этого весьма многие наблюдатели последовали по стопам этого великого естествоиспытателя, и мы располагаем сокровищем наблюдений, относящихся ко всем частям земной поверхности, на основании которых столь-  
васлуженный по познанию земного магнетизма Ганстен сделал попытку обосновать карту изодинамических линий.

«Применяемый для всех этих определений способ состоит в том, что в местах, где желают сравнивать напряжение земного магнетизма, заставляют качаться ту же самую магнитную стрелку и с точностью замечают продолжительность одного качания. Правда, эта продолжительность зависит от величины угла размаха, но так, что по мере уменьшения этого угла

она приближается к определенному пределу, который и называют продолжительностью размаха и к которому легко приводится наблюдаемая, зная угол размаха. Напряжение земного магнетизма обратно пропорционально квадрату продолжительности размаха того же самого магнита или прямо пропорционально квадрату числа его качаний в заданное время; это относится как к полной силе, так и к горизонтальной ее слагающей, смотря по тому, качается ли магнит в плоскости магнитного меридиана, или в горизонтальной плоскости около вертикальной оси.

«Очевидно, что допустимость такого определения всецело основана на предположении о неизменности магнитного состояния качаемого магнита. Если применять для таких опытов соответственным образом намагниченную и тщательно сохраняемую стрелку из хорошо закаленной стали и если наблюдения не охватывают значительного времени, то опасение значительного изменения в состоянии стрелки не велико, и можно себя еще более в этом отношении успокоить, если по возвращении на первоначальное место вновь наблюдана та же продолжительность размаха. Однако опыт показывает, что трудно рассчитывать на такой успех. Точнее же говоря, такое успокоение заключает логический ложный круг. В самом деле, давно известно, что как склонение, так и наклонение в том же самом месте не остаются неизменными, а и то и другое претерпевают с течением времени весьма значительные нарастающие, а вместе с ними и заметные при точных наблюдениях периодические изменения в зависимости от часа дня и времени года. Поэтому не подлежит сомнению, что и третий элемент—напряжение—подвергается таким же изменениям, и даже суточные периодические изменения его могут быть обнаружены при помощи достаточно точных наблюдений. Таким образом, если по истечении значительного времени в том же месте наблюдана та же продолжительность размаха, то еще нет уверенности в том, что не следует ли ее приписать случайной компенсации изменений в напряжении и в магнитном состоянии стрелки. Если даже допустить, что это обстоятельство для небольших промежутков времени лишь незначительно уменьшает благонадежность сравнительного метода, то он теряет всякое значение, когда вопрос идет об изменении напряжения земного магнетизма в данном месте в течение весьма большого промежутка времени. Этот в научном отношении весьма интересный вопрос останется без всякого ответа, если только, вместо сказанного сравнительного метода, не будет применен другой, которым напряжение земного магнетизма приводится к совершенно определенному, во всякое время вновь могущему быть с большою точностью повторенному, совершенно независимо от качеств примененных магнитов измерению, выраженному в единицах, вполне установленных».

Объяснив этими словами постановку вопроса, Гаусс приводит данное им полное и окончательное его решение, которое будет изложено в своем месте. Здесь скажем только, что оно основано на наблюдениях не только качания, но и отклонения, вызываемого этим прокачанным магнитом в положении вспомогательной стрелки при действии на нее с определенного

расстояния. Заметим, что, разрабатывая общие формулы для тангенса угла такого отклонения, когда отклоняющий магнит направлен перпендикулярно к магнитному меридиану через центр отклоняемого, и расстояние велико по сравнению с длиной магнита, Гаусс показал, что этот тангенс обратно пропорционален  $(n + 1)$ -ой степени расстояния, если взаимодействие масс обратно пропорционально  $n$ -ой степени. Точные наблюдения Гаусса показали, что тангенсы углов отклонения обратно пропорциональны кубам расстояний. Этим подтвердились как замечание Ньютона, так и закон Кулона.

Гаусс как астроном и геодезист внес в магнитные наблюдения небывалую до него точность применением зеркальной методы отсчета и вместе с тем разработал устройство приборов для абсолютных магнитных наблюдений и основал в Геттингене вместе с В. Вебером первую магнитную обсерваторию.

Абсолютные определения элементов земного магнетизма требуют значительного времени, и, при той точности, которую давали возможность достичнуть приборы Гаусса, суточные изменения уже становились заметными за время наблюдений. Чтобы иметь возможность их исключать, Гаусс изобрел и устроил целый ряд приборов «вариационных», которые давали не абсолютные значения элементов, а их изменения.

§ 10. Но этим не ограничились работы Гаусса по земному магнетизму: основав вместе с Вебером Магнитный союз, он издает ежегодник под заглавием «Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins», в котором и помещает свои изыскания и наблюдения по вопросам земного магнетизма. Вот в этом-то ежегоднике за 1838 г. Гаусс и обнародовал свое исследование, которое совершенно преобразовало учение о земном магнетизме, бывшее до него.

Сочинение Гаусса носит название «Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus»—«Общая теория земного магнетизма» и вот в каких словах он характеризует поставленный им вопрос и общее содержание своего труда.

«Безустанная ревность, с которой в последнее время стремятся исследовать во всех частях земной поверхности направление и величину земной магнитной силы, составляет тем более отрадное явление, что при этом проявляется чисто научный интерес. В самом деле, сколь ни важно для мореплавания возможно полное познание склонения, но его потребности не простираются далее, и почти все, что стоит вне этого, для мореплавания почти безразлично». Здесь необходимо заметить, что так было при деревянном парусном флоте во времена Гаусса; теперь же, при железных судах, знание напряжения и наклонения существенно важно для уничтожения девиации на них.

«Однако наука,—продолжает Гаусс,—хотя и отзывчивая на материальные потребности, не ограничивается ими и требует для всех элементов своего исследования одинакового внимания.

«Принято наносить сводку результатов магнитных наблюдений на карту при помощи трех систем линий, названных изогоническими, изоклони-

ническими и изодинамическими. Эти линии изменяют весьма значительно свой вид и свое положение, так что карта представляет состояние явления лишь для определенного момента времени.

«Галлеева карта склонений разнится весьма сильно от карты Барлоу, относящейся к 1833 г.; карта наклонений Ганстейна для 1780 г. также отличается уже весьма значительно от карты, представляющей теперешнее положение изоклинических линий: попытки представления наклонений еще слишком недавни, однако уже и ими обнаружены изменения, подобно тому как для склонения, которые, без сомнения, не прекратятся с течением времени. Все эти карты теперь частью заключают большее или меньшее число пробелов, частью же вполне благонадежны, однако можно надеяться, что если они и не достигнут полноты в виду недоступности некоторых областей Земли, они к ней приближаются быстрыми шагами.

«С более высокой научной точки зрения такое даже возможно полное представление явления на основании наблюдений еще не есть ее конечная цель: этим достигается примерно то же, что для астронома было бы, когда он пронаблюдал видимый путь кометы по небесному своду. Собраны лишь кирпичи, но нет еще здания, пока запутанные явления не подчинены общему единому началу. Подобно тому как астроном, после того как светило ушло из области видимости, лишь начинает главную свою работу и, основываясь на законе тяготения, вычисляет по наблюдениям элементы истинной орбиты и таким образом получает возможность с уверенностью предуказывать дальнейший путь светила, так и физик должен поставить себе задачу, по крайней мере насколько то позволяют разнообразные и менее благоприятные обстоятельства, исследовать главные силы, вызывающие явления земного магнетизма, по образу их действия и величине, подчинять наблюдения, поскольку их имеется, этим началам, и таким образом, по крайней мере с некоторою степенью надежного приближения, предвидеть явления, имеющие место в тех областях, куда для наблюдений еще проникнуть не могли. Во всяком случае, полезно иметь эту высокую цель постоянно в виду и попытаться проложить к ней путь, хотя теперь, при значительном несовершенстве данных, возможно лишь не более как отдаленное приближение к этой цели.

«В мое намерение не входит упоминание о безуспешных попытках когда без всяких физических оснований думали разгадать великую загадку природы. Можно признать физическое основание лишь за такими попытками, в которых Земля уподобляется настоящему магниту, внешнее действие которого и подчиняется расчету. Но все попытки такого рода имеют между собою то общее, что, вместо того чтобы исследовать, каков должен быть этот магнит, чтобы удовлетворялись наблюдения явлений, совершенно не заботясь о том, получится простое или весьма сложное его строение, исходили из заранее принятого определенно простого строения и пробовали, соответствуют ли наблюдения сделанной гипотезе. Здесь, таким образом, по-

вторяется лишь то, что нам известно из истории астрономии и естественных наук о возникновении многих из наших в них познаний.

«Простейшая гипотеза такого рода та, в которой принимается один весьма малый магнит в центре Земли, или, точнее (так как едва ли кто серьезно предполагал, что такой магнит действительно существует), что магнетизм Земли распределен так, что полное его внешнее действие равносильно с действием воображаемого бесконечно малого магнита, вроде того как тяготение к однородному шару равносильно с притяжением массы его, сосредоточенной в его центре.

«При таком предположении те две точки, в которых продолжение магнитной оси центрального магнита пересекает поверхность Земли, суть ее магнитные полюсы; в них магнитная стрелка становится вертикально, напряжение же наибольшее; по большому кругу по средине между обоими полюсами (магнитный экватор) наклонение равно нулю, напряжение же — в половину того, что при полюсах; между магнитным экватором и каждым из полюсов как наклонение, так и напряжение зависит лишь от расстояния до сказанного экватора (магнитная широта), причем тангенс наклонения равен удвоенному тангенсу магнитной широты, наконец, направление горизонтальной стрелки совпадает с направлением большого круга, прошедшего через данное место и северный магнитный полюс. Однако действительность согласуется со всеми этими необходимыми следствиями этой гипотезы лишь с весьма грубым приближением: линия нулевого наклонения не есть большой круг, а кривая двойкой кривизны, при разных наклонениях обнаруживаются и различные значения напряжения, направления горизонтальной стрелки далеко не сходятся в одной точке и т. д. Таким образом, достаточно поверхностного обозрения, чтобы доказать не применимость сказанной гипотезы. Тем не менее еще и теперь применяют один из вышеупомянутых выводов, чтобы определять положение линии нулевого наклонения из наблюдений, произведенных в некотором от нее расстоянии, при небольших величинах наклонения.

«Из такой гипотезы исходил 80 лет тому назад Тобиас Майер, с тем лишь различием, что он помещал бесконечно малый магнит не в центре Земли, а приблизительно в удалении одной седьмой радиуса от центра, но вместе с тем он удержал, вероятно для того чтобы избежать усложнения вычислений, совершенно произвольное ограничение, что перпендикулярная к оси магнита плоскость проходит через центр Земли. Таким образом, он нашел, правда для весьма небольшого числа мест, что наблюденные склонения и наклонения хорошо согласуются с вычисленными. Однако более подробная проверка показала бы, что вся совокупность явлений представляется при этом предположении не лучше, нежели при первом. Определения напряжения, как известно, тогда еще не существовало.

«Ганстейн сделал шаг далее, попытавшись определить положение и силу двух магнитов так, чтобы эта гипотеза соответствовала наблюдениям. Решительная проверка допустимости или недопустимости гипотезы состоит

в сличении получаемых по ней результатов с действительностью. Гансцен сделал такое сличение для 48 мест, в числе которых находится лишь 12, в которых определено и напряжение, и лишь 6, где известны все три элемента. Мы встречаем, однако, разности между вычислением и наблюдением, доходящие в наклонении до  $13^\circ$  (в склонении встречается даже разность в  $29^\circ$ , однако правильнее оценивать несогласие расчета с наблюдением не по числу градусов разности склонений, а по действительному отступлению направления полной силы, вычисленной и наблюденной, которое для этого места составляет всего  $11^\circ.5$ ).

«Если признать, что столь значительные отклонения несовместимы с требованиями, которые должны предъявлять к удовлетворительной теории, то нельзя не притти к заключению, что магнитное строение Земли не таково, которое допускало бы замену его сосредоточением в одном или двух бесконечно малых магнитах. Это не служит опровержением того, что с большим числом таких воображаемых магнитов можно в конце концов достигнуть удовлетворительного согласия, но совсем другой вопрос, можно ли посоветовать принять такое решение. В самом деле, вычисления, уже весьма затруднительные для двух магнитов, представили бы непреодолимые трудности при большем их числе. Лучше всего совершенно оставить этот путь, который невольно заставляет припомнить попытки представить движение планет нагромождением все большего и большего числа эпизиков.

«В предлагаемом сочинении я развиваю общую теорию земного магнетизма, независимо от каких-либо частных предположений о распределении магнитной жидкости в земном шаре, и сообщаю полученные при первом приложении этого способа результаты. Сколь эти результаты и несовершенны, все-таки они дают понятие о том, чего можно надеяться достичь в будущем, когда более тонкой и повторной обработке будут подвергаться более благонадежные и более полные наблюдения из всех областей Земли».

**§ 11.** Основанием методы Гаусса служит развитая им же и опубликованная в том же ежегоднике за 1839 г. теория так называемой теперь потенциальной функции или потенциала. Это сочинение Гаусса носит название «Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrtem Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehung und Abstossung Kräfte», т. е. «Общие предложения, относящиеся к силам отталкивания и притяжения, действующим обратно пропорционально квадратам расстояний».

Положим, что имеются некоторые массы, которые мы вообразим, для простоты рассуждения, сосредоточенными в отдельных точках, положение коих отнесем к какой-либо неизменной системе осей координат. В каждой точке пространства, окружающего эти массы, будет действовать на массу такого же рода, как рассматриваемая, и которую, для простоты, мы примем равной единице, некоторая сила, представляющая равнодействующую всех сил притяжения или отталкивания этой единичной массы заданными. Сила эта и представляет «напряжение поля» в рассматриваемой точке. Общая

задача состоит в нахождении элементов, т. е. величины и направления этой силы, иными словами, трех ее составляющих, параллельных осям координат, для данного распределения притягивающих масс и для каждой точки пространства. Ясно, что каждая из этих слагающих будет зависеть от положения притягиваемой точки, определяемого координатами ее, т. е. будет функцией трех ее координат. Значит пришлось бы искать три таких функции. Оказывается, однако, что это может быть сведено к разысканию одной функции указанных координат, называемой *силовой*, или *потенциальной*, и обладающей тем свойством, что ее частная производная, взятая по соответствующей координате, представит как раз слагающую притяжения или отталкивания, параллельную соответствующей координатной оси. Вот изучению общих свойств этой-то функции и посвящено исследование Гаусса, причем для нас важно упомянуть, что когда притягивающие массы расположены внутри шаровой поверхности, а притягиваемая точка — на этой поверхности, то потенциальная функция разлагается в ряд, члены которого составлены вполне определенным образом из некоторых выражений, заключающих последовательные степени синусов и косинусов широты и долготы рассматриваемой точки поверхности шара. Коэффициенты же при этих выражениях будут различные, смотря по тому или иному распределению притягивающих или отталкивающих масс, самые же выражения от этого распределения не зависят. Выражения эти под названием «шаровые функции» были введены в анализ Лежандром и Лапласом, изучавшими вопросы о притяжении.

Гаусс и поставил себе задачу, составив общее выражение первых членов ряда, представляющего потенциальную функцию для поверхности Земли, оставляя в нем коэффициенты неопределенными, найти эти коэффициенты так, чтобы полученная функция представляла потенциал для земного магнетизма, т. е. чтобы ее производные по координатам каждой точки были равны соответствующим слагающим напряжения земного поля в этой точке.

Гаусс взял первые четыре группы членов общего разложения, заключавшие 24 неизвестных коэффициента, для определения которых ему надо было бы иметь 24 уравнения, а так как знание всех трех элементов для какого-либо места доставляет три таких уравнения, то, значит, было бы достаточно иметь полные наблюдения в восьми местах, чтобы вычислить эти коэффициенты. Но такое вычисление было бы и весьма сложно (пришлось бы решать системы 24 уравнений с 24 неизвестными, и мало надежно, ибо случайные погрешности в результатах наблюдений исказили бы значения коэффициентов). Поэтому Гаусс прибег к тому приему, упрощенный образец которого мы имеем в вычислении коэффициентов девиации компаса при разложении ее в ряд по синусам и косинусам курса. Вместо того чтобы брать для определения пяти коэффициентов пять каких-либо наблюдений, строят сперва по непосредственно наблюденным результатам диаграмму, сглаживая погрешности, и уж с этой диаграммы снимают девиации для 32 или 16 равноотстоящих курсов и по ним, группируя уравнения определенным

образом, благодаря которому неизвестные, кроме одного, сами собою исключаются, вычисляют по сравнительно простым формулам искомые коэффициенты, а по ним—вновь девиации, чем и сглаживаются окончательно все погрешности наблюдений.

Подобным образом поступил и Гаусс, только, вместо диаграммы, он воспользовался магнитными картами, изданными английским адмиралтейством с которых и снял уже сглаженные данные для пунктов, так и в таком числе избранных, чтобы вычисление коэффициентов упрощалось соответственной группировкой уравнений и не приходилось прибегать к весьма сложному процессу исключения многих неизвестных.

Составив таким образом общее выражение магнитного потенциала Земли с численными коэффициентами, определенными на основании совокупности всех данных, послуживших для построения магнитных карт, Гаусс составил и выражения трех слагающих магнитной силы в зависимости от широты и долготы точки земной поверхности и для проверки вычислил по ним значения элементов для 91 пункта, где имелись непосредственные определения таковых. Согласие вычисления и наблюдений получилось изумительное: наибольшая разность в склонении составила  $5^\circ$ , в наклонении около  $4^\circ$ , в напряжении—0.09 при полной величине его около 2.00 причем эти разности относились к пунктам, где наблюдения были или сравнительно устарелые или немногочисленные и малонадежные.

Таким образом, благодаря Гауссу вопрос об общем характере «силового магнитного поля» для поверхности Земли получил полное и теоретически законченное решение. При дальнейшем развитии этого вопроса или перевычисляли вновь 24 коэффициента Гаусса по более полным и подробным наблюдениям, или прибавляли к его разложению новые члены и увеличивали число коэффициентов. Так поступил, напр., Фритше, добавивший к членам до 4-го порядка Гаусса еще члены 5-го и 6-го порядков, так что число коэффициентов в его разложении равнялось 48; или знаменитый астроном Адамс (тот самый, который наряду с Леверье по вычислениям открыл Нептуна), принявший, кроме того, во внимание и эллипсоидальный вид Земли, причем о громадности вычислений Адамса можно составить понятие по их сводке, занимающей во втором томе собраний его сочинений 400 страниц большого формата in  $4^\circ$ , сплошь занятых мелко напечатанными числами.

§ 12. В заключение обзора работ Гаусса приведем еще его слова, в которых он выражает свой взгляд на задачу будущих наблюдателей и свои требования от будущих магнитных наблюдений. Вот что он говорит в § 34 своего труда: «Для удовлетворительного уточнения и пополнения элементов необходимо предъявлять к наблюдениям гораздо более строгие требования, нежели те, которым они теперь удовлетворяют. Они должны бы обладать во всех пунктах тою степенью точности, которая теперь достигнута лишь для немногих; их должно бы освобождать от неправильных колебаний, которым элементы подвергаются; их должно бы при-

водить к одному моменту времени. Пройдет еще много времени, пока таким требованиям будут в состоянии удовлетворять; пока же более всего необходимо доставление *полных* наблюдений, т. е. всех трех элементов в тех пунктах обширных пространств, в которых таких наблюдений теперь совсем не имеется, так как вновь присоединенный пункт представляет тем большую важность для общей теории, чем далее он расположен от имеющихся уже в нашем распоряжении; по истечении достаточного промежутка времени можно будет вычислить вновь элементы для другого момента и получить таким образом их вековые изменения. Но, очевидно, для этого будет безусловно необходимо совершенно отказаться от теперешнего относительного определения и заменить его абсолютным.

В течение будущих столетий эти изменения не будут представляться равномерными, и изучение хода элементов доставит естествоиспытателям неисчерпаемый материал для изысканий».

**§ 13.** Мы уже упоминали, что Гаусс и Вебер основали Магнитный союз и оборудовали магнитную обсерваторию в Геттингене, в которой элементы земного магнетизма подвергались непрерывному наблюдению.

Эта обсерватория послужила образцом для других, а открытие фотографии дало возможность применить к магнитным приборам автоматическую и непрерывную запись их показаний. Теперь таких обсерваторий около 50. Приборы их доведены до высокой степени точности и совершенства, выработаны и типы переносных приборов, так что пожелание Гаусса в этом смысле получило осуществление; здесь нельзя не упомянуть основателя нашей магнитной обсерватории в Павловске академика Г.И. Вильда, разработавшего целый ряд типов таких приборов, замечательных по своей точности.

В 1902 г. американский миллиардер Андрью Карнеджи пожертвовал значительную сумму на учреждение в Вашингтоне специального института для исследований земного магнетизма и атмосферного электричества. Для исследований на море из абсолютно немагнитных материалов была построена (на предоставленные институту средства) яхта «Карнеджи», снабженная специально разработанными приборами для определения элементов земного магнетизма на море.

С 1909 г. яхта «Карнеджи» находится в почти непрерывном крейсерстве во всех океанах, делая ежегодно около 50 000 миль плавания. Произведенные при этом магнитные наблюдения показали, что склонение в северной части Атлантического океана было известно хорошо: отклонения показанного на картах от истинного не превосходили  $0^{\circ}.5$ ; в южной части — хуже: отклонения доходили до  $1^{\circ}.2$ . В Тихом океане, даже на столь обычном пути, как дуга большого круга Нагасаки—Сан-Франциско, погрешности карт доходили до  $2—2^{\circ}.2$ . Всего больше погрешности в наклонении оказались в Тихом океане: в частях, прилегающих к берегам Южной Америки, обнаружены отклонения, доходящие до  $10^{\circ}$  и более.

Понятно, что однородный, точный, проверенный материал, получаемый работами персонала яхты, покрывающего сетью наблюдений всех трех элементов громадные пространства океанов, является неоценимым для нового вычисления гауссовых коэффициентов и изучения распределения земного магнетизма.

§ 14. Систематические наблюдения в обсерваториях вскоре показали, что те неправильные колебания магнитной стрелки, которые происходят внезапно и без всякой видимой причины, представляют явление всемирное, так как совершаются одновременно во всех пунктах земного шара. Затем была обнаружена их связь с северными сияниями и этих последних—с солнечными пятнами, но связь эта долгое время представлялась загадочной и получила разъяснение лишь в самое последнее время благодаря работам двух норвежских ученых—проф. Биркеланда и проф. Штермера. Биркеланд начал изучение северных сияний в 1898 г., устроив специальную обсерваторию на одной горе высотою около 3 000 футов, невдалеке от Гаммерфеста на севере Норвегии. В этой обсерватории он провел зиму 1899/1900 г. и на основании предварительного изучения вопроса составил план систематической работы. По этому плану в 1902/1903 г. были построены четыре специальные обсерватории—в Каафиорде—на севере Норвегии, в Дирафиорде—в Исландии, в Аксалеоне—на Шпицбергене и на Маточкином шаре—на Новой Земле. Кроме того, в 23 магнитных обсерваториях производились в обусловленные дни и часы специальные наблюдения при ускоренном ходе самозаписывающих приборов.

Весь громадный материал был подвергнут Биркеландом тщательной обработке, на основании которой он пришел к заключению, что причиной магнитных бурь служат электрические токи, или, точнее говоря, потоки электрических частиц, в верхних (на высоте около 100 км) слоях атмосферы.

Выводы Биркеланда еще не были опубликованы, как проф. Штермер занялся исследованием вопроса о движении под влиянием магнитного поля Земли наэлектризованной частицы или частицы электричества, выброшенной Солнцем. Им посвящено этому вопросу около 50 статей, завершенных громадной вычислительной работой, в которой определяется при помощи разработанного им способа приближенного численного интегрирования дифференциальных уравнений вид траекторий, по которым могут двигаться такие частицы. Оказалось, что эти частицы могут достигать Земли лишь в весьма узкой области близ Полярного круга, и характерные особенности траекторий вполне объясняли вид северных сияний с их засветами и лучами. Таким образом, Штермером была установлена математическая теория этого явления, и тогда связь его с солнечными пятнами, являющимися источниками излучения катодных лучей (т. е. наэлектризованных частиц) получила полное объяснение. Получила объяснение и связь северных сияний и магнитных бурь: поток электрических частиц действует на магнитную стрелку подобно гальваническому току, вызывая ее отклонения и вообще производя магнитное поле.

Штермер не ограничился только теоретическими изысканиями, он оборудовал на севере Норвегии две обсерватории в расстоянии около 25 км одна от другой. В этих обсерваториях, соединенных телефоном, производятся одновременные снимки сияний, причем получающиеся на пластинках изображения ярких звезд и планет дают ориентировку камеры, зная которую, сейчас же можно определить простым тригонометрическим расчетом и положение различных точек сияния в пространстве. Эти определения показали, что сияния группируются на высоте около 100—150 км над поверхностью Земли.

Понятно, что параллельные наблюдения производимых магнитных возмущений и определение места и вида потока электрических частиц, вызывающих свечение разреженных газов высших слоев атмосферы, дают возможность судить и о количестве притекающего электричества, но эти работы уже не входят в область изучения земного магнетизма, хотя и находятся с ним в самой тесной связи.

**§ 15.** Остается сказать еще несколько слов о развитии столь важного для мореплавания учения о девиации компаса, т. е. о влиянии на компас судового железа или судового магнитного поля.

На явление девиации компаса было обращено внимание в конце 1790-х годов, когда при постройке деревянных парусных судов начали применять, по указаниям Сеппингса, железное крепление, в особенности же диагональные железные ридерсы по палубам.

Явление девиации сперва не только плохо подчинялось расчету, но даже затруднялось и в систематическом ее определении.

Тем временем началось железное судостроение и появились пароходы, да и в постройку деревянных судов входило все больше и больше железа. Наконец в 1829 г. знаменитый французский математик Пуассон дал полное теоретическое решение вопроса о равновесии компасной стрелки на корабле, и астроном Эри почти тотчас же применил его выводы к практике, показав, каким образом надо поступать, чтобы, располагая вблизи компаса магниты и бруски мягкого железа, произвести влияние, обратное влиянию судового железа, иными словами, «уничтожить девиацию». Метода Эри практикуется и поныне. Но работа Пуассона оставалась совершенно неизвестной, да и по характеру своего изложения малодоступной мореплавателям.

Железное судостроение, особенно после того как появились винтовые пароходы, быстро развивалось; вместе с тем ежегодно усиливалось торговое и пассажирское движение между Европой и Америкой. В начале 1860-х годов произошел целый ряд крушений, в том числе двух пассажирских пароходов у берегов Ирландии, с большим числом жертв. Расследование показало, что погрешности компаса служили едва ли не главной причиной. Тогда в 1862 г. английским адмиралтейством был образован Компасный комитет, в который, между прочим, вошли членами кембриджский профессор математики Арчибалд Смит и капитан Эванс. Они, исходя из урав-

нений Пуассона, получили практически удобные формулы и придали теории девиации компасов тот вид, в котором она изложена в изданном английским адмиралтейством руководстве, служащем и поныне основанием этой науки.

В то время в Англии строился наш первый броненосец-батарея «Первенец». На изучение девиации компасов обратил серьезное внимание капитан-лейтенант Белавенец, по проекту которого и была устроена в Кронштадте Компасная обсерватория, издавшая ряд трудов И. П. Белавенца и его помощника И. П. де Коллонга. После смерти Белавенца руководившую роль в развитии учения о девиации компасов занял И. П. де Коллонг, внесший в это учение весьма много оригинальных исследований, предложивший практические приборы для уничтожения девиации и разработавший как теорию, так и способы такого уничтожения, так что благодаря трудам И. П. де Коллонга это дело в русском флоте стояло выше, нежели в каком бы то ни было другом.

## ГЛАВА II

### Необходимые сведения из учения о магнетизме вообще

§ 16. Учение о магнетизме и электромагнетизме, даже если не касаться электротехники, представляет необъятную область: благодаря электромагнитной теории лучистой энергии оно охватывает всю физику, исследованием же свойств электронов и излучений радия оно проникает к познанию самого строения материи и, следовательно, затрагивает коренные основы химии.

Понятно само собою, что в предмет нашего изложения не может входить даже упоминание о громадном большинстве отделов этого учения, ибо наша цель ограничивается рассмотрением тех немногих простейших явлений, изучение которых необходимо для установления и уяснения способов производства магнитных измерений, выполняемых при магнитной съемке, а отчасти и при уничтожении девиации компасов.

Нет надобности описывать, что такое стальной магнит,—каждый читатель имел с ним дело, и это описание не прибавит ясности изложению.

Условимся для краткости речи о следующих выражениях: 1) стальной магнит, имеющий вид полосы квадратного, прямоугольного или круглого сечения, будем называть просто *магнитом*; 2) всякий магнит, какой угодно формы, снабженный топкою и положенный на шпильку, около которой он может свободно вращаться, будем называть *магнитною стрелкою* или просто *стрелкою*; это же название будем придавать и магниту, подвешенному на шелковинке или положенному на пробке на воду, вообще имеющему свободное вращение в горизонтальной плоскости.

Основные явления, подлежащие нашему изучению, следующие:

1. *Направляющее действие Земли*, состоящее в том, что всякий свободно подвешенный магнит или стрелка принимают, если вблизи них нет других магнитов или железа, постоянное направление в пространстве, становясь своею длиною в плоскость, обыкновенно близкую к меридиану места, обращаясь при этом всегда одним и тем же концом к северу, другим — к югу. Будучи из этого положения выведена, стрелка вновь к нему возвращается, совершая около него ряд постепенно убывающих (вследствие сопротивления воздуха и трения) колебаний.

Конец магнита или стрелки, обращающийся к северу, называют его *северным полюсом*, другой конец — *южным полюсом*.

2. *Взаимодействие магнитов*, состоящее в том, что северный полюс магнита отталкивает северный полюс стрелки и притягивает ее южный полюс, и, наоборот, южный полюс магнита отталкивает южный полюс стрелки и притягивает северный.

Так как стрелка есть не что иное, как обыкновенный магнит, лишь свободно подвешенный, чтобы устранить, по возможности, трение и сделать его удобоподвижным и чувствительным к действию даже и малых сил, то это явление короче выражают так: *одноименные полюса двух магнитов взаимно отталкиваются, разноименные притягиваются*.

3. *Магнитная индукция в мягком железе*, состоящая в том, что мягкое отожженное железо, будучи приближено к одному из полюсов магнита, приобретает магнитные свойства и само становится как бы магнитом, причем конец куска железа, ближайший к полюсу магнита, становится магнитным полюсом противоположного наименования, дальнейший — того же наименования, что обнаруживают, поднося к этим концам маленькую стрелку и замечая ее отклонения.

По удалении железа от магнита возбужденные в нем магнитные свойства сами собой исчезают.

В стали или в твердом неотожженном, или в наклепанном железе при прикосновении или приближении к магниту также происходит магнитная индукция, подобно тому как в мягком железе, но возбужденный магнетизм по удалении магнита не исчезает, а частично сохраняется на более или менее продолжительное время.

Вот эти-то основные явления, главным образом первые два, и будут предметом более подробного изучения с нашей стороны.

**§ 17.** Непосредственное взвешивание стальных полос до и после намагничивания, произведенное с большою тщательностью еще в 1720-х годах физиком Мушенброком, показало, что от намагничивания вес полосы *не изменяется*. На основании этого Мушенброк заключил, что, употребляя теперешний термин, направляющее действие Земли на стрелку приводится к *паре сил*, которая, заставляя магнит поворачиваться и становиться в определенном направлении, не может сообщить ему никакого поступательного движения.

Куломб подверг этот вопрос систематическому исследованию при помощи своих крутых весов и показал, что если стрелка, свободно вращающаяся в горизонтальной плоскости, отклонена от своего положения равновесия  $OM$  на угол  $\alpha$ , то момент пары, на нее действующей, пропорционален синусу этого угла и выражается формулой

$$(1) \quad \mu = K \sin \alpha$$

прячем  $K$  есть постоянная для данного магнита величина.

Отсюда следует, что если приводить действующую на стрелку пару к двум равным и противоположным силам, приложенным в концах  $N$  и  $S$  стрелки (фиг. 1) и параллельным  $OM$ , то эти силы будут сохранять *постоянные* величины и направление независимо от угла  $\alpha$ . В самом деле, называя каждую из этих сил через  $Q$  и обозначая длину стрелки через  $l$ , видим, что вращающий момент приложенной к стрелке пары равен  $Ql \cdot \sin \alpha$ ; сличая эту формулу с (1), заключаем, что

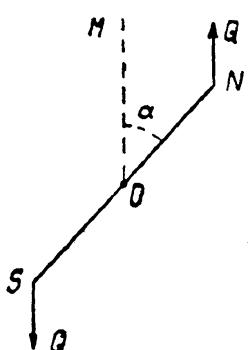
$$Ql = K$$

а так как  $K$  от угла  $\alpha$  не зависит, то и величина  $Q$ —также постоянная.

Мы увидим при рассмотрении теории инклинователя, что это же свойство относится и к вертикальной слагающей действия Земли на стрелку, а следовательно, и полное действие Земли на магнит обладает этим же свойством,

т. е. если его приводить к двум равным параллельным силам, направленным в плоскости магнитного меридиана под углом наклонения к горизонту, то эти силы имеют *постоянную* величину независимо от положения магнита.

**§ 18.** Чтобы подчинить расчету взаимодействие двух магнитов, Куломб произвел при помощи своих крутых весов ряд опытов, при которых он взял стрелку длиною в 25 дюймов, подвешенную так, что она могла колебаться только в горизонтальной плоскости. Эту стрелку он отклонял, поднося сбоку к одному из ее полюсов одноименный полюс вертикально поставленного магнита длиною в 27 дюймов, так что полюс стрелки и этот полюс магнита были весьма близко друг к другу, другой же полюс магнита был сравнительно далеко от обоих полюсов стрелки, почему Куломб его действием на стрелку пренебрегал по сравнению с действием ближайшего полюса магнита. Куломб измерял угол закручивания, соответствующий определенным расстояниям между указанными взаимодействующими полюсами, и показал, что это взаимодействие весьма близко к обратной пропорциональности квадратам расстояний между полюсами. Опыт с качаниями маленького магнита под действием близкого полюса длинного магнита дал подобный же результат, почему он и пришел к заключению, что сила взаимодействия полюса одного магнита на полюс другого обратно пропорциональна квадрату расстояния между этими полюсами.



Фиг. 1.

Чтобы включить в рассмотрение и разную силу действия различных магнитов при одинаковом расстоянии, Куломб принял гипотезу о двух воображаемых магнитных жидкостях и ввел понятие о магнитной массе.

По этой гипотезе явления магнетизма объясняются тем, что при намагничивании железного или стального бруска на концах его скопляются: на одном—северные магнитные массы, на другом—южные, причем для магнитов, имеющих вид длинной и тонкой полосы, поперечными размерами коей можно пренебречь по сравнению с длиной, «линейная плотность» магнетизма возрастает от середины полосы к ее концам, будучи посередине равна нулю.

Определением магнитной массы служит условие, что две магнитных массы  $\mu$  и  $m$ , будучи помещены в расстоянии  $r$  одна от другой, действуют друг на друга по направлению прямой, их соединяющей, с силой, пропорционально произведению  $\mu m$  и обратно пропорционально квадрату расстояния между ними, причем эта сила—отталкиватальная, когда массы одноименны, и притягательная, когда они разноименны.

На основании этого условия сила взаимодействия выражается формулой:

$$(1) \quad F = k \cdot \frac{\mu \cdot m}{r^2}$$

причем  $k$ —некоторый коэффициент, зависящий от выбора единиц. Эти единицы всегда можно выбрать так, чтобы коэффициент  $k$  был равен 1; для этого стоит только за единицу массы принять такую магнитную массу, которая при расстоянии, равном единице длины, действует на массу, ей равную, с силою, равною единице, принятой для измерения сил.

Под двумя же равными массами разумеют такие, которые при одинаковом расстоянии действуют на ту же третью с одинаковой силой. Мы будем предполагать, что единицы избраны именно таким образом и писать формулу (\*) в таком виде:

$$(2) \quad F = \frac{m\mu}{r^2}$$

Эту формулу и будем называть законом Куломба.

**§ 19.** Положим, что мы хотим ближе изучить действие массы  $m$  на всякую другую магнитную массу  $\mu$ , тогда напишем предыдущую формулу так:

$$(3) \quad F = \mu \frac{m}{r^2}$$

и обратим внимание на отдельные ее множители:  $\mu$  и  $\frac{m}{r^2}$ .

Первый множитель  $\mu$  показывает, что сила  $F$  пропорциональна той массе, которая подвергается действию другой, и, значит, чтобы судить о действии лишь этой последней, следует рассматривать величину силы, приходящейся на единицу массы, подвергающейся действию. Эта сила будет:

$$(4) \quad K = \frac{m}{r^2}$$

Как видно, она зависит только от величины действующей массы и расстояния до нее.

При таком обозначении формула (3) приведется к виду:

$$(5) \quad F = \mu \cdot K$$

Формулы (3) и (4) показывают, что действие массы  $m$  распространяется на все пространство и ничем не ограничено, но это имеет место только чисто теоретически, практически же силы  $F$  и  $K$  с увеличением расстояния убывают настолько быстро, что при небольшом даже расстоянии, превышающем для стальных магнитов их длину всего в несколько десятков раз, эти силы  $F$  и  $K$  столь малы, что не могут быть обнаружены никакими приборами. Поэтому мы будем называть полем массы  $m$  ту область пространства, где происходящая от нее сила  $K$  может быть обнаружена. Величину же этой силы  $K$ , с которой масса  $m$  действует на массу, равную единице, помещенную в рассматриваемой точке, будем называть *напряжением поля* в этой точке.

Из этого определения следует, что напряжение поля в данной точке, как сила, для полного своего определения требует задания не только величины, но и *направления*; за это последнее примем то направление, которое соответствует силе, действующей на единицу *северного магнетизма*.

Положим теперь, что имеется несколько масс:  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$  и какая-либо масса  $\mu$ , подвергающаяся их действию и находящаяся в точке  $A$ , расстояние которой до  $m_1$  равно  $r_1$ , до  $m_2$  равно  $r_2$  и т. д.; тогда, обозначая через  $M_1, M_2, \dots, M_n$  те точки, где соответственно находятся данные массы, видим, что на массу  $\mu$  действуют силы:

$$\begin{aligned} \text{От массы } m_1 \text{ по прямой } M_1A \quad F_1 &= \mu \cdot \frac{m_1}{r_1^2} = \mu \cdot K_1, \\ \» \» m_2 \» \» M_2A \quad F_2 &= \mu \cdot \frac{m_2}{r_2^2} = \mu \cdot K_2, \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \» \» m_n \» \» M_nA \quad F_n &= \mu \cdot \frac{m_n}{r_n^2} = \mu \cdot K_n \end{aligned}$$

причем эти силы будут отталкивательные, т. е. направлены от  $M$  к  $A$ , когда массы одноименны, и от  $A$  к  $M$ , когда массы разноименны.

Все эти силы сложатся по правилу многоугольника сил в одну равнодействующую  $F$ , и так как каждая из составляющих содержит множитель  $\mu$ , то, если написать формулу:

$$(6) \quad F = \mu \cdot K$$

$K$  представит равнодействующую сил  $K_1, K_2, \dots, K_n$

Эту величину мы назовем попрежнему напряжением поля в точке  $A$ .

Отсюда видно, что совершенно не важно, от каких масс происходит поле: если напряжение в данной точке одно и то же, то сила,

которой будет подвергаться в данной точке магнитная масса  $\mu$ , будет та же самая; вместе с тем направление этой силы даст направление напряжения поля, величина ее даст величину напряжения.

Но уединить физически массу какого-либо одного наименования невозможно, обнаружить и исследовать поле можно лишь по его действию на магнит, которое поэтому и надо рассмотреть.

**§ 20.** Поле называется *однородным*, когда во всех его точках напряжение и по величине и по направлению одно и то же. Так, напр., магнитное поле Земли вообще может считаться однородным на протяжении, которое не только превышает  $K$  во множество раз размеры всякого магнита, но превышает значительно и размеры всякого корабля.

Пусть  $K$  по величине и направлению представляет напряжение однородного поля, в котором находится стрелка, вращающаяся около неподвижной точки  $O$ . Примем сперва для простоты рассуждения, что стрелка представляет собою *элементарный* магнит, состоящий из двух равных и противоположных магнитных масс, из коих северную мы обозначим через  $+m$ , южную — через  $-m$ .

На массу  $+m$  действует сила  $F = mK$  параллельно вектору  $K$ , представляющему напряжение поля, и в одну с ним сторону (фиг. 2); на массу  $-m$  действует сила, по величине равная силе  $F$ , параллельная ей, но направленная в обратную сторону. Очевидно, что эти две силы уравновешиваются только тогда, когда они действуют по той же самой прямой, т. е. когда стрелка станет своею осью  $ns$  по линии  $OM$ , параллельной  $K$ . Таких положений может быть два: 1) когда конец  $n$  стрелки направлен к северу и 2) когда конец  $n$  стрелки направлен к югу. Но легко видеть, что лишь первое положение равновесия устойчиво, т. е. если стрелку из него вывести на какой-либо угол  $\alpha$ , то появляющаяся пара стремится *вернуть* стрелку к этому положению. Второе же положение неустойчиво, ибо если стрелку из него вывести, то появляющаяся пара стремится еще более удалить стрелку от этого положения.

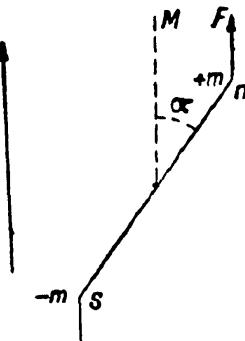
Момент указанной пары очевидно равен  $F \cdot l \cdot \sin \alpha$ , где  $l$  есть длина стрелки. Заменив  $F$  его величиною, видим, что момент направляющей пары выражается формулой:

$$P = ml \cdot K \cdot \sin \alpha$$

Входящее в эту формулу произведение  $ml$  называется *магнитным моментом* рассматриваемого элементарного магнита. Обозначая его через  $M$ , получим:

$$(7) \quad P = M \cdot K \cdot \sin \alpha$$

Положим теперь, что магнит представляет совокупность магнитных масс, северных и южных, как-то распределенных по его длине, поверхности или объему (фиг. 3).



Фиг. 2.

Все массы северного магнетизма будем обозначать через букву  $\mu$  со знаками; так что пусть они будут:  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_i$ ; южные обозначим через  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_h$ .

Пусть  $O$  есть центр тяжести магнита, в котором он подшерт так, что вес его уравновешивается вызываемою им реакциею точки опоры, и, следовательно, при разыскании условий равновесия эти две силы (вес и реакция опоры), как равные и взаимнопротивоположные, могут быть отброшены.

Все силы, действующие на массы  $\mu$ , т. е.

$$F_1 = \mu_1 K, F_2 = \mu_2 K, \dots F_i = \mu_i K$$

параллельны между собою и направлены в одну сторону, поэтому слагаются в одну равнодействующую  $F$ , равную их сумме:

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_i = (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i) \cdot K$$

и приложенную в точке  $A$ , представляющей центр этих параллельных сил.

Точно так же все силы  $G_1, G_2, \dots G_h$ , действующие на массы  $m$ , параллельные силе  $K$ , направлены в обратную по отношению к ней сторону и слагаются в одну силу  $G$ , равную их сумме:

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_h$$

приложенную в точке  $B$ , представляющей центр этих параллельных сил.

Опыт показывает, что вес магнита от намагничивания не изменяется. Следовательно, сумма вертикальных слагающих сил  $F$  и  $G$ , которые вообще не горизонтальны, равна нулю. Поэтому, обозначая через  $\gamma$  угол, составляемый направлением  $K$  с отвесною линиею, принимаемою нами за ось  $Z$ , видим, что сила  $F$  составляет с этой осью тоже угол  $\gamma$ , сила же  $G$  — угол  $180^\circ + \gamma$ ; значит проекция силы  $F$  будет:

$$F \cos \gamma = (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i) K \cdot \cos \gamma$$

проекция силы  $G$  будет:

$$-G \cos \gamma = -(m_1 + m_2 + \dots + m_h) \cdot K \cos \gamma$$

и сумма их будет:

$$[(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i) - (m_1 + m_2 + \dots + m_h)] \cdot K \cdot \cos \gamma = 0$$

Так как по предположению  $\cos \gamma$  не равен нулю, то должно быть

$$(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i) - (m_1 + m_2 + \dots + m_h) = 0,$$

иначе

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i = m_1 + m_2 + \dots + m_h$$

т. е. количества северного и южного магнетизмов у всякого магнита между собою равны.

Если обозначить через  $x_1y_1z_1$ ,  $x_2y_2z_2$ , ...  $x_iy_iz_i$  координаты точек  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , ...  $\mu_i$ , являющихся точками приложения сил  $F_1$ ,  $F_2$ , ...  $F_i$ , то, как известно, координаты их центра  $A$  будут:

$$x = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + \dots + F_ix_i}{F_1 + F_2 + \dots + F_i} = \frac{\mu_1x_1 + \mu_2x_2 + \dots + \mu_ix_i}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i}$$
$$y = \frac{F_1y_1 + F_2y_2 + \dots + F_iy_i}{F_1 + F_2 + \dots + F_i} = \frac{\mu_1y_1 + \mu_2y_2 + \dots + \mu_iy_i}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i}$$
$$z = \frac{F_1z_1 + F_2z_2 + \dots + F_iz_i}{F_1 + F_2 + \dots + F_i} = \frac{\mu_1z_1 + \mu_2z_2 + \dots + \mu_iz_i}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i}$$

т. е. эта точка совпадает с «центром масс»  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , ...  $\mu_i$ . Поэтому если через  $m$  обозначить сумму:

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i = m,$$

то сила  $F = mK$  будет такая же точно, какая действовала бы на точку  $m$ , если бы в ней было сосредоточено все количество северного магнетизма. Точно так же увидим, что сила  $G$  будет такая же, какая действовала бы, если в точке  $B$  — центре масс  $m_1$ ,  $m_2$ , ...  $m_h$  — сосредоточить все количество южного магнетизма, также равное  $m$ . И, значит, вопрос приведен к предыдущему, т. е. к изучению равновесия элементарного магнита.

Точки  $A$  и  $B$  называют *полюсами* магнита и в этом общем случае; обозначая через  $l$  длину  $AB$ , произведение  $m \cdot l$  называют *магнитным моментом магнита*, самую же прямую  $AB$  — *осью магнита*.

Таким образом, мы видим, что магнит, подпертый и могущий свободно вращаться около своего центра тяжести, занимает в однородном поле такое положение равновесия, при котором его ось совпадает с направлением напряжения поля.

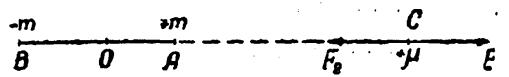
В однородном поле все магнитные силы, действующие на магнит, приводятся к паре сил, плоскость которой определяется направлением напряжения поля и направлением оси магнита; момент этой пары равен произведению магнитного момента на напряжение поля и на синус угла между направлением оси магнита и направлением напряжения поля.

Не трудно понять, что если магнит может вращаться только около вертикальной оси, то в положении равновесия он окажется тогда, когда его ось будет совпадать с проекцией напряжения на горизонтальную плоскость; и если обозначить эту проекцию силы  $K$  через  $H$  (горизонтальная слагающая напряжения поля), то, когда ось составит с этой проекцией угол  $\alpha$ , момент направляющей пары будет выражаться формулой:  $MH \cdot \sin \alpha$ , где  $M$  — попрежнему есть магнитный момент магнита.

В неоднородном поле все эти свойства не имеют места, и действующие на магнит силы вообще будут приводиться и к силе и к паре, а не только к паре, как в однородном.

**§ 21.** Изучение взаимодействия магнитов начнем с идеально простых случаев, рассмотрев сперва действие магнита на магнитную массу, сосредоточенную в одной точке.

Чтобы еще более упростить задачу, рассмотрим сперва действие «элементарного магнита», состоящего из двух равных масс  $m$  северного и южного магнетизмов, помещенных соответственно в точках  $A$  и  $B$  в расстоянии  $a$  одна от другой.



Фиг. 4.

Пусть та масса, на которую магнит действует, сосредоточена в точке  $C$  и равна  $+\mu$ .

1. Простейшим случаем является тот, когда точка  $C$  лежит на прямой, проходящей через точки  $A$  и  $B$ , т. е. на продолжении оси магнита (фиг. 4).

Обозначим расстояние  $OC$  до середины магнита через  $r$ , тогда будет:

$$AC = r - \frac{a}{2}; \quad BC = r + \frac{a}{2}$$

На массу  $+\mu$  действует как масса  $+m$ , находящаяся в точке  $A$ , так и масса  $-m$ , находящаяся в точке  $B$ , и притом первая как одноименная — отталкивательно, вторая как разноименная — притягательно. Действие первой назовем через  $F_1$ , действие второй — через  $F_2$ .

По закону Кулона будем иметь:

$$F_1 = \frac{\mu m}{AC^2} = \frac{\mu m}{\left(r - \frac{a}{2}\right)^2}$$

$$F_2 = \frac{\mu m}{BC^2} = \frac{\mu m}{\left(r + \frac{a}{2}\right)^2}$$

Равнодействующая  $F$  этих сил, направленных той же самой прямой в противоположные стороны, равна их разности, так что

$$F = F_1 - F_2 = \mu m \left[ \frac{1}{\left(r - \frac{a}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{a}{2}\right)^2} \right] = \mu m \frac{2ar}{\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right)^2}$$

В эту формулу входит произведение  $ta$  магнитной массы, сосредоточенной в полюсе магнита на расстояние между полюсами, называемое *магнитным моментом* этого магнита. Обозначая его через  $M$ , напишем предыдущую формулу так:

$$(1) \quad F = 2\mu \cdot M \cdot \frac{r}{\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right)^2}$$

Эта формула может быть представлена в несколько ином виде, особенно удобном, когда длина магнита  $a$  мала по сравнению с рас-

стоянием  $r$  от его середины до массы  $\mu$ , действие на которую рассматривается.

Очевидно:

$$\frac{r}{\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right)^2} = \frac{r}{r^4 \left(1 - \frac{a^2}{4r^2}\right)^2} = \frac{1}{r^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{4r^2}\right)^2}$$

Обозначим для краткости письма  $\frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{r^2}$  через  $h$ , тогда:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{r^2}\right)^2} = \frac{1}{(1-h)^2} = (1-h)^{-2}$$

Известно, что формула бинома Ньютона

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

имеет место не только для целого положительного показателя  $n$ , но и для отрицательного, как целого, так и дробного, при условии, чтобы  $x$  было по численной величине меньше 1.

Делая в этой формуле  $x = -h$  и  $n = -2$ , получим:

$$(1-h)^{-2} = 1 + 2h + 3h^2 + 4h^3 + \dots$$

и, заменив  $h$  его величиною  $\frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{r^2}$ , имеем:

$$\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{r^2}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{r^2} + \frac{3}{16} \frac{a^4}{r^4} + \dots$$

и, следовательно:

$$(2') F = \mu \frac{2M}{r^3} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{r^2} + \frac{3}{16} \frac{a^4}{r^4} + \dots \right]$$

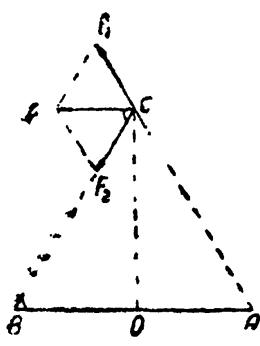
Если дробь  $\frac{a}{r}$  настолько мала, что при той степени точности, которая в каком-либо частном случае нужна для расчета силы  $F$ , можно пренебречь величиною  $\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{r^2}$  и тем более всеми, за нею следующими, то:

$$(2) F = \mu \cdot \frac{2M}{r^3}$$

т. е. в этом первом приближении сила, с которой магнит действует на магнитную массу, обратно пропорциональна кубу расстояния.

2. Рассмотрим теперь другой простейший случай, когда точка  $C$  лежит на перпендикуляре к прямой  $AB$ , проходящем через ее середину  $O$ , т. е. находится в равных удалениях от обоих полюсов магнита (фиг. 5). В этом случае силы  $F_1$  и  $F_2$  будут по величине равны между собою. Равнодействующая их  $F$  разделит угол  $F_1CF_2$  пополам,

следовательно, будет параллельна прямой  $AB$ . Вместе с тем из подобия треугольников  $FCF_1$  и  $BCA$  видно, что



Фиг. 5.

т. е.

но

значит

(3)

$$F : F_1 = AB : AC$$

$$F = F_1 \cdot \frac{AB}{AC}$$

$$F_1 = \mu \cdot \frac{m}{AC^2} \text{ и } AB = a$$

$$F = \mu \cdot \frac{ma}{AC^3} = \mu \cdot \frac{M}{\left( r^2 + \frac{a^2}{4} \right)^{3/2}}$$

Подобно предыдущему, эту формулу напишем так:

$$F = \mu \cdot \frac{M}{r^3} \cdot \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{4} \frac{a^2}{r^2} \right)^{3/2}}$$

а так как

$$\frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{4} \frac{a^2}{r^2} \right)^{3/2}} = \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{a^2}{r^2} \right)^{-3/2}$$

то, полагая в формуле бинома Ньютона

$$n = -\frac{3}{2} \text{ и } x = \frac{1}{4} \frac{a^2}{r^2}$$

получим:

$$\left( 1 + \frac{1}{4} \frac{a^2}{r^2} \right)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{8} \frac{a^2}{r^2} + \frac{15}{128} \frac{a^4}{r^4} - \dots$$

и, таким образом, будем:

$$F = \mu \cdot \frac{M}{r^3} \left[ 1 - \frac{3}{8} \frac{a^2}{r^2} + \frac{15}{128} \frac{a^4}{r^4} - \dots \right]$$

и в том случае, когда дробь  $\frac{a^2}{r^2}$  весьма мала:

$$(4) \quad F = \mu \cdot \frac{M}{r^3}$$

т. е. при одинаковом расстоянии  $r$  при этом положении точки  $C$  сила, с которой на нее магнит действует, составляет половину силы, имеющей место при первом положении, т. е. когда точка  $C$  лежит на продолжении оси магнита.

**§ 22.** Перейдем теперь к рассмотрению общего случая, т. е. когда точка  $C$  занимает какое-нибудь заданное положение относительно магнита. Для определения этого положения примем плоскость  $ABC$  за

плоскость координат  $xOy$ , взяв начало в точке  $O$  и направив ось  $x$ -ов по  $OA$  и ось  $y$ -ов перпендикулярно к ней (фиг. 6).

Координаты точки  $C$  обозначим через  $x$  и  $y$ . Тогда будет:

$$\overline{AC}^2 = \left( x - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2; \quad \overline{BC}^2 = \left( x + \frac{a}{2} \right)^2 + y^2$$

и, значит, силы

$$F_1 = \mu \cdot \frac{m}{\left( x - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2}; \quad F_2 = \mu \cdot \frac{m}{\left( x + \frac{a}{2} \right)^2 + y^2}$$

причем сила  $F_1$  направлена по продолжению прямой  $AC$ , сила  $F_2$  — по прямой  $CB$  к точке  $B$ .

Чтобы рассчитать равнодействующую этих сил, надо сперва составить их проекции  $X_1$ ,  $Y_1$  и  $X_2$ ,  $Y_2$  на оси координат, тогда проекции их равнодействующей  $X$ ,  $Y$  будут:

$$R \cos \alpha = X = X_1 + X_2$$

$$R \sin \alpha = Y = Y_1 + Y_2$$

Обозначая через  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  углы  $CAP$  и  $CBP$ , видим, что

$$X_1 = F_1 \cos \alpha_1; \quad Y_1 = F_1 \sin \alpha_1$$

$$X_2 = -F_2 \cos \alpha_2; \quad Y_2 = -F_2 \sin \alpha_2$$

но

$$\cos \alpha_1 = \frac{AP}{AC} = \frac{x - \frac{a}{2}}{\sqrt{\left( x - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2}}; \quad \sin \alpha_1 = \frac{y}{\sqrt{\left( x - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2}}$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{BP}{BC} = \frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{\left( x + \frac{a}{2} \right)^2 + y^2}}; \quad \sin \alpha_2 = \frac{y}{\sqrt{\left( x + \frac{a}{2} \right)^2 + y^2}}$$

Таким образом, полагая для удобства письма  $\frac{a}{2} = b$ , имеем по подстановке:

$$(5) \quad X = \mu m \left[ \frac{x - b}{[(x - b)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{x + b}{[(x + b)^2 + y^2]^{3/2}} \right]$$

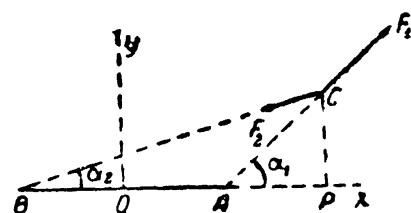
$$(6) \quad Y = \mu m \cdot y \cdot \left[ \frac{1}{[(x - b)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x + b)^2 + y^2]^{3/2}} \right]$$

Величина равнодействующей:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Направление ее определяется равенствами:

$$(*) \quad \cos \alpha = \frac{X}{R} \quad \text{и} \quad \sin \alpha = \frac{Y}{R}$$



Фиг. 6.

т. е.

$$(**) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

причем знаки  $\cos \alpha$  и  $\sin \alpha$  в формуле (\*) дадут ту четверть, в которой определяемый по формуле (\*\*) угол  $\alpha$  надо брать.

Для того случая, когда отношение длины магнита к расстоянию до точки  $C$  малое, формулы (5) и (6) можно преобразовать подобно предыдущему и придать им более наглядный вид.

Очевидно будет, полагая  $x^2 + y^2 = r^2$ :

$$(x - b)^2 + y^2 = r^2 - 2bx + b^2 = r^2 \left( 1 - 2 \frac{bx}{r^2} + \frac{b^2}{r^2} \right)$$

$$(x + b)^2 + y^2 = r^2 + 2bx + b^2 = r^2 \left( 1 + 2 \frac{bx}{r^2} + \frac{b^2}{r^2} \right)$$

и делая

$$\frac{b^2}{r^2} - 2 \frac{bx}{r^2} = h; \quad \frac{b^2}{r^2} + 2 \frac{bx}{r^2} = k$$

получим:

$$\frac{1}{[(x - b)^2 + y^2]^{3/2}} = \frac{1}{r^3} \cdot \frac{1}{(1 + h)^{3/2}} = \frac{1}{r^3} \left[ 1 - \frac{3}{2} h + \frac{15}{8} h^2 - \dots \right]$$

$$\frac{1}{[(x + b)^2 + y^2]^{3/2}} = \frac{1}{r^3} \cdot \frac{1}{(1 + k)^{3/2}} = \frac{1}{r^3} \left[ 1 - \frac{3}{2} k + \frac{15}{8} k^2 - \dots \right]$$

Подстановка даст:

$$X = \mu \cdot \frac{m}{r^3} \left\{ \left[ \frac{3}{2} (k - h) - \frac{15}{8} (k^2 - h^2) \right] x - b \left[ 2 - \frac{3}{2} (k + h) + \frac{15}{8} (k^2 + h^2) \right] - \dots \right\} =$$

$$= \mu \cdot \frac{m}{r^3} \cdot \left\{ \left[ 3 \cdot \frac{2bx}{r^2} - \frac{15}{8} \cdot \frac{8b^3x}{r^4} \right] x - b \left[ 2 - \frac{3b^2}{r^2} + \frac{15}{8} \left( 2 \frac{b^4}{r^4} + \frac{9b^4x^2}{r^6} \right) \right] + \dots \right\} =$$

$$= \mu \cdot \frac{ma}{r^3} \left\{ -1 + \frac{3}{2} \frac{b^2}{r^2} - \frac{15}{8} \frac{b^4}{r^4} + \frac{x^2}{r^2} (3 + \dots) + \dots \right\}$$

Полагая угол  $COP = \theta$ , видим, что  $\frac{x}{r} = \cos \theta$ ; следовательно,

$$X = \mu \frac{M}{r^3} \left[ 3 \cos^2 \theta - 1 + \frac{3}{2} \frac{b^2}{r^2} - \frac{15}{8} \frac{b^4}{r^4} + \dots \right]$$

затем:

$$Y = \frac{\mu \cdot m}{r^3} \cdot y \left[ \frac{3}{2} (k - h) - \frac{15}{8} (k^2 - h^2) + \dots \right] =$$

$$= \frac{\mu m}{r^3} y \left[ 3 \cdot \frac{2bx}{r^2} - \frac{15}{8} \cdot \frac{8b^3x}{r^4} + \dots \right] =$$

$$= \mu \cdot \frac{ma}{r^3} \cdot \frac{xy}{r^2} \left[ 3 - \frac{15}{2} \frac{b^2}{r^2} + \dots \right] = \mu \cdot \frac{M}{r^3} \left[ \frac{3}{2} - \frac{15}{4} \frac{b^2}{r^2} + \dots \right] \sin 2\theta$$

В первом приближении будет:

$$(7) \quad X = \mu \cdot \frac{M}{r^3} [3 \cos^2 \theta - 1] = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot \frac{M}{r^3} [3 \cos 2\theta + 1]$$

$$(8) \quad Y = \mu \cdot \frac{M}{r^3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sin 2\theta$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} R^2 &= \left(\frac{\mu M}{2r^3}\right)^2 \cdot \{9 \cos^2 2\theta + 6 \cos 2\theta + 1 + 9 \sin^2 2\theta\} = \\ &= \left(\frac{\mu M}{2r^3}\right)^2 \cdot \{10 + 6 \cos 2\theta\} = \left(\frac{\mu M}{2r^3}\right)^2 \cdot \{16 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta\} = \\ &= \left(\frac{\mu M}{r^3}\right)^2 \cdot (1 + 3 \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

Итак,

$$(9) \quad R = \frac{\mu M}{r^3} \cdot \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}$$

Воспользовавшись формулами (7) и (8), вычислим величину угла, составляемого направлением равнодействующей с направлением радиуса  $r$ ; очевидно, что этот угол будет  $\alpha - \theta$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} R \cos(\alpha - \theta) &= X \cos \theta + Y \sin \theta = \\ &= (3 \cos^3 \theta - \cos \theta + 3 \sin^2 \theta \cos \theta) \cdot \frac{\mu M}{r^3} = \frac{2\mu M}{r^3} \cos \theta \\ R \sin(\alpha - \theta) &= Y \cos \theta - X \sin \theta = \\ &= (3 \sin \theta \cos^2 \theta - 3 \cos^2 \theta \sin \theta + \sin \theta) \cdot \frac{\mu M}{r^3} = \frac{\mu M}{r^3} \cdot \sin \theta \end{aligned}$$

Откуда следует:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \theta) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta$$

Фишем точкою  $O'$  как центром и радиусом  $OC$  круг (фиг. 7) и проведем касательную  $CT$ ; тогда  $I = 90^\circ - (\alpha - \theta)$  и  $\lambda = 90^\circ - \theta$ , так что предыдущая формула будет:

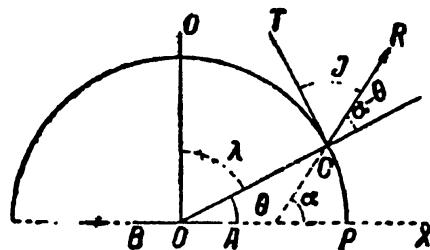
$$\operatorname{cotg} I = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \lambda$$

или

$$\operatorname{tg} I = 2 \operatorname{tg} \lambda$$

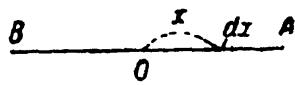
Это есть как раз соотношение, которое имеет место между наклонением,  $I$ , и магнитной широтой,  $\lambda$ , если преобразить, что магнитное действие Земли может быть заменено действием весьма малого магнита, расположенного у ее центра.

**§ 23.** Мы рассмотрели в предыдущем параграфе действие элементарного магнита на магнитную массу. Подобным же образом может быть



Фиг. 7.

рассмотрено и действие всякого магнита. Чтобы пояснить метод, возьмем простейший случай, когда точка  $C$  лежит на продолжении оси  $AB$  магнита, который мы предположили настолько тонким, что поперечными его размерами можно пренебречь по сравнению с прочими длинами, входящими в рассмотрение этого вопроса. В этом случае магнит  $AB$  (фиг. 8) мы представляем как некоторую прямую линию, по которой



Фиг. 8.

на половине  $OA$  распределен северный магнетизм, по  $OB$  — южный, так что количество магнетизма, находящееся на бесконечно малом отрезке между абсциссами  $x$  и  $x+dx$ , будет:

$$dm = f(x) dx$$

где  $f(x)$  есть некоторая известная функция переменной  $x$ . В таком случае сила, с которой этот элемент действует на массу  $\mu$  в точке  $C$ , будет:

$$dF = \mu \cdot \frac{dm}{(r-x)^2} = \mu \cdot \frac{f(x) dx}{(r-x)^2}$$

Действие же всего магнита будет:

$$F = \mu \cdot \int_{-b}^{+b} \frac{f(x)}{(r-x)^2} dx$$

причем для южных масс функция  $f(x)$  будет отрицательной.

Подобно предыдущему,

$$\frac{1}{(r-x)^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)^2} = \frac{1}{r^2} \left[ 1 + \frac{2x}{r} + \frac{3x^2}{r^2} + \frac{4x^3}{r^3} + \dots \right]$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\mu} F = \frac{1}{r^2} \left[ \int_{-b}^{+b} f(x) dx + \frac{2}{r} \int_{-b}^{+b} xf(x) dx + \frac{3}{r^2} \int_{-b}^{+b} x^2 f(x) dx + \dots \right]$$

Первый из этих интегралов  $\int_{-b}^{+b} f(x) dx$  представляет полное количество магнетизма на магните; он равен нулю, ибо количества северного и южного магнетизмов между собою равны. А так как одно из них мы считаем положительным, другое — отрицательным, то сумма их есть нуль.

Что количества положительного и отрицательного магнетизмов равны, следует из того, что действие Земли, т. е. параллельных магнитных сил (обозначая через  $T$  силу, с которой Земля действует на массу, равную 1), выражается формулой:

$$\int_{-b}^{+b} T dm = T \cdot \int_{-b}^{+b} f(x) dx$$

Опыт (взвешивание) показывает, что эта сила равна нулю, значит,

$$\int_{-b}^{+b} f(x) dx = 0$$

Интеграл  $\int_{-b}^{+b} x f(x) dx = M$  есть по определению магнитный момент магнита

Интегралы  $\int_{-b}^{+b} x^2 f(x) dx, \int_{-b}^{+b} x^4 f(x) dx, \dots$ , с четными степенями  $x$

под знаком интеграла при симметричном распределении магнетизма, т. е. когда  $f(x) = -f(-x)$ , равны нулю, ибо в них каждому положительному элементу соответствует равный отрицательный.

Интегралы:  $\int_{-b}^{+b} x^3 f(x) dx, \int_{-b}^{+b} x^5 f(x) dx, \dots$  будут некоторые постоянные для данного магнита величины, которые мы обозначим через  $N_3, N_5, \dots$

Таким образом будет:

$$F = \mu \cdot \left[ \frac{2M}{r^3} + \frac{4N_3}{r^5} + \frac{6N_5}{r^7} + \dots \right]$$

Этой формуле можно придать другой вид, при котором нагляднее относительная величина ее членов.

По предположению,  $f(-x) = -f(x)$ , и, следовательно,

$$\int_{-b}^{+b} x^3 f(x) dx = 2 \int_{0}^{b} x^3 f(x) dx = 2 \int_{0}^{b} x^2 \cdot x f(x) dx$$

Очевидно, что в пределах интегрирования  $x < b$ , поэтому  $b^2 - x^2 > 0$ ,

значит  $\int_{0}^{b} (b^2 - x^2) x f(x) dx > 0$

а следовательно,

$$2 \int_{0}^{b} x^2 (-) dx > \int_{0}^{b} x^3 f(x) dx$$

Поэтому, обозначая через  $\varepsilon_1$  правильную дробь, можем написать равенство:

$$\int_{-b}^{+b} x^3 f(x) dx = 2 \int_{0}^{b} x^3 f(x) dx = 2 \varepsilon_1 b^2 \int_{0}^{b} x f(x) dx = \varepsilon_1 b^2 M = \frac{1}{4} \varepsilon_1 a^2 M$$

Совершенно так же будет:

$$\int_{-b}^{+b} x^5 f(x) dx = 2 \int_0^b x^5 f(x) dx = 2 \varepsilon_2 b^4 \int_0^b x f(x) dx = \varepsilon_2 b^4 M = \frac{1}{16} \varepsilon_2 a^4 M$$

и т. д., причем  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — положительные правильные дроби.

Подставляя, получим:

$$(1) \quad F = \mu \cdot \frac{M}{r^3} \left[ 2 + \varepsilon_1 \frac{a^2}{r^2} + \frac{3}{8} \varepsilon_2 \frac{a^4}{r^4} + \dots \right]$$

В таком виде эта формула вполне аналогична формуле (2) § 21, а из нее сразу видно, что когда отношение  $\frac{a}{r}$  весьма мало, то

$$(2) \quad F = \mu \cdot \frac{2M}{r^3}$$

как и для элементарного магнита,

Нетрудно заключить, что для второго случая действия магнита на магнитную массу, вместо формулы (1), будем иметь:

$$(3) \quad F = \mu \cdot \frac{M}{r^3} \left[ 1 - \frac{3}{8} \varepsilon_1 \frac{a^2}{r^2} + \frac{15}{128} \varepsilon_2 \frac{a^4}{r^4} - \dots \right]$$

и, следовательно, когда отношение  $\frac{a}{r}$  весьма мало, то

$$F = \mu \cdot \frac{M}{r^3}$$

Мы не будем останавливаться на выводе формул для общего случая, так как для практических целей они нам не понадобятся; на основании же рассмотренных частных случаев можно притти к заключению, что главные члены в этих формулах сохранят свой вид, изменятся лишь коэффициенты при членах, содержащих различные степени отношения  $\frac{a}{r}$ , причем показатели этих степеней останутся прежние.

Таким образом, будет:

$$X = \mu \cdot \frac{M}{r^3} \left[ 3 \cos^2 \theta - 1 + A_1 \frac{a^2}{r^2} + A_2 \frac{a^4}{r^4} + \dots \right]$$

$$Y = \mu \cdot \frac{M}{r^3} \left[ \frac{3}{2} \sin 2\theta + B_1 \frac{a^2}{r^2} + B_2 \frac{a^4}{r^4} + \dots \right]$$

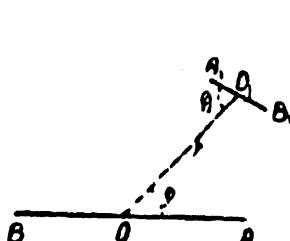
Здесь коэффициенты  $A_1, A_2, \dots ; B_1, B_2, \dots$  будут некоторыми функциями угла  $\theta$  и приведенных выше количеств, зависящих от распределения магнетизма по магниту, т. е.

$$\int_0^b x^3 f(x) dx, \quad \int_0^b x^5 f(x) dx \quad \text{и т. д.}$$

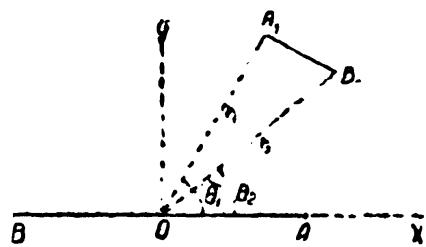
**§ 24.** Мы рассмотрели действие магнита на магнитную массу; по-видимому само собою, каким образом перейти к составлению общих формул, выражающих действие магнита на магнит.

Пусть  $AB$  есть действующий магнит,  $A_1B_1$  — тот, действие на который мы хотим получить.

Относительное положение этих магнитов, которые мы предположим



Фиг. 9.



Фиг. 10.

в одной плоскости, определяется расстоянием  $r$  их середин друг от друга и углами  $\phi$  и  $\phi_1$ , составляемыми их осями с прямой  $OO_1$  (фиг. 9)

Для простоты рассуждения положим, что оба магнита элементарные; тогда составляем прежде всего выражение расстояния  $OA_1 = r_1$  угла  $A_1OA = \theta_1$  (фиг. 10) и координат  $x_1 = r_1 \cos \theta_1$  и  $y_1 = r_1 \sin \theta_1$  через  $r$ ,  $\phi$ ,  $\phi_1$ . Затем по формулам § 22 можем составить выражение проекций на оси координат силы  $F_1$ , действующей на массу  $+m_1$ , находящуюся в точке  $A_1$ . Совершенно так же, составив выражения расстояния  $OB_1 = r_2$  и угла  $\theta_2$ , составим выражение проекции силы  $F_2$ , действующей на массу  $-m_1$ , находящуюся в точке  $B_1$ . Пусть проекции первой силы будут  $X_1$  и  $Y_1$ , проекции второй —  $X_2$  и  $Y_2$ , и, как уже сказано, координаты точки  $A_1$  суть  $x_1$  и  $y_1$ , координаты точки  $B_1$  суть  $x_2$ ,  $y_2$ . Приводим все эти силы к одной силе, действующей в центре тяжести  $O_1$  магнита  $A_1B_1$ , и к паре, лежащей в плоскости  $xOy$ , по формулам:

$$X = X_1 + X_2; \quad Y = Y_1 + Y_2;$$

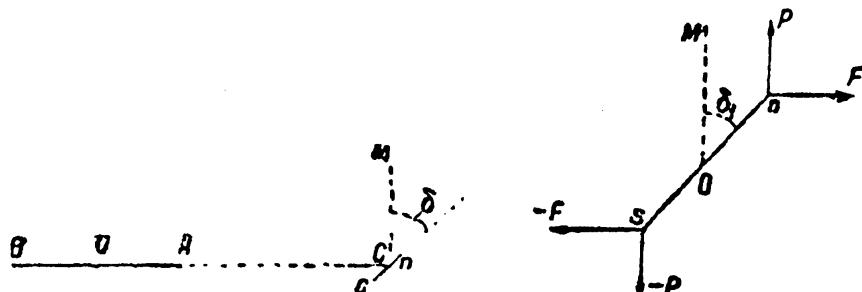
$$P = (Y_1 x_1 - X_1 y_1) + (Y_2 x_2 - X_2 y_2)$$

Как видно, эта выкладка, не представляя затруднений по существу, будет весьма длинной, и, конечно, ее можно выполнить, лишь разлагаая все упомянутые выражения в ряды, расположенные по степеням отношений  $\frac{a}{r}$  и  $\frac{a_1}{r}$ . Равложения эти выполнены до членов высших порядков, но мы не будем приводить полученных формул, ограничившись теми простейшими случаями, которые постоянно встречаются в практике магнитных измерений.

1) Магнит  $BA$ , расположенный перпендикулярно к плоскости магнитного меридiana, действует на стрелку, врачающуюся в горизонте

тальной плоскости; центр  $C$  стрелки лежит на продолжении оси магнита (фиг. 11). Требуется определить угол отклонения стрелки, предполагая, что ее размеры ничтожно малы по сравнению с расстоянием  $r$  между центром стрелки и центром магнита.

Положим, что магнитный момент магнита  $AB$  равен  $M$ , напряжение поля  $-H$ ; обозначим через  $\delta_1$  угол отклонения стрелки от магнита.



Фиг. 11.

Фиг. 12.

Нитно о мерилиане  $MC$ , стрелку примем за элементарный магнит, длина коего —  $a$ , и магнитная масса каждого полюса равна  $m$ .

Так как, по предположению, длина  $a$  весьма мала, то сила, действующая от магнита  $AB$  на массу  $m$ , находящуюся в точке  $n$ , будет отличаться лишь ничтожно мало от той силы, с которой магнит действовал бы на эту массу, если бы ее поместить в точке  $C$ , т. е. эта сила будет параллельна оси магнита, направлена от  $A$  к  $C$ , и величина ее выражается формулой:

$$F = m \cdot \frac{M}{r^3} \left[ 2 + \frac{A_1}{r^2} + \dots \right]$$

Совершенно так же на массу  $(-m)$ , находящуюся в точке  $s$ , будет действовать такая же сила  $F$ , но направленная в противоположную сторону.

От Земли на массу  $m$  действует сила  $P = mH$ , направленная по магнитному меридиану к N-ду, на массу  $(-m)$  — такая же сила, направленная к S-ду. Таким образом, стрелка находится под действием двух пар  $(F, -F)$  и  $(P, -P)$ , моменты которых суть  $Fa \cos \delta_1$  и  $Pa \sin \delta_1$ , причем первую пару, как стремящуюся вращаться по Солнцу, будем считать положительной, вторую — отрицательной (фиг. 12). Для равновесия стрелки необходимо условие:

$$Pa \sin \delta_1 - Fa \cos \delta_1 = 0$$

откуда

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{F}{P}$$

или, подставляя вместо  $F$  и  $P$  их величину, получим:

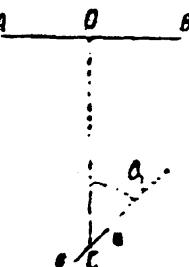
$$(2) \quad \operatorname{tg} \delta_1 = \frac{M}{H} \left[ \frac{2}{r^3} + \frac{A_1}{r^5} + \dots \right]$$

2) Положим теперь, что магнит  $AB$ , ось которого попрежнему перпендикулярна к магнитному меридиану, расположен так, что прямая  $OC$  перпендикулярна к оси магнита  $AB$  (фиг. 13). Очевидно, что формула (2), выражающая тангенс угла  $\delta_1$ , сохранит свой вид, только сила  $F$  для такого положения магнита выражается формулой:

$$F = m \frac{M}{r^3} \left[ 1 + \frac{P_1}{r^2} + \dots \right]$$

и, следовательно, будет:

$$(3) \quad \operatorname{tg} \delta_2 = \frac{M}{H} \left[ \frac{1}{r^3} + \frac{B_1}{r^5} + \dots \right]$$



Фиг. 13.

Как видно из формул (2) и (3), когда расстояние  $r$  настолько велико по сравнению с длиною магнита  $AB$ , что в каждой из них можно ограничиться лишь первым членом, углы же  $\delta$  настолько малы, что тангенсы пропорциональны самим углам, то отклонение в первом случае при одинаковом расстоянии в два раза больше, нежели во втором.

Мы для простоты рассуждения предполагали, что стрелка представляет элементарный магнит; Гаусс показал, что эти формулы сохраняют свой вид и в том случае, когда принят какой угодно закон симметричного распределения магнетизма по стрелке и магниту. Если же предположить, что взаимодействие магнитных масс обратно пропорционально не 2-й, а  $n$ -й степени расстояния, то

$$(4) \quad \operatorname{tg} \delta_1 = \frac{M}{H} \left[ \frac{n}{r^{n+2}} + \frac{A_1}{r^{n+3}} + \dots \right]$$

$$(5) \quad \operatorname{tg} \delta_2 = \frac{M}{H} \left[ \frac{1}{r^{n+1}} + \frac{B_1}{r^{n+3}} + \dots \right]$$

т. е. для весьма малых углов отношение отклонений в первом и во втором положениях будет равно  $n$ ; во всяком же случае таково отношение коэффициентов при первых членах разложения тангенсов углов отклонения в ряд по степеням  $\frac{1}{r}$ .

Гаусс произвел весьма точные наблюдения отклонений для первого и второго положений магнита, которые поэтому и называются соответственно первым и вторым гауссовыми положениями. По наблюденным величинам он вычислил коэффициенты формул (4) и (5), ограничиваясь первыми двумя членами, а затем по этим формулам вычи-

слил величины углов  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , чтобы сравнить их с непосредственно наблюденными; получились следующие результаты:

$$\operatorname{tg} \delta_1 = 0.086870 \frac{1}{r^3} - 0.002185 \frac{1}{r^5}$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = 0.043435 \frac{1}{r^3} + 0.002449 \frac{1}{r^5}$$

Величины углов  $\delta_1$  и  $\delta_2$

Расстояния $r$	Вычисленные величины углов $\delta_1$	Разность: выч.—набл.	Вычисленные величины углов $\delta_2$	Разность: выч.—набл.
1.1	—	—	1° 57' 22".0	+2".8
1.2	—	—	1 29 46.5	-6.0
1.3	2° 13' 50".4	+ 0".8	1 10 13.3	+6.0
1.4	1 47 24.1	+ 4.5	0 55 58.7	+0.2
1.5	1 27 28.7	- 9.6	0 45 20.9	-6.6
1.6	1 12 10.9	- 3.3	0 37 15.4	-3.2
1.7	1 0 14.9	- 5.0	0 30 59.1	-1.2
1.8	0 50 48.3	+ 4.2	0 26 2.9	-3.4
1.9	0 43 14.0	+ 7.8	0 22 6.6	+2.6
2.0	0 37 5.6	+ 10.6	0 18 55.7	+5.9
2.1	0 32 3.7	+ 0.9	0 16 19.8	+4.9
2.5	0 19 2.1	- 10.2	0 9 48.6	-2.5
3.0	0 11 1.8	- 1.1	0 5 33.9	-0.2
3.5	0 6 57.1	- 0.2	0 3 29.8	-1.0
4.0	0 4 39.6	—	0 2 20.5	+1.7

Как видно, отношение коэффициентов при  $(\frac{1}{r^3})$  в точности равно 2, разности же вычисленных и наблюденных углов настолько малы, что полученная точность далеко превосходит все то, что в подобного рода вопросах делалось до Гаусса. Таким образом, этими наблюдениями Гаусса дано новое подтверждение закона Куломба.

§ 25. При наблюдениях отклонений, производимых магнитом, действующим на стрелку, кроме вышеописанных двух гауссовых положений, применяют также два других положения, называемых ламоновыми, по имени проф. Ламона, их предложившего в своих обширных исследованиях по магнетизму вообще и по земному магнетизму в частности.

Отличие ламоновых положений от гауссовых состоит в том, что Ламон при заданном расстоянии магнита до центра стрелки, поворачивая всю систему, подыскивает такое ее положение, при котором ось магнита перпендикулярна к оси стрелки, отклонившейся от меридиана. Таким образом первое ламоново положение такого (фиг. 14), что при нем ось магнита совпадает с перпендикуляром к стрелке. Нетрудно видеть, что в этом положении сила  $F$  перпендикулярна к стрелке и момент отклоняющей пары есть

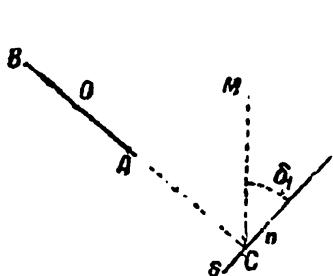
$aF$ , момент же направляющей пары есть попрежнему  $maH \sin \delta_1$ . Следовательно, будет:

$$maH \sin \delta_1 - aF = 0$$

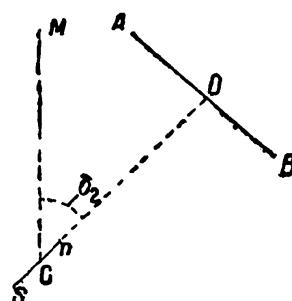
откуда,

$$(6) \quad \sin \delta_1 = \frac{F}{mH} = \frac{M}{II} \left[ \frac{2}{r^3} + \frac{A_1}{r^5} + \dots \right]$$

Совершенно подобно этому второе ламоново положение таково, как показано на фиг. 15, т. е. при нем направление отклоненной



Фиг. 14.



Фиг. 15.

стрелки совпадает с перпендикуляром, проведенным через центр магнита.

При таком положении сила

$$F = m \frac{M}{r^3} \left[ 1 + \frac{B_1}{r^2} + \dots \right]$$

и угол отклонения  $\delta_2$  определяется равенством:

$$(7) \quad \sin \delta_2 = \frac{M}{H} \left[ \frac{1}{r^3} + \frac{B_1}{r^5} + \dots \right]$$

В виду формул (2), (3) и (6), (7) гауссовые положения и вызываемые ими отклонения называют тангенсовыми, ламоновы — синусовыми.

Преимущество ламоновых отклонений заключается в том, что при всяком расстоянии стрелка остается перпендикулярной к отклоняющему магниту, и в формулах (6) и (7) коэффициенты  $A_1$  и  $B_1$ , наверное сохраняют постоянную величину, независимо от угла отклонения, чего нельзя сказать при гауссовом положении, если угол отклонения значителен и отношение длины стрелки к расстоянию  $r$  имеет чувствительную величину.

Преимущество гауссова положения состоит в том, что магнит, будучи расположен своею осью перпендикулярно к магнитному меридиану, не подвергается магнитной индукции от земного магнетизма и его магнитный момент сохраняет постоянную величину, чего нельзя сказать про ламоновы положения, когда ось магнита наклонна к меридиану и магнит подвергается индукции, изменяющейся вместе с углом.

Ниже, при описании способов производства и обработки наблюдений, этот вопрос будет рассмотрен подробнее.

**§ 26.** Прежде чем изложить способы измерения основных элементов, характеризующих магнит и магнитное поле, приведем ту систему единиц, которая принята с этой целью и установлена Гауссом под названием *абсолютной*.

В § 9 дано понятие о сущности измерения всякой величины вообще: измерение состоит в нахождении числа, показывающего отношение измеряемой величины к величине, с нею однородной, принятой за единицу. Отсюда видно, что единиц должно быть столько же, сколько разных родов величин, ибо для всякого рода должна быть своя единица, и так как каждая из этих единиц может быть взята произвольно, то получается бесконечно разнообразие различных систем единиц, ничем между собою не связанных. Всякое государство обыкновенно устанавливает законом основные единицы, необходимые для торговых и деловых сношений: единицы длины, площади, объемов твердых тел, сыпучих тел, жидкостей, веса, времени. Эти единицы и удовлетворяли житейским потребностям, хотя и представляли по своему произвольному выбору неудобства при разного рода расчетах.

В 1791 г. во Франции декретом Конвента была введена метрическая система мер и весов, в которой произвол в выборе единиц значительно сокращен как установлением десятичного подразделения мер, так и установлением для единицы площади не какой-либо произвольной величины, а такой площади, которая простейшим образом связана с единицею длины, а именно квадрата, коего сторона равна этой единице; подобным образом и для мер объемных исходно принят куб, коего ребро равно единице длины.

По мере развития наук вводились новые понятия, новые величины, для измерения их устанавливались новые единицы. Но здесь вопрос часто усложнялся тем, что изготовление копий или образцов мер становилось или затруднительным, или невозможным.

Так, напр., для измерения магнитного момента надо бы принять за единицу магнитный момент какого-либо определенного магнита. Но первое требование к образцу меры—чтобы он сохранял свою величину неизменной, между тем по отношению к магнитному моменту какого-либо магнита этого требования предъявлять нельзя: обыкновенно магнит с течением времени хотя и медленно, но утрачивает свой магнетизм. Значит изготовление точных копий такого образца невозможно, рассылка их для сравнения измерений также бесполезна, раз эта копия с течением времени изменяется. Следовательно, для всякого рода величин надо было сделать такое обобщение, которое в метрической системе сделано для простейших—для площади и объемов, т. е. надо было принять некоторые простейшие величины за основные и, избрав для них единицы, все остальные приводить к этим основным. Это и сделал Гаусс, предложив абсолютную систему единиц в 1832 г.

После Гаусса, в 1880-х годах, на Международном электротехническом конгрессе его абсолютная система была видоизменена в том смысле, что, сохраняя самую стройность системы, приняли другие единицы за основные, а именно: за единицу длины—сантиметр, за единицу массы—грамм и за единицу времени—секунду среднего солнечного времени, тогда как Гаусс брал миллиметр и миллиграмм.

Эта общепринятая в науке система называется сокращенно «сантиметр-грамм-секунда» (CGS).

Определения единиц следующие:

1. *Сантиметр* есть длина, равная одной сотой длины хранящегося в Париже, в Международном бюро мер и весов, платинового стержня, называемого *mètre prototype étalon*, точные копии которого разосланы всем государствам.

2. *Грамм* есть масса, равная одной тысячной массы платинового цилиндра, хранящегося в Париже, в Международном бюро мер и весов, и называемого *kilogramme prototype étalon*, копии которого разосланы всем государствам.

Эта масса почти в точности (с погрешностью около  $\frac{1}{100\,000}$ ) равна массе кубического сантиметра воды при наибольшей ее плотности.

3. *Секунда среднего времени* равна  $\frac{1}{86\,400}$  доли средних солнечных суток, или  $\frac{1}{86\,164}$  части звездных суток, составляющих промежуток времени между двумя последовательными верхними прохождениями точки весеннего равноденствия через меридиан места.

Все остальные единицы являются производными от этих трех основных, а именно: за единицу площади принимается квадратный сантиметр, за единицу объема—кубический сантиметр. Длину, площадь и объем исчерпываются потребности геометрии.

4. Для механики, кроме этих геометрических, необходимо установить единицы для основных механических понятий: скорости, ускорения, силы, работы и некоторых других, сводящихся к этим. За единицу скорости принята скорость такого равномерного движения, в котором в одну секунду проходится путь, равный одному сантиметру. Такой скорости особого названия не дано, ее именуют *скоростью в один сантиметр в секунду*.

За единицу ускорения принято ускорение такого равномерно перемещенного движения, при котором в одну секунду скорость изменяется на один сантиметр. Такая единица ускорения называется или *сантиметром в секунду или галем*—по имени Галилея, который ввел в науку понятие об ускорении и основал истинное учение о движении. Так, например, ускорение силы тяжести равно  $981 \text{ см/сек}^2$ , или  $981$  галю.

За единицу силы прината такая сила, которая массе в один грамм со-

общает в одну секунду ускорение в один сантиметр. Такая сила называется *диной*.

В технике и в общежитии принято силы выражать в *весовых единицах*, причем им придано название той гири, вес которой эта сила представляет, т. е. силу также называют граммом, килограммом и т. д., как соответствующую массу в абсолютной системе.

Чтобы перейти от одной системы к другой, необходимо заметить, что *вес* в один грамм сообщает в одну секунду массе в один грамм ускорение, равное  $981 \text{ см/сек}^2$ , или 981 галю, дина же сообщает ускорение в один галь; значит *вес* одного грамма равен 981 дине, и, наоборот, дина равна  $\frac{1}{981}$  веса одного грамма (т. е. веса гирьки в один грамм, представляющей единицу массы). Здесь необходимо заметить, что на весах с гирами сравниваются собственно массы тел, т. е. когда весы находятся в равновесии, то *масса* груза на одной из чашек равна *массе* гирь, расположенных на другую, но вместе с тем и *вес* груза, т. е. давление его на одну чашку равно весу гирь, т. е. давлению их на другую чашку. Вот почему и пользуются тем же словом для двух совершенно различных понятий *вес* и *масса*.

Таким образом, когда говорят, что вес тела составляет 100 г, то, если мы будем вести расчеты в абсолютной системе CGS, мы должны сказать, что масса этого тела есть 100 г; если хотим выразить в динах его вес, т. е. силу, с которой это тело давит на чашку весов, то надо это число умножить на 981 и будет 98 100 дин.

За *единицу работы* принимается работа, совершаемая силою в одну дину при прохождении точкой ее приложения пути в один сантиметр по ее направлению. Эта единица называется *эрз*.

Мы не будем приводить единиц других механических понятий, например количества движения, момента инерции и т. д.: из предыдущего само собою понятно, как они устанавливаются при помощи основных единиц.

5. В учении о магнетизме нам нужны следующие понятия: магнитная масса, магнитный момент, напряжение магнитного поля. Эти понятия уже установлены выше, остается только указать те единицы, которые приняты для них в системе CGS.

За *единицу магнитной массы* принимается такая магнитная масса, которая (предполагая ее сосредоточенной в одной точке) действует на другую такую же массу, ей равную, с силою в одну дину при расстоянии, равном одному сантиметру. За *единицу магнитного момента* принят магнитный момент такого элементарного магнита, у которого масса полюса равна единице магнитной массы и расстояние между полюсами равно одному сантиметру.

За *единицу напряжения* поля принято такое напряжение, при котором сила, действующая на единицу магнитной массы, равна одной дине.

Единице напряжения поля придано название *гаусс*.

§ 27. Удобство абсолютной системы, установленной, как показано выше, состоит, между прочим, в том что при ней, выразив пред-

варительно все данные в вышеприведенных единицах, можно применять все формулы механики, не заботясь о переводе мер: все величины сами собою будут получаться в единицах CGS.

Так, например, положим, что спрашивают, как велика средняя величина силы сопротивления, встречаемого телом при движении в некоторой среде, если при пробеге 50 м скорость его с 10 м в секунду упала на 5 м; вес тела — 50 г.

При решении подобного рода вопросов надо прежде всего составить на буквах общие формулы, затем выразить данные в единицах CGS, и полученные числа подставить в формулу, дающую общее решение. Найденное число и будет выражать искомую величину в единицах CGS.

Так в нашем случае пусть масса тела  $m$ , начальная его скорость  $v_1$ , конечная  $v_2$ , сила  $R$ , длина пути  $l$ . Применяя уравнение живых сил, имеем

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = Rl$$

откуда

$$R = \frac{1}{2l} \cdot m(v_1^2 - v_2^2)$$

Выразим теперь все входящие в эту формулу величины в единицах CGS:

- 1) так как вес тела 50 г, то и масса его  $m = 50$  г;
- 2) длина пути  $l = 50$  м = 5000 см;
- 3) скорость  $v_1 = 10$  м в секунду = 1000 см в секунду;
- 4) скорость  $v_2 = 5$  м в секунду = 500 см в секунду.

Подставляя, имеем:

$$R = \frac{1}{2 \cdot 5000} \cdot 50 [(1000)^2 - (500)^2] = 3750 \text{ дин}$$

Если мы хотим выразить  $R$  в обыденных весовых единицах, то, имея в виду, что одна дина равна  $\frac{1}{981}$  г, получим  $R = \frac{3750}{981} = 3.8$  г, т. е. сопротивление, встречаемое телом, равно весу гири в 3.8 г.

Другой пример. В магнитном поле, вертикальная слагающая напряжения которого равна 0.5 гаусса, стрелка инклиноватора под действием гирьки весом 0.2 г, подвешенной на плече в 10 мм, становится горизонтально, причем известно, что ось ее в точности проходит через центр тяжести (фиг. 16). Спрашивается, как велик ее магнитный момент.

Пара, действующая на стрелку от поля, равна  $MZ$ , где  $M$  — магнитный момент стрелки,  $Z$  — напряжение поля; эта пара уравновешена\*

вается моментом веса  $P$  подвешенного грузика. Значит должно быть:

$$Mz = Pl$$

откуда

$$M = \frac{Pl}{Z}$$

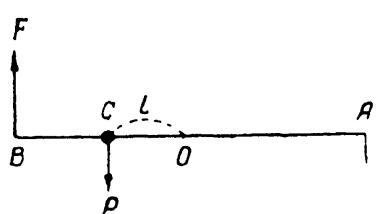
Выразим теперь все данные в единицах CGS. Имеем:  $Z = 0.5$ ;  $l = 10 \text{ мм} = 1 \text{ см}$ ; вес грузика  $P = 0.2 \text{ г} = 0.2 \cdot 981 \text{ дину} = 196.2 \text{ дины}$ .

Подставляя, имеем:

$$\frac{0.2 \cdot 981 \cdot 1}{0.5} = 392.4 \text{ CGS}$$

Магнитный момент будет выражен в единицах CGS.

**§ 28.** Все уравнения между физическими величинами должны быть однородны, т. е. величины, стоящие в обеих частях равенства,



должны выражаться в одинаковых единицах. Эта однородность проверяется лучше всего, если сперва установить так называемую «размерность» производных единиц.

Всякая производная единица приобретает множителя вида  $m^a l^b t^r$ , если она выражена в системе, где за единицу длины принята, вместо сантиметра, некоторая величина  $\lambda$ , равная  $l$  см, за единицу массы — некоторая масса  $\mu$ , равная  $m$ , за единицу времени — некоторый промежуток  $\tau$ , равный  $t$  сек.

Этот-то множитель  $m^a l^b t^r$ , на который надо помножить число, выраждающее рассматриваемую величину в названных единицах, чтобы перевести из этих единиц в единицы CGS, называется ее размерностью.

Чтобы получить размерность какой-либо величины, стоит только обратить внимание на те множители, из коих составлен каждый ее член.

Так, напр., если какая-либо величина  $X$  выражается формулой:

$$X = A + B + C$$

то очевидно, что  $A$ ,  $B$  и  $C$  должны быть величинами того же рода и выражаться в одинаковых единицах; значит достаточно рассмотреть один из членов, напр.  $A$ .

Пусть этот член выражается формулой такого вида:

$$A = M^p N^q x^a \cdot y^b \cdot z^c T^h S^k$$

где  $M$  и  $N$  — числа, выраждающие массы;  $x, y, z$  — числа, выраждающие длины;  $T$  и  $S$  — числа, выраждающие времена. Тогда, очевидно, чтобы величину  $A$  выразить в единицах CGS, надо, вместо числа  $M$ , напи-

сать  $mM$ , вместо  $N$  написать  $mN$ , вместо  $x, y, z$ , — соответственно  $xl, yl, zl$  и, вместо  $T$  и  $S$ , — соответственно  $tT$  и  $tS$ , и получится:

$$\begin{aligned} A_1 &= (Mm)^p \cdot (Nm)^q \cdot (xl)^a \cdot (yl)^b \cdot (zl)^c \cdot (Tt)^k \cdot (St)^h = \\ &= M^p N^q \cdot x^a y^b z^c \cdot T^k \cdot S^h \cdot (m^{p+q} \cdot l^{a+b+c} \cdot t^{k+h}) = \\ &= A \ m^{p+q} \cdot l^{a+b+c} \cdot t^{k+h} \end{aligned}$$

т. е. размерность величины  $A$  будет:  $m^{p+q} l^{a+b+c} t^{k+h}$ . Так, напр., пусть число  $A$  представляет скорость. Оно всегда получается от разделения числа, выражающего длину пройденного пути, на время его прохождения, т. е. уравнение имеет вид:

$$A = \frac{x}{T}$$

и размерность будет  $l \cdot t^{-1}$ .

Для ускорения будем иметь соотношение:

$$x = \frac{1}{2} A \cdot T^2$$

или

$$A = \frac{2x}{T^2}$$

и размерность ускорения будет  $l \cdot t^{-2}$ .

Для силы будем иметь соотношение:

$$A = M\omega = M \frac{x}{T^2}$$

где  $M$  — масса,  $\omega$  — ускорение, которое всегда выражено отношением числа, выражающего длину, к квадрату числа, выражающего время. Из этой формулы следует, что размерность есть  $mlt^{-2}$ .

Работа выражается формулой:

$$A = Px,$$

где  $P$  — сила. Отсюда ясно, что размерность работы будет  $ml^2 t^{-2}$ .

Живая сила выражается формулой:

$$A = \frac{M}{2} v^2 = \frac{1}{2} M \cdot \left( \frac{x}{T} \right)^2$$

Отсюда ясно, что размерность живой силы есть  $ml^2 t^{-2}$ , т. е. та же, что и для работы.

По определению, магнитная масса  $A$  действует на такую же массу при расстоянии  $r$  с силою  $F$ , выражющейся формулой:

$$F = A \frac{A}{r^2}$$

откуда

$$A = r F^{\frac{1}{2}}$$

Но мы видели, что сила выражается формулой вида  $\frac{Mx}{T^2}$ ; значит  $A$  будет выражаться формулой:

$$A = \left( \frac{Mx}{T^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot r$$

Подставляя соответственно  $Mm$ ,  $xl$ ,  $rl$  и  $Tm$ , вместо  $M$ ,  $x$ ,  $r$ ,  $T$ , получим:

$$A = \left( \frac{Mm \cdot xl}{T^2 t^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot rl = \left( \frac{Mx}{T^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot r \cdot m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} = m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} \cdot t^{-1}.$$

и, значит, размерность магнитной массы есть  $M^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1}$

Очевидно, что размерность магнитного момента есть  $M^{\frac{1}{2}} l^{\frac{5}{2}} t^{-1}$ , ибо магнитный момент получается от умножения числа, выражающего магнитную массу, на число, выражающее длину.

Напряженность поля будет иметь размерность, которую установим по соотношению:

$$F = \mu \cdot A$$

или

$$A = \frac{F}{\mu}$$

где  $F$  — сила и  $\mu$  — магнитная масса, и ясно, что размерность величины  $A$  получится, если размерность силы, т. е.  $mlt^{-2}$ , разделить на размерность магнитной массы, т. е. на  $m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1}$ , и будет  $m^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} t^{-1}$ .

Так, напр., чтобы от гауссовых единиц напряжения поля перейти к единицам CGS, будем иметь:  $m = \frac{1}{1000}$ ;  $l = \frac{1}{10}$ ;  $t = 1$ ; тогда

$$m^{\frac{1}{2}} \cdot l^{-\frac{1}{2}} t^{-1} = \left( \frac{1}{1000} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{1}{10} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1)^{-1} = \frac{1}{10}$$

т. е. числа в гауссовых единицах надо умножить на  $\frac{1}{10}$ , чтобы получить напряжение в единицах CGS.

Точно так же для магнитного момента будем иметь:

$$m^{\frac{1}{2}} \cdot l^{\frac{5}{2}} \cdot t^{-1} = \left( \frac{1}{1000} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{1}{10} \right)^{\frac{5}{2}} \cdot (1)^{-1} = 10^{-4} = \frac{1}{10000}$$

**§ 29.** Мы упоминали в § 17, что свободно подвешенный магнит, который может вращаться в горизонтальной плоскости, принимает такое положение равновесия, при котором его ось лежит в плоскости магнитного меридиана, т. е. совпадает с направлением горизонтальной слагающей поля.

Если магнит вывести из этого положения равновесия и затем предоставить самому себе, то он начнет колебаться подобно маятнику. В самом деле, мы видели, что когда магнит отклонен на угол  $\theta$  от положения равновесия, то на него действует направляющая пара, момент которой равен  $MH \cdot \sin \theta$ , где  $M$  — магнитный момент магнита,  $H$  — горизонтальная слагающая напряжения.

Обозначим через  $J$  момент инерции магнита с его подвесом относительно оси вращения. Тогда уравнение движения его будет:

$$(1) \quad J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -MH \sin \theta$$

ибо, как известно, при вращательном движении твердого тела около неподвижной оси произведение из момента инерции тела на угловое ускорение равно моменту пары, на него действующей. Знак — в правой части поставлен потому, что пара стремится вернуть магнит к положению равновесия, т. е. когда угол  $\theta$  положительный, то угловое ускорение отрицательное, и наоборот.

Мы ограничимся рассмотрением того случая, когда угол  $\theta$  настолько мал, что, вместо  $\sin \theta$ , можно брать самый угол и писать уравнение (1) так:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + MH\theta = 0$$

или, положив  $\frac{MH}{J} = n^2$  и обозначая производную значками:

$$\theta'' + n^2\theta = 0$$

Нетрудно проверить, что величина

$$\theta = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt$$

удовлетворяет этому уравнению при всяких значениях произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$ . Выберем эти постоянные так, чтобы были удовлетворены и начальные условия, т. е. чтобы при  $t = 0$  (в начальный момент) угол  $\theta$  был равен  $\Theta$  (начальное отклонение) и производная  $\theta'$  была равна нулю, ибо в начальный момент магниту никакой скорости сообщено не было. Таким образом, полагая  $T = 0$  в выражении  $\theta$  и  $\theta'$  и уравнивая полученные при такой подстановке результаты соответственно  $\Theta$  и 0, будем иметь:

$$\begin{aligned} C_1 &= \Theta \\ nC_2 &= 0 \end{aligned}$$

и, следовательно, будет:

$$(2) \quad \theta = \Theta \cos nt$$

Положим

$$n = \frac{2\pi}{T_1}$$

тогда предыдущая формула напишется так:

$$\theta = \Theta \cos \frac{2\pi t}{T_1}$$

Из этой формулы видно, что при  $t = 0$  угол  $\theta$  равен  $\Theta$ , затем этот угол начинает убывать: при  $t = \frac{1}{4} T_1$  аргумент косинуса равен  $\frac{\pi}{2}$ , значит косинус равен 0 и угол  $\theta = 0$ , т. е. магнит проходит через положение равновесия. После этого при дальнейшем возрастании  $t$  аргумент становится больше  $\frac{\pi}{2}$ , угол  $\theta$  — отрицательный, при  $t = \frac{1}{2} T_1$  аргумент равен  $\pi$ , косинус равен  $-1$  и угол  $\theta = -\Theta$ ; магнит достиг крайнего положения по другую сторону меридиана, после чего опять идет к положению равновесия, через которое проходит в момент  $t = \frac{3}{4} T_1$ , и, наконец, в момент  $t = T_1$  вновь приходит в свое исходное положение, после чего все движение повторится вновь, и так до бесконечности.

Отсюда видно, что магнит совершает простые периодические колебания с периодом:

$$(3) \quad T_1 = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{MH}}$$

Как видно, период этих колебаний не зависит от величины размахов  $\Theta$ , но это так лишь до тех пор, пока можно ограничиваться тою степенью точности, которой соответствует сделанная замена  $\sin \theta$  через самый угол  $\theta$ .

Если этой замены не делать, то исследование уравнения (1) показывает, что период колебаний будет зависеть от величины размахов и будет выражаться формулой:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{MH} \cdot [1 + F(\Theta)]}$$

где функция  $F(\Theta)$  выражается рядом:

$$F(\Theta) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right) \sin^4 \frac{\Theta}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right) \sin^6 \frac{\Theta}{2} + \dots$$

котором для малых углов можно удерживать только первый член, так что

$$F(\Theta) = \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{16} \Theta^2$$

причем  $\Theta$  надо выражать отвлеченными числами, так что  $\Theta = \frac{1}{57^\circ \cdot 3} \Theta^\circ$ , где  $\Theta^\circ$  есть угол  $\Theta$ , выраженный в градусах; тогда

$$F(\Theta) \approx \frac{1}{48000} \cdot \Theta^{\circ 2}$$

Обыкновенно, вместо полного периода или периода двойного размаха  $T_1$ , берут половину его, т. е. период простого размаха  $T = \frac{1}{2} T_1$ , поэтому

$$(4) \quad T = \pi \sqrt{\frac{J}{MH}}$$

Величины углов  $\Theta$  берутся для теперешних приборов не более  $1^\circ$ , и тогда приведение к бесконечно малому размаху настолько мало, что оно ниже возможной точности наблюдений и может быть отброшено.

Если магнит имеет форму прямоугольного бруска или цилиндра, то его момент инерции легко вычисляется по обмерам и по его весу, а именно: если размеры бруска суть  $a, b, c$  и его вес  $r$  г, то в единицах CGS его масса  $m$  будет также выражаться числом  $r$ , и момент инерции относительно оси, параллельной ребру  $c$ , будет:

$$J = m \cdot \frac{a^2 + b^2}{12}$$

Так, напр., если размеры бруска  $20 \times 1 \times 1$  см и вес его 160 г, то  $m = 160$  и

$$J = 160 \cdot \frac{400 + 1}{12} = 5350 \text{ CGS}$$

и если полный период размаха этого магнита по наблюдениям оказался 10 сек., то для него будет:

$$MH = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot J = \frac{4\pi^2}{100} 5350 \approx 2100 \text{ CGS}$$

Величина  $MH$  представляет момент пары, действующей на магнит, и поэтому выражается в эргах.

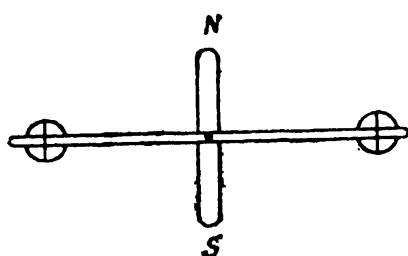
Для цилиндра момент инерции выражается формулой:

$$J = m \left[ \frac{l^2}{12} + \frac{a^2}{4} \right]$$

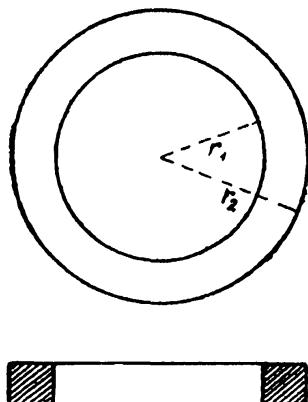
где  $m$  — масса цилиндра,  $l$  — длина его и  $a$  — радиус.

§ 30. Если магнит имеет неправильную форму, напр., бруска с закругленными концами, или если подвес, в который он вкладывается, имеет значительную, по сравнению с магнитом, массу, то для определения момента инерции Гаусс поступал так: он клал перпендикулярно к магниту легкую деревянную линееку, к которой в точно отмеренных расстояниях от подвеса привешивал симметрично по обе стороны от магнита по одному медному грузику, имевшему форму цилиндра (фиг. 17).

Пусть масса каждого грузика —  $m_1$ , расстояние его центра до оси —



Фиг. 17.



Фиг. 18.

$b$ , радиус —  $a$ . Тогда момент инерции грузика относительно оси подвеса будет:

$$i_1 = m_1 b^2 + m_1 \frac{a^2}{2}$$

если обозначить через  $i_2$  момент инерции линееки, который также легко вычисляется, то добавочный к магниту момент инерции будет:

$$i_0 = 2i_1 + i_2$$

период одного простого размаха всей системы:

$$(1) \quad T_0 = \pi \sqrt{\frac{J+i_0}{MH}}$$

Наблюдая этот период, а также период размаха ненагруженного магнита, будем иметь два уравнения: (4) § 29 и (1), из которых и найдем неизвестные  $J$  и  $MH$ .

Для контроля можно грузики подвешивать на разных расстояниях, заранее точно отмеренных и отмеченных на линейке.

Другой прием состоит в том, что вместо грузиков и линееки кладется медное кольцо прямоугольного сечения (фиг. 18), момент инерции которого вычисляется по формуле:

$$i = \frac{m}{2} [r_2^2 - r_1^2]$$

так, чтобы его ось совпадала с осью подвеса, и наблюдается время качания магнита с кольцом и без кольца.

**§ 31.** При выводе формулы (4) § 29 мы пренебрегали сопротивлением воздуха. Исследование этого вопроса показало, что главное влияние сопротивление оказывает на величину размахов, вызывая постепенное убывание ее; влияние же это на период размаха весьма слабо, и им можно пренебречь, почему мы и не будем приводить относящихся сюда формул.

**§ 32.** Для определения в абсолютной мере напряжения земного магнитного поля и магнитного момента магнита Гаусс предложил следующий способ.

Во-первых, подвесив магнит так, чтобы он мог колебаться в горизонтальной плоскости, определяют период его размаха, а если момент инерции магнита не известен, то накладывают, как сказано в § 30, грузики или кольцо и, прокачав нагруженный таким образом магнит, определяют период его размахов при добавочной нагрузке.

Эти наблюдения дадут следующих два уравнения:

$$T = \pi \sqrt{\frac{J}{MH}}$$

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{J + i_0}{MH}}$$

откуда следует:

$$(1) \quad MH = \pi^2 \cdot \frac{i_0}{T_0^2 - T^2}$$

$$(2) \quad J = \frac{T^2}{T_0^2 - T^2} \cdot i_0$$

Если же момент инерции магнита известен, то качать его с добавочной нагрузкой нет надобности, и величина  $MH$  определяется по периоду  $T$  формулой:

$$(3) \quad MH = \pi^2 \frac{J}{T^2}$$

Во-вторых, вынув этот магнит из прибора качаний, заменяют его вспомогательным магнитом и, положив в определенном расстоянии  $r_1$  на имеющуюся при приборе качания рейку, устанавливающую точно перпендикулярно к плоскости магнитного меридиана, определяют угол отклонения  $\theta_1$ , который он с этого расстояния вызывает у подвешенного вспомогательного магнита. Затем кладут магнит на ту же рейку тем же полюсом к стрелке на расстоянии  $r_2$  и определяют угол отклонения  $\theta_2$ ; после этого перекладывают магнит в тех же расстояниях, но

обратным полюсом к стрелке и определяют углы отклонения  $\theta'_1$  и  $\theta'_2$ . Из абсолютных величин углов  $\theta'_1$  и  $\theta'_1$  и  $\theta'_2$  и  $\theta'_2$  берут среднее, т. е.

$$\theta_1 = \frac{\theta'_1 + \theta'_2}{2}; \quad \theta_2 = \frac{\theta'_2 + \theta'_1}{2}$$

Углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  и представляют те отклонения, которые производит магнит при расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  до стрелки.

В § 24 показано, что эти отклонения выражаются формулами:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_1 &= \frac{M}{H} \left[ \frac{2}{r_1^3} + \frac{A}{r_1^5} \right] \\ \operatorname{tg} \theta_2 &= \frac{M}{H} \left[ \frac{2}{r_2^3} + \frac{A}{r_2^5} \right] \end{aligned}$$

Из этих уравнений находим:

$$(4) \quad \frac{M}{H} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r_2^5 \operatorname{tg} \theta_2 - r_1^5 \operatorname{tg} \theta_1}{r_2^2 - r_1^2}$$

Зная величины  $MH$  и  $\frac{M}{H}$ , сейчас же находим и величины  $M$  и  $H$ , которые и получатся прямо в единицах CGS, если все данные выражать в этих единицах.

Мы изложили здесь самую сущность метода Гаусса. Для практического его применения выработаны специальные приборы, которые будут описаны в главе V, где будут указаны предосторожности, которые надо соблюдать при наблюдениях, порядок и правила производства этих наблюдений, чтобы исключить разного рода влияния, как то: кручения нити, температуры, индукции.

### Г Л А В А III

#### Основания учения о земном магнетизме и начала математической теории его

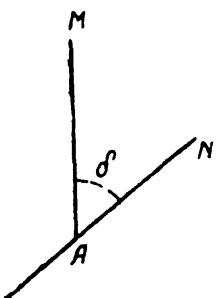
§ 33. Мы уже упоминали, что вся та область пространства, в которой можно заметить действие магнитных сил, называется *магнитным полем*. Таковым является вся поверхность Земли, ибо в любом ее месте магнитные силы обнаруживаются самыми простыми способами, о которых было сказано в главе II. Здесь мы дадим более подробное описание магнитного поля Земли и способа его изображения.

Мы уже видели, что в данной точке поле характеризуется его *напряжением*, т. е. силою, которая в этой точке действует на массу северного магнетизма, равную единице. Таким образом, для напряжения, как для всякой силы, надо рассматривать не только величину, но и *направление*.

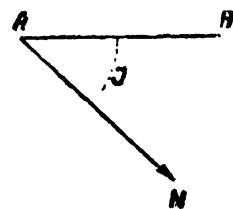
Пусть  $A$  есть какая-либо точка земной поверхности (в северном полушарии),  $AM$ —полуночная часть географического меридиана, проходящего через эту точку. Наблюдение показывает что магнитная стрелка, свободно вращающаяся в горизонтальной плоскости, становится своей осью по некоторому постоянному для данного места направлению  $AN$ , обращаясь северным своим концом к  $N$ -ду (фиг. 19).

Вертикальная плоскость, проведенная через магнитную ось находящейся в равновесии стрелки, называется *магнитным меридианом* места. Угол  $MAN$  между северной частью географического меридиана и северной частью магнитного называется *магнитным склонением* или просто *склонением* для данного места.

Склонение считается от северной части географического меридиана до северной части магнитного по обе стороны, т. е. к востоку и к западу от



Фиг. 19.



Фиг. 20.

0 до  $180^\circ$ , сообразно чему и называется восточным или западным. Так, напр., если склонение  $20^\circ$  восточное, то это значит, что угол  $MAN=20^\circ$ , причем  $N$  лежит вправо от  $M$ , и если склонение  $120^\circ$  западное (есть и такие места), то это значит, что северный конец стрелки показывает в этом месте не  $N$ , а по истинному румбу  $SW\ 60^\circ$ .

Если в плоскости магнитного меридиана поместить стрелку, которая могла бы свободно вращаться около горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести стрелки и перпендикулярной к плоскости магнитного меридиана, то стрелка принимает наклонное к горизонту положение, и магнитная ось ее составляет в данном месте постоянный с горизонтом угол  $NAH$ , будучи обращенной в северном полушарии северным концом вниз (фиг. 20).

Этот угол называется *магнитным наклонением* или просто *наклонением* и считается от 0 до  $90^\circ$ . В южном полушарии северный конец стрелки обращен вверх; такой угол наклонения будет считаться отрицательным.

Пусть склонение в данном месте  $\delta$ , наклонение  $I$  и величина напряжения  $K$ . Тогда очевидно, что силу  $K$  можно разложить в плоскости магнитного меридиана на две составляющие: горизонтальную  $H$  и вертикальную  $Z$ , и будет:

$$(1) \quad H = K \cdot \cos I; \quad Z = K \cdot \sin I$$

Р свою очередь силу  $H$  можно разложить в горизонтальной плоскости на две слагающие:  $X$  — направленную по меридиану и  $Y$  — перпендикулярно к меридиану; тогда будет:

$$(2) \quad X = H \cos \delta; \quad Y = H \sin \delta$$

Заменяя  $H$  его величиною, имеем:

$$(3) \quad X = K \cos I \cos \delta; \quad Y = K \cos I \sin \delta$$

Заметим, что по формуле (1) следует:

$$K = \frac{H}{\cos I} = H \sec I$$

Таким образом, ясно, что земное поле в данном месте вполне определяется заданием: 1) склонения, 2) наклонения и 3) горизонтальной составляющей напряжения.

Эти три величины и называются *элементами земного магнетизма* в данном месте.

В § 32 изложена сущность способа Гаусса для определения горизонтальной составляющей напряжения в абсолютной мере.

Для определения наклонения служит особый прибор, называемый *инклинометром*, общая идея устройства которого охарактеризована в § 4, описание же и способы пользования теперешними образцами будут даны в главе IV.

Для определения склонения с большею точностью, нежели это достигается простым компасом, разработаны также особые приборы, называемые *магнитными теодолитами*, сущность устройства которых состоит в том, что по имеющемуся у прибора горизонтальному кругу можно точно отсчитать направление, занимаемое горизонтально подвешеною стрелкою, ось вращения которой проходит через центр круга. Предварительно по астрономическим наблюдениям (Солнца или Полярной звезды) определяется ориентировка круга, т. е. истинный азимут, соответствующий отсчету  $0^\circ$ . Очевидно, что, зная этот отсчет и отсчет положения стрелки, получим и истинное направление ее, а значит, и склонение. В главе IV дано описание употребительнейшего типа теодолита и указаны правила пользования им, выверки его и исключения погрешностей.

Уже было упомянуто, что первым было замечено склонение и, в виду его важности для мореплавания, подвергнуто систематическому изучению. Затем стали изучать наклонение и, наконец, напряжение.

Для удобства обозрения и нахождения значения элементов составляются так называемые *магнитные карты*, на которых проведены системы изолиний, т. е. для склонения — системы линий, проходящих через те пункты, где склонение имеет одну и ту же величину, обозначаемую на этой линии отметкою, напр.  $0^\circ$ ,  $5^\circ$ ,  $10^\circ$  и т. д. Такая же карта строится для накло-

нения и для горизонтальной составляющей напряжения, а иногда и для полной величины этой силы.

Карты эти относятся к определенной эпохе, ибо все элементы с течением времени медленно изменяются.

Карты строятся по вычислениям, основанным на общей теории земного магнетизма, данной Гауссом и составляющей одно из самых блестящих открытий этого великого математика. Чтобы дать понятие о его теории, необходимо предварительно изложить основные свойства так называемой потенциальной функции, или потенциала, что и будет сделано в возможно кратком и простом виде в следующих параграфах.

**§ 34.** По закону Кулона сила  $F$  (фиг. 21), с которой магнитная масса  $m$ , сосредоточенная в точке  $M$  (координаты ее обозначим через  $a, b, c$ ), действует на массу  $\mu$ , сосредоточенную в точке  $A(x, y, z)$ , выражается формулой:

$$F = \frac{\mu m}{r^2}$$

причем

$$(*) r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$$

и сила эта направлена по прямой  $MA$  от  $M$  к  $A$ , когда обе массы одного наименования, т. е., если приписывать им знаки, когда произведение  $m\mu$  положительное.

Если положить  $\mu = +1$ , то сила  $F$  представит напряжение поля, производимого массою  $m$  в рассматриваемой точке.

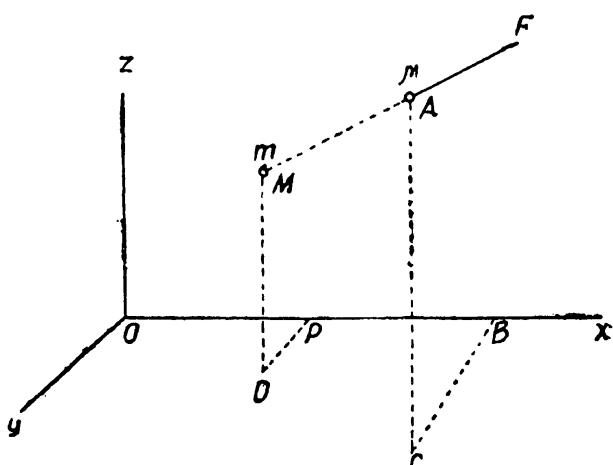
Положим сперва, что масса  $m$  — северная (положительная), тогда косинусы углов, составляемых силою  $F$  с осями, будут такие же, как составляемые прямою  $MA$ , т. е. будет:

$$\cos(Fx) = \frac{x-a}{r}; \quad \cos(Fy) = \frac{y-b}{r}; \quad \cos(Fz) = \frac{z-c}{r}$$

следовательно, проекции напряжения поля на оси координат будут:

$$(4) \quad X = \frac{m}{r^3} (x-a); \quad Y = \frac{m}{r^3} (y-b); \quad Z = \frac{m}{r^3} (z-c)$$

Если масса была отрицательная, то сила  $F$  имела бы обратное направление, но формулы (4) сохранили бы свой вид, если знак — относить не к множителям  $\frac{x-a}{r}, \frac{y-b}{r}, \frac{z-c}{r}$ , представляющим косинусы углов, составляемых прямою  $MA$  с осями координат, а отнести его к массе  $m$ .



Фиг. 21.

Из формулы (\*) следует:

$$dr = \frac{x-a}{r} dx + \frac{y-b}{r} dy + \frac{z-c}{r} dz$$

а так как

$$d\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{dr}{r^2}$$

то будет:

$$-d\left(\frac{1}{r}\right) = d\left(-\frac{1}{r}\right) = \frac{x-a}{r^3} dx + \frac{y-b}{r^3} dy + \frac{z-c}{r^3} dz$$

т. е. величины  $\frac{x-a}{r^3}$ ,  $\frac{y-b}{r^3}$ ,  $\frac{z-c}{r^3}$  суть соответственно частные производные функции  $-\frac{1}{r}$  по переменным  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Отсюда видно, что, проложив

$$(5) \quad V = -\frac{m}{r}$$

будем иметь:

$$(6) \quad X = \frac{\partial V}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

т. е. слагающие напряжения поля в точке  $(x, y, z)$  представляются частными производными одной и той же функции  $V$  по соответствующим координатам рассматриваемой точки.

Положим теперь, что имеются массы  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , сосредоточенные в точках коих координаты:  $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; \dots \dots a_k, b_k, c_k$ , причем массам северного магнетизма будем приписывать знак  $+$ , массам южного знак  $-$ ; и пусть в точке  $A$  находится масса  $\mu = +1$ . Тогда, рассчитав величину силы, действующей на эту массу, мы сразу получим и напряжение поля.

Есть нам какую-нибудь из действующих масс  $m_i$  ( $a_i, b_i, c_i$ ); мы видим, что слагающие силы, происходящие от этой массы, будут:

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{m_i}{r_i^3} (x - a_i) = \frac{\partial V_i}{\partial x} \\ Y_i &= \frac{m_i}{r_i^3} (y - b_i) = \frac{\partial V_i}{\partial y} \\ Z_i &= \frac{m_i}{r_i^3} (z - c_i) = \frac{\partial V_i}{\partial z} \end{aligned}$$

где

$$r_i^2 = (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2 \text{ и } V_i = -\frac{m_i}{r_i}$$

Проекции равнодействующей силы  $X, Y, Z$  будут:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_k = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x} + \dots + \frac{\partial V_k}{\partial x}$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k = \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \dots + \frac{\partial V_k}{\partial y}$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_k = \frac{\partial V_1}{\partial z} + \frac{\partial V_2}{\partial z} + \dots + \frac{\partial V_k}{\partial z}$$

Отсюда видно, что, взяв функцию

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_k = - \left( \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots + \frac{m_k}{r_k} \right)$$

мы будем иметь попрежнему (6):

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

Функция  $V$ , таким образом составленная, т. е. представляющая ваятую со знаком минус алгебраическую сумму действующих масс, разделенных на соответствующие расстояния до рассматриваемой точки, причем массы северного магнетизма надо взять со знаком +, массы южного со знаком —, будет обладать тем свойством, что ее частные производные по координатам рассматриваемой точки пространства представляют составляющие напряжения поля в этой точке. Формулы (6) представляют *первое* свойство функции  $V$ .

Эта функция называется *потенциалом* или *потенциалом* для данного силового поля.

**§ 35.** Из множества свойств потенциала, теория которого была развита английским математиком Грином и Гауссом (независимо друг от друга) и служит основанием учений об электричестве, магнетизме, распределении сил тяжести на Земле, о фигуре Земли, приливах и отливах и пр., мы приведем лишь три простейших, чтобы дать понятие о гауссовой теории земного магнетизма.

Итак, пусть

$$(7) \quad V = - \sum \frac{m_i}{r_i} = - \sum \frac{m_i}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

где  $a, b, c$  — координаты действующей массы  $m_i$ , причем для простоты письма мы опускаем значок  $i$ , по которому производится суммирование для всех масс,  $x, y, z$  — координаты той точки пространства, напряжение поля в которой изучается.

Очевидно, что  $V$  есть функция от переменных  $x, y, z$ , и мы уже имели *первое* ее основное свойство, выражаемое равенствами:

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

Составим теперь производные второго порядка по переменным  $x, y, z$  и покажем, что будет:

$$(8) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

В самом деле, имеем:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \sum \frac{m}{r^3} (x - a); \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \sum \frac{m}{r^3} (y - b); \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \sum \frac{m}{r^3} (z - c)$$

но

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{r^3} (x - a) \right] = -\frac{3}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} (x - a) + \frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^3} \cdot \frac{(x-a)^2}{r^2} + \frac{1}{r^3}$$

ибо мы видели, что

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r}$$

следовательно,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \sum \frac{m}{r^3} \left[ 1 - \frac{3(x-a)^2}{r^2} \right]$$

Совершенно так же

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \sum \frac{m}{r^3} \left[ 1 - \frac{3(y-b)^2}{r^2} \right]$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \sum \frac{m}{r^3} \left[ 1 - \frac{3(z-c)^2}{r^2} \right]$$

Сложив эти равенства, имеем:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \sum \frac{m}{r^3} \left[ 3 - 3 \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}{r^2} \right] = 0$$

ибо

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

Это уравнение, данное Лапласом, составляет основное свойство потенциальной функции для каких угодно масс. Важность указанного уравнения для теории этой функции в тех применениях, которые мы имеем в виду, состоит в том, что для составления этой функции придется пользоваться разложениями в ряды; члены этих рядов будут включать некоторые неопределенные коэффициенты. Уравнение Лапласа и послужит для установления зависимости между этими коэффициентами, благодаря которой вычисление их значительно упрощается. Равенство (8) есть *второе* свойство функции  $V$ .

Третье свойство потенциальной функции состоит в связи между значениями этой функции для двух точек поля и работой, совершаемую силами поля при перемещении массы, равной 1, из одной из этих точек в другую.

Из самого определения потенциала следует, что полный дифференциал:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = X dx + Y dy + Z dz$$

Трехчлен, стоящий в правой части этого равенства, представляет элементарную работу, совершаемую силой, коей составляющие  $X, Y, Z$  при перемещении точки ее приложения из положения  $x, y, z$  в положение  $(x+dx, y+dy, z+dz)$ . Если мы захотим знать полную работу этой силы на пути  $A_0B$ , то надо этот путь подразделить на бесчисленное множество элементов и взять предел суммы элементарных работ, им соответствующих, когда число их будет неопределенно возрастать.

Итак, пусть  $A_1, A_2, A_3, \dots$   $A_{n-1}$  — точки подразделения пути  $A_0B$  (фиг. 22) на бесконечно малые элементы:  $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}B$ .

Назовем значение потенциала  $V$  в точке  $A_0$  через  $V_0$ , в точке  $B$  — через  $V_1$ , и в промежуточных точках соответственно через  $v_1, v_2, v_3, \dots v_{n-1}$ . Координаты же этих точек — через  $\xi_1 \eta_1 \zeta_1, \xi_2 \eta_2 \zeta_2, \dots \xi_{n-1} \eta_{n-1} \zeta_{n-1}$ ; координаты точки  $A$  — через  $x_0 y_0 z_0$ , координаты точки  $B$  — через  $x_1 y_1 z_1$ .

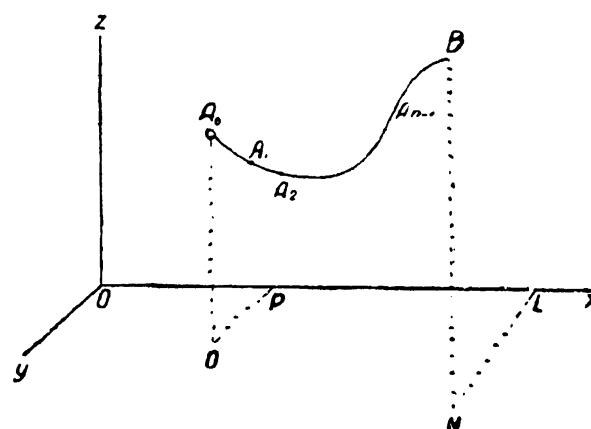
Составляющие силы — через  $X_0, Y_0, Z_0$  и  $X_1, Y_1, Z_1$  для точек  $A_0$  и  $B$  и через  $P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2, R_2, \dots, P_{n-1}, Q_{n-1}, R_{n-1}$  для промежуточных точек.

Обозначим такие разности:  $x_{k+1} - x_k, y_{k+1} - y_k, z_{k+1} - z_k$ , соответственно через  $dx_k, dy_k, dz_k$ ; бесконечно малая разность  $v_{k+1} - v_k$  значений функций для двух смежных точек  $A_{k+1}$  и  $A_k$  будет отличаться от соответствующего значения ее полного дифференциала лишь на бесконечно малые величины высших порядков, исчезающие вместе с  $\overline{A_k A_{k+1}}$ ; но

$$dv_k = P_k dx_k + Q_k dy_k + R_k dz_k$$

поэтому, обозначая через  $\varepsilon_k$  бесконечно малую величину, будем иметь:

$$v_{k+1} - v_k = P_k dx_k + Q_k dy_k + R_k dz_k + \varepsilon_k \overline{A_{k-1} A_k}$$



Фиг. 22.

Написав подобные равенства для всех промежуточных точек, получим.

$$\begin{aligned} v_1 - V_0 &= X_0 dx_0 + Y_0 dy_0 + Z_0 dz_0 + \varepsilon_0 \cdot \overline{A_0 A_1} \\ v_2 - v_1 &= P_1 dx_1 + Q_1 dy_1 + R_1 dz_1 + \varepsilon_1 \cdot \overline{A_1 A_2} \\ v_3 - v_2 &= P_2 dx_2 + Q_2 dy_2 + R_2 dz_2 + \varepsilon_2 \cdot \overline{A_2 A_3} \\ \dots &\dots \\ V_n - v_{n-1} &= P_{n-1} dx_{n-1} + Q_{n-1} dy_{n-1} + R_{n-1} dz_{n-1} + \varepsilon_{n-1} \cdot \overline{A_{n-1} B} \end{aligned}$$

сложив их, имеем при всяком числе подразделений:

$$V_1 - V_0 = T_n + (\varepsilon_0 \cdot \overline{A_0 A_1} + \varepsilon_1 \cdot \overline{A_1 A_2} + \dots + \varepsilon_{n-1} \cdot \overline{A_{n-1} B})$$

При неопределенном возрастании числа  $n$ , обозначенная нами через  $T_n$  сумма трехчленов, представляющая элементарную работу для каждого из бесконечно малых участков пути  $\overline{A_0 B}$ , представит полную работу силы  $F$  для этого пути; сумма же  $\sigma_n$  бесконечно малых величин высших порядков будет иметь своим пределом нуль. В самом деле, очевидно, что абсолютная величина суммы  $\sigma_n$  меньше абсолютной величины такой суммы, которую мы получим, заменив  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$  через абсолютную величину  $\eta$  наибольшего из них. Следовательно, будет:

$$|\sigma_n| < \eta [\overline{A_0 A_1} + \overline{A_1 A_2} + \dots + \overline{A_{n-1} B}]$$

т. е.

$$|\sigma_n| < \eta \cdot \overline{A_0 B}$$

а так как длина пути  $\overline{A_0 B}$  — конечная, величина же  $\eta$  имеет своим пределом нуль, то и  $\sigma_n$  при неопределенном возрастании  $n$  имеет своим пределом нуль. Таким образом, обозначая предел  $T_n$  через  $T$  (полную работу силы  $F$  на пути  $A_0 B$ ), имеем равенство:

$$T = V_1 - V_0$$

Это равенство показывает, что полная работа  $T$ , которую совершают силы, поля при перемещении подверженной их действию массы, равной +1, из точки  $A_0$  в точку  $B$ , равна разности значений потенциала в этих точках и не зависит от пути, по которому точка перемещалась.

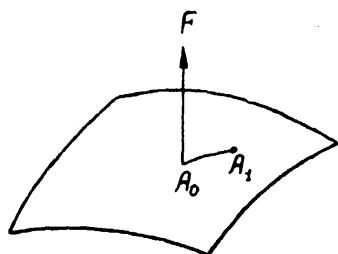
**§ 36.** Совокупность всех точек пространства, для которых потенциальная функция имеет какое-либо заданное значение  $C$ , представляет некоторую поверхность. Из предыдущего видно, что как бы точка по такой поверхности ни перемещалась, работа, производимая силою

поля, равна нулю. Возьмем на этой поверхности (фиг. 23) две бесконечно близкие точки  $A_0$  и  $A_1$ . Тогда элементарная работа силы:

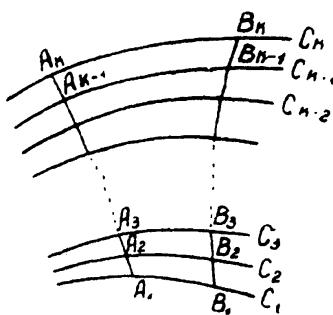
$$T = F \cdot A_0 A_1 \cdot \cos(F, \overrightarrow{A_0 A_1}) = 0$$

при всяком бесконечно малом перемещении  $\overrightarrow{A_0 A_1}$ . Так как это равенство имеет место при перемещении по поверхности по всякому направлению около точки  $A_0$  или в пределе по касательной к ней в точке  $A_0$  плоскости, то  $\cos(F, \overrightarrow{A_0 A_1}) = 0$ , т. е. сила  $F$  к этой плоскости перпендикулярна и, значит, направлена по нормали к поверхности в точке  $A_0$ .

Поверхность, во всех точках которой потенциальная функция имеет одно и то же значение, называется *поверхностью уровня*. Давая постоянной  $C$  различные значения, мы можем построить бес-



Фиг. 23.



Фиг. 24.

численное множество поверхностей уровня, разбивающих все силовое поле как бы на слои, в каждом из которых значение потенциала постоянное.

Каждая из поверхностей уровня определяется соответствующим ей значением параметра или постоянной  $C$ .

Пусть эти значения будут:

$$C_1, C_2, C_3, \dots, C_k$$

и положим, что они бесконечно близки друг к другу. Вообразим систему поверхностей уровня (фиг. 24), соответствующих этим значениям параметра; эти поверхности будут также бесконечно близки между собою. Возьмем на первой из них точку  $A_1$  и проведем направление силы поля в этой точке, совпадающее с нормалью к поверхности; это направление пересечет поверхность  $C_2$  в точке  $A_2$ ; в этой точке опять проведем направление силы до пересечения в точке  $A_3$  с поверхностью  $C_3$  и т. д. Таким образом получится ломаная  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ , в пределе обращающаяся в такую кривую, касательная к каждой точке которой представляет направление силы поля в этой точке. Такая кривая называется *силовой линией*.

Возьмем на поверхности  $C_1$  точку  $B_1$  и проведем элемент  $B_1 B_2$  силовой линии; обозначим напряжение в точке  $A_1$  через  $F_1$ , в точке  $B_1$  — через  $G_1$ ; работа, затрачиваемая на перенос массы, равной единице, из точки  $A_1$  в точку  $A_2$ , выражается произведением  $F_1 \cdot \overrightarrow{A_1 A_2}$ ; работа на такой же перенос из  $B_1$  в  $B_2$  — произведением  $G_1 \cdot \overrightarrow{B_1 B_2}$ , но и та и

другая работа равна разности соответствующих значений потенциала, т. е.  $C_2 - C_1$ . Таким образом имеем:

$$F_1 \cdot \overline{A_1 A_2} = G_1 \cdot \overline{B_1 B_2} = C_2 - C_1$$

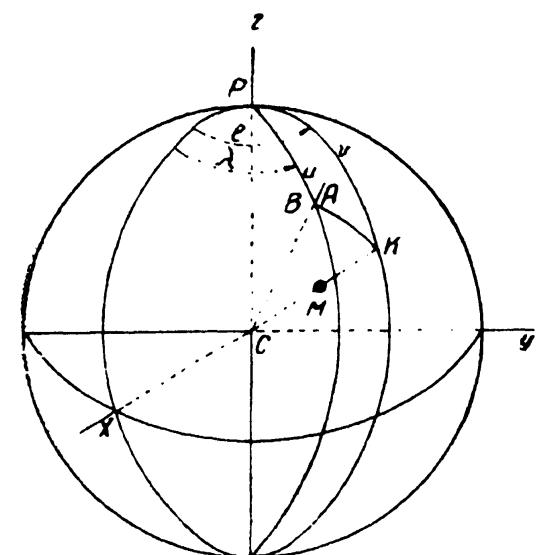
отсюда

$$F_1 : G_1 = \overline{B_1 B_2} : \overline{A_1 A_2}$$

т. е. напряжение поля в каждой точке обратно пропорционально расстоянию в этой точке между данной поверхностью уровня и смежной с нею. Поэтому если провести систему поверхностей уровня через одинаковые промежутки значений параметра  $C$ , то можно судить по

расстоянию между этими поверхностями о напряжении поля, а по направлению нормали — о направлении его.

Этот чертеж приобретает еще большую наглядность, если провести также силовые линии и выбрать их так, чтобы число линий, приходящихся на каждый квадратный сантиметр поверхности уровня, было пропорционально напряжению в соответствующей точке; тогда по густоте силовых линий можно получить наглядное представление о напряжении поля.



Фиг. 25.

мы не будем останавливаться на способах построения поверхностей уровня и силовых линий, а перейдем прямо к изложению сущности того способа, при помощи которого Гаусс дал аналитическое выражение потенциала земного магнетизма; причем мы, по возможности, будем придерживаться его обозначений в тех случаях, когда они не вызывают типографских затруднений.

**§ 37.** Пусть  $A$  есть какая-либо точка снаружи поверхности Земли,  $C$  — центр Земли,  $B$  — точка пересечения прямой  $CA$  с поверхностью Земли.

Примем центр Земли  $C$  за начало координат (фиг. 25), плоскость первого меридиана (гриничского) — за плоскость  $xz$ , плоскость экватора — за плоскость  $xy$  и плоскость меридиана восточной долготы  $90^\circ$  — за плоскость  $zy$ . Обозначим долготу точки  $B$  через  $\lambda$ , расстояние ее до полюса  $P$  — через  $u$ , расстояние  $CA$  — через  $r$ .

Пусть в точке  $M(x, y, z)$ , лежащей внутри Земли, находится магнитная масса  $m$ ; положим  $CM=s$ , пересечение продолженного радиуса  $CM$  с поверхностью Земли обозначим через  $K$ , полярное расстояние  $PK$  — через  $v$  и долготу точки  $K$  — через  $l$ .

Проведем дугу большого круга  $BK$  и обозначим ее через  $\omega$ . Тогда будет:

$$\cos \omega = \cos u \cos v + \sin u \sin v \cos(l - \lambda)$$

Обозначая расстояние  $AC$  через  $\rho$ , видим, что потенциал в точке  $A$  от масс  $m$ , расположенных внутри Земли, будет:

$$V = - \sum \frac{m}{\rho}$$

но из треугольника  $ACM$  следует:

$$\rho^2 = r^2 - 2rs \cos \omega + s^2$$

следовательно,

$$\frac{1}{\rho} = (r^2 - 2rs \cos \omega + s^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left( 1 - 2 \frac{s}{r} \cos \omega + \frac{s^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Сделаем для сокращения письма  $\cos \omega = p$  и  $\frac{s}{r} = \alpha$  и разложим входящую в предыдущее выражение степень трехчлена в ряд по степеням буквы  $\alpha$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{r} \left[ 1 - (2p\alpha - \alpha^2) \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{1}{2} (2p\alpha - \alpha^2) + \right. \\ &+ \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{1 \cdot 2} (2p\alpha - \alpha^2)^2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} (2p\alpha - \alpha^2)^3 + \dots \left. \right] = \\ &= \frac{1}{r} [1 + Q_1\alpha + Q_2\alpha^2 + Q_3\alpha^3 + Q_4\alpha^4 + \dots] \end{aligned}$$

причем величины  $Q_1, Q_2, \dots$  суть функции только буквы  $p = \cos \omega$ , которые мы получим, раскрывая скобки в предыдущей формуле и собирая члены с одинаковыми степенями  $\alpha$ . Таким образом будет:

$$Q_1 = p$$

$$Q_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} p^2 = \frac{3}{2} \left( p^2 - \frac{1}{3} \right)$$

$$Q_3 = -\frac{3}{2} p + \frac{5}{2} p^3 = \frac{5}{2} \left( p^3 - \frac{3}{5} p \right)$$

$$Q_4 = \frac{3}{8} - \frac{15}{8} p^2 + \frac{35}{8} p^4 = \frac{35}{8} \left( p^4 - \frac{6}{7} p^2 + \frac{3}{35} \right)$$

Следовательно, мы получаем:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{1}{r} \left[ \sum m + Q_1 \sum m\alpha + Q_2 \sum m\alpha^2 + \dots \right] = \\ &= -\frac{1}{r} \left[ \sum m + \frac{Q_1}{r} \sum ms + \frac{Q_2}{r^2} \sum ms^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

Для всякого магнитного тела полная сумма всех магнитных масс равна нулю, следовательно  $\sum m = 0$ . Обозначим через  $R$  радиус Земли и положим:

$$\begin{aligned} -Q_1 \sum ms &= R^2 P_1 & -Q_2 \sum ms^2 &= R^4 P_2 \\ -Q_3 \sum ms^3 &= R^6 P_3 & -Q_4 \sum ms^4 &= R^8 P_4 \end{aligned}$$

Тогда будет:

$$V = \frac{R^3}{r^2} P_1 + \frac{R^4}{r^3} P_2 + \frac{R^5}{r^4} P_3 + \frac{R^6}{r^5} P_4 + \dots$$

Чтобы получить величину  $P_1$ , подставляем в равенство

$$R^3 P_1 = -Q_1 \sum ms$$

вместо  $Q_1$  его величину  $p$ . Получим:

$$ps = s \cos v \cos u + s \sin v \cos l \sin u \cos \lambda + s \sin v \sin l \sin u \sin \lambda$$

Но имеем  $CM = s$ , поэтому

$$s \cos v = z; \quad s \sin v \cos l = x; \quad s \sin v \sin l = y$$

Следовательно, будет:

$$-R^3 P_1 = \cos u \cdot \sum mz + \sin u \cos \lambda \cdot \sum mx + \sin u \sin \lambda \cdot \sum my$$

Полагая

$$\sum mx = \mathfrak{M}_x; \quad \sum my = \mathfrak{M}_y; \quad \sum mz = \mathfrak{M}_z$$

мы видим, что  $\mathfrak{M}_x$ ,  $\mathfrak{M}_y$ ,  $\mathfrak{M}_z$  суть проекции магнитного момента Земли на оси координат. Следовательно, положив

$$\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2}$$

и

$$\mathfrak{M} \cos \alpha = \mathfrak{M}_x; \quad \mathfrak{M} \cos \beta = \mathfrak{M}_y; \quad \mathfrak{M} \cos \gamma = \mathfrak{M}_z$$

мы получим и магнитный момент Земли  $\mathfrak{M}$  и направление ее магнитной оси.

Итак

$$-R^3 P_1 = \mathfrak{M}_x \sin u \cos \lambda + \mathfrak{M}_y \sin u \sin \lambda + \mathfrak{M}_z \cos u$$

Чтобы разить  $P_2$ , заменяя в формуле

$$R^4 P_2 = -Q_2 \sum ms^2$$

$Q_2$  его величиною  $\frac{3}{2} p^3 - \frac{1}{2}$ .

Тогда получим:

$$R^4 P_2 = \frac{1}{2} \sum ms^2 - \frac{3}{2} \sum m(ps)^2 = \frac{1}{2} \sum m(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{3}{2} \sum m(ps)^2$$

Но мы видели, что

$$ps = z \cos u + x \sin u \cos \lambda + y \sin u \sin \lambda$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \sum m(ps)^2 &= \cos^2 u \sum mz^2 + \sin^2 u \cos^2 \lambda \sum mx^2 + \sin^2 u \sin^2 \lambda \sum my^2 \\ &+ 2 \cos u \sin u \cos \lambda \sum mxz + 2 \cos u \sin u \sin \lambda \sum mxy + \\ &+ 2 \sin^2 u \cos \lambda \sin \lambda \sum mxy \end{aligned}$$

Таким образом, если положить, как делает Гаусс:

$$\cos u = e; \quad \sin u = f$$

и обозначить зависящие от распределения магнетизма суммы:

$$\begin{aligned} \sum mx^2 &= A; \quad \sum my^2 = B; \quad \sum mz^2 = C \\ \sum mxy &= D; \quad \sum mxz = E; \quad \sum myz = F \end{aligned}$$

то будет:

$$\begin{aligned} R^4 P_2 &= \frac{1}{2} [A + B + C] - \frac{5}{2} [Ce^2 + Af^2 \cos^2 \lambda + Bf^2 \sin^2 \lambda + 2Ef \cos \lambda + \\ &+ 2Fef \sin \lambda + 2Df^2 \sin \lambda \cos \lambda] \end{aligned}$$

Таким образом, представляется, что функция  $P_2$  содержит шесть неизвестных постоянных.

Заменим  $\cos^2 \lambda$ ,  $\sin^2 \lambda$  и  $2 \sin \lambda \cos \lambda$  их выражениями через косинус и синус двойной дуги:

$$\cos^2 \lambda = \frac{1}{2} [1 + \cos 2\lambda]; \quad \sin^2 \lambda = \frac{1}{2} [1 - \cos 2\lambda]; \quad 2 \sin \lambda \cos \lambda = \sin 2\lambda$$

Тогда, обозначая через  $a$ ,  $b$ ,  $g_1^1$ ,  $h_1^1$ ,  $g_2^2$ ,  $h_2^2$  некоторые новые постоянные, составленные из  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $F$  по разделению их на  $R^4$  (для дальнейшего — безразлично как), предыдущую формулу напишем в таком виде:

$$P_2 = (ae^2 + b) + (g_1^1 \cos \lambda + h_1^1 \sin \lambda)ef + (g_2^2 \cos 2\lambda + h_2^2 \sin 2\lambda)f^2$$

В § 35 было указано, что потенциал  $V$  удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

На основании этого уравнения доказывается (доказательство это

слишком сложно, чтобы его излагать здесь), что функция  $P_n$  удовлетворяет уравнению:

$$n(n+1)P_n + \frac{\partial^2 P_n}{\partial u^2} + \cot g u \cdot \frac{\partial P_n}{\partial u} + \frac{1}{\sin^2 u} \frac{\partial^2 P_n}{\partial \lambda^2} = 0$$

поэтому  $P_2$  удовлетворяет уравнению:

$$2 \cdot 3 P_2 + \frac{\partial^2 P_2}{\partial u^2} + \cot g u \cdot \frac{\partial P_2}{\partial u} + \frac{1}{\sin^2 u} \frac{\partial^2 P_2}{\partial \lambda^2} = 0$$

Чтобы применить это уравнение к нашему случаю, замечаем, что

$$e^2 = \cos^2 u; f^2 = \sin^2 u; ef = \sin u \cos u$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(e^2) = -2 \cos u \sin u = -2ef; \quad \frac{\partial}{\partial u}f^2 = 2 \sin u \cos u = 2ef$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(ef) = e^2 - f^2;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}(e^2) = 2(f^2 - e^2); \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2}(f^2) = 2(e^2 - f^2); \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2}(ef) = -4ef$$

и предыдущее уравнение будет:

$$\begin{aligned} & 6 [ae^2 + b + (g_2^1 \cos \lambda + h_2^1 \sin \lambda)ef + (g_2^2 \cos 2\lambda + h_2^2 \sin 2\lambda)f^2] + \\ & + [2a(f^2 - e^2) - 4(g_2^1 \cos \lambda + h_2^1 \sin \lambda)ef + 2(g_2^2 \cos 2\lambda + h_2^2 \sin 2\lambda)(e^2 - f^2)] - \frac{e}{f}[2aef + (g_2^1 \cos \lambda + h_2^1 \sin \lambda)(2f^2 - 1) + \\ & + 2(g_2^2 \cos 2\lambda + h_2^2 \sin 2\lambda)ef] + \frac{1}{f^2}[(g_2^1 \cos \lambda + h_2^1 \sin \lambda)ef - \\ & - 4(g_2^2 \cos 2\lambda + h_2^2 \sin 2\lambda)f^2] = 0 \end{aligned}$$

или, по сокращении:

$$6ae^2 + 6b + 2af^2 - 2ae^2 - 2a^2 = 0$$

т. е., так как  $e^2 + f^2 = 1$ ,

$$2a + 6b = 0$$

или

$$b = -\frac{1}{3}a$$

величины же  $g_2^1, h_2^1, g_2^2, h_2^2$  и  $a$  могут быть какие угодно, и, таким образом, число произвольных постоянных в выражении  $P_2$  всего лишь 5, а не 6. Полагая  $a = g_2^0$ , напишем:

$$P_2 = g_2^0 \left( e^2 - \frac{1}{3} \right) + (g_2^1 \cos \lambda + h_2^1 \sin \lambda)ef + (g_2^2 \cos 2\lambda + h_2^2 \sin 2\lambda)f^2$$

Подобным образом окажется, что  $P_3$  и  $P_4$  будут в силу уравнения (\*) содержать гораздо меньше постоянных, нежели получилось бы

по непосредственному развитию  $Q_3 \sum ms^3$  и  $Q_4 \sum ms^4$  по замене  $Q_3$  и  $Q_4$  их выражениями. Именно будет:

$$\begin{aligned} P_3 &= g_3^0 \left( e^3 - \frac{3}{5} e \right) + (g_3^1 \cos \lambda + h_3^1 \sin \lambda) \left( e^2 - \frac{1}{5} f \right) + (g_3^2 \cos 2\lambda + \\ &\quad + h_3^2 \sin 2\lambda) e f^2 + (g_3^3 \cos 3\lambda + h_3^3 \sin 3\lambda) f^3. \\ P_4 &= g_4^0 (e^4 - \frac{6}{7} e^2 + \frac{3}{35}) + (g_4^1 \cos \lambda + h_4^1 \sin \lambda) (e^3 - \frac{3}{7} e) f + \\ &+ (g_4^2 \cos 2\lambda + h_4^2 \sin 2\lambda) (e^2 - \frac{1}{7}) f^2 + (g_4^3 \cos 3\lambda + h_4^3 \sin 3\lambda) e f^3 + \\ &+ (g_4^4 \cos 4\lambda + h_4^4 \sin 4\lambda) f^4 \end{aligned}$$

Положим, чтобы иметь симметричное обозначение:

$$P_1 = g_1^0 e + (g_1^1 \cos \lambda + h_1^1 \sin \lambda) f$$

так что

$$\mathfrak{M}_x = -g_1^1 R^3; \quad \mathfrak{M}_y = -h_1^1 R^3; \quad \mathfrak{M}_z = -g_1^0 R^3$$

Тогда

$$V = \frac{R^3}{r^2} \left( P_1 + \frac{R}{r} P_2 + \frac{R^2}{r^2} P_3 + \frac{R^3}{r^3} P_4 + \dots \right)$$

Для точки на поверхности Земли  $r=R$ . Следовательно

$$\frac{V}{R} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots$$

и, подставляя вместо  $P_1, P_2, \dots$  их величины, получим:

$$\begin{aligned} \frac{V}{R} &= \left( -\frac{1}{3} g_2^0 + \frac{3}{35} g_4^0 \right) + \left( g_1^0 - \frac{3}{5} g_3^0 \right) e + \left( g_2^0 - \frac{6}{7} g_4^0 \right) e^2 + g_3^0 e^3 + \\ &+ g_4^0 e^4 + \left[ \left( g_1^1 - \frac{1}{5} g_3^1 \right) + \left( g_2^1 - \frac{3}{7} g_4^1 \right) e + g_3^1 e^2 + g_4^1 e^3 \right] f \cos \lambda + \\ &+ \left[ \left( h_1^1 - \frac{1}{5} h_3^1 \right) + \left( h_2^1 - \frac{3}{7} h_4^1 \right) e + h_3^1 e^2 + h_4^1 e^3 \right] f \sin \lambda + \\ &+ \left[ \left( g_2^2 - \frac{1}{7} g_4^2 \right) + g_3^2 e + g_4^2 e^2 \right] f^2 \cos 2\lambda + \left[ \left( h_2^2 - \frac{1}{7} h_4^2 \right) + h_3^2 e + \right. \\ &\quad \left. + h_4^2 e^2 \right] f^2 \sin 2\lambda + (g_3^3 + g_4^3 e) f^3 \cos 3\lambda + (h_3^3 + h_4^3 e) f^3 \sin 3\lambda + \\ &+ g_4^4 f^4 \cos 4\lambda + h_4^4 f^4 \sin 4\lambda \end{aligned}$$

если ограничиваться членами до 4-го порядка, как это делает Гаусс.

Отсюда видно, что выражение  $V$  содержит те же неизвестные постоянные  $g_1^0, g_1^1, h_1^1, \dots, h_4^4$ , которые входят в  $P_1, P_2, P_3, P_4$  и число которых:  $3 + 5 + 7 + 9 = 24$ . Эти постоянные и надо определить на основании наблюдений.

Но наблюдения дают не непосредственные значения магнитного потенциала, а лишь «элементы», т. е. склонение, наклонение и напряжение,

точнее говоря, его горизонтальную составляющую. По этим элементам легко вычисляются, как показано выше, составляющие напряжения по направлению меридиана (географического), первого вертикала и отвесной линии.

За положительные направления этих слагающих Гаусс принимает: для слагающей  $X$  (меридиональной) — направление к северу, для слагающей  $Y$  поперечной (по первому вертикал) — направление к западу и для слагающей вертикальной  $Z$  — направление по отвесной линии вниз.

Таким образом, будем иметь:

(1)  $X = H \cos \delta$ ;  $Y = -H \sin \delta$ ;  $Z = H \operatorname{tg} I$   
условившись считать склонение восточное со знаком + и западное со знаком — и наклонение со знаком +, когда северный конец стрелки направлен вниз.

Мы видели, что в прямоугольных координатах

$$(2) \quad X = \frac{\partial V}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

но в нашем случае координаты полярные, и начало их — в центре Земли, предыдущие же формулы относятся к совсем другим осям, поэтому надо выразить величины  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  через производные потенциала по тем переменным  $u$ ,  $\lambda$ ,  $r$ , от которых они зависят.

**§ 38.** Чтобы составить требуемые выражения слагающих магнитного напряжения через производные потенциала по переменным  $u$ ,  $\lambda$ ,  $r$ , положим, что через рассматриваемую точку  $A$  проведены меридиан, параллель и отвесная линия к центру Земли (фиг. 26). Если вообразить, что масса +1 перемещается из этой точки в бесконечно близкую к ней  $A_1$ , лежащую на том же меридиане, то изменится лишь координата  $u$ , которая получит приращение  $\Delta u$ , работа магнитной силы будет:  $-X \cdot \overline{AA_1}$  (знак — надо взять потому, что положительное направление силы  $X$  есть северное, перемещение же  $\Delta u$  совершается к югу); так как  $\overline{AA_1} = r \Delta u$ , следовательно, будет:  $-X \cdot \overline{AA_1} = -Xr \Delta u$ ; но эта работа равна приращению потенциала, т. е. величине  $V_1 - V = \Delta V$ . Итак,

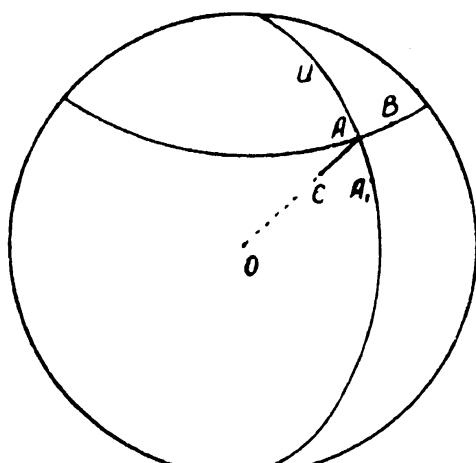
$$\Delta V = -Xr \Delta u$$

откуда

$$X = -\frac{1}{r} \frac{\Delta V}{\Delta u}$$

в пределе имеем:

$$X = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial u}$$



Фиг. 26.

Для точки на поверхности Земли  $r = R$ , и будет:

$$X = -\frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial u}$$

Чтобы получить слагающую  $Y$  по параллели, вообразим, что точка перемещается по параллели в точку  $B$  так, что ее долгота вместо  $\lambda$  становится  $\lambda + \Delta\lambda$  (т. е. перемещается к востоку), тогда элементарная работа будет равна  $-Y \overline{AB}$  (знак  $-$ , ибо сила  $Y$  считается положительной — к западу, перемещение же  $AB$  направлено к востоку); но дуга  $AB$  параллели, соответствующая изменению долготы  $\Delta\lambda$ , есть  $AB = r \sin u \Delta\lambda$ .

Следовательно, будет:

$$\Delta V = -Y \overline{AB} = -Y r \sin u \Delta\lambda$$

Откуда

$$Y = -\frac{1}{r \sin u} \frac{\Delta V}{\Delta\lambda}$$

и в пределе:

$$Y = -\frac{1}{r \sin u} \frac{\partial V}{\partial \lambda}$$

а для поверхности Земли:

$$Y = -\frac{1}{R \sin u} \frac{\partial V}{\partial \lambda}$$

Совершенно так же увидим, придав точке перемещение по направлению радиуса от центра Земли, что

$$\Delta V = -Z \Delta r$$

и, следовательно, в пределе:

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

Таким образом, будет вообще:

$$\begin{aligned} X &= -\frac{R^3}{r^3} \left[ \frac{\partial P_1}{\partial u} + \frac{R}{r} \frac{\partial P_2}{\partial u} + \frac{R^2}{r^2} \frac{\partial P_3}{\partial u} + \frac{R^3}{r^3} \frac{\partial P_4}{\partial u} + \dots \right] \\ Y &= -\frac{R^3}{r^3 \sin u} \left[ \frac{\partial P_1}{\partial \lambda} + \frac{R}{r} \frac{\partial P_2}{\partial \lambda} + \frac{R^2}{r^2} \frac{\partial P_3}{\partial \lambda} + \frac{R^3}{r^3} \frac{\partial P_4}{\partial \lambda} + \dots \right] \\ Z &= \frac{R^3}{r^3} \left[ 2P_1 + 3 \frac{R}{r} P_2 + 4 \frac{R^2}{r^2} P_3 + 5 \frac{R^3}{r^3} P_4 + \dots \right] \end{aligned}$$

и для точки на поверхности Земли:

$$(3) \quad \begin{aligned} X &= - \left[ \frac{\partial P_1}{\partial u} + \frac{\partial P_2}{\partial u} + \frac{\partial P_3}{\partial u} + \frac{\partial P_4}{\partial u} + \dots \right] \\ Y &= - \frac{1}{\sin u} \left[ \frac{\partial P_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial P_2}{\partial \lambda} + \frac{\partial P_3}{\partial \lambda} + \frac{\partial P_4}{\partial \lambda} + \dots \right] \\ Z &= 2P_1 + 3P_2 + 4P_3 + 5P_4 + \dots \end{aligned}$$

Из этих формул видно, что величины  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  для всякого места получаются дифференцированием выражений  $P_1$ ,  $P_2$ , ... и, следовательно, содержат те же самые 24 постоянные  $g_1^0$ ,  $g_2^0$ , ...  $g_4^0$ ,  $h_4^0$ , как и выражение  $V$ , причем эти постоянные входят линейно.

Таким образом, каждое полное наблюдение элементов в каком-либо месте доставит три уравнения для определения коэффициентов или постоянных в выражении потенциала.

Гаусс не приводит подробных формул для составляющих  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , их можно найти в собрании сочинений Адамса (J. C. Adams. Collected Scientific Papers, t. II, «The Theory of Terrestrial Magnetism», стр. 403—410), где эти формулы развиты до членов 10-го порядка, и уже одно то, что они занимают семь страниц in 4°, показывает их сложность.

Мы ограничимся членами до 4-го порядка, как делал Гаусс, и самые формулы расположим в соответствии с приводимым им видом и численными данными.

На основании формулы (\*) § 37, припомнив обозначения:

$$e = \cos u; f = \sin u$$

так что

$$\frac{\partial e}{\partial u} = -\sin u = -f; \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \cos u = e$$

имеем:

$$\begin{aligned} P_1 &= g_1^0 e + (g_1^1 \cos \lambda + h_1^1 \sin \lambda) f. \\ P_2 &= g_2^0 \left( e^2 - \frac{1}{3} \right) + (g_2^1 \cos \lambda + h_2^1 \sin \lambda) ef + (g_2^2 \cos 2\lambda + h_2^2 \sin 2\lambda) f^2 \\ P_3 &= g_3^0 \left( e^3 - \frac{3}{5} e \right) + (g_3^1 \cos \lambda + h_3^1 \sin \lambda) \left( e^2 - \frac{1}{5} \right) f + (g_3^2 \cos 2\lambda + h_3^2 \sin 2\lambda) ef^2 + (g_3^3 \cos 3\lambda + h_3^3 \sin 3\lambda) f^3 \\ P_4 &= g_4^0 \left( e^4 - \frac{6}{7} e^2 + \frac{3}{35} \right) + (g_4^1 \cos \lambda + h_4^1 \sin \lambda) \left( e^3 - \frac{3}{7} e \right) + \\ &\quad + (g_4^2 \cos 2\lambda + h_4^2 \sin 2\lambda) \left( e^2 - \frac{1}{7} \right) f^2 + (g_4^3 \cos 3\lambda + h_4^3 \sin 3\lambda) ef^3 + \\ &\quad + (g_4^4 \cos 4\lambda + h_4^4 \sin 4\lambda) f^4 \\ \frac{\partial P_1}{\partial u} &= -g_1^0 f + (g_1^1 \cos \lambda + h_1^1 \sin \lambda) e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P_2}{\partial u} &= -2g_2^0ef + (g_2^1 \cos \lambda + h_2^1 \sin \lambda)(2e^2 - 1) + 2(g_2^3 \cos 2\lambda + \\
 &\quad + h_2^3 \sin 2\lambda)ef \\
 \frac{\partial P_3}{\partial u} &= g_3^0 \left( \frac{3}{5}f - 3e^2f \right) + (g_3^1 \cos \lambda + h_3^1 \sin \lambda)(3e^2 - \frac{1}{5}e) + (g_3^3 \cos 2\lambda + \\
 &\quad + h_3^3 \sin 2\lambda)(1 - 3e^2)f + 3(g_3^3 \cos 3\lambda + h_3^3 \sin 3\lambda)f^2e \\
 \frac{\partial P_4}{\partial u} &= -g_4^0 \left( 4e^3f - \frac{12}{7}ef \right) + (g_4^1 \cos \lambda + h_4^1 \sin \lambda) \left( 4e^4 - \frac{27}{7}e^2 + \frac{3}{7} \right) + \\
 &\quad + (g_4^3 \cos 2\lambda + h_4^3 \sin 2\lambda)(4e^3 - \frac{16}{7}e)f + (g_4^3 \cos 3\lambda + \\
 &\quad + h_4^3 \sin 3\lambda)(-1 + 4e^2)f^2 + 4(g_4^4 \cos 4\lambda + h_4^4 \sin 4\lambda)
 \end{aligned}$$

Подставляя эти величины в формулу (3), получим, по приведению:

$$\begin{aligned}
 X &= \left[ \left( g_1^0 - \frac{3}{5}g_3^0 \right) + 2 \left( g_2^0 - \frac{6}{7}g_4^0 \right) e + 3g_3^0e^2 + 4g_4^0e^3 \right] f + \\
 &\quad + \left[ \left( g_2^1 - \frac{3}{7}g_4^1 \right) - \left( g_1^1 - \frac{11}{5}g_3^1 \right) e + \left( -2g_2^1 + \frac{27}{7}g_4^1 \right) e^2 - 3g_3^1e^3 - \right. \\
 &\quad \left. - 4g_4^1e^4 \right] \cos \lambda + \left[ \left( h_3^1 - \frac{3}{7}h_4^1 \right) - \left( h_1^1 - \frac{11}{5}h_3^1 \right) e + \left( -2h_2^1 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{27}{7}h_4^1 \right) e^2 - 3h_3^1e^3 - 4h_4^1e^4 \right] \sin \lambda + \left[ g_3^3 - 2 \left( g_2^3 - \frac{8}{7}g_4^3 \right) e - \right. \\
 &\quad \left. - 3g_3^3e^2 - 4g_4^3e^3 \right] f \cos 2\lambda + \left[ h_3^3 - 2 \left( h_1^3 - \frac{8}{7}h_4^3 \right) e - 3h_3^3e^2 - \right. \\
 &\quad \left. - 4h_4^3e^3 \right] f \sin 2\lambda + [g_4^3 - 3g_3^3e - 4g_4^3e^2] f^2 \cos 3\lambda + \\
 &\quad + [h_4^3 - 3h_3^3e - 4h_4^3e^2] f^2 \sin 3\lambda - \\
 &\quad - 4g_4^4ef^3 \cos 4\lambda - 4h_4^4ef^3 \sin 4\lambda \\
 Y &= \left[ \left( -h_1^1 + \frac{1}{5}h_3^1 \right) - \left( h_3^1 - \frac{3}{7}h_4^1 \right) e - h_3^1e^2 - h_4^1e^3 \right] f \cos \lambda + \\
 &\quad + \left[ g_1^1 - \frac{1}{5}g_3^1 \right) + \left( g_2^1 - \frac{3}{7}g_4^1 \right) e + g_3^1e^2 + g_4^1e^3 \right] f \sin \lambda + \\
 &\quad + \left[ \left( -2h_2^1 + \frac{2}{7}h_4^1 \right) - 2h_3^1e - 2h_4^1e^2 \right] f^2 \cos 2\lambda + \\
 &\quad + \left( 2g_2^1 - \frac{2}{7}g_4^1 \right) + 2g_3^1e + 2g_4^1e^2 \right] f^2 \sin 2\lambda - \\
 &\quad - (3h_3^1 + 3h_4^1e)f^3 \cos 3\lambda + (3g_3^1 + 3g_4^1e)f^3 \sin 3\lambda - \\
 &\quad - 4h_4^4f^4 \cos 4\lambda + 4g_4^4f^4 \sin 4\lambda \\
 Z &= \left( -g_2^0 + \frac{3}{7}g_4^0 \right) + \left( 2g_1^0 - \frac{12}{5}g_4^0 \right) e + \left( 3g_2^0 - \frac{30}{7}g_4^0 \right) e^2 + \\
 &\quad + 4g_3^0e^3 + 5g_4^0e^4 + \left[ \left( 2g_1^1 - \frac{4}{5}g_3^1 \right) + \left( 3g_2^1 - \frac{15}{7}g_4^1 \right) e + 4g_3^1e^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 5g_4^1e^3 \right] f \cos \lambda + \left[ \left( 2h_1^1 - \frac{4}{5}h_3^1 \right) + \left( 3h_2^1 - \frac{15}{7}h_4^1 \right) e + \left( 4h_3^1e^2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 5h_4^1e^3 \right) f \sin \lambda + \left[ \left( 3g_2^3 - \frac{5}{7}g_4^3 \right) + 4g_3^3e + 5g_4^3e^2 \right] f^2 \cos 2\lambda + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \left( 3h_2^3 - \frac{5}{7}h_4^3 \right) + 4h_3^3e + 5h_4^3e^2 \right] f^2 \sin 2\lambda + \right. \\
 &\quad \left. + (4g_3^3 + 5g_4^3e)f^3 \cos 3\lambda + (4h_3^3 + 5h_4^3e)f^3 \sin 3\lambda + \right. \\
 &\quad \left. + 5g_4^4f^4 \cos 4\lambda + 5h_4^4f^4 \sin 4\lambda \right]
 \end{aligned}$$

Напишем эти формулы короче:

$$\begin{aligned} X &= A_0 + A_1 \cos \lambda + B_1 \sin \lambda + A_2 \cos 2\lambda + B_2 \sin 2\lambda + \\ &\quad + A_3 \cos 3\lambda + B_3 \sin 3\lambda + A_4 \cos 4\lambda + B_4 \sin 4\lambda \\ Y &= C_1 \cos \lambda + D_1 \sin \lambda + C_2 \cos 2\lambda + D_2 \sin 2\lambda + \\ &\quad + C_3 \cos 3\lambda + D_3 \sin 3\lambda + C_4 \cos 4\lambda + D_4 \sin 4\lambda \\ Z &= E_0 + E_1 \cos \lambda + F_1 \sin \lambda + E_2 \cos 2\lambda + F_2 \sin 2\lambda + \\ &\quad + E_3 \cos 3\lambda + F_3 \sin 3\lambda + E_4 \cos 4\lambda + F_4 \sin 4\lambda \end{aligned}$$

Само собою очевидны выражения коэффициентов  $A_0, A_1, \dots, F_4$  через  $g_1^0, \dots, h_4^4$ ; понятно вместе с тем, что если сначала вычислить коэффициенты  $A_0, A_1, \dots, F_4$ , то после того постоянные  $g_1^0, g_1^1, \dots, h_4^4$  вычисляются при помощи решения системы уравнений, заключающих не более 4 неизвестных.

Выражения  $X, Y, Z$ , очевидно, совершенно подобны тем, которыми представляется разложение девиации в ряд по синусам и косинусам кратных курса, поэтому для вычисления  $A_0, A_1, \dots, F_4$  применяют совершенно подобный прием и те же самые схемы.

Возьмем для примера слагающую  $X$ . За основание вычисления принимают магнитную карту, с которой можно снять для любого пункта значения элементов. Эти пункты выбирают следующим образом. Берем систему, напр., 18 равноотстоящих параллелей, т. е. через  $10^\circ$ , и систему 36 равноотстоящих меридианов, т. е. тоже через  $10^\circ$ , чтобы иметь полное подобие с вычислением коэффициентов девиации. Для каждой параллели снимаем с карты значения склонения и горизонтальной составляющей  $H$  и вычисляем соответствующие значения  $X$ , которые обозначим соответственно:  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_{35}$ .

Подставляя эти значения в первое из уравнений, получим систему 36 уравнений с неизвестными  $A_0, A_1, \dots, F_4$ . Решение этих уравнений по способу наименьших квадратов дает вместе с тем и простейший способ непосредственного получения неизвестных, а именно: чтобы найти величину  $A_0$ , стоит только все уравнение сложить, тогда все неизвестные, кроме  $A_0$ , исключатся, ибо суммы синусов и косинусов равноотстоящих дуг для всей окружности равны нулю. Таким образом, будет:

$$36 A_0 = \sum X$$

Чтобы получить  $A_1$ , множим каждое уравнение на коэффициент при  $A_1$  в том уравнении, т. е. последовательно на  $\cos 0^\circ, \cos 10^\circ, \cos 20^\circ, \dots$  и все уравнения складываем. Тогда получится:

$$A_1 \sum \cos^2 \lambda = \sum X \cos \lambda$$

все же остальные неизвестные пропадут, но сумма:

$$\sum \cos^2 \lambda = \sum \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\lambda \right) = 18$$

и получится:

$$A_1 = \frac{1}{18} \sum X \cos \lambda$$

Совершенно так же будет:

$$B_1 = \frac{1}{18} \sum X \sin \lambda$$

Затем

$$A_2 = \frac{1}{18} \sum X \cos 2\lambda$$

$$B_2 = \frac{1}{18} \sum X \sin 2\lambda$$

и т. д.

В руководствах по девиации компасов помещается таблица произведений чисел на синусы углов, которые для сокращения обозначают так:

$$S_0 = 0 = \sin 0^\circ; \quad S_1 = \sin 10^\circ; \quad S_2 = \sin 20^\circ, \dots, \quad S_9 = \sin 90^\circ = 1$$

и тогда вышеприведенное начисление располагается по тем схемам, которые можно найти в руководствах по девиации компасов.

Такое вычисление проделываем для каждой из выбранных параллелей.

Совершенно так же поступим относительно  $Y$  и  $Z$ .

Величины  $A_0^i$ ,  $E_0^i$  ( $i$  — номер параллели) заключают неизвестные:  $g_1^0$ ,  $g_2^0$ ,  $g_3^0$ ,  $g_4^0$  и, значит, дадут уравнения такого вида:

$$A_0^i = \left( g_1^0 - \frac{3}{5} g_3^0 \right) + 2 \left( g_2^0 - \frac{6}{7} g_4^0 \right) e + 3g_3^0 e^2 + 4g_4^0 e^3 \\ (i = 1, 2, 3, \dots, 17)$$

Величины  $E_0^i$  дадут уравнения аналогичного вида с теми же неизвестными; таким образом получится 34 уравнения с 4 неизвестными. Эти уравнения решим по способу наименьших квадратов и получим величины  $g_1^0$ ,  $g_2^0$ ,  $g_3^0$ ,  $g_4^0$ .

Неизвестные  $g_1^1$ ,  $g_2^1$ ,  $g_3^1$ ,  $g_4^1$  входят в коэффициенты  $A_1^i$ ,  $D_1^i$ ,  $E_1^i$  и, следовательно, для них получим систему 51 уравнения и т. д.

Таким образом будут найдены и все «гауссовы постоянные» для данной эпохи, к которой относится карта. Как видно, вычисления не представляют иных трудностей кроме их длинноты. Можно прибегнуть к разного рода приемам для упрощения их, но мы на этом останавливаться не будем, так как мы главным образом имели в виду показать возможность выполнения такого вычисления, не прибегая к решению системы 24 уравнений с 24 неизвестными, и показали, как эта система приводится к другим простейшим, содержащим лишь по 4 неизвестных.

Вот значения, найденные Гауссом:

$g_1^0 = + 925.782$	$g_2^2 = + 0.493$
$g_2^0 = - 22.059$	$g_3^2 = - 73.193$
$g_3^0 = - 18.868$	$g_4^2 = - 45.791$
$g_4^0 = - 108.855$	$h_2^3 = - 39.010$
$g_1^1 = + 89.024$	$h_3^3 = - 22.766$
$g_2^1 = - 144.913$	$h_4^3 = + 42.573$
$g_3^1 = + 122.936$	$g_3^3 = + 1.396$
$g_4^1 = - 152.589$	$g_4^3 = + 19.794$
$h_1^1 = - 178.744$	$h_3^3 = - 18.750$
$h_2^1 = - 6.030$	$h_4^3 = - 0.178$
$h_3^1 = + 47.794$	$g_4^4 = + 4.127$
$h_4^1 = + 64.112$	$h_4^4 = + 3.175$

Для этих вычислений ему служила изданная английским адмиралтейством карта, составленная Сабином. На этой карте полное напряжение для Лондона показано 1.372, и все напряжения выражены в таких единицах. Гаусс умножил их на 1000, т. е. взял такую единицу, при которой напряжение в Лондоне равно 1372. Для перевода в абсолютные единицы Гаусса (миллиметр, миллиграмм, секунда) он дает такое сравнение: в Гётtingене 19 июля 1834 г. горизонтальная слагающая была им определена в его единицах равной 1.7748 и наклонение— $68^\circ.01$ , так что полное напряжение составило 4.7414; в единицах же английских оно равно 1357. Следовательно, переводный множитель есть  $\frac{4.7414}{1357} = 0.0034941$ .

Чтобы напряжение, выраженное в гауссовых единицах, перевести в CGS, надо его умножить на 0.1; следовательно, чтобы перевести гауссовые постоянные в единицы CGS, надо их умножить на 0.00034941.

**§ 39.** В § 37 было показано, что проекции магнитного момента Земли на оси координат выражаются формулами:

$$\mathfrak{M}_x = -g_1^1 R^3; \quad \mathfrak{M}_y = h_1^1 R^3; \quad \mathfrak{M}_z = -g_1^0 R^3$$

По вышеприведенной таблице

$$g_1^1 = 89.024; \quad h_1^1 = -178.744; \quad g_1^0 = 925.782$$

Следовательно, магнитный момент Земли:

$$\mathfrak{M} = R^3 \sqrt{(89.024)^2 + (178.744)^2 + (925.782)^2} = 947.08 R^3$$

Для приведения этого числа в единицы CGS его надо умножить на 0.00034941, и получится:

$$\mathfrak{M} = 0.33092 R^3$$

причем радиус Земли надо выразить в сантиметрах

$$R = \frac{40\,000\,000 \cdot 100}{2\pi}$$

и по подстановке будет:

$$\lg \mathfrak{M} = 25.93136,$$

т. е.

$$\mathfrak{M} = 8.538 \cdot 10^{25} \text{ CGS}$$

Гаусс поясняет это число следующим образом:

Магнитный момент хорошего однофунтового магнита, с которым он работал, оказался равным 100 877 000 гауссовых единиц, т. е. 10887.7 CGS. Значит, надо бы взять приблизительно  $8.5 \cdot 10^{21}$  таких магнитов, чтобы составить магнитный момент Земли, а так как объем Земли составляет в круглых числах  $1.1 \cdot 10^{21} \text{ м}^3$ , то в среднем приходилось бы по 8 таких магнитов на каждый кубический метр объема Земли.

**§ 40.** На основании приведенных выше значений постоянных и по подстановке их в общие формулы Гауссом получены следующие выражения магнитного потенциала Земли  $V$  и слагающих  $X, Y, Z$  напряжения:

$$\begin{aligned} \frac{V}{R} = & -1.977 + 937.103e + 71.245e^2 - 18.868e^3 - 108.855e^4 + \\ & + [64.437 - 79.518e + 122.936e^2 + 152.589e^3] f \cos \lambda + \\ & + [-188.303 - 33.507e + 47.794e^2 + 64.112e^3] f \sin \lambda + \\ & + [7.035 - 73.193e - 45.791e^2] f^2 \cos 2\lambda + \\ & + [-45.092 - 22.766e - 42.573e^2] f^2 \sin 2\lambda + \\ & + [1.396 + 19.744e] f^3 \cos 3\lambda + \\ & + [-18.750 - 0.178e] f^3 \sin 3\lambda + \\ & + 4.127 f^4 \cos 4\lambda + \\ & + 3.175 f^4 \sin 4\lambda \\ X = & (937.103 + 142.490e - 56.603e^2 - 435.420e^3) f + \\ & + [-79.518 + 181.435e - 298.732e^2 - 368.808e^3 + 610.357e^4] \cos \lambda + \\ & + [-33.507 + 283.892e + 259.349e^2 - 143.383e^3 - 256.448e^4] \sin \lambda + \\ & + [-73.193 - 105.652e + 219.579e^2 + 183.164e^3] f \cos 2\lambda + \\ & + [-22.766 + 175.330e + 68.098e^2 - 170.292e^3] f \sin 2\lambda + \\ & + [19.744 - 4.188e - 79.096e^2] f^2 \cos 3\lambda + \\ & + [-0.178 + 56.250e + 0.716e^2] f^2 \sin 3\lambda - \\ & - 16.508ef^3 \cos 4\lambda - \\ & - 12.701ef^3 \sin 4\lambda \end{aligned}$$

$$Y = [188.303 + 33.507e - 47.794e^2 - 64.112e^3] \cos \lambda + \\ + [64.437 - 79.518e + 122.936e^2 + 152.589e^3] \sin \lambda + \\ + [90.184 + 45.532e - 85.146e^2] f \cos 2\lambda + \\ + [14.070 - 146.386e - 91.582e^2] f \sin 2\lambda + \\ + [56.250 + 0.534e] f^2 \cos 3\lambda + \\ + [4.188 + 59.322e] f^2 \sin 3\lambda - \\ - 12.701f^3 \cos 4\lambda + \\ + 16.508f^3 \sin 4\lambda$$
$$Z = -24.593 + 1896.847e + 400.343e^2 - 75.471e^3 - 544.275e^4 + \\ + [79.700 - 107.763e + 491.744e^2 - 762.946e^3] f \cos \lambda + \\ + [-395.724 - 155.473e + 191.176e^2 + 320.560e^3] f \sin \lambda + \\ + [34.187 - 292.772e - 228.955e^2] f^2 \cos 2\lambda + \\ + [-147.439 - 91.064e + 212.865e^2] f^2 \sin 2\lambda + \\ + [5.584 + 98.870e] f^3 \cos 3\lambda + \\ + [-75.000 - 0.890e] f^3 \sin 3\lambda + \\ + 20.635f^4 \cos 4\lambda + \\ + 15.876f^4 \sin 4\lambda$$

В этих формулах, как уже не раз упоминалось,

$$e = \cos u, \quad f = \sin u$$

где  $u$  есть полярное расстояние, считаемое от северного полюса,  $\lambda$  — долгота, считаемая к востоку от Гринича,  $X$  — слагающая напряжения по географическому меридиану, считаемая положительной по направлению к северу,  $Y$  — слагающая напряжения, перпендикулярная меридиану, считаемая положительной по направлению к западу, и  $Z$  — вертикальная слагающая, считаемая положительной, когда она направлена вниз.

Все эти величины выражены в таких единицах, что для перевода в CGS надо полученные числа умножить на 0.00034941.

Для облегчения вычислений по вышеприведенным формулам составляются таблицы значений множителей, зависящих от широты места. На основании этих вычислений Гаусс составил магнитные карты, относящиеся к 1830 г., причем, как уже было упомянуто, вычисленные на основании теории элементы отличались лишь весьма мало от непосредственно наблюденных. Наибольшая разность из 91 пункта в склонении составляла  $5^{\circ}45'$  для Якутска и  $5^{\circ}15'$  для Гобартстоуна, причем наблюдения в этих пунктах были устарелые, в огромном же большинстве остальных эта разность не превышала  $1^{\circ}$ .

После Гаусса подобные расчеты, несмотря на громадную затрату труда, производились не раз по более полным и подробным наблюдениям, служащим основанием современных магнитных карт, которыми общий характер распределения земного магнетизма представляется настолько точно, что отклонение в склонении или наклонении на  $1-2^{\circ}$  и в напряжении на

0.005 следует уже приписывать каким-либо местным причинам и относить к так называемым магнитным аномалиям, примеры которых будут описаны ниже. В указанном выше сочинении Адамса даны величины «гауссовых постоянных», выраженные в единицах CGS и приведенные к эпохам 1845 и 1880-х годов, причем разложение продолжено до членов 6-го порядка, так что постоянных 48.

Эти постоянные были также перевычислены бывшим директором обсерватории в Пекине Г. А. Фритче (см. H. Fritsche. Die Elemente des Erdmagnetismus für die Epochen: 1600, 1650, 1700, 1780, 1842, 1885, и продолжения этого труда).

Заметим еще, что на английских картах напряжение дается иногда в «британских» единицах, где за единицу длины принят фут = 30.4947 см, гран = 0.06479895 г — переводный множитель для перевода британских единиц в CGS:

$$k = \sqrt{\frac{0.06479895}{30.4947}} = 0.046108$$

**§ 41.** Магнитные карты представляют, как уже упоминалось, элементы земного магнетизма при помощи систем изолиний, т. е. линий, соединяющих пункты с одним и тем же значением рассматриваемого элемента.

Наиболее простую систему, как можно видеть по прилагаемым картам, представляют линии равного наклонения.

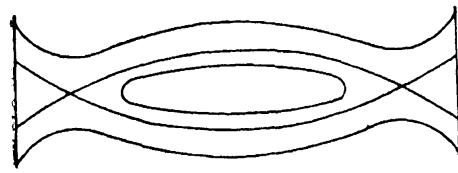
Линия, проходящая через точки, в которых наклонение равно нулю, называется магнитным экватором. Эта кривая пересекает земной экватор в двух точках, из коих одна лежит в западной долготе от Гринича около  $20^\circ$ , другая — в западной долготе около  $175^\circ$ ; на всем этом протяжении магнитный экватор расположен к югу от земного, уклоняясь от него на материке Южной Америки приблизительно на  $15^\circ$ . На остальном протяжении, проходящем через Африку, Индийский океан и часть Тихого океана, магнитный экватор расположен в северном полушарии, уклоняясь от земного приблизительно на  $10^\circ$  к северу на материке Африки и в общем будучи близким к дуге большого круга.

Во всей области, расположенной к северу от магнитного экватора, наклонение *положительное* (северный конец стрелки инклиноватера направлен вниз); в области к югу от экватора наклонение *отрицательное* (северный конец стрелки направлен вверх). Все линии равных наклонений представляют системы кривых, не пересекающихся между собою и окружающих, подобно параллелям, *магнитные полюсы Земли*, т. е. те две точки, где наклонение равно  $90^\circ$  (стрелка становится вертикально).

Северный магнитный полюс имеет координаты: широта  $70^\circ$  и долгота  $263^\circ$  к востоку от Гринича ( $97^\circ$  западной), т. е. лежит вблизи полуострова Ботсвания в полярной области Северной Америки. Южный магнитный полюс находится в южной широте  $73^\circ.5$  и восточной долготе  $147^\circ$  — в южной части Тихого океана, в недоступной из-за вечных льдов его области.

Аналогичную с системою линий равного наклонения систему представляют линии равного вертикального напряжения. Само собою понятно, что на магнитном экваторе эта слагающая напряжения равна нулю. Таким образом, эта линия разделяет поверхность Земли на две части, в северной из которых вертикальная слагающая напряжения земного магнетизма направлена вниз, а в южной — вверх. Наибольшее ее значение — около 0.65 CGS близ Гудзонова залива.

Линии равной величины горизонтальной слагающей представляют более сложный характер, так что их нельзя подразделить на две системы, а сами собою намечаются три системы этих линий: линии равной горизонтальной слагающей 0.30 CGS пересекаются между собою в точке  $\phi = 10^\circ N$  и  $\lambda = 30^\circ W$  и ограничивают экваториальную область земной поверхности (фиг. 27), причем эта область простирается в северном полушарии до широты около  $35^\circ$ , в южном — до широты около  $25^\circ$ . Внутри этой области линии



Фиг. 27.

равной горизонтальной слагающей представляют кривые, напоминающие сферические эллипсы, постепенно становящиеся все меньших и меньших размеров и окружающие точку наибольшего значения напряжения около 0.40 CGS близ Сингапура.

К северу от линии 0.30 расположена система изодинамических линий северного полушария, окружающих магнитный полюс, где горизонтальная слагающая равна нулю, причем эти линии между собою не пересекаются и параметры их убывают от 0.30 до 0.

Подобная система расположена и в южном полушарии вокруг южного магнитного полюса.

Наиболее сложную систему представляют линии равного склонения (изогоны).

Одна из линий нулевого склонения идет почти по локсадромии (на меркаторской карте прямая) от северного магнитного полюса через материк Северной и Южной Америки к острову Южн. Георгии (S. Georgia)  $\phi = 55^\circ S$ ;  $\lambda = 35^\circ W$ ; другая линия идет почти по локсадромии от Норд-капа через Ленинград, Севастополь к мысу Гвардафуи, затем по параллели  $10^\circ$  до Никобарских островов, от которых — опять по локсадромии, вдоль берега Суматры, через Западную Австралию к южному магнитному полюсу ( $\phi = 73^\circ.5 S$ ,  $\lambda = 147^\circ O$ ).

Между этими двумя линиями расположена область, заключающая океаны Атлантический, Индийский и часть Тихого. Во всей этой области склонение *западное*, причем на меркаторской карте изогоны напоминают системы гипербол, имеющих своими асимптотами линии склонения  $20^\circ$ , которые, пересекаясь между собою близ островов Зеленого Мыса, разграничивают те две области, где вещественная ось гипербол направлена приблизительно по меридиану (внутри острого угла между *асимптотическими* линиями в Атлантическом океане), от тех двух областей (внутри

тупого угла между асимптотами), где вещественная ось гипербол ближе к параллели.

В остальной части земной поверхности, занимающей большую часть Европейской России, почти всю Азию, весь Тихий океан и большую часть материка Северной и Южной Америки, склонение *восточное*, за исключением небольшой области, ограниченной овальной линией нулевого склонения, проходящей через Маниллу, Кантон, Иркутск, устье Лены, Петровавловск, Бонинские острова: внутри этой линии склонение западное.

Необходимо еще заметить, что все линии равного склонения проходят через оба магнитных и оба географических полюса: через первые—потому что вблизи полюса, с какой бы стороны к нему ни подходить, магнитная стрелка направляется на него; через вторые—ибо в них сходятся все меридианы и склонению можно приписать любую величину, смотря по тому, по какому меридиану к географическому полюсу подходить, хотя направление магнитной стрелки и вполне определенное.

**§ 42.** Многолетние наблюдения показывают, что магнитные элементы в данном месте не остаются постоянными, а подвержены медленным изменениям, называемым вековыми. Эти изменения могли быть прослежены в течение почти четырех столетий для склонения в Париже, Лондоне и Христиании и охватывают период приблизительно в 450 лет. Так, напр., в Париже склонение представляется формулой:

$$\delta = 6^\circ.4 + 15^\circ.9 \sin 2\pi \frac{t - 1695}{467}$$

где  $t$  есть число лет, протекших после начала нашей эры, причем западное склонение имеет знак +.

Для Христиании имеет место формула:

$$\delta = 5^\circ.99 - 13^\circ.53 \sin 2\pi \frac{t - 1502.2}{420} - 0^\circ.53 \sin 2\pi \frac{t - 1517.2}{82}$$

Вообще же говоря, для большей части пунктов наблюдения не охватывают достаточно продолжительного срока, чтобы можно было выделить период и представить изменяемость аналитически с достаточным приближением, поэтому довольствуются указанием «годового изменения», которым можно пользоваться на небольшое число лет, протекшее с той эпохи, к которой относится карта.

Таким образом приходится поступать и для двух остальных элементов.

Кроме вековых изменений, элементы подвержены еще изменениям суточным, но амплитуда этих изменений в склонении не превышает в умеренных широтах  $10'$ , в наклонении  $3' \dots 5'$  и в напряжении 0.0003 CGS, не обладая при этом настолько правильным ходом, чтобы о них можно было судить непосредственно по средним выводам, помимо наблюдений в магнитных обсерваториях. Такие наблюдения

дают не только суточные изменения с более или менее правильным ходом, но зачастую обнаруживают гораздо более значительные отклонения, наступающие внезапно и не подчиненные никакой закономерности. При наблюдениях в первых же обсерваториях, созданных в 1840-х годах по почину Гаусса и учрежденного им Магнитного союза, обнаружилось, что эти неправильные изменения, или возмущения, названные *магнитными бурями*, представляют явление всемирное и наблюдаются одновременно в обсерваториях, даже и удаленных друг от друга.

В дальнейшем развитие обсерваторий и применение в них самопищущих приборов с записью на светочувствительной бумаге хода явлений вполне подтвердило этот вывод; исследования же Биркеланда и Штермера выяснили также причину его и связь с северными сияниями и солнечными пятнами.

Солнце (в особенности солнечные пятна) испускает потоки катодных лучей, состоящие из частиц отрицательного электричества. Эти частицы при некоторых условиях, двигаясь в магнитном поле Земли, попадают в верхние разреженные слои ее атмосферы, где, вызывая свечение, и производят явление северного сияния, влияя вместе с тем, подобно гальваническому току, и на магнитную стрелку. Исследования Штермера показали, что такие потоки могут достигать Земли лишь в области близ Северного полярного круга.

Анализ наблюдений, произведенных в специальных полярных обсерваториях и главных обсерваториях всего мира, привел Биркеланда к заключению, что напряженность возмущений в полярных странах следует за движением Солнца и достигает наибольшей величины около 6 час. вечера по местному времени и около полуночи, причем эти значения обратны по знаку. Около 9—10 час. утра по местному времени наступает, так сказать, магнитное затишье. В наших широтах амплитуды колебаний склонения могут при магнитных бурях достигать  $1.^{\circ}5$  на сторону, но такие бури весьма редки, колебания же в  $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{2}^{\circ}$  происходят по нескольку раз в месяц. С этим обстоятельством надо считаться при обработке данных магнитных наблюдений и принимать во внимание записи ближайшей магнитной обсерватории, отбрасывая те наблюдения, которые приходятся на моменты значительных возмущений.

У нас имеется первоклассная магнитная обсерватория в Павловске, оборудованная самыми совершенными приборами, в Свердловске, Иркутске и Тбилиси (Карсани). Предполагалось еще устроить обсерваторию во Владивостоке, но это было отложено из-за войны 1914—1918 годов.

**§ 43.** Вековые и суточные изменения и магнитные бури протекают во времени, представляя или закономерный, или случайный ход изменяемости магнитных элементов для данного места или для всей земной поверхности. Но кроме этих изменений имеются еще неправильности или неравенства в распределении магнетизма, так что в какой-нибудь сравнительно небольшой области значения элементов отличаются гораздо больше от их значений

в соседних местах, нежели это можно было бы ожидать сообразно разности географического положения этих мест и изменяемости элементов с местом, даваемым магнитной картой. Вместе с тем для таких областей самые значения элементов значительно разнятся от показанных на общих генеральных магнитных картах, представляющих общий характер распределения магнетизма. Отступления в значениях элементов в таких особенных местностях от значений, даваемых генеральной картой, называются *магнитными аномалиями*. Можно указать как пример на аномалию в Финском заливе близ Юссар-э, где склонение достигает величины  $180^\circ$ , тогда как в расстоянии около 10 миль оно имеет нормальную величину около  $2^\circ W$ . Замечательна также Курская магнитная аномалия, где склонение также достигает местами  $180^\circ$ , тогда как нормальная величина около  $0^\circ$ . Подобная аномалия имеет место и в Кривом Роге. Но есть ряд и менее сильных аномалий, например, близ Одессы около  $6^\circ - 7^\circ$  в склонении. Вообще можно считать *аномалией* всякое уклонение, превышающее  $1^\circ$ , в значениях элементов по сравнению с картой и распространенное на область, настолько незначительную, что проведенные в этой местности по действительному значению элементов изолинии имели бы на общем их плавном ходе местные искривления. Понятно, что такое определение аномалии не может считаться строгим, но здесь поневоле приходится руководствоваться как бы глазомером, подобно тому как при вычерчивании обводов корабля или вообще системы согласных кривых глазомером устанавливается, какие точки «не ложатся на кривую», хотя геометрически это выражение и не имеет смысла.

Аномалии подвергаются обыкновенно специальному исследованию, и для них составляются частные магнитные карты или планы, на которые обыкновенно наносят системы изолиний, представляющие не самые значения элементов, а их уклонения от нормальных, снятых с генеральной магнитной карты или рассчитанных для данной местности по данным этой карты.

Некоторые учёные значительно расширили понятие о магнитной аномалии, считая нормальным значением слагающих  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  напряжения магнетизма их средние значения для каждой параллели. Это равносильно удержанию в гауссовом разложении в значениях  $X$  и  $Z$  лишь членов, не зависящих от долготы, нормальная же величина  $Y$  должна бы быть нуль. Другие удерживают в гауссовом разложении члены  $g_1^0$ ,  $g_1^1$ ,  $h_1^1$ , что соответствует замене Земли бесконечно малым магнитом, но для практических целей наиболее удобно приведенное выше понятие.

**§ 44.** Во многих случаях приходится составлять магнитную карту для сравнительно небольшой части земной поверхности, напр. протяжением около  $10^\circ$  по широте и  $10 - 15^\circ$  по долготе или меньше. В таком случае прибегают к одному из следующих двух способов. Первый способ — чисто графический: пользуясь нанесенными на карту пунктами наблюдений и соответствующими им значениями элементов, интерполируют промежуточные значения, соответствующие «круглым»

цифрам, наносят их на карту и проводят по ним систему изолиний, сглаживая их извилины на глаз. Понятно, что такой способ может дать удовлетворительный результат лишь у лица, обладающего большим навыком и опытом в подобного рода работах.

Другой способ — это разложение значений или самих элементов или слагающих  $X, Y, Z$  напряжения, служащих для их вычисления, в ряд, расположенный по степеням разностей  $\lambda - \lambda_0$  и  $\varphi - \varphi_0$ , где  $\lambda_0$  и  $\varphi_0$  — долгота и широта центрального пункта на карте.  $\lambda$  и  $\varphi$  — координаты какой-либо ее точки, причем в этом ряду удерживают лишь первые члены, т. е. полагают, напр.,

$$X = A_0 + A'_1(\lambda - \lambda_0) + A^0(\varphi - \varphi_0) + A''_2(\lambda - \lambda_0)^2 + \\ + A'_1(\lambda - \lambda_0)(\varphi - \varphi_0) + A''_2(\varphi - \varphi_0)^2$$

и вычисляют коэффициенты ряда по способу наименьших квадратов на основании данных, предоставленных наблюдениями.

Понятно, что можно бы итти и далее в этом разложении, но если, напр., взять еще члены 3-го порядка, то к предыдущим их прибавится четыре, и вычисление станет значительно сложнее. Это вычисление может быть прощеено, если значения  $X$  соответствуют равноотстоящим промежуткам  $\lambda - \lambda_0$  и  $\varphi - \varphi_0$ , но чтобы такие значения иметь, необходимо сперва прибегнуть к первому способу, т. е. вычертить приближенную систему изолиний и затем с нее снять требуемые значения  $X$ , которые и подвергнуть дальнейшей обработке.

Упрощение в вычислении, достигаемое таким путем, состоит в следующем. Обозначим для сокращения письма  $\lambda - \lambda_0$  через  $x$  и  $\varphi - \varphi_0$  — через  $y$ ; промежуток, через который идут значения  $x$ , — через  $h$ , промежуток значений  $y$  — через  $l$ . Тогда, избрав какое-либо значение  $y$ , мы видим, что ряд последовательных значений  $x$  для точек, лежащих «вправо» от среднего меридиана ( $\lambda = \lambda_0$ ), будет:  $0, h, 2h, 3h, \dots nh$ , поэтому, если итти до членов 3-го порядка, уравнение будет:

$$X = A_0 + A'_1x + A^0y + A''_2x^2 + A'_1xy + A^0y^2 + A''_2x^3 + \\ + A''_2x^2y + A'_1xy^2 + A''_2y^3 = (A_0 + A'_1y + A^0y^2 + A''_2y^3) + \\ + (A'_1 + A^0y + A''_2y^2)x + (A''_2 + A'_1y)x^2 + A''_2x^3$$

Полагая

$$A_0 + A^0y + A''_2y^2 + A''_2y^3 = B_0 \\ A'_1 + A^0y + A''_2y^2 = B_1 \\ A'_1 + A''_2y = B_2 \\ A''_2 = B_3,$$

мы напишем предыдущее уравнение так:

$$X = B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3$$

и, значит, будем иметь ряд уравнений:

$$\begin{aligned} X_0 &= B_0 \\ X_1 &= B_0 + B_1 h + B_2 h^2 + B_3 h^3 \\ X_2 &= B_0 + B_1 (2h) + B_2 (2h)^2 + B_3 (2h)^3 \\ X_3 &= B_0 + B_1 (3h) + B_2 (3h)^2 + B_3 (3h)^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

или, приняв за новые неизвестные величины

$$a_0 = B_0; \quad a_1 = B_1 h; \quad a_2 = B_2 h^2; \quad a_3 = B_3 h^3$$

мы получаем систему:

$$\begin{aligned} X_0 &= a_0 \\ X_1 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ X_2 &= a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 \\ X_3 &= a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + a_3 \cdot 3^3 \\ X_4 &= a_0 + a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 4^2 + a_3 \cdot 4^3 \end{aligned}$$

Вычитаем теперь первое уравнение из второго, второе из третьего и т. д.; короче говоря, составим «первые разности» наших уравнений. Получим:

$$\begin{aligned} X_1 - X_0 &= \Delta X_0 = a_1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 \\ X_2 - X_1 &= \Delta X_1 = a_1 + a_2 \cdot 3 + a_3 \cdot 7 \\ X_3 - X_2 &= \Delta X_2 = a_1 + a_2 \cdot 5 + a_3 \cdot 19 \\ X_4 - X_3 &= \Delta X_3 = a_1 + a_2 \cdot 7 + a_3 \cdot 37 \end{aligned}$$

С этими уравнениями поступим так же. Получим:

$$\begin{aligned} \Delta X_1 - \Delta X_0 &= \Delta^2 X_0 = 2a_2 + a_3 \cdot 6 \\ \Delta X_2 - \Delta X_1 &= \Delta^2 X_1 = 2a_2 + a_3 \cdot 12 \\ \Delta X_3 - \Delta X_2 &= \Delta^2 X_2 = 2a_2 + a_3 \cdot 18 \end{aligned} \tag{*}$$

С этими уравнениями поступаем опять так же. Получим:

$$\begin{aligned} \Delta^2 X_1 - \Delta^2 X_0 &= \Delta^3 X_0 = 6a_3 \\ \Delta^2 X_2 - \Delta^2 X_1 &= \Delta^3 X_1 = 6a_3 \end{aligned}$$

Отсюда видно: если бы оказалось, что величины  $\Delta^3 X_0$ ,  $\Delta^3 X_1$ ,  $\Delta^3 X_2$  между собою равны, иными словами, разности 4-го порядка были бы равны нулю или представляли неправильный, но систематический ход, то можно было бы этими уравнениями ограничиться и, взяв за  $a_3$  среднее из значений, даваемых этими уравнениями, обратиться к уравнениям (\*), из каждого найти  $a_2$  и взять среднее и т. д.; так же

поступить для  $a_1$  и т. д.; по найденным величинам  $a_i$  найти  $a_0$ . Подобным же образом найдутся и величины  $A_i^k$ .

Как видно, нет надобности выписывать все уравнения, достаточно составить табличку величин  $X$  и их разностей (как показано ниже) и продолжать ее до таких разностей, которые с тою степенью точности, с которой вычисление производится, можно принять за постоянные, из этих разностей взять среднее и, обратившись к вышеприведенным уравнениям, найти коэффициент. Само собою понятно, что такое же вычисление надо проделать «влево» от центрального меридиана и взять среднее между полученными значениями.

$\frac{x}{h}$	$X$	$\Delta X$	$\Delta^2 X$	$\Delta^3 X$
0	$X_0$	$\Delta X_0$	$\Delta^2 X_0$	$\Delta^3 X_0$
1	$X_1$	$\Delta X_1$	$\Delta^2 X_1$	$\Delta^3 X_1$
2	$X_2$	$\Delta X_2$	$\Delta^2 X_2$	$\Delta^3 X_2$
3	$X_3$	$\Delta X_3$	$\Delta^2 X_3$	
4	$X_4$	$\Delta X_4$		
5	$X_5$			

Такой процесс составляет, так сказать, аналитическое сглаживание наблюдений и полученных результатов и представляет как бы некоторый корректив к тому произволу, который вносится чисто графическим сглаживанием, делая результат независимым от искусства или навыка производителя работы.

#### ГЛАВА IV

### Основания устройства и общее описание приборов, служащих для определения элементов земного магнетизма

**§ 45.** Для определения элементов земного магнетизма выработаны специальные приборы, соединяющие точность с удобством обращения. Мы ограничимся описанием устройства тех типов приборов, которые предназначены для магнитных съемок, т. е. приборов переносных, а не постоянных (для магнитных обсерваторий).

*Склонение* требует для своего определения сличения направления магнитной оси горизонтально подвешенного магнита с известным истинным азимутом или светила, или земного предмета.

Определение истинного азимута светила или земного предмета излагается в практической астрономии и предполагается известным, почему мы о нем подробно говорить не будем.

Мы не будем также излагать способов определения «склонения компаса», иными словами, определения магнитного склонения при помощи компаса, снабженного азимутальным кругом и диоптрами или только диоптрами, так как пользование компасом, выверка его, выверка картишки предполагаются известными из общего курса навигации.

Магнитная ось магнита не может совпадать с осью его фигуры, поэтому надо прежде всего указать, каким образом может быть определено направление магнитной оси магнита независимо от ее положения в нем.

Но прежде всего надо указать способы, применяемые для точного определения плоскости или прямой, неизменно связанной с магнитом. Для этого применяются два способа: 1) зеркальный отсчет и 2) коллимационный.

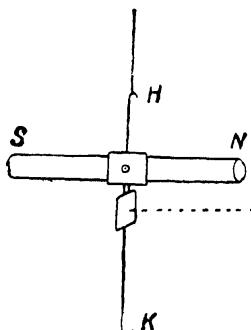
**§ 46.** Сущность зеркального способа состоит в следующем. С магнитом (фиг. 28, стр. 94), скрепляется зеркальце так, чтобы его плоскость была приблизительно перпендикулярна к оси магнита. причем магнит можно подвешивать как за верхний крючок, так и за нижний к коконовой нити, прикрепленной к крюку у верхнего конца стеклянной или медной трубки, ось которой проходит приблизительно через центр разделенного горизонтального круга, несущего трубу и аллидаду с верньером или микроскопами для отсчета направления, занимаемого этою трубой. Ось трубы устанавливается горизонтально, длина же коконовой нити должна пригоняться так, чтобы центр зеркальца был на одном уровне с осью трубы. Крест нитей в трубе освещается через боковое отверстие в выдвижной трубке окуляра.

Так как крест нитей находится в главном фокусе объектива трубы, то исходящие от него лучи по выходе из объектива становятся параллельными между собою. Если эти лучи перенять плоским зеркалом, перпендикулярным к ним, то они отразятся обратно в виде параллельного пучка и, пройдя через объектив трубы, соберутся в ее главной фокальной плоскости, где и дадут изображение креста нитей, совпадающее с ним самим, если ось трубы в точности перпендикулярна к плоскости зеркала. Если же такой точной перпендикулярности нет, то изображение получится в стороне от самого креста нитей, но как находящееся в фокальной плоскости будет ясно видимо, если только угол наклона не настолько велик, что оно уйдет из поля зрения трубы. Таким образом, стоит только поворачиванием трубы навести крест нитей на его изображение, вириное в зеркале, и оптическая ось трубы будет совпадать с нормалью к плоскости зеркала. Следовательно, произведя по кругу отсчет, получим направление этой нормали относительно нулевой линии круга.

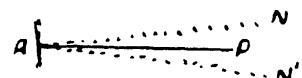
Пусть  $AN$  (фиг. 29) есть направление нормали к зеркалу,  $AP$ —горизонтальная проекция магнитной оси, когда магнит подведен на крючок  $H$ .

Если магнит повернуть и подвесить за крючок  $K$ , то линия  $AP$  сохранит свое направление, нормаль же к зеркалу примет положение  $AN'$ , причем угол  $NAN' = 2NAP$ . Наведя опять трубу, получим отсчет направления  $AH'$ . Очевидно, что полусумма этих отсчетов дает направление магнитной оси  $AP$ , полуразность—угол, составляемый направлением  $AN$  с  $AP$ .

Обыкновенно при выверке прибора в мастерской достигают того, чтобы этот угол был если не равен нулю, то достаточно мал. В некоторых же случаях снабжают оправу зеркала установочными винтами, чтобы регулировать его положение; если же установочных винтов нет, а угол настолько велик, что наблюдение затрудняется (после поворота магнита изображение креста



Фиг. 28.



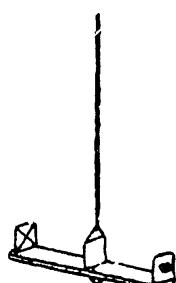
Фиг. 29.

нитей не лежит в поле зрения трубы), то можно исправить положение зеркала, слегка скручивая его оправу по отношению к магниту, само собою разумеется, с должной осторожностью.

**§ 47.** Сущность коллимационного способа становится ясной при рас-



Фиг. 30.



Фиг. 31.

смотрении схематических чертежей (фиг. 30 и 31), взимствованных из сочинения G. B. Airy. A treatise on Magnetism. К магниту прикреплены неизменно мишенька и двояковыпуклая чечевица, главный фокус которой совпадает с перекрестием нитей мишеньки, так что лучи, от него исходящие, по выходе из чечевицы образуют параллельный пучок, который принимается трубой и дает в ее главной фокальной плоскости изображение мишеньки. Стоит только навести крест нитей трубы на перекрестье нитей мишени, ясно в нее видимое, чтобы получить направление прямой, соединяющей перекрестье нитей мишени с оптическим центром чечевицы, укрепленной на магните, т. е. опять-таки направление некоторой прямой, неизменно связанной с магнитом. Перевернув магнит и подвесив его в положение «мишенью вниз», произведем вторичный отсчет положения трубы и получим направление магнитной оси.

Во многих современных приборах магнит делают в виде полой трубки, в один конец которой вправлена двояковыпуклая чечевица, в другой— плоская стеклянная пластинка с проведенными на ней чертами, заменяющими нити мишени.

Таким образом, для горизонтально подвешенного магнита как при зеркальном, так и при коллимационном способе отсчета истинное положение магнитной оси получают, взяв среднее из отсчетов, соответствующих «прямому» и «перевернутому» положению магнита. Полуразность этих отсчетов дает угол между направлением горизонтальной проекции магнитной оси и направлением нормали к зеркалу или оптической оси коллиматора.

§ 48. Для определения *наклонения* надо иметь стрелку, свободно вращающуюся около горизонтальной оси. Чтобы стрелка инклиноватра давала действительно истинную величину наклонения, необходимо соблюдение следующих условий:

1. Плоскость качания стрелки должна совпадать с магнитным меридианом, ось же стрелки должна быть перпендикулярна к этой плоскости.

2. Центр тяжести стрелки должен лежать на ее оси вращения (геометрической).

3. Чапфы, представляющие концы оси (материальной), должны быть строго цилиндричны и иметь общую геометрическую ось.

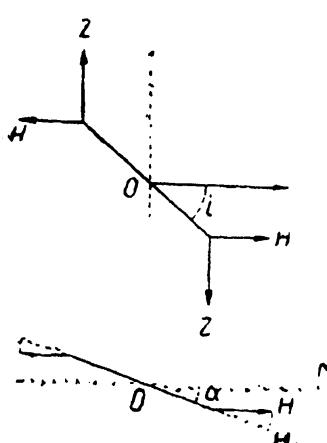
4. Магнитная ось стрелки должна совпадать с тою прямой линией, по концам которой производится отсчет угла наклонения стрелки по кругу, плоскость коего параллельна плоскости ее качаний.

Погрешности, происходящие от несоблюдения первого, второго и четвертого условий, могут быть исключены при помощи определенных приемов наблюдений. Погрешность, обусловленная несоблюдением третьего условия, наблюдателем ни исключена, ни проверена быть не может и устраняется механиком при изготовлении стрелки и оси ее.

По самому устройству инклиноватора параллельность плоскости качаний стрелки и плоскости того круга, по которому производятся отсчеты, обеспечивается с достаточною точностью. Приведение плоскости круга в вертикальное положение, а также и оси, около которой этот круг поворачивается, достигается легко при помощи уровня. Совмещение же этой плоскости с плоскостью магнитного меридиана осуществляется при помощи самой же стрелки: круг поворачивают до тех пор, пока стрелка станет вертикально, т. е. концы ее укажут отсчет  $:0^\circ$ . В этом положении ее ось находится в плоскости магнитного меридиана. Следовательно, стоит только заметить по горизонтальному кругу отсчет положения вертикального круга, придать к этому отсчету  $90^\circ$  и повернуть круг соответственно этому новому отсчету, и плоскость его будет совпадать с плоскостью магнитного меридиана.

Рассмотрим теперь влияние каждой из вышеперечисленных возможных погрешностей на получаемый результат; этим попутно выясняются и способы исключения этого влияния.

Положим прежде всего, что плоскость качания стрелки (фиг. 32) не совпадает с магнитным меридианом, а составляет с ним угол  $\alpha$ , в остальном же никаких погрешностей нет.



Фиг. 32.

В этом предположении на стрелку действуют:

- 1) вертикальная составляющая напряжения  $Z$  своею полной величиною;
- 2) проекция  $H_1 = H \cos \alpha$  горизонтальной слагающей на плоскость качания.

Эти две слагающие дают соответственно пары:

$$+ MZ \cos i \text{ и } - MH_1 \sin i.$$

Пара же, происходящая от попечной слагающей  $H_2$ , уничтожается реакцией оси вращения стрелки. Следовательно, стрелка примет такое положение равновесия, при котором будет:

$$MZ \cos i - MH_1 \sin i = 0$$

откуда, по замене  $H_1$  его величиною, имеем:

$$\cot g i = \frac{H}{Z} \cos \alpha$$

Но

$$\frac{H}{Z} = \cot g I$$

где  $I$  есть истинный угол наклонения. Таким образом,

$$\cot g I \cos \alpha = \cot g i.$$

Придадим углу  $\alpha$  значения  $\alpha = \beta$  и  $\alpha = 90^\circ + \beta$ , т. е. произведем наблюдения при двух положениях плоскости качаний или вертикального круга, взаимно перпендикулярных; тогда, заметив, что  $\cos(90^\circ + \beta) = -\sin \beta$ , получим:

$$\cot g^2 I = \cot g^2 i_1 + \cot g^2 i_2$$

где  $i_1$  есть наклонение, наблюденное при положении круга  $\beta$ , и  $i_2$  — при положении  $\beta + 90^\circ$ . Таким образом, можно получить истинное значение наклонения, и не зная положения магнитного меридiana.

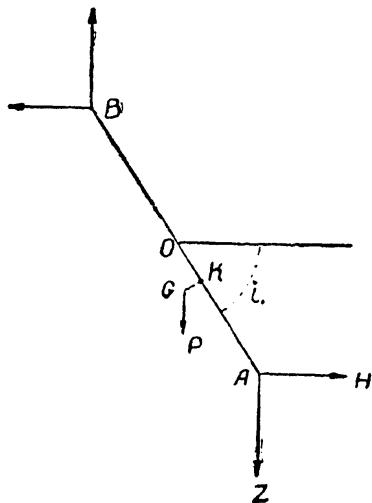
Положим теперь, что центр тяжести стрелки (фиг. 33а) не лежит на оси вращения ее  $O$ , а в какой-либо точке, определяемой абсциссою  $OK = a$  и ординатою  $KG = b$ , причем  $OA$  есть направление магнитной оси стрелки, а  $P$  — вес ее.

Для равновесия необходимо, чтобы алгебраическая сумма моментов пар  $MZ \cos i$  и  $-MH \sin i$  и момента веса  $P$  относительно оси  $O$ , т. е.  $P(a \cos i - b \sin i)$ , была равна нулю.

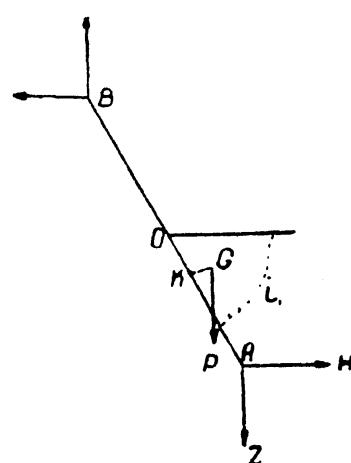
Итак, имеем:

$$(1) \quad (MZ + Pa)\cos i_1 - (MH + Pb)\sin i_1 = 0$$

Вообразим теперь, что вся система повернута около вертикальной оси на  $180^\circ$ . Это равносильно перекладыванию стрелки (фиг. 33б) так,



Фиг. 33а.



Фиг. 33б.

что цапфа, которая лежала на ближайшем к кругу подшипнике, положена на дальнейший, и наоборот. Вместо уравнения (1) будем иметь уравнение:

$$(2) \quad (MZ + Pa)\cos i_2 - (MH - Pb)\sin i_2 = 0$$

Сложив эти два уравнения, имеем:

$$(MZ + Pa)(\cos i_1 + \cos i_2) - MH(\sin i_1 + \sin i_2) + Pb(\sin i_2 - \sin i_1) = 0$$

Величина  $b$  обыкновенно весьма мала, и разность углов  $i_2 - i_1$  также весьма мала, составляя несколько минут дуги, скажем для примера  $\frac{1}{10}$ , т. е. в числовой мере  $\frac{1}{600}$ .

Из уравнений (1) и (2) следует:

$$\operatorname{tg} i_1 = \frac{MZ + Pa}{MH + Pb}$$

$$\operatorname{tg} i_2 = \frac{MZ + Pa}{MH - Pb}$$

Величины  $Pa$  и  $Pb$  весьма малы по сравнению с  $MZ$  и  $MH$ , поэтому предыдущие формулы напишем, положив  $\frac{Z}{H} = \operatorname{tg} I$ , так:

$$\operatorname{tg} i_1 = \frac{MZ}{MH} \frac{1 + \frac{Pa}{MZ}}{1 + \frac{Pb}{MH}} \approx \operatorname{tg} I \left[ 1 + \frac{Pa}{MZ} - \frac{Pb}{MH} \right]$$

$$\operatorname{tg} i_2 = \frac{Mz}{MH} \frac{1 + \frac{Pa}{Mz}}{1 - \frac{Pb}{MH}} \approx \operatorname{tg} I \left[ 1 + \frac{Pa}{Mz} + \frac{Pb}{MH} \right]$$

Откуда следует:

$$\frac{1}{2} (\operatorname{tg} i_1 + \operatorname{tg} i_2) = \left( 1 + \frac{Pa}{Mz} \right) \operatorname{tg} I$$

т. е. погрешность от положения центра тяжести вне магнитной оси стрелки исключается, но влияние продольного неправильного положения центра тяжести остается.

Чтобы исключить и это последнее, вообразим, что стрелка перемагничена, т. е. тот ее конец, который раньше был северным, сделан южным, и наоборот. Это равносильно перемене знаков  $a$  и  $b$ . Следовательно, если пронаблюдать при перемагниченной стрелке при двух противоположных положениях круга углы наклонения  $i'_1$  и  $i'_2$ , то получим равенство:

$$\frac{1}{2} [\operatorname{tg} i'_1 + \operatorname{tg} i'_2] = \left[ 1 - \frac{Pa}{M_z} \right] \operatorname{tg} I$$

Обыкновенно стрелка намагничивается до насыщения, так что  $M_1 = M$ . Тогда будет:

$$\frac{1}{4} [\operatorname{tg} i_1 + \operatorname{tg} i_2 + \operatorname{tg} i'_1 + \operatorname{tg} i'_2] = \operatorname{tg} I$$

По большей части разности между углами  $i_1, i_2, i'_1, i'_2$  настолько малы, что изменения тангенсов пропорциональны изменениям самих углов. В таком случае можно принять:

$$\frac{1}{4} [\operatorname{tg} i_1 + \operatorname{tg} i_2 + \operatorname{tg} i'_1 + \operatorname{tg} i'_2] = \operatorname{tg} \left[ \frac{i_1 + i_2 + i'_1 + i'_2}{4} \right]$$

и, следовательно,

$$I = \frac{1}{4} [i_1 + i_2 + i'_1 + i'_2]$$

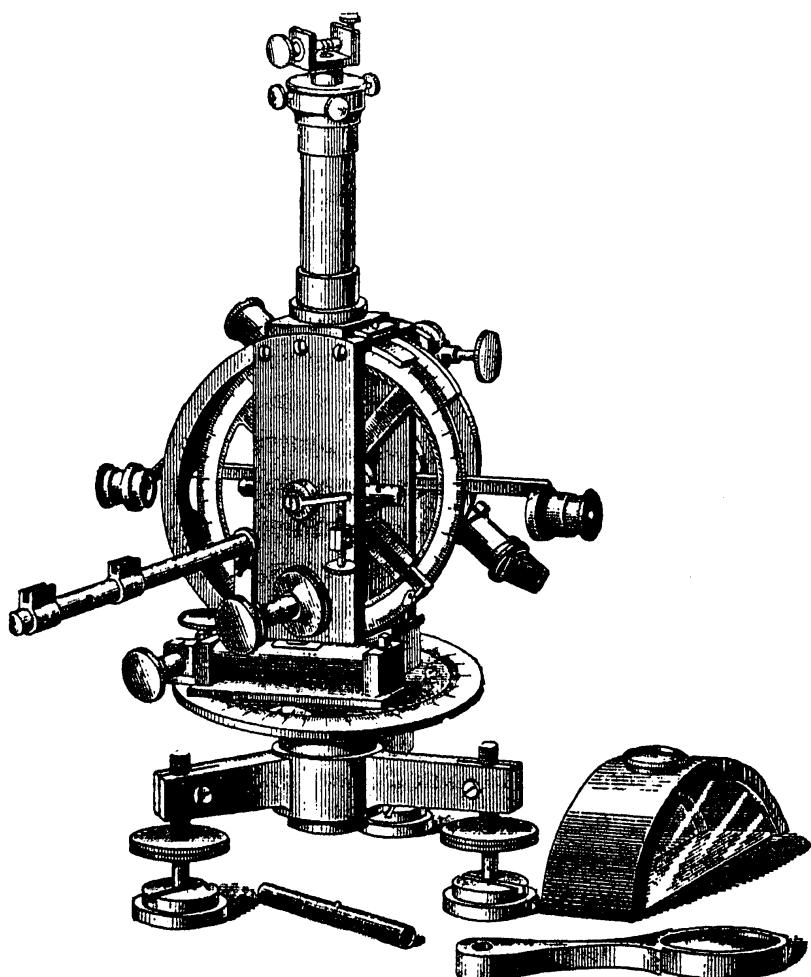
т. е. среднее арифметическое из четырех отсчетов, описанных выше, представит величину наклонения, освобожденную от погрешности, вызываемой несовпадением центра тяжести стрелки и осью ее.

Нетрудно убедиться, что среднее из этих четырех отсчетов свободно и от погрешности, вызываемой несовпадением магнитной оси с той прямой, по концам которой производится отсчет.

Заметим еще, что для исключения погрешности, происходящей от эксцентриситета оси вращения стрелки относительно делений круга, отсчитывают положение обоих концов стрелки и берут среднее.

§ 49. Из магнитных теодолитов мы дадим описание двух образцов: 1) магнитный теодолит Бруннера, употребляемый нашей Магнитной комиссией для работ по производству магнитной съемки СССР, и 2) магнитный сеодолит английского образца Магнитной обсерватории в Кью.

Теодолит Бруннера, выработанный этим парижским механиком по



Фиг. 34.

указанию проф. Маскара, отличается компактностью своих размеров и малым весом, делающим его удобным для экспедиций и работ в поле.

Общий вид этого прибора изображен на фиг. 34 в половину натуральной величины.

Существенные части прибора: 1) неизменно скрепленный со снабженным установочными винтами треножником горизонтальный круг, разделенный на  $360^\circ$  через  $20'$ ; 2) вращающийся около вертикальной оси круг, разделенный на  $20'$ . Этот круг несет с собою: а) уровень  $N$ , коим проверяется, как обыкновенно, вертикальность оси; б) астрономическую трубу  $L$  с переменным окуляром; в) цилиндрическую коробку со стеклянными крышками («домик»), внутри которой на коконовой нити, опускающейся от

воротка  $T$ , коим регулируется ее свободная длина, подвешивается магнит  $BE$ .

Труба  $L$  связана с вертикальным кругом неизменно и поворачивается вместе с ним около горизонтальной оси, причем по верньеру простою лупою отсчитывается положение круга, дающее зенитное расстояние наблюдавшего светила.

К кругу же прикреплен индекс  $I$ , который отвечает горизонтальному положению трубы и служит для определения отсчета по горизонтальному кругу, соответствующему магнитному меридиану. Это достигается следующим образом. Индекс состоит из серебряной, с острым краем площадки, перпендикулярной плоскости круга; на наружной стороне этой площадки проведены два тонких черных штриха, на внутренней — один штрих, как бы посередине между первыми двумя. К каждому концу магнита прикреплено заподлицо маленько впалое зеркальце, коего фокусное расстояние равно половине расстояния от этого зеркальца до индекса. Таким образом, зеркальце дает действительное изображение штриха внутренней поверхности площадки индекса и плоскости двух других штрихов, что и рассматривают в лупу  $D$ . Действуя микрометрическим винтом, поворачивают «домик», пока изображение внутреннего штриха станет в точности посередине двух других, и производят отсчет по горизонтальному кругу. После этого поворачивают трубу  $L$  «через зенит», подводят индекс  $I$  к концу  $B$  магнита и производят вторично отсчет по горизонтальному кругу. Повернув магнит на  $180^\circ$  в стремени, около его продольной оси вновь делают такие же два отсчета по горизонтальному кругу. Среднее из этих четырех отсчетов и дает направление магнитного меридиана.

Для определения горизонтальной составляющей сперва наблюдают период качания магнита, замечая в лупу  $M$  моменты прохождения его через среднее положение (магнитный меридиан).

Затем для наблюдения отклонений заменяют магнит  $BE$  другим, вдвое короче, по наращенным с обеих сторон медными цилиндрами с зеркальцами по концам так, чтобы полная длина и вес были такими же, как у магнита.

К «домику» перпендикулярно плоскости вертикального круга прикрепляют штангу с двумя гнездами  $R$  и, положив магнит сперва в гнездо  $R$ , напр. N-м концом к кругу, поворачивают домик, пока не будет достигнуто совпадение штрихов на индексе  $I$ . В этом положении магнит перпендикулярен отклоненной стрелке; следовательно, разность отсчетов (иначе, поворот домика) и дает угол «синусового» отклонения.

Повернув магнит S-м концом к кругу, в том же гнезде определяют такой же угол по другую сторону оси меридиана.

Затем проделывают то же для положения магнита в гнезде  $R_1$ .

После этого штангу крепят к противоположной стороне «домика» и делают такие же четыре наблюдения, затем берут среднее из отклонений, соответствующих тому же расстоянию. Расстояния эти выверяются раз

навсегда в обсерватории и даются в аттестате прибора, равно как и момент инерции магнита  $BE$  при определенной температуре.

**§ 50.** Прибор английского образца, выработанный в обсерватории в Кью, имеет только горизонтальный круг; для определения же азимута Солнца или иного светила, по которому получается ориентировка круга, служит зеркальце  $M$ , поворачиваемое около горизонтальной оси, проверяемой накладным уровнем.

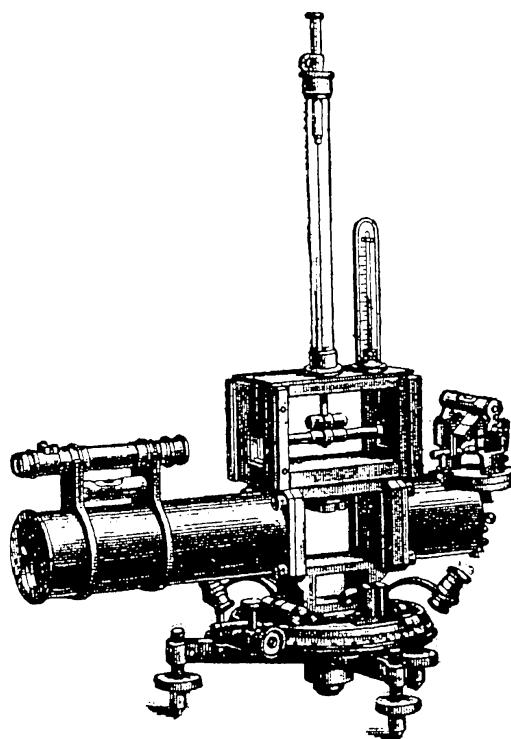
Магнит имеет форму трубы. Способ отсчета — коллимационный (фиг. 35).

Когда прибором пользуются для определения склонений, то верхняя часть «домика» снимается, вспомогательный магнит с зеркальцем подвешивается в нижней части домика, главный же (отклоняющий) магнит кладется на салазки, перемещаемые по горизонтальной разделенной штанге, перпендикулярной к оси визирной трубы.

В остальном способ определения угла «синусового» отклонения, соответствующего данному расстоянию от магнита до центра стрелки, после изложенного в предыдущем параграфе, не требует описания, ибо это наблюдение производится совершенно так же.

**§ 51.** Различных образцов инклиноваторов множество; понятно, что сущность их устройства одна и та же, разница лишь в деталях. Мы дадим для примера описание инклиноватора того же Бруннера и затем инклиноватора английского образца.

*Инклиноватор Бруннера.* Треножник с установочными винтами несет неизменно с ним скрепленный горизонтальный круг. «Домик» вращается около вертикальной оси, выверяемой уровнем  $N$ . Неизменно с домиком скреплены индекс с верньером для отсчета положения вертикального круга и агатовые ножи (без выемки у центра), на которые особым приспособлением опускаются цапфы стрелки, так что они приходятся против центра вертикального круга. Вертикальный круг поворачивается около горизонтальной оси; по одному из его диаметров укреплены впалые зеркала  $M$ , служащие для отсчета положения стрелки. Фокусное расстояние зеркал равно половине расстояния от плоскости качания стрелки до зеркала. Поэтому, когда стрелка приходится против зеркала, оно дает в плоскости качания обратное действительное изображение стрелки, равное ей. Действуя микрометрическим винтом, поворачивают вертикальный круг, пока при рассматривании в лупу не будет достигнуто полное совпадение остряя самой стрелки и ее изображения. Для этого положения произво-



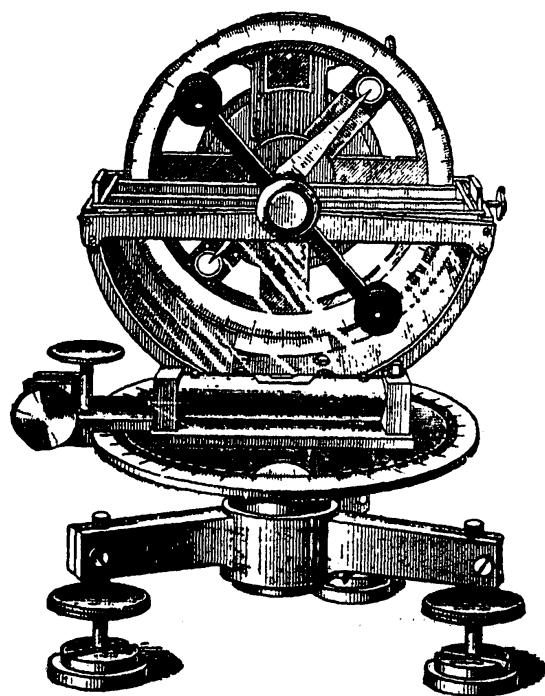
Фиг. 35.

дится отсчет, затем лупу наводят на другой конец стрелки, достигают совмещения и производят новый отсчет.

После этого перемагничивают стрелку и делают опять те же четыре наблюдения.

Иногда число этих наблюдений удваивают еще тем, что при каждом положении «домика» перекладывают стрелку на ножи так, чтобы цапфы обменялись местами.

Среднее из отсчетов и дает наклонение, при условии, что вертикальный круг был установлен в плоскости магнитного меридиана, как о том уже было сказано выше (фиг. 36).



Фиг. 36.

**§ 52.** Замечательная точность магнитных карт, издаваемых Английским адмиралтейством и основанных на неисчислимом множестве наблюдений, и морских магнитных съемок, которые производятся английскими моряками во всех частях света, заставляет обратить особое внимание на приборы, применяемые при этих работах.

Для береговых наблюдений адмиралтейским руководством рекомендуется круг *Барроу* (Barrow's circle). Для наблюдений на судне—круг *Фокса* (Fox's circle).

Круг Барроу служит для определения наклонения и напряжения. Когда он служит для определения наклонения, то его горизонтальный круг, «домик», уровень, вертикальный круг, агатовые ножи составляют принадлежность всякого инклиновата; все это имеется и в круге Барроу. Для отсчета положения стрелки служат микроскопы *l*, связанные неизменно с аллидадою, которая подводится так, чтобы верхний конец стрелки совпадал с перекрестием нитей в окуляре микроскопа, тогда по обоим верньерам отсчитывается положение аллидады, затем подводится нижний конец и опять делаются два отсчета.

Поворачивают «домик» на 180°. Опять делают подобное же наблюдение, т. е. получают еще *четыре* отсчета. Перекладывают стрелку так, чтобы цапфы обменялись местами, повторяют все наблюдения и получают еще восемь отсчетов.

Итого при нормальном намагничивании стрелки имеют 16 отсчетов.

Перемагничивают стрелку и, повторив опять всю серию, получают еще 16 отсчетов.

Арифметическое среднее из этих 32 отсчетов дает наклонение, освобожденное от погрешностей инструмента.

Адмиралтейскою инструкцие рекомендуется производить две серии из таких 32 отсчетов, и если разница средних превысит 3' или 4', то наблюдения повторить.

Круг Барроу (фиг. 37) применяется и для определения напряжения. С этой целью к нему отпускаются, кроме двух обыкновенных стрелок № 1 и № 2, служащих для наблюдения наклонения, еще две стрелки—№ 3 и № 4, которые никогда не перемагничиваются. Стрелка № 3—обыкновенная инклинерная стрелка, как № 1 и № 2. Стрелка № 4 подобна № 3, но к ней прикреплен грузик, действующий обратно магнетизму, но так, чтобы центр тяжести стрелки с грузиком лежал на ее магнитной оси, проходящей через ось цапф.

Наблюдение, производимое в магнитном меридиане, распадается на две части:

1) наблюдают видимое наклонение стрелки № 4, как уже сказано, *не перемагничивая ее*; это наблюдение дает соотношение между произведением магнитного момента стрелки на напряжение земного магнетизма и моментом грузика, который известен;

2) стрелку № 4 заменяют в «домике» стрелкою № 3 и укрепляют как отклоняющий магнит на радиусе, перпендикулярном к аллидаде. Аллидаду поворачивают до тех пор, пока стрелка № 3 не займет такого положения равновесия, что ее концы будут видны в микроскопе. Тогда, действуя микрометрическим винтом, подводят сперва один конец точно под крест нитей и делают отсчеты по верньерам, затем—другой и делают опять отсчеты.

После этого стрелку № 3 перекладывают так, чтобы папфы обменялись местами, и опять производят отсчеты.

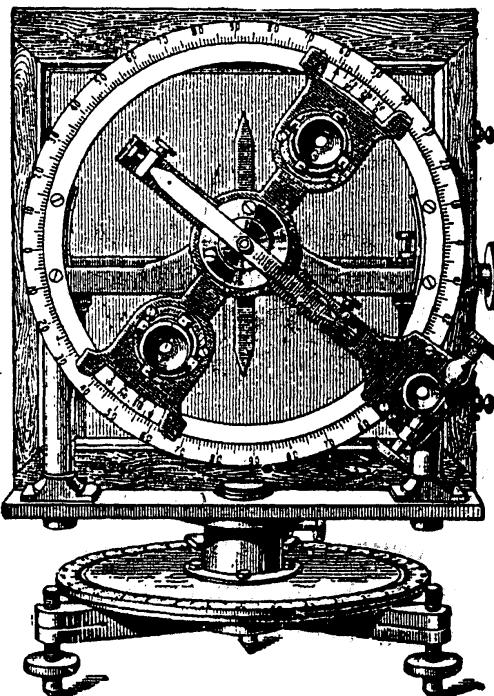
Затем стрелку № 4 перекладывают так, чтобы полюсы обменялись местами, и проделывают всю серию наблюдений, как и при первом ее положении.

Эти наблюдения «отклонения» дают соотношение между магнитным моментом стрелки № 4 и напряжением земного поля.

Таким образом, получаются два соотношения между двумя неизвестными—магнитным моментом стрелки № 4 и напряжением земного поля. Исключая первое неизвестное, находим затем второе.

Остается вывести относящиеся сюда формулы.

Пусть  $O$  есть ось вращения стрелки (фиг. 38),  $OC$ —истинное напра-

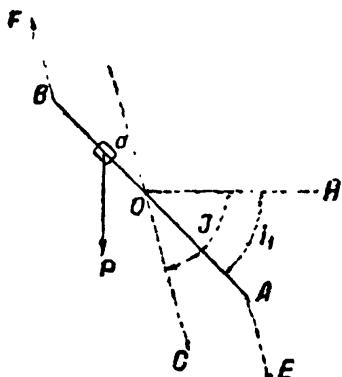


Фиг. 37.

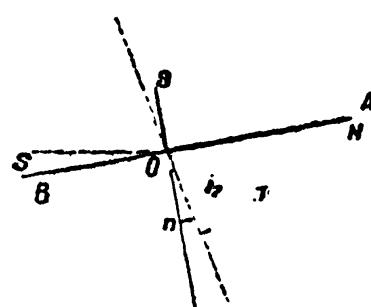
вление напряжения земного поля так, что угол  $HOC$  есть истинное наклонение, предварительно определенное инклинометром при помощи стрелки № 1 или № 2,  $AB$  — положение равновесия стрелки № 4. Очевидно, что «видимое» наклонение  $i_1$  будет меньше истинного, ибо грузик  $P$  противодействует земной магнитной силе. Обозначая через  $a$  плечо, на которое этот грузик действует, и через  $M$  — магнитный момент стрелки, имеем условие равновесия ее:

$$(1) \quad MF \sin(I - i_1) = pa \cos i_1$$

Рассмотрим теперь второе наблюдение, т. е. когда стрелка № 4 слу-



Фиг. 38.



Фиг. 39.

жит отклоняющим магнитом и наблюдается положение равновесия стрелки № 3. Очевидно, что когда стрелка № 4 (фиг. 39) будет поставлена своим северным концом к  $N$ -у стрелки № 3, то видимое наклонение  $i_2$  будет больше истинного  $I$ , и если обозначить через  $\mu$  магнитный момент стрелки № 3, через  $P$  — вес ее и через  $l$  — расстояние ее центра тяжести до оси вращения, то, так как действие на нее отклоняющей стрелки  $AB$  пропорционально произведению магнитных моментов  $M\mu$ , обозначая через  $k$  постоянный множитель, будем иметь условие равновесия:

$$(2) \quad kM\mu + Pl \cos i_2 = \mu F \sin(i_2 - I)$$

Когда стрелка  $AB$  будет повернута своим северным концом к югу, то, очевидно, «видимое» наклонение  $i_3$  будет меньше истинного, и уравнение равновесия будет:

$$(3) \quad kM\mu - Pl \cos i_3 = \mu F \sin(I - i_3)$$

ибо действие стрелки  $AB$ , сохранив свою величину, изменит знак.

Исключая  $Pl$ , имеем по сокращении на  $\mu$ :

$$kM [\cos i_3 + \cos i_2] = F [\sin(i_2 - I) \cos i_3 + \sin(I - i_3) \cos i_2]$$

Отсюда следует:

$$(4) \quad \frac{M}{F} = \frac{1}{k} \frac{\sin(i_2 - I) \cos i_3 + \sin(I - i_3) \cos i_2}{\cos i_3 + \cos i_2} = A$$

причем  $A$  будет известной величиною.

С другой стороны, уравнение (1) дает:

$$(5) \quad MF = pa \frac{\cos i_1}{\sin(I - i_1)} = B$$

причем  $B$  будет также величиною известною.

Из уравнений (4) и (5) получим:

$$(6) \quad M = \sqrt{AB}$$
$$F = \sqrt{\frac{B}{A}}$$

Как видно, в выражения  $A$  и  $B$ , помимо непосредственно наблюдаемых величин, входят еще «постоянные прибора»  $k$  и  $pa$ . Эти величины определяются раз навсегда в обсерватории или вообще в таком месте, где напряжение  $F$  известно по определениям при помощи других приборов и магнитный момент  $M$  определен по способу Гаусса. Тогда в уравнениях (4) и (5) будут известны левые части, в правых же частях — множители при  $\frac{1}{k}$  и при  $pa$ ; следовательно, эти величины и найдутся.

Вычисление величины  $A$  по формуле:

$$A = \frac{1}{k} \frac{\sin(i_2 - I) \cos i_3 + \sin(I - i_3) \cos i_2}{\cos i_3 + \cos i_2}$$

может быть упрощено, если заметить, что по малости величины  $Pt$  разности  $i_2 - I$  и  $I - i_3$  будут весьма близки между собою, отличаясь в противоположную сторону от отклонения  $\delta$ , производимого магнитом. Поэтому, если положить

$$i_2 - I = \delta + x$$
$$I - i_3 = \delta - x$$

иначе,

$$\delta = \frac{i_2 - i_3}{2} = \frac{1}{2} [(i_2 - I) + (I - i_3)]$$

и

$$x = \frac{(i_2 - I) - (I - i_3)}{2} = \frac{i_2 + i_3}{2} - I$$

то величина  $x$  будет весьма малая, так что  $\cos x$  заменится 1 и  $\sin x$  — числовую мерою угла  $x$ , т. е. когда  $x$  выражено в минутах дуги, то

$$\sin x \approx \frac{1}{3438} x' = x$$

Тогда будет:

$$\sin(i_2 - I) = \sin(\delta + x) = \sin \delta + x \cos \delta$$
$$\sin(I - i_3) = \sin(\delta - x) = \sin \delta - x \cos \delta$$

Подставляя, получим:

$$\begin{aligned} & \sin(i_s - I) \cos i_s + \sin(I - i_s) \cos i_s = \\ & = \sin \delta (\cos i_s + \cos i_2) + x \cos \delta (\cos i_s - \cos i_2) \end{aligned}$$

Следовательно, будет:

$$kA = \sin \delta + x \cos \delta \frac{\cos i_s - \cos i_2}{\cos i_s + \cos i_2} = \sin \delta + s$$

Но

$$\frac{\cos i_s - \cos i_2}{\cos i_s + \cos i_2} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (i_2 - i_s) \sin \frac{1}{2} (i_2 + i_s)}{2 \cos \frac{1}{2} (i_2 - i_s) \cos \frac{1}{2} (i_2 + i_s)} = \tan \delta \cdot \tan \frac{i_2 + i_s}{2}$$

поэтому

$$s = x \sin \delta \tan \frac{i_2 + i_s}{2} \approx x \sin \delta \tan I$$

Таким образом

$$\frac{M}{F} = \frac{1}{k} \sin \delta [1 + x \tan I]$$

$$MF = pa \cdot \cos i_1 \operatorname{cosec}(I - i_1).$$

Отсюда

$$F = C \sqrt{\cos i_1 \cdot \operatorname{cosec}(I - i_1) \operatorname{cosec} \delta \cdot (1 + x \tan I)^{-\frac{1}{2}}}$$

и

$$M = C_1 \sqrt{\cos i_1 \cdot \operatorname{cosec}(I - i_1) \cdot \sin \delta \cdot (1 + x \tan I)^{\frac{1}{2}}}$$

где

$$C = \sqrt{pa \cdot k} \quad \text{и} \quad C_1 = \sqrt{\frac{pa}{k}}$$

Обозначая через  $M_0$  и  $F_0$  соответственно величины:

$$\begin{aligned} M_0 &= C_1 \sqrt{\cos i_1 \operatorname{cosec}(I - i_1) \sin \delta} \\ F_0 &= C \sqrt{\cos i_1 \operatorname{cosec}(I - i_1) \operatorname{cosec} \delta} \end{aligned}$$

и через  $\eta$  весьма малую величину:

$$\eta = \frac{1}{2} x \tan I = \frac{1}{6876} x' \tan I,$$

получим:

$$M = M_0 + \eta M_0$$

$$F = F_0 - \eta F_0$$

Обыкновенно у хорошо выверенного прибора стрелка делается так, что поправка  $\eta$  лежит в пределах точности самих наблюдений и может

быть пренебрегаема. Значит, искомые величины  $F$  и  $M$  вычисляются по формулам:

$$F = C \sqrt{\cos i_1 \operatorname{cosec}(I - i_1) \operatorname{cosec} \delta}$$

$$M = C_1 \sqrt{\cos i_1 \operatorname{cosec}(I - i_1) \sin \delta}$$

причем величина  $M$  вычисляется лишь для контроля.

Заметим, что по этим же наблюдениям получают и величину наклонения  $I$  на основании формулы:

$$I = \frac{i_2 + i_3}{2}$$

предполагая, что стрелка вполне уравновешена и величина  $x = 0$ .

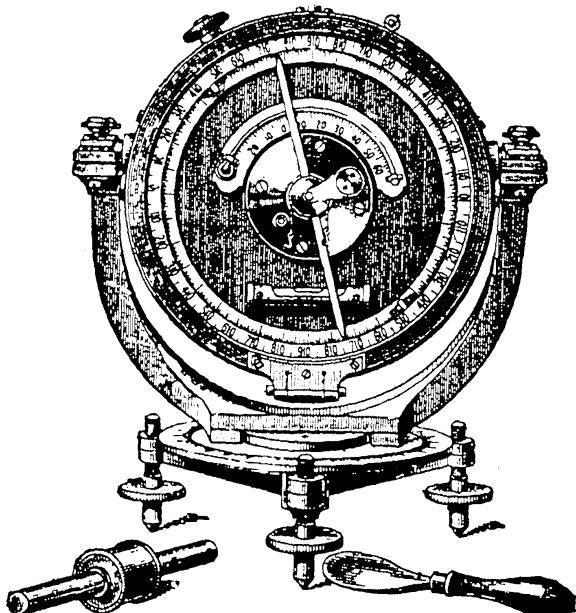
Для контроля наклонение при наблюдениях на берегу определяется и непосредственно нагруженной стрелкою, на море же пользуются вышеприведенными формулами, производя наблюдения отклонений.

### § 53. Круг Фокса (фиг. 40)

может служить как инклинер и как круг Барроу для определения напряжения.

Отличие в его устройстве от обыкновенного инклинатора состоит в том, что у него: 1) коробка, заключающая стрелку, подвешена на призмах, подобно котелку компаса, причем центр тяжести всей системы значительно ниже ребра подвеса; 2) ось стрелки не кладется просто на агатовые ножи, как у инклинатора, а сделана сравнительно короткой и заканчивается двумя остриями, вроде компасной шпильки, которыми эта ось и вкладывается в соответствующие гнезда сапфировых топок, заменяющих ножи; таким образом ось стрелки может занимать лишь одно, вполне определенное положение, как бы сам прибор ни наклонялся; стрелка же обыкновенного инклинатора при этом, очевидно, каталась бы по ножам, служащим опорами ее оси; 3) на ось стрелки наложен небольшой шкив, на котором делается несколько шагов тонкой коконовой нити с крючочками по концам; на эти крючочки подвешиваются специальные грузики при определении наклонения.

Способ отсчета положения концов стрелки принят также своеобразный. Стрелка качается между плоскостями двух разделенных кругов, притом гораздо ближе к внутреннему, нежели наружному, скажем,

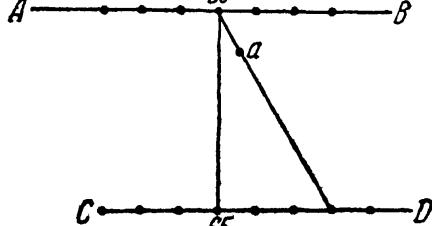


Фиг. 40.

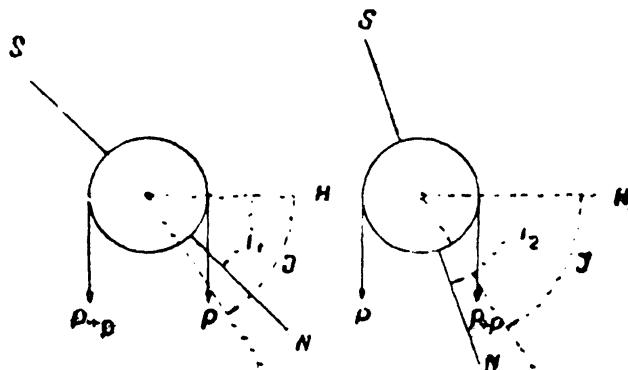
для примера, в пять раз, и положим, что круги разделены через  $\frac{1}{2}^{\circ}$ . Пусть конец стрелки проектируется в  $a$  (фиг. 41), внутренний круг по  $AB$ , наружный по  $CD$ ; тогда ясно, что отсчет составляет  $65^{\circ} + y$ , причем  $y$  меньше  $\frac{1}{2}^{\circ}$ .

Чтобы найти эту величину, смотрят наискосок, какое деление наружного круга приходится на створе конца стрелки и ближайшего деления внутреннего круга. В нашем случае это есть третье; значит,  $y$  составляет  $\frac{3}{5} \cdot 30' = 18' = 0^{\circ}.3$ . Стрелка обыкновенно делается и выверяется настолько точно, что ее не перемагничивают, ограничиваясь лишь наблюдениями при двух положениях круга, отличающихся на  $180^{\circ}$  по азимуту.

Для определения напряжения к крючочкам подвешиваются грузики  $P_1$  и  $P_2$ , из коих один тяжелее другого на известную величину  $p$ , так, напр.,  $P_1 = P_2 + p$ . Сделав отсчет видимого наклонения, обменивают грузики местами и делают вторичное определение видимого



Фиг. 41.



Фиг. 42.

наклонения  $i_2$ . По этим данным найдется напряжение.

В самом деле, обозначая через  $r$  радиус шкива (фиг. 42), для первого положения имеем:

$$(1) \quad pr - Pl \cos i_1 = FM \sin (I - i_1)$$

и для второго:

$$(2) \quad pr + Pl \cos i_2 = FM \sin (i_2 - I)$$

откуда, исключая  $Pl$ , имеем:

$$(3) \quad pr [\cos i_2 + \cos i_1] = FM [\sin (I - i_1) \cos i_2 + \sin (i_2 - I) \cos i_1]$$

Чтобы найти магнитный момент  $M$  стрелки, ее вынимают из прибора и заменяют другую, вспомогательную стрелкой, первую же помешают в чехол  $K$ , который привинчивается в определенном положении к коробке прибора, и наблюдают положение (видимое наклонение) стрелки  $i_2$ .

Затем чехол  $K$  обворачивают на  $180^\circ$ , иными словами, обменивают положение полюсов отклоняющего магнита, и определяют опять видимое ваклонение  $i_4''$ . Переносят чехол  $K$  на лицевую сторону прибора, где он крепится так, что его расстояние до стрелки — то же, что и при первом случае, и опять наблюдают видимые наклонения  $i_3''$  и  $i_4''$ . Из соответствующих отсчетов берут среднее, и пусть

$$i_3 = \frac{i_3' + i_3''}{2}; \quad i_4 = \frac{i_4' + i_4''}{2}$$

На основании этих данных получится отношение  $M:F$  магнитного момента к земной силе, ибо очевидно, что для этого могут служить те же уравнения (2) и (3) § 52 с заменой в них  $i_2$  через  $i_3$  и  $i_3$  через  $i_4$ , так что окончательно будет:

$$(4) \quad \frac{M}{F} = \frac{1}{k} \frac{\sin(i_3 - I) \cos i_4 + \sin(I - i_4) \cos i_3}{\cos i_4 + \cos i_3} = A$$

Из уравнения же (3) имеем:

$$(5) \quad MF = pr \frac{\cos i_3 + \cos i_1}{\sin(I - i_1) \cos i_3 + \sin(i_3 - I) \cos i_1} = B$$

отсюда попрежнему находим:

$$M = \sqrt{AB}$$

$$F = \sqrt{\frac{B}{A}}.$$

Для круга Фокса стрелку стараются сделать настолько точно, чтобы величина  $\eta$  была ничтожно мала, и тогда, вместо формул (4) и (5), подобно тому, как в § 52, можно написать:

$$\frac{M}{F} = \frac{1}{k} \sin v$$

$$MF = pr \operatorname{cosec} u$$

где

$$v = \frac{i_3 - i_4}{2}; \quad u = \frac{i_2 - i_1}{2}$$

и, следовательно,

$$F = C \sqrt{\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cosec} v}$$

$$M = C_1 \sqrt{\operatorname{cosec} u \cdot \sin v}$$

причем

$$C = \sqrt{pr \cdot k}; \quad C_1 = \sqrt{\frac{pr}{k}}$$

Постоянные прибора, т. е.  $k$  и  $pr$ , определяются раз навсегда по наблюдениям в обсерватории или в месте, где известны величины  $I$  и  $F$ , магнитный же момент определен перед этими наблюдениями по способу Гаусса.

Вычисление величин  $M$  и  $F$  может быть упрощено преобразованием, показанным в § 52.

Круг Фокса применяется и для наблюдений на судне, причем его ставят на треногу, снабженную площадкой, подвешенной на кардановом подвесе.

Этот круг употребляется в английском флоте с 1830-х годов, и еще капитан Росс в своей знаменитой экспедиции в Южное полярное море пользовался кругом Фокса и свидетельствовал в описании своего плавания, что наклонение и напряжение определялись этим кругом почти беспрерывно на всем переходе в 4000 миль от острова Кергюлена до Ван-Дименовой земли.

Необходимо еще заметить по поводу определения наклонения кругом Фокса, что оно может быть произведено следующим образом. По определении плоскости магнитного меридиана круг поворачивают так, чтобы его плоскость совпадала с меридианом, после чего отсчитывается положение обоих концов стрелки. Коробка поворачивается на  $180^\circ$ , и опять отсчитывается положение обоих концов стрелки. Среднее из этих отсчетов дает приближенную величину наклонения.

Чтобы получить его величину более точно, пользуются специально имеющимся при приборе небольшим отклоняющим магнитом. Этот магнит вкладывают в чехол  $K$  и привинчивают ко дну прибора так, чтобы трубка составляла определенный (указываемый в аттестате прибора) угол с направлением стрелки, известным по приближенному определению наклонения. После успокоения стрелки производят отсчет положения обоих концов ее, т. е. определяют видимое наклонение  $i_1$ , обрачивают коробку на  $180^\circ$  и определяют видимое наклонение  $i_2$ . Переносят дефлектор (отклоняющий магнит) и крепят его к крышке прибора, причем его расстояние до стрелки—прежнее, и опять определяют при обоих положениях коробки видимое наклонение  $i_3$  и  $i_4$ . Истинное наклонение  $I$  будет:

$$I = \frac{1}{4} (i_1 + i_2 + i_3 + i_4)$$

Постоянные прибора определяются в обсерватории, подобно тому как сказано в § 52 для круга Барроу.

**§ 54.** Из других приборов, служащих для определения элементов, необходимо еще упомянуть земной индуктор Вильда, дающий возможность определять наклонение с точностью, не достижимой для инклиниатора и доходящей до нескольких секунд.

Принцип устройства прибора Вильда весьма прост. Известно, что если в магнитном поле вращать проводник  $ABCD$ , снабженный коммутатором, которого касаются щетки  $E$  и  $F$ , соединенные другим проводником, то при вращении контура  $ABCD$  по нему пойдет ток, который и будет наблюдаться гальванометром  $G$  (фиг. 43). Но если поле однородное, то имеется такое положение оси вращения контура, при котором в нем ток появляться не будет, а именно, когда ось вращения совпадает с направлением напряжения поля, или, как говорят, с направлением

«линий сил», так, что при вращении плоскость контура все время остается параллельной направлению магнитной силы.

Этим свойством и воспользовался Вильд для устройства своего прибора. В нем имеется вращаемая при помощи гибкого вала катушка, подшипники которой укреплены в кольце, неизменно скрепленном с вертикальным кругом, по которому при помощи микроскопов отсчитывается угол наклонения оси вращения катушки. Самый же круг и кольцо поворачиваются около горизонтальной оси; подшипники этой оси неизменно связаны с кольцом, которое можно поворачивать в любое положение около вертикальной оси внутри горизонтального круга, снабженного тремя установочными винтами. Прибором пользуются следующим образом. При помощи накладного уровня (на горизонтальную ось) выверяется горизонтальность основного круга и горизонтальной оси. Затем при помощи поверительной стрелки, накладываемой в ее коробке (где она подвешена топкою на шпильке) на специальные гнезда горизонтального кольца, определяется направление магнитного меридиана, и кольцо поворачивается так, чтобы ось вращения катушки (иначе, вертикальный круг) была в плоскости меридиана. Важны от коммутатора включается весьма чувствительный гальванометр, катушку приводят при помощи гибкого вала в быстрое вращение и изменяют наклон оси до тех пор, пока ток не прекратится. Этот наклон, отсчитываемый по вертикальному кругу, и дает наклонение.

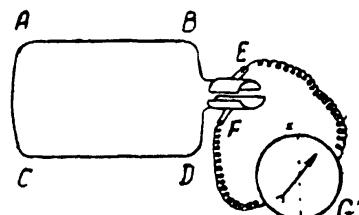
Само собою разумеется, что для исключения инструментальных погрешностей ставят вертикальный круг «право» и «лево» и катушку при каждом положении круга вращают по часовой стрелке и против часовой стрелки. Из наблюденных отсчетов наклона берется среднее.

Прибор, хотя имеются и переносные типы, употребляется преимущественно в обсерваториях или в тех случаях, когда требуется особенная точность в определении наклонения, почему на подробностях его теории, выверки и правил пользования им не будем останавливаться.

**§ 55.** В 1902 г., как уже сказано в § 13, американский миллиардер Андрью Карнеги пожертвовал значительную сумму на устройство, оборудование и содержание в Вашингтоне специального института, предназначенного для исследований земного магнетизма и атмосферного электричества.

Институт этот, открытый в 1904 г., находится под управлением Л. А. Бауера, свыше 20 лет издающего журнал «Terrestrial magnetism and atmospheric electricity» и заведующего магнитною съемкою Соединенных Штатов, отличающейся как полнотою, так и точностью работ.

С устройством Института задача Магнитного отдела съемки Соединенных Штатов значительно расширена—им производятся магнитные:



Фиг. 43.

съемки не только в Соединенных Штатах, но и снаряжаются экспедиции во все страны мира для производства магнитных наблюдений там, где их не было или где их было сделано мало, следуя указаниям Гаусса, приведенным в § 12: «пока же более всего необходимо доставление полных наблюдений, т. е. всех трех элементов в тех пунктах обширных пространств, в которых таких наблюдений до сих пор совсем не имеется, так как вновь присоединяемый пункт представляет тем большую важность для общей теории, чем далее он расположен от имеющихся в нашем распоряжении». Эти слова не утратили своего значения и до сих пор, хотя и сказаны 80 лет тому назад.

Наблюдатели от Института Карнеджи работают и в Бразилии, и в Центральной Африке, Китае, Персии, бывали и в Туркестане, и в Сибири, и пр. и пр. Понятно, что у Института накопился громадный опыт как в снаряжении и снабжении экспедиций для магнитных наблюдений, так и в практической оценке достоинств и недостатков приборов. Располагая громадными средствами, Институт Карнеджи выработал частью сам в своих мастерских, частью заказами по своим указаниям у искусных механиков наиболее практичные и совершенные приборы, описание которых вкратце дадим ниже.

При разработке приборов Институт руководствовался следующими соображениями: большая часть работы должна производиться в областях, где сообщение вообще затруднительно, поэтому громоздкое и тяжелое снаряжение составляет серьезное препятствие к надежной и быстрой перевозке. Вследствие этого основными условиями при составлении проектов были: а) портативность; б) простота; в) наименьшее число отдельных частей; г) готовность и приспособленность к немедленному употреблению и д) достижение при наблюдениях точности, не меньшей той, которая достижима наилучшими переносными приборами, употребляемыми теперь.

Система магнитов (для определения напряжения) состоит из пары магнитов, одного длинного и одного короткого, отношение длин коих выбрано так, чтобы коэффициент при  $\frac{1}{r^3}$  в разложении силы их взаимодействия уничтожался. Каждый магнит заключен в прочно поволоченный медный чехол, чем устраняется ржавление и получается удобство для крепления коллимационной системы и обеспечения постоянного и правильного положения в стремени. Вес обоих магнитов с их чехлами одинаков. Мишенью служит плоскопараллельное стекло с крестом, образуемым пересечением двух взаимно перпендикулярных прямых, на нем нарезанных. Наводка производится на южный конец магнитов. Стремя возможно простое и удобное для вкладывания и поворачивания магнита. Подвесом служит ленточка фосфористой бронзы (ширина 0.127 мм, толщина 0.010 мм, длина около 340 мм; при напряжении 0.2 CGS закручивание ленты на 90° дает магниту отклонение в 0°5'). Для исключения закручивания служит круг, прикрепленный к самому стремени так, что при наблюдениях закручивание исключ-

чают, не выжидая успокоения магнита, а просто поворачивая верхний за-креп и наблюдая по кругу у стремени, чтобы качания были симметричны относительно  $180^\circ$ . Обеспечены простота и удобство смены ленты подвеса. Для отсчета положения магнита в трубе сделана окулярная шкала, содержащая 60 делений на плоскопараллельном стекле, цена деления около  $1'.50$ .

Институт весьма одобрительно относится к магнетометру английского образца типа Кью, но так как при нем нет вертикального круга, а имеется лишь азимутальное зеркало, то определение астрономического азимута производится «по времени» и требует, помимо хорошего хронометра, также точного знания долготы места, что в малоисследованных местностях затруднительно; поэтому при таких приборах для астрономической работы отпускается отдельный теодолит.

В приборах типа Мурро-Маскара подвес на шелковинке, переменное кручение которой при разных атмосферных условиях вносит излишние трудности в наблюдения; кроме того, вообще лучше иметь «домик» деревянный, а не медный, так как близость медных частей погашает качания и зачастую попадаются приборы, в которых медь содержит следы железа и оказывает влияние на магнит; эти недостатки устранены в приборах Института Карнеджи.

Рейки для отклоняющего магнита должны быть солидные (принято  $5 \times 15$  мм), чтобы избежать прогибания и неправильного крепления; магниты на них прикрываются деревянными чехлами, чтобы не подвергаться быстрым температурным изменениям.

Для астрономической работы магнитный «домик» со всеми принадлежностями снимается целиком и заменяется пригнанным к тому же горизонтальному кругу вертикальным кругом с трубой и уровнем так, что получается астрономический теодолит.

Само собою понятно, что обширно практикою Института выработаны правила ухода, обращения с приборами и производства наблюдений. О них будет сказано в следующей главе.

## ГЛАВА V

### Общие указания и правила пользования переносными магнитными приборами при определении элементов земного магнетизма

§ 56. Всякий прибор, прежде чем его применять на деле, должен быть изучен, и для него должны быть определены как «постоянные», так и те поправки, которые надо вводить в показания прибора или в вычисленные по этим показаниям результаты для приведения их к «истинным» значениям.

Наиболее полного изучения требует магнитный теодолит в той его части, которая предназначена для определения горизонтальной составляющей земного магнетизма.

Исследование прибора и определение постоянных производится в обсерватории, в которой всегда есть помещение, где температура постоянная, по крайней мере в продолжение наблюдений.

§ 57. Мы видели, что для определения горизонтальной составляющей напряжения земного магнетизма по наблюдениям качаний и отклонений служат формулы:

$$(1) \quad T = \pi \sqrt{\frac{J}{MH}}$$

$$(2) \quad \sin \delta_1 = \frac{M}{H} \frac{2}{r_1^3} \left[ 1 + \frac{P}{r_1^2} + \frac{Q}{r_1^4} \right]$$

$$(3) \quad \sin \delta_2 = \frac{M}{H} \frac{2}{r_2^3} \left[ 1 + \frac{P}{r_2^2} + \frac{Q}{r_2^4} \right]$$

Причем  $J$  есть момент инерции магнита,  $M$  — его магнитный момент;  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния, при которых наблюдены отклонения  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ;  $P$ ,  $Q$  — постоянные.

Определение момента инерции  $J$  объяснено в § 30 и требует единственно только наблюдения качаний магнита с кольцом или добавочным грузом, момент инерции которого известен, и без грува. Кольцо или груз прилагаются к прибору, и момент инерции их вычисляется по обмерам и весу, как уже сказано.

Казалось бы, что определение величин  $P$  и  $Q$  также не представит затруднений, стоит только произвести наблюдение отклонений при трех расстояниях, и получится система трех уравнений, по которым найдутся величины  $\frac{M}{H}$ ,  $\frac{M}{H} \cdot P$  и  $\frac{M}{H} \cdot Q$ , а так как по наблюдениям качаний будет известно произведение  $MH$ , то сейчас же найдутся и все искомые величины в отдельности.

Но дело осложняется тем обстоятельством, что необходимо принять во внимание некоторые поправки, без которых результат не будет обладать требуемой степенью точности. Поэтому необходимо сперва изложить теорию этих поправок.

§ 58. Положим, что величины  $P$  и  $Q$  были бы нам известны. Тогда, положив

$$K_0 = \frac{2}{r_1^3} \left[ 1 + \frac{P}{r_1^2} + \frac{Q}{r_1^4} \right]$$

мы можем написать формулу (2) так:

$$\frac{H}{M} = \frac{K_0}{\sin \delta_1}$$

Совершенно так же, обозначая через  $G_0$  величину  $\pi^2 J_0$ , мы получим:

$$(4) \quad MH = \frac{G_0}{T^2}$$

и, найдя таким образом

$$(5) \quad MH = A \quad \text{и} \quad \frac{H}{M} = B$$

имеем:

$$(6) \quad M = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

и

$$(7) \quad H = \sqrt{AB}$$

так что для определения  $M$  и  $H$  достаточно будет иметь наблюдения отклонений при одном расстоянии, самое же вычисление производится крайне просто.

Но на практике при точных определениях приходится иметь в виду следующие обстоятельства:

1. При изменении температуры размеры частей прибора изменяются, и, следовательно, если постоянные были определены при температуре  $t_0$ , а наблюдения качаний произведены при температуре  $t_1$  и отклонений при  $t_2$ , то надо это обстоятельство учесть и ввести соответствующие поправки.

2. Вследствие изменения температуры магнитный момент магнита изменяется, поэтому если  $t_1$  не равно  $t_2$ , то в формулах (3) и (4)  $M$  имеет разное значение, и формулы (6) и (7) требуют поправки.

3. Вследствие действия земного поля в магните возбуждается добавочный — «индуктизованный» — магнетизм, который изменяется с изменением положения магнита относительно направления силы поля; поэтому в формулах (3) и (4) значения  $M$  отличаются одно от другого, и формулы (6) и (7) требуют поправки.

Что касается времени размаха, то и здесь надо иметь в виду следующие обстоятельства:

(1) Хронометр, по которому наблюдение производится, может иметь некоторый суточный ход  $s$ , и, значит, наблюденные по нему промежутки времени требуют соответствующей поправки.

(2) Формула (1) относится к размахам бесконечно малым, при наблюдениях же величина размахов конечная.

(3) Нить, на которой магнит подвешен, обладает упругостью, кручение ее вводит добавочную пару и влияет на продолжительность размаха.

Эти последние поправки выражаются так:

1) Если  $T'$  есть число секунд, наблюденных по хронометру, а  $T$  есть число верных секунд среднего времени, то будем иметь пропорцию:

$$T' : T = (86\,400 + s) : 86\,400$$

откуда

$$T = T' \cdot \frac{86\,400}{86\,400 + s} = T' - \frac{s}{86\,400} T' = T' - 0.000011sT'$$

причем величина  $s$  имеет знак плюс, когда хронометр уходит вперед. Обыкновенно величина этой поправки вне пределов точности наблюдений.

2) Если амплитуда размахов (размах на одну сторону)  $\alpha^*$ , то поправка к наблюденному времени  $T'$  есть

$$-\frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} T' = -\frac{1}{16} \alpha^2 T'$$

где  $\alpha$  надо выражать отвлеченными числами, т. е.  $\alpha = \frac{\alpha^\circ}{57^\circ 3}$ ; подставляя эту величину, имеем выражение «приведения к бесконечно малой амплитуде»:

$$-0.000019 (\alpha^\circ)^2 \cdot T'$$

Так, напр., при  $T' = 5$  сек и  $\alpha = 10^\circ$  поправка будет:

$$0.000019 \cdot 100 \cdot 5 = 0.0095 \text{ сек}$$

и приведенное время  $T = 4.9905$  сек

В большей части случаев эта поправка настолько мала, что лежит вне пределов точности наблюдений.

3) Влияние кручения нити изложено ниже, в § 62. Обозначая через  $\omega$  коэффициент кручения, имеем поправку:

$$\frac{1}{2} \omega T'$$

так что

$$T = T' + \frac{1}{2} \omega T'$$

В формулы входит величина  $T^2$ , при вычислениях по логарифмам удобнее вводить поправку к логарифму, пользуясь разложениями:

$$\lg(1+x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \dots\right) \cdot m$$

$$\lg(1-x) = \left(-x - \frac{x^2}{2} - \dots\right) \cdot m$$

При малых значениях  $x$  и обычных десятичных логарифмах, для коих модуль  $m=0.434$ , можно писать:

$$\log(1+x) = 0.434x$$

$$\log(1-x) = -0.434x$$

Так, в предыдущем случае будет:

$$\log T = \log T' + \log \left(1 + \frac{1}{2} \omega\right) = \log T' + 0.217$$

и, значит,

$$(*) \quad \log T^2 = \log T'^2 + 0.434\varphi$$

В этом последнем виде мы и будем пользоваться этой формулой.

Перейдем теперь к рассмотрению прочих поправок.

4) Пусть коэффициент расширения стали есть  $\alpha=0.0000124$  и меди  $\beta=0.0000180$ . Тогда при температуре  $t_1$  момент инерции магнита будет:

$$J_1 = J_0 [1 + \alpha(t_1 - t_0)]^2 = J_0 [1 + 2\alpha(t_1 - t_0)]$$

5) Влияние температуры на магнитный момент сказывается тем, что с увеличением температуры магнитный момент уменьшается пропорционально изменению температуры. Таким образом, имеем формулы, при понятном обозначении:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_0 [1 - q(t_1 - t_0)] \\ M_2 &= M_0 [1 - q(t_2 - t_0)] \end{aligned}$$

а также

$$M_2 = M_1 [1 - q(t_2 - t_1)]$$

где  $q$  есть «температурный коэффициент» магнита, меняющийся для разных сортов стали от 0.0010 до 0.0002.

6) Влияние индукции на магнитный момент сказывается в том, что к постоянному его магнетизму прилагается возбужденный, дающий добавочный магнитный момент, пропорциональный проекции напряжения поля на направление оси магнита.

Таким образом, если горизонтальный магнит помещен по направлению меридиональному северным концом к северу, то магнитный его момент  $M_1$  будет:

$$M_1 = M (1 + \mu H)$$

где  $\mu$  — «коэффициент индукции».

Если ось магнита составляет угол  $\theta$  с меридианом, то будет:

$$M_1 = M (1 + \mu H \cos \theta)$$

так что если его северный конец направлен на юг, то

$$M_1 = M (1 - \mu H)$$

ибо тогда

$$\theta = 180^\circ \text{ и } \cos \theta = -1$$

Чтобы пользоваться формулами (1) и (2), надо наблюденное время размаха  $T_1$  (исправленное на его ход и амплитуду) привести к такому значению  $T$ , которое имело бы место, если бы при качаниях момент инерции имел бы величину  $J$ , магнитный же момент имел бы то значение  $M_2$ , которое соответствует температуре  $t_2$ , бывшей при отклонениях, и свободно от индукции; понятно также, что надо исключить и влияние кручения нити.

Итак, при наблюдении качаний были следующие обстоятельства:  
Момент инерции:

$$J_1 = J_0 [1 + 2\alpha(t_1 - t_0)]$$

Магнитный момент:

$$M_1 = M_0 [1 - q(t_1 - t_0)] [1 + \mu H]$$

Влияние кручения нити  $1 + \omega$ , так что имеем:

$$T_1^2 = \frac{\pi^2 J_1}{M_0 H (1 + \omega)}$$

Приведенное же время  $T$  должно быть:

$$T^2 = \frac{\pi^2 J_1}{M_0 H}$$

Откуда

$$T^2 = T_1^2 \frac{M_1 (1 + \omega)}{M_0} = T_1^2 (1 + \omega) [1 - q(t_1 - t_0)] [1 + \mu H]$$

Вместе с тем мы имели:

$$G_0 = \pi^2 J_0$$

Очевидно, что

$$G_1 = \pi^2 J_1 = G_0 [1 + 2\alpha(t_1 - t_0)]$$

Таким образом, будет:

$$M_0 H = \frac{G_1}{T^2}$$

Магнитный момент изменяется мало, поэтому, положив  $h = \mu M_0$ , мы можем написать:

$$1 + \mu H = 1 + \frac{h \cdot H}{M_0} \approx 1 + h \frac{H}{M_0}$$

и таким образом будем иметь следующую схему для вычисления  $\log T^2$ :  
Наблюденная продолжительность размаха

Поправка на ход хронометра

Поправка на амплитуду

Исправленная продолжительность размаха

Поправка на кручение нити:

$\log (1 + \omega) = +0.434 \omega =$

Поправка на разность температур:

$$\log [1 - q(t_1 - t_0)] = -0.434 q(t_1 - t_0) =$$

Поправка на индукцию:

$$\log \left[ 1 + h \frac{H}{M_2} \right] = 0.434 h \cdot \frac{H}{M_2} =$$

$$\log T^2 =$$

$$\log G_0 =$$

Постоянная  $G_0 =$

Поправка:

$$\log [1 + 2\alpha(t_1 - t_0)] = 0.868 \alpha(t_1 - t_0) =$$

$$\operatorname{colog} T^2 =$$

$$\log M_2 H =$$

Кручение нити определяется при всяком наблюдении, величины же  $q$  и  $h$  определяются раз навсегда, и для упрощения вычисления составляется вспомогательная таблица величин:

$$\log [1 - q(t_2 - t_1)] = -0.434 q(t_2 - t_1)$$

с аргументом  $t_2 - t_1$  разности температур.

Точно так же для величины  $0.868 \alpha(t_1 - t_0)$  можно бы составить табличку, но здесь, благодаря тому, что произведение  $0.868 \alpha = 0.868 \cdot 0.0000124 = 0.0000107$ , можно просто считать, что поправка заключает столько единиц пятого знака логарифма, сколько градусов Цельсия в разности температур.

Входящая в выражение поправки величина  $\frac{H}{M_2}$  берется из расчета, относящегося к отклонению.

**§ 59.** Перейдем теперь к рассмотрению формулы:

$$\frac{H}{M} = \frac{K_0}{\sin \delta_1}$$

Эта формула требует поправок на влияние температуры и на влияние индукции. Температура при отклонениях была  $t_2$ , между тем величина  $K_0$  относится к температуре  $t_0$ . Главный член в выражении  $K_0$  есть  $\frac{2}{r_1^3}$ , остальные два члена весьма малы, ибо отношение длины малого вспомогательного магнита к длине главного выбирается так, чтобы величина  $P$  была равна нулю, как если бы оба магнита были элементарные, последний же член весьма мал благодаря множителю  $\frac{1}{r_1^4}$ ; таким образом, при температуре  $t_2$  будет:

$$K_2 = \frac{2}{r_1^3 [1 + 3\beta(t_2 - t_0)]} = K_0 [1 + 3\beta(t_0 - t_2)]$$

Величина  $\beta = 0.0000180$ , поэтому  $3 \cdot 0.434 \beta = 0.0000235$ , и логарифмическая поправка к величине  $\log K_0$  будет  $0.0000235(t_0 - t_2)$  и дается следующей таблицей в единицах пятого знака логарифмов:

Таблица величин  $0.0000235 (t_0 - t_2) = \varepsilon_2$

$\frac{t_0 - t_2}{\varepsilon_2}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0°	0	2	5	7	9	12	14	16	19	21
10	24	26	28	31	33	35	38	40	42	45
20	47	49	52	54	56	59	61	63	66	68
30	70	73	75	78	80	82	85	87	89	92

Так что

$$\log K_2 = \log K_0 + \varepsilon_2$$

Причем само собою разумеется, что  $\varepsilon_2$  имеет тот же знак, что и разность  $t_0 - t_2$ , и придается алгебраически.

Поправку на влияние индукции легко получить, заметив, что при наблюдении отклонений магнит составляет с меридианом угол или  $90^\circ + \delta_1$ , или  $270^\circ + \delta_1$ , так что в обоих случаях магнитный момент, производящий отклонение, равен:  $M_2 [1 - \mu \cdot H \sin \delta_1]$ , и, следовательно,

$$\frac{H}{M_2} = \frac{K_2}{\sin \delta_1} (1 - \mu H \sin \delta_1) = \frac{K_2}{\sin \delta_1} \left[ 1 - h \frac{H}{M_2} \sin \delta_1 \right]$$

но по малости  $h$  в члене, содержащем этот множитель, величину  $\frac{H}{M_2}$  можно заменить ее главным членом, т. е.  $\frac{K_2}{\sin \delta_1}$ , и у нас получится:

$$\frac{H}{M_2} = \frac{K_2}{\sin \delta_1} \left[ 1 - h K_2 \right]$$

Но величина  $K_2$ , в свою очередь, в члене  $h K_2$  может быть заменена ее главным членом  $\frac{2}{r_1^3}$ , и мы получим:

$$\frac{H}{M_2} = \frac{K_2}{\sin \delta_1} \cdot \left( 1 - \frac{2h}{r_1^3} \right)$$

или, полагая

$$K_0 \left[ 1 - \frac{2h}{r_1^3} \right] = C_0$$

и

$$C_2 = K_2 \left( 1 - \frac{2h}{r_1^3} \right) = C_0 [1 + 3h (t_0 - t_2)]$$

так что

$$\log C_2 = \log C_0 + \varepsilon_2$$

будем иметь формулу:

$$\frac{H}{M_2} = \frac{C'_3}{\sin \delta_1}$$

Таким образом, если наблюдены соответствующие расстояниям  $r_1, r_2, r_3$  отклонения  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ , то сперва определяем приближенную величину магнитного момента  $M$  и напряжения  $H$  по формулам:

$$MH = \frac{G_0}{T^2}$$

и

$$\frac{H}{M} = \frac{2}{r_1^2} \frac{1}{\sin \delta_1}$$

Получив эту приближенную величину  $M$  и зная коэффициент индукции  $\mu$ , вычисляем величину:

$$h = \mu M$$

и затем величины:

$$n_1 = 1 - \frac{2h}{r_1^2}; \quad n_2 = 1 - \frac{2h}{r_2^2}; \quad n_3 = 1 - \frac{2h}{r_3^2}$$

Тогда, предполагая, что все наблюдения произведены при одной и той же температуре  $t$ , и полагая

$$\begin{aligned} K'_0 &= \frac{2}{r_1^2} \left[ 1 + \frac{P}{r_1^2} + \frac{Q}{r_1^4} \right] \\ K''_0 &= \frac{2}{r_2^2} \left[ 1 + \frac{P}{r_2^2} + \frac{Q}{r_2^4} \right] \\ K'''_0 &= \frac{2}{r_3^2} \left[ 1 + \frac{P}{r_3^2} + \frac{Q}{r_3^4} \right] \end{aligned}$$

имеем пропорцию:

$$\frac{K'_0 n_1}{\sin \delta_1} = \frac{K''_0 n_2}{\sin \delta_2} = \frac{K'''_0 n_3}{\sin \delta_3}$$

иначе, — два уравнения первой степени с неизвестными  $P$  и  $Q$ , откуда эти неизвестные и найдутся.

После того как  $P$  и  $Q$  найдены, вычисляем величины  $K'_0, K''_0, K'''_0$  и по ним  $C'_0, C''_0, C'''_0$ . Затем вычисляем величины  $M_2$  и  $H$  по формулам:

$$M_2 H = \frac{G_0}{T^2}$$

$$\frac{H}{M_2} = \frac{C'_0}{\sin \delta_1} = \frac{C''_0}{\sin \delta_2} = \frac{C'''_0}{\sin \delta_3}$$

И если бы оказалось, что разница в значениях

$$h = \mu M_2$$

влияет на величины  $C'_0$ ,  $C''_0$ ,  $C'''_0$  в пределах требуемой точности (пятый знак в логарифмах), то с этим исправленным значением  $h$  проделываем вычисление вторично.

**§ 60.** Остается сказать несколько слов об определении коэффициента  $q$  температурного и  $\mu$  индукционного.

Первый получают, сравнивая отклонения, производимые магнитом с одинакового расстояния — один раз, когда он погружен в холодную воду (около 2 или 3°), другой раз — в теплую (около 40—45°), на специально приспособленном для этого приборе.

Для определения индукционного коэффициента пользуются следующим схемою, для которой также имеется специальный прибор: испытуемый магнит  $ns$  ставят вертикально в определенном расстоянии от вспомогательного магнита так, чтобы линейка  $AB$  была перпендикулярна магнитному меридиану, и 1) наблюдают отклонение, производимое магнитом, когда его северный конец вверху и стержень  $CD$  «смотрит» вверх; 2) поворачивают стержень с магнитом на 180° так, чтобы он «смотрел» вниз, причем северный конец магнита попрежнему обращен к концу  $D$  стержня; 3) оставляя стержень внизу, поворачивают магнит южным концом к  $D$  и наблюдают отклонение и 4) поворачивают стержень вверх, оставляя магнит южным концом к  $D$ . Тогда коэффициент индукции  $\mu$  найдется по формуле:

$$\mu = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (U_2 - U_1)}{H \operatorname{tg} I \operatorname{tg} \frac{1}{2} (U_2 + U_1)}$$

где  $U_2$  есть среднее из отклонений при положениях 2 и 4 и  $U_1$  — среднее из отклонений при положениях 1 и 3;  $H$  есть горизонтальная слагающая напряжения,  $I$  — паклонение.

**§ 61.** Итак, для данного прибора в обсерватории определяются следующие постоянные, которые и заносятся в формуляр или аттестат прибора в таком виде.

#### Ф о р м у л я р

Магнитный теодолит № 7 Bausch & Lomb.

Магнит главный: длина 7.50 см;  $d_1 = 0.74$ ,  $d_2 = 1.00$  см  
» вспомогательный » 3.50 »  $d_1 = 0.61$ ,  $d_2 = 0.82$  »

Оба магнита трубчатые;  $d_1$  — внутрен.,  $d_2$  — наружн. диаметры

Момент инерции главного магнита  $J_0 = 239.15$  CGS

» болванки  $J_1 = 237.52$  »

Магнитный момент главного магнита  $M_0 = 642.23$  CGS (15 июля 1908 г.)

Коэффициент индукции  $\mu = 0.0063$ ;  $h = \mu M_0$

Коэффициент температурный  $q = 0.00048$

Коэффициенты распределения  $P = +16.51$ ;  $Q = -1277$

Расстояния $r_1$	$\log C \frac{(i)}{0}$
25.0 см	—
27.5 »	5.99073
30.0 »	—
35.0 »	5.67398
40.0 »	—

Температурные поправки — см. общую таблицу.

$\log G_0 = \log \pi^2 J_0 = 3.37241$  [темпер. попр. +0.00001 ( $i_1 - 20^\circ$ )]  
Все данные относятся к нормальной температуре  $t_0 = 20^\circ$  С.

Вспомогательные таблицы для главного магнита (L 7)

$t - t_0$	Температурные поправки		Индукционная поправка	
	$\log [1 + q(t - t_0)]$	$\log [1 - q(t - t_0)]$	$\log \frac{H}{M}$	$\log \left[ 1 + h \frac{H}{M} \right]$
1	+0.00021	-0.00021	-4.00	0.00017
2	42	42	.10	22
3	63	63	.20	29
4	84	84	.30	36
5	105	105	.40	45
6	126	126	.50	56
7	147	147	.60	71
8	168	168	.70	89
9	189	189	.80	112
10	210	210	-.90	141
11	231	231	3.00	176
12	252	252		
13	273	273		
14	294	295		
15	315	317		
16	336	338		
17	357	359		
18	378	381		
19	399	402		
20	420	423		
21	+0.00441	-0.00445		

В этот формулляр должно вписываться и всякое определение магнитного момента за время пользования прибором. Таким образом, получится таблица вроде следующей:

Магнитный момент магнита (L 7)

Год	Месяц	Число	Темпера- тура $t_2$	Магн. мо- мент при темп. $t_2$ $M_2$	Магн. мо- мент при темп. $t_0 = 20^\circ$ $= M_0$	Место наблю- дений
1908	Июль	15	19.00	642.55	642.23	Wash. Obs.
1910	Декабрь	13	12.10	635.27	632.85	Tekrit. As. T.

Эта таблица дает возможность следить за изменением магнитного момента, а также доставит материал для проверки величины температурного коэффициента на основании наблюдений в поле, по сличению магнитных моментов при значительно различающихся температурах и незначительной разнице во времени.

Отклонение для контроля наблюдается при двух расстояниях, напр. при  $r_1$  и  $r_2$ , и для каждого в отдельности вычисляется величина  $\frac{H}{M_s}$  по формулам:

$$\frac{H}{M_s} = \frac{C'_s}{\sin \delta_1}; \quad \frac{H}{M_s} = \frac{C''_s}{\sin \delta_2}$$

По схеме:

$\log C'_s = \log C'_0 + \varepsilon_s =$	$\log C''_s = \log C''_0 + \varepsilon_s =$
$\log \operatorname{cosec} \delta_1 =$	$\log \operatorname{cosec} \delta_2 =$
$\log \frac{H}{M_s} =$	$\log \frac{H}{M_s} =$
(по качанию) $\log HM_s =$	$\log HM_s =$
$\frac{1}{2}$ сумма = $\log H =$	$\log H =$
$\frac{1}{2}$ разн. = $\log M_s =$	$\log M_s =$
$H =$	$H =$
$M_s =$	$M_s =$

Полученная величина магнитного момента  $M_s$  относится к температуре  $t_s$ . Чтобы привести этот магнитный момент к температуре  $t_0$ , имеем формулу:

$$M_0 = M_s [1 + q(t_s - t_0)]$$

и, значит,

$$\log M_0 = \log M_s + 0.434q(t_s - t_0)$$

причем величина  $0.434q(t_s - t_0)$  берется из упомянутой выше вспомогательной таблицы.

**§ 62.** Для определения влияния кручения нити подвеса при всяком приборе отпускается пригнанная к стремени медная болванка одинакового веса с магнитом. Эта болванка, подвешенная вместо магнита, позволяет нити свободно раскрутиться, после чего поворачивают прибор так, чтобы ось болванки стала по магнитному меридиану, вкладывают в стремя магнит и замечают по горизонтальному кругу отсчет положения равновесия его. Затем дают в четыре приема, каждый раз по  $90^\circ$ , поворот головке, к которой прикреплен коренной конец нити, и отсчитывают каждый раз положение магнита. Возвратившись опять в меридиан, т. е. дав сперва полный оборот в обратную сторону, дают

в четыре приема еще оборот, замечая отсчеты положения магнита. Взяв разности и затем среднее, получим величину отклонения магнита  $\theta^\circ$  при закручивании нити на  $90^\circ$ . Тогда коэффициент кручения рассчитываем по формуле:

$$\omega = \frac{\theta^\circ}{90^\circ - \theta^\circ} \approx \frac{\theta^\circ}{90^\circ}$$

ибо угол  $\theta$  обычно весьма мал (около  $5'$ , т. е.  $\frac{1^\circ}{12}$  ; так что  $\omega$  — около  $\frac{1}{1000}$ ).

Отсюда следует, что когда магнит отклонен на малый угол  $\phi$  от меридiana, то на него действуют:

- 1) пара от земного магнетизма  $MH \cdot \phi$ ;
- 2) момент от закручивания нити  $\omega \cdot MH \cdot \phi$ .

Таким образом, полная направляющая пара выражается формулой:

$$MH(1 + \omega)\phi$$

Следовательно, продолжительность простого размаха магнита будет:

$$T' = \pi \sqrt{\frac{J}{MH(1 + \omega)}}$$

откуда следует:

$$T'^2 = \frac{\pi^2 J}{MH} = T''^2 (1 + \omega)$$

так что

$$\log T'^2 = \log T''^2 + 0.434\omega$$

Очевидно, что кручение нити не влияет на величину синусовых отклонений, ибо при таких отклонениях его совсем нет, так как прибор поворачивается вместе с кругом.

**§ 63.** Еще в 1889 г. нашей Академией Наук было издано «Наставление к производству магнитных наблюдений во время путешествий», составленное бывшим директором Главной физической обсерватории и основателем Павловской магнитной обсерватории Г. И. Вильдом, обладавшим громадным опытом в производстве магнитных наблюдений. Затем мы упоминали, что Институтом Карнеги издаются отчеты о его работах, в которых также даются подробные указания и правила производства магнитных наблюдений и пользования приборами. Из «Наставления» и этих отчетов мы и приведем вкратце наиболее существенные правила пользования приборами.

1. *Проверка инструментов* требует во многом специальных при способлений, имеющихся лишь в магнитных обсерваториях, где всегда найдется

и опытный персонал, который даст надлежащие указания для их применения. Существенно необходимо убедиться, чтобы все части приборов и штативы к ним не оказывали влияния на магнит, т. е. были свободны от железа.

2. *Установка инструментов.* Для каждого инструмента отпускается обыкновенно треножный штатив, который для производства наблюдений надо ставить на открытом месте, вдали (около 100 сажен) от строений и всякого рода предметов, содержащих железо, и около 1 версты от трамвайных линий. При производстве наблюдений наблюдатель не должен иметь при себе никаких железных или стальных предметов и должен убедиться, что и в частях его одежды нет таковых, могущих оказывать влияние на магнит. Обратить внимание, чтобы хронометр, по которому наблюдался время, был достаточно далеко, чтобы не оказывать влияния на магнит.

**§ 64. Определение наклонения.** Очистив тщательно инклинер от пыли, особенно край круга и агатовые ножи, на которые кладется стрелка, тщательно очищают отпускаемой для того кисточкой и замшей цапфы стрелки, втыкая их в кусок бузинной сердцевины, кладут стрелку на аретирное приспособление и, не опуская ее, нивелируют прибор, пользуясь имеющимся при нем уровнем, так, чтобы ось вращения круга была вертикальна, опускают стрелку на ножи, после чего определяется положение магнитного меридиана. Это делается следующим образом. Поворачивают коробку со стрелкою, пока северный ее конец не укажет в точности  $90^\circ$  по вертикальному кругу, производят отсчет  $a_1$  по горизонтальному кругу, причем достаточно производить этот отсчет по одному из верньеров. Поворачивают вертикальный круг, пока южный конец стрелки не укажет в точности  $90^\circ$ , производят по тому же верньеру отсчет  $a_2$  по азимутальному кругу. Поворачивают коробку прибора на  $180^\circ$ , подняв и вновь отпустив аретиром стрелку, производят по тому же верньеру отсчеты  $a_3$  и  $a_4$ , как описано выше для  $a_1$  и  $a_2$ ; тогда вертикальный круг будет находиться в плоскости магнитного меридиана, если повернуть коробку так, чтобы отсчет по избранному верньеру был:

$$a = \frac{1}{4} (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \pm 90^\circ$$

если горизонтальный круг разделен в обе стороны от 0 до  $180^\circ$ , и

$$a = \frac{1}{4} (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

если круг разделен от 0 до  $360^\circ$ , что предпочтительнее. Установив круг в плоскость меридиана, замечают, в какую сторону обращена лицевая сторона (деления круга) — к востоку или западу, что и обозначают в записи словами: «круг к востоку» и «круг к западу». Скажем, первое положение избрано «круг к востоку». Стрелку из прибора вынимают, кладут на колодку и натиранием отпускаемыми при приборе

большими магнитами *перемагничивают* так, чтобы тот конец, который был раньше северным, стал южным, и наоборот. Для отличия концов на одном из них имеется марка.

Перемагничивание производится следующим образом. Положим, что конец с маркой был южным полюсом стрелки, а надо его сделать северным. Тогда ставят большие магниты, держа их почти вертикально к середине стрелки, притом так, чтобы южный полюс натирающего магнита двигался по той части стрелки, которая должна приобрести северный магнетизм, и наоборот. После этого магниты, слегка нажимая ими на стрелку, разводят от середины к концам, затем поднимают вновь, ставят у середины и вновь разводят, производя таких натираний от 10 до 15. После этого стрелку поворачивают в ее колодке так, чтобы цапфы обменялись местами, и вновь повторяют натирание по обратной стороне стрелки, само собою разумеется при этом обращают внимание, чтобы прежний конец натирался соответствующим полюсом. Таким образом, заново намагниченная стрелка вкладывается в коробку прибора лицевой стороной к лицевой его стороне и опускается на ножи. После этого стрелке дается вспомогательным магнитом небольшое отклонение, затем стрелку тем же магнитом «успокаивают» и производят отсчеты углов наклонения всякий раз по обоим концам стрелки и при двух ее установках помощью аретира, т. е. после каждого отсчета обоих концов стрелка поднимается и затем для второго отсчета вновь опускается на ножи. Из этой первой группы четырех отсчетов берут среднее, и так как таких групп будет восемь, то необходимо их классифицировать, чтобы не было ни пропусков, ни путаницы.

Эта классификация определяется следующими признаками:

- 1) намагничивание стрелки, т. е. северный ли ее полюс имеет марку или южный;
- 2) положение стрелки в коробке, т. е. лицевая сторона (или сторона с маркой) стрелки обращена к лицевой стороне коробки или к днищевой, иначе—от круга или к кругу;
- 3) обращен ли круг коробки к востоку или к западу.

Итак, отсчеты (т. е. в каждом случае среднее из четырех отдельных отсчетов положения концов стрелки) будут:

1. *Намагничивание* нормальное—северный конец с маркой:

a) *положение* стрелки лицевое: лицевая сторона к крышке.

- 1) круг к востоку отсчет  $i'_1$
- 2) круг к западу      »       $i'_2$

б) *положение* стрелки обратное: лицевая сторона ко дну.

- 3) круг к западу отсчет  $i'_3$
- 4) круг к востоку      »       $i'_4$

Среднее при нормальном намагничивании:  $i' = \frac{1}{4} (i'_1 + i'_2 + i'_3 + i'_4)$ .

По производстве этой серии отчетов стрелку перемагничивают, и после этого делают вновь такую же серию отчетов.

II. Намагничивание обратное: северный конец без марки.

а) положение стрелки лицевое: лицевая сторона к крыльце:

1) круг к востоку отсчет  $i_1''$

2) круг к западу      »     $i_2''$

б) положение стрелки обратное: лицевая сторона к днищу:

3) круг к западу отсчет  $i_3''$

4) круг к востоку      »     $i_4''$

Среднее при обратном намагничивании:  $i'' = \frac{1}{4} (i_1'' + i_2'' + i_3'' + i_4'')$ .

Наклонение:

$$i = \frac{1}{2} (i' + i'').$$

§ 65. Определение склонения (предполагая, что оно выполняется магнитным теодолитом) подразделяется на две части: а) астрономическую и б) магнитную.

Астрономическая часть при определении склонения сводится к определению азимута светила для сличения этого азимута с отсчетом по горизонтальному кругу, что и дает «ориентировку» этого круга. Магнитный теодолит в этом случае служит как простой теодолит и снабжен теми же главными частями, т. е. горизонтальным и вертикальным кругами, трубой, связанными с вертикальным кругом и уровнем.

Азимут определяется большей частью по Солнцу, причем или «по времени», или «по высоте». Подробности того или другого способа излагаются в курсах практической астрономии, сущность же состоит в том, что по установке теодолита так, чтобы главная ось была вертикальна, причем по самому его устройству и выверке механиком вторая ось будет горизонтальна, ибо она перпендикулярна к главной (в магнитном теодолите Бруннера уровня для проверки положения второй оси нет), наблюдают моменты прохождения краев Солнца через вертикальную нить трубы и замечают соответствующее положение вертикального круга по отсчетам верньера горизонтального круга.

Средний из моментов прохождения краев дает момент прохождения центра Солнца через нить. Таких моментов наблюдают, напр., два при положении вертикального круга «лево», т. е. с левой стороны от трубы, затем четыре при положении его «право» и затем два опять при положении «лево».

По установке прибора и до начала наблюдений Солнца избирают достаточно удаленный (около  $1\frac{1}{2}$  — 2 верст) резко окрашенный предмет (мира) и, наведя на него крест нитей трубы, производят отсчет горизонтального круга как при положении «право», так и «лево»,

По окончании наблюдений Солнца опять производят отсчет миры, чтобы убедиться, что круг не получил смещения.

По известной широте места  $\varphi$ , поправке хронометра относительно местного времени находят истинное время  $t$  в моменты прохождения Солнца и, выбрав склонение  $\delta$ , вычисляют азимут  $A$  по формуле:

$$\cotg A = \frac{\tg \delta \cos \varphi - \sin \varphi \cos t}{\sin t}$$

которую для удобства вычислений приводят к логарифмическому виду, положив

$$\cotg y = \frac{\tg \delta}{\cos i}$$

Тогда

$$\cotg A = \cotg t \frac{\cos(\varphi + y)}{\sin y}$$

Взяв из вычисленных азимутов среднее, сличают его со средним из отсчетов по горизонтальному кругу и находят как ориентировку последнего, так и азимут миры.

Определение азимута Солнца по «высотам» лучше всего соединить с определением времени для получения поправки хронометра относительно местного времени или для определения долготы места.

После установки теодолита и проверки «места зенита», что делают, наводя перекрестье питет трубы на какой-либо отдаленный предмет при круге «лево» и при круге «право» и взяв полусумму полученных отсчетов, берут две высоты нижнего края Солнца, замечая соответствующие азимуты левого края Солнца, моменты по хронометру и отсчеты горизонтального круга. Этого достигают, наведя трубу так, что одновременно нижний край видимого диска Солнца касается горизонтальной нити, левый же его край — вертикальной. Для этого выбирается такая четверть поля (в данном случае правая верхняя), чтобы при видимом движении диска Солнца наблюдаемые края удалялись от обеих нитей. Тогда вертикальную нить, действуя микрометрическим винтом горизонтального круга,держивают все время в касании к левому краю диска, горизонтальную же нить несколько «налипают» на диск и, не трогая более микрометрического винта вертикального круга, ведут счет ударов хронометра и замечают момент, когда при видимом движении через поле трубы нижний край диска касается горизонтальной нити.

Затем ставят круг «право» и берут четыре высоты верхнего края с соответствующими азимутами правого края Солнца (производя касания в левом нижнем углу поля трубы), замечая при них моменты и отсчеты по горизонтальному кругу.

А. Н. Крылов

После этого опять ставят круг «лево» и берут две высоты с азимутами и моментами, как в первый раз.

Наблюдения подразделяют на две группы: 1, 2, 3, 4, а затем 5, 6, 7, 8. Для первой группы берут среднее попарно между 1 и 4, 2 и 3, для второй — между 5 и 8, 6 и 7, а затем в каждой группе — среднее из этих средних. Вычисляют азимут  $A$  и часовой угол Солнца  $t$  по формулам:

$$\cot^2 \frac{1}{2} A = \sec s \cdot \sec(s-p) \sin(s-h) \sin(s-\varphi)$$

$$\tg \frac{1}{2} t = \frac{\sec(s-p) \sin(s-h)}{\cot \frac{1}{2} A}$$

где  $\varphi$  — широта места,  $h$  — высота Солнца,  $p$  — его полярное расстояние

$$s = \frac{1}{2} (\varphi + p + h).$$

Вычисление проверяется по формуле:

$$\sin A = \sin t \cdot \cos \delta \cdot \operatorname{sech} h$$

Расположение вычислений см. ниже.

Сличение истинных азимутов Солнца с соответствующими им средними отсчетами горизонтального круга дает его ориентировку и азимут миры.

После того как ориентировка круга и азимут миры получены, склонение находят, сличая отсчеты горизонтального круга, полученные при наведении трубы на мишень магнита в прямом и обращенном его положении, как о том было сказано при описании теодолита.

Для примера приводится образец того же отсчета для американского типа теодолита с окулярной шкалой, избавляющей от необходимости выкидать полное успокоение магнита и тем значительно упрощающей наблюдение.

По этому образцу нетрудно составить схему записей наблюдений и их обработки для любого типа прибора.

Об определении склонения при помощи компаса, снабженного азимутальным кругом и пеленгатором, говорить не будем, ибо оно предполагается известным читателю по курсу навигации и ежедневной практике на море. Об определении поправки компаса заметим лишь, что для исключения девиации надо при определении склонения определить поправку компаса на четырех главных румбах, взять среднее, которое и исправить «постоянной» девиацией (коэффициент  $A$ ).

**§ 66. Определение горизонтальной составляющей напряжения** состоит из двух операций: 1) наблюдения продолжительности одного простого размаха магнита и 2) наблюдения отклонения. При описании приборов

было указано, что и то и другое наблюдение производится в одном и том же приборе.

Для наблюдения качаний, положим (для определенности речи) прибором Муро-Бруннера, приводят плоскость вертикального круга в плоскость магнитного меридиана (визируя в лупу на северный конец магнита).

Отклонив магнит от положения равновесия, определяют сперва приблизенно по хронометру или секундомеру продолжительность 10 двойных размахов (продолжительность, или период, двойного, или полного, размаха есть промежуток времени между двумя последовательными прохождениями магнита через положение равновесия в том же направлении, напр. слева направо). По этому времени 10 полных размахов вычисляется приближенная величина продолжительности одного простого размаха ( $\frac{1}{20}$  указанного выше времени) и по нему 5, 10 и 100 простых качаний. Это дает возможность рассчитать с точностью до 1—2 сек. начало 5, 10, 15-го и т. д. качания, а также 100, 105, 110, 115-го и т. д., если к вычисленной продолжительности 5, 10, ..., 100, ... качаний прибавить начальный момент.

Отклонив магнит от положения равновесия на 10—12°, пропускают несколько первых качаний, затем замечают момент прохождения магнита через положение равновесия, скажем слева направо, который и принимают за начальный, придают к этому моменту исчисленную продолжительность 5, 10, 15, ..., 45 качаний, затем 100, 105, 110, ..., 145 и, не производя уже счета их, просто замечают по хронометру точные моменты прохождения, причем все нечетные прохождения будут справа налево, все четные—слева направо.

Разности между первыми числами и соответствующими последними дадут 10 величин, выражаящих каждая продолжительность 100 качаний магнита, соответствующих попеременно четным и нечетным простым качаниям, так что средняя из них будет свободна от возможной погрешности, напр. вследствие перемены положения магнитного меридиана. Сложив эти 10 величин и разделив сумму на 1000, получим период простого размаха. Институт Карнеджи предпочитает брать продолжительность 70 качаний а не 100.

Наблюдения отклонений производят, заменив в «домике» магнит, служивший для качаний, другим, вспомогательным магнитом. Круг прибора приводится в плоскость магнитного меридиана, и по обоим концам вспомогательного магнита производится отсчет положения меридиана по горизонтальному кругу. После этого главный магнит кладется в предназначное для него гнездо на западной штанге в расстоянии  $r_1$  северным концом к востоку, и «домик» поворачивается до тех пор, пока штрих на вспомогательном магните при рассмотрении в лупу не совпадет со штрихом индекса. Тогда производят точное наведение и затем отсчеты по горизонтальному кругу для обоих концов вспомогательного магнита, перекладывают отклоняющий магнит северным концом к западу и определяют вновь положение вспомогательного магнита. Среднее арифметическое  $i'$  из полуразностей полученных отсчетов по соответственным концам вспомогатель-

нога магнита представит угол отклонения, производимый при расстоянии  $r_1$  на западной штанге.

Переносят отклоняющий магнит в гнездо, соответствующее тому же расстоянию на восточной штанге, и, повторив описанную операцию, находят отклонение  $\alpha''_1$ . Среднее арифметическое

$$\delta_1 = \frac{\alpha' + \alpha''}{2}$$

и представит отклонение, соответствующее расстоянию  $r_1$ .

Совершенно так же определяют затем отклонение  $\delta_2$ , соответствующее расстоянию  $r_2$ . При производстве наблюдений как начаний, так и отклонений замечают температуру, чтобы ввести, если по точности наблюдений это необходимо, надлежащие поправки, как о том сказано в § 58, где объяснен и порядок вычислений.

Для большей ясности мы приводим образцы записей наблюдений и образцы вычислений из отчетов Института Карнеги, где эта часть благодаря громадной практике доведена до совершенства.

#### Образцы наблюдений и вычислений

##### I. Наблюдения Солнца для определения широты

Станция: Текрит, Турция.

Теодолит № 7.

Хронометр № 257.

Число. Вторник 13 декабря 1910 г.

Наблюдатель: W. H. S.

Температура 16° С.

Набл. края солн. диска	Верт. круг	Моменты по хронометру	Отсчеты вертикального круга		
			A	B	Среднее
В	П	8 <sup>h</sup> 53 <sup>m</sup> 52 <sup>s</sup>	212°44'.2	42'.5	32°43'.4
И	Л	8 55 13	328 10 .0	09 .0	31 50 .5
И	Л	8 55 55	328 09 .8	08 .8	50 .7
В	П	8 57 04	212 45 .0	44 .0	32 44 .5
В	П	8 57 46	212 45 .3	44 .2	44 .8
И	Л	8 58 58	328 08 .8	07 .8	31 51 .7
И	Л	8 59 40	328 08 .7	07 .7	51 .8
В	П	9 01 02	212 45 .5	44 .5	32 45 .0
В	П	9 01 43	212 45 .7	44 .7	45 .2
И	Л	9 02 50	328 08 .7	07 .7	31 51 .8
И	Л	9 03 35	328 09 .2	08 .0	51 .4
В	П	9 04 47	212 45 .7	44 .7	32 45 .2
В	П	9 05 30	212 45 .5	44 .5	45 .0
И	Л	9 06 30	328 09 .5	08 .5	31 51 .0
И	Л	9 07 11	328 09 .7	08 .5	50 .9
В	П	9 08 19	212 44 .8	43 .7	32 44 .2

Поправка хроном. относи-  
тельно средн. местн. врем. + 2<sup>h</sup>52<sup>m</sup>07<sup>s</sup>  
Средн. местн. время в  
истин. полдень 11<sup>h</sup>53<sup>m</sup>57<sup>s</sup>  
Момент по хроном. в  
истин. полдень 9<sup>h</sup> 01<sup>m</sup> 50<sup>s</sup>

Наибольш. наблюден. вы-  
сота 32 18.5  
Рефракция и параллакс -1.4  
 $h$  32 17.1  
 $90^\circ - h = z$  57 42.9  
 $\delta$  23 06.7  
 $\varphi$  34 36.2 N

Вычисление широты по близмерианным высотам  
Солнца

$t$	$m$	$A$	$Am$	Приведен. высота края	Приведен. вы- сота ☽
-7°58'	2°08		1°87	32°45'22	
6 38	1°44		1°30	31 51 .80	32°18' .51
5 35	1°44		1°03	51 .73	
4 46	0°74		0°67	32 45 .17	18 .45
4 04	0°54		0°49	45 .24	
2 52	0°27		0°24	31 51 .94	18 .59
2 10	0°15		0°14	51 .94	
0 48	0°02	0°.90	0°02	32 45 .02	18 .48
-0 07	0°00		0°00	45 .20	
+1 00	0°03		0°03	31 51 .83	18 .52
1 45	0°10		0°09	51 .49	
2 57	0°28		0°25	32 45 .45	18 .47
3 40	0°44		0°40	45 .40	
4 40	0°71		0°64	31 51 .64	18 .52
5 21	0°94		0°85	51 .75	
6 29	1°38		1°24	32 45 .49	18 .62
Среднее 32°18' .52					
Рефракция и параллакс					
log cos $\delta$	1.9639		$h$	32 17 .16	
log cos $\varphi$	1.9155		$z$	57 42 .84	
log cos $\cos \varphi$	0.0729		$\delta$	09 04 .60	
log $A$	1.9521		$\varphi$	34°30' .2 A	

Выборки склонения Солнца  $\delta$  и уравнение времени  $E$ 

	13 декабря 1910 г.	13 декабря 1910 г.
Число по гражд. сч.		
Промеж. в часах в десятых после гринич. полдня	-6°.7	-6°.6
Часовая пер. $\rightarrow$ в гринич. полдень	-0°.179	-0°.179
Поправка на промеж. средн. час $\delta$ для промеж.	+0.003	0.000
Поправка к $\delta$	-0.176	-0.179
$\delta$ в средн. гринич. полдень	+1.2	-0.1
$\delta$ в момент набл.	-23°07'.0	-23°07'.9
Часовая пер. ур-ния врем. в гринич. полдень	-23°06'.0	-23°07'.3
Поправка на промеж.	-1°.173	+1°.173
Средн. час $\Delta E$ для промеж.	+0.002	0.000
Поправка к $E$ для средн. гринич. полдня	+1.17	+1.17
$E$ в средн. гринич. полдень	-7.8	+0.7
	-5°59'.6	+0.7
$E$	-6°07'.4	-5°53'.9
	-6°07'.3	-5°53'.9

Станция: Текирит, Турция.  
Теодолит № 7  
Хронометр № 257

2. Наблюдения Солнца для определения азимута и времени

Число: Вторник 13 декабря 1910 г.  
Наблюдатель: W. H. S.  
Температура 6°.5°C

Набл. края Солн- ца	Верт. круг	Моменты по хронометру	Отсчеты по горизонтальному кругу			Отсчеты по вертикальному кругу		
			A	B	Среднее	A	B	Среднее
П	Л	Мира A	274°03'10"	03'20"	274°03'15"	348°42'0	274°03'4	41'0
П	Л	"	94 03 40	03 20	94 03 30	238 58 20	239 14 55	11°18".5
П	Л	5°18m27s	238 58 30	58 10	238 58 20	348 26 .7	11 33 .9	
П	Л	20 04	239 15 00	14 50	239 14 55	492 47 .7	46 .5	12 47 .1
П	Л	22 05.5	59 00 50	00 30	59 00 40	193 02 .5	01 .5	13 02 0
П	Л	23 43.5	59 17 00	17 00	59 17 00			
1 и 4	—	5 21 05.2			59 07 40			42 10 .2
2 и 3	—	21 04.8			07 48			10 .5
1	—	5 21 05.0			59 07 44			12 10 .4
Б	Л	5°25m51s	59°39'20"	39'00"	59°39'10"	193°22'.5	21'.5	13°22'.0
Б	Л	27 21	59 54 20	54 10	59 54 15	193 36 .5	35 .5	13 36 0
Б	Л	29 16.5	240 50 30	50 20	240 50 25	346 60 .0	59 .0	13 00 .5
Б	Л	30 49.5	241 06 00	05 40	241 05 50	346 46 .0	44 .5	13 14 .8
1 и 4	—	5 28 20.2			60 22 30			13 18 .4
2 и 3	—	28 18.8			22 20			18 .2
II	—	5 28 19.5			60 22 25			13 18 .3
Л	Л	Мира A	94°03'40"					
Л	Л	"	274 02 50					
Л	Л	Мира B	73°53'50"					
Л	Л	"	253 52 50					
					53'30"	73°58'40"		
					52 50	253 52 50		

## 3. Вычисление долготы и азимута

Станция: Текирт, Турция

	13 декабря 1910 г., до полудня	13 декабря 1910 г.. после полудня		
$k$	12°06'.1	13°14'.4	13°14'.8	12°17'.9
$\varphi$	34 36 .2	34 36 .2	34 36 .2	34 36 .2
$P$	113 06 .0	113 06 .0	113 07 .3	113 07 .3
$2s$	159 48 .3	160 56 .6	160 58 .3	160 01 .4
$s$	79 54 .2	80 28 .3	80 29 .2	80 00 .7
$s-p$	—33 11 .8	—32 37 .7	—32 38 .1	—33 06 .6
$s-h$	67 48 .1	67 13 .9	67 14 .4	67 42 .8
$s-\varphi$	45 18 .0	45 52 .1	45 53 .0	45 24 .5
log sec $s$	0.75619	0.78111	0.78179	0.76083
log sec ( $s-p$ )	0.07738	0.07460	0.07463	0.07695
log sin ( $s-h$ )	1.96656	1.96476	1.96479	1.96628
log sin ( $s-\varphi$ )	1.85175	1.85597	1.85608	1.85256
log cotg $^2 \frac{1}{2} A$	0.65188	0.67644	0.67729	0.65662
log cotg $\frac{1}{2} A$	0.32594	0.33822	0.38864	0.32831
$A$ от $S$	50°32'.8	49°18'.4	49°15'.9	50°18'.3
Отсч. по кругу	59 07 .7	60 22 .4	39 58 .2	40 00 .5
" мерид.	109 40 .5	109 40 .8	349 42 .3	349 42 .2
Мира	274 03 .4	274 03 .2	154 04 .8	154 04 .2
Азимут миры	164 22 .9	164 22 .4	164 22 .5	164 22 .0
Среднее 164°22'.4				
log sec ( $s-p$ ) sin ( $s-h$ )	0.04394	0.03936	0.03942	0.04323
log tg $\frac{1}{2} t$	1.71800	1.70114	1.70078	1.71492
$t$	55°09'53"	53°21'34"	53°19'17"	54°49'35"
$t$ во врем.	—3h40m39s.5	—3h33m26s.3	+3h33m17s.1	—3h39m19s.7
$E$	— 6 07 .4	— 6 07 .3	— 5 58 .9	— 5 58 .9
Средн. местн. время	8 13 13 .1	8 20 26 .4	15 27 18 .2	15 33 20 .8
Показ. хроном.	5 21 05 .0	5 28 19 .5	12 35 10 .8	12 41 14 .0
По равна местн. врем.	2 52 08 .1	2 52 06 .8	2 52 07 .4	2 52 06 .8
Поправка гринич. врем.	—2 39 .0	— 2 39 .0	— 2 39 .0	— 2 39 .0
Долгота	2 54 47 .1	2 54 45 .9	2 54 46 .4	2 54 45 .8

$$\begin{aligned} &\text{Среднее} + 2h54m46s.3 \\ &= 43^\circ 41' 6E \end{aligned}$$

Проверка вычисления азимута и часового угла

Формула:  $\sin A = \sin t \cos \delta \sec h$

	I	II	III	IV
$t$	55°09'53"	53°21'34"	53°19'17"	54°49'55"
$\delta$	23°06'.0	23°06'.0	23°07'.3	23°07'.3
$h$	12 06.1	13 14.4	13 14 .8	12 17.9
Азимут по выч. $A_0$	50 32.8	49 18.4	49 15 .9	50 18.3
$\log \sin t$	1.91424	1.90439	1.90417	1.91247
$\log \cos \delta$	1.96370	1.96370	1.96363	1.96363
$\log \sec h$	0.00976	0.01170	0.01171	0.01008
$\log \sin A$	1.88770	1.87979	1.87951	1.88618
$\log \sin A_0$	1.88770	1.87979	1.87952	1.88618

Горизонтальная составляющая напряжения. Качания

Станция: Текрит, Турция.

Число: Вторник 13 декабря 1910 г.

Магнитный теодолит № 7.

Наблюдатель: W. H. S

Хронометр № 257.

Суточный ход 0.4 сек., уходит вперед от среднего времени

№ качания	Момент о хронометру	Темп. $t_1$	Отсчеты по шкале	Время 70 качаний
0	6 <sup>h</sup> 32 <sup>m</sup> 50 <sup>s</sup> .8		22 <sup>d</sup> 78 <sup>d</sup>	
5	33 08 .8			
10	26 .7			
15	44 .7			
20	34 02 .6			
25	20 .5			
30	38 .4			
35	56 .4			
40	35 14 .3			
45	32 .2			
70	37 01 .9	10°.5	22 <sup>d</sup> 78 <sup>d</sup>	
75	19 .8			
80	37 .7			
85	55 .7			
90	38 13 .7			
95	31 .5			
100	49 .4			
105	39 07 .4			
110	25 .3			
115	43 .2			
Среднее	1 <sup>h</sup> 36 <sup>m</sup> 12 <sup>s</sup> .0	10°.70	— —	251 <sup>s</sup> .02 = T'

Формулы:  $T^2 = T'^2(1+\omega)[1-q(t_1-t_2)][1+h \cdot \frac{H}{M_s}]$ ;  $M_s H = \frac{\pi^2 G_s}{T^2}$

Определение кручения (1 д.л. = 1'.49)

Отсчет го кругу кручения	Отсчеты по шкале	Среднее	Разность
13°	48 <sup>d</sup> .2	51 <sup>d</sup> .8	50.00
103	44 .8	49 .1	46.95
283	51 .0	54 .7	52.85
373	48 .6	51 .1	49.85

$$\text{Среднее: } \theta = 2^d.99 = 4'.45$$

$$\omega = \frac{4.45}{5400} = 0.00082$$

$$0.434\omega = 0.00036$$

Местн. средн. время 9<sup>h</sup>28<sup>m</sup>

$$t_1 - t_2 = -1^\circ.40$$

Продолжительность 1 размаха	3.58600
Поправка на ход	—2
	<hr/>
	$T' = 3.5860$
	<hr/>
	$\log T' = 0.55461$
	<hr/>
	$\log T'^2 = 1.10922$
	<hr/>
	$\log (1 + \omega) = \quad \quad \quad 36$
	<hr/>
	$\log [1 - q(t_1 - t_2)] = \quad \quad \quad 29$
	<hr/>
	$\log \left[ 1 + h \frac{H}{M_2} \right] = \quad \quad \quad 83$
	<hr/>
	$\log T^2 = 1.10070$
	<hr/>
	$\log G_s = 3.37230$
	<hr/>
	$\log M_2 H = 2.26160$

Горизонтальная составляющая напряжения. Отклонение  
Станция: Текирт, Турция  
Магнитный теодолит № 7  
Хронометр № 257  
Оглоноющий магнит № L (E) под прямым углом к подвешенному магниту № S (E)

Число: Вторник 13 декабря 1910 г.  
Наблюдатель: W. H. S.

Положение отклоненного магнита	Северный конец обра-щен к №	Расст. $r = 27.5$ см				Отсчеты по горизонтальному кругу				Расст. $r = 35.0$ см
		№	—	—	Среднее	№	—	—	Среднее	
Восточное	O	1	124°35'00"	34'50"	34'55"	2	118°04'50"	04'50"	04'50"	
	W	4	99 39 40	39 20	39 30	3	106 07 30	07 20	07 25	
	Среднее	$a = 112^{\circ}07'12''$				$c = 112^{\circ}06'08''$				
	$\frac{2\delta}{2}$									
Западное	W	5	99°32'00"	31'40"	31'50"	6	106°04'50"	04'40"	04'45"	
	O	8	124 35 50	35 30	35 40	7	118 05 30	05 10	05 20	
	Среднее	$b = 112^{\circ}03'45''$				$d = 112^{\circ}05'02''$				
	$\frac{2\delta}{2}$					$\frac{c+d}{2}$				
Магн. мерид.			$\frac{a+b}{2}$	25°03'50"						
				112°05'28"						

Среднее напр. южн. магн. мерид. 112°05.'5

Формула:  $\frac{H}{M_2} = \frac{C_2}{\sin \delta}$ ;  $\log H = -\frac{1}{2} \left( \log \frac{H}{M_2} + \log M_2 H \right)$

I	II	III
$\frac{\delta \text{ (средн.)}}{2}$	$24^{\circ}59'38''$	$41^{\circ}59'00''$
Начало	42 29 49	5 59 30
Конец	$6^h58'm$	$t_2 = 11^{\circ}8'$
Среднее	$7 17$	$t_2 = 12^{\circ}4'$
Поправка хроном.	$\frac{7 07.5}{+2 52.1}$	$t_2 = 12.10$
Средн. местн. время	10 00	

$\log C_2$	$5.39098$	$5.67423$
$\log \sin \delta$	$\frac{1.33528}{1.01863}$	
$\log \frac{H}{M_2}$	$4.65555$	$4.65560$
$\log M_2 H$	$2.26160$	$2.26160$
$\log H$	$0.28753$	$0.28747$
$\log M_2$	$2.80292$	$2.80300$
Температ. попр. $\log [1+q(t_2 - 20^{\circ})]$	$-0.00166$	$-166$
$\log M_0$	$2.80126$	$2.80134$
$M_0$	632.79	632.92

## Наблюдения отклонения инклинометром

**Станция:** Текрит, Турция

Число: Вторник 13 декабря 1910 г.

## Инклиниатор № 202.

Наблюдатель: W. H. S.

### Хронометр № 257

## Стрелка № 1

Конец стрелки, помеченный буквою *A*—внизу, микроскоп *A*—внизу

## Н а м а г н и ч е н и е   п р я м о е

## Намагничение обратное

Конец стрелки, помеченный буквой *B*—внизу, микроскоп *A* вверху

Наклонение	= + 47° 41'.1
Начало наблюдения	10° 07'
Конец *	11 31
	<hr/>
Среднее	10 49
Поправка хроном.	+ 2 52

Средн. местн. время 13 41

Круг в магн. 1-м вертикале
Круг N стрелка S конец 10°53'
N • 10 36
Круг S стрелка N • 190 59
S • 190 47
Среднее 10°49'

100° 49'

Отсчет на магнитный
меридиан 280° 49'

### Определение склонения

Станиця Текрит Турция

Число: Вторник 13 декабря 1910 г.

Магнитный телодолит № 7

Наблюдатели W. H.S.

Мира: балкон дома в Текриде:

Хронометр № 257

Магнит 2 L

Направление нулевого кручения 13°

Момент по хроном.	Положение магнита прямое или обратное	Отсчеты по шкале			Отсчеты по горизонтальному кругу		
		левый	правый	среднее	мира	магнит	
6° 20'	Пр.	41°.8	48°.4	45°.35	До A	273° 58' 00"	111° 05' 40"
21	Пр.	42.0	48.2	45.35	После B	93 58 00	291 04 40
23	Обр.	48.8	52.8	50.80	До A	273 58 00	111 04 40
24	Обр.	48 4	52.8	50.85	После B	93 58 20	291 04 40
25	Обр.	49.0	52.8	50.40			
26	Обр.	45.2	52.7	50.45			
28	Пр.	43.8	47.5	45.40			
29	Пр.	44.0	46.7	45.35	Среднее	273° 58' 05"	111° 04' 45"

Средний отсчет по плаке 48°.12

Центр 50 .00

Центр—среднее + 1.88

Приведение к центру 2.8

Отсчет по кругу 111° 04'.8

Отсчет магнитного 111°07'.6  
меридиана

Отсчет миры 273 58 .1

Азимут миры 164 22 .4

Истинный азимут  
S магн. 109 35 .7

Склонение + 1°34'.9

Прямое положение  
магнита: отсчет  
шкалы

45°.36

Обратное положение  
магнита

50 .88

Средний отсчет  
шкалы

45 .12

Средний момент  
по хроном.

6°24".5

Поправка хроном. + 2 59 .4

Средн. местн. время 9 17

Причание. Болванка для  
раскручивания подвешена в продоль-  
жение 5 мин. Температура 9°. Ясно.  
Ветер NW.

## ГЛАВА VI

### О магнитной съемке

§ 67. Магнитную съемку какой-либо страны или области называется определение магнитных элементов в пунктах этой области, в таком числе избранных и так расположенных, чтобы по ним можно было составить для этой области магнитные карты.

Отсюда видно, что при магнитной съемке число и расположение пунктов всецело зависят от характера распределения магнитных элементов в данной области: если это распределение «правильное», т. е. значения элементов, а главным образом, быстрота и характер их изменений с изменением места (долготы и широты) согласуются с изменениями, показанными для этого места на генеральных магнитных картах, то пункты могут быть избраны «редко», в противном же случае их надо избрать более «густо».

Слова «редко» и «густо» получают определенность, если условиться, что пункты должны быть избраны настолько близкими между собою, чтобы разности магнитных элементов в смежных пунктах были бы пропорциональны расстояниям между ними в пределах точности наблюдений.

При таких условиях в местах с нормальным распределением магнетизма пункты могли бы быть избраны в расстоянии 50—100 км; в местах аномальных густота пунктов всецело зависит от характера самой аномалии и той подробности, с которой ее требуется исследовать, и расстояние между пунктами может сводиться к нескольким десяткам метров.

Так как некоторые аномалии занимают сравнительно небольшое протяжение (20—30 км), то, чтобы их не пропустить, густоту сети пунктов, даже в местах с правильным распределением, усиливают и берут их в расстоянии 20—25 км один от другого с тем, чтобы обнаруженные аномалии исследовать затем подробнее.

Но кроме такой систематической магнитной съемки целых площадей производят часто съемки так сказать «маршрутные», т. е. по какой-нибудь линии, напр. железнодорожной или шоссейной дороги или вообще какого-либо тракта, реки, водного пути и т. п. Данные, получаемые таким образом, конечно, не дают возможности составить магнитную карту, но они могут быть весьма ценными при изучении общего распределения земного магнетизма, как указывал еще Гаусс.

Наконец при производстве «морской съемки» во всех пунктах обязательно определяется склонение компаса, но при теперешних средствах и разработанных типах простых и весьма совершенных переносных приборов, описанных выше, не представляет больших затруднений и определение всех трех элементов, знание которых существенно важно для полного уничтожения девиации компаса, не прибегая к береговым наблюдениям.

§ 68. Способы определения элементов земного магнетизма и пользования предназначенными для этого приборами подробно изложены в гл. V, там же указаны и предосторожности, которые надо соблюдать при выборе пунктов наблюдений, и мы к этому возвращаться не будем, а остановимся в этой главе несколько подробнее на сводке полученных результатов и на способах составления самых карт, ограничиваясь случаем «небольшой» области, т. е. 500—600 км по широте и по долготе.

Как пример такой обработки приведем ту, которую выполнили Thorpe и Rücker (Торп и Рюккер) при составлении магнитной карты Англии.

Rücker и Thorpe произвели в 1884—1888 гг. свою первую магнитную съемку Англии, затем они ее значительно дополнили, но мы ограничимся для примера первою их работою.

Полное число пунктов, где определены все три элемента, — 200.

Так как работа продолжалась пять лет, то, чтобы исключить вековые изменения элементов, их привели к эпохе 1 января 1886 г., пользуясь данными об этих изменениях на основании имевшихся прежних определений элементов во многих пунктах сети.

Для исключения суточных и случайных изменений пользовались непрерывной записью вариационных приборов Главной английской магнитной обсерватории в Кью, близ Лондона.

Эта запись дает полное изменение рассматриваемого элемента, состоящееся из суточного изменения и возмущения. Суточное изменение зависит от *местного* времени, возмущение происходит одновременно для всей земной поверхности. Поэтому поправка к наблюденным в каком-либо пункте элементам делалась так: для момента (т. е. среднего гриничского времени) наблюдений с вариационной кривой в Кью снималась разность между средним изменением элемента, относящимся к рассматриваемому времени, и действительным, и эта разность представляла «возмущение» элемента и придавалась алгебраически к наблюденной в рассматриваемом пункте величине; что же касается первой части, т. е. среднего суточного изменения, то придавалось то его значение, которое было в Кью в тот же момент по *местному* времени, как и для *местного* времени наблюдения в пункте.

После того как все наблюдения приведены таким образом к одной эпохе и исправлены от суточного хода и возмущений, ими можно пользоваться для составления магнитной карты.

Сличение элементов в смежных пунктах показало, что изменения их с широтою и долготою можно считать пропорциональными расстояниям приблизительно до 150 миль, поэтому вся обследованная площадь была разделена на прямоугольные участки, простирающиеся на  $3^{\circ}$  по широте и  $5^{\circ}$  по долготе, расположенные, как видно, так, что они частями перекрывают друг друга.

## Распределение участков

№ участка	Границы		Центральный пункт	
	широта $\varphi$	долгота $\lambda$	широта $\varphi_0$	долгота $\lambda_0$
I	56 до 59°	2°W до 8°W	56°48'.0	4°19'.0
II	54 » 57	0 W » 6 W	55 27 .3	3 41 .6
III	52 » 55	0 W » 5 W	53 26 .7	2 26 .0
IV	50 » 53	2 O » 3 W	51 47 .7	0 17 .5
V	53 » 55°30'	5 W » 10 W	54 2 .9	7 36 .5
VI	52 » 55	3 W » 8 W	53 29 .0	5 43 .0
VII	49 » 52	1 W » 6 W	50 47 .0	3 1 .1
VIII	51 » 54	5 W » 11 W	52 57 .1	8 13 .1
IX	50 » 53	3 W » 8 W	51 49 .5	4 47 .3

В тех случаях, когда распределение пунктов наблюдений было значительно неравномерным, сперва приводили это распределение условно как бы к одинаковой «плотности», приписывая наблюдениям тем меньший вес, чем их больше приходилось в прямоугольнике размерами в 1° по широте и 1° по долготе. Так, напр., в прямоугольнике между 52—53° и 0—1°W заключается 8 пунктов, в прямоугольнике, ограниченном 54—55° и 2—3°W, заключается 3 пункта. Назначая первым вес 1, приписывали вторым вес  $\frac{3}{8}$ , или, иначе, каждому из пунктов первого прямоугольника вес  $\frac{1}{8}$ , каждому из пунктов второго вес  $\frac{1}{8}$ .

Таким образом, для каждого участка получалась таблица такого вида:

## Участок № а. Распределение и вес пунктов

№ пункта общий	№ пункта в участке	Вес $p$	Широта $\varphi$	Долгота $\lambda$	Склонение $\delta$	Наклонение $I$	Напряжение $H$
$n$	1	$p_1$	$\varphi_1$	$\lambda_1$	$\delta_1$	$I_1$	$H_1$
$i$	2	$p_2$	$\varphi_2$	$\lambda_2$	$\delta_2$	$I_2$	$H_2$
$k$	3	$p_3$	$\varphi_3$	$\lambda_3$	$\delta_3$	$I_3$	$H_3$
$a$	4	$p_4$	$\varphi_4$	$\lambda_4$	$\delta_4$	$I_4$	$H_4$

По этим данным прежде всего вычисляются координаты  $\varphi_0$  и  $\lambda_0$  и значения  $\delta_0$ ,  $I_0$ ,  $H_0$  элементов в «центральном» пункте участка по формулам:

$$(1) \quad \begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{\sum p_i \varphi_i}{\sum p_i} = \frac{p_1 \varphi_1 + p_2 \varphi_2 + p_3 \varphi_3 + \dots}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots} \\ \lambda_0 &= \frac{\sum p_i \lambda_i}{\sum p_i} = \frac{p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 + p_3 \lambda_3 + \dots}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots} \\ \delta_0 &= \frac{\sum p_i \delta_i}{\sum p_i} = \frac{p_1 \delta_1 + p_2 \delta_2 + p_3 \delta_3 + \dots}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots} \\ I_0 &= \frac{\sum p_i I_i}{\sum p_i} = \frac{p_1 I_1 + p_2 I_2 + p_3 I_3 + \dots}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots} \\ H_0 &= \frac{\sum p_i H_i}{\sum p_i} = \frac{p_1 H_1 + p_2 H_2 + p_3 H_3 + \dots}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots} \end{aligned}$$

Как уже сказано, размеры участков избраны так, что в каждом участке изменение любого элемента пропорционально изменению широты и долготы. Поэтому для рассматриваемого участка №  $\alpha$  и для любого пункта с координатами  $\varphi$  и  $\lambda$ , лежащего внутри участка, будем иметь, напр. для склонения  $\delta$ , соотношение:

$$(2) \quad \delta - \delta_0 = A(\varphi - \varphi_0) + B(\lambda - \lambda_0)$$

где  $A$  и  $B$  — два пока неизвестных, постоянных для данного участка, коэффициента.

Для определения этих коэффициентов каждое из наблюдений доставляет одно уравнение, которое получится, если подставить, вместо  $\delta$ ,  $\varphi$  и  $\lambda$ , величины, относящиеся к пункту этого наблюдения.

Таким образом, получим систему уравнений:

$$(3) \quad \begin{aligned} (\varphi_1 - \varphi_0)A + (\lambda_1 - \lambda_0)B &= \delta_1 - \delta_0 \\ (\varphi_2 - \varphi_0)A + (\lambda_2 - \lambda_0)B &= \delta_2 - \delta_0 \\ (\varphi_3 - \varphi_0)A + (\lambda_3 - \lambda_0)B &= \delta_3 - \delta_0 \\ \dots &\dots \\ (\varphi_k - \varphi_0)A + (\lambda_k - \lambda_0)B &= \delta_k - \delta_0 \end{aligned}$$

число которых  $k$ , равное числу пунктов в участке, будет значительно превышать число неизвестных, которых здесь два, а именно  $A$  и  $B$ .

Для нахождения наиболее вероятных значений коэффициентов  $A$  и  $B$  по этой системе  $k$ -уравнений составляют систему двух «нормальных» уравнений, для чего можно применять различные способы:

1) Способ наименьших квадратов, данный Гауссом, наиболее совершенный, состоит в том, что для получения первого нормального уравнения каждое уравнение системы множится на «свой вес», т. е. «вес» того пункта, к которому это уравнение относится, и на коэффициент при неизвестном  $A$ , и все полученные таким образом уравнения складываются. Для получения второго нормального уравнения каждое уравнение множится на свой вес и на коэффициент при втором неизвестном, и все уравнения складываются.

Таким образом, в нашем случае система нормальных уравнений будет:

$$(4) \quad \begin{aligned} A \sum p_i (\varphi_i - \varphi_0)^2 + B \sum p_i (\varphi_i - \varphi_0)(\lambda_i - \lambda_0) &= \sum p_i (\delta_i - \delta_0)(\varphi_i - \varphi_0) \\ A \sum p_i (\varphi_i - \varphi_0)(\lambda_i - \lambda_0) + B \sum p_i (\lambda_i - \lambda_0)^2 &= \sum p_i (\delta_i - \delta_0)(\lambda_i - \lambda_0) \end{aligned}$$

из которых и найдем величины  $A$  и  $B$ .

Но так как этот способ требует довольно продолжительных вычислений вследствие большого числа уравнений, то вместо него применяют

менее совершенные, но более простые способы, дающие практически для рассматриваемой цели результаты, почти не отличающиеся от доставляемых методом наименьших квадратов.

2) Так, Rücker и Thorpe применили такой прием. Для получения первого нормального уравнения они взяли лишь пункты, расположенные к северу от центрального, и, умножив каждое из выбранных таким образом уравнений системы (3) на его вес, составили их сумму. Для получения второго уравнения взяли лишь пункты, лежащие к востоку от центрального, и, умножив соответствующие уравнения на их веса, составили их сумму.

3) Вместо этого приема можно поступить, и это предпочтительнее, так. Прежде всего все уравнения умножить на их веса, затем для получения первого нормального уравнения все те уравнения системы, которые относятся к пунктам, лежащим южнее центрального, т. е. для которых разность  $(\varphi_i - \varphi_0)$  — отрицательная, умножить на  $-1$ , после чего уравнения сложить.

Совершенно так же для получения второго нормального уравнения надо все те уравнения системы, которые относятся к пунктам, лежащим западнее центрального, т. е. для которых разность  $(\lambda_i - \lambda_0)$  — отрицательная (*W*-ая долгота считается со знаком минус), умножить на  $-1$ , после чего все уравнения сложить.

Полученные таким образом два нормальных уравнения будут вида:

$$(5) \quad \begin{aligned} MA + nB &= a \\ mA + NB &= b \end{aligned}$$

причем коэффициенты  $M$  и  $N$  будут велики по сравнению с  $m$  и  $n$ , ибо первые будут представлять суммы абсолютных величин произведений  $p_i(\varphi_i - \varphi_0)$  и  $p_i(\lambda_i - \lambda_0)$ , а вторые — алгебраические суммы тех же величин.

После того как система двух нормальных уравнений по тому или иному способу составлена, ее решают относительно неизвестных  $A$  и  $B$ ; найденные значения подставляют в общую формулу:

$$(2) \quad \delta = \delta_0 + A(\varphi - \varphi_0) + B(\lambda - \lambda_0)$$

выражающую склонение для любого пункта с координатами  $\varphi$  и  $\lambda$  рассматриваемого участка №  $\alpha$ .

Совершенно таким же образом составляют затем общие формулы для элементов  $I$  и  $H$ . Пусть эти формулы будут:

$$(6) \quad \begin{aligned} I &= I_0 + A_1(\varphi - \varphi_0) + B_1(\lambda - \lambda_0) \\ H &= H_0 + A_2(\varphi - \varphi_0) + B_2(\lambda - \lambda_0) \end{aligned}$$

После того как эти формулы получены, необходимо проверить, в какой мере точно ими выражаются элементы для тех пунктов, в кото-

рых действительно произведены наблюдения, для чего стоит только подставить в эти формулы координаты  $\varphi_i$  и  $\lambda_i$  каждого пункта наблюдений и, вычислив соответствующие значения элементов  $\delta_i$ ,  $I_i$ , и  $H_i$ , сличить их с непосредственно наблюденными  $\delta'_i$ ,  $I'_i$  и  $H'_i$ , вычислив разности  $(\delta_i - \delta'_i)$ ,  $(I_i - I'_i)$  и  $(H_i - H'_i)$ .

Взяв или среднее арифметическое из абсолютных величин этих разностей, или корень квадратный из средней арифметической их квадратов, надо отметить те пункты, где разность в значительное число (5—6 или более) раз превышает эту среднюю. Такое отступление будет указывать на существование аномалии в этом пункте. Тогда надо этот пункт из общей системы исключить и вновь составить для рассматриваемого участка общие формулы, район же с аномалией подвергнуть более подробному обследованию, как будет сказано ниже.

Итак, положим, что для каждого из отдельных участков составлены формулы вида (2) и (6) для всех трех элементов. Чтобы, пользуясь этими формулами, построить «изолинии», т. е. линии равных, заранее заданных, значений каждого из элементов, можно поступить двояко.

Во-первых, можно, давая величинам  $\varphi$  и  $\lambda$  последовательные значения через  $1^\circ$  или через  $30'$  и, вычислив соответствующие значения элементов, получить «равномерную» сеть, пункты которой (узлы) будут лежать в точках пересечения выбранных параллелей и меридианов. В местах, относящихся одновременно к двум или нескольким участкам (там, где они перекрывают друг друга) и к границам их, надо брать среднее арифметическое из значений, полученных по формулам, относящимся к этим участкам. После того как равномерная сеть пунктов получена, уже весьма легко построить, пользуясь простой интерполяцией, точки пересечения «изолиний» заданного значения элемента с последовательными параллелями и меридианами сети.

Второй прием такой. Положим, что мы хотим провести «изогону», т. е. линию равного склонения  $\delta = \Delta$ , и что эта линия проходит (что сразу видно) через участки №  $\alpha$ , №  $\beta$  и №  $\gamma$ .

Возьмем сперва первый участок №  $\alpha$ . Для него склонение представляется формулой

$$\delta = \delta_0 + A(\varphi - \varphi_0) + B(\lambda - \lambda_0)$$

Стоит только положить  $\delta = \Delta_1$ , и мы получим уравнение:

$$(7) \quad \Delta_1 = \delta_0 + A(\varphi - \varphi_0) + B(\lambda - \lambda_0)$$

изогоны на протяжении участка №  $\alpha$ , причем  $\varphi$  и  $\lambda$  будут текущие координаты в этом уравнении. Придавая затем величине  $\varphi$  ряд последовательных значений и вычисляя соответствующие  $\lambda$ , получим любое число точек этой изогоны.

Совершенно так же для участка № β, для которого общая формула будет:

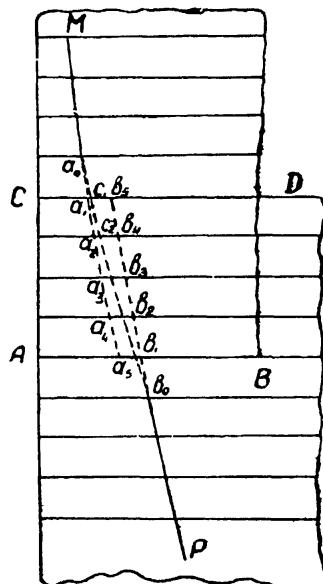
$$\delta = \delta'_0 + A'(\varphi - \varphi'_0) + B'(\lambda - \lambda'_0)$$

получим уравнение той же изогоны:

$$(8) \quad \Delta_1 = \delta'_0 + A'(\varphi - \varphi'_0) + B'(\lambda - \lambda'_0)$$

в котором  $\delta'_0$ ,  $\varphi'_0$ ,  $\lambda'_0$  суть координаты центрального пункта участка № β,  $A'$  и  $B'$  — коэффициенты, для него вычисленные.

Очевидно, что для общей части обоих участков получатся две системы точек рассматриваемой изогоны, соответственно уравнениям (7) и (8). Чтобы произвести «сопряжение», поступают так: пусть, напр.  $ABCD$  (фиг. 44) есть общая часть участков № α и № β и  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  — точки изогоны, вычисленные по уравнению (7),  $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  — точки той же изогоны, вычисленные по уравнению (8). Тогда, чтобы получить плавный переход от одной части этой линии к другой, подразделяем промежуток  $a_1 b_5$  в отношении 1:5, т. е. так, чтобы  $a_1 c_1 : c_1 b_5 = 1:5$ , промежуток  $a_2 b_5$  — в отношении 2:5 и т. д.; нанеся точки  $c_1, c_2, \dots, c_5$ , проводим часть кривой  $a_0 c_1 c_2 \dots c_5 b_0$  так, чтобы в точке  $a_0$  она касалась кривой  $Ma_0$ , в точке  $b_0$  — кривой  $Pb_0$  и проходила через точки  $c_1, c_2, \dots, c_5$  в промежутке между  $a_0$  и  $b_0$ .



Фиг. 44.

**§ 69.** Вычертив, как объяснено выше, предварительную систему изолиний, полученную за выключением местных аномалий, необходимо для получения полной картины распределения элементов земного магнетизма в рассматриваемой области подвергнуть районы аномалий более подробному обследованию, покрыв их более «густою» сетью пунктов наблюдений, причем густота сети определяется опять-таки в зависимости от быстроты изменения элементов с изменением места пункта. Быстрота этого изменения называется *градиентом*. Пункты сети должны быть избраны столь близкими между собою и величины участков такими, чтобы для всех пунктов того же участка градиент был постоянный; тогда обработка наблюдений и составление частных карт изолиний для этих участков ничем не будут отличаться от изложенных выше, кроме масштаба карты.

Другой прием применим и к менее густой сети, покрывающей аномалию, и основан на пользовании свойствами потенциальной функции, изложенными в гл. III.

Аномалию можно приписать действию некоторых магнитных масс, расположенных вблизи тех пунктов, где аномалия проявляется; для этих масс существует магнитный потенциал, и если мы сумеем его найти, то найдем и распределение элементов магнетизма в поле действия рассматриваемых масс.

Итак, положим, что для какой-нибудь области, занимающей обычно настолько малое протяжение по земной поверхности, что по отношению к склонению и горизонтальной слагающей напряжения ее можно принять за плоскость, составлена сеть пунктов, в которых измерены элементы земного магнетизма.

Принимаем крайнюю западную точку  $\varphi_0, \lambda_0$ , расположенную на южной границе аномалии, за начало координат  $x$  и  $y$  и направляем ось  $x$ -ов по географическому меридиану к N-ду, ось  $y$ -ов по параллели к Ost-y и рассчитываем координаты  $x$  и  $y$  пунктов по формулам:

$$x_i = L(\varphi_i - \varphi_0); \quad y_i = L(\lambda_i - \lambda_0) \cos \varphi$$

где  $L$  есть длина, принятая за одну минуту меридиана на составляемой таким образом плоской карте или плане; разности широт  $(\varphi_i - \varphi_0)$  и долгот  $(\lambda_i - \lambda_0)$ , само собою разумеется, выражаются при этом в минутах. По этим координатам и наносим все пункты наблюдений обследуемой аномалии на план или плоскую карту.

Для каждого пункта вычисляем сперва угол, составляемый направлением магнитного меридиана с осью  $x$ -ов по формуле:

$$\Delta_i = \delta_i + (\lambda_i - \lambda_0) \sin \varphi_i$$

причем надо принимать восточное склонение и восточную разность долгот за положительные, западное — за отрицательные, после чего для каждого пункта вычисляем по формулам:

$$X_i = H_i \cos \Delta_i; \quad Y_i = H_i \sin \Delta_i; \quad Z_i = H_i \operatorname{tg} I_i$$

слагающие напряжения по осям координат на основании действительно наблюденных в каждом пункте величин.

Сняв затем с составленной первоначально карты изолиний (за исключением аномальных пунктов) величины «нормальных» элементов  $\delta'_i, H'_i, I'_i$ , для каждого пункта вычисляем углы  $\Delta'_i$  по формуле:

$$\Delta'_i = \delta'_i + (\lambda_i - \lambda_0) \sin \varphi_i$$

и затем слагающие напряжения:

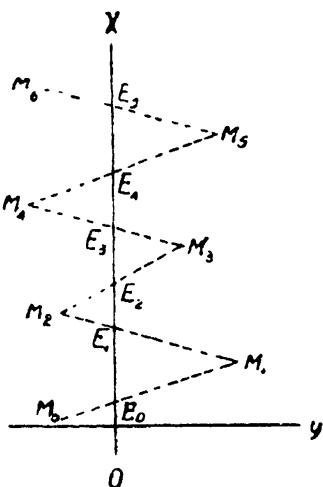
$$X'_i = H'_i \cos \Delta'_i; \quad Y'_i = H'_i \sin \Delta'_i; \quad Z'_i = H'_i \operatorname{tg} I'_i$$

и составляем проекции:

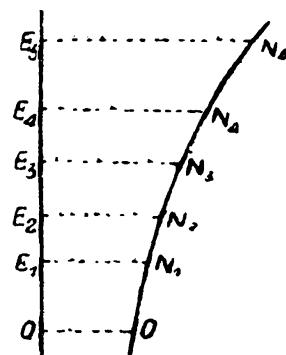
$$P_i = X_i - X'_i; \quad Q = Y_i - Y'_i; \quad R_i = Z_i - Z'_i$$

«возмущающей» силы для каждого пункта.

Отметив на нашем плане (фиг. 45) точки  $M_1, M_2, M_3, M_4, \dots$  ближайшие к оси  $x$ -ов и расположенные к северу от оси  $y$ -ов, соединим прямыми линиями те из них, которые лежат по разные стороны оси  $x$ -ов и расположены ближе всего друг к другу, и, отметив точки пересечения этих прямых с осью  $x$ -ов, вычисляем по пропорции значения  $P_1, P_2, \dots$  проекций возмущающей силы в точках  $E_1, E_2, E_3, \dots$



Фиг. 45.



Фиг. 46.

Если обозначить через  $V$ , значение потенциала в точке  $O$ , то его значение в любой точке  $E$  оси  $x$ -ов будет:

$$V = V_0 - \int_0^x P dx$$

где  $x$  — абсцисса точки  $E$ .

Чтобы вычислить значение  $W = \int_0^x P dx$  входящего в эту формулу

интеграла, проводим прямую  $Ox$  и по перпендикулярам, восстановленным к ней в точках  $O, E_1, E_2, E_3, \dots$ , откладываем длины  $ON, E_1N_1, E_2N_2, E_3N_3, \dots$ , соответственно равные  $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$ , и через полученные точки  $N_1, N_2, N_3, \dots$  проводим сплошную кривую линию (фиг. 46).

Берем затем какой-либо промежуток  $h$ , который будет представлять расстояние между параллелями сетки, и, нанеся на ось  $x$ -ов точки  $g_1, g_2, \dots, g_r$ , абсциссы коих суть  $0, h, 2h, 3h, \dots$ , проводим и снимаем соответствующие им ординаты, которые обозначим через  $p_0, p_1, p_2, \dots$ . Тогда значение интеграла

$$W_n = \int_0^{nh} P dx$$

вычисляется по следующей схеме:

I № точки $n$	II Абсциссы $x = nh$	III Ординаты $p$	IV Суммы чисел III ст. попарно	V Суммы чисел IV ст. сверху	VI $W = Y \cdot \frac{1}{2} h$
0	0	$p_0$	$p_0 + p_1$	0	0
1	$h$	$p_1$	$p_1 + p_2$	$\sigma_1 = p_0 + p_1$	$\sigma_1 \cdot \frac{1}{2} h$
2	$2h$	$p_2$	$p_2 + p_3$	$\sigma_2 = \sigma_1 + (p_1 + p_2)$	$\sigma_2 \cdot \frac{1}{2} h$
3	$3h$	$p_3$	$p_3 + p_4$	$\sigma_3 = \sigma_2 + (p_2 + p_3)$	$\sigma_3 \cdot \frac{1}{2} h$
4	$4h$	$p_4$			
...	...	$p_n$		...	
$h$	$nh$				

Таким образом получим значение потенциала  $V$  в ряде равнодistantных точек северной части оси  $x$ -ов. Пусть эти значения будут:  $V_0^0, V_1^1, V_2^2, \dots$

Совершенно таким же образом вычисляем по формуле:

$$V_k^0 = V_0 - \int_0^{Y=kl} Q dy \quad (k=0, 1, 2, 3, \dots)$$

значения потенциала для ряда равноотстоящих точек оси  $y$ -ов, причем промежуток  $l$  может быть взят или равным, или не равным  $h$ .

Проводим затем через точку  $g_1$  прямую, параллельную оси  $y$ -ов, и вычисляем по формуле:

$$V_k^{(1)} = V_1 - \int_0^Y Q^{(1)} dx$$

значения потенциала в точках этой прямой совершенно подобно тому, как объяснено выше.

Затем переходим к точке  $g_2$ , проводим через нее прямую, параллельную оси  $x$ -ов, вычисляем значения потенциала для точек этой прямой и продолжаем таким образом до крайней северной границы аномалии.

Для контроля проделаем такое же вычисление, беря за исходные точки оси  $y$ -ов и проводя через них прямые, параллельные оси  $x$ -ов. Понятно, что таким образом для каждой точки образованной сети будет получено два значения потенциала: одно, исходя от точки оси  $y$ -ов, другое — исходя от точки оси  $x$ -ов. Эти значения должны быть между собою равны в пределах точности вычислений. Для сглаживания неизбежно накапливающихся погрешностей берем для каждой точки среднее.

Таким образом, весь обследуемый участок будет покрыт равномерной сетью, во всех узлах которой будем иметь значения потенциала возмущающих сил  $P$  и  $Q$ , лежащих в горизонтальной плоскости.

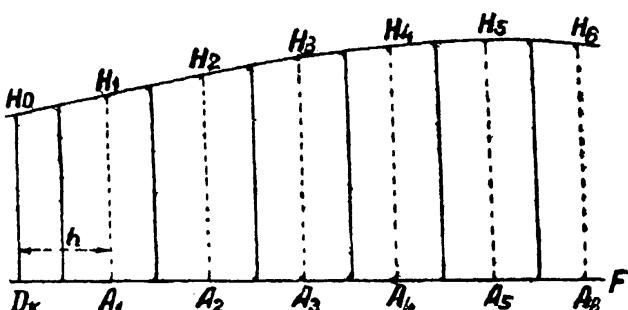
Имея такую сеть, можем сейчас же провести линии равного потенциала, по которым можно отчасти судить о характере распределения масс, производящих возмущение.

Чтобы, имея распределение потенциала, исчислить величины проекции возмущающей силы, поступаем следующим образом. Мы видели в гл. III, что для всякой точки проекции силы выражаются так:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Поэтому, чтобы исчислить значения силы  $X$  в точках, напр. прямой, параллельной оси  $x$ -ов и проходящей через точку  $D_k(0,$

$y_i = il)$ , поступаем так (фиг. 47). Проведя прямую  $D_kF$ , наносим на ней точки, абсциссы которых суть  $0, h, 2h, 3h, \dots$ ; отложив по ординатам соответствующие значения потенциала, проводим через полученные точки  $H_0, H_1, H_2, \dots$  согласную кривую, со сглаженной таким образом кривой снимаем ординаты, соответствующие абсциссам точек, лежащих посередине, между точками деления, т. е. абсциссами  $\frac{1}{2}h, \frac{3}{2}h, \dots$  и т. д., и составляем следующую таблицу потенциала и его первых, вторых, третьих разностей:



Фиг. 47.

Абсцисса	Значение потенциала	$\Delta V$	$\Delta^2 V$	$\Delta^3 V$	$\frac{1}{2}(\Delta V_i + \Delta V_{i+1})$	$\frac{1}{2}(\Delta^3 V_i + \Delta^3 V_{i+1})$	$\frac{\partial V}{\partial x}$
0							
$\frac{1}{2}h$	$V_{\frac{1}{2}}$						
$h$							
$\frac{3}{2}h$	$V_{\frac{3}{2}}$	$\Delta V_1$	$\Delta^2 V_{\frac{3}{2}}$				
$2h$							
$\frac{5}{2}h$	$V_{\frac{5}{2}}$	$\Delta V_2$	$\Delta^2 V_{\frac{5}{2}}$	$\Delta^3 V_2$			
$\frac{1}{2}$	$V_{\frac{5}{2}}$	$\Delta V_3$	$\Delta^2 V_{\frac{5}{2}}$	$\Delta^3 V_3$	$A_2$	$B_2$	$A_2 - \frac{1}{6}B_2$
$\cdot$							
$\cdot$							
$\cdot$							

Разности вписываем в промежутки между строками, в коих находятся числа, между которыми разность берется. Тогда по формуле, данной Стирлингом в 1720-х годах, будет:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)_{x=nh} = A_n - \frac{1}{6}B_n$$

При этом предполагается, что разности выше третьего порядка настолько малы, что ими можно пренебречь при той точности, с которой вычисления производятся.

В противном случае надо уменьшить промежуток и снять значения потенциала в более близких между собою точках.

Совершенно подобным же образом находятся и значения производных  $\frac{\partial V}{\partial y}$ .

Получив таким образом величины проекций возмущающих сил всех точек сети, придаём их алгебраически к соответствующим значениям «нормальных» слагающих напряжения в соответствующих точках и по этим слагающим вычисляем склонение и напряжение по формулам, приведенным выше.

§ 70. Можно было бы применить подобный прием и для наклонения и вертикальной слагающей, но здесь пришлось бы считаться и с рельефом местности и с кривизною земной поверхности, и вычисление стало бы еще сложнее предыдущего. Поэтому для получения «изоклинических» линий проще ограничиться простою интерполяциею, всего лучше выполняемою графически следующим образом.

Возьмем одну из линий нашей сети, напр. параллельную оси  $x$ -ов; отмечаем, как уже сказано, ближайшие к этой параллели точки и, соединив прямыми попарно те из них, которые лежат по обе стороны нашей проведенной параллели к оси  $x$ -ов и ближе всего друг к другу, находим точки пересечения  $E_1, E_2, F_1, \dots$  этих прямых с параллелью и по пропорции вычисляем значения вертикальной проекции  $R$  возмущающей силы для этих точек по ее значениям в концах секущей.

Получив ряд этих значений, строим слаженную кривую, их представляющую.

Поступаем так для каждой из прямых нашей сети, т. е. как для параллельных оси  $x$ -ов, так и параллельных оси  $y$ -ов, получив для каждого из узлов два значения  $R$ , берем их среднее.

Построив таким образом равномерную сеть значений силы  $R$  и имея величины «нормальных» значений  $Z'$  по предварительно составленной общей карте, без аномалий, вычисляем величины  $Z$  по формуле:

$$Z = Z' + R$$

и затем наклонение по формуле:

$$\operatorname{tg} I = \frac{Z}{X}$$

Имея наклонение для всех узлов сети, сейчас же строим и изогоны.

Понятно, что можно было бы ограничиться этими приемами и для склонения и напряжения, но в виду большой практической важности склонения и горизонтальной слагающей напряжения для мореплавания мы сочли не лишним изложить хотя и более сложный, но и более точный прием обработки магнитных наблюдений.

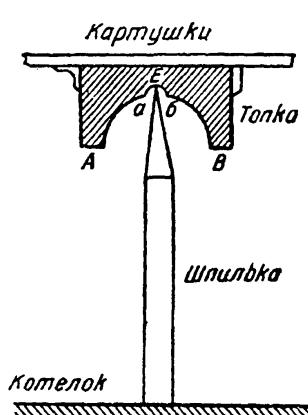
## ВОЗМУЩЕНИЯ ПОКАЗАНИЙ КОМПАСА, ПРОИСХОДЯЩИЕ ОТ КАЧКИ КОРАБЛЯ НА ВОЛНЕНИИ<sup>1</sup>

### ГЛАВА I

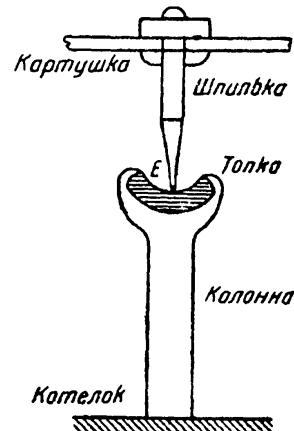
#### Колебания картушки сухого магнитного компаса

**§ 1.** В этой статье рассматриваются колебания картушки, вызываемые только механическими причинами, причем предполагается, что компас «сухой» и что его девиация вполне уничтожена.

При таких предположениях колебания картушки представляют част-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

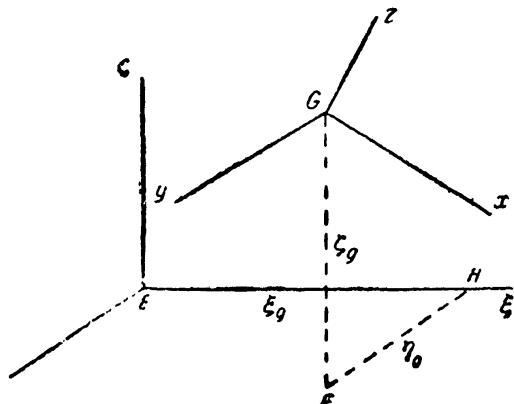
ный случай колебаний твердого тела, подвешенного за данную в нем точку, которой сообщается заданное движение. Эта точка практически есть конец шпильки, на котором лежит топка картушки.

Чтобы не усложнять напрасно выкладки, вообразим, что топка сделана по системе Брауэра (фиг. 1) и представляет собою сапфировый цилиндр, нижняя опирающаяся на шпильку поверхность которого ограничена двумя полусферами—большую  $AB$  и малую  $aEb$ ; шпилька заточена на конус. По малости сферы  $aEb$  можно принимать, что касание происходит в вершине  $E$  и при наклонениях картушки изменяется лишь направление ре-

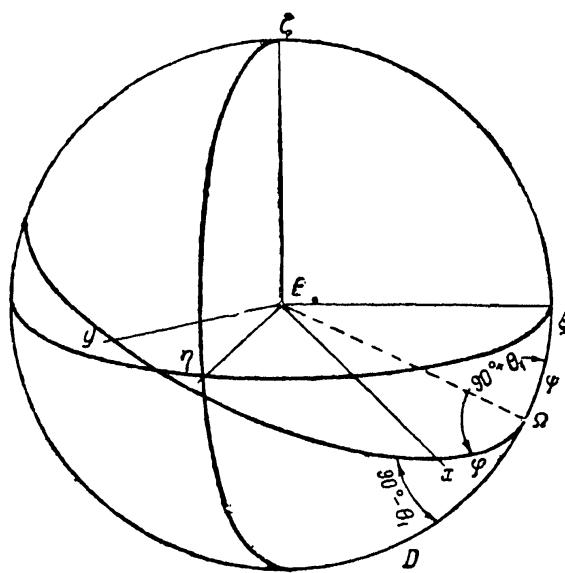
<sup>1</sup> Представлено Отделению физико-математических наук АН СССР 17 IX 1938.

акции, точка же приложения ее остается постоянной и совпадает с точкой  $E$ .

Но можно от этого лишнего предположения избавиться—стоит только поменять топку и шпильку местами, т. е. топку укрепить на колонке котелка, а шпильку на самой картушке, тогда точка  $E$  в картушке будет строго неподвижна, движение же топки настолько мало сравнительно с движениями корабля, что не может быть учитываемо; между тем даже малые перемещения опорной точки  $E$  в картушке нежелательны по причинам, которые будут изложены ниже. Поэтому мы будем предполагать,



Фиг. 3а.



Фиг. 3б.

что обычная конструкция изменена, и шпилька вделана в картушку (фиг. 2).

**§ 2.** Начнем с рассмотрения свободных колебаний картушки на берегу или на неподвижном корабле, когда девиация уничтожена; к этим свободным колебаниям прилагаются вынужденные, происходящие от движения корабля.

Как обыкновенно при рассмотрении движения твердого тела, необходимо принять две системы осей координат—одну неизменную и неподвижную в пространстве, другую—неизменную в теле; первую будем называть абсолютной, вторую—относительной.

За абсолютную систему принимаем следующую:

- за начало координат—точку  $E$  опоры шпильки о топку, укрепленную к котелку, который будет неподвижен;
- за плоскости координат  $E\xi\xi$ —северную половину плоскости магнитного меридиана, за  $E\xi\eta$ —горизонтальную плоскость; ось  $E\xi$  направляем вверх, ось  $E\xi$ —к N-ду, ось  $E\eta$ —к Ost-y.

За относительную систему берем: начало координат в точке  $G$ , центре тяжести картушки без подвижного грузика, служащего для ее уравновешивания; ось  $Gx$ —параллельно линии NS лимба к N-ду; ось  $Gy$ —параллельно

линии WO к Ost-y; ось  $Gz$ —прямую  $GE$ , которая по самому устройству картушки перпендикулярна к плоскости лимба.

Так как грузик, уравновешивающий пару, происходящую от вертикальной слагающей земной магнитной силы, весьма мал, то указанные оси  $Gx$ ,  $Gy$ ,  $Gz$  можно принять за главные оси инерции картушки.

Положение осей  $Gxyz$  относительно неподвижных осей  $E\xi\eta\zeta$  определяется:

а) координатами точки  $G$  (фиг. 3а и 3б):

1

$$\xi_g, \eta_g, \zeta_g$$

б) тремя эйлеровыми углами  $\phi, \psi, \theta_1$ , которые берем «корабельные», т. е.

$$\psi = \xi\Omega, \quad \phi = \Omega x, \quad 90^\circ - \theta_1 = \angle D\Omega x$$

как это сделано мною в 1898 г. при рассмотрении качаний корабля на волнении. При таком выборе и *малых* отклонениях картушки от положения равновесия все три угла будут малые.

Формулы преобразования координат, получающиеся из схемы

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
$x$	$a_1$	$b_1$	$c_1$
$y$	$a_2$	$b_2$	$c_2$
$z$	$a_3$	$b_3$	$c_3$

суть:

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} \xi &= \xi_g + a_1 x + a_2 y + a_3 z, \\ \eta &= \eta_g + b_1 x + b_2 y + b_3 z, \\ \zeta &= \zeta_g + c_1 x + c_2 y + c_3 z; \end{aligned} \right\}$$

Обратно:

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= a_1 (\xi - \xi_g) + b_1 (\eta - \eta_g) + c_1 (\zeta - \zeta_g) \\ y &= a_2 (\xi - \xi_g) + b_2 (\eta - \eta_g) + c_2 (\zeta - \zeta_g) \\ z &= a_3 (\xi - \xi_g) + b_3 (\eta - \eta_g) + c_3 (\zeta - \zeta_g) \end{aligned}$$

Для проекций сил будем иметь аналогичные формулы:

$$(3) \quad \begin{aligned} \Xi &= a_1 X + a_2 Y + a_3 Z, \quad X = a_1 \Xi + b_1 H + c_1 Z \\ H &= b_1 X + b_2 Y + b_3 Z, \quad Y = a_2 \Xi + b_2 H + c_2 Z \\ Z &= c_1 X + c_2 Y + c_3 Z \quad Z = a_3 \Xi + b_3 H + c_3 Z \end{aligned}$$

Коинусы же углов находим, применяя основную формулу сферической тригонометрии к треугольникам (фиг. 3б)

$$x\Omega\xi, \quad x\Omega\eta, \quad x\Omega\zeta, \quad y\Omega\xi, \quad y\Omega\eta, \quad y\Omega\zeta, \quad z\Omega\xi, \quad z\Omega\eta, \quad z\Omega\zeta;$$

из которых получаются:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \cos(x, \xi) = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \sin \theta_1 & \approx 1 \\
 b_1 &= \cos(x, \eta) = \sin \varphi \cos \theta_1 & \approx \varphi \\
 c_1 &= \cos(x, \zeta) = -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \sin \theta_1 & \approx -\psi \\
 a_2 &= \cos(y, \xi) = -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \sin \theta_1 & \approx -\varphi \\
 b_2 &= \cos(y, \eta) = \cos \varphi \cos \theta_1 & \approx 1 \\
 c_2 &= \cos(y, \zeta) = \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \sin \theta_1 & \approx -\theta_1 \\
 a_3 &= \cos(z, \xi) = \sin \psi \cos \theta_1 & \approx \psi \\
 b_3 &= \cos(z, \eta) = \sin \theta_1 & \approx \theta_1 \\
 c_3 &= \cos(z, \zeta) = \cos \psi \cos \theta_1 & \approx 1
 \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь указаны и приближенные значения этих косинусов для «малых» углов; ограничиваясь их *первой* степенью, т. е. полагая

$$\cos \psi = \cos \varphi = \cos \theta_1 = 1$$

$$\sin \psi = \psi; \quad \sin \varphi = \varphi; \quad \sin \theta_1 = \theta_1$$

Таблица косинусов тогда будет:

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
$x$	1	$\varphi$	$-\psi$
$y$	$-\varphi$	1	$-\theta_1$
$z$	$\psi$	$\theta_1$	1

Соответственно этой таблице приближенные формулы будут

$$\begin{aligned}
 \xi &= \xi_g + x - y\varphi - z\psi \\
 \eta &= \eta_g + x\varphi + y + z\theta_1 \\
 \zeta &= \zeta_g - x\psi - y\theta_1 + z
 \end{aligned} \tag{1'}$$

и обратно:

$$\begin{aligned}
 x &= (\xi - \xi_g) + (\eta - \eta_g) \varphi - (\zeta - \zeta_g) \psi \\
 y &= -(\xi - \xi_g) \varphi + (\eta - \eta_g) - (\zeta - \zeta_g) \theta_1 \\
 z &= (\xi - \xi_g) \psi + (\eta - \eta_g) \theta_1 + (\zeta - \zeta_g)
 \end{aligned} \tag{2'}$$

Затем:

$$\begin{aligned}
 E &= X - Y\varphi + Z\psi & X &= E + H\varphi - Z\psi \\
 H &= X\varphi + Y + Z\theta_1 & Y &= -E\varphi + H - Z\theta_1 \\
 Z &= -X\psi - Y\theta_1 + Z & Z &= E\psi + H\theta_1 + Z
 \end{aligned} \tag{3'}$$

Нетрудно видеть, что, ограничиваясь членами первого порядка, мы получим следующие выражения проекций угловых скоростей на оси  $Gx$ ,  $Gy$ ,  $Gz$ :

$$(4') \quad p = -\theta'_1, \quad q = \psi', \quad r = \varphi'$$

Абсолютные координаты точки  $E$  суть

$$\xi_e = 0, \quad \eta_e = 0, \quad \zeta_e = 0$$

относительные ее координаты суть:

$$x_e = 0, \quad y_e = 0, \quad z_e = GE = h$$

Подставляя эти величины в формулы (1'), имеем:

$$(5) \quad \left. \begin{array}{l} \xi_g + h\psi = 0 \quad \text{т. е. } \xi_g = -h\psi \\ \eta_g + h\theta_1 = 0, \quad \Rightarrow \quad \eta_g = -h\theta_1 \\ \zeta_g + h = 0, \quad \Rightarrow \quad \zeta_g = -h \end{array} \right\}$$

Эти равенства представляют  *первую группу уравнений связей*.

Уравнения движения центра тяжести системы, состоящей из картушки, для которой обозначим вес через  $P_0$  и координаты центра тяжести  $\xi_g$ ,  $\eta_g$ ,  $\zeta_g$ , и грузика, вес которого обозначим через  $p_1$  и координаты ц. т. через  $\xi_p$ ,  $\eta_p$ ,  $\zeta_p$ , суть:

$$(6) \quad \frac{P_0}{g} \xi_g'' + \frac{p_1}{g} \xi_p'' = \Sigma \Xi, \quad \frac{P_0}{g} \eta_g'' + \frac{p_1}{g} \eta_p'' = \Sigma H$$

$$(7) \quad \frac{P_0}{g} \zeta_g'' + \frac{p_1}{g} \zeta_p'' = \Sigma Z$$

где суммы относятся к проекциям всех *внешних* сил, действующих на систему.

Эти внешние силы суть:

$$(8) \quad \left. \begin{array}{l} \text{а) вес картушки } P_0, \text{ проекции его: } \Xi_0 = 0, \quad H_0 = 0 \\ \qquad \qquad \qquad Z_0 = -P_0; \\ \text{б) вес грузика } p_1, \text{ проекции его: } \Xi_1 = 0, \quad H_1 = 0 \\ \qquad \qquad \qquad Z_1 = -p_1 \end{array} \right\}$$

в) реакция грузика, происходящая от переносного его движения (сила инерции грузика); этой реакцией по ее малости пренебрегаем, момент же ее сохраняем;

г) реакция  $Q$ , воспринимаемая шпилькою; обозначим проекции ее через

$$(9) \quad \Xi_e, \quad H_e, \quad Z_e$$

Эти величины не известны; их надо определить на основании уравнений связей, из которых мы имеем уравнения (5), относящиеся к переменным  $\xi_g$ ,  $\eta_g$ ,  $\zeta_g$ ,  $\psi$ ,  $\theta_1$ , определяющим положение картушки.

Обозначим через

$$x_p = l_1, \quad y_p = 0, \quad z_p = h_1$$

относительные координаты грузика; тогда по формулам (1') и (5) его абсолютные координаты будут:

$$(10) \quad \begin{aligned} \xi_p &= \xi_g + l_1 + h_1 \psi = l_1 + (h_1 - h) \psi \\ \eta_p &= \eta_g + l_1 \varphi + h_1 \theta_1 = l_1 \varphi + (h_1 - h) \theta_1 \\ \zeta_p &= \zeta_g - l_1 \psi + h_1 = -l_1 \psi + (h_1 - h) \end{aligned}$$

Это есть вторая группа уравнений связей. Из нее следует:

$$(11) \quad \xi''_p = (h_1 - h) \psi''; \quad \eta''_p = l_1 \varphi'' + (h_1 - h) \theta''_1; \quad \zeta''_p = -l_1 \psi''$$

Подставив величины (8), (9), (10) и (11) в уравнения (6) и (7), получим следующие значения реакций:

$$(12) \quad \begin{aligned} \Xi_e &= \left[ -\frac{P_0 + p_1}{g} h + \frac{p_1 h_1}{g} \right] \psi'' \\ H_e &= \left[ -\frac{P_0 + p_1}{g} h + \frac{p_1 h_1}{g} \right] \theta''_1 + \frac{p_1 l_1}{g} \varphi'' \\ Z_e &= P_0 + p_1 - \frac{p_1 l_1}{g} \psi'' \end{aligned}$$

Отсюда, на основании формул (3'), отбросив члены, порядок которых выше первого, имеем:

$$(13) \quad \begin{aligned} X_e &= \Xi_e + H_e \varphi - Z_e \psi = \left[ -\frac{P_0 + p_1}{g} h + \frac{p_1 h_1}{g} \right] \psi'' - (P_0 + p_1) \psi \\ Y_e &= -\Xi_e \varphi + H_e \theta_1 - Z_e \theta_1 = \left[ -\frac{P_0 + p_1}{g} h + \frac{p_1 h_1}{g} \right] \theta''_1 + \frac{p_1 l_1}{g} \varphi'' - (P_0 + p_1) \theta_1 \\ Z_e &= \Xi_e \psi + H_e \theta_1 + Z_e = P_0 + p_1 - \frac{p_1 l_1}{g} \psi'' \end{aligned}$$

**§ 3.** Из уравнений связей (5) следует, что как только углы  $\psi$  и  $\theta_1$  будут найдены, то движение центра тяжести картушки тотчас же определяется, но оно практически не нужно; таким образом, все сводится к колебательному движению, т. е. к определению углов  $\theta_1$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$  и главным образом этого последнего угла.

В виду того, что моменты инерции грузика относительно осей  $Gx$ ,  $Gy$ ,  $Gz$  ничтожно малы по сравнению с моментами инерции  $A_g$ ,  $B_g$ ,  $C_g$  самой картушки относительно этих осей, мы можем вообразить, что

вместо грузика в точке  $x_p = l_1$ ,  $y_p = 0$ ,  $z_p = h_1$  приложена вертикальная сила  $p_1$ , равная весу грузика за вычетом силы инерции переносного его движения.

В таком случае, ограничиваясь членами первого порядка и пренебрегая моментами инерции грузика, мы можем написать уравнения колебательного движения картушки в следующем виде:

$$(14) \quad \begin{aligned} -A_g \theta_1'' &= \Sigma (Zy - Yz) \\ B_g \psi'' &= \Sigma (Xz - Zx) \\ C_g \varphi'' &= \Sigma (Yx - Xy) \end{aligned}$$

В правых частях стоят суммы моментов всех сил, действующих на картушку относительно осей  $Gxyz$ .

Силы эти, не считая пока сопротивления воздуха, суть:

- а) вес картушки (без грузика)  $P_0$ ,
- б) реакция топки на шпильку,
- в) вес грузика  $p_1$ ,
- г) магнитные силы,
- д) силы инерции переносного движения грузика <sup>1</sup>  $p_1$ .

Исчислив каждый из моментов этих сил в отдельности и взяв их суммы, мы тотчас же получим уравнения в развернутой форме.

Отдельные же силы дают следующие моменты:

а) Вес картушки  $P_0$ :  $M_{0,x} = M_{0,y} = M_{0,z} = 0$ .

б) Реакция топки на шпильку:

силы:  $X_e$ ,  $Y_e$ ,  $Z_e$  [см. формулу (13)].

Координаты точки приложения:  $x_e = 0$ ,  $y_e = 0$ ,  $z_e = h$ .

Моменты:

$$(15) \quad \begin{aligned} L_{e,0} &= -Y_e h = -\left[ -\frac{P_0 + p_1}{g} h + \frac{p_1 h_1}{g} \right] h \theta_1'' - \frac{p_1 l_1}{g} h \varphi'' + (P_0 + p_1) h \theta_1 \\ M_{e,0} &= X_e h = \left[ -\frac{P_0 + p_1}{g} h + \frac{p_1 h_1}{g} \right] h \psi'' - (P_0 + p_1) h \psi \end{aligned}$$

$$N_{e,0} = 0$$

в) Вес грузика  $p_1$ :

силы:  $E_p = 0$ ,  $H_p = 0$ ,  $Z_p = -p_1$ ,  $X_p = p_1 \psi$ ,  $Y_p = p_1 \theta_1$ ,  $Z_p = -p_1$ ; координаты точки приложения:  $x_p = l_1$ ,  $y_p = 0$ ,  $z_p = h_1$ ;

Моменты:

$$(16) \quad L_{p,0} = -p_1 h_1 \theta_1, \quad M_{p,0} = p_1 h_1 \psi + p_1 l_1, \quad N_{p,0} = +p_1 l_1 \theta_1$$

г) Магнитные силы. Так как девиация предполагается вполне уничтоженной, то на картушку действует только земной магнетизм, слаб-

<sup>1</sup> Этот момент сохранен, ибо по своей величине он сравним с моментом магнитных сил.

гающие напряжения которого обозначим: горизонтальную через  $H$ , вертикальную через  $Z = H \operatorname{tg} i$ , где  $i$  — магнитное наклонение в данном месте.

Вообразим, что система магнитов картушки заменена одним магнитом с магнитным моментом  $M$ , равнодействующим магнитных моментов стрелок картушки, а этот последний заменен совокупностью магнитных масс  $\mu$ ,  $-\mu$ , координаты которых:

$$\begin{array}{lll} \text{для } \mu & x_n = l, & y_n = 0, & z_n = h_n \\ \text{для } -\mu & x_s = -l, & y_s = 0, & z_s = h_n \end{array}$$

Слагающие магнитные силы, действующие на эти массы:

$$\begin{aligned} \Xi_n &= \mu H, \quad H_n = 0, \quad Z_n = -\mu H \operatorname{tg} i \\ \Xi_s &= -\mu H, \quad H_s = 0, \quad Z_s = +\mu H \operatorname{tg} i \\ X_n &= -X_s = \mu H + \mu H \operatorname{tg} i \cdot \phi \\ Y_n &= -Y_s = -\mu H \varphi + \mu H \operatorname{tg} i \cdot \theta_1 \\ Z_n &= -Z_s = \mu H \psi - \mu H \operatorname{tg} i \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в суммах проекций магнитные силы исчезают; моменты же будут:

$$(17) \quad \begin{aligned} L_{m,0} &= 0 \\ M_{m,0} &= -2lZ_n = -MH\psi + MH \operatorname{tg} i \\ N_{m,0} &= 2lY_n = -MH\varphi + MH \operatorname{tg} i \cdot \theta_1 \end{aligned}$$

то по предложению  $2\mu l = M$  — магнитный момент картушки.

д) *Силы инерции грузика* (реакции связи между грузиком и картушкой).

Относительные координаты грузика:

$$x_p = l_1; \quad y_p = 0; \quad z_p = h_1$$

Проекции сил инерции по уравнению (11):

$$\begin{aligned} -\frac{p_1}{g} \xi'_p &= -\frac{p_1}{g} (h_1 - h) \psi'' \\ -\frac{p_1}{g} \eta'_p &= -\frac{p_1}{g} [l_1 \varphi'' + (h_1 - h) \theta_1''] \\ -\frac{p_1}{g} \zeta'_p &= \frac{p_1}{g} l_1 \psi'' \end{aligned}$$

Проекции сил инерции на оси  $Gxyz$ , взятые без членов порядка выше первого, суть:

$$J_x = -\frac{p_1}{g} (h_1 - h) \psi''; \quad J_y = -\frac{p_1}{g} [l_1 \varphi'' + (h_1 - h) \theta_1'']; \quad J_z = +\frac{p_1}{g} l_1 \psi''$$

Моменты этих сил:

$$(17') \quad \begin{aligned} L_{i,0} &= J_z y_p - J_y z_p = -J_y h_1 = \frac{p_1 h_1}{g} [l_1 \varphi'' + (h_1 - h) \theta_1''] \\ M_{i,0} &= J_x z_p - J_z x_p = J_x h_1 - J_z l_1 = \frac{p_1}{g} [-(h_1 - h) h_1 - l_1^2] \psi'' \\ N_{i,0} &= J_y x_p - J_x y_p = J_y l_1 = -\frac{p_1}{g} [l_1^2 \varphi'' + l_1 (h - h_1) \theta_1''] \end{aligned}$$

Подставив выражения (15), (16), (17), (17') в уравнения (14), получим уравнения колебательного движения картушки на покоящемся корабле сперва в таком виде:

$$(18) \quad \begin{aligned} A_g \theta_1'' + (L_{e,0} + L_{p,0} + L_{i,0} + L_{m,0}) &= 0 \\ B_g \psi'' - (M_{e,0} + M_{p,0} + M_{i,0} + M_{m,0}) &= 0 \\ C_g \varphi'' - (N_{e,0} + N_{p,0} + N_{i,0} + N_{m,0}) &= 0 \end{aligned}$$

Затем, подставив вместо  $L_{e,0}$ ,  $L_{p,0}$ , ...,  $N_{m,0}$  их развернутые выражения и ограничиваясь членами первого порядка, получим следующие уравнения движения картушки на покоящемся корабле в развернутом виде<sup>1</sup>:

$$(19) \quad \begin{aligned} \left[ A_g + \frac{P_0}{g} h^2 + \frac{p_1}{g} (h_1 - h)^2 \right] \theta_1'' + [P_0 h + p_1 (h - h_1)] \theta_1 &= 0 \\ \left[ B_g + \frac{P_0}{g} h^2 + \frac{p_1}{g} (h_1 - h)^2 + \frac{p_1}{g} l_1^2 \right] \psi'' + [P_0 h_1 + p_1 (h - h_1) + \right. \\ \left. + MH] \psi - [MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1] &= 0 \\ \left[ C_g + \frac{p_1}{g} l_1^2 \right] \varphi'' + MH \varphi - [MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1] \theta_1 &+ \\ + \frac{p_1}{g} l_1 (h_1 - h) \theta_1'' &= 0 \end{aligned}$$

Положим

$$(19') \quad \begin{aligned} A_g + \frac{P_0}{g} h^2 + \frac{p_1}{g} (h_1 - h)^2 &= A \\ B_g + \frac{P_0}{g} h^2 + \frac{p_1}{g} (h_1 - h)^2 + \frac{p_1}{g} l_1^2 &= B \\ C_g + \frac{p_1}{g} l_1^2 &= C \end{aligned}$$

Очевидно, что величины  $A$ ,  $B$ ,  $C$  представляют собой моменты инерции картушки вместе с грузиком относительно осей, параллельных,

<sup>1</sup> В левой части первого уравнения (19) автором опущен член:  $\frac{p_1 l_1}{g} (h_1 - h) \varphi''$ . Этот член входит и в левую часть первого уравнения (21). Поэтому, общее решение системы (21) не будет иметь вида (29): однако, нетрудно показать, что те дополнительные члены, которые войдут в общее решение исравленной системы (21) будут иметь, по сравнению с членами, данными в (29), тот порядок малости, которым А. Н. Крылов в этой работе пренебрегает (см. например, Ф-лы 20). Поэтому все дальнейшие рассуждения сохраняют свою силу (Ред.).

осиам  $Gx$ ,  $Gy$ ,  $Gz$ , проведенным через острье шпильки; сделав эту замену, разделим первое уравнение на  $A$ , второе на  $B$ , третье на  $C$  и положим

$$(20) \quad \begin{aligned} \frac{P_0 h + p_1 (h - h_1)}{A} &= n_1^3 \approx \frac{P_0 h}{A} \\ \frac{P_0 h + p_1 (h - h_1) + MH}{B} &= n_2^3 \approx \frac{P_0 h}{B} \\ \frac{MH}{C} &= n_3^3 \end{aligned}$$

тогда уравнения (19) примут вид

$$(21) \quad \begin{aligned} \theta'_1 + n_1^3 \theta_1 &= 0 \\ \psi'' + n_2^3 \psi &= \frac{1}{B} (MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1) = \frac{C}{B} \left( n_3^3 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \\ \varphi'' + n_3^3 \varphi &= \left( n_3^3 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \theta_1 + \frac{p_1 l_1 (h - h_1)}{g C} \theta'_1 = \\ &= \left( n_3^3 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \theta_1 - n_1^3 \cdot \frac{p_1 l_1}{g C} (h - h_1) \theta_1 \end{aligned}$$

Определим прежде всего положение равновесия картушки. Положив  $\theta'_1 = \psi'' = \varphi'' = 0$ , получим:

$$(22) \quad \begin{aligned} (\theta_1)_0 &= 0; \quad \psi_0 = \frac{MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1}{P_0 h + p_1 (h - h_1) + MH} \approx \frac{MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1}{P_0 h} \\ \varphi_0 &= 0. \end{aligned}$$

Второе из этих равенств показывает, что вообще положение равновесия картушки таково, что линия NS наклонена на угол  $\psi_0$ , оставаясь в плоскости магнитного меридиана.

Необходимо обратить внимание, что координаты остряя шпильки суть:

$$(23) \quad x_e = 0, \quad y_e = 0, \quad z_e = h$$

т. е. центр тяжести картушки  $G$  ( $0, 0, 0$ ) и острье шпильки лежат на прямой, перпендикулярной плоскости лимба, и если бы стрелки *намагничены не были* ( $M = 0$ ) и *грузика*  $p_1$  *не ставить*, то было бы  $\psi_0 = 0$ .

Назовем это условие, выражаемое аналитически равенствами (15), механическим уравновешением картушки.

Ясно, что такая картушка после намагничивания ее стрелок при  $p_1 l_1 = 0$ , иначе  $p_1 = 0$ , приняла бы наклон

$$(24) \quad \psi_1 = \frac{MH \operatorname{tg} i}{P_0 h + MH + p_1 (h - h_1)} \approx \frac{MH \operatorname{tg} i}{P_0 h}$$

Этот наклон магнитного происхождения можно уничтожить установкою такого грузика  $p_1$  на плече  $l_1$  (по линии NS)<sup>1</sup>, чтобы было

$$(25) \quad MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1 = 0$$

<sup>1</sup> В северных магнитных широтах, где угол  $i > 0$ , будет  $l_1 < 0$ , т. е. грузик надо будет располагать между шпилькою и точкою  $S$  картушек.

Это есть *правильный* способ выбора и установки грузика  $p_1$  (ниже указано, как это проверить и исправить), но часто этого не соблюдают и, не проверив механического уравновешения, передвигают или ставят грузик  $p_1$  так, чтобы было  $\phi_0 = 0$ . Вредное влияние такой неправильной установки грузика будет показано ниже.

В дальнейшем, как и до сих пор, будем предполагать, что условия (15) при  $p_1 = 0$  выполнены, т. е. каргушка *механически уравновешена*.

**§ 4.** Мы имели уравнения:

$$(21') \quad \begin{aligned} \theta''_1 + n_1^2 \theta_1 &= 0 \\ \psi'' + n_2^2 \psi &= \frac{1}{B} [MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1] = \\ &= \frac{C}{B} \left( n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \\ \varphi'' + n_3^2 \varphi &= \frac{1}{C} [MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1] \theta_1 - \\ &- n_1^2 \frac{p_1 l_1 (h - h_1)}{gC} \theta_1 \end{aligned}$$

Эти уравнения принимают простейший вид, если взять грузик  $p_1$  так, чтобы было

$$(26) \quad MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1 = 0$$

т. е. магнитная пара, происходящая от вертикальной силы, была бы уравновешена грузиком  $p_1$ ; тогда будет:

$$(27) \quad \begin{aligned} \theta''_1 + n_1^2 \theta_1 &= 0 \\ \psi'' + n_2^2 \psi &= 0 \\ \varphi'' + n_3^2 \varphi &= -n_1^2 \cdot \frac{p_1 l_1}{gC} (h - h_1) \theta_1 \end{aligned}$$

Ясно, что эти уравнения представляют простые гармонические колебания, периоды которых суть:

$$(28) \quad \begin{aligned} \tau_1 &= 2\pi \sqrt{\frac{A}{P_0 h + p_1 (h - h_1)}} \\ \tau_2 &= 2\pi \sqrt{\frac{B}{P_0 h + p_1 (h - h_1) + MH}} \\ \tau_3 &= 2\pi \sqrt{\frac{C}{MH}} \end{aligned}$$

так что общие интегралы этих уравнений суть:

$$(29) \quad \begin{aligned} \theta_1 &= K_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau_1} + K_2 \sin \frac{2\pi t}{\tau_1} \\ \psi &= K_3 \cos \frac{2\pi t}{\tau_2} + K_4 \sin \frac{2\pi t}{\tau_2} \\ \varphi &= K_5 \cos \frac{2\pi t}{\tau_3} + K_6 \sin \frac{2\pi t}{\tau_3} + \\ &+ \frac{\tau_3^2}{\tau_3^2 - \tau_1^2} \cdot \frac{p_1 l_1}{gC} (h - h_1) \cdot \theta_1 \end{aligned}$$

Заметим здесь же, что коэффициент у последнего члена составляет около  $\frac{1}{250}$  и потому этот член может быть отброшен. Величины  $K_1, K_2, \dots, K_6$  — постоянные произвольные, на определении которых по начальным условиям нет надобности останавливаться.

**§ 5.** При составлении уравнений (18) и полученных из них уравнений (21) сопротивление воздуха во внимание не принято; если же считать его пропорциональным первой степени скорости, то в левые части уравнений (18) надо соответственно приписать члены:

$$+ 2N_1 \theta'_1, + 2N_2 \psi', + 2N_3 \varphi'$$

(и в уравнениях (21) члены:

$$(30) \quad 2f_1 \theta'_1, 2f_2 \psi', 2f_3 \varphi'$$

так что эти уравнения будут:

$$(31) \quad \begin{aligned} \theta'_1 + 2f_1 \theta'_1 + n_1^3 \theta_1 &= 0 \\ \psi' + 2f_2 \psi' + n_2^3 \psi - \frac{1}{B} [MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1] &= 0 \\ \varphi' + 2f_3 \varphi' + n_3^3 \varphi - \frac{1}{C} [MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1] \theta_1 &= 0 \end{aligned}$$

Полагая

$$n_1^3 - f_1^2 = s_1^3, \quad n_2^3 - f_2^2 = s_2^3, \quad n_3^3 - f_3^2 = s_3^3$$

$$(32) \quad T_1 = \frac{2\pi}{s_1}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{s_2}, \quad T_3 = \frac{2\pi}{s_3}$$

мы получим общие интегралы этих уравнений в таком виде:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= e^{-f_1 t} \left[ K_1 \cos \frac{2\pi t}{T_1} + K_2 \sin \frac{2\pi t}{T_1} \right] \\ \psi &= e^{-f_2 t} \left[ K_3 \cos \frac{2\pi t}{T_2} + K_4 \sin \frac{2\pi t}{T_2} \right] + \\ &+ \frac{1}{n_2^3 B} [MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1] \\ \varphi &= e^{-f_3 t} \left[ K_5 \cos \frac{2\pi t}{T_3} + K_6 \sin \frac{2\pi t}{T_3} \right] + \\ &+ \frac{1}{C n_3^3} [MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1] \cdot e^{-f_1 t} \left[ D_1 \cos \frac{2\pi t}{T_1} + D_2 \sin \frac{2\pi t}{T_1} \right] \end{aligned}$$

Постоянные произвольные  $K_1, K_2, \dots, K_6$  определяются по начальным условиям, постоянные  $D_1$  и  $D_2$  суть некоторые линейные функции от  $K_1$  и  $K_2$ . Так как

$$n_2^2 B = P_0 h + p_1(h - h_1) + M H$$

то из формул (33) видно, что каковы бы ни были начальные условия, по которым определяются постоянные  $K_1, K_2, \dots, K_6$ , картишка совершает затухающие колебания около своего положения равновесия

$$\theta_1 = 0, \quad \dot{\psi} = \psi_0, \quad \varphi = 0$$

к которому она асимптотически приближается.

Определение по наблюдениям качаний параметров  $f_1, f_2, f_3$  и  $n_1^2, n_2^2, n_3^2$ , входящих в уравнения (31), слишком хорошо известно, чтобы на нем здесь останавливаться.

**§ 6.** Положим теперь, что компас находится на качающемся на волнении корабле, и рассмотрим, каким возмущениям он будет подвержен вследствие того, что топка, на которую опирается острие шпильки  $E$ , не остается в покое, а увлекается кораблем в его движении.

Как уже указано в § 1, точку опоры топки можно считать неизменной в корабле. Обозначим через  $E_0$  то положение, которое занимает точка  $E$  при равновесии и покое корабля; проведем через эту точку *неподвижные в пространстве оси координат*  $E_0\xi\eta\zeta$ , которые при равновесии и покое корабля совпадут с осями  $E\xi\eta\zeta$ , введенными в § 2.

Оси  $Gxyz$  картишки возьмем те же, как и раньше, так что относительные координаты точки  $G$  суть:

$$(34) \quad x_g = 0, \quad y_g = 0, \quad z_g = 0$$

координаты же точки  $E$  будут:

$$(35) \quad x_e = 0, \quad y_e = 0, \quad z_e = k$$

Эйлеровы углы, таблицы косинусов, их точные и приближенные значения, формулы преобразования (1'), (2'), (3') сохраняют свой вид, но значения координат  $\xi_e, \eta_e, \zeta_e$  точки опоры острия шпильки уже не будут:

$$\xi_e = 0, \quad \eta_e = 0, \quad \zeta_e = 0$$

а будут вследствие движения корабля:

$$(36) \quad \xi_e = F_1(t), \quad \eta_e = F_2(t), \quad \zeta_e = F_3(t)$$

причем  $F_1(t), F_2(t), F_3(t)$  будут известные функции времени  $t$ , ибо положение точки  $E$  на корабле задается, движение же корабля также предполагается заданным.

Для составления уравнений колебательного движения мы будем поступать совершенно подобно тому, как в § 3, и составим перечисленные в § 3 моменты действующих на картушку сил, учитывая и переносное движение. Эти силы суть: а) вес картушки, б) реакция топки на шпильку, в) вес грузика, г) магнитные силы, д) силы инерции переносного движения грузика.

а) *Вес картушки* моментов не дает.

б) *Реакция топки*. По закону движения центра тяжести системы имеем:

$$(37) \quad \begin{aligned} \frac{P_0}{g} \xi_g'' + \frac{p_1}{g} \xi_p'' &= \Xi_e, \\ \frac{P_0}{g} \eta_g'' + \frac{p_1}{g} \eta_p'' &= H_e, \\ \frac{P_0}{g} \zeta_g'' + \frac{p_1}{g} \zeta_p'' + P_0 + p_1 &= Z_e, \end{aligned}$$

где  $\Xi_e$ ,  $H_e$ ,  $Z_e$  суть проекции реакции топки.

На основании формулы (10) будет:

$$(38) \quad \xi_p'' = \xi_g'' + h_1 \psi'', \quad \eta_p'' = \eta_g'' + l_1 \varphi'' + h_1 \theta_1'', \quad \zeta_p'' = \zeta_g'' - l_1 \psi''$$

следовательно

$$(39) \quad \begin{aligned} \Xi_e &= \frac{P_0 + p_1}{g} \xi_g'' + \frac{p_1 h_1}{g} \psi'' \\ H_e &= \frac{P_0 + p_1}{g} \eta_g'' + \frac{p_1 l_1}{g} \varphi'' + \frac{p_1 h_1}{g} \cdot \theta_1'' \\ Z_e &= \frac{P_0 + p_1}{g} \zeta_g'' - \frac{p_1 l_1}{g} \psi'' + P_0 + p_1 \end{aligned}$$

Из формулы (1') при  $x_e = 0$ ,  $y_e = 0$ ,  $z_e = h$  имеем на основании (36):

$$(38') \quad \xi_g = F_1(t) - h\psi, \quad \eta_g = F_2(t) - h\theta_1, \quad \zeta_g = F_3(t) - h$$

значит, будет:

$$(40) \quad \xi_g'' = F_1''(t) - h\psi'', \quad \eta_g'' = F_2''(t) - h\theta_1'', \quad \zeta_g'' = F_3''(t)$$

Обозначим реакции при покое корабля, выраженные формулой (13), через  $\Xi_{e,0}$ ,  $H_{e,0}$ ,  $Z_{e,0}$ , тогда на основании уравнений (39) и (40)

$$(41) \quad \begin{aligned} \Xi_e &= \Xi_{e,0} + \frac{P_0 + p_1}{g} F_1''(t), \quad H_e = H_{e,0} + \frac{P_0 + p_1}{g} F_2''(t) \\ Z_e &= Z_{e,0} + \frac{P_0 + p_1}{g} F_3''(t) \end{aligned}$$

а так как на основании формулы (3')

$$\begin{aligned} X_e &= \Xi_e + H_e \varphi - Z_e \psi \\ Y_e &= -\Xi_e \varphi + H_e - Z_e \theta_1 \\ Z_e &= \Xi_e \psi + H_e \theta_1 + Z_e \end{aligned}$$

то при очевидном обозначении будет:

$$(42) \quad \begin{aligned} X_e &= X_{e,0} + \frac{P_0 + p_1}{g} [F'_1(t) + \varphi F'_2(t) - \psi F'_3(t)] \\ Y_e &= Y_{e,0} + \frac{P_0 + p_1}{g} [-\varphi F'_1(t) + F'_2(t) - \theta_1 F'_3(t)] \\ Z_e &= Z_{e,0} + \frac{P_0 + p_1}{g} [\psi F''_1(t) + \theta_1 F''_2(t) + F''_3(t)], \end{aligned}$$

и моменты реакции:

$$(43) \quad \begin{aligned} L_e &= Z_e y_e - Y_e z_e = \\ &= L_{e,0} - \frac{P_0 + p_1}{g} [-\varphi F''_1(t) + F''_2(t) - \theta_1 F''_3(t)] \cdot h \\ M_e &= X_e z_e - Z_e x_e = \\ &= M_{e,0} + \frac{P_0 + p_1}{g} [F''_1(t) + \varphi F''_2(t) - \psi F''_3(t)] \cdot h \\ N_e &= Y_e x_e - X_e y_e = 0 \end{aligned}$$

в) Моменты от веса картушки равны нулю. Моменты от веса грузика и моменты магнитных сил остаются прежние:

$$(44) \quad L_p = L_{p,0}, \quad M_p = M_{p,0}, \quad N_p = N_{p,0}$$

г) Моменты магнитных сил остаются без изменения:

$$(45) \quad L_m = L_{m,0}, \quad M_m = M_{m,0}, \quad N_m = N_{m,0}$$

д) *Моменты сил инерции переносного движения грузика.* На основании формул (38) и (40) имеем:

$$\begin{aligned} \zeta_p'' &= F''_1(t) - (h - h_1) \psi''; \quad \eta_p'' = F''_2(t) + l_1 \varphi'' - (h - h_1) \theta_1'' \\ \zeta_p &= F''_3(t) - l_1 \varphi'' \end{aligned}$$

Следовательно, слагающие сил инерции будут:

$$\begin{aligned} \Xi_i &= -\frac{p_1}{g} F''_1(t) - \frac{p_1}{g} (h - h_1) \psi'' \\ H_i &= -\frac{p_1}{g} F''_2(t) - \frac{p_1}{g} l_1 \varphi'' + \frac{p_1}{g} (h - h_1) \theta_1'' \\ Z_i &= -\frac{p_1}{g} F''_3(t) + \frac{p_1}{g} l_1 \varphi'' \end{aligned}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} X_i &= X_{i,0} - \frac{p_1}{g} [F''_1(t) + \varphi F''_2(t) - \psi F''_3(t)] \\ Y_i &= Y_{i,0} - \frac{p_1}{g} [-\varphi F''_1(t) + F''_2(t) - \theta_1 F''_3(t)] \\ Z_i &= Z_{i,0} - \frac{p_1}{g} [\psi F''_1(t) + \theta_1 F''_2(t) + F''_3(t)] \end{aligned}$$

и моменты сил инерции будут:

$$\begin{aligned}
 L_i &= Z_i y_p - Y_i z_p = -Y_i h_1 = \\
 &= L_{i,0} + \frac{p_1}{g} h_1 [-\varphi F'_1(t) + F'_2(t) - \theta_1 F'_3(t)] \\
 M_i &= X_i z_p - Z_i x_p = X_i h_1 - Z_i l_1 = \\
 &= M_{i,0} - \frac{p_1}{g} h_1 [F'_1(t) + \varphi F'_2(t) - \psi F'_3(t)] + \\
 &\quad + \frac{p_1}{g} l_1 [\psi F'_1(t) + \theta_1 F'_2(t) + F'_3(t)] \\
 N_i &= Y_i x_p - X_i y_p = Y_i l_1 = \\
 &= N_{i,0} - \frac{p_1 l_1}{g} [-\varphi F'_1(t) + F'_2(t) - \theta_1 F'_3(t)]
 \end{aligned} \tag{46}$$

По подстановке составленных выражений моментов в уравнение (14) мы получим два рода членов: 1) суммы членов, относящихся к покоящемуся кораблю, и 2) суммы членов, содержащих функции  $F'_1(t)$ ,  $F'_2(t)$ ,  $F'_3(t)$ , происходящих от движения корабля. Очевидно, что первые члены после переноса в левые части уравнений дадут левые части уравнений (19), которые на основании формул (20) после деления на  $A$ ,  $B$ ,  $C$  представляют свободные колебания картушки [см. уравнения (18), (19), (21)]:

$$\begin{aligned}
 \theta'_1 + n_1^2 \theta_1 &= 0 \\
 \psi'' + n_2^2 \psi - \frac{1}{B} (MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1) &= 0 \\
 \varphi'' + n_3^2 \varphi - \left( n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \theta_1 + n_1^2 \frac{p_1 l_1 (h - h_1)}{g C} \theta_1 &= 0
 \end{aligned}$$

в правых же частях будут суммы (после перемены знака у первого уравнения):

$$\begin{aligned}
 \frac{P_0 h + p_1 (h - h_1)}{g A} [-\varphi F'_1(t) + F'_2(t) - \theta_1 F'_3(t)] \\
 \frac{P_0 h + p_1 (h - h_1)}{g B} [F'_1(t) + \varphi F'_2(t) - \psi F'_3(t)] \\
 - \frac{p_1 l_1}{g C} [-\varphi F'_1(t) + F'_2(t) - \theta_1 F'_3(t)]
 \end{aligned}$$

По формулам (20)

$$\frac{P_0 h + p_1 (h - h_1)}{g A} = n_1^2, \quad \frac{MH}{B} = \frac{C}{B} \cdot n_3^2 \approx 2n_3^2$$

поэтому, присоединив сопротивление среды, мы можем написать общие уравнения колебательного движения картушки на движущемся корабле в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \theta'_1 + 2f_1 \theta'_1 + n_1^2 \theta_1 &= \frac{n_1^2}{g} [-\varphi F'_1(t) + F'_2(t) - \theta_1 F'_3(t)] \\
 \psi'' + 2f_2 \psi' + n_2^2 \psi &= \frac{n_2^2}{g} [F'_1(t) + \varphi F'_2(t) - \psi F'_3(t)] + \\
 &\quad + \frac{C}{B} \left[ n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right]
 \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}\varphi'' + 2f_s\varphi' + n_s^2\varphi = & -\frac{p_1l_1}{gC}[-\varphi F_1''(t) + F_2''(t) - \theta_1F_3''(t)] + \\ & + \left(n_s^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1l_1}{C}\right)\theta_1 + \frac{n_s^2}{g} \frac{p_1l_1(h-h_1)}{C} \theta_1\end{aligned}$$

причем последний член в третьем уравнении может быть по его малости отброшен. Здесь функции  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$ ,  $F_3(t)$  представляют уравнения движения топки, а значит, и острия шпильки

$$(48) \quad \xi_e = F_1(t); \quad \eta_i = F_2(t); \quad \zeta_e = F_3(t)$$

**§ 7.** Прежде чем прилагать эти общие уравнения к частным случаям, сделаем одно замечание исторического характера.

Вопрос о влиянии качаний корабля на показания компаса впервые рассмотрен Вильямом Томсоном (lordом Кельвином) в статье: «On the perturbations of the compass produced by the Rolling of the Ship», помещенной первоначально в «Philosophical Magazine», vol. XLVIII, Nov. 1874, pp. 363—369, вошедшей затем в том IV собрания сочинений Томсона (Mathematical and physical papers, vol. IV, pp. 464—469).

В этой статье Томсон, ограничиваясь рассмотрением чисто боковой качки корабля, получает из простых геометрических соображений уравнение, равносильное третьему из уравнений (47), и, заметив, что возмущающая сила—синусоидальная, приходит к общему выводу, что если сделать период свободных колебаний значительно больше периода изменяемости силы, то возмущения будут весьма малые. За такой период он берет 30 сек. и ставит следующую задачу: «Является важный практический вопрос, каким образом такой период может быть достигнут совместно с малостью стрелок компаса, которая необходима для возможности точного уничтожения девиации компаса».

Поставив этот общий вопрос, знаменитый автор, не вдаваясь в изложение подробностей и разбора влияния качаний корабля, «что слишком удлинило его статью», после трехлетней экспериментальной работы, к 1877 г. создал свой компас с легкой картушкой, малыми стрелками, приборами для полного уничтожения девиации (т. е. полукруговой, четвертной и крестовой), дефлектором и пеленгатором и представил его английскому Адмиралтейству.

Адмиралтейство не сочло возможным принять компасы Томсона на суда флота, но допустило к пользованию их капитанами, подобно тому как многие пользуются своим секстаном, а не казенным, и пять лет отклоняло предложение Томсона. Лишь чисто случайное обстоятельство повело к их введению на судах английского военного флота.

В 1882 г. правитель Египта Араби-паша восстал против султана турецкого, объявил себя независимым и взял под свой контроль Суэцкий канал, большая часть акций которого уже тогда принадлежала английскому правительству.

Англия послала свой броненосный флот под командой адмирала Сеймуря усмирять Араби-пашу. Одним из наиболее мощных броненосцев «Inflexible», вооруженным 80-тонными 17-дюймовыми калибра орудиями, командовал тогда капитан 1-го ранга Фишер, который во время мировой войны в чине генерал-адмирала (admiral of the fleet) был первым лордом адмиралтейства и направлял все стратегические действия английского флота. Другим таким же кораблем командовал капитан Хозам, впоследствии также полный адмирал. У обоих капитанов были свои собственные компасы Томсона.

Сеймур без всяких дипломатических проволочек разгромил флотом главный оплот Араби—форты Александрии. Араби-паша покорился, передал Египет «во временное управление Англии для установления порядка и обеспечения свободы судоходства по Суэцкому каналу».

Это «временное управление» продолжается и по днесь, Араби же с изрядной пенсией в 20 000 ф. ст. в год был поселен в райском климате Сейшельских островов.

В бою с фортами Александрии на обоих кораблях, да и на всех прочих, от сотрясений при стрельбе из громадных орудий все компасы вышли из строя: их картушки ходили в круговую, ни править по ним, ни определяться было невозможно; лишь компасы Томсона у Фишера и Хозама действовали превосходно, и успех боя в значительной мере зависел от кораблей, которыми они командовали. Они уверенно маневрировали среди отмелей, выбирали близкую дистанцию, с которой стрельба из 80-тонных орудий отличалась удивительной меткостью, а их снарядам не могли противостоять никакие—ни каменные, ни земляные—бронсторы.

В своих донесениях и Фишер и Хозам дали восторженные отзывы о компасах Томсона. Адмиралтейство вынуждено было распустить тот состав компасного комитета, который не признавал компасов Томсона, назначить новый состав комитета под председательством Фишера. Компасы Томсона на основании боевого опыта были немедленно приняты к употреблению на судах английского флота.

§ 8. После этого замечания вернемся к уравнениям (47) и применим их последовательно к различным случаям качаний корабля, начиная с простейших.

Но сперва надо показать, каким образом задается движение корабля и как, зная это движение, курс корабля, положение компаса на корабле, составить функции  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$ ,  $F_3(t)$ , входящие в уравнение (47). Эту выкладку проведем в общем виде, чтобы не повторять ее в каждом отдельном частном случае.

При рассмотрении качаний корабля берут две системы координат: относительную и абсолютную, как и при движении всякого твердого тела (фиг. 4).

За начало координат относительной системы, т.е. неизменной в корабле, принимают точку  $K$ —центр тяжести корабля—и направляют эти оси так:

$Kx_1$  по диаметральной плоскости параллельно грузовой ватерлинии в нос,  $Ky_1$  перпендикулярно диаметральной плоскости к правому борту,  $Kz_1$  — в диаметральной плоскости перпендикулярно грузовой ватерлинии вверх.

Таким образом, плоскости корабельных координат суть:  $Kx_1 z_1$  — диаметральная плоскость,  $Ky_1 z_1$  — плоскость шпангоута,  $Kx_1 y_1$  — плоскость, параллельная грузовой, причем все три плоскости пересекаются в точке  $K$  — центре тяжести корабля.

За оси координат, неизменные в пространстве, принимают то положение осей  $Kx_1 y_1 z_1$ , которое они занимают при равновесии и покое корабля на тихой воде. Эти оси обозначим через  $K_0 \xi_1 \eta_1 \zeta_1$  и, чтобы связать их с осями  $Kx_1 y_1 z_1$ , берем эйлеровы углы совершенно так же, как указано в § 1, обозначив их соответственно через  $\Phi, \Psi, \Theta_1$ , так что при малых размахах угол  $\Phi$  представляет приближенно рыскание корабля на курсе, угол  $\Psi$  — килевую качку, угол  $\Theta_1$  — боковую качку.

Положение корабля в любой момент времени  $t$  определяется:

1) мгновенными значениями координат его центра тяжести  $\xi_{1,k}, \eta_{1,k}, \zeta_{1,k}$  относительно осей  $K_0 \xi_1 \eta_1 \zeta_1$ ;

2) мгновенными значениями углов  $\Phi, \Psi, \Theta_1$ .

Все эти шесть переменных должны быть заданы в функции времени  $t$ .

Положение компаса на корабле, точнее говоря, его топки и совпадающего с нею острия шпильки  $E$ , задается ее координатами:

$$(49) \quad x_{1,e} = a_e, \quad y_{1,e} = b_e, \quad z_{1,e} = h_e$$

относительно корабельных осей  $Kx_1 y_1 z_1$ .

Обыкновенно главный компас ставится в диаметральной плоскости, так что  $b_e = 0$ . На современных судах, снабженных рулевыми машинами, и путевой компас ставят в диаметральной плоскости корабля.

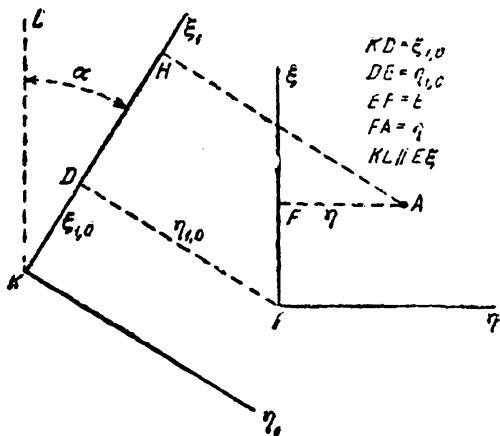
Величина  $h_e$  обыкновенно положительная и в сотни раз больше  $h$ , равной  $EG$ , ибо компас ставится много выше центра тяжести корабля.

Положим, что корабль правят по магнитному курсу  $\alpha$ , которому равен и компасный, ибо девиация предполагается уничтоженной.

Прежде всего необходимо установить соотношение между осями  $K_0 \xi_1 \eta_1 \zeta_1$  и осями  $E\xi\eta\zeta$  или осями, им параллельными, причем плоскость  $E\xi\eta\zeta$  есть плоскость магнитного меридиана места.

У этих двух систем оси  $K\xi_1$  и  $E\xi$  параллельны и вертикальны, поэтому координаты  $\zeta$  и  $\zeta_1$  будут отличаться между собою на величину  $h_e$  — превышения точки  $E$  над точкою  $K$ , так что будет

$$\zeta_1 = \zeta + h_e$$



Фиг. 4.

Составив чертеж на плоскости  $K\xi_1\eta_1$ , мы и получим формулы:

$$(50a) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_0 + \xi \cos \alpha + \sin \alpha \\ \eta_1 &= \eta_0 - \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha. \end{aligned}$$

и обратно:

$$(50b) \quad \begin{aligned} \xi &= (\xi_1 - \xi_0) \cos \alpha - (\eta_1 - \eta_0) \sin \alpha \\ \eta &= (\xi_1 - \xi_0) \sin \alpha + (\eta_1 - \eta_0) \cos \alpha \end{aligned}$$

Таблица косинусов между осями  $Kx_1y_1z_1$ , корабля и неподвижными осями  $K_0\xi_1\eta_1\zeta_1$  будет:

	$\xi_1$	$\eta_1$	$\zeta_1$
$x_1$	1	$\Phi$	$-\zeta_1$
$y_1$	$-\Phi$	1	$-\Theta_1$
$z_1$	$\Psi$	$\Theta_1$	1

следовательно, будет вообще:

$$(51) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_{1,0} + x_1 - \Phi y_1 + \Psi z_1 \\ \eta_1 &= \eta_{1,0} + \Phi x_1 + y_1 + \Theta_1 z_1 \\ \zeta_1 &= \zeta_{1,0} - \Psi x_1 - \Theta_1 y_1 + z_1 \end{aligned}$$

де величины  $\xi_{1,0}$ ,  $\eta_{1,0}$ ,  $\zeta_{1,0}$  суть координаты точки  $K$  относительно осей  $K_0\xi_1\eta_1\zeta_1$ , представляющие движение центра тяжести корабля, которое задается.

Для точки  $E$  острия шпильки, координаты которой суть по предположению

$$x_{1,e} = a_e, \quad y_{1,e} = b_e = 0, \quad z_{1,e} = h_e$$

получим:

$$(52) \quad \begin{aligned} \xi_{1,e} &= \xi_{1,0} + a_e + \Psi h_e \\ \eta_{1,e} &= \eta_{1,0} + \Phi a_e + \Theta_1 h_e \\ \zeta_{1,0} &= \zeta_{1,0} - \Psi a_e + h_e \end{aligned}$$

Составив по этим формулам выражения  $\xi_{1,e}$ ,  $\eta_{1,e}$ ,  $\zeta_{1,e}$ , по формулам (50a), (50b) составим  $\xi_e$ ,  $\eta_e$ ,  $\zeta_e$ , т. е. координаты, отнесенные к осям, включающим магнитный меридиан; это и даст нам функции  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$ ,  $F_3(t)$ , ибо

$$(53) \quad \xi_e = F_1(t), \quad \eta_e = F_2(t), \quad \zeta_e = F_3(t)$$

Эти функции и входят в уравнения (47), в которых после этой подстановки останутся только неизвестные  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$ , определяемые этими уравнениями.

**§ 9.** Относительно уравнений (47) необходимо высказать ряд замечаний.

1) Как видно, эти уравнения, хотя и линейные, но не с постоянными, а с переменными коэффициентами, представляющими периодические функции времени. По виду своему они напоминают уравнения движения Луны, рассмотренные и численно по методе последовательных приближений интегрированные Эйлером в его «Новой теории Луны», извлечения из которой переведены мною на русский язык.

Прилагая методу последовательных приближений, весьма важно отдать себе предварительно отчет о сравнительной величине различных членов уравнений.

Возьмем для примера второе из уравнений (47); все сказанное о нем будет применимо и к двум прочим.

Это уравнение есть:

$$\begin{aligned}\psi'' + 2f_2\psi' + n_2^2\psi = & \frac{n_1^2}{g} [F_1''(t) + \varphi F_3''(t) - \psi F_3''(t)] + \\ & + \frac{C}{B} \left[ n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right]\end{aligned}$$

Внесем множитель  $\frac{1}{g}$  в скобки; тогда в них получаются величины:

$$\frac{F_1''(t)}{g}, \quad \frac{F_3''(t)}{g}, \quad \frac{F_3''(i)}{g}$$

представляющие безразмерные отвлеченные числа, которые по свойству качаний корабля все будут малые, т. е. около 0.1—0.2, т. е., по нашему условию, «малые» по сравнению с 1, т. е. «малые первого порядка». Произведения этих величин на  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\theta_1$  будут второго порядка, которые при самом составлении уравнений были отброшены, поэтому в каждой из скобок надо удержать лишь тот член, который множителя  $\theta_1$ ,  $\varphi$  или  $\psi$  не содержит.

Уравнения (47) примут вид:

$$(54) \quad \begin{aligned}\theta_1'' + 2f_1\theta_1' + n_1^2\theta_1 = & \frac{n_1^2}{g} F_3''(t), \\ \psi'' + 2f_2\psi' + n_2^2\psi = & \frac{n_2^2}{g} F_1''(t) + \frac{C}{B} \left[ n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right] \\ \varphi'' + 2f_3\varphi' + n_3^2\varphi = & -\frac{p_1 l_1}{g C} F_3''(t) + \left( n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \theta_1\end{aligned}$$

и будут линейные с *постоянными* коэффициентами, как это имеет место во всякой задаче «о малых колебаниях» в первом приближении, которое в нашем случае является и окончательным.

2) Томсон рекомендует брать период

$$\tau_3 = \frac{2\pi}{n_3} = 30 \text{ сек.}$$

Значит, будет

$$n_3^2 = \frac{4\pi^2}{900} \approx 0.044$$

Вместе с тем он пишет: «вообще не требуется передвижного грузика у картушки при переходе от крайних северных магнитных широт до крайних южных». Значит, по Томсону, можно брать  $p_1=0$ , а тогда наклон картушки  $\psi_0$  при покое и равновесии корабля будет изменяться в пределах

$$\text{от } +\frac{C}{B} \frac{n_3^2}{n_1^2} \operatorname{tg} i_1 \text{ до } -\frac{C}{B} \frac{n_3^2}{n_1^2} \operatorname{tg} i_1, \quad \left( \frac{C}{B} \approx 2, \operatorname{tg} i_1 \approx 4 \right)$$

Уклон  $\psi_0$  картушки в  $5^\circ \approx \frac{1}{12}$  уже мешает править.

Значит, будет

$$\frac{8n_3^2}{n_1^2} \leq \frac{1}{12}; n_1^2 \approx 100n_3^2 = 4.4$$

следовательно,

$$n_1 \approx 2.1$$

и

$$\tau_1 \approx \tau_2 = \frac{2\pi}{n_1} \approx 3 \text{ сек.}$$

Если бы приняли явно недопустимый уклон  $\psi = 10^\circ = \frac{1}{6}$ , то получили бы

$$n_1^2 \approx 50n_3^2 \text{ и } \tau_1 \approx \tau_2 \approx 4.2 \text{ сек.}$$

3) Отношение амплитуд двух последовательных свободных размахов картушки составляет вообще  $e^{-f\tau} = e^{\frac{-2\pi f}{n}}$  вместе с тем

$$m = \sqrt{n^2 - f^2} - n \left( 1 - \frac{f^2}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx n \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{f^2}{n^2} \right)$$

Эти величины показаны в следующей таблице:

$\frac{f}{n}$	$e^{-\frac{2\pi f}{n}}$	$1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{f^2}{n^2}$
$\frac{1}{4}$	1:4.73	$1 - \frac{1}{32}$
$\frac{1}{6}$	1:2.83	$1 - \frac{1}{12}$
$\frac{1}{8}$	1:2.16	$1 - \frac{1}{128}$
$\frac{1}{9}$	1:2.00	$1 - \frac{1}{162}$
$\frac{1}{10}$	1:1.86	$1 - \frac{1}{200}$

т. е. от введения сопротивления, пропорционального первой степени скорости, погашение размахов происходит весьма быстро, период же почти не изменяется.

4) Нам придется пользоваться частными решениями уравнений вида:

$$(a) \quad \omega'' + n^2\omega = n^2 E \sin(kt + \delta)$$

и

$$(b) \quad \omega'' + 2f\omega' + n^2\omega = n^2 E \sin(kt + \delta)$$

Частное решение уравнения (a) есть

$$(a') \quad \Omega = \frac{n^2}{n^2 - k^2} E \sin(kt + \delta) = \frac{T^2}{T^2 - \tau^2} E \sin(kt + \delta)$$

причем

$$\tau = \frac{2\pi}{n}; \quad T = \frac{2\pi}{k}$$

Для уравнения (b) частное решение есть:

$$(55) \quad \Omega = \frac{n^2}{+\sqrt{(n^2 - k^2)^2 + 4f^2k^2}} E \sin(kt + \delta + \epsilon)$$

причем:

$$(55') \quad \begin{aligned} \cos \epsilon &= \frac{n^2 - k^2}{+\sqrt{(n^2 - k^2)^2 + 4f^2k^2}} \\ \sin \epsilon &= -\frac{2fk}{+\sqrt{(n^2 - k^2)^2 + 4f^2k^2}} \\ \operatorname{tg} \epsilon &= -\frac{2fk}{n^2 - k^2} \end{aligned}$$

по  $\operatorname{tg} \epsilon$  найдется величина  $\epsilon$ , знаки же  $\cos \epsilon$  и  $\sin \epsilon$  укажут ту четверть, в которой этот угол лежит.

В нашем вопросе изменение фазы  $\epsilon$  не будет иметь значения, важна лишь величина амплитуды колебаний, определяемая значением множителя

$$(56) \quad \lambda = \frac{n^2}{+\sqrt{(n^2 - k^2)^2 + 4f^2k^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)^2 + \frac{4f^2}{k^2} \cdot \frac{k^2}{n^2}}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{(1 - q^2)^2 + \mu^2 q^2}}$$

причем положено:

$$q = \frac{k}{n} = \frac{T}{\tau}, \quad \mu = \frac{2f}{n}$$

так что множитель  $\lambda$  есть функция не трех переменных  $n, k, f$ , а только двух  $q$  и  $\mu$ .

5) В системе (54) третье уравнение, которым определяется угол рыскания картушки  $\varphi$ , связано с первым, которым определяется угол  $\theta_1$ , т. е. колебания картушки около ее оси NS. Коэффициент этой связи равен:

$$n_s^3 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} = \frac{1}{C} (MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1)$$

Очевидно, что этот коэффициент связи зависит от момента  $p_1 l_1$  уравновешивающего грузика. Обыкновенно этот грузик ставят так, чтобы было достигнуто магнитное уравновешение, т. е. чтобы

$$(57) \quad MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1 = 0$$

и линия NS картушки была горизонтальна, когда картушка *предварительно уравновешена механически*; или же, как рекомендует Томсон, этот грузик совсем не ставить, т. е. брать

$$p_1 = 0$$

и момента  $MZ = MH \operatorname{tg} i$ , происходящего от вертикальной слагающей земного магнетизма, не изменять.

Спрашивается: которое из этих двух крайних положений выгоднее?

Возьмем простейший и наиболее часто встречающийся случай, когда

$$F_1(t) = E \sin(kt + \delta)$$

значит,

$$F_s(t) = -k^2 E \sin(kt + \delta)$$

Первое и третье уравнения (54) принимают тогда вид:

$$(58) \quad \begin{aligned} a) \quad & \theta_1'' + 2f_1 \theta_1' + n_1^2 \theta_1 = -\frac{n_1^2}{g} k^2 E \sin(kt + \delta) \\ b) \quad & \varphi'' + 2f_s \varphi' + n_s^2 \varphi = \frac{p_1 l_1}{g C} k^2 E \sin(kt + \delta) + \\ & + \left( n_s^3 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \theta_1 \end{aligned}$$

Из уравнения (a) следует частное решение:

$$\theta_1 = -\frac{k^2}{g} \frac{n_1^2}{\sqrt{(n_1^2 - k^2)^2 + 4f_1^2 k^2}} E \sin(kt + \delta + \varepsilon)$$

Обозначим для краткости письма

$$(59) \quad R_1 = \sqrt{(n_1^2 - k^2)^2 + 4f_1^2 k^2}; \quad R_s = \sqrt{(n_s^2 - k^2)^2 + 4f_s^2 k^2}$$

Уравнение (b) по замене  $\theta_1$  его величиною будет вообще

$$\varphi'' + 2f_s \varphi' + n_s^2 \varphi = \frac{p_1 l_1 k^2}{g C} E \sin(kt + \delta) - \\ - \left( n_s^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \frac{k^2 n_1^2}{g R_1} E \sin(kt + \delta + \varepsilon)$$

Его частное решение есть

$$(60) \quad \begin{aligned} \varphi = & \frac{p_1 l_1 k^2}{g C} \cdot \frac{E}{R_1} \sin(kt + \delta + \varepsilon_1) \\ & - \left( n_s^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \frac{k^2 n_1^2}{g R_1} \cdot \frac{1}{R_s} E \sin(kt + \delta + \varepsilon) \end{aligned}$$

Как видно, это частное решение зависит от величины  $p_1$  и будет: при  $p_1 = 0$

$$(61) \quad \varphi = \varphi_1 = - \frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_1^2}{R_1} \cdot \frac{n_s^2}{R_s} E \operatorname{tg} i \cdot \sin(kt + \varepsilon + \varepsilon_1)$$

$$\text{а при } n_s^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} = M \operatorname{tg} i + p_1 l_1 = 0$$

$$(62) \quad \varphi = \varphi_2 = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_s^2}{R_s} E \operatorname{tg} i \cdot \sin(kt + \delta + \varepsilon_1)$$

Фазы не имеют практического значения, важны амплитуды, т. е. величины размахов; обозначим их соответственно:

при  $p_1 = 0$

$$(63) \quad \text{амплитуда } A_0 = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_1^2}{R_1} \cdot \frac{n_s^2}{R_s} E \operatorname{tg} i$$

$$\text{при } \left( n_s^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) = 0$$

$$(63') \quad \text{амплитуда } A_1 = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_s^2}{R_s} \cdot E \operatorname{tg} i$$

причем амплитуды рассматриваются по их абсолютной величине, поэтому будет:

$$\left| \frac{p_1 l_1}{C} \right| = |n_s^2 \operatorname{tg} i|$$

значит, отношение  $A_0 : A_1$  будет:

$$(64) \quad \frac{A_0}{A_1} = \frac{n_1^2}{R_1} = \sqrt{\frac{n_1^2}{(n_1^2 - k^2)^2 + 4f_1^2 k^2}}$$

Это *общее* свойство колебательного движения картушки при всякой возмущающей силе, следующей синусоидальному закону, весьма важно, ибо множитель

$$\frac{n_1^2}{\sqrt{(n_1^2 - k^2)^2 + 4f_1^2 k^2}}$$

как известно из теории вынужденных колебаний, может изменяться в весьма широких пределах, и *правильное* уравновешение картушки имеет весьма большое практическое значение.

Здесь необходимо пояснить, как надо понимать слово «правильное» уравновешение, как его производить и как его проверить, ибо обычно оно производится *неправильно*, хотя 360 лет тому назад компасный мастер Норман в Лондоне производил его *правильно*.

Норман заметил, что картушка, у которой стрелки *намагничены не были*, будучи уравновешена двумя грузиками, расположенными по диаметрам NS и OW так, что оба диаметра были горизонтальны, *после намагничивания* принимала слегка наклонное положение и диаметр NS опускался N-м концом вниз, диаметр же OW оставался горизонтальным, и ему приходилось или передвигать грузик по диаметру NS в направлении к S, или прибавлять новый грузик между топкой и точкой S или под самой точкой S.

Исследовав ближе этот вопрос, Норман построил специальный прибор, названный впоследствии инклинометром, и открыл так называемое «магнитное наклонение»<sup>1</sup>.

Таким образом, когда стрелки *не намагничены*, Норман достигал *механического* уравновешения картушки, т. е. ее центр тяжести лежал в точности на прямой, перпендикулярной к плоскости картушки и проходящей через вершину топки или острие шпильки, если шпилька укреплялась на картушке. Добавочный же грузик уничтожал момент, происходящий от вертикальной слагающей земного магнетизма, т. е. удовлетворял условию

$$MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1 = 0$$

как это и нужно, чтобы формулы (63) и (64) имели место.

Впоследствии от практики Нормана *раздельного* уравновешения механического и магнитного отступили, стали производить *огульное* уравновешение и грузик устанавливать *после* того, как стрелки намагничены; так поступали 54 года тому назад, когда я работал в компасной мастерской Главного гидрологического управления, так поступают и теперь, и за все 360 лет никто не удосужился ни теоретически ни экспериментально изучить этот вопрос.

Причина отступления от практики Нормана, повидимому, состояла не столько в упрощении работы (замена двух операций одной), сколько в том,

<sup>1</sup> Свое открытие Норман опубликовал в изданий им в 1581 г. книге «A New Attractive».

что уже более ста лет принято магниты проваривать в кипящем льняном масле, чтобы они сохранили свою силу и с течением времени не размагничивались, а готовую картушку в масле не проваришь.

6) Спрашивается: каким образом проверить, соблюдено ли у данной готовой картушки условие (25), и если не соблюдено, как исправить?

В настоящее время к каждому компасу изготовления мастерских Главного гидрографического управления прилагается дефлектор де Коллонга и картушка Штемпеля с качающимися стрелками; этими приборами и надо воспользоваться.

Свести компас на берег, установить на треноге, заменить картушку картушкой Штемпеля, поставить дефлектор, измерить вертикальную силу, переменить картушку на обыкновенную и, оставив магнит дефлектора на том отсчете, который ему придан при измерении вертикальной силы, поставить его на компас—вертикальная сила будет уничтожена дефлектором. Если при этом диаметр NS картушки сохранит горизонтальное положение, ее уравновешение правильное; если диаметр NS примет наклонное положение,—неправильное; тогда, перемещая добавочный грузик или наклеивая кусочки воска по диаметру NS, довести уравновешение до правильного.

7) Иногда встречаются компасы, у которых шпилька закреплена на картушке, а топка—на колонке котелка. Спрашивается: которой конструкции отдать предпочтение и почему?

Шпильку следует закреплять на *картушке*, ибо этим обеспечивается неизменность относительного расположения острия шпильки и центра тяжести картушки. Когда же на картушке укреплена топка, в особенности обыкновенная, а не браузовская, то топка может перемещаться по шпильке, а от этого меняется относительное расположение точки опоры и центра тяжести и появляются добавочные моменты, учесть которые ввиду их случайного характера невозможно. Эти моменты производят добавочные нежелательные колебания картушки. Установка шпильки относится уже к производственным вопросам, таковых вопросов множество—вдаваться в их рассмотрение в этой статье невозможно; упомянем лишь об одном из них.

8) Еще много лет тому назад были более или менее удачные попытки увеличить погашение колебаний сухой картушки, располагая около ее стрелок массы красной меди; образующиеся токи Фуко создавали сопротивление движению, пропорциональное первой степени скорости, и вносили погашение по показательному закону. Современная техника с ее усильтельными лампами, фотоэлементами, кенотронами и пр. дает основание полагать, что теперь имеются такие возможности, о которых нельзя было и мечтать не то что 50 лет тому назад, но и 5 лет назад.

§ 10. Выведем теперь общие формулы для расчета колебаний картушки, вызываемых заданными качаниями корабля при данном его курсе как относительно меридiana, так и направления бега волны, скорости хода и положения компаса на корабле. Формулы эти приведем в такой вид,

чтобы получение по ним численных результатов сводилось к простым арифметическим действиям, не требующим пояснений.

Качания корабля на волнении в общем случае состоят из следующих движений:

- а) *орбитальное движение* центра тяжести корабля, а с ним и всего корабля;
- б) *боковая качка*, т. е. качания корабля около его продольной оси, проходящей через ц. т. корабля;
- в) *килевая качка*, т. е. качания около поперечной оси, проходящей через ц. т. корабля;
- г) *рыскание*, т. е. качания около оси, перпендикулярной к плоскости грузовой ватерлинии, накрашенной на корабле, иначе к плоскости, перпендикулярной к двум другим осям и проходящей через ц. т. корабля.

Каждое из этих движений оказывает свое механическое воздействие на картушку компаса и производит свое возмущение картушки. Полное возмущение и слагается из этих частных.

Так как уравнения (54), которыми эти частные возмущения определяются, линейные и с постоянными коэффициентами, то каждое из них может быть рассчитано отдельно, независимо от прочих.

Составим общие формулы для этих отдельных расчетов.

а) *Влияние орбитального движения*. Орбитальное движение происходит в плоскости бега волн, и если бы корабль не имел хода, эта плоскость была бы неподвижна и в ней ц. т. корабля описывал бы эллиптическую орбиту. Когда же корабль имеет ход, то траектория его ц. т. представляет спираль с упомянутым эллиптическим основанием; причем шаг этой спирали равен длине, проходимой кораблем за время одного обращения центра тяжести.

Так как прямолинейное и равномерное поступательное движение корабля (ход) на компас не влияет, то достаточно рассмотреть случай, когда корабль хода не имеет.

В § 8 указаны те системы координатных осей, которыми надо пользоваться, и даны формулы перехода от одних осей к другим.

Эти формулы суть: (50а), (50б), (51), (52) и (53); они доставляют требуемые выражения функций  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$ ,  $F_3(t)$ , входящих в уравнения движения, как полные (47), так и упрощенные (54).

Итак, положение компаса на корабле, точнее говоря, точки  $E$  топки, являющейся опорой острия шпильки, *укрепленной на картушке*, таково:

$$x_{1,e} = a_e, \quad y_{1,e} = b_e, \quad z_{1,e} = h_e$$

Орбитальное движение корабля задается движением точки  $K$  в плоскости  $K, \xi_1, \zeta_1$  бега волн (фиг. 5). Уравнения этого движения — вида:

$$(65) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= a \sin(kt + \delta) \\ \eta_1 &= b \cos(kt + \delta) \end{aligned}$$

Пусть плоскость  $K_0 \xi$  есть плоскость магнитного меридиана,  $\alpha$  — курс корабля, тогда по фиг. 5 имеем:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \xi_e = \xi_1 \cos(\alpha - \gamma) + a_e \cos \alpha = \\ &= a \sin(kt + \delta) \cos(\alpha - \gamma) + a_e \cos \alpha \\ F_2(t) &= \eta_e = \xi_1 \sin(\alpha - \gamma) + a_e \sin \alpha = \\ &= a \sin(kt + \delta) \sin(\alpha - \gamma) + a_e \sin \alpha \\ F_3(t) &= \zeta_e = b \cos(kt + \delta) \end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$(66) \quad \begin{aligned} F'_1(t) &= -ak^2 \cos(\alpha - \gamma) \sin(kt + \delta) \\ F'_2(t) &= -ak^2 \sin(\alpha - \gamma) \sin(kt + \delta) \\ F'_3(t) &= b \cos(kt + \delta) \end{aligned}$$

и мы получим уравнения:

$$(67) \quad \begin{aligned} \theta''_1 + 2f_1 \theta'_1 + n_1^2 \theta_1 &= -\frac{n_1^2}{g} ak^2 \sin(\alpha - \gamma) \cdot \sin(kt + \delta) \\ \varphi'' + 2f_2 \psi' + n_2^2 \psi &= -\frac{n_2^2}{g} ak^2 \cos(\alpha - \gamma) \cdot \sin(kt + \delta) + \\ &+ \frac{C}{B} \left( n_2^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \\ \psi'' + 2f_3 \psi' + n_3^2 \varphi &= \frac{p_1 l_1}{C g} ak^2 \sin(\alpha - \gamma) \cdot \sin(kt + \delta) + \\ &+ \left( n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \theta_1 \end{aligned}$$

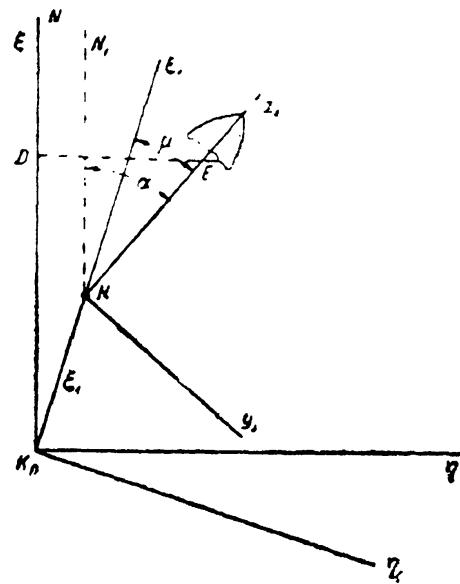
Эти уравнения имеют как раз вид уравнений (58), рассматриваемых в п. 5 § 9, стоит только в уравнении (58) положить

$$(67') \quad E = a \sin(\alpha - \gamma)$$

Это показывает, что лишь горизонтальная слагающая орбитально-го движения вызывает рыскание компаса; амплитуды этого рыскания даются формулами (63).

Обратим внимание на то, что величина  $k$  должна рассчитываться по видимому периоду волн  $T_1$ , который связан с истинным периодом волн  $T$ , скоростью хода корабля  $v$  м/сек и его курсовым углом  $\gamma$  относительно направления бега волн формулой

$$(68) \quad \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T} - \frac{v}{L} \cos \gamma$$



Фиг. 5.

где  $L$  — длина волны, которая связана с истинным ее периодом соотношением

$$(68') \quad T = \sqrt{\frac{2\pi L}{g}}$$

б) *Влияние боковой качки.* Координаты компаса обозначаем попрежнему:

$$x_e = a_e, \quad y_e = 0, \quad z_e = h_e$$

Боковая качка корабля представляет его колебание около продольной оси  $K_0 x_1$  и выражается формулой вида

$$(69) \quad \Theta_1 = [n \sin(\lambda t + \epsilon_1) + m \sin(kt + \epsilon)] \cdot \Theta_0 \sin \gamma$$

где

$$\lambda = \frac{2\pi}{\tau}, \quad k = \frac{2\pi}{T_1}$$

причем  $\tau$  есть период свободных боковых качаний корабля на тихой воде,  $T_1$  — видимый период волн.

Пока отношение

$$\frac{k}{\lambda} < 0.8 \text{ и } \frac{k}{\lambda} > 1.2$$

то приближенно

$$n = 2m$$

когда же

$$0.8 < \frac{k}{\lambda} < 1.2$$

то вместо формулы (69) можно брать

$$(69') \quad \Theta_1 = m \Theta_0 \sin(kt + \epsilon)$$

Тогда будет:

$$\xi_{1,e} = a_e, \quad \eta_{1,e} = h_e \Theta_1; \quad z_{1,e} = h_e$$

значит,

$$(70) \quad \left. \begin{array}{l} F_1(t) = \xi_e = \xi_{1,e} \cos \alpha - \eta_{1,e} \sin \alpha \\ F_2(t) = \eta_e = \xi_{1,e} \sin \alpha + \eta_{1,e} \cos \alpha \\ F_3(t) = \zeta_e = h_e \end{array} \right\}$$

Следовательно, будет:

$$(70') \quad \left. \begin{array}{l} F_1(t) = h_e [n \lambda^2 \sin(\lambda t + \epsilon_1) + m k^2 \sin(kt + \epsilon)] \Theta_0 \sin \gamma \sin \alpha \\ F_2(t) = -h_e [n \lambda^2 \sin(\lambda t + \epsilon_1) + m k^2 \sin(kt + \epsilon)] \Theta_0 \sin \gamma \cos \alpha \\ F_3(t) = 0 \end{array} \right.$$

В этих формулах  $\Theta_0$  есть волновой склон, составляющий около  $8^\circ$ . Корабль имеет наибольшие размахи качки, когда период его свободных качаний  $\tau$  близок к видимому периоду  $T_1$  волны.

Размахи качки в этом случае могут достигать до  $30-35^\circ$  на сторону; этим случаем и ограничимся, т. е. положим  $n=0$ , так что будет:

$$(71) \quad F'_1(t) = -h_e m k^2 \Theta_0 \sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin (kt + \varepsilon)$$

$$F'_3(t) = -h_e m k^2 \Theta_0 \sin \gamma \cdot \cos \alpha \sin (kt + \varepsilon)$$

и уравнения (54) примут вид:

$$(72) \quad \begin{aligned} \theta'_1 + 2f_1 \theta'_1 + n_1^2 \theta_1 &= -\frac{n_1^2}{g} k^2 m h_e \Theta_0 \sin \gamma \sin \alpha \sin (kt + \varepsilon) \\ \psi'' + 2f_3 \psi' + n_3^2 \psi &= -\frac{n_3^2}{g} k^2 m h_e \Theta_0 \sin \gamma \cos \alpha \sin (kt + \varepsilon) + \\ &+ \frac{C}{B} \left( n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \\ \varphi'' + 2f_3 \varphi' + n_3^2 \varphi &= \frac{p_1 l_1}{g C} k^2 m h_e \Theta_0 \sin \gamma \cos \alpha \sin (kt + \varepsilon) + \\ &+ \left( n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \end{aligned}$$

т. е. тот же вид, как уравнения (58); причем

$$(72') \quad E = h_e m \Theta_0 \sin \gamma \cos \alpha$$

и значит, амплитуда рыскания будет:

$$(73) \quad \text{при } p_1 = 0 \text{ амплитуда } A_0 = \frac{k^2 n_1^2 n_3^2}{g R_1 R_3} E \operatorname{tg} t$$

$$(73') \quad \text{при } M H \operatorname{tg} i + p_1 l_1 = 0 \text{ амплитуда } A_1 = \frac{k^2 n_3^2}{g R_3} E \operatorname{tg} i$$

Этот случай есть как раз тот, который был рассмотрен Томсоном, и наш результат

$$(74) \quad \varphi = \frac{k^2 n_1^2 n_3^2}{g R_1 R_3} h_e m \Theta_0 \sin \gamma \operatorname{tg} i \cdot \cos \alpha \cdot \sin (kt + \varepsilon - \varepsilon_1)$$

совпадает с данным Томсоном, если положить  $\gamma = 90^\circ$ , т. е. корабль идет лагом к волне, и соответственно изменить обозначения Томсона на наши.

в) *Влияние килевой качки.* Координаты компаса обозначаем по-прежнему:

$$x_\varepsilon = a_\varepsilon, \quad y_\varepsilon = 0, \quad z_\varepsilon = h$$

Кильевая качка состоит только из вынужденных колебаний и выражается формулой вида:

$$(75) \quad \Psi = \Psi_0 \sin(kt + \delta)$$

причем

$$k = \frac{2\pi}{T_1}$$

где  $T_1$  — видимый период волны, определяемый по формуле (68).

По формулам (52) будет:

$$(76) \quad \begin{aligned} \xi_{1,e} &= a_e + h_e \Psi \\ \eta_{1,e} &= 0 \\ \zeta_{1,e} &= -a_s \Psi + h_e \end{aligned}$$

следовательно,

$$(77) \quad \begin{aligned} F_1(t) &= \xi_e = \xi_{1,e} \cos \alpha - \eta_{1,e} \sin \alpha = (a_e + h_e \Psi) \cos \alpha \\ F_2(t) &= \eta_e = \xi_{1,e} \sin \alpha + \eta_{1,e} \cos \alpha = \xi_{1,e} \sin \alpha = (a_e h_e \Psi) \sin \alpha \\ F_3(t) &= -a_s \Psi + h_e \end{aligned}$$

и по дифференцированию:

$$(78) \quad \begin{aligned} F'_1(t) &= -k^2 h_e \Psi_0 \cos \alpha \sin(kt + \delta) \\ F'_2(t) &= -k^2 h_e \Psi_0 \sin \alpha \sin(kt + \delta) \end{aligned}$$

По подстановке первое и третье уравнения (54) будут:

$$(79) \quad \begin{aligned} \theta'_1 + 2f_1 \theta'_1 + n_1 \theta_1 &= -\frac{n_1^2}{g} k^2 h_e \Psi_0 \sin \alpha \sin(kt + \delta) \\ \varphi'' + 2f_3 \varphi' + n_3 \varphi &= \frac{\rho_1 l_1}{g C} k^2 h_e \Psi_0 \sin \alpha \sin(kt + \delta) + \\ &+ \left( n_3 \operatorname{tg} i + \frac{\rho_1 l_1}{C} \right) \theta_1 \end{aligned}$$

т. е. имеют вид (58). Значит, амплитуды рыскания получаются по формулам (63):

$$(80) \quad \text{при } \rho_1 = 0 \quad A_0 = \frac{k^2 n_1^2}{g} \frac{n_3^2}{R_1 R_3} E \operatorname{tg} i$$

$$\text{при } M H \operatorname{tg} i + \rho_1 l_1 = 0 \quad A_1 = \frac{k^2 n_3^2}{g} E \operatorname{tg} i$$

причем

$$(80') \quad E = h_e \Psi_0 \sin \alpha$$

г) *Влияние рыскания корабля. Координаты компаса:*

$$x_{1,e} = a_e, \quad y_{1,e} = 0, \quad z_{1,e} = h_e$$

Рыскание корабля на курсе, производимое волной, состоит только из вынужденного колебания, выражаемого формулой:

$$\Phi = \Phi_0 \sin(kt + \delta_1); \quad \Theta_1 = 0; \quad \Psi = 0$$

причем

$$k = \frac{2\pi}{T_1}$$

где  $T_1$  — видимый период волн, определяемый по формуле (68).  
По формуле (52) имеем:

$$\begin{aligned}\xi_{1,e} &= a_e \\ \eta_{1,e} &= a_e \Phi \\ \zeta_{1,e} &= h_e\end{aligned}$$

Затем по формуле (50b) получаем:

$$\begin{aligned}F_1(t) &= \xi_e = \xi_{1,e} \cos \alpha - \eta_{1,e} \sin \alpha = a_e \cos \alpha - a_e \Phi \sin \alpha \\ F_2(t) &= \eta_e = \xi_{1,e} \sin \alpha + \eta_{1,e} \cos \alpha = a_e \sin \alpha + a_e \Phi \cos \alpha\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}F'_1(t) &= k^2 a_e \Phi_0 \sin \alpha \sin(kt + \delta_1) \\ F'_2(t) &= -k^2 a_e \Phi_0 \cos \alpha \cdot \sin(kt + \delta_1)\end{aligned}$$

и первое и третье уравнения (54) будут:

$$\begin{aligned}\theta''_1 + 2f_1 \theta'_1 + n_1^2 \theta_1 &= -\frac{n_1^2}{g} k^2 a_e \Phi_0 \cos \alpha \sin(kt + \delta_1) \\ \varphi'' + 2f_3 \varphi' + n_3^2 \varphi &= \frac{p_1 l_1}{g C} a_e \Phi_0 \cos \alpha \sin(kt + \delta_1) + \left(n_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C}\right) \theta_1\end{aligned}$$

Эти уравнения имеют вид (58); следовательно, амплитуды колебаний будут:

при  $p_1 = 0$

$$(81) \quad A_0 = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_1^2}{R_1} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i$$

$$\text{при } M H \operatorname{tg} i + p_1 l_1 = 0 \quad A_1 = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} \cdot E \operatorname{tg} i$$

причем

$$(81') \quad E = a_e \Phi_0 \cos \alpha$$

Для удобства применения полученных результатов к числовым расчетам сделаем общую их сводку.

Рыскание φ картушки

Движе- ние корабля	Уравнения движе- ния корабля	E	$p_1 = 0$	$MH \operatorname{tg} i + p_1 l_1 = 0$
			$A_0$	$A_1$
Орби- тальное	$\xi_1 = a \sin (kt + \delta)$ $\zeta_1 = b \cos (kt + \delta)$	$a \sin (\alpha - \gamma)$	$\frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_1^2}{R_1} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i$	$\frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i$
Б. К.	$\Theta_1 = m\Theta_0 \sin \gamma \sin (kt + \varepsilon)$	$h_e m \Theta_0 \sin \gamma \cos \alpha$	$\frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_1^2}{R_1} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i$	$\frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i$
К. К.	$\Psi = \Psi_0 \sin (kt + \varepsilon_1)$	$h_e \Psi_0 \sin \alpha$	$\frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_1^2}{R_1} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i$	$\frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i$
Рыск.	$\Phi = \Phi_0 \sin (kt + \varepsilon_2)$	$a_e \Phi_0 \cos \alpha$	$\frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_1^2}{R_1} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i$	$\frac{k^2}{g} \cdot \frac{n_3^2}{R_3} E \operatorname{tg} i$

Координаты топки:

$$x_{1,e} = a_e, \quad y_{1,e} = 0, \quad z_{1,e} = h_e$$

Периоды свободных качаний картушки:  
вокруг оси NS:

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{n_1} \text{ (около } 3-4 \text{ сек)}$$

вокруг оси OW:

$$\tau_2 = \frac{2\pi}{n_2} \approx \tau_1$$

вокруг вертикальной оси:

$$\tau_3 = \frac{2\pi}{n_3} \approx 30 \text{ сек}$$

Видимый период волны:

$$(68) \quad T_1 = \frac{2\pi}{k}, \quad \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T} - \frac{v}{L} \cos \gamma$$

Истинный период волны:

$$T = \sqrt{\frac{2\pi L}{g}}, \quad \text{где } L \text{ — длина волны.}$$

Скорость хода корабля  $v$  м/сек.

Курсовой угол, считаемый от направления бега волн,  $\gamma$ .

Магнитный курс корабля  $\alpha$ .

$$R_1 = \sqrt{(n_1^2 - k^2)^2 + 4f_1^2 k^2}; \quad R_3 = \sqrt{(n_3^2 - k^2)^2 + 4f_3^2 k^2}$$

Примем

$$\mu = \frac{f_1}{n_1} = \frac{f_2}{n_2} = \frac{f_3}{n_3} = \frac{1}{5}; \quad e^{-2\pi\mu} = 1 : 3.5 = 0.284$$

$$\mu = \frac{f_1}{n_1} = \frac{f_2}{n_2} = \frac{f_3}{n_3} = \frac{1}{10}; \quad e^{-2\pi\mu} = 1 : 1.86 = 0.536$$

По поводу этой сводки сделаем следующие замечания:

1) Очевидно, что легко составить такую же таблицу для углов  $\theta$ , и  $\psi$ ; но мы ограничились углом  $\phi$  потому, что этот угол представляет целиком погрешность показаний компаса во всякий момент времени.

2) Значения величин  $E$  показывают, что угол  $\phi$  изменяется в зависимости от магнитного курса корабля; изменения эти имеют полуокруговой характер, и, например, влияние боковой качки вносит погрешность, совершенно подобную креновой девиации.

3) Угол  $\phi$  зависит от угла  $\gamma$  — курса корабля по отношению к направлению бега волн; но эта зависимость не прямая, а косвенная, и происходит от того, что качания корабля зависят от угла  $\gamma$ . При изменении угла  $\gamma$  изменяются действующий волновой склон, действующая длина волны, видимый период волн, а этими элементами и определяется качка корабля.

4) Обратим внимание, что при прочих одинаковых условиях рыскание  $\phi$  картушки пропорционально  $\operatorname{tg} i$ , т. е. тангенсу угла наклонения; чем этот тангенс меньше, тем компас спокойнее.

5) По формулам, показанным в сводке, расчет амплитуды рыскания: картушки, происходящего от каждого рода качаний корабля, в отдельности настолько прост, что не требует пояснений.

Чтобы получить совокупное влияние нескольких колебаний, надо взять сумму абсолютных величин их амплитуд, ибо фазовые углы могут скомбинироваться так, что все синусы одновременно обратятся в  $+1$ .

6) Для облегчения расчетов помещаем табличку значений  $\lambda$  [формула (56)].

## ГЛАВА II

### Колебания картушки в жидкости

§ 11. Малое погашение размахов «сухой» картушки магнитного компаса заставило еще много лет тому назад прибегнуть, в особенности для путевых компасов, к устройству компасов с жидкостью.

Динамика их колебаний существенно отличается от динамики колебаний «сухой» картушки. Это отличие состоит не только в более сильном погашении размахов, а главным образом в том, что картушка почти плавает в жидкости, оказывая самое ничтожное давление на шпильку, которая только центрует картушку в котелке, не давая ей касаться его внутренней

Таблица величин  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - q^2)^2 + \mu^2 q^2}}$

поверхности; вертикальная слагающая реакции топки изменяется лишь в тесных пределах, поскольку изменяются сила поддержания и вес картушки вследствие движений корабля.

Чтобы составить уравнения движения картушки, будем следовать методу, изложенному в главе I, внеся лишь необходимые изменения.

**§ 12.** Начнем рассмотрение со свободных колебаний картушки, предполагая, что корабль неподвижен, картушка же выведена из положения равновесия и без всякого толчка предоставлена самой себе.

Само собою разумеется, что все, изложенное в § 1, остается без изменения.

В добавок к силам, перечисленным в § 2, на картушку действует сила поддержания  $Q_0$ , приложенная в центре пловучести; координаты этой точки обозначим через  $x_q, y_q, z_q$ , так что будет:

$$(82) \quad x_q = 0, \quad y_q = 0, \quad z_q = a$$

вместе с тем

$$(83) \quad \xi_q = -a\psi, \quad \eta_q = -a\theta_1, \quad \zeta_q = a - h$$

Обозначим проекции силы поддержания на абсолютные оси через  $\Xi_q, H_q, Z_q$  и проекции реакции шпильки попрежнему через  $\Xi_e, H_e, Z_e$ , весом грузика  $p_1$  пренебрежем; тогда на основании уравнений (83) будет:

$$\Xi_e + \Xi_q = -\frac{P_0}{g}h\psi''; \quad H_e + H_q = -\frac{P_0}{g}h\theta_1''; \quad -P_0 + Z_e + Z_q = 0$$

Так как вес картушки  $P_0$  и сила поддержания  $Q_0$  известны, то ее слагающие суть  $\Xi_q = H_q = 0, Z_q = Q_0$ , и из предыдущих уравнений имеем

$$(84) \quad \Xi_e = -\frac{P_0}{g}h\psi'', \quad H_e = -\frac{P_0}{g}h\theta_1'', \quad Z_e = P_0 - Q_0 = q_0 \approx 0$$

Сопротивление жидкости пока не рассматриваем, введем его в окончательные уравнения движения.

Нет надобности повторять выкладки § 2, чтобы составить уравнения колебательного (вращательного) движения картушки; достаточно присовокупить к моментам действующих сил моменты силы поддержания  $Q_0$ , которая практически равна  $P_0$  и приложена в центре пловучести, лежащем на величину  $(a - h)$  выше центра тяжести картушки; поэтому моменты силы  $Q_0$  будут:

$$(85) \quad L_q = +Q_0a\theta_1, \quad M_q = -Q_0a\varphi, \quad N_q = 0$$

поэтому в уравнениях (19) восстановляющие члены будут:

$$[P_0h - Q_0a + p_1(h - h_1)]\theta_1; [P_0h - Q_0a + p_1(h - h_1) + MH]\psi; MH\varphi$$

Так как  $Q_0 \approx P_0$ , то вместо выражений (20) положим:

$$(86) \quad \begin{aligned} \frac{P_0(h-a) + p_1(h-h_1)}{A} &= m_1^2 \approx \frac{P_0(h-a)}{A} \\ \frac{P_0(h-a) + p_1(h-h_1) + MH}{A} &= m_2^2 \approx \frac{P_0(h-a)}{A} \\ \frac{MH}{C} &= m_3^2 \end{aligned}$$

Здесь предположено, что моменты инерции  $A_g$ ,  $B_g$ ,  $C_g$  сохранили свои значения, т. е. что картушка не увлекает с собой жидкости, или эти моменты инерции включают и моменты инерции увлекаемой жидкости, и что величины  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  определяются из соотношений:

$$m_1 = \frac{2\pi}{\tau_1}, \quad m_2 = \frac{2\pi}{\tau_2}, \quad m_3 = \frac{2\pi}{\tau_3},$$

причем периоды и погашения размахов наблюдаются по качаниям картушки в жидкости, а не в воздухе; кроме того, надо иметь в виду соотношения (32). Ниже будет указано, каким образом обеспечить пропорциональность сопротивления *первой* степени скорости; тогда уравнения движения будут иметь вид

$$(87) \quad \begin{aligned} \theta_1'' + 2f_1\theta_1' + m_1^2\theta_1 &= 0 \\ \psi'' + 2f_2\psi' + m_2^2\psi &= MH \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{B} = \frac{C}{B} \left( m_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \\ \varphi'' + 2f_3\varphi' + m_3^2\varphi &= \left( m_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \theta_1 \end{aligned}$$

причем в последнем уравнении отброшен член

$$-m_1^2 \frac{p_1 l_1}{g C} (h - h_1) \theta_1$$

по его малости.

Уравнения (87) имеют тот же самый вид, как и уравнения (21'), и, следовательно, все сказанное об уравнениях (21') в § 4, 5 и 6 целиком применимо и к уравнениям (87) свободных колебаний картушки в жидкости на покоящемся корабле.

Вследствие большого сопротивления жидкости эти колебания быстро погашаются.

По наблюденному закону погашения, представляя уменьшение размахов в функции амплитуды их, находится и закон сопротивления жидкости по следствиям предложения XXXI теоремы XXV ньютоновых «Начал», в которых сказано:

«Следствие 1. Если сопротивление пропорционально скорости, то и уменьшение размахов в этой среде пропорционально величине размахов, и обратно.»

*Следствие 2.* Если сопротивление пропорционально второй степени скорости, то и уменьшение размахов пропорционально второй степени величины их, и обратно.

*Следствие 3.* Вообще, если сопротивление пропорционально третьей или любой иной степени скорости, то и уменьшение размахов будет пропорционально той же степени величины их.

*Следствие 4.* Если сопротивление будет частью пропорционально первой степени скорости, частью второй, то уменьшение размахов будет частью пропорционально первой степени их величины, частью второй, и обратно. Однаков будет закон пропорциональности сопротивления скорости и закон уменьшения размахов в зависимости от величины их.

*Следствие 5.* Поэтому, когда маятник совершает последовательные неравные размахи, то можно найти закон убывания размахов в зависимости от величины их; таков же будет и закон сопротивления в зависимости от скорости».

Качания картушки, каждое в отдельности взятое, представляют маятникообразное движение. Теорема Ньютона дает возможность убедиться, каков закон сопротивления жидкости и в какой мере он отклоняется от пропорциональности первой степени скорости и, значит, какие изменения надо внести в уравнения (87), подобно тому как это было сделано Ньютоном при исследовании сопротивления воды качаниям маятника, в нее погруженного.

Ясно, что, изменяя форму поплавка и его нагрузку, делая балластные камеры как глухие, так и сообщающиеся с жидкостью и между собою (подобно успокоительным системам Фрама), можно в весьма широких пределах изменять закон погашения размахов, периоды их и пр., чтобы достигнуть возможно меньшего рыскания картушки, когда корабль идет по прямому курсу на волнованном море.

Влияние поворотов корабля или полного описания циркуляции требует отдельного рассмотрения, которое слишком удлинило бы эту статью.

**§ 13.** Перед тем как составить уравнения движения картушки компаса с жидкостью, необходимо обратить внимание на следующие обстоятельства.

Котелок заполняется жидкостью целиком, так что жидкость в нем свободной поверхности не имеет, и картушка вполне погружена в жидкость. Котелок подвешивается на кардановом подвесе так, что оси подвеса пересекаются в той точке, где находится топка, а значит, практически и острые шпильки, которая должна быть укреплена к картушке, что часто не исполняется, и шпилька укрепляется к дну котелка.

Оба периода качаний котелка должны быть возможно малые по сравнению с периодами свободных качаний корабля, чтобы котелок во всякий момент времени занимал положение динамического равновесия в поле тех переменных сил, которые имеют место на качающемся корабле в той точке, в которой пересекаются оси качания котелка, иначе, в острье шпильки.

При таком устройстве и прямом курсе корабля жидкость внутри ко-

телка будет находиться во всякий момент времени в состоянии динамического равновесия и в относительном к котелку покое. Этого нельзя сказать, когда корабль описывает циркуляцию или вообще находится на повороте; тогда котелок имеет вместе с кораблем вращательное движение около вертикальной оси. В это движение вследствие внутреннего трения увлекается и жидкость, трение которой о картушку ее увлекает и создает не периодическое с малым периодом рыскание, а отклонение, непрерывно возрастающее, пока продолжается движение жидкости в образовавшемся вихре.

Здесь теоретически расчет настолько ненадежен, что предпочтительнее при разработке рациональной конструкции компаса исследовать его экспериментально на обычной поворотной платформе, но только вращая ее не вручную, а передачей от мотора с тою угловой скоростью и на тот угол, на который будет поворачиваться корабль при наиболее обычном маневрировании.

Вот почему я и ограничиваюсь теоретическим исследованием влияния качаний для прямого курса корабля. Эти качания будут налагаться на те длительные отклонения, которые вызываются движением жидкости на повороте корабля и которые весьма легко и просто определять экспериментально. Полную же систему колебаний картушки, вызываемых качаниями корабля, воспроизвести на берегу экспериментально весьма трудно: это требует, ввиду орбитального движения корабля, весьма сложной и весьма громоздкой карусельной установки.

Поворотных же платформ, на которых мне приходилось работать с 1884 по 1887 г., было в компасной мастерской шесть штук; стоимость каждой из них 10—15 руб.

Таким образом, на основании сказанного в начале этого параграфа, уравнения (87), которыми определяются свободные колебания картушки, сохранят свой вид; возмущающие же моменты будут:

$$\begin{aligned} & \frac{m_1^2}{g} [-\varphi F'_1(t) + F'_2(t) - \theta_1 F'_3(t)]; \\ & \frac{m_2^2}{g} [F'_1(t) + \varphi F'_2(t) - \psi F'_3(t)] + \frac{C}{B} \left( m_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right); \\ & - \frac{p_1 l_1}{g C} [-\varphi F'_1(t) + F'_2(t) - \theta_1 F'_3(t)] + \\ & + \left( m_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \theta_1 \end{aligned}$$

и полные уравнения колебательного движения будут:

$$\begin{aligned} \theta'_1 + 2f_1 \theta'_1 + m_1^2 \theta_1 &= \frac{m_1^2}{g} [-\varphi F'_1(t) + F'_2(t) - \theta_1 F'_3(t)] \\ \psi'' + 2f_2 \psi' + m_2^2 \psi &= \frac{m_2^2}{g} [F'_1(t) + \varphi F'_2(t) - \psi F'_3(t)] + \\ & + \frac{C}{B} \left( m_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1 l_1}{C} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi'' + 2f_3\varphi' + m_3^2\varphi &= -\frac{p_1l_1}{gC}[-\varphi F_1''(t) + F_2''(t) - \theta_1 F_3''(t)] + \\ &+ \left(m_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1l_1}{C}\right)\theta_1.\end{aligned}$$

Отбросив же в этих уравнениях весьма малые члены, как это объяснено в § 10, получим уравнения, совершенно подобные уравнениям (54), а именно:

$$\begin{aligned}\theta_1'' + 2f_1\theta_1' + m_1^2\theta_1 &= \frac{m_1^2}{g}F_2''(t) \\ \psi'' + 2f_2\psi' + m_2^2\psi &= \frac{m_1^2}{g}F_1''(t) + \frac{C}{B}\left(m_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1l_1}{C}\right) \\ \varphi'' + 2f_3\varphi' + m_3^2\varphi &= -\frac{p_1l_1}{g}F_2''(t) + \left(m_3^2 \operatorname{tg} i + \frac{p_1l_1}{C}\right)\theta_1,\end{aligned}$$

причем  $m_1^2$ ,  $m_2^2$ ,  $m_3^2$  выражаются формулами (86). Затем все сказанное в § 9 и 10 прилагается и здесь вместе со сводкою формул, в которой надо только вместо букв  $n_1^2$  и  $n_3^2$  писать  $m_1^2$  и  $m_3^2$  и отношение  $\mu = \frac{f_1}{m_1} = \frac{f_2}{m_2} = \frac{f_3}{m_3}$  брать около  $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ .

**§ 14.** Как видно, математическая сторона исследования колебаний картушки в жидкости и картушки „сухой“ одинакова, но нельзя того же сказать о части физической: здесь разница весьма существенная.

1) Для сухой картушки восстановляющий момент, происходящий от веса, пропорционален статическому моменту  $P_0h$ . Для картушки в жидкости этот момент пропорционален произведению  $P_0(h-a)$  веса на расстояние между центром тяжести и центром плавучести, подобно тому, как это имеет место для подводных судов и вообще всякого тела, вполне погруженного в жидкость; таким образом, при конструировании картушки мы имеем *одним параметром больше* ( $a$ ), распоряжаясь которым, можем придавать картушке желаемые качества.

2) Так как вес картушки уравновешивается почти полностью ее плавучестью, то давление на шпильку, равное  $P_0 - Q_0$ , может быть сделано как угодно малым, хотя каждая из величин  $P_0$  и  $Q_0$  в отдельности может быть и большая. Это дает возможность придавать картушке большие моменты инерции и малые моменты статические, делать периоды колебаний настолько большими, чтобы возможность резонанса с колебаниями корабля исключалась, что для сухой картушки практически недостижимо.

Вместе с тем этим устраниется необходимость делать картушку чрезмерно легкой в ущерб ее прочности и неизменности расположения ее частей.

3) Придавая картушке вместе с ее поплавком сферическую форму, как у гирокомпасов Анишютца, можно обеспечить пропорциональность сопротивления первой степени скорости и достигать желаемой величины погашения размахов.

На фиг. 6 и 7 показаны горизонтальное и вертикальное сечения такой сферической картушки, как здесь намечено. Устройство ее настолько просто, что дальнейших объяснений не требует.

Есть еще целый ряд возможностей, о которых здесь не будем распространяться, так как они имеют производственный характер, детали которого не представляют общего интереса.

Цель нашей статьи состоит в том, чтобы, рассмотрев колебания картушки, вызываемые *механическими*, а не магнитными причинами (чего до сих пор с достаточною полнотою сделано не было), дать руководящие основания и методы расчета картушки и выбора соответствующего компаса для корабля заданного типа.

Может возникнуть вопрос, стоило ли для исследования такого ничтожества, как картушка компаса, исписать 50 печатных страниц формулами и уравнениями, не есть ли это упражнение в „стрельбе по воробьям из пушек“.

Но если припомнить, сколько кораблей погибло и теперь еще гибнет из-за неправильности показаний компаса или оттого, что от качки он перестал действовать, сколько труда затрачено на составление магнитных карт всех морей и океанов, начиная с экспедиций 1701 и 1702 гг. знаменитого Галлея, сколько труда затрачено на создание теории земного магнетизма в течение 25 лет самим „princeps mathematicorum“ Гауссом, какой невероятный труд по громадности численных вычислений в течение 40 лет затрачен Адамсом на выработку методов составления магнитных карт по наблюдениям в отдельных пунктах; если припомнить, сколько над компасом работал величайший физик XIX века Вильям Томсон (lord Кельвин), и принять в соображение, что конечная цель всех этих трудов состоит в получении правильности показаний компаса, — то 50 страниц нашей работы представляются ничтожно малою величиною по сравнению с упомянутыми великими трудами.

Недаром еще давно неким мудрецом сказано: „Компас инструментик малый, но, если бы его не было, Америка не была бы открыта“.

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕЛЕНИЙ СИЛ ДЕФЛЕКТОРА КОМПАСА<sup>1</sup>

(*Записки по гидрографии, 1887, вып. 2, стр. 64—81*)

Все способы уничтожения и определения девиации без наблюдения ее самой основаны на измерении сил на различных курсах корабля. И. П. де Коллонг, предложивший большую часть этих способов, предложил и приборы, необходимые для измерений: дефлектор компаса—для горизонтальных сил, а инклиноватор с дефлектором к нему—для вертикальных.

Первый прибор во всех отношениях удовлетворяет своему назначению. Определение же вертикальных сил, пользуясь инклиноватором, кроме малой точности, представляет тот недостаток, что наблюдения производятся для системы стрелок, совершенно отличной от той, для которой по этим наблюдениям уничтожают девиацию. Так как при уничтожении девиации магниты и бруски мягкого железа помещаются близко к компасу, то небезразлично, над какой системой стрелок производить наблюдения, потому что силы зависят от величины и расположения стрелок.

Заведующим мастерской мореходных инструментов при Гидрографическом управлении Штемпелем предложено употреблять при измерении сил картушку с качающимися стрелками<sup>2</sup>, которая дает возможность производить наблюдения как горизонтальных, так и вертикальных сил для той же системы стрелок, что и в компасе, одними и теми же магнитами, а следовательно, получать непосредственно из наблюдений и силы, выраженные в одинаковых единицах. Это достигнуто изменением первоначальной конструкции дефлектора компаса; это изменение в главных чертах состоит: 1) в замене одного магнита двумя по возможности равной между собой силы, причем эти два магнита ставятся горизонтально для измерения горизонтальной силы и вертикально для вертикальной, и 2) в нанесении на стержень прибора двух родов делений—горизонтальных и вертикальных сил, выраженных в тех же единицах.

<sup>1</sup> Эта статья написана еще в конце 1884 г., и тогда же вычисленные деления были нанесены на прибор, который с тех пор подвергся некоторым изменениям в конструкции, например, делается с одним магнитом, а не с двумя, но я оставляю текст этой статьи без всех изменений против того, как он был мною приготовлен к печати в декабре 1884 г. А. К.

<sup>2</sup> У этой картушки система шести малых стрелок подвешена на двух нитях, вязанных за середины крайних стрелок и натягиваемых по направлению Ost-West. При таком устройстве стрелки могут свободно колебаться в вертикальной плоскости.

Способ, предложенный И. И. де Коллонгом для вычисления этих делений, и составляет предмет этой заметки.

I. Наблюдения, необходимые для этих вычислений, были произведены в мастерской мореходных инструментов следующим образом: у главного компаса, снабженного прибором для уничтожения девиации, обыкновенная легкая картушка заменялась картушкой Штемпеля. По стержню дефлектора замечались расстояния от центра его магнитов, поставленных горизонтально, до центра системы стрелок, соответствующие  $1; 0,9; 0,8, \dots, 0,2$  горизонтальной составляющей земного магнетизма  $H$ ; то же производилось и для нижних магнитов, служащих для уничтожения полукруговой девиации.

В направлении, перпендикулярном к магнитному меридиану, была прикреплена к нактузу доска с миллиметровой шкалой и жолобом, по которому перемещался магнит, служащий для уничтожения креновой девиации, таким образом, что ось его была горизонтальна и в одном уровне с центром стрелок, которые помощью грузика были приведены в горизонтальное положение. Магниты дефлектора и нижние ставились на расстояние, соответствующее той же доли силы  $H$ , полюсами в ту же сторону перпендикулярно к магнитному меридиану. В жолоб вкладывался креновой магнит, и по шкале замечалось то расстояние от центра стрелок до центра магнита, при котором он возвращал картушку в меридиан, т. е. производил силу, равную сумме сил, исходящих от магнитов дефлектора в нижних. На этом расстоянии креновой магнит затем помещался в своей трубе под компасом, после чего по дефлектору отсчитывалось расстояние, в котором его магниты, поставленные вертикально, уничтожали силу, исходящую от кренового магнита.

Чтобы по возможности исключить ошибки, происходящие от взаимного влияния магнитов, несовершенства приборов и пр. при наблюдении горизонтальных сил, располагали их таким образом, чтобы отклоненные стрелки были перпендикулярны к магнитам дефлектора или прибора для уничтожения девиации, самое отклонение производили в обе стороны от меридиана и при окончательной установке магнитов принимали среднее из расстояний, полученных для той же силы.

При определении положения кренового магнита каждое расстояние получалось из двух, т. е. к компасу, были поочередно обращаемы оба полюса магнита. То же делалось и при положении его в трубе.

Чтобы иметь наблюдения на протяжении всей длины стержня дефлектора, их было произведено две серии совершенно одинаковым образом, только при второй серии к стрелкам был прикреплен грузик, дававший при всяком наблюдении тот же врачающий момент, который поэтому и можно считать как бы происходящим от некоторой постоянной вертикальной магнитной силы<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Грузик был установлен так, что эта сила равнялась  $2H$ .

При установке кренового магнита в жолобе все магниты-дефлекторы, нижние и креновой, параллельны между собой, хотя равнодействующая их на стрелки равна нулю, но так как до кренового магнита от магнитов дефлектора гораздо ближе, чем до нижних магнитов, то казалось бы, что он может производить на магниты дефлектора индукцию большую, чем обратная индукция нижних магнитов; но по произведенным наблюдениям оказалось, что это влияние по ничтожности не может быть замечено на столь простых приборах, а следовательно, может быть принято равным нулю, довольствуясь степенью точности, доставляемой ими.

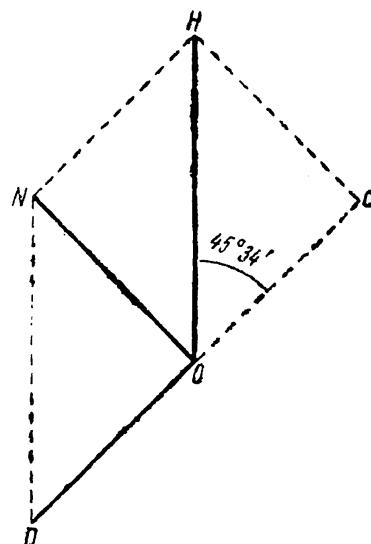
Для большей ясности привожу пример, каким образом получено расстояние от центра стрелок до центра вертикально поставленных магнитов дефлектора, при котором эти последние измеряют силу, равную  $1,4H$ .

Дефлектором с магнитами, поставленными горизонтально, измерили силу, равную  $0,7 H$ , что производилось так: по азимутальному кругу ставили отсчет  $90^\circ \arcsin 0,7 = 45^\circ 34'$  (при этом магниты дефлектора составляют такой же угол с магнитным меридианом) и, перемещая магниты дефлектора, достигали того, что под призмой азимутального круга был Ost, затем производили отсчет по стержню, оказавшийся в данном случае 213,0 мм. Поставив магниты по другую сторону меридиана на тот же угол (отсчет по азимутальному кругу  $360^\circ - 45^\circ 34' = 314^\circ 26'$ ), перемещали их до тех пор, пока под призмой не получался West картушки, притом отсчет по стержню дефлектора оказался 212,25 мм.

Справедливость выше изложенного легко видеть из фиг. 1, на которой  $OH$  по величине и направлению представляет силу  $H$ ,  $OD$  — силу, исходящую от магнитов дефлектора,  $ON$  — равнодействующую их. Очевидно, что когда  $ON$  становилась перпендикулярно к  $OD$ , а угол  $HOC = 45^\circ 34'$ , то  $OD = OH \cos NDO = 0,7 H$ , т. е. требуемой силе.

Убрав дефлектор, подобным же образом и нижними магнитами измеряли силу  $0,7 H$ . При обоих положениях получен тот же отсчет 316,75 в единицах сил.

Поставив магниты дефлектора в средний отсчет 212,6 мм, ставили их и нижние N-ми полюсами на West. Вложив креновой магнит в жолоб доски, придвигали его до тех пор, пока картишка не приходила в меридиан, что замечалось тем, что под призмой получался отсчет Ost. По шкале отсчитывали расстояние до его концов, получилось: до N-го 261,4 мм, до S-го 47,1 мм. Ворочали все магниты на  $180^\circ$ , причем расстояния до концов кренового магнита оказались: до N-го 49,5 мм, до S-го 263,8 мм. Отсюда видно, что среднее расстояние до центра кренового



Фиг. 1.

магнита, при котором он производит на стрелки силу, равную  $1,4 H$ , есть  $155,45 \text{ мм} + 233 \text{ мм}$  (удаление 0 шкалы до центра картушки) =  $388,45 \text{ мм}$ .

Убрав нижние магниты, ставили креповой в его трубу в этом удалении до центра стрелок N-м полюсом кверху, поставив на дефлекторе магниты вертикально N-ми полюсами вниз, перемещали их до тех пор, пока стрелки не принимали горизонтального положения. Получен по стержню отсчет  $221,5 \text{ мм}$ ; при обратном положении магнитов отсчет  $223,3 \text{ мм}$ .

Итак, среднее расстояние центра вертикально поставленных магнитов дефлектора до центра стрелок, при котором они производят силу, равную  $1,4 H^1$ , есть  $224,4 \text{ мм}$ .

Совершенно таким же образом были произведены и прочие наблюдения, результаты которых привожу в этой таблице.

Таблица I

№ наблюдений	Сила по горизонтальному дефлектору $H=1$	Удаление вертикаль- ного магнита до центра
1	1.0	1.962
2	0.9	2.045
3	0.8	2.117
4	0.7	2.224
5	0.6	2.337
6	0.5	2.471
7	0.4	2.6735
8	0.3	2.9455
9	0.2	3.3780
10	$C+1.0$	4.5555
11	$C+0.9$	4.58875
12	$C+0.8$	4.6145
13	$C+0.7$	4.6470
14	$C+0.6$	4.6800
15	$C+0.5$	4.7155
16	$C+0.4$	4.7565
17	$C+0.3$	4.8035
18	$C+0.2$	4.85475

При этих наблюдениях оказалось, что горизонтальная составляющая  $H$  по имевшимся уже на дефлекторе делениям сил равнялась 179.

Эти наблюдения были произведены в октябре 1884 г. под руководством И. П. де Коллонга г. Бейером.

II. Вычисления по вышеприведенным данным произведены по способу, предложенному И. П. де Коллонгом в статье: «Вычисление делений сил и пр.», «Морской сборник», № 1, 1878 г. Вкратце укажу их ход.

<sup>1</sup> Вертикальная составляющая земного магнетизма  $Z$ , как уже сказано выше, была уничтожена грузиком, прикрепленным к стрелкам.

Сила, которую производит магнит на картишку в том случае, когда центр его находится на одной отвесной прямой с центром стрелок, выражается в зависимости от расстояния так:

$$(1) \quad F = \frac{a}{r^3} + \frac{b}{r^6} + \dots$$

Оказывается возможным в этой формуле довольствоваться лишь первыми двумя членами. В этой формуле  $r$  означает расстояние между центрами магнитов и стрелок,  $F$  — силу,  $a$  и  $b$  — некоторые постоянные количества.

Подставив в эту формулу данные табл. I и сгруппировав полученные 18 уравнений по способу наименьших квадратов в два, решение их даст величины коэффициентов  $a$  и  $b$ .

Окончательные уравнения способа наименьших квадратов оказались<sup>1</sup>:

$$(2) \quad \begin{aligned} 0,159459 &= 0,0212010a + 0,00950811b \\ 0,0712868 &= 0,00950811a + 0,00472631b \end{aligned}$$

Решение их дает:

$$(3) \quad \begin{aligned} \lg a &= 0,8888039 \\ \lg b &= 9,6903353_n - 10 \\ \lg \left( -\frac{b}{a} \right) &= \log 10 = 8,8015314 - 10 \end{aligned}$$

Для проверки этих величин по ним были вычислены силы, соответствующие наблюденным расстояниям; полученные разницы вычисленных сил от наблюденных (см. табл. I) привожу в следующей табл. II.

По этим отступлениям можно судить как о верности коэффициентов, так и о достоинстве наблюдений.

При вычислении этих коэффициентов за единицу силы была принята вертикальная сила, измеренная при первом наблюдении; но выше было указано, что эта сила производилась креновым магнитом, помещенным в его трубу в таком удалении от центра стрелок, с которого он вызывает силу, равную  $2H$ .

Сила  $H$  в мастерской мореходных инструментов в имевшихся уже на стержне дефлектора делениях горизонтальных сил равнялась 179 единицам<sup>2</sup>, поэтому если мы хотим выразить силу  $F$ , вычисленную по

<sup>1</sup> Основные вычисления коэффициентов  $a$  и  $b$  как для вертикальных, так и для горизонтальных сил были произведены в две руки И. П. де Коллонгом и мной, и результаты их оказались тождественными.

<sup>2</sup> По табл. III статьи «Вычисление делений сил» этому числу соответствует расстояние, равное  $368,998 \frac{1}{50}$  долей дюйма, равное 187,45 мм (в заголовке таблицы ошибочно напечатано  $\frac{1}{25}$  долей дюйма).

Таблица II

№ наблюдений	Вычисленная сила	Наблюденная	Отступления
1	4.00809	4	+ 0.00809
2	0.89139	1	- 0.00861
3	0.80441	0.8	+ 0.00441
4	0.69472	0.7	- 0.00528
5	0.59946	0.6	- 0.00054
6	0.50776	0.5	+ 0.00776
7	0.40151	0.4	+ 0.00151
8	0.30070	0.3	+ 0.00070
9	0.19971	0.2	- 0.00029
10	2.00295	1+1	- 0.00295
11	1.88200	1+0.9	- 0.01800
12	1.79473	1+0.8	- 0.00527
13	1.69220	1+0.7	- 0.00780
14	1.59595	1+0.6	- 0.00405
15	1.50031	1+0.5	+ 0.00031
16	1.39907	1+0.4	- 0.00097
17	1.29390	1+0.3	- 0.00610
18	1.19086	1+0.2	- 0.00914

формуле (1), в этих единицах, то должны найденную по формуле величину умножить на  $2,179 = 358$ , или, что то же, пользоваться для вычисления такой формулой:

$$(4) \quad F = \frac{a_1}{\rho^4} + \frac{b_1}{\rho^6}$$

где

$$(5) \quad \begin{aligned} a_1 &= 358 a; \quad \log a_1 = 3,442 \ 6869 \\ b_1 &= 358 b; \quad \log b_1 = 2,244 \ 2183_n \end{aligned}$$

$\rho$  должно быть выражено в дециметрах.

При производстве описанных выше наблюдений, между прочим, было измерено расстояние, с которого магниты дефлектора, поставленные вертикально, производят силу, равную вертикальной составляющей земного магнетизма; это расстояние оказалось 175,07 мм. Вычислив по формуле (4) соответствующую силу  $F_1$ , получаем  $F_1 = 505,79$ , а так как горизонтальная составляющая  $H = 179$ , то тангенс угла наклонения равен  $\frac{505,79}{179}$ , а самое наклонение  $70^\circ 31'$ , величина, различающаяся от действительного наклонения в Петербурге минут на  $10'$ . Тот же результат получался и еще несколько раз, а потому мы вправе эту разницу приписать влиянию находящегося в мастерской железа, крыши и пр., тем более, что когда те же наблюдения были произведены на

дворе Адмиралтейства, то вычисленное по ним наклонение оказалось  $70^{\circ}41'$ . Среднее же годовое наклонение в Петербурге  $70^{\circ}44'$ .

Чтобы вычислить требуемые деления вертикальных сил, имея коэффициенты  $a_1$  и  $b_1$ , надо решить уравнение (4) относительно  $\rho$ . Точное решение, как известно, невозможно, приближенное же весьма просто, а именно:

$$(6) \quad \rho = U \left[ 1 - \frac{3}{3} \frac{\omega}{U^2} \left( 1 + \frac{\omega}{U^2} \right) \right]$$

где

$$U = \left( \frac{a_1}{F_1} \right)^{1/3}; \quad \omega = -\frac{b_1}{a_1} = -\frac{b}{a}$$

Точность получаемых по этим формулам результатов более чем достаточна для практики.

Вычисленные таким образом деления вертикальных сил и помещены в табл. VI.

Выше указано, что во вновь вычисленных делениях вертикальных сил эти силы выражаются в тех же единицах, как и горизонтальные в имевшихся уже на дефлекторе делениях, которые были вычислены И. П. де Коллонгом в 1879 г. для прежней конструкции прибора, но ввиду сделанных в нем существенных изменений в мастерской были произведены все необходимые наблюдения, послужившие для вычисления новых делений горизонтальных сил, к которым и перехожу.

III. *Наблюдения* произведены для всей длины стержня прибора, т. е. от 2,5 до 0,2 горизонтальной составляющей земного магнетизма  $H$ , следующим образом: для измерения сил от 2,5 до 1,4  $H$ , например 2,2, поступали так: по стержню дефлектора замечали то расстояние, при котором его магниты, поставленные горизонтально, производили силу, равную 0,6  $H$  по тому способу, как и при первых наблюдениях (синусовых отклонений); получив это удаление, поворачивали дефлектор на  $180^\circ$ , нижние магниты вкладывали в их гнезда, по кругу магнитов устанавливали их параллельно магнитам дефлектора, но полюсами в противоположную сторону, и передвигали до тех пор, пока под призмой не получался отсчет  $90^\circ$  картушки; при этом положении нижние магниты производили силу, равную 1,2  $H$ , как легко видеть из фиг. 2, на которой  $OH$  представляет по величине и направлению силу  $H$ ; угол  $OHD = \arcsin 0,6 = 36^\circ 52'$ ;  $OD$  — сила, исходящая от магнитов дефлектора,  $ON$  — равнодействующая всех сил:  $H$ ,  $OD$  и нижних магнитов. Так как перемещением их достигали того, что  $ON$  становилась перпендикулярно с  $OD$ , то ясно, что при этом  $OM = OD$ . Но  $OM$  равна силе от нижних магнитов —  $OD$ , следовательно, при этом сила нижних магнитов  $OD + OM = 2OD = 1,2 H$ .

Получив таким образом то удаление нижних магнитов, с которого они производят силу, равную 1,2  $H$ , поворачивали их в плоскость маг-

нитного меридиана S-ми полюсами к N-ду; ясно, что от этого направляющая сила увеличивалась на  $1,2 H$ , а следовательно, полная сила, направляющая стрелку, при этом равнялась  $2,2 H$ .

Передвигая магниты дефлектора, поставленные в плоскость магнитного меридиана, N-ми полюсами к N-ду, достигали того, что картишка оставалась в покое, будучи отклонена на  $90^\circ$  от меридиана; очевидно, что это возможно лишь тогда, когда равнодействующая всех сил равна 0; поэтому

замеченное по стержню дефлектора расстояние от центра стрелок до центра магнитов при таком положении картишки соответствовало силе  $2,2 H$ .

Для измерения расстояний, соответствующих силам от  $1,4$  до  $1,1 H$ , нижними магнитами, воспроизводилась половина сила (от  $0,7$  до  $0,55$ ) по способу синусовых отклонений, а по стержню дефлектора замечалось расстояние, при котором его магниты давали силу, вдвое большую, чем нижние.

Расстояния, соответствующие силам от  $1$  до  $0,2 H$ , получали, пользуясь лишь дефлектором по способу синусовых отклонений.

Для избежания ошибок были приняты те же меры, что и при первых наблюдениях (вертикальных сил), и за результат принималось среднее из расстояний, полученных при каждом положении магнитов, с которого они давали ту же силу.

Так как эти наблюдения продолжались несколько дней, то ежедневно при начале и в конце наблюдений измерялась как дефлектором, так и нижними магнитами сила  $H$  и производилось вновь одно из наблюдений предшествующего дня.

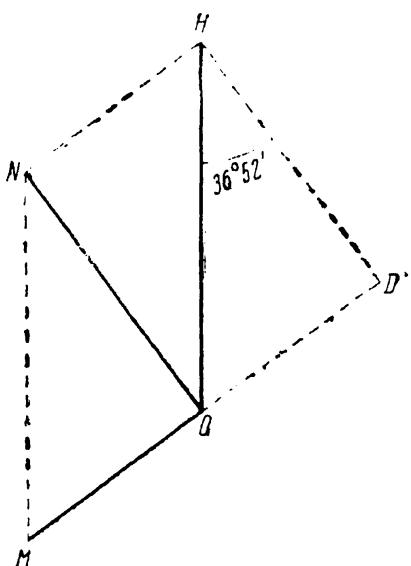
Тождество получаемых результатов убеждало в неизменяемости магнитов, а несколько контрольных наблюдений, как и при первых наблюдениях, показали ничтожность индукции их друг на друга.

В прилагаемой табл. VII приведены полностью результаты этих наблюдений, которые были произведены с 1 по 5 декабря 1884 года г. Бейером и мною.

IV. Вычисления по этим наблюдениям произведены совершенно тождественным способом с тем, по которому были вычислены деления вертикальных сил.

Сперва по способу наименьших квадратов вычислены коэффициенты  $a$  и  $b$  формулы (1), причем окончательные уравнения были:

$$(7) \quad \begin{aligned} 10,22828 &= 1,468047 a + 0,589391 b \\ 4,08255 &= 0,589391 a + 0,249541 b \end{aligned}$$



Фиг. 2.

Таблица VII

№ наблюдения	Наблюденная сила	Удаление при 1-м положении магнитов	Удаление при 2-м положении магнитов	Среднее удаление в миллиметрах	Исправленное среднее удаление
1	2.5	136.35	136.35	136.35	139.25
2	2.4	138.30	138.30	138.30	141.20
3	2.3	140.50	140.70	140.60	143.50
4	2.2	142.90	142.90	142.90	145.80
5	2.1	145.40	145.40	145.40	148.30
6	2.0	147.90	147.90	147.90	150.80
7	2.0	148.45	148.45	148.45	151.35
8	1.9	151.20	151.20	151.20	154.10
9	1.8	154.20	154.10	154.15	157.05
10	1.7	157.45	157.50	157.47	160.37
11	1.6	161.00	161.00	161.00	163.90
12	1.5	164.90	164.90	164.90	167.80
13	1.5	164.70	165.00	164.85	167.75
14	1.4	168.85	169.10	168.97	171.87
15	1.3	173.35	173.70	173.52	176.42
16	1.2	178.50	178.90	178.70	181.60
17	1.1	184.00	184.50	184.25	187.15
18 (вес 6)	1.0	—	—	190.35	193.25
18'	1.0	189.80	190.50	190.15	193.35
19	0.95	193.40	193.50	193.45	196.65
20	0.90	197.20	197.20	197.20	200.40
21	0.85	201.10	201.10	201.10	204.30
22	0.80	205.20	205.80	205.50	208.70
23	0.75	210.00	210.40	210.20	213.40
24 (1)	0.75	210.30	210.30	210.60	213.50
25 (2)	0.70	216.00	215.30	215.65	218.55
26 (3)	0.65	221.60	220.90	221.25	224.15
27 (4)	0.60	228.00	227.00	227.50	230.40
28 (5)	0.55	235.20	234.10	234.65	237.55
29 (6)	0.50	243.00	241.60	242.30	245.20
30 (8)	0.45	252.60	251.30	251.95	254.85
31 (9)	0.40	263.10	262.00	262.55	265.45
32 (10)	0.35	275.80	274.30	275.05	277.95
33 (11)	0.30	290.80	288.70	289.75	292.65
34 (12)	0.25	310.30	306.90	308.60	311.50

Примечания к таблице VII. 1. Числа, помещенные в этой таблице с № 24 по № 34, были получены (как можно видеть из описания способа наблюдений) при наблюдениях от 1 до 12, что и обозначено поставленными в скобках номерами.

2. В 3-м и 4-м столбцах показаны отсчеты в миллиметрах по стержню дефлектора; для получения же истинного удаления центра магнитов до центра стрелок к этому отсчету надо было прибавлять по 2,9 мм при первых 18 наблюдениях (с № 1 до № 18) и по 3,2 для остальных (от 18' до 23).

3. Наблюдение № 18 имеет вес 6, потому что оно есть среднее из 6 наблюдений горизонтальной составляющей  $H$ , так как это измерение производилось ежедневно по два раза.

Решение уравнений дает<sup>1</sup>:

$$(8) \quad \begin{aligned} \log a &= 0,8870683 \\ \log b &= 0,2673136 \\ \log \omega &= 9,3802453 - 10 \end{aligned}$$

Величины этих коэффициентов весьма близко подходят к тем, которые были получены И. П. де Коллонгом и приведены в статье: «Вычисление делений сил и пр.» «Морской сборник» № 1, 1878 г.

Действительно, если полученные нами коэффициенты  $a$  и  $b$ , причем за единицу расстояний принят дециметр, перевести к прежним, где за единицу расстояний принята  $\frac{1}{50}$  доля дюйма, то получаем, принимая для сил  $\log$  переводного множителя равным 2,2151687 (это число будет выведено ниже).

<sup>1</sup> Так как все наши вычисления были произведены помошью логарифмов, то нам не надо было знать численных величин  $a$  и  $b$ , а лишь их логарифмы, то мы их и приводим, тем более, что и самое решение уравнений с такими большими коэффициентами при неизвестных, как в данном случае, удобнее всего производится при помощи таблиц гауссовых логарифмов сумм и разностей: считаю уместным привести пример этого решения:

$$\log 10,22828 = 1,0098026$$

1) Вычисление знаменателя  $D$

$$\log 4,08255 = 0,6009315$$

$$0,1667400$$

$$9,7704035$$

$$9,3971419 \quad 2$$

$$\log 1,468047 = 0,1667400$$

$$9,5638819$$

$$9,5408070$$

$$\log 0,589391 = 9,7704035$$

$$9,5408070$$

$$9,3971419 \quad 2$$

$$\log 0,249541 = 9,3971419$$

$$0,0230749$$

2) Вычисление  $Da$  и  $a$

$$\begin{array}{r} 1,0098026 \\ 9,3971419 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,6109315 \\ 9,7704035 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,4069445 \\ - 0,3813350 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,3813350 \\ - 0,3813350 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,0256095 \\ - 0,0256095 \end{array}$$

$$\text{Гауссов лог. разности} \quad \begin{array}{r} 8,7578667 \\ + 82 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} = 8,7578749 \\ 0,4069445 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log Da = 9,1648194 \\ \log' D = 1,7222489 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log a = 0,8870683 \\ - 0,8870683 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Гауссов лог. разности} \quad = 8,7138527 \\ + 165 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8,7138692 \\ 9,5638819 \end{array}$$

$$\log D = 8,2777514$$

3) Вычисление  $Db$  и  $b$

$$\begin{array}{r} 1,0098026 \\ 9,7704035 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,6109315 \\ 0,1667400 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,7802061 \\ - 0,7776715 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,0025346 \\ - 0,0025346 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Гауссов лог. разности} \quad 7,7647560 \\ 1026 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7,7647586 \\ 0,7802061 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log Db = 8,5450647 \\ \log' D = 1,7222489 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log b = 0,2673136 \\ - 0,2673136 \end{array}$$

По наблюд. привед. в мм	Из ст. «Вычис. дел. сил».
$\log a_1 = 0,98466$	$\log a' = 9,98330$
$\log b_1 = 13,95313_n$	$\log b' = 13,93451_n$
$\log \omega_1 = 3,96845$	$\log \omega' = 3,93451$

Отсюда имеем следующие отношения:

$$\frac{a'}{a_1} = 0,99688$$

$$\frac{b'}{b_1} = 0,95803$$

$$\frac{\omega'}{\omega_1} = 1,0405$$

которые показывают, что коэффициенты  $a'$  и  $a_1$  почти равны между собой (разница 0,3% их величины),  $b'$  и  $\omega'$  разняются от  $b_1$  и  $\omega_1$  приблизительно на 4% их величины.

Коэффициенты  $a$  формулы  $F = \frac{a}{\rho^3} + \frac{b}{\rho^5}$  для вертикальных и для горизонтальных сил должны быть равны между собой, что и имеет место, как видно из сравнения величин (3) и (8).

$$\log a = 0,88880$$

$$\log a = 0,88707$$

(для вертикальных)

(для горизонтальных)

$$\text{Отношение } \frac{a_e}{a_s} = 1,0026.$$

Чтобы судить о достоинстве наблюдений и верности коэффициентов, по формуле (1) были вычислены силы, соответствующие показанным в табл. VII расстояниям; сравнение их с непосредственно наблюденными привожу в табл. VIII.

Из этой таблицы видно, что ни одно отступление не превышает 0,0111  $H$ , и эта предельная величина достигается лишь в одном случае.

При вычислении коэффициентов  $a$  и  $b$  (8) за единицу силы была принята сила  $H$ , деления же горизонтальных сил должны быть выра-

Проверка найденных величин  $a$  и  $b$

0,1667400	9,7704035	9,7704035	9,3971419
0,8870683	0,2673136	0,8870683	0,2673136
1,0538083	0,0377174	0,6574718	9,6644555
— 0,0377171		— 9,6644555	
1,0160912		0,9930163	

$$\text{Гауссов лог. разности} = 9,9559942 \\ 1,0538083$$

$$\text{Гауссов лог. разности} = 9,9534596 \\ 0,6574718$$

$$\log (\text{изв. чл. 1-го ур.}) = 1,0098025$$

$$\log (\text{изв. чл. 2-го ур.}) = 0,6109314$$

Мы пользовались табл. гауссовых логарифмов Zech'a.

Таблица VIII  
Проверка найденных величин  $a$  и  $b$ :  $\log a = 0,88707$ ;  $\lg b = 0,26731_n$

I	II	III	IV	V	VI	VII
№ наблюдений	$\log \frac{a}{\rho^3}$	$\log \frac{b}{\rho^3}$	Числа столбца II	Числа столбца III	Столбцы IV—V=F	Отступления
1	0.45567	9.54831	2.8354	0.3534	2.5020	-0.0020
2	0.43758	9.51816	2.7389	0.3297	2.4092	-0.0092
3	0.41652	9.48306	2.6093	0.3041	2.3052	-0.0052
4	0.39579	9.44851	2.4877	0.2809	2.2068	-0.0068
5	0.37365	9.41161	2.3640	0.2580	2.1060	-0.0060
6	0.35187	9.37531	2.2484	0.2373	2.0111	-0.0111
7	0.34713	9.36741	2.2240	0.2330	1.9910	+0.0090
8	0.32367	9.32831	2.1070	0.2130	1.8940	+0.0060
9	0.29895	9.28711	1.9905	0.1937	1.7968	+0.0032
10	0.27171	9.24171	1.8694	0.1745	1.6949	+0.0051
11	0.24333	9.19441	1.7512	0.1565	1.5947	+0.0053
12	0.21270	9.14336	1.6319	0.1391	1.4928	+0.0072
13	0.21309	9.14401	1.6334	0.1393	1.4941	+0.0059
14	0.18147	9.09131	1.5187	0.1234	1.3953	+0.0047
15	0.14742	9.03456	1.4042	0.1083	1.2959	+0.0041
16	0.10971	8.97171	1.2874	0.0937	1.1937	+0.0063
17	0.07050	8.90636	1.1763	0.0806	1.0957	+0.0043
18	0.02871	8.83671	1.0683	0.0685	0.9998	+0.0002
(вес 6)						
18'	0.02805	8.83561	1.0667	0.0685	0.9982	+0.0018
19	0.00600	8.79886	1.0139	0.0629	0.9510	-0.0010
20	9.98137	8.75781	0.95801	0.05225	0.90076	-0.00026
21	9.95626	8.71596	0.90419	0.05199	0.85197	-0.00397
22	9.92851	8.66971	0.84822	0.04674	0.80148	-0.00148
23	9.89950	8.62136	0.79342	0.04182	0.75160	-0.00160
24	9.89887	8.62031	0.79227	0.04172	0.75055	-0.00055
25	9.86842	8.56956	0.73862	0.03711	0.70151	-0.00151
26	9.83515	8.51461	0.68462	0.03270	0.65192	-0.00192
27	9.79963	8.45491	0.63042	0.02850	0.60192	-0.00192
28	9.75982	8.38856	0.57520	0.02447	0.55073	-0.00073
29	9.71851	8.31971	0.52301	0.02088	0.50213	-0.00213
30	9.66823	8.23591	0.46583	0.01722	0.44861	+0.00189
31	9.61513	8.14741	0.41222	0.01404	0.39818	+0.00182
32	9.55516	8.04746	0.35905	0.01115	0.34790	+0.00210
33	9.48802	7.93556	0.30763	0.00862	0.29901	+0.00090
34	9.40669	7.80001	0.25509	0.00631	0.24878	+0.00122

Причесание. Переводный множитель приближительно равен 164, поэтому видно, что отступления не превышают двух единиц силы по дефлектору.

жены в тех же единицах, как и приведенные в табл. VI деления сил вертикальных. Это согласование было достигнуто следующим образом. Выше указано, что при вычислении делений вертикальных сил эти силы выражены в таких единицах, в которых расстоянию в 187,45 мм соответствует горизонтальная сила, равная 179<sup>1</sup>, следовательно, переводный множитель, на который надо умножить коэффициенты  $a$  (8) формулы (1), выражается так:

$$M = \frac{179}{F},$$

где  $F$  есть сила, соответствующая расстоянию 1,8745 дециметра при (8) значениях коэффициентов. Привожу здесь это вычисление:

$\rho = 1,8745$	$\log \frac{1}{\rho} = 9,7271146 - 10$
$\log a = 0,8870683$	$\log b = 0,2673136_n$
$\log \frac{1}{\rho^3} = 9,1813438 - 10$	$\log \frac{1}{\rho^3} = 8,6355730 - 10$
<hr/>	<hr/>
$\log \frac{a}{\rho^3} = 0,0684121$	$\log \frac{b}{\rho^3} = 8,9028866_n - 10$
$+ 1,0971134$	
<hr/>	
$1,1655255$	

Гауссов лог. разности 9,9692722 — 10

$\log \frac{a}{\rho^3} = 0,0684121$
<hr/>
$\log F = 0,0376843$
$\log' F = 9,9623157$
$\log 179 = 2,2528530$
<hr/>
$\log M = 2,2151687$

Таким образом для коэффициентов получены следующие значения:

(9)

$\log a_1 = 3,1022380$
$\log b_1 = 2,4824823_n$
$\log \omega = 9,3802453 - 10$

Вычисление делений горизонтальных сил произведено по формуле (6) при этих значениях коэффициентов.

Сравнение табл. XI новых делений горизонтальных сил с помещенными в табл. III статьи «Вычисление делений сил и пр.» приводит к следующим замечательным результатам, которые служат лучшим доказательством как верности теории прибора, так и точности наблюдений, послуживших для расчета его.

<sup>1</sup> Это число было проверено целым рядом контрольных наблюдений, подобных 1, которые были произведены в мастерской с 7 по 14 декабря г. Бейером и мною.

Деление дебитектора

Силы	Расстояние в деци- метрах		Разности в деци- метрах		Расстояние в оборо- тах		Силы	Расстояние в деци- метрах		Разности в деци- метрах		Силы	Расстояние в деци- метрах	
	Силы	Расстояние в деци- метрах	Силы	Расстояние в деци- метрах	Силы	Расстояние в деци- метрах		Силы	Расстояние в деци- метрах	Силы	Расстояние в деци- метрах	Силы	Силы	Расстояние в деци- метрах
720	1.5533	0.0074	244.62	1.17	390	1.9456	0.0180	396.39	2.85	185	2.4565			
710	1.5607	76	245.79	1.18	380	1.9636	188	309.24	2.95	180	2.4791			
700*	1.5683	77	246.97	1.22	350*	1.9824	096	312.19	1.52	175**	2.5027			
690	1.5760	78	248.19	1.23	345	1.9920	98	313.71	1.54	170	2.5272			
680	1.5838	79	249.42	1.25	340	2.0018	100	315.25	1.58	165	2.5526			
670	1.5917	82	250.67	1.28	335	2.0118	103	316.83	1.61	160	2.5791			
660	1.5999	83	251.95	1.31	330	2.0221	105	318.44	1.64	155	2.6067			
650**	1.6082	85	253.26	1.34	325**	2.0326	106	320.08	1.68	150*	2.6355			
640	1.6167	86	254.60	1.36	320	2.0432	108	321.76	1.71	148	2.6474			
630	1.6253	89	255.96	1.39	315	2.0540	111	323.47	1.75	146	2.6596			
620	1.6342	90	257.35	1.42	310	2.0651	113	325.22	1.78	144	2.6719			
610	1.6432	92	258.77	1.46	305	2.0764	114	327.55	1.82	142	2.6845			
600*	1.6524	94	260.23	1.47	300*	2.0880	119	328.82	1.87	140**	2.6972			
590	1.6618	97	261.70	1.53	295	2.0999	121	330.69	1.91	138	2.7104			
580	1.6715	99	263.23	1.55	290	2.1120	124	332.60	1.95	136	2.7237			
570	1.6814	0.0101	264.78	1.59	285	2.1244	137	334.55	1.99	134	2.7372			
560	1.6915	103	266.37	1.63	280	2.1371	130	336.55	2.05	132	2.7510			
550**	1.7018	105	268.00	1.67	275**	2.1501	133	338.60	2.10	130*	2.7651			
540	1.7123	109	269.67	1.71	270	2.1634	136	340.70	2.15	128	2.7795			
530	1.7232	112	271.38	1.76	265	2.1770	140	342.85	2.20	126	2.7942			
520	1.7344	114	273.14	1.80	260	2.1910	143	345.05	2.26	124	2.8092			
510	1.7458	117	274.94	1.84	255*	2.2053	146	347.31	2.32	122	2.8246			
500	1.7575	121	276.78	1.90	250	2.2201	151	349.63	2.38	120**	2.8403			
490	1.7696	124	278.68	1.95	245	2.2352	156	352.01	2.45	118	2.8563			
480	1.7820	127	280.63	2.00	240	2.2508	160	354.46	2.53	116	2.8727			
470	1.7947	131	282.63	2.06	235	2.2668	164	356.98	2.59	114	2.8895			
460	1.8078	135	284.69	2.12	230	2.2832	169	359.57	2.66	112	2.9067			
450**	1.8213	138	286.81	2.18	225**	2.3001	175	362.23	2.74	110*	2.9243			
440	1.8351	143	288.99	2.26	220	2.3176	179	364.97	2.83	108	2.9423			
430	1.8494	147	291.25	2.32	215	2.3365	186	367.80	2.93	106	2.9608			
420	1.8641	152	293.57	2.39	210	2.3541	191	370.73	3.01	104	2.9798			
410	1.8793	158	295.96	2.49	205	2.3732	198	373.74	3.11	102	2.9992			
400*	1.8951	162	298.45	2.55	200*	2.3930	205	376.85	3.23	100*	3.0191			
390	1.9113	163	301.00	2.65	195	2.4135	211	380.08	3.33	99	3.0293			
380	1.9281	175	303.65	2.74	190	2.4346	219	383.41	3.44	98	3.0396			

Примечание. Числа с одной звездочкой должны быть гравированы на

для вертикальных сил

Таблица VI

Равноти в деси- метрах	Расстояние в оборо- тах	Равноти в оборо- тах	Силы	Расстояние в деси- метрах	Равноти в деси- метрах	Расстояние в оборо- тах	Равноти в оборо- тах	Силы	Равноти в деси- метрах	Равноти в деси- метрах	Расстояние в оборо- тах	Равноти в оборо- тах
0.0226	386.85	3.57	97	3.0501	0.0106	480.33	1.67	62	3.5429	0.0194	557.94	3.05
226	390.42	3.71	96	3.0607	107	482.00	1.69	61	3.5623	197	560.99	3.10
245	394.13	3.86	95**	3.0714	109	483.69	1.72	60*	3.5820	201	564.09	3.16
254	397.99	4.00	94	3.0823	111	485.41	1.74	59	3.6021	206	567.25	3.23
265	401.99	4.17	93	3.0934	112	487.15	1.77	58	3.6227	212	570.48	3.31
276	406.16	4.35	92	3.1046	114	488.92	1.79	57	3.6439	217	573.79	3.38
288	410.51	4.54	91	3.1160	115	490.71	1.82	56	3.6656	222	577.27	3.48
119	415.05	1.87	90*	3.1275	118	492.53	1.85	55**	3.6878	227	580.75	3.58
122	416.92	1.91	89	3.1393	119	494.38	1.88	54	3.7105	232	584.33	3.67
123	418.83	1.94	88	3.1512	121	496.26	1.90	53	3.7338	238	588.00	3.75
126	420.77	1.99	87	3.1633	123	498.16	1.93	52	3.7576	245	591.75	3.85
128	422.76	2.02	86	3.1756	124	500.09	1.97	51	2.7821	251	595.60	3.95
131	424.78	2.06	85**	3.1880	127	502.06	1.99	50	3.8072	258	599.56	4.07
133	426.84	2.08	84	3.2007	128	504.05	2.02	49	3.8330	265	603.63	4.17
135	428.92	2.13	83	3.2135	130	506.07	2.05	48	3.8595	274	607.80	4.29
138	431.05	2.18	82	3.2265	133	508.12	2.10	47	3.8869	282	612.09	4.42
141	433.23	2.22	81	3.2398	135	510.22	2.12	46	3.9151	288	616.51	4.54
144	435.45	2.27	80*	3.2533	137	512.34	2.16	45**	3.9439	295	621.05	4.68
147	437.72	2.32	79	3.2670	139	514.50	2.20	44	3.9734	303	625.73	4.83
150	440.04	2.37	78	3.2809	142	516.70	2.23	43	4.0037	312	630.56	4.98
154	442.41	2.42	77	3.2951	144	518.93	2.28	42	4.0349	324	635.54	5.14
157	444.83	2.46	76**	3.3096	147	521.21	2.32	41	4.0673	336	640.68	5.30
160	447.29	2.53	75	3.3243	150	523.53	2.35	40*	4.1019	349	645.98	5.48
164	449.82	2.58	74	3.3393	152	525.88	2.41	39	4.1368	359	651.46	5.68
168	452.40	2.65	73	3.3545	156	528.29	2.44	38	4.1727	375	657.14	5.90
172	455.05	2.71	72	3.3701	158	530.73	2.48	37	4.2102	387	668.04	6.09
176	457.76	2.76	71	3.3858	160	533.21	2.52	36	4.2489	402	669.13	6.34
180	460.52	2.84	70*	3.4019	165	535.73	2.59	35**	4.2891	418	675.47	6.57
185	463.36	2.91	69	3.4184	167	538.32	2.65	34	4.3309	434	682.04	6.84
189	466.27	2.98	68	3.4351	170	540.97	2.68	33	4.3443	452	688.88	7.11
194	469.25	3.07	67	3.4421	174	543.65	2.74	32	4.4195	471	695.99	7.42
199	472.32	3.14	66	3.4625	178	546.39	2.80	31	4.4666	492	703.41	7.74
202	475.46	1.60	65**	3.4873	182	549.19	2.86	30*	4.5158	—	711.15	—
203	477.06	1.62	64	3.5055	185	552.05	2.92					
205	478.68	1.65	63	3.5240	189	554.97	2.97					

стержне прибора, с двумя звездочками—отмечаемы более длинной чертой.

## Деления дефлектора для изме

Силы	Расстояние в дци- метрах	Разности в дци- метрах	Расстояние в оборо- тах	Разности в оборо- тах	Силы	Расстояние в дци- метрах	Разности в дци- метрах	Расстояние в оборо- тах	Разности в оборо- тах
450**	1.3480	0.0112	212.29	1.75	185	1.8533	0.0179	291.86	2.81
440	1.3592	115	214.05	1.81	180	1.8712	185	294.67	2.92
430	1.3707	119	215.86	1.87	175	1.8897	0.0193	297.59	3.04
420	1.3826	122	217.73	1.92	170*	1.9090	0.0079	300.63	1.25
410	1.3948	26	219.65	2.00	168	1.9169	80	301.88	1.26
400	1.4074	131	221.65	2.05	166	1.9249	81	303.14	1.28
390	1.4205	135	223.73	2.12	164	1.9330	83	304.42	1.30
380	1.4040	139	225.82	2.20	162	1.9413	84	305.72	1.33
370	1.4479	145	228.02	2.28	160	1.9497	86	307.05	1.35
360	1.4624	150	230.30	2.36	158	1.9583	88	308.40	1.38
350	1.4774	155	232.66	2.45	156	1.9671	89	309.78	1.40
340	1.4929	162	235.11	2.55	154	1.9760	90	311.18	1.42
330	1.5091	168	237.66	2.64	152	1.9850	92	312.60	1.44
320	1.5259	175	240.30	2.76	150	1.9942	93	314.04	1.47
310	1.5434	183	243.06	2.87	148	2.0035	95	315.51	1.50
300*	1.5617	094	245.93	1.49	146	2.0130	96	317.01	1.52
295	1.5711	096	247.42	1.52	144	2.0226	99	318.53	1.55
290	1.5807	099	248.94	1.55	142	2.0325	0.0100	320.06	1.58
285	1.5906	101	250.49	1.59	140**	2.0425	103	321.66	1.61
280	1.6007	103	252.08	1.63	138	2.0528	105	323.26	1.65
275**	1.6110	106	253.71	1.67	136	2.0633	106	324.92	1.68
270	1.6216	108	255.38	1.70	134	2.0739	109	326.60	1.71
265	1.6324	111	257.08	1.74	132	2.0848	110	328.31	1.73
260	1.6435	114	258.83	1.79	130*	2.0958	113	330.04	1.77
255	1.6549	117	260.62	1.84	128	2.1071	115	331.81	1.82
250*	1.6666	120	262.46	1.89	126	2.1186	118	333.63	1.85
245	1.6786	123	264.35	1.94	124	2.1304	120	335.48	1.90
240	1.6909	127	266.29	1.99	122	2.1424	123	337.38	1.93
235	1.7036	130	268.28	2.05	120**	2.1547	125	339.31	1.98
230	0.7166	134	270.33	2.11	118	2.1672	129	341.29	2.03
225**	1.7300	138	272.44	2.17	116	2.1801	131	343.32	2.06
220	1.7438	141	274.61	2.23	114	2.1932	133	345.38	2.11
215	1.7579	147	276.84	2.31	112	2.2065	138	347.49	2.17
210	1.7726	151	279.15	2.37	110*	2.2203	141	349.66	2.22
205	1.7877	156	281.52	2.46	108	2.2344	145	351.88	2.28
200*	1.8033	161	283.98	2.54	106	2.2489	148	354.16	2.34
195	1.8194	167	289.52	2.63	104	2.2637	152	356.50	2.38
190	1.8361	172	289.45	2.71	102	2.2789	0.0156	358.88	2.46

Примечание. Числа с одной звездочкой должны быть гравированы на

рения горизонтальных сил

Таблица XI

Силы	Расстояние в деси- метрах	Разности в деси- метрах	Расстояние в оборо- тах	Разности в оборо- тах	Силы	Расстояние в деси- метрах	Разности в деси- метрах	Расстояние в оборо- тах	Разности в оборо- тах
100*	2.2945	0.9079	361.34	1.26	62	2.7026	0.0150	425.61	2.37
99	2.3024	81	362.60	1.27	61	2.7176	154	427.98	2.42
98	2.3105	81	363.87	1.28	60*	2.7330	157	430.40	2.47
97	2.3186	83	365.15	1.30	59	2.7487	161	432.87	2.53
96	2.3269	84	366.45	1.32	58	2.7648	164	435.40	2.59
95**	2.3353	85	367.77	1.33	57	2.7812	168	437.99	2.65
94	2.3438	86	369.10	1.36	56	2.7980	172	440.64	2.71
93	2.3524	88	370.46	1.38	55**	2.8152	177	443.35	2.78
92	2.3612	89	371.84	1.49	54	2.8329	181	446.13	2.84
91	2.3701	90	373.24	1.42	53	2.8510	185	448.97	2.92
90*	2.3791	91	374.66	1.44	52	2.8695	190	451.89	2.99
89	2.3882	93	376.10	1.46	51	2.8885	195	454.88	3.08
88	2.3975	94	377.56	1.48	50*	2.9080	200	457.96	3.16
87	2.4069	96	379.04	1.51	49	2.9280	206	461.12	3.24
86	2.4165	97	380.55	1.53	48	2.9486	212	464.36	3.33
85**	2.4262	99	381.08	1.56	47	2.9698	218	467.69	3.43
84	2.4361	0.0101	383.64	1.58	46	2.9916	224	471.12	3.53
83	2.4462	102	385.22	1.61	45**	3.0140	231	474.65	3.64
82	2.4564	104	386.83	1.63	44	3.0371	238	478.29	3.74
81	2.4668	105	388.46	1.66	43	3.0609	245	482.03	3.86
80*	2.4773	106	390.12	1.68	42	3.0854	253	485.89	3.98
79	2.4879	108	391.80	1.71	41	3.1107	261	489.87	4.12
78	2.4987	111	393.51	1.74	40*	3.1368	270	493.99	4.26
77	2.5098	112	395.25	1.77	39	3.1638	280	498.25	4.41
76	2.5210	114	397.02	1.80	38	3.1918	290	502.66	4.55
75**	2.5324	117	398.82	1.83	37	3.2208	300	507.21	4.72
74	2.5441	119	400.65	1.87	36	3.2508	311	511.23	4.90
73	2.5560	121	402.52	1.91	35**	3.2819	324	516.83	5.11
72	2.5681	123	404.43	1.93	34	3.3143	336	521.94	5.30
71	2.5804	125	406.66	1.97	33	3.3479	350	527.22	5.53
70*	2.5929	128	408.33	2.02	32	3.3829	365	532.75	5.76
69	2.6057	130	410.35	2.05	31	3.4194	382	538.51	6.01
68	2.6187	133	412.40	2.09	30*	3.4576	398	544.52	6.25
67	2.6320	136	414.49	2.13	29	3.4974	417	550.77	6.57
66	2.6455	138	416.62	2.18	28	3.5391	438	557.84	6.90
65**	2.6594	141	418.80	2.23	27	3.5829	459	564.24	7.23
64	2.6735	144	421.03	2.27	26	3.6288	0.0484	571.47	7.61
63	2.6879	147	423.30	2.31	25*	3.6772	—	579.08	—

стержне прибора с двумя звездочками—отмечаемы более длинной чертой.

Таблица XII

Силы	Расстояния в 1/50 дол. дюйма для новых делений	Расстояние в 1/50 дол. дюйма из табл. III	Разности в 1/50 дюйма	Силы	Расстояние в 1/50 дюйма новых делений	Расстояние в 1/50 дюйма из табл. III	Разности в 1/50 дюйма
400	277.06	277.12	+0.06	100	451.67	451.46	-0.21
350	290.83	290.87	+0.04	90	468.32	488.09	-0.23
300	307.41	307.45	+0.04	80	487.65	487.36	-0.29
250	328.07	328.05	-0.02	70	510.41	510.12	-0.29
200	354.97	354.93	-0.04	60	538.09	537.66	-0.34
170	375.79	375.70	-0.09	50	572.45	572.04	-0.41
160	383.81	383.72	-0.09	40	617.49	617.04	-0.45
150	392.55	392.44	-0.11	30	680.65	680.10	-0.55
140	402.07	401.95	-0.12				
130	412.55	412.40	-0.15				
120	424.16	424.97	-0.19				
110	437.08	436.89	-0.19				

Из этой таблицы видно, что наибольшая разница между расстояниями, соответствующими той же силе в старых и новых делениях, составляет всего около  $\frac{1}{100}$  дюйма.

Для проверки новых делений 15 декабря 1884 г. были измерены на дворе Адмиралтейства горизонтальные и вертикальные составляющие земного магнетизма; вычисленное по ним наклонение оказалось  $70^{\circ}41'$ . Среднее же наклонение в Петербурге  $70^{\circ}44'$ .

Этот результат показывает, какие точные данные можно получать, наблюдая силы помощью нового дефлектора де Коллонга и картишки Штемпеля, которые таким образом во всех отношениях обладают перед инклинометром немаловажными преимуществами.

# **ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КУРСКОЙ МАГНИТНОЙ АНОМАЛИИ ДЛЯ ДОСТИЖЕНИЯ НА САМОЛЕТАХ И ДИРИЖАБЛЯХ ПОЛНОГО УНИЧТОЖЕНИЯ ДЕВИАЦИИ КОМПАСА, Т. Е. ТАКОГО, ЧТО ОНА ОСТАЕТСЯ УНИЧТОЖЕННОЙ ДЛЯ ВСЕХ МЕСТ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ВСЯКОЙ ВЫСОТЕ ПОЛЕТА**

Уф! Заглавие в 31 слово, но у Кельвина есть заглавия статей и в 50 слов.

В 1861 г. у берегов Ирландии один вслед за другим погибли от неправильностей в показаниях компаса два пассажирских парохода, шедших из США в Англию, и при каждом из этих крушений погиб не только ценный груз, но и более чем по сто пассажиров.

Парламент потребовал от Адмиралтейства образования компасного комитета для полного исследования вопроса о девиации компаса.

В числе членов Комитета были проф. Кэмбриджского университета математик Арчибалд Смит и капитан Дж. Эванс. Ими и был составлен знаменитый „Admiralty Manual of the Deviation of the Compass“, являющийся и по сию пору классическим руководством по девиации компаса.

В этом руководстве показано, что на железном корабле на N-ый конец стрелок компаса действуют следующие шесть сил, для которых принято следующее стандартное обозначение:

$\lambda H$  — по магнитному меридиану к N-ду; ( $\lambda > 0$ );

$\mathcal{A}H$  — по перпендикуляру к магнитному меридиану (при  $\mathcal{A} > 0$  вправо, при  $\mathcal{A} < 0$  влево);

$\mathfrak{B}H$  — по диаметральной плоскости (при  $\mathfrak{B} > 0$  в нос, при  $\mathfrak{B} < 0$  в корму);

$\mathfrak{C}H$  — по перпендикуляру к диаметральной плоскости (при  $\mathfrak{C} > 0$  вправо,  $\mathfrak{C} < 0$  влево);

$\mathfrak{D}H$  — по зеркальному изображению N-ой части магнитного меридиана в диаметральной плоскости, когда  $\mathfrak{D} > 0$ , обратно, когда  $\mathfrak{D} < 0$ ;

$\mathfrak{E}H$  — перпендикулярно к предыдущей (при  $\mathfrak{E} > 0$  вправо, при  $\mathfrak{E} < 0$  влево);

Здесь сделаны следующие стандартные обозначения:

$H$  — горизонтальная слагающая напряжения земного магнетизма в месте нахождения корабля;

$\lambda$  — положительная правильная дробь, от места нахождения корабля независящая, но различная для разных судов и для компасов, установленных в разных местах данного корабля.

$A, D, E$  — численные коэффициенты, от места нахождения корабля независящие;

$B, C$  — численные коэффициенты, зависящие от места нахождения корабля, именно:

$$B = \frac{c}{\lambda} \operatorname{tg} \theta + \frac{P}{\lambda H}$$

$$C = \frac{f}{\lambda} \operatorname{tg} \theta + \frac{Q}{\lambda H}$$

так что

$$\begin{aligned} (*) \quad B\lambda H &= cH \operatorname{tg} \theta + P = cZ + P \\ C\lambda H &= fH \operatorname{tg} \theta + Q = fZ + Q \end{aligned}$$

причем  $c, P, f, Q$  суть постоянные для данного корабля и для данного на нем компаса числа, но которые изменяются от корабля к кораблю и от перестановки компаса на другое место на том же корабле, причем  $f$  весьма мало и может быть пренебрежено;

$\theta$  — магнитное наклонение в месте нахождения корабля;

$Z$  — вертикальная слагающая напряжения земного магнетизма.

Силы, характеризуемые коэффициентами  $A, D, E$ , происходят от «мягкого» в магнитном смысле корабельного железа и его «мгновенного» магнитного состояния.

Силы  $P$  и  $Q$  происходят от «твёрдого» в магнитном смысле судового железа и с переменой места корабля на море не изменяются.

Задача уничтожения девиации состоит в том, чтобы так расположить вблизи компаса постоянные магниты и бруски или шары мягкого железа, чтобы они на компас производили действие, равное и противоположное действию судового железа.

Само собой разумеется, что влияние «мягкого» железа должно уничтожаться — мягким же железом, влияние твердого железа — постоянными магнитами.

Для этого компасы снабжаются так называемыми «приборами уничтожения девиации», в описание которых здесь входить нет надобности.

Силы, характеризуемые коэффициентом  $D$ , т. е.  $D\lambda H$ , уничтожаются брусками или шарами мягкого железа, устанавливаемыми на кронштейнах, прикрепленных к пактузу компаса. Силы  $A\lambda H$  и  $E\lambda H$  весьма малы, и их обыкновенно не уничтожают. Силы  $B\lambda H$  и  $C\lambda H$  уничтожают «продольными» и «поперечными» магнитами, вкладываемыми в соответ-

ствующие гнезда, укрепленные в нактоузе или в гнезде на подвижных планках, устроенных в нактоузе.

Таким образом в выражениях (\*) обе слагающие  $cH \operatorname{tg} \theta$  и  $P$ , а также  $fH \operatorname{tg} \theta$  и  $Q$  уничтожаются магнитами *совокупно* или огульно, тогда как их надо бы уничтожать раздельно: силу  $P$  — продольным магнитом, силу  $Q$  — поперечным, силу же  $cZ$ , которая равна  $cH \operatorname{tg} \theta$ , и силу  $fZ$ , равную  $fH \operatorname{tg} \theta$ , надо бы уничтожать брусками мягкого железа, поставленными вертикально, чтобы они намагничивались силой  $Z$ .

По самому виду выражений (\*) ясно, что с переменой магнитного наклонения  $\theta$  силы  $\mathfrak{B}\lambda H$  и  $\mathfrak{C}\lambda H$ , уничтоженные в одном месте, появятся вновь, когда корабль придет в другое место. На корабле, на котором есть и старший штурман и при нем один или два младших, при сравнительно медленных изменениях места, определяя по обсервациям, легко учитывать изменение девиации или «подправлять ее уничтожение».

Но корабельные приборы в сущности без всяких принципиальных изменений перенесли и на самолеты, где имеется не несколько, как на корабле, компасов так, — что, работая у одного компаса, можно править по другому, — а где всего один компас и один штурман, он же часто и пилот.

Вместе с тем самолет проходит в час больший путь, нежели корабль в сутки, и было бы особенно важно уничтожать девиацию так, чтобы она с переменой места самолета не появлялась бы вновь.

На корабле этого достигают следующим образом: в двух местах, значительно различающихся по своим магнитным элементам, например, в Кронштадте и в Гибралтаре, или Кронштадте и Адене, определяют (по наблюдениям девиации на двух различных курсах или по наблюдениям силы и девиации на одном курсе) величины  $\mathfrak{B}\lambda H$  и  $\mathfrak{C}\lambda H$  и получают две пары уравнений

$$\begin{array}{l} (1) \quad \mathfrak{B}_1\lambda H_1 = cH_1 \operatorname{tg} \theta_1 + P \\ (2) \quad \mathfrak{C}_1\lambda H_1 = fH_1 \operatorname{tg} \theta_1 + Q \end{array} \left. \right\} \text{в Кронштадте}$$
$$\begin{array}{l} (1') \quad \mathfrak{B}_2\lambda H_2 = cH_2 \operatorname{tg} \theta_2 + P \\ (2') \quad \mathfrak{C}_2\lambda H_2 = fH_2 \operatorname{tg} \theta_2 + Q \end{array} \left. \right\} \text{в Адене}$$

Зная магнитные элементы  $H_1$ ,  $\theta_1$ ,  $H_2$  и  $\theta_2$  в этих пунктах, находят из уравнений (1) и (1') величины  $c$  и  $P$ , а из уравнений (2) и (2') — величины  $f$  и  $Q$ .

После того как силы  $cZ$  и  $P$  и силы  $fZ$  и  $Q$  получены раздельно, сперва уничтожают постоянными магнитами силы  $P$  и  $Q$ , затем ставят в прикрепленную к нактоузу обойму вертикальный брусок мягкого железа (Флиндерс-бар), который давал бы, будучи в этой обойме закреплен, силу  $cZ$  (набор таких брусков, выверенных на берегу, отпускается на корабль), и девиация будет уничтожена для всех мест земной поверхности.

Капитан Флиндерс дошел до этого способа более ста лет тому назад, т. е. задолго до издания адмиралтейского руководства, чисто эмпирическим путем.

Отсюда ясно, что все, что надо для такого *полного*, т. е. с установкой Флиндерс-бара, уничтожения девиации, — это иметь в своем распоряжении два пункта с значительно разнящимися элементами земного магнетизма. Таких пунктов, можно сказать, имеется под боком у Москвы, которую можно считать за такую же базу для самолетов, как Кронштадт для судов, сколько угодно, на столь превосходно изученной под руководством академика П. П. Лазарева Курской магнитной аномалии; здесь можно иметь пункты, разнящиеся по своим магнитным элементам более, нежели Магелланов пролив, или Новая Зеландия и Кронштадт. Стоит только в районе Курской магнитной аномалии выбрать и оборудовать надлежащие площадки, и поставленная задача будет решена.

5 января 1940 г.

---

## О БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ ГИРОКОМПАСА (БЕЗ УСПОКОИТЕЛЯ)

§ 1. При выводе баллистической погрешности мы исходили в § 7 цаших лекций из приближенных уравнений свободного колебательного движения гирокомпаса<sup>1</sup>:

$$(1) \quad \begin{aligned} An\omega_1\psi - An\theta' &= 0 \\ An\psi' + (An\omega_1 + P_1 h_1)\theta &= An\omega_2 \end{aligned}$$

Эти уравнения получаются, отбрасывая ничтожно малые инерционные члены в более полных уравнениях:

$$(2) \quad \begin{aligned} B\psi'' + An\omega_1\psi - An\theta' &= 0 \\ An\psi' + B\theta'' + (An\omega_1 + P_1 h_1)\theta &= An\omega_2 \end{aligned}$$

В этих уравнениях  $An$  есть кинетический момент гироскопа, если он один, и равнодействующий кинетический момент, когда гироскопов два или три,  $\omega_1 = \omega \cos \lambda$ ,  $\omega_2 = \omega \sin \lambda$ , где  $\omega$  есть угловая скорость вращения земли,  $P_1$  вес гиросферы,  $h_1$  расстояние между ее центром «величины» (плавучести) и центром тяжести,  $\lambda$  — широта места; вместе с тем предположено, что успокоителя нет.

При таких предположениях оказывается, что когда корабль описывает круговую циркуляцию и период свободных колебаний гиросферы  $\tau = 5060$  секунд, то угол отклонения  $\psi$  от меридиана все время в точности равен мгновенному значению «курсовой погрешности», так что по окончании циркуляции гирокомпас не получает никакого возмущения.

Само собою возникают следующие вопросы:

а) какова будет погрешность показаний гирокомпаса при различных условиях маневрирования, если период свободных колебаний гиросферы будет отличаться от 5060 секунд;

б) какое влияние оказывает гидравлический успокоитель на баллистическую погрешность.

<sup>1</sup> Вывод этих уравнений имеется и в книге А. Н. Крылова «Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений» (1932), стр. 182—189.—Ред.

**§ 2.** Начнем с рассмотрения первого из этих вопросов. На стр. 108 и 109 упомянутых лекций показано<sup>1</sup>, что на круговой циркуляции, радиус которой равен  $r$ , уравнения движения гиросферы суть:

$$(3) \quad \begin{aligned} An\omega_1\phi - An\theta' &= 0 \\ An\psi' + (An\omega_1 + P_1 h_1)\theta &= An\omega_2 + H \sin\left(\frac{2\pi t}{\sigma} + x_0\right) \end{aligned}$$

причем

$$(3') \quad H = \frac{4\pi^2}{\sigma^2} \frac{P_1 h_1 \rho}{g},$$

где  $\sigma$  есть продолжительность описания полного круга циркуляции,  $x_0$  — начальный курс корабля и  $\frac{2\pi t}{\sigma} + x_0 = x$  есть мгновенный курс в момент  $t$ .

Курсу  $\alpha$  соответствует «курсовая погрешность»  $\delta$ , выражаящаяся равенством<sup>2</sup>

$$(4) \quad \operatorname{tg} \delta = -\frac{\lambda'}{(\omega + l') \cos \lambda}$$

причем

$$(5) \quad \begin{aligned} \lambda' &= \frac{d\lambda}{dt} = \frac{v \cos \alpha}{R} \\ l' &= \frac{dl}{dt} = \frac{v \sin \alpha}{R \cos \lambda} \end{aligned}$$

где  $v$  есть скорость хода корабля, выраженная в метрах в секунду,  $R = 6370000$  — радиус земли в метрах, так что  $\lambda'$  есть угловая скорость изменения широты,  $l'$  — угловая скорость изменения долготы.

Очевидно, что даже в высоких широтах для судов угловая скорость  $l'$  мала по сравнению с  $\omega$  (для аэропланов этого может и не быть), поэтому для судов можно приближенно полагать:

$$(6) \quad \delta = -\frac{\lambda'}{\omega \cos \lambda} = -\frac{v \cos \alpha}{R \omega \cos \lambda}$$

Для полного определения колебательного движения гиросферы в продолжении циркуляции корабля надо к уравнениям (3) присовокупить начальные условия, которые относятся к прямому курсу  $x_0$ , от которого корабль начал поворот. Таким образом в момент  $t = 0$  корабль обладает скоростью  $v$  и идет по курсу  $x_0$ , следовательно, в этот момент угол  $\phi$  равен курсовой погрешности  $\delta_0$ , т. е.

$$(7) \quad (\phi)_{t=0} = \delta_0 = -\frac{v \cos \alpha_0}{R \omega \cos \lambda}$$

угол же крена  $\theta$  гиросферы имеет [по уравнению (3)] постоянное значение:

$$\theta = \frac{An\omega_2}{An\omega_1 + P_1 h_1}$$

<sup>1</sup> См. в той же книге А. Н. Крылова, стр. 369—375.—Ред.

<sup>2</sup> См. там же, стр. 366—368.—Ред.

так что и при  $t=0$  будет:

$$(7') \quad (\theta)_{t=0} = \frac{An\omega_2}{An\omega_1 + P_1 h_1}$$

**§ 3.** Итак нам надо интегрировать уравнения (3) при начальных условиях (7) и (7').

Так как нас главным образом интересуют азимутальные колебания  $\psi$ , то исключим из системы (3) величину  $\theta$ , для чего стоит только подифференцировать второе из уравнений (3) и подставить вместо  $\theta'$  его величину  $\omega_1 \psi$ , следующую из первого из этих уравнений; тогда получим по разделении на  $An$

$$(8) \quad \psi'' + \frac{(An\omega_1 + P_1 h_1) \omega_1}{An} \psi = \frac{8\pi^3}{\sigma^3} \frac{P_1 h_1}{An g} \rho \cos \left( \frac{2\pi t}{\tau} + \alpha_0 \right)$$

Начальные же условия будут:

$$(9) \quad \psi_{t=0} = \delta_0; \quad \dot{\psi}_{t=0} = \frac{H}{An} \sin \alpha_0$$

Второе из этих условий следует из второго уравнения (3), полагая в нем  $t=0$  и заменив  $(\theta)_{t=0}$  его значением (7').

Полагая

$$(10) \quad \frac{(An\omega_1 + P_1 h_1) \omega_1}{An} = \frac{4\pi^2}{\tau^2}$$

можем написать общий интеграл уравнения (8) в таком виде:

$$(11) \quad \psi_1 = c_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + c_2 \sin \frac{2\pi t}{\tau} + N \cos \left( \frac{2\pi t}{\sigma} + \alpha_0 \right)$$

причем будет

$$(12) \quad N = \frac{8\pi^3}{\sigma^3} \frac{P_1 h_1 \rho}{An g} \frac{1}{\frac{4\pi^2}{\tau^2} - \frac{4\pi^2}{\sigma^2}} = - \frac{2\pi}{\sigma} \frac{P_1 h_1 \rho}{An g} \frac{\tau^2}{\tau^2 - \sigma^2}$$

Обратим теперь внимание на относительную величину входящих в наши формулы элементов.

Для двухгирокопного компаса

$$A = 70; \quad n = 2000; \quad P_1 = 8000; \quad h_1 = 0,75$$

причем за единицы мер принят грам — вес и см

$$\omega_1 = \omega \cos \lambda$$

и в нашей широте

$$\omega_1 = \frac{1}{27400}$$

таким образом будет:

$$An\omega_1 = \frac{70 \cdot 2000}{27400} = 5,1$$

$$P_1 h_1 = 8000 \cdot 0,75 = 6000$$

Отсюда ясно, что величина  $An\omega_1$  может быть в формуле (10) отброшена, и мы можем полагать с погрешностью меньше  $1/10\%$ :

$$(13) \quad \frac{4\pi^2}{\tau^2} = \frac{P_1 h_1 \omega_1}{An}$$

или

$$(13') \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{An}{P_1 h_1 \omega_1}}$$

Мы увидим, что величина  $\tau$  не меньше 5000 сек., обычные же значения  $\sigma$  около 200—300 сек., поэтому отношение

$$\frac{\sigma^2}{\tau^2} < \left(\frac{3}{50}\right)^2, \text{ т. е. } 0,0036,$$

так что выражение

$$(14) \quad \frac{\tau^2}{\tau^2 - \sigma^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)} \approx 1$$

Величина  $\frac{2\pi\sigma}{\tau} = v$  есть скорость корабля, поэтому будет на основании (12):

$$(15) \quad N = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} \frac{v}{\omega \cos \lambda} \frac{1}{g}$$

и общий интеграл уравнения (8) будет:

$$(16) \quad \psi = c_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + c_2 \sin \frac{2\pi t}{\tau} - \frac{4\pi^2}{\tau^2} \frac{v}{\omega \cos \lambda} \frac{1}{g} \cos \left( \frac{2\pi t}{\sigma} + x_0 \right)$$

Первое из начальных условий дает:

$$(\psi)_{t=0} = \delta_0 = -\frac{v}{R \omega \cos \lambda} \cos x_0 = c_1 - \frac{4\pi^2}{\tau^2} \frac{v}{\omega \cos \lambda} \frac{1}{g} \cos x_0$$

Отсюда следует:

$$(17) \quad c_1 = \left( \frac{4\pi^2}{\tau^2} \frac{1}{g} - \frac{1}{R} \right) \frac{v}{\omega \cos \lambda} \cos x_0$$

Из формулы (13) ясно, что входящим в нее элементам  $P_1$ ,  $h_1$ ,  $An$  можно придать такие значения, при которых будет:

$$(18) \quad \frac{4\pi^2}{\tau^2} \frac{1}{g} - \frac{1}{R} = 0; \quad c_1 = 0$$

т. е.

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 5060 \text{ сек.}$$

как то следует из такого расчета:

$$(18) \quad \tau = \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi R}{g}}$$

но  $2\pi R = 40\,000\,000$ ;  $g = 9,82$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lg 2\pi &= 0,39909 \\ \frac{1}{2} \lg 2\pi R &= 3,80103 \\ \frac{1}{2} \operatorname{colog} g &= 1,50395 \\ \hline \lg \tau &= 3,70407 \end{aligned}$$

$$\tau = 5060 \text{ сек.} = 84 \text{ м. 20 с.}$$

Формулу

$$(18') \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

выражают иногда словами так: *период свободных колебаний гиросяфера берут равным периоду колебаний такого математического маятника, длина коего равна радиусу земли.*

На основании формулы

$$(18'') \quad \frac{4\pi^2}{\tau^2} = \frac{g}{R}$$

будет:

$$N = -\frac{v}{R\omega \cos \lambda}$$

и последний член правой части формулы (16) будет:

$$-\frac{4\pi^2}{\tau^2} \frac{v}{\omega \cos \lambda} \frac{1}{g} \cdot \cos \left( \frac{2\pi t}{\sigma} + \alpha_0 \right) = -\frac{v}{R\omega \cos \lambda} \cos \alpha$$

ибо  $\frac{2\pi t}{\sigma} + \alpha_0 = \alpha$ ; на основании же формулы (7) предыдущая величина есть  $\delta$ .

Таким образом мы имеем из (16):

$$(19) \quad \psi = c_s \sin \frac{2\pi t}{\tau} + \delta$$

Так как на основании условия (9)

$$(\psi')_{t=0} = \frac{H}{An} \sin \alpha_0 = \frac{4\pi^2}{\sigma^2} \frac{P_1 h_1}{An g} \rho \sin \alpha_0$$

Затем

$$\frac{2\pi \rho}{\sigma} = v; \quad \frac{P_1 h_1}{An} = \frac{4\pi^2}{\tau^2} \frac{1}{\omega_1} = \frac{g}{R} \frac{1}{\omega \cos \lambda}$$

то

$$\begin{aligned} \frac{H}{An} \sin \alpha_0 &= \left( \frac{v}{R} \frac{1}{\omega \cos \lambda} \frac{2\pi}{\sigma} \sin \alpha \right)_{t=0} = \\ &= \left( -\frac{v}{R} \frac{1}{\omega \cos \lambda} \cos \alpha \right)'_0 = (\delta')_0 \end{aligned}$$

Составив по уравнению (19) величину  $(\psi')_0$ , получим для определения  $c_2$  уравнение:

$$(\delta')_0 = c_2 + (\delta')_0$$

откуда следует:

$$c_2 = 0$$

Таким образом общий интеграл уравнения (8), при условии, что

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{A_n}{P_1 h_1 \omega_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 5060 \text{ сек.}$$

есть

$$(20) \quad \psi = \delta$$

Это равенство показывает, что на повороте гирокомпаса отклонен от меридиана на величину «курсовой погрешности», соответствующей мгновенному значению курса.

**§ 4.** Не трудно видеть, что это свойство сохраняется, когда корабль, маневрируя, описывает какую угодно кривую, изменяя курсы.

Стоит только вообразить, что эта кривая состоит из бесчисленного множества бесконечно малых дуг, описанных радиусами кривизны этой кривой, из соответствующих центров кривизны, тогда указанное свойство имеет место для каждого из элементов кривой, а значит, и для всей кривой.

Так как указанное свойство от скорости хода корабля не зависит, то, вообразив, что скорость хода изменяется непрерывно и для каждого элемента кривой сохраняет постоянное значение, мы придем к заключению, что описанное свойство имеет место при маневрировании переменными галсами с переменной скоростью хода.

Выяснив, таким образом, более подробно, чем было сделано на лекции, свойства курсовой и баллистической погрешностей, когда компас отрегулирован так, что период его свободных колебаний равен 5060 сек., перейдем к рассмотрению вопроса о том, какая будет погрешность гирокомпаса на циркуляции, если его период не равен  $\tau$ .

Для отличия заменим во всех последующих формулах  $h_1$  через  $h_2$  и положим, подобно предыдущему:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{A_n}{P_1 h_2 \omega_1}}$$

так что  $T$  есть измененный вследствие перемены положения п. т. период свободных колебаний гиросферы; ясно, что теперь:

$$T \neq 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \quad \text{и} \quad T \neq \tau$$

Очевидно, что все те формулы предыдущих параграфов, в которых мы не пользовались равенством:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

сохраняют свой вид, и в них можно писать  $h_2$  вместо  $h_1$  и  $T$  вместо  $\tau$ , но, начиная с формулы (18), надо ввести соответствующие изменения.

Таким образом имеем:

$$(16) \quad \psi = c_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + c_2 \cos \frac{2\pi t}{T} - \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{v}{g\omega \cos \lambda} \cos \alpha$$

но

$$\frac{v}{g\cos \lambda} \cos \alpha = -R\delta, \quad \text{и} \quad \frac{R}{g} = \frac{\tau^2}{4\pi^2}$$

поэтому будет:

$$(16) \quad \psi = c_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + c_2 \sin \frac{2\pi t}{T} + \frac{\tau^2}{T^2} \delta$$

Начальные условия (9) суть:

$$(9') \quad (\psi)_{t=0} = \delta_0; \quad (\psi')_{t=0} = \frac{H}{An} \sin \alpha_0 = \frac{4\pi^2}{\sigma^2} \frac{P_1 h_2 0}{An g} \sin \alpha_0$$

Второе из этих условий может быть преобразовано на основании равенств:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi 0}{\sigma} &= v; \quad \frac{P_1 h_2}{An} = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{1}{\omega \cos \lambda} \\ \frac{1}{g\omega \cos \lambda} \cos \alpha &= -\frac{R}{g} \delta = -\frac{\tau^2 \delta}{4\pi^2} \end{aligned}$$

и мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi^2}{\sigma^2} \frac{P_1 h_2 0}{An g} \sin \alpha_0 &= \left[ -\frac{2\pi 0}{\sigma} \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{1}{g\omega \cos \lambda} \cos \alpha \right]_{t=0}' = \\ &= \left[ \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{R}{g} \delta \right]_{t=0}' = \frac{\tau^2}{T^2} \delta'_0 \end{aligned}$$

Таким образом начальные условия дают для определения постоянных произвольных уравнения:

$$\delta_0 = c_1 + \frac{\tau^2}{T^2} \delta_0$$

$$\frac{\tau^2}{T^2} \delta'_0 = \frac{2\pi}{T} c_2 + \frac{\tau^2}{T^2} \delta'_0$$

Отсюда следует:

$$c_1 = \delta_0 \left( 1 - \frac{\tau^2}{T^2} \right); \quad c_2 = 0$$

следовательно, будет

$$(21) \quad \psi = \left( 1 - \frac{\tau^2}{T^2} \right) \delta_0 \cos \frac{2\pi t}{T} + \frac{\tau^2}{T^2} \delta$$

Из этого уравнения очевидно, что при  $T = \tau$  получается, как мы имели выше [уравнение (20)]:

$$(20) \quad \psi = \delta$$

§ 5. Формула (21), подобно формуле (20), выведена в том предположении, что отношение  $\sigma^2/T^2$  весьма мало по сравнению с 1, но тогда время  $t$  в продолжении циркуляции будет:

$$\sigma \ll t \ll T$$

и значит аргумент  $\frac{2\pi t}{T}$  будет малый и  $\cos \frac{2\pi t}{T}$  будет близок к 1, и значит за время циркуляции будет:

$$\psi = \left(1 - \frac{\tau^2}{T^2}\right) \delta_0 + \frac{\tau^2}{T^2} \delta$$

и значит погрешность гирокомпаса на повороте будет:

$$(22) \quad \Delta = \delta - \psi = \left(1 - \frac{\tau^2}{T^2}\right) (\delta - \delta_0)$$

Обозначим через  $\delta_N$  курсовую погрешность на курсе  $N$  ( $\alpha_0 = 0$ ), тогда будет:

$$\delta = \delta_N \cos \alpha; \quad \delta_0 = \delta_N \cos \alpha_0$$

а предыдущая формула напишется:

$$\Delta = \left(1 - \frac{\tau^2}{T^2}\right) \delta_N (\cos \alpha - \cos \alpha_0)$$

Эта погрешность может достичь своей наибольшей величины, когда  $\alpha_0 = 180^\circ$  (курс S) и  $\cos \alpha = 1$  (курс N), тогда будет:

$$\Delta_{\max} = 2 \left(1 - \frac{\tau^2}{T^2}\right) \delta_N$$

т. е. когда корабль лежал на курсе S и, описав полуциркуляцию, лег на курс N.

---

## О БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ ГИРОКОМПАСА, СНАБЖЕННОГО ГИДРАВЛИЧЕСКИМ УСПОКОИТЕЛЕМ

§ 1. В статье: о баллистической погрешности гирокомпаса<sup>1</sup> предположено, что гидравлического успокоителя нет, что он выключен, но что период свободных колебаний гиросферы не равен 5060 сек.

В настоящей записке рассматривается влияние гидравлического успокоителя на баллистическую погрешность, происходящую на повороте, когда корабль описывает циркуляцию.

§ 2. В книге «Общая теория гироскопов», § 50—52 изложена теория гидравлического успокоителя в применении к физическому маятнику. От этой теории можно перейти к изучению колебаний гиросферы, снабженной гидравлическим успокоителем; поэтому изложим сперва в несколько измененном и дополненном виде сказанное о физическом маятнике при малых его колебаниях.

Пусть имеется физический маятник, малые колебания которого, когда успокоитель не действует, — что для наглядности будем выражать словами «жидкость заморожена», — представляются дифференциальным уравнением:

$$(1) \quad J \theta'' + Pa \theta = 0$$

при само собою понятном обозначении.

Схематически такой маятник и жидкость в нем изображены на фиг. 1, причем вся система образует одно твердое тело, ибо жидкость не переливается.

На фиг. 2 схематически изображен тот же маятник, когда жидкость в успокоителе по соединительной трубке переливается из одной чашки в другую.

Пусть в момент времени  $t$  маятник наклонен на угол  $\theta$ , тогда на него действуют следующие моменты:

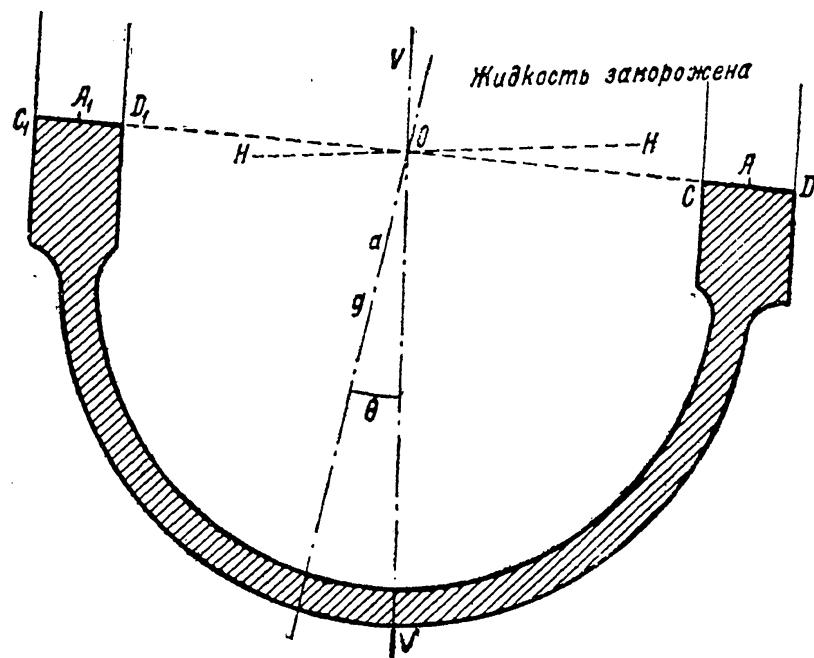
а) прежний момент веса, равный

$$-Pa \sin \theta \approx -Pa \theta$$

как и при замороженной жидкости. Это равенство лишь приближенное, но когда движение жидкости медленное и ускорения ее весьма малы, то это допущение не вносит практически ощутимой погрешности;

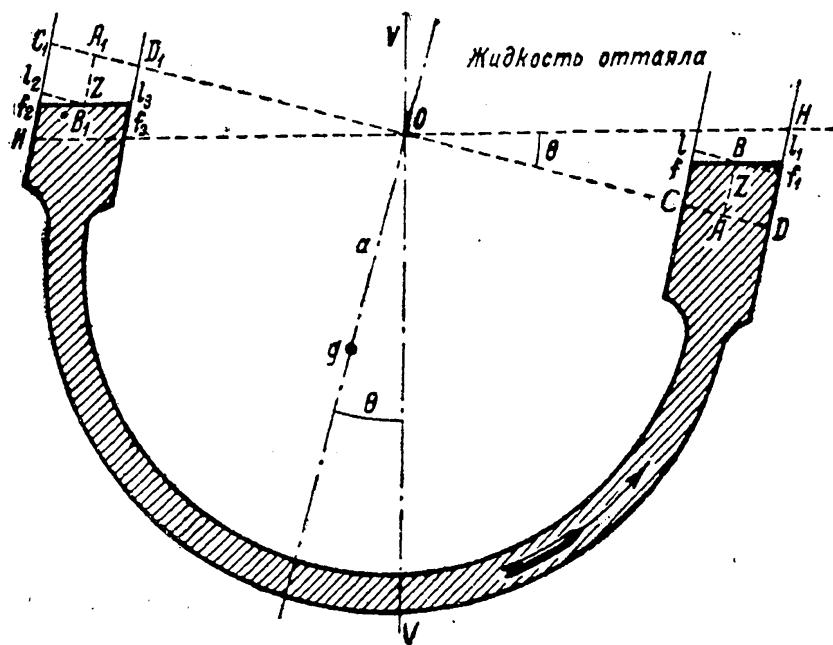
<sup>1</sup> См. выше, стр. 245.—Ред.

б) добавочный момент, происходящий от перемещения жидкости, которая, будучи замороженной, имела в чашках уровни  $CA D$  и  $C_1 A_1 D_1$ ;



Фиг. 1.

в) момент трения перетекающей по трубке жидкости из одной чаши в другую.



Фиг. 2.

Составив эти добавочные моменты, надо их присовокупить к моменту веса  $-P\alpha\theta$  в уравнении:

$$I\theta'' = -P\alpha\theta$$

и мы получим уравнение движения маятника, снабженного успокоителем.

Указанный в п. «б» момент перемещения жидкости состоит из двух частей, а именно:

1°. Момент  $m_1$ , происходящий от перемещения объема жидкости  $C_1D_1l_2f_2$ , в положение  $CDlf$ .

Обозначив через  $S$  площадь сечения чашки, предполагаемой цилиндрической, через  $b$  — расстояние  $OA = OA_1$  и через  $z$  — ординату  $A_1B_1 = AB$ , т. е. толщину слоев  $C_1D_1l_2f_2$  и  $CDlf$ , через  $q$  — вес кубического сантиметра жидкости, тогда будет:

$$(2) \quad m_1 = 2qSzb$$

К этому моменту надо прибавить момент перемещения клинового объема  $l_2B_1f_2$ , в положение  $l_2B_1f_3$  и клинового объема  $l_2Bf$  в положение  $l_2Bf_1$ . Каждый из этих моментов равен  $qj\theta$ , где  $j$  есть момент инерции площади  $S$  относительно проведенных через точку  $B_1$  для первого и через точку  $B$  для второго осей, параллельных оси наклонения  $\theta$ .

Сумма этих двух моментов

$$(3) \quad m_2 = 2qj\theta$$

Таким образом полный момент от перемещения жидкости будет:

$$(4) \quad M = m_1 + m_2 = 2(qSbz + j\theta)$$

причем этот момент действует в сторону, обратную моменту веса.

2°. Момент трения можно принимать пропорциональным первой степени скорости перетекания жидкости, так что будет:

$$(5) \quad M_2 = fr_1 \frac{S}{s} \sigma z' = mz'$$

где  $f$  есть коэффициент трения,  $r_1$  — среднее значение плеча,  $S$  — площадь чашки,  $s$  — площадь сечения трубки,  $\sigma$  — смоченная поверхность трубы; момент этот действует в ту же сторону, что и момент веса.

Весовое количество жидкости в успокоителе мало по сравнению с моментом инерции маятника, для гироферы же пришлось бы сравнивать кинетический момент жидкости с кинетическим моментом гироферы; поэтому можно считать, что при перемещении жидкости момент инерции  $I$  не изменяется: таким образом уравнение движения маятника будет:

$$(6) \quad I\theta'' = -(Pa\theta - 2qSbz - 2qj\theta + mz')$$

иначе:

$$(I) \quad I\theta'' + (Pa - 2qj)\theta - 2qSbz + mz' = 0$$

В этом уравнении содержится две неизвестных функции  $\theta$  и  $z$ , следовательно, для их определения надо иметь еще второе уравнение, независимое от (I).

Принимая:

$$\sin \theta = 0, \cos \theta = 1$$

мы видим, что в рассматриваемый момент времени  $t$  разность уровней в чашках есть<sup>1</sup>:

$$2b\theta - 2z;$$

ввиду того, что колебания маятника (в случае гиросфера) весьма медленны и диаметр соединительной трубки весьма малый, скорость перетекания жидкости будет следовать закону Пуазейля, т. е. будет пропорциональна не корню квадратному из разности уровней, а первой степени этой разности; обозначая эту скорость через  $c$ , будем иметь:

$$(7) \quad c = k_1 (2b\theta - 2z) = 2k_1 (b\theta - z)$$

По тому же закону Пуазейля, количество протекающей жидкости пропорционально скорости и квадрату площади сечения трубы, значит будет:

$$qSz' dt = k_1 q s^2 c dt = 2k_1 k_2 q s^2 (b\theta - z) dt$$

Отсюда следует.

$$z' = 2k_1 k_2 \frac{s^2}{S} (b\theta - z) = k (b\theta - z)$$

где

$$k = 2k_1 k_2 \frac{s^2}{S}$$

есть некоторая постоянная, определяемая опытом для заданной трубы и заданной жидкости.

Таким образом наше второе уравнение есть:

$$(II) \quad z' = k (b\theta - z)$$

Напишем уравнения (I) и (II) символически так:

$$(I') \quad (\delta^2 + A_1)\theta - (B_1\delta + C_1)z = 0$$

$$(II') \quad -kb\theta + (\delta + k)z = 0$$

причем положено:

$$(8) \quad A_1 = \frac{Pa - 2qj}{J}; \quad B_1 = -\frac{m}{J}; \quad \frac{2qSb}{J} = C_1$$

Исключим из уравнения (I') и (II') величину  $z$ , тогда для определения  $\theta$  получим уравнение:

$$[(\delta^2 + A_1)(\delta + k) - kb(B_1\delta + C_1)]\theta = 0$$

или же:

$$[\delta^3 + k\delta^2 + (A_1 - kbB_1)\delta + k(A_1 - bC_1)]\theta = 0$$

или в исключительном виде:

$$(III) \quad \theta'' + k\theta'' + (A_1 - kbB_1)\theta' + k(A_1 - bC_1)\theta = 0$$

<sup>1</sup> См. «Общая теория гироскопов», стр. 209—210.—Ред.

**§ 3.** Перейдем теперь к рассмотрению колебаний гиросферы и начнем со свободных ее колебаний, которые определяются уравнениями<sup>1</sup>:

$$(9) \quad B\psi'' + An\omega_1\psi - An\theta' = 0$$

$$(10) \quad An\psi' + B\theta'' + (An\omega_1 + P_1a_1)\theta = 0$$

предполагая, что успокоителя нет.

В спокойствии, плоскость симметрии которого совпадает с плоскостью  $NS$  гиросферы, на угол  $\psi$  непосредственного влияния не оказывает, поэтому уравнение (9) остается без перемены, уравнение же (10) надо заменить системой следующих двух уравнений<sup>2</sup>:

$$(11) \quad An\psi' + B\theta'' + (An\omega_1 + P_1a_1)\theta - 2qj\theta - 2qSbz + mz' = 0$$

$$(12) \quad -kb\theta + z' + kz = 0$$

Таким образом свободные колебания гиросферы будут определяться уравнениями (9), (11) и (12).

Отбросив в этих уравнениях инерционные члены  $B\psi''$  и  $B\theta''$ , имеем:

$$(9') \quad \omega_1\psi - \theta' = 0$$

$$(11') \quad An\psi' + (An\omega_1 + P_1a_1 - 2qj)\theta - 2qSbz + mz' = 0$$

$$(12) \quad -kb\theta + z' + kz = 0$$

Исключив из уравнений (9') и (11') величину  $\psi$ , получим по умножении на  $\omega_1$  уравнение:

$$(13) \quad An\theta'' + (An\omega_1 + P_1a_1 - 2qj)\omega_1\theta - 2qSb\omega_1z + m\omega_1z' = 0$$

Напишем уравнения (13) и (12) в символической форме:

$$[AnD^2 + (An\omega_1 + P_1a_1 - 2qj)\omega_1]\theta + (mD - 2qSb)\omega_1z = 0 \\ -kb\theta + (D + k)z = 0$$

Исключив  $z$ , имеем:

$$(13') \quad [ \{AnD^2 + (An\omega_1 + P_1a_1 - 2qj)\omega_1\} (D + k) + kb(mD - 2qSb)\omega_1 ] \theta = 0$$

Из этого уравнения и уравнения (9') следует<sup>3</sup>:

$$(14) \quad [ \{AnD^2 + AnkD + (An\omega_1 + P_1a_1 - 2qj + kmb)\omega_1\} D + k(An\omega_1 + P_1a_1 - 2qj - 2qSb^2)\omega_1 ] \psi = 0$$

иначе:

$$[AnD^2 + AnkD^2 + (An\omega_1 + P_1a_1 - 2qj + kmb)\omega_1 D + \\ + k(An\omega_1 + P_1a_1 - 2qj - 2qSb^2)\omega_1] \psi = 0$$

<sup>1</sup> См. выше, стр. 215.—Ред.

<sup>2</sup>  $P_1$ —вес гиросферы;  $a_1$ —расстояние между ее центром тяжести и центром величины.

<sup>3</sup> См. стр. 234.—Ред.

т. е. в обыкновенной не символической форме:

$$(14') \quad An\psi'' + Ank\psi'' + (An\omega_1 + P_1a_1 - 2qj + kmb)\omega_1\psi' + \\ + k(An\omega_1 + P_1a_1 - 2qj - 2qSb^2)\omega_1\psi = 0$$

Ниже будет показано, что при тех соотношениях между конструктивными элементами, которые соблюдаются в гирокомпасах, среднее значение отношения  $An\psi''' : Ank\psi''$  весьма мало по сравнению с 1 (около 1/1200), поэтому в уравнении (14') первый член может быть отброшен, и мы получим уравнение:

$$15) \quad \psi'' + \frac{An\omega_1 + P_1a_1 - 2qj + kmb}{Ank}\omega_1\psi' + \frac{An\omega_1 + P_1a_1 - 2qj - 2qSb^2}{An}\cdot\omega_1\psi = 0.$$

Это уравнение и представит *свободные азимутальные колебания длинного периода*, которые только и важны для гирокомпаса.

Чтобы показать справедливость нашего утверждения, что отношение  $\psi''' : k\psi''$  в среднем по абсолютной величине весьма мало, ограничимся случаем гиросферы с *кольцевым успокоителем*, для которой мы имеем экспериментальные данные.

Для такой гиросферы  $b=0$ , вместе с тем  $An\omega$ , весьма мало по сравнению с  $(P_1a_1 - 2qj)$ , так что период  $T$  ее свободных затухающих колебаний выражается формулой:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{An}{(P_1a_1 - 2qj)\omega_1}}$$

или, точнее говоря:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{An}{(P_1a_1 - 2qsj)\omega_1}}$$

где  $s$  есть некоторая правильная дробь. Вместе с тем коэффициент затухания тогда будет:

$$2h = \frac{(P_1a_1 - 2qsj)\omega_1}{Ank} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{1}{k}$$

Среднее значение  $T$  по практическим данным около 8000 секунд, среднее значение  $h$ , получаемое из опытов, таково, что:

$$1 \leq \frac{hT}{2} \leq 2$$

Таким образом мы получаем двойное неравенство:

$$1 \leq \frac{\pi^2}{T} \frac{1}{k} \leq 2$$

$$\text{т. е. } k \leq \frac{\pi^2}{T} \text{ и } k \geq \frac{\pi^2}{2T}$$

или, кругло:

$$\frac{1}{800} > k > \frac{1}{1600}$$

§ 4. Сравним сперва уравнение (15) с тем, которое получается из уравнения (9) и (10), отбросив в них инерционные члены, что дает систему:

$$(9') \quad \omega_1 \psi - \theta' = 0$$

$$(10') \quad \dot{\psi} + \frac{An\omega_1 + P_1 a_1}{An} \theta = 0$$

из которой, исключив  $\theta$ , имеем:

$$(16) \quad \ddot{\psi} + \frac{An\omega_1 + P_1 a_1}{An} \omega_1 \psi = 0$$

Очевидно, что это уравнение есть частный случай уравнения (15), из которого оно получается, положив

$$k = 0, \quad j = b = 0$$

Это соответствует предположению, что в успокоителе жидкость заморожена, и он не действует.

Положим

$$\frac{An\omega_1 + P_1 a_1}{An} = \frac{4\pi^2}{\tau^2}$$

тогда при соответствующем выборе элементов будет:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 5060 \text{ сек.}$$

где  $R$  — радиус земли.

В уравнении (15) при  $\psi$  вместо множителя

$$(17') \quad \frac{(An\omega_1 + P_1 a_1) \omega_1}{An} = \frac{4\pi^2}{\tau^2} \approx \frac{P_1 a_1 \omega_1}{An}$$

стоит множитель:

$$\begin{aligned} \frac{(An\omega_1 + P_1 a_1) \omega_1}{An} - \frac{2q(\epsilon j + Sb^2)}{An} \omega_1 &= \\ &= \frac{4\pi^2}{\tau^2} - \frac{2q(\epsilon j + Sb^2)}{An} \omega_1 \end{aligned}$$

В этих формулах  $P_1 a_1$  есть статический момент гироферы. Обозначим через  $T$  величину измененного периода колебаний, определяемого равенством:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi^2}{T^2} &= \frac{(An\omega_1 + P_1 a_1) - 2q(\epsilon j + Sb^2)}{An} \omega_1 \\ &\approx \frac{P_1 a_1 - 2q(\epsilon j + Sb^2)}{An} \omega_1 \end{aligned}$$

так что будет:

$$(18) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{An}{P_1 a_1 - 2q(\epsilon j + Sb^2) \omega_1}}$$

Величина  $2j + 2Sb^2$  есть не что иное, как момент инерции свободной поверхности жидкости в успокоителе, и член  $\frac{2q(sj + Sb^2)}{P_1}$  есть потеря в мере остойчивости (статическом моменте), происходящая от колебания свободного уровня жидкости в гиро сфере. Множитель  $s < 1$  указывает на влияние проницаемых перегородок, стесняющих эти колебания. Это переливание производит тот же эффект, как и уменьшение расстояния  $a_1$  между центром тяжести и центром величины на

$$\frac{2q(sj + Sb^2)}{P_1}$$

Положив:

$$(19) \quad a_2 = a_1 - \frac{2q(sj + Sb^2)}{P_1}$$

мы формулу (18) можем написать в виде:

$$(20) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{P_1}{P_1 a_2 \omega_1}}$$

и тогда полная ее аналогия с формулой (17) очевидна.

§ 5. Второе изменение, вносимое успокоителем в уравнение (16) свободных колебаний гироферы без успокоителя, есть появление члена

$$\frac{An\omega_1 + P_1 a_1 - 2qsj + kmb}{Ank} \omega_1 \psi'$$

пропорционального первой степени угловой скорости  $\psi'$ .

Здесь необходимо прежде всего отметить то замечательное обстоятельство, что этот член сохраняется и при  $m = 0$ , т. е. при отсутствии трения в трубке. Это может казаться парадоксальным потому, что сразу не видно, где же происходит потеря энергии. Эта потеря происходит от внутреннего трения жидкости, ибо мы воспользовались, написав уравнение II, законом Пуазейля, имеющего место для вязкой жидкости, а не законом Бернулли, по которому было бы:

$$\frac{z'^2}{2g} = b\theta - z$$

т. е.

$$z' = \sqrt{2g(b\theta - z)}$$

Очевидно, что мы тогда получили бы вместо уравнения (15) совершенно другое уравнение, — закон сохранения энергии имел бы место, и при  $m = 0$  погашения бы не происходило.

Положив

$$\frac{An\omega_1 + P_1 a_1 - 2qsj + kmb}{Ank} \omega_1 = 2h$$

мы опять-таки член  $A\omega_1$ , в числителе можем отбросить и писать:

$$(19') \quad 2h = \frac{1}{k} \frac{P_1 a_1 - 2q\epsilon i + kmb}{A\omega_1} \omega_1$$

и уравнение азимутальных колебаний гиросяфера [см. уравнение (15)] будет:

$$(21) \quad \ddot{\psi} + 2h\dot{\psi} + \frac{4\pi^2}{T^2} \psi = 0$$

Из этого уравнения следует, что период свободных колебаний  $T_1$  определяется из равенства:

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{\frac{4\pi^2}{T^2} - h^2}$$

иначе

$$(22) \quad T_1 = T \sqrt{\frac{2\pi}{4\pi^2 - h^2 T^2}}$$

и погашение на один простой размах:

$$(23) \quad c = e^{-hT_1/2}$$

§ 6. По поводу формулы (19') и ее следствий необходимо заметить, что в ней предполагается, что поверхность жидкости ничем не стеснена и колебания ее уровня вследствие наклонений успокоителя ничем не стеснены, как это имеет место для успокоителя чашечного, но для успокоителя кольцевого вследствие его перегородок эти колебания стеснены, и приближенно можно для такого успокоителя брать:

$$b = 0$$

$$2j = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) \varepsilon$$

причем  $\varepsilon$  есть правильная дробь, которую не трудно определить, сличая величины периода  $T_1$  и погашения  $c$  при наблюдениях свободных качаний с их теоретическим значением.

В формулу (19') входят еще величины  $k$  и  $m$ .

Величина  $k$  определяется по опыту, измеряя количество жидкости, вытекающей под *постоянным* напором в продолжение заданного времени.

Такое наблюдение, зная площадь сечения трубы, дает скорость  $C$ , а затем формула:

$$C = kH$$

где  $H$  — напор доставит значение  $k^1$ .

---

<sup>1</sup> Теоретическое значение  $k$  см. ниже § 9.

Ясно, что такое испытание должно производиться совершенно независимо от качаний гиросферы или успокоителя.

Определение величины  $m$ , или, что то же  $f$ , в формуле (5) гораздо сложнее и может быть выполнено, изготовив чувствительный маятник (на призмах) и снабжая его чашечным гидравлическим успокоителем, для которого затем надо изменять длину соединительной трубки, а также выключать его, закрывая чашки наглухо, чтобы получить период свободных его колебаний.

Определение величин погашения и измененного периода доставит необходимые данные для определения величины  $m$ , а значит, и необходимые данные для расчета чашечного успокоителя, который вносил бы требуемое погашение, лишь мало изменяя период.

Так как при производстве таких испытаний придется считаться и с теорией опытов Пуазейля, то в приложении к этой записке изложена эта теория.

Ввиду того, что смоченная поверхность трубы и проволоки (в успокоителе кольцем) мала, а также ввиду малости коэффициента  $f$  и малости сечения трубы можно величиной  $m$ , по сравнению с прочими слагаемыми, входящими в выражение  $2h$ , пренебречь и полагать  $m=0$ , что мы и сделаем лишь в конце выкладок, чтобы получить более общие формулы.

**§ 7.** Изложив теорию свободных колебаний гиросферы, снабженной гидравлическим успокоителем, перейдем к рассмотрению вынужденных ее колебаний, когда корабль описывает циркуляцию.

В этом случае уравнения движения гиросферы, успокоителя не имеющей, как показано в записке о баллистической погрешности, суть следующие<sup>1</sup>:

$$(25) \quad A\dot{\psi} + (A\omega_1 + P_1 a_1) \theta = A\omega_2 + H \sin \left( \frac{2\pi t}{\sigma} + \varphi_0 \right)$$

$$(24) \quad \omega_1 \dot{\psi} - \dot{\theta}' = 0$$

причем

$$(26) \quad H = \frac{4\pi^2 P_{1,7,0}}{\sigma^2}$$

Когда присоединен успокоитель, то первое уравнение остается без перемены, второе же заменяется системой двух уравнений, левые части которых суть (11) и (12), правая же часть в уравнении (11') будет та же, что в уравнении (25).

Уравнение (12) происходит от уравнения II (см. стр. 226):

$$(II) \quad z' = k(b\theta - z)$$

выражающего скорость перетекания в узкой трубке по закону Пуазейля, предполагая, что жидкость находится под действием силы тя-

<sup>1</sup> См. выше, стр. 216.—Ред.

жести, вследствие чего напор и выражается формулой  $(b\theta - z)$  и равен разности уровней, считаемых от истинной горизонтальной плоскости.

Но когда корабль описывает циркуляцию радиуса  $r$  в течение времени  $\sigma$ , то вследствие центробежной силы жидкость имеет уровень (свободную поверхность) не горизонтальную, а наклоненную к горизонту под углом  $\beta$ , определяемым равенством:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{4\pi^2}{\sigma^2} \frac{r}{g}}{\sin \left( \frac{2\pi t}{\sigma} + \alpha_0 \right)}$$

или по малости угла  $\beta$ :

$$\beta = \frac{\frac{4\pi^2}{\sigma^2} \frac{r}{g}}{\sin \left( \frac{2\pi t}{\sigma} + \alpha_0 \right)}$$

как это видно из уравнения:

$$An\psi' + (An\omega_1 + P_1 a_1) \theta = An\omega_2 + \frac{\frac{4\pi^2}{\sigma^2} P_1 a_1}{g} \sin \left( \frac{2\pi t}{\sigma} + \alpha_0 \right)$$

приведенного в статье о баллистической погрешности<sup>1</sup>.

Полагая в этом уравнении, чтобы определить мгновенное положение равновесия,  $\psi = 0$ , отбрасывая малые величины  $An\omega_1$  и  $An\omega_2$  по сравнению с  $P_1 a_1$ , мы получим:

$$\theta_0 = \beta = \frac{\frac{4\pi^2}{\sigma^2} \frac{r}{g}}{\sin \left( \frac{2\pi t}{\sigma} + \alpha_0 \right)}$$

поэтому в формуле (II) надо писать  $(\theta - \beta)$  вместо  $\theta$ , и вместо уравнения (12) мы имеем уравнение:

$$-kb\theta + z' + kz = -kb\beta = -\frac{\frac{4\pi^2}{\sigma^2} kb}{g} \sin \left( \frac{2\pi t}{\sigma} + \alpha_0 \right)$$

Таким образом на циркуляции уравнения колебательного движения гирросфера, снабженной гидравлическим успокоителем, будут:

$$(27) \quad \begin{aligned} \omega_1 \psi - \theta &= 0 \\ An\psi' + (An\omega_1 + P_1 a_1 - 2qj) \theta - 2qSbz + mz' &= \\ &= An\omega_2 + H \sin \left( \frac{2\pi t}{\sigma} + \alpha_0 \right) \\ -kb\theta + z' + kz &= -\frac{\frac{4\pi^2}{\sigma^2} kb}{g} \sin \left( \frac{2\pi t}{\sigma} + \alpha_0 \right) \end{aligned}$$

Поступая с этими уравнениями совершенно так же, как в § 3, получим следующую систему, написанную в символической форме:

$$\begin{aligned} \theta [AnD^2 + (An\omega_1 + P_1 a_1 - 2qj) \omega_1] + (mD - 2qSb) \omega_1 z &= \\ &= \left[ An\omega_2 + H \sin \left( \frac{2\pi t}{\sigma} + \alpha_0 \right) \right] \omega_1 \\ -kb\theta + (D + k)z &= -\frac{\frac{4\pi^2}{\sigma^2} kb}{g} \sin \left( \frac{2\pi t}{\sigma} + \alpha_0 \right) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> См. выше, стр. 216.—Ред.

Исключая  $z$ , имеем:

$$\begin{aligned} & [ \{ AnD^2 + (An\omega_1 + P_1 a_1 - 2qj) \omega_1 \} (D + k) + kb(mD - 2qSb) \omega_1 ] \theta = \\ & = \omega_1 \left[ (D + k) \left\{ An\omega_2 + H \sin \left( \frac{2\pi t}{c} + \alpha_0 \right) \right\} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{4\pi^2 kb\varrho}{c^2 g} (mD - 2qSb) \sin \left( \frac{2\pi t}{c} + \alpha_0 \right) \right]. \end{aligned}$$

Дифференцируя это уравнение, иначе говоря умножив его символовски на  $D$  и заменив затем на основании уравнения

$$\omega_1 \dot{\psi} - D\theta = 0$$

величину  $D\theta$  через  $\omega_1 \dot{\psi}$ , по сокращении на  $\omega_1$  получим:

$$\begin{aligned} & [ \{ AnD^2 + (An\omega_1 + P_1 a_1 - 2qj) \omega_1 \} (D + k) + kb(mD - 2qSb) \omega_1 ] \psi = \\ & = (D^2 + kD) \left\{ An\omega_2 + H \sin \left( \frac{2\pi t}{c} + \alpha_0 \right) \right\} + \\ & + \frac{4\pi^2 kb\varrho}{c^2 g} (mD^2 - 2qSb\theta D) \cdot \sin \left( \frac{2\pi t}{c} + \alpha_0 \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что левая часть этого уравнения та же самая, как в уравнения (13'), и мы напишем это уравнение для краткости так:

$$(28) \quad [(13')] = (D + k) D \left[ An\omega_2 + H \sin \left( \frac{2\pi t}{c} + \alpha_0 \right) \right] + \\ + \frac{4\pi^2 kb\varrho}{c^2 g} (mD^2 - 2qSb\theta D) \sin \left( \frac{2\pi t}{c} + \alpha_0 \right)$$

Для кольцевого гидравлического успокоителя

$$b = 0, m = 0$$

так что предыдущее уравнение принимает вид:

$$(29) \quad \begin{aligned} & [AnD^2 + (An\omega_1 + P_1 a_1 - 2qj) \omega_1] (D + k) \psi = \\ & = (D + k) D \left[ An\omega_2 + H \sin \left( 2\pi \frac{t}{c} + \alpha_0 \right) \right] \end{aligned}$$

потому свободные колебания, которые мы обозначим через  $v$ , определяются уравнением:

$$[AnD^2 + (An\omega_1 + P_1 a_1 - 2qj) \omega_1] (D + k) v = 0$$

т. е.

$$\begin{aligned} & [AnD^2 + kAnD^2 + (An\omega_1 + P_1 a_1 - 2qj) \omega_1 D + \\ & + k(An\omega_1 + P_1 a_1 - 2qj) \omega_1] v = 0 \end{aligned}$$

или в обыкновенной форме (по разделении на  $An$ ):

$$(30) \quad v''' + ky'' + \frac{(An\omega_1 + P_1 a_1 - 2qj) \omega_1}{An} v' + k \frac{(An\omega_1 + P_1 a_1 - 2qj) \omega_1}{An} v = 0$$

причем, как показано в § 3, член  $v'''$  весьма мал (для свободных колебаний) по сравнению с  $ky''$  и может быть отброшен, так что для

определения свободных колебаний мы получим уравнение:

$$(31) \quad v'' + \frac{(An\omega_1 + P_1 a_1 - 2qj)\omega_1}{An} v' + \frac{(4n\omega_1 + P_1 a_1 - 2qj)\omega_1}{An} v = 0$$

или, полагая

$$(32) \quad \lambda^2 = \frac{(An\omega_1 + P_1 a_1 - 2qj)\omega_1}{An} \simeq \frac{(P_1 a_1 - 2qj)\omega_1}{An} = \frac{P_1 a_1 \omega_1}{An}$$

получим:

$$(33) \quad v = e^{-ht} (c_1 \cos \lambda_1 t + c_2 \sin \lambda_1 t)$$

причем

$$(34) \quad \lambda_1 = \sqrt{\lambda^2 - h^2}$$

Обозначим через  $\psi$  частное решение уравнения (29). Это частное решение определяется уравнением:

$$\begin{aligned} [AnD^2 + (An\omega_1 + P_1 a_1 - 2qj)\omega_1](D + k)\psi = \\ = (D + k)D \left[ An\omega_1 + H \sin \left( \frac{2\pi t}{\sigma} + \alpha_0 \right) \right] \end{aligned}$$

т. е. уравнением:

$$[AnD^2 + (An\omega_1 + P_1 a_1 - 2qj)]\psi = \frac{2\pi}{\sigma} H \cos \left( \frac{2\pi t}{\sigma} + \alpha_0 \right)$$

или иначе уравнением:

$$(35) \quad \psi'' + \lambda^2 \psi = \frac{2\pi}{\sigma} \frac{H}{An} \cos \left( \frac{2\pi t}{\sigma} + \alpha_0 \right) = \frac{2\pi}{\sigma} \frac{H}{An} \cos \alpha$$

где  $\sigma$  есть мгновенный курс корабля на циркуляции.

Полагаем как и раньше

$$(36) \quad T = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \sqrt{\frac{An}{(An\omega_1 + P_1 a_1 - 2qj)\omega_1}} \simeq 2\pi \sqrt{\frac{An}{P_1 a_1 \omega_1}}$$

( $T$  составляет около 8000 секунд), тогда будет:

$$\psi = \frac{2\pi}{\sigma} \frac{H}{An} \frac{1}{\frac{4\pi^2}{T_1^2} - \frac{4\pi^2}{\sigma^2}} \cos \alpha$$

но

$$\frac{4\pi^2}{T_1^2} - \frac{4\pi^2}{\sigma^2} = - \frac{4\pi^2 (T_1^2 - \sigma^2)}{T_1^2 \sigma^2} = - \frac{4\pi^2}{\sigma^2} \left( 1 - \frac{\sigma^2}{T_1^2} \right) \simeq - \frac{4\pi^2}{\sigma^2}$$

ибо при  $T_1 \simeq 8000$ , и  $200 \leq \sigma \leq 500$  будет

$$\frac{1}{1600} \leq \frac{\sigma^2}{T_1^2} \leq \frac{1}{250}$$

Подставляя вместо  $\frac{H}{An}$  величину

$$\frac{H}{An} = \frac{4\pi^2}{\sigma^2} \frac{P_1 a_1 \rho}{g An}$$

получим:

$$(37) \quad \psi = - \frac{2\pi}{\sigma} \frac{\rho}{g} \frac{P_1 a_1}{An} \cos \alpha$$

Но выражение  $\frac{2\pi\rho}{\sigma} \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{P_1 a_1}{An}$  может быть преобразовано следующим образом:

$$\frac{2\pi\rho}{\sigma} \frac{1}{g} \frac{P_1 a_1}{An} = \frac{v}{g} \frac{P_1 a_1 \omega_1}{An} \cdot \frac{1}{\omega_1} = \frac{v}{g} \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{1}{\omega_1} = \frac{v}{g\omega_1} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \tau^2 \cdot \frac{1}{\tau^2}$$

причем

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}; \quad \frac{1}{\tau^2} = \frac{1}{4\pi^2 R}$$

значит будет<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi\rho}{\sigma} \frac{1}{g} \frac{P_1 a_1}{An} &= \frac{\tau^2}{T^2} \frac{v}{R\omega_1} = \frac{\tau^2}{T^2} \frac{v}{R\omega \cos \lambda} \\ \psi &= -\frac{\tau^2}{T^2} \frac{v}{R\omega \cos \lambda} \cos \alpha = \frac{\tau^2}{T^2} \delta \end{aligned}$$

а, следовательно:

$$\psi = e^{-ht} (c_1 \cos \lambda_1 t + c_2 \sin \lambda_1 t) + \frac{\tau^2}{T^2} \delta$$

Начальные условия:

$$(\psi)_{t=0} = \delta_0 \quad \text{и} \quad (\psi')_{t=0} = 0$$

дают

$$\delta_0 = c_1 + \frac{\tau^2}{T^2} \delta_0$$

$$0 = -hc_1 + \lambda_1 c_2$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} c_1 &= \left(1 - \frac{\tau^2}{T^2}\right) \delta_0 = \frac{T^2 - \tau^2}{T^2} \delta_0 \\ c_2 &= \frac{h}{\lambda_1} c_1 = \frac{h}{\lambda_1} \frac{T^2 - \tau^2}{T^2} \delta_0 = \frac{h T_1}{2\pi} \frac{T^2 - \tau^2}{T^2} \delta_0 = \frac{\beta}{\pi} \frac{T^2 - \tau^2}{T^2} \delta_0 \end{aligned}$$

причем<sup>2</sup>  $\beta = \log \frac{1}{c}$

Таким образом имеем:

$$(38) \quad \psi = \frac{T^2 - \tau^2}{T^2} e^{-ht} \delta_0 \left[ \cos \lambda_1 t + \frac{\beta}{\pi} \sin \lambda_1 t \right] + \frac{\tau^2}{T^2} \delta$$

или

$$\text{ж} \quad \psi = \frac{T^2 - \tau^2}{T^2} e^{-ht} \delta_0 \left[ \cos \frac{2\pi t}{T_1} + \frac{\beta}{\pi} \sin \frac{2\pi t}{T_1} \right] + \frac{\tau^2}{T^2} \delta$$

Заметим, что в эту формулу входят три различных периода:

$$(1'') \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{An}{P_1 a_1 \omega_1}} = 5060 \text{ сек. при начальной регулировке}$$

$$(2'') \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{An}{P_1 a_2 \omega_1}} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

где  $a_2 = a_1 - \frac{2qj}{P_1}$

<sup>1</sup> См. определение курсовой погрешности  $\delta$  на стр. 216.—Ред.

<sup>2</sup> См. стр. 243.—Ред.

т. е.  $T$  есть период свободных колебаний, удлиненный только вследствие наличия у жидкости свободного уровня;

$$(3^o) \quad T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2 - h^2}} = T \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - h^2}} = T \frac{\lambda}{\lambda_1} \quad (\text{наблюденный})$$

это период удлиненный вследствие погашения, вносимого успокоителем, а также наличия свободного уровня.

Формула (ж) показывает, что если взять

$$T = \tau = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 5060 \text{ сек.}$$

т. е. период, удлиненный от наличия свободного уровня, равным 5060 секунд, то будет

$$\psi = \delta$$

т. е. азимутальное отклонение будет все время поворота равно мгновенному значению курсовой погрешности.

Мы ограничились рассмотрением баллистической погрешности кольцевого гирокопического успокоителя, т. е. тем частным случаем, когда в общем уравнении (28) надо положить

$$m = 0; \quad b = 0$$

Предположение  $m = 0$  можно сделать всегда, но второе не имеет места, например, для чашечного успокоителя, и тогда для установления его теории надо исходить из общего уравнения (28).

Здесь необходимо, однако, сделать следующее замечание: чтобы получить правильный вид уравнений, надо сперва считать  $m$  и  $b$  величинами конечными, но весьма малыми, и, развив уравнения в этом предположении, отбросить те члены, которые в окончательном результате будут ниже той степени точности, с которой вычисление производится.

§ 8. Рассмотрим опять кольцевой успокоитель и составим для него расчетные формулы.

Для такого успокоителя, схематически изображенного в плане и разрезе на фиг. 3, *a* и *b*, очевидно будет  $b = 0$ , так что надо вычислить только момент инерции  $j$  относительно оси наклонения  $AB$ , которую для общности предположим составляющей угол  $\gamma_0$  с осью симметрии  $xx_1$ , соответствующей линии  $OW$  гиросферы.

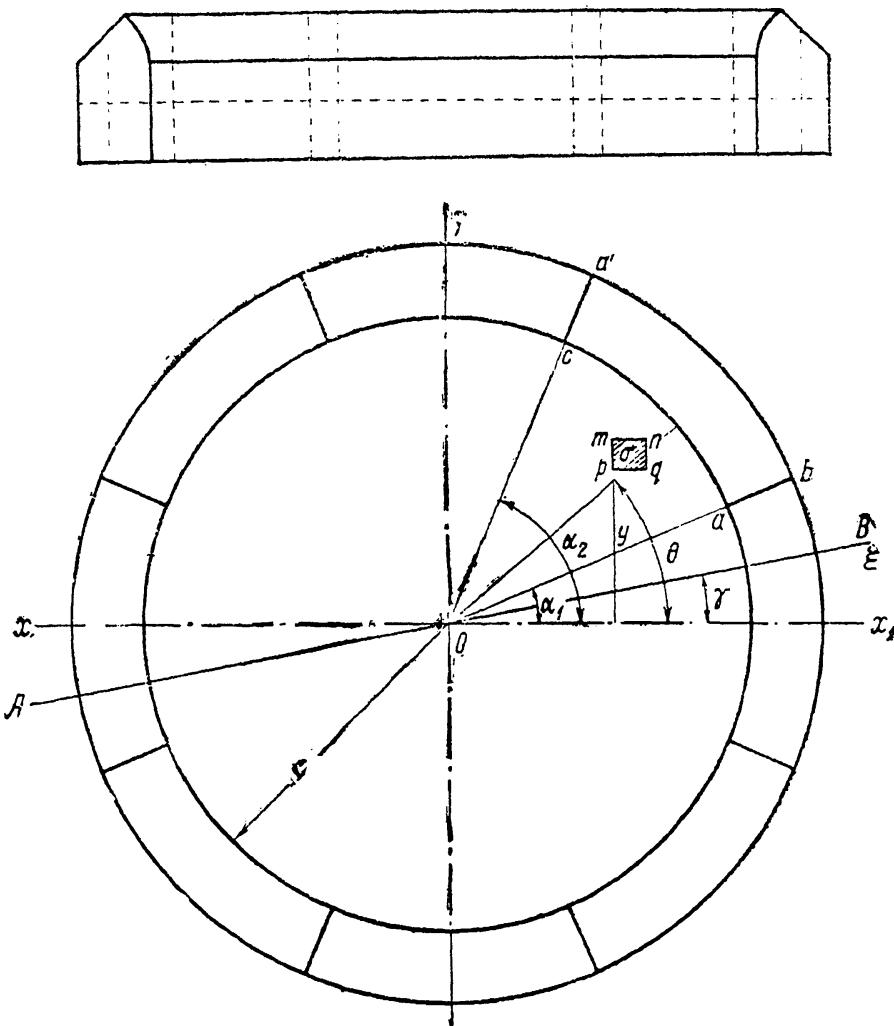
Если бы никаких перегородок не было, то было бы:

$$j = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{1}{64} (D - d)(D + d)(D^2 + d^2),$$

где  $D$  — наружный,  $d$  — внутренний диаметр кольца.

Возьмем теперь другой крайний случай, именно когда перегородки глухие и для жидкости непроницаемы.

Выведем для этого случая сперва общие формулы, которые и будем затем прилагать к различным частным примерам.



Фиг. 3.

Рассмотрим сегмент  $abcd$ , заключенный между отрезками радиусов  $ab$  и  $cd$  и дугами  $ac$  и  $bd$ ; этот сегмент можно рассматривать как разность секторов  $Obd - Oac$ .

Вычислим моменты инерции  $I_x$  и  $I_y$  сектора  $Obd$ .

Возьмем элементарную площадку

$$mnpq = (\rho d\theta) d\rho = \rho d\rho d\theta = \sigma$$

Тогда будет

$$\begin{aligned} I_x &= \sum \sigma y^2 = \int_0^R \rho^3 d\rho \int_{d_1}^{d_2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} R^4 \left[ \frac{1}{4} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (1 - \cos 2\theta) d\theta \right] = \\ &= \frac{1}{8} R^4 [(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{1}{2} (\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1)] = \\ &= \frac{1}{8} R^4 [(\alpha_2 - \alpha_1) - \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \cos(\alpha_2 + \alpha_1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= \sum \sigma x^2 = \int_0^R \rho^3 d\rho \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} R^4 \left[ \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (1 + \cos 2\theta) d\theta \right] = \\
 &= \frac{1}{8} R^4 \left[ (\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{1}{2} (\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1) \right] = \\
 &= \frac{1}{8} R^4 [(\alpha_2 - \alpha_1) + \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \cos(\alpha_2 + \alpha_1)] \\
 I_{xy} &= \sum \sigma xy = \int_0^R \rho^3 d\rho \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^R \rho^3 d\rho \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin 2\theta d\theta = \\
 &= \frac{1}{8} R^4 \frac{1}{2} [\cos 2\alpha_1 - \cos 2\alpha_2] = \frac{1}{8} R^4 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1)
 \end{aligned}$$

Итак мы имеем общие формулы

$$\begin{aligned}
 I_x &= \frac{1}{8} R^4 [(\alpha_2 - \alpha_1) - \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \cos(\alpha_2 + \alpha_1)] \\
 (39) \quad I_y &= \frac{1}{8} R^4 [(\alpha_2 - \alpha_1) + \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \cos(\alpha_2 + \alpha_1)] \\
 I_{xy} &= \frac{1}{8} R^4 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \sin(\alpha_2 - \alpha_1)
 \end{aligned}$$

Положим, что мы имеем какую угодно фигуру, для которой известны моменты инерции  $I_x$ ,  $I_y$  и центробежный момент  $I_{xy}$ , требуется вычислить момент инерции  $I_\xi = \sum \sigma \eta^2$  относительно оси  $O\xi$ , составляющей угол  $\gamma$  с осью  $Ox$ .

Мы имеем:

$$\eta = -x \sin \gamma + y \cos \gamma$$

следовательно, будет:

$$\begin{aligned}
 I_\xi &= \sum \sigma y^2 = \sum (-x \sin \gamma + y \cos \gamma)^2 \sigma = \\
 &= \sin^2 \gamma \cdot \sum \sigma x^2 - 2 \sin \gamma \cos \gamma \cdot \sum \sigma xy + \cos^2 \gamma \cdot \sum \sigma y^2
 \end{aligned}$$

т. е.

$$(40) \quad I_\xi = I_x \cos^2 \gamma + I_y \sin^2 \gamma - I_{xy} \sin 2\gamma$$

Формулы (39) дают моменты инерции сектора  $Obd$ . Заменив в этих формулах  $R$  — радиус наружного круга — на  $r$  — радиус внутреннего круга, получим моменты и произведение инерции сектора  $Oac$ ; разность их представит момент инерции площади сегмента  $abcd$ , именно будет:

$$\begin{aligned}
 I_x &= \frac{1}{8} (R^4 - r^4) [(\alpha_2 - \alpha_1) - \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \cos(\alpha_2 + \alpha_1)] \\
 (41) \quad I_y &= \frac{1}{8} (R^4 - r^4) [(\alpha_2 - \alpha_1) + \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \cos(\alpha_2 + \alpha_1)] \\
 I_{xy} &= \frac{1}{8} (R^4 - r^4) \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \sin(\alpha_2 + \alpha_1)
 \end{aligned}$$

При выводе формулы (40) предположено, что ось  $O\xi$  проходит через точку  $O$  так же, как и оси  $Ox$  и  $Oy$ ; если же надо иметь момент

инерции относительно оси, параллельной  $O\xi$ , идущей от нее в расстоянии  $a$  и проходящей через центр тяжести рассматриваемой площади  $S$ , то будет:

$$(40') \quad I_{\xi_1} = I_{\xi} - Sa^2$$

Вычислив по вышеприведенным формулам момент инерции каждого сегмента в отдельности и взяв их сумму, получим полный момент инерции  $2j$  для всей кольцевой площади для того случая, когда успокоитель подразделен глухими переборками.

Возьмем для примера тот случай, когда перегородок 8. Практически успокоителю можно придать двоякое расположение относительно оси наклонения  $xx_1$ , совпадающей с осью  $OW$  гироферы. Эти расположения показаны на фиг. 4, I и II.

Для фиг. I значения углов  $\alpha$  будут:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0; \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{4}; \quad \alpha_3 = \frac{\pi}{2}; \\ \alpha_4 &= \frac{3\pi}{4}; \quad \alpha_5 = \pi \\ \alpha_6 &= \pi + \alpha_3; \quad \alpha_7 = \pi + \alpha_3; \\ \alpha_8 &= \pi + \alpha_4; \quad \alpha_9 = 2\pi \end{aligned}$$

Для фиг. II значения углов  $\alpha$  будут

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{\pi}{8}; \quad \alpha_2 = \frac{3\pi}{8}; \quad \alpha_5 = \pi + \alpha_1; \\ \alpha_7 &= \pi + \alpha_3; \quad \alpha_9 = \pi + \alpha_3 \end{aligned}$$

Фиг. 4

$$\alpha_3 = +\frac{\pi}{8}; \quad \alpha_4 = \frac{5\pi}{8}; \quad \alpha_6 = \pi + \alpha_2; \quad \alpha_8 = \pi + \alpha_4$$

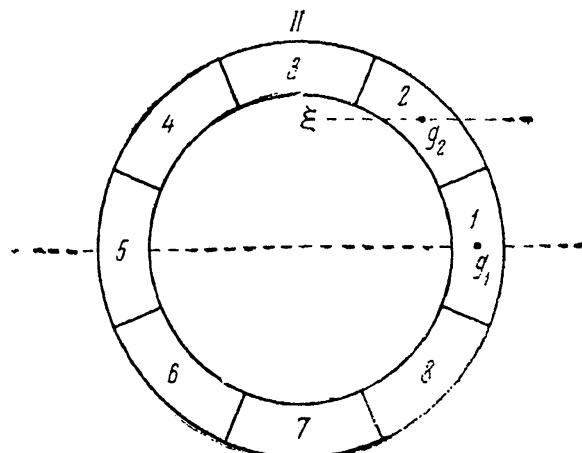
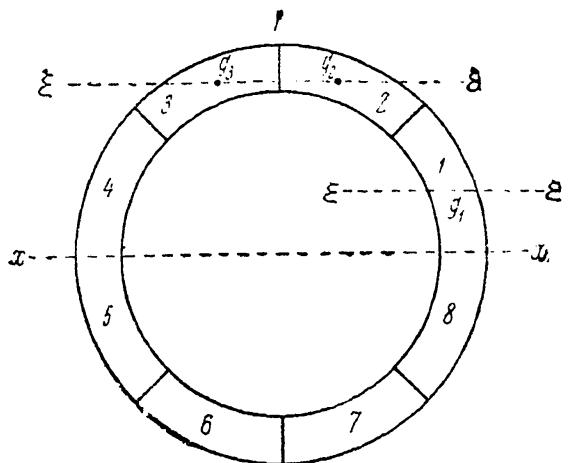
Моменты инерции сегментов, разграниченных показанными перегородками, надо исчислять для каждого сегмента в отдельности, относительно оси  $\xi$ , параллельной оси  $xx_1$ , проводя эту ось через центр тяжести этого сегмента, момент инерции коего вычисляется.

Перенумеровав сегменты, как показано, мы видим, что достаточно исчислить моменты инерции  $I_1$  и  $I_2$  для сегментов № 1 и 2 для фиг. I и моменты инерции  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  для фиг. II.

Полный момент инерции будет:

для фиг. I:

$$2j = 4I_1 + 4I_2$$



для фиг. II:

$$2j = 2I_1 + 4I_s + 2I_s,$$

Но прежде чем исчислять эти моменты, надо составить формулу, выражающую ординату  $y$  для любого сегмента, чтобы, исчислив момент  $I_x$  относительно оси  $xx_1$ , по формуле

$$I_\xi = I_r - Sy^2$$

найти момент соответствующего сегмента относительно оси  $\xi$ .

Мы имеем:

$$\begin{aligned} Sy_k &= \int_r^R \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \rho \sin \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \frac{1}{3} (R^3 - r^3) (\cos \alpha_k - \cos \alpha_{k+1}) \\ S &= \frac{1}{2} (R^2 - r^2) (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \\ y_k &= \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{\cos \alpha_k - \cos \alpha_{k+1}}{\alpha_{k+1} - \alpha_k} \end{aligned}$$

В нашем случае:

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{\pi}{4} \text{ и } S = \frac{\pi}{8} (R^2 - r^2)$$

Для численных расчетов вместо радиусов удобнее ввести диаметры  $D$  и  $d$ , тогда расчетные формулы будут:

$$\begin{aligned} I_{k,x} &= \frac{1}{128} (D^4 - d^4) [(\alpha_{k+1} - \alpha_k) - \sin (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \cos (\alpha_k + \alpha_{k+1})] \\ y_k &= \frac{1}{3} \frac{D^3 - d^3}{D^2 - d^2} \frac{\cos \alpha_k - \cos \alpha_{k+1}}{\alpha_{k+1} - \alpha_k} = \frac{1}{3} \left[ D + \frac{d^2}{D+d} \right] \frac{\cos \alpha_k - \cos \alpha_{k+1}}{\alpha_{k+1} - \alpha_k} \end{aligned}$$

$$I_k = I_{k,x} - Sy_k^2$$

Мы имеем:

$$D = 19,8; d = 16,3; S = 12,4$$

Тогда

$$\frac{1}{128} (D^4 - d^4) = \frac{1}{128} (3,5) (36,1) (394 + 263) = 648$$

$$\frac{1}{3} \frac{D^3 - d^3}{D^2 - d^2} = \frac{1}{3} \left[ 19,8 + \frac{16,3 \cdot 16,3}{36,1} \right] = \frac{1}{3} [19,8 + 7,35] = 9,05$$

и мы получим:

$$(41') \quad I_{k,x} = 648 [(\alpha_{k+1} - \alpha_k) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos (\alpha_k + \alpha_{k+1})]$$

$$(42) \quad y_k = 9,05 \frac{\cos \alpha_k - \cos \alpha_{k+1}}{\frac{\pi}{4}} = 11,5 [\cos \alpha_k - \cos \alpha_{k+1}]$$

$$I_k = I_{k,x} - 12,4 y_k^2$$

Применяя формулы (41') и (42), мы находим:

Для фиг. I,

$$\begin{aligned}I_{1,x} &= 185 \\Y &= 3,48; Sy^2 = 150 \\I_1 &= 185 - 150 = 35 \\I_{2,x} &= 835 \\Y &= 8,17; Sy^2 = 830 \\I_2 &= 835 - 830 = 5 \\2j &= 4 \cdot 35 + 4 \cdot 5 = 160 \text{ см}^4\end{aligned}$$

Для фиг. II:

$$\begin{aligned}I_{1,x} &= 50,8 = I_1 \\I_{2,x} &= 510 \\y &= 6,25; Sy^2 = 485 \\I_s &= 510 - 485 = 25 \\J_s &\approx \frac{1}{12} (1,75)^3 \cdot 7,2 = (1,75)^3 \cdot 0,6 = 3,1 \\2j_{II} &= 2 \cdot 50,8 + 4 \cdot 25 + 2 \cdot 3,1 = 208.\end{aligned}$$

Когда перегородки вполне проницаемы, то

$$2j = \frac{1}{128} (D^4 - d^4) 2\pi = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = 4060 \text{ см}^4$$

Если считать перегородки непроницаемыми, то оказывается, что момент инерции  $2j$  при обоих расположениях настолько мал, что его влияние на изменение периода свободных колебаний практического значения не имеет.

В самом деле, изменение величины  $a_1$  в формуле:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{An}{P_1 a_1 \omega_1}}$$

составило бы:

$$\Delta a_1 = -q \frac{2j}{P}$$

в первом случае

$$\Delta a_1 = -0,9 \frac{160}{8000} = -0,018$$

во втором случае

$$\Delta a_1 = -0,9 \frac{208}{8000} = -0,023$$

А так как  $a_1 = 0,75$  см, то, взяв среднее  $\Delta a_1 = 0,02$

$$\frac{1}{a_1} (a_1 - \Delta a_1) = 1 - \frac{\Delta a_1}{a_1} = 1 - 0,027$$

и значит было бы:

$$T = \tau (1 + 0,014) = 5060 (1 + 0,014) = 5060 + 70 = 5130 \text{ секунд.}$$

Но если перегородки считать вполне проницаемыми, то будет

$$\Delta a_1 = -0,9 \frac{4060}{8000} = -0,457$$

и

$$a_2 = a_1 - \Delta a_1 = 0,75 - 0,457 = 0,293$$

$$T = 5060 \sqrt{\frac{750}{293}} = 8096 \simeq 8100 \text{ сек.}$$

**§ 9.** Когда успокоитель выключен, то уравнение свободных колебаний гироферы есть [см уравнение (35)]:

$$(43) \quad \psi'' + \frac{P_1 a_1 \omega}{A_n} \psi = 0$$

так что период  $\tau$  этих незатухающих колебаний есть

$$(44) \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{A_n}{P_1 a_1 \omega_1}} = 5060 \text{ сек.} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Если гидравлический успокоитель чашечный, то величина  $a$  практически не изменится, но в уравнение (43) вносится член  $2h\psi'$ , так что будет:

$$(45) \quad \psi'' + 2h\psi' + \frac{P_1 a_1 \omega}{A_n} \psi = 0$$

или, положив для краткости

$$(46) \quad \frac{P_1 a_1 \omega_1}{A_n} = \lambda^2$$

$$(47) \quad \psi'' + 2h\psi' + \lambda^2 \psi = 0$$

период свободных колебаний будет:

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2 - h^2}}$$

и погашение размахов

$$c = e^{-h\tau_1/2}$$

Положим

$$\log n \left( \frac{1}{c} \right) = \frac{h}{2} \tau_1 = \beta$$

Тогда будет:

$$\frac{\tau^2}{\tau_1^2} = \frac{\lambda^2 - h^2}{\lambda^2} = 1 - \frac{h^2}{\lambda^2}$$

$$\tau^2 = \tau_1^2 - \frac{\beta^2}{\pi^2} \tau^2$$

следовательно

$$\tau_1^2 = \frac{\pi^2 + \beta^2}{\pi^2} \tau^2$$

т. е.

$$(49) \quad \tau_1 = \frac{\tau}{\pi} \sqrt{\pi^2 + \beta^2}$$

Так, например, пусть  $\frac{1}{\tau} = 3$

Тогда

$$\log n \frac{1}{c} = \beta = 1,0986 \approx 1,1; \quad \beta^2 = 1,21$$

$$\pi^2 = 9,90 \quad \pi^2 + \beta^2 = 11,11$$

$$\tau_1 = \frac{5060}{\pi} \sqrt{11,11} = 1610 \cdot 3,33 = 5370 \text{ сек.}$$

т. е. увеличение периода сравнительно небольшое. Но мы видели, что при кольцевом гидравлическом успокоителе, вследствие переливания жидкости, период

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{An}{P_1 a_2 \omega_1}} = 8100 \text{ сек.}$$

и при погашении  $\frac{1}{c} = 3$

было бы:

$$T_1 = \frac{8100}{\pi} \sqrt{\pi^2 + \beta^2} = 2580 \sqrt{11,11} = 8600 \text{ сек.}$$

При

$$\frac{1}{c} = 6; \quad \beta = 1,791; \quad \beta^2 = 3,22$$

$$T_1 = 2580 \sqrt{13,12} = 9330 \text{ сек.}$$

При

$$\frac{1}{c} = 10; \quad \beta = 2,303; \quad \beta^2 = 5,31; \quad \beta^2 + \pi^2 = 15,21$$

$$T_1 = 2580 \sqrt{15,21} = 10 060 \text{ сек.}$$

Для облегчения вычислений по формуле (49) составлена прилагаемая таблица, в которой по аргументу  $1/c$  показано значение  $\sqrt{\beta^2 + \pi^2}$ .

Очевидно, что когда в формуле

$$(49') \quad \tau_1 = \frac{\pi}{\pi} \sqrt{\pi^2 + \beta^2} = 1610 \sqrt{\pi^2 + \beta^2}$$

Таблица I

$1/c$	$\beta = \log n \frac{1}{c}$	$\beta^2$	$\pi^2 + \beta^2$	$\sqrt{\pi^2 + \beta^2}$
2	0.698	0.487	10.257	3.217
3	1.099	1.208	11.078	3.328
4	1.386	1.921	11.791	3.434
5	1.609	2.589	12.459	3.529
6	1.792	3.211	13.081	3.617
7	1.946	3.787	13.657	3.695
8	2.079	4.322	14.192	3.766
9	2.197	4.827	14.697	3.834
10	2.303	5.304	15.174	3.895
12	2.485	6.180	16.050	4.006
14	2.639	6.964	16.834	4.103
16	2.773	7.690	17.560	4.190
18	2.890	8.352	18.222	4.269
20	2.996	8.976	18.846	4.341

связывающей величины  $\tau_1$ ,  $\tau$ ,  $\beta$ , две из этих величин известны по наблюдениям или по заданию, то третья находится.

Так, из этой формулы следует:

$$(50) \quad \beta = \pi \sqrt{\frac{\tau_1^2}{\tau^2} - 1}$$

значит

$$\text{Log}_{10} \frac{1}{c} = 0,4343 \beta$$

и значит по данным  $\tau$  и  $\tau_1$  находится погашение  $1/c$ . Само собой разумеется, что в формуле (49) можно величину  $\tau = 5060$  сек. заменить величиной  $T = 8100$  сек. и брать

$$(50') \quad T_1 = \frac{8100}{\pi} \sqrt{\pi^2 + \beta^2} = 2580 \sqrt{\pi^2 + \beta^2}$$

и соответственно этому

$$(52) \quad \beta = \pi \sqrt{\frac{T_1^2}{T^2} - 1}$$

Для облегчения вычислений по формулам (49), (50) и (52) составлена табл. II, пользуясь которой по аргументу  $\frac{T_1}{T}$  или  $\frac{\tau_1}{\tau}$  находится величина  $\frac{1}{c}$ .

Таблица II

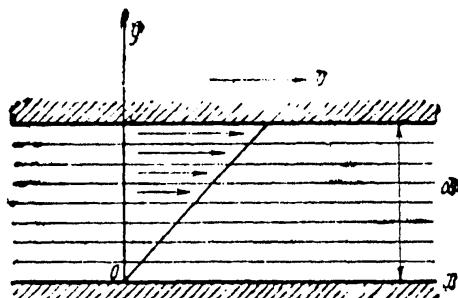
$a$	$b$	$c$	$d$	$f$	$g$
$\frac{\tau_1}{\tau}$ или $\frac{T_1}{T}$	$a^2 - 1$	$\sqrt{b}$	$\beta = \pi \sqrt{b}$	$0,4343 \beta = \log_{10} \frac{1}{c}$	$\frac{1}{c}$
1.005	0.0100	0.1000	0.314	0.1364	1.369
1.010	0.0201	0.1420	0.446	0.4937	1.562
1.020	0.0404	0.2010	0.631	0.2740	1.879
1.030	0.0609	0.2468	0.775	0.3348	2.162
1.040	0.0816	0.2858	0.896	0.3891	2.450
1.050	0.1025	0.3202	1.006	0.4369	2.735
1.075	0.1556	0.3945	1.239	0.5381	3.452
1.100	0.2100	0.4583	1.440	0.6254	4.221
1.125	0.2655	0.5154	1.619	0.7031	5.048
1.150	0.3225	0.5679	1.784	0.7748	5.954
1.200	0.4400	0.6634	2.084	0.9051	8.037
1.250	0.5625	0.7500	2.356	1.023	10.54
1.300	0.6900	0.807	2.610	1.134	13.61
1.350	0.8225	0.9069	2.849	1.237	17.26
1.400	0.9600	0.9798	3.078	1.337	21.73
1.450	1.1025	1.0500	3.299	1.433	27.10
1.500	1.2500	1.1180	3.512	1.525	33.50

### ПРИВЛЕНИЕ

Ввиду того, что нам постоянно приходится пользоваться формулой Пуазейля, приводим вывод этой формулы по книге «The physics of solids and fluids», by P.P. Ewald, Th. Pöschl and L. Prandtl, 1st ed. 1930, London, Blackie and Son.

Все жидкости обладают определенной вязкостью, которая проявляется как внутреннее трение, препятствующее изменению формы. Примерами особенно вязких жидкостей можно указать: мед, глицерин, густые масла и пр.

Чтобы уяснить истинную природу вязкости, начнем с рассмотрения следующего простого примера. Положим, что одна из двух параллельных пластин, разделенных слоем жидкости, движется в своей плоскости со скоростью, тогда как вторая остается неподвижной (фиг. 5). Вследствие трения движение, возбужденное в жидкости, состоит в том, что слои, прилегающие к пластинам, обладают той же самой скоростью, как и самые пластины (жидкость «прилипает» к пластинам), тогда промежуточные слои скользят друг по другу со скоростями  $u$ , пропорциональными их расстоянию до неподвижной пластины, так что



Фиг. 5.

Факт существования трения в жидкости проявляется в наличии силы сопротивления движению верхней пластины, причем сопротивление  $\sigma$ , отнесенное на единицу площади пластины, составляет:

$$\sigma = \mu \frac{v}{d}$$

Более общее представление состоит в следующем. Подобно тому, как в твердом теле и в жидкости при указанном скольжении слоев ее один по другому появляется напряжение сдвига, величина которого составляет:

$$(1) \quad \sigma = X_y = \mu \frac{du}{dy}$$

(здесь  $X_y$  обозначает силу, отнесенную к единице площади, направленную параллельно оси  $x$ -ов и действующую на элементарную площадку, внешняя нормаль к которой параллельна оси  $y$ -ов).

Количество  $\mu$ , размерность которого есть гр · см<sup>-1</sup> · сек<sup>-1</sup> (система С. Г. С), называется коэффициентом внутреннего трения, или вязкости, или просто вязкостью.

На основании выше сказанного мы можем рассмотреть так называемое «ламеллярное, или струйное» движение вязкой жидкости по цилиндрической трубе весьма малого диаметра. Рассмотрим цилиндрический объем жидкости  $ABCD$  (фиг. 6), радиус которого равен  $y$  и длина  $l$ :

Разность давлений  $p_1 - p_2$  дает силу

$$(p_1 - p_2) \pi y^2$$

действующую на указанный объем, в обратную же сторону действует сила трения, равная

$$-2\pi y l \sigma$$

Так как движение предполагается установившимся, то эти силы между собой равны, значит будет:

$$-2\pi y l \sigma = (p_1 - p_2) \pi y^2$$

иначе

$$(2) \quad -\sigma = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{y}{2}$$

Но по формуле (1) отсюда следует:

$$(3) \quad -\mu \frac{du}{dy} = \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{y}{2}$$

Интегрируя, имеем:

$$(4) \quad c_1 - \mu u = \frac{p_1 - p_2}{4l} y^2$$

Постоянная произвольная  $c_1$  определяется по условию, что при  $y=r$  должно быть  $u=0$ , вследствие прилипания жидкости к стенке трубы, значит будет:

$$c_1 = \frac{p_1 - p_2}{4l} r^2$$

следовательно

$$(5) \quad u = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (r^2 - y^2)$$

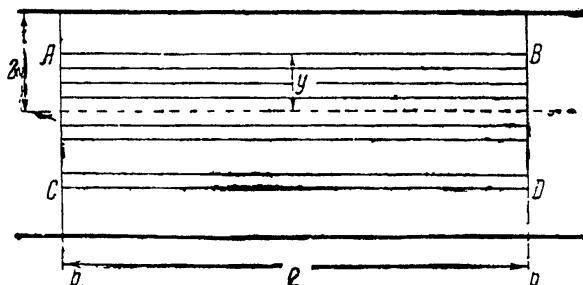
На основании этой формулы мы можем рассчитать количество жидкости, протекающей по трубке в 1 секунду, именно будет:

$$(6) \quad Q = \int_0^r (2\pi y dy) u = \frac{2\pi (p_1 - p_2)}{4\mu l} \int_0^r (r^2 y - y^3) dy = \frac{\pi r^4}{8\mu} \frac{p_1 - p_2}{l}$$

Пользуясь этой формулой, можно найти коэффициент вязкости по наблюдениям.

Формула (6) хорошо согласуется с опытом как в смысле пропорциональности  $r^4$ , т. е. квадрату площади сечения, так и падению напора на единицу длины.

Из этого рассуждения видно, что сила, с которой увлекается трубка, когда по ней течет вязкая жидкость, равна  $\pi r^2 (p_1 - p_2)$ , где  $p_1 - p_2$  есть разность давлений для крайних сечений трубок.



Фиг. 6.

Для гидравлического успокоителя площадь сечения  $\pi r^2$  и разность давлений настолько ничтожны по сравнению с прочими силами, что во всех окончательных формулах § 7 можно полагать  $m = 0$ .

Приведем в заключение значения  $\mu$  для некоторых жидкостей.

Значения  $\mu$  (гр.-масса·см<sup>-1</sup>·сек<sup>-1</sup>) (С. Г. С.)

30

Вода

Темп. в °C	$\mu$	Темп. в °C	$\mu$
10	0.01301	30	0.00800
15	0.01138	35	0.00723
20	0.01006	40	0.00656
25	0.00895	45	0.00599

Ртуть

Темп. в °C	$\mu$	Темп. в °C	$\mu$
0	0.01661	40	0.01483
15	0.01615	99	0.01227
20	0.01547		

Глицерин

Темп. в °C	$\mu$
3	42.20
18	10.69
21	7.78

Бензол

Темп. в °C	$\mu$
20	0.00642
60	0.00389

Эти примеры показывают, насколько разнообразны значения  $\mu$ .

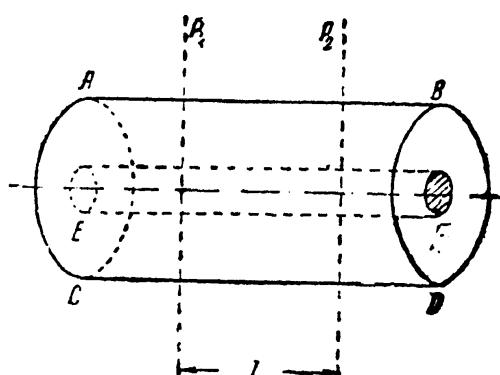
#### ДОПОЛНЕНИЕ К ЗАМЕТКЕ О ФОРМУЛЕ ПУАЗЕЙЛЯ

§ 1. Приведенный выше вывод формулы Пуазейля может быть обобщен и распространен на тот случай, когда по оси трубы, по которой протекает жидкость, помещен сердечник в виде проволоки круглого сечения.

Пусть  $ABCD$  (фиг. 7) есть трубка, внутренний радиус которой есть  $R$  и  $EF$  есть сердечник, наружный радиус которого есть  $r$ . Рассмотрим элементарный цилиндрический слой жидкости длиной  $l$ , наружный радиус которого есть  $r + dr$  и внутренний  $r$ , и положим, что под напором  $p_1 - p_2$  этот слой имеет равномерное установившееся движение параллельно оси цилиндра.

Внутренняя поверхность этого слоя  $s = 2\pi rl$ ; пусть скорость его движения есть  $u$ , тогда сила трения, действующая по внутренней поверхности рассматриваемого слоя, есть:

$$F = -2\pi rl\mu \frac{\partial u}{\partial r} = -2\pi\mu lr \frac{du}{dr}$$



Фиг. 7.

Сила  $F_1$ , действующая на наружную поверхность этого слоя, есть:

$$F_1 = 2\pi\rho l \mu \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ 2\pi\mu l \cdot \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right] d\rho = \\ = 2\pi\mu l \frac{du}{d\rho} + d \left[ 2\pi\mu l \cdot \rho \frac{du}{d\rho} \right]$$

В этих формулах положено  $\frac{du}{d\rho} = \frac{\partial u}{\partial \rho}$ , ибо скорость  $u$  есть функция только одной переменной  $\rho$ , так как движение предполагается установившимся.

Кроме сил  $F_1$  и  $F$ , происходящих от внутреннего трения жидкости, на рассматриваемый слой действует еще напор на основания слоя. Этот напор составляет:

$$2\pi\rho d\rho (p_1 - p_2)$$

Так как движение установившееся, то сумма всех этих трех направленных параллельно оси трубы сил должна быть равна нулю, и мы имеем уравнение:

$$-2\pi\mu l \rho \frac{du}{d\rho} + \left[ 2\pi\mu l \rho \frac{du}{d\rho} + d \left( 2\pi\mu l \rho \frac{du}{d\rho} \right) \right] + \\ + 2\pi\rho d\rho (p_1 - p_2) = 0$$

из которого следует:

$$(1) \quad \mu l d \left( \rho \frac{du}{d\rho} \right) = -\rho \cdot d\rho (p_1 - p_2)$$

Интегрирование этого уравнения дает:

$$(2) \quad \rho \frac{du}{d\rho} = c_1 - \frac{p_1 - p_2}{\mu l} \frac{\rho^2}{2}$$

$$(3) \quad u = c_2 + c_1 \log \rho - \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} \frac{\rho^2}{4}$$

Постоянные произвольные  $c_1$  и  $c_2$  в нашем случае (при наличии сердечника) определяются из условий:

$$(4) \quad (u)_{\rho=r} = 0; \quad (u)_{\rho=R} = 0$$

в предположении полного прилипания жидкости как к поверхности трубы, так и сердечника. Из условий (4) следует:

$$(5) \quad 0 = c_2 + c_1 \log r - \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} r^2$$

$$(6) \quad 0 = c_2 + c_1 \log R - \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} R^2$$

Из уравнений (5) и (6) надо определить  $c_1$  и  $c_2$  и подставить в уравнение (3), иными словами из уравнений (3), (5), (6) надо исключить постоянные  $c_1$  и  $c_2$ , что проще всего выполняется следую-

шим образом: вычитаем из уравнения (3) уравнения (5) и (6), тогда получаем:

$$(7) \quad u = c_1 \log \frac{\rho}{r} + \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (r^2 - \rho^2)$$

$$(8) \quad u = c_1 \log \frac{\rho}{R} + \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (R^2 - \rho^2)$$

Умножив уравнение (7) на  $\log \frac{\rho}{R}$  и вычтя полученное произведение из уравнения (8), умноженного на  $\log \frac{\rho}{r}$ , имеем по упрощении:

$$(9) \quad u \log \frac{R}{r} = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} \left[ R^2 \log \frac{\rho}{r} - r^2 \log \frac{\rho}{R} - \rho^2 \log \frac{R}{r} \right]$$

Это уравнение дает распределение скоростей тока по сечению трубы.

**§ 2.** Количество  $Q$  жидкости, протекающей в единицу времени (секунду), выражается формулой:

$$(10) \quad Q = 2\pi \int_r^R u \rho d\rho$$

причем вместо  $u$  надо брать величину, следующую из уравнения (9). Но мы имеем:

$$\begin{aligned} \int_r^R \rho \log \frac{\rho}{r} d\rho &= \left[ \frac{1}{2} \rho^2 \log \frac{\rho}{r} - \frac{1}{4} \rho^4 \right]_r^R = \\ &= \frac{1}{2} R^2 \log \frac{R}{r} - \frac{1}{4} [R^4 - r^4] \\ \int_r^R \rho \log \frac{\rho}{R} d\rho &= \left[ \frac{1}{2} \rho^2 \log \frac{\rho}{R} - \frac{1}{4} \rho^4 \right]_r^R = \\ &= -\frac{1}{2} r^2 \log \frac{r}{R} - \frac{1}{4} (R^4 - r^4) = \\ &= \frac{1}{2} r^2 \log \frac{R}{r} - \frac{1}{4} (R^4 - r^4) \\ \int_r^R \rho^3 d\rho &= \frac{1}{4} (R^4 - r^4) \end{aligned}$$

На основании формул (9) и (10) получаем:

$$\begin{aligned} (11) \quad Q &= \frac{p_1 - p_2}{2\mu l} \pi \frac{1}{\log \frac{R}{r}} \left\{ \frac{1}{2} R^4 \log \frac{R}{r} - \frac{1}{4} R^2 (R^2 - r^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} r^4 \log \frac{R}{r} + \frac{1}{4} r^2 (R^2 - r^2) - \frac{1}{4} (R^4 - r^4) \log \frac{R}{r} \right\} = \\ &= \pi \frac{p_1 - p_2}{8\mu l} \left[ R^4 - r^4 - \frac{(R^2 + r^2)^2}{\log R - \log r} \right] \end{aligned}$$

Сравним это количество с количеством жидкости  $Q_0$ , протекающей через трубку радиуса  $R$  (без сердечника).

Это количество получается из формулы (11), предполагая, что  $r$  весьма мало, и, переходя к пределу, именно будет:

$$(12) \quad Q_0 = \pi \frac{p_1 - p_2}{8\mu l} R^4$$

как мы имели и раньше (стр. 247).

Формулу (11) можно написать так:

$$(13) \quad Q = \pi \frac{p_1 - p_2}{8\mu l} R^4 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^4 - \frac{\left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^2}{\log \frac{R}{r}} \right] = \\ = Q_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^4 - \frac{\left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^2}{\log \frac{R}{r}} \right]$$

Положим для примера  $R = 3r$ , тогда будет

$$Q = Q_0 \left[ 1 - \frac{1}{81} - \frac{\left( 1 - \frac{1}{9} \right)^2}{\log 3} \right] \approx \frac{80 - 60}{81} \approx \frac{1}{4} Q_0$$

Этот пример показывает, какое значительное влияние оказывает наличие сердечника на количество жидкости, протекающей под заданным напором по трубке.

Приведенный непосредственный вывод формулы Пуазейля гораздо проще обычно помещаемого в руководствах, когда исходят из уравнений Навье движения вязкой жидкости.

Для наглядности сравним распределение скоростей по поперечному сечению трубы с сердечником и без сердечника.

Эти скорости выражаются соответственно формулами:

$$u = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} \frac{1}{\log \frac{R}{r}} \left[ R^2 \log \frac{r}{R} - r^2 \log \frac{R}{r} - r^2 \log \frac{R}{r} \right]$$

и

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} [R^2 - r^2]$$

Положив:

$$k = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} r^2$$

можно эти формулы написать так:

$$(ж) \quad u = k \frac{1}{\log \frac{R}{r}} \left[ \left( \frac{R^2}{r^2} - 1 \right) \log \frac{r}{R} - \left( \frac{r^2}{R^2} - 1 \right) \log \frac{R}{r} \right]$$

$$(жж) \quad v = k \left[ \frac{R^2}{r^2} - \frac{r^2}{R^2} \right]$$

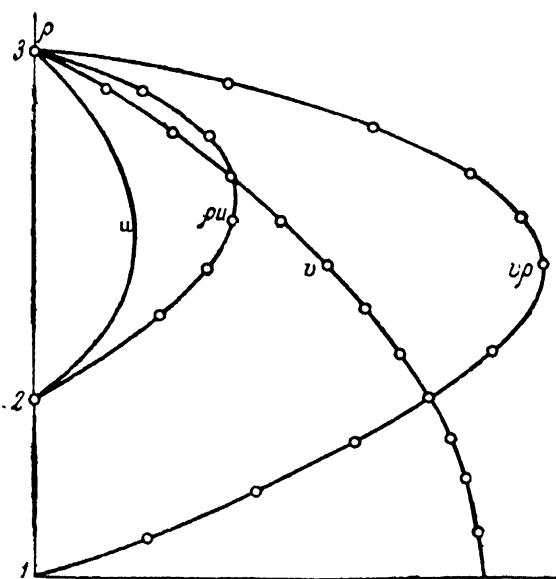
Положим для примера  $R = 3r$ , тогда будет:

$$u = k \cdot 2,096 \left[ 8 \log \frac{r}{R} - \left( \frac{r^2}{R^2} - 1 \right) \log 3 \right] \\ v = k \left( 9 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

В формуле (ж), очевидно, вместо неперовых логарифмов можно брать обыкновенные, тогда:

$$\log 3 = 0,4771; \frac{1}{\log 3} = 2,096$$

Само собой разумеется, что для сравнения достаточно вычислить величины  $\frac{u}{k}$  и  $\frac{v}{k}$  и представить их графически.



Фиг. 8.

Кроме того для наглядного сравнения количества протекающей в одинаковое время и при одинаковом напоре жидкости надо вычислить и представить графически величины

$$\frac{\rho}{r} \cdot \frac{u}{k} \text{ и } \frac{\rho}{r} \cdot \frac{v}{k}$$

Это вычисление располагается следующим образом:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\frac{\rho}{r}$	$\frac{\rho^2}{r^2}$	$(2)-1$	$\log \frac{\rho}{r}$	$(4) \cdot 8$	$(3) \cdot \log 3$	$(5)-(6)$	$\frac{u}{k} =$ $(7) \cdot 2,096$	$\frac{v}{k} =$ $9-(2)$	$\frac{\rho}{r} \frac{u}{k}$	$\frac{\rho}{r} \frac{v}{k}$
0.00	0.00	—	—	—	—	—	0.00	9.00	0.00	0.00
0.25	0.06	—	—	—	—	—	0.00	8.94	0.00	2.24
0.50	0.25	—	—	—	—	—	0.00	8.75	0.00	4.38
0.75	0.56	—	—	—	—	—	0.00	8.44	0.00	6.33
1.00	1.00	0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00	8.00	0.00	8.00
1.25	1.56	0.56	0.6969	0.775	0.267	0.508	1.06	7.44	1.32	9.30
1.50	2.25	1.25	0.1761	1.409	0.596	0.813	1.70	6.75	2.55	10.12
1.75	3.06	2.06	0.2430	1.944	0.983	0.961	2.01	5.94	3.52	10.40
2.00	4.00	3.00	0.3010	2.408	1.431	0.977	2.05	5.00	4.10	10.00
2.25	5.06	4.06	0.3522	2.818	1.937	0.881	1.85	3.94	4.16	8.86
2.50	6.25	5.25	0.3979	3.183	2.505	0.678	1.42	2.75	3.55	6.87
2.75	7.56	6.56	0.4393	3.514	3.130	0.384	0.80	1.44	2.20	3.96
3.00	9.00	8.00	0.4771	3.817	3.817	0.000	0.00	0.00	0.00	0.00

Графическое представление этих величин дано на фиг. 8.

## О ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЯХ ГИРОСФЕРЫ

**§ 1.** Пусть имеется материальная система, колеблющаяся в среде, сопротивление которой пропорционально 1-й степени скорости, так что уравнение движения есть:

$$(1) \quad Iy'' + 2Ny' + Ky = F \sin pt$$

где  $I$  — момент инерции системы,  $2N$  — коэффициент сопротивления,  $K$  — статический момент,  $y$  — угол отклонения,  $F$  — наибольшее значение возмущающей силы.

По разделении на  $I$ , получим

$$(2) \quad y'' + 2hy' + n^2y = \frac{F}{I} \sin pt$$

причем положено:

$$(3) \quad 2h = \frac{2N}{I}; \quad n^2 = \frac{K}{I}$$

Если бы система была в равновесии и покое, то *статическое* ее отклонение  $y_0$  от положения равновесия определяется равенством:

$$Ky_0 = F$$

так что

$$(4) \quad y_0 = \frac{F}{K}$$

На основании равенств (3) и (4) уравнение (2) напишется

$$(5) \quad y'' + hy' + n^2y = n^2y_0 \sin pt$$

**§ 2.** Соответствующее уравнению (5) однородное уравнение есть

$$(6) \quad u'' + 2hu' + n^2u = 0$$

с рассмотрения которого и начнем.

Положим:

$$(7) \quad u = e^{-ht} z$$

тогда имеем равенства:

$u = e^{-ht} z$	$n^2$
$u' = e^{-ht} (z' - hz)$	$2h$
$u'' = e^{-ht} (z'' - 2hz' + h^2z)$	$1$

Умножив эти равенства соответственно на  $n^2$ ,  $2h$  и 1 и сложив, получим

$$u'' + 2hu' + n^2u = z'' + (n^2 - h^2)z = 0$$

Таким образом видим, положив

$$(8) \quad n^2 - h^2 = n_1^2$$

что  $z$  определяется уравнением:

$$(9) \quad z'' + n_1^2z = 0$$

общий интеграл которого можно писать или в виде

$$(10) \quad z = c_1 \cos n_1 t + c_2 \sin n_1 t$$

или же в равносильном (10) виде:

$$(11) \quad z = C \cos(n_1 t - \varphi)$$

причем в уравнении (10)  $c_1$  и  $c_2$  суть произвольные постоянные, а в уравнении (11)  $C$  и  $\varphi$  суть произвольные постоянные.

Связь между этими постоянными очевидно такова:

$$(12) \quad C \sin \varphi = c_2; \quad C \cos \varphi = c_1$$

так что, взяв

$$C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

имеем для фазового угла  $\varphi$  равенства:

$$(13) \quad \sin \varphi = \frac{c_2}{C}; \quad \cos \varphi = \frac{c_1}{C}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{c_2}{c_1}$$

которыми при задании  $c_1$  и  $c_2$  этот угол вполне определяется, т. е. как по величине, так и по четверти, в которой его надо брать.

На основании равенств (7) и (11) имеем:

$$(14) \quad u = Ce^{-ht} (\cos n_1 t - \varphi)$$

§ 3. Если бы система колебалась в среде, сопротивления не оказывавшей, или вообще поглощающей размахи сопротивление было выключено, то было бы  $h=0$ , и уравнение (6) имело бы вид:

$$(15) \quad v'' + n^2v = 0$$

общий интеграл которого можно написать в виде

$$(16) \quad v = A \cos(nt - \omega)$$

в котором вместо буквы  $u$  написано  $v$ .

Сличим же движение, представляющее уравнением (14), с движением, представляемым уравнением (16), при одинаковых начальных условиях, а именно:

при  $t=0$  должно быть:

$$(17) \quad \begin{aligned} v &= a; & v' &= 0 \\ u &= a; & u' &= 0 \end{aligned}$$

Из этих условий следует:

$$a = A \cos \omega; \quad 0 = A \sin \omega$$

значит:

$$(18) \quad A = a; \quad \omega = 0$$

т. е. будет:

$$(19) \quad v = a \cos nt$$

Для определения  $C$  и  $\varphi$  имеем:

$$a = C \cos \varphi; \quad 0 = C [-h \cos \varphi + n_1 \sin \varphi]$$

иначе:

$$C \cos \varphi = a$$

$$h \cos \varphi = n_1 \sin \varphi$$

Второе из этих уравнений дает:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{n_1}$$

и так как очевидно, что  $h$  и  $n_1$  величины положительные, то будет:

$$0 < \varphi < 90^\circ$$

$$(20) \quad \cos \varphi = \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + h^2}} = \frac{n_1}{n}; \quad \sin \varphi = \frac{h}{\sqrt{n_1^2 + h^2}} = \frac{h}{n}$$

ибо  $n_1^2 = n^2 - h^2$  по уравнению (8).

Затем:

$$(21) \quad C = \frac{a}{\cos \varphi} = \frac{an}{n_1}$$

Таким образом будет:

$$(22) \quad u = \frac{an}{n_1} e^{-ht} \cos(n_1 t - \varphi)$$

#### § 4. Очевидно, что уравнение

$$(19) \quad v = a \cos nt$$

представляет простое гармоническое колебание с периодом

$$(23) \quad \tau = \frac{2\pi}{n}$$

с величиной  $a$  размаха на каждую сторону и начальной фазой равной нулю, что ясно видно, написав это уравнение в виде:

$$(24) \quad v = a \cos \frac{2\pi t}{\tau}$$

Полагая

$$(25) \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{n_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{n^2 - h^2}}$$

напишем уравнение (22) в виде:

$$(26) \quad u = \frac{an}{n_1} e^{-ht} \cos \left( \frac{2\pi t}{\tau_1} - \varphi \right)$$

Придавая  $t$  последовательно значения

$$0, \frac{\tau_1}{2}, \tau_1, \frac{3\tau_1}{2}, 2\tau_1 \dots$$

и заметив, что на основании равенства (20) будет

$$\frac{an}{n_1} \cos \varphi = a$$

получим соответственно:

№ размаха на сторону	$t$	Элонгация
0	0	$a = u_0$
1	$\tau_1/2$	$ae^{-ht_1/2} = u_1$
2	$\tau_1$	$ae^{-ht_1} = u_2$
3	$3\tau_1/2$	$-ae^{-3ht_1/2} = u_3$
4	$2\tau_1$	$+ae^{-2ht_1} = u_4$
5	$5\tau_1/2$	$-ae^{-5ht_1/2} = u_5$
6	$3\tau_1$	$+ae^{-8ht_1} = u_6$

т. е. размахи уменьшаются в геометрической прогрессии, знаменатель которой есть  $e^{-ht_1/2}$ .

Рассматривая лишь абсолютную величину элонгации и взяв неперов логарифм, имеем:

$$\log u_j = \log a - \frac{jht_1}{2}$$

или, полагая

$$\frac{ht_1}{2} = \Delta$$

получим

$$(27) \quad \log u_j = \log a - j\Delta$$

Пользуясь же обычновенными десятичными логарифмами и положив

$$0,43429 \Delta = \delta$$

или

$$(28) \quad \delta = 2,30259 \Delta$$

получим:

$$(29) \quad \log u_f = \log a - j\delta$$

Вычисление по этой формуле будет показано ниже.

Найдем еще те значения времени  $t$ , при которых величина  $u$  обращается в нуль. Очевидно, первое из этих значений  $t_1$  определяется из равенства:

$$2\pi \frac{t_1}{\tau_1} = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

откуда

$$t_1 = \frac{\tau_1}{4} + \tau_1 \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\tau_1}{4} + \tau_1 \frac{\varphi^o}{360}$$

Остальные значения получаются прибавляя  $\frac{\tau_1}{2}$  к этому первому.

**§ 5.** Из формулы (25) видно, что

$$\tau_1 > \tau_0$$

т. е. наличие сопротивления не только вносит погашение размахов, но и удлиняет период их. Положим, что имеются значения:

$$a, \tau_0, \tau_1$$

требуется определить  $h$  и вычислить последовательные значения:

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_j$$

Из соотношений:

$$(23) \quad \tau_0 = \frac{2\pi}{n}$$

$$(25) \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{n^2 - h^2}}$$

следует:

$$n^2 \tau_0^2 = 4\pi^2$$

$$n^2 \tau_1^2 = 4\pi^2 + h^2 \tau_1^2$$

Значит будет:

$$h^2 = \frac{n^2}{\tau_1^2} (\tau_1^2 - \tau_0^2) = \frac{4\pi^2}{\tau_1^2} \left( \frac{\tau_1^2}{\tau_0^2} - 1 \right)$$

Следовательно:

$$(30) \quad k = \frac{2\pi}{\tau_1} \sqrt{\frac{\tau_1^2}{\tau_0^2} - 1} = \frac{2\pi}{\tau_0 \tau_1} \sqrt{(\tau_1 - \tau_0)(\tau_1 + \tau_0)}$$

Вместе с тем величина:

$$(31) \quad \Delta = \frac{h\tau_1}{2} = \pi \sqrt{\left( \frac{\tau_1}{\tau_0} \right)^2 - 1} = \frac{\pi}{\tau_0} \sqrt{(\tau_1 - \tau_0)(\tau_1 + \tau_0)}$$

$$(32) \quad \delta = 0.43429 \cdot \Delta$$

Формула (31) показывает, что «логарифмический декремент  $\Delta$ , а значит, и  $\delta$  зависит лишь от отношения периодов  $\tau_1/\tau_0$ , а не от самих периодов.

Очевидно, что формула (32) может быть написана так:

$$(32') \quad \delta = 0,43429\pi \sqrt{\frac{\tau_1^2}{\tau_0^2} - 1} = 1,3643 \sqrt{\frac{\tau_1^2}{\tau_0^2} - 1}$$

Отсюда следует:

$$(32'') \quad \delta^2 = 1,8615 \left( \frac{\tau_1^2}{\tau_0^2} - 1 \right)$$

Вместо величины  $\delta$  часто удобнее брать «делитель»  $D$ , связанный с  $\delta$  соотношением:

$$D = 10^{\frac{\delta^2}{2}}$$

т. е.

$$\log D = \frac{\delta^2}{2}$$

Значит

$$2 \log D = \delta^2 = 1,8615 \left( \frac{\tau_1^2}{\tau_0^2} - 1 \right)$$

$$(32''') \quad \log 1,8615 = 0,26986$$

Отсюда по заданному делителю  $D$  сейчас же находится отношение периодов  $\tau_1 / \tau_0$ .

Так, например, пусть:

$$D = 4$$

так что  $\lg D = 0,60206$ , тогда будем:

$$\begin{aligned} 1,20412 &= 1,8615 \left[ \frac{\tau_1^2}{\tau_0^2} - 1 \right] \\ \frac{\tau_1^2}{\tau_0^2} &= \frac{3,0656}{1,8615} \quad \lg 3,0656 = 0,48651 \\ &\quad \text{согл } 1,8615 = \overline{1},73014 \\ 2 \log \frac{\tau_1}{\tau_0} &= 0,21655 \\ \frac{\tau_1}{\tau_0} &= 1,2831 \quad \log \frac{\tau_1}{\tau_0} = 0,10827 \end{aligned}$$

т. е. при  $\tau = 5000$  секунд было бы  $\tau_1 = 6415$  секунд.

**§ 6.** При испытании гиросфера получилось, что при периодах  $\tau_0 \approx 5000$  сек. и  $\tau_1 = 10000$  сек. делитель  $D$  составлял около 4, если же его рассчитать по формуле:

$$2 \log D = 1,8615 \left[ \left( \frac{\tau_1}{\tau_0} \right)^2 - 1 \right]$$

то получится

$$2 \log D = 1,8615 \cdot 3 = 5,5845$$

$$\lg D = 2,7922$$

$$D = 620$$

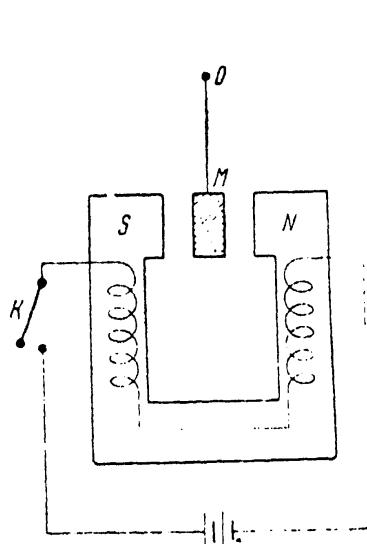
это грубое противоречие между действительностью и вышеприведенными расчетами показывает, что в этих расчетах упущен из виду какой-либо весьма существенный фактор, влияющий на увеличение периода колебаний.

Когда мы для свободных колебаний берем уравнения:

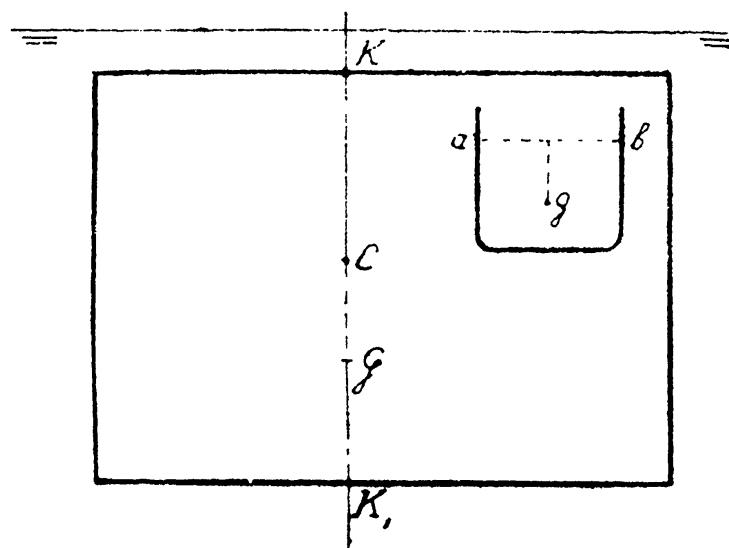
без сопротивления . . . . .  $u'' + n^2 u = 0$

с сопротивлением . . . . .  $u'' + 2hu' - n^2 u = 0$

то этим самым мы предполагаем, что кроме включения сопротивляющейся движению силы никаких других изменений в системе не происходит. Так, например, если маятник  $M$  (фиг. 1) колеблется в пло-



Фиг. 1



Фиг. 2

скости, перпендикулярной к плоскости чертежа между полюсами электромагнита (маятник Араго), то, замыкая или размыкая ключ  $K$ , мы или вводим сопротивление (происходящее от токов Фуко) или уничтожаем таковое, не внося никаких изменений в самую колеблющуюся систему, т. е. в маятник  $M$ .

Совершенно не то имеет место с гиросферой.

В самом деле при расчете периода  $\tau_0$  по формуле

$$(33) \quad \tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{An}{PH \omega \cos \lambda}}$$

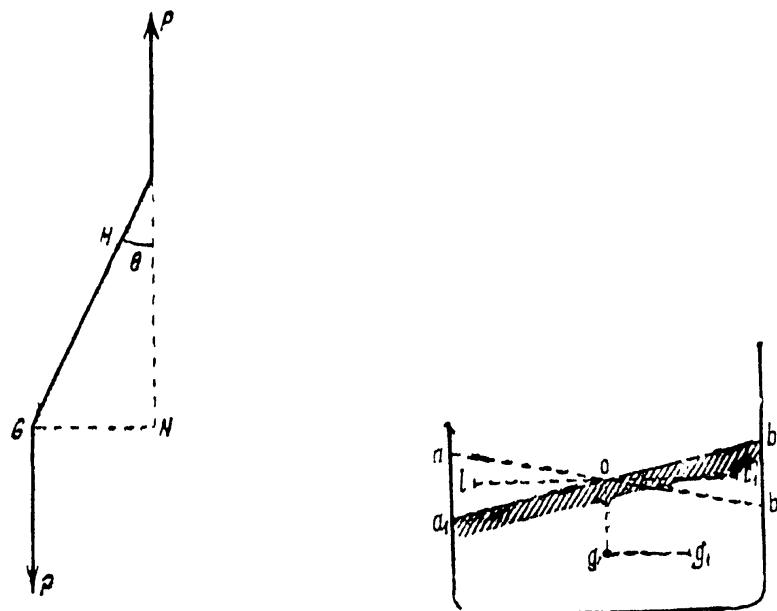
где  $An$  — кинетический момент гироскопов,  $P$  — вес гиросферы,  $H$  — расстояние от центра тяжести  $G$  гиросферы до центра фигуры (то, что

в теории корабля называется центр величины или центр плавучести); то предполагается, что в гиро сфере никаких перемещений грузов при качаниях не происходит.

Когда затем рассматриваются качания с погашением, то опять-таки учтено лишь вызываемое трением жидкости о стенки систерны погашение и соответствующее ему увеличение периода, и не учитывается влияние перемещения жидкости на увеличение периода колебаний; между тем оно весьма существенно и в несколько раз превышает первое.

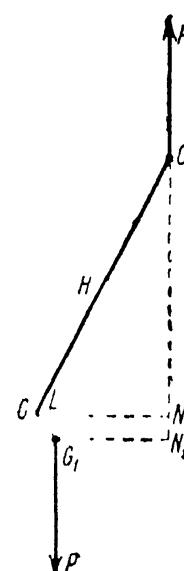
В самом деле пусть дано тело  $KK_1$ , центр тяжести которого  $G$  и центр величины  $C$  (фиг. 2). Положим, что в этом теле есть цилиндрическая система с жидкостью плотности (вес 1 объема)  $q$ , имеющая свободную поверхность  $ab$ .

Положим, что на это тело действует кренящий момент  $M$  (фиг. 3) и что жидкость затвердела (заморожена), так что при крене центр



Фиг. 3

Фиг. 4



Фиг. 5

тяжести ее  $G$  не перемещается, тогда тело накренится на такой угол  $\theta$ , при котором восстанавливающий момент равен кренящему, т. е.

$$PH \sin \theta = M$$

или при малых углах  $\theta$

$$(34) \quad PH\theta = M$$

Положим теперь, что жидкость оттаяла, и посмотрим, каково будет новое положение равновесия или угла крена  $\theta_1$ .

При наклонении на угол  $\theta$ , уровень жидкости будет  $a_1b_1$ , и центр тяжести ее переместится (фиг. 4) из точки  $g$  в точку  $g_1$  параллельно линии  $ll_1$ , где  $l$  и  $l_1$  суть центры тяжести клиновых отсеков  $aOa_1$  и  $bOb_1$ .

Это перемещение, как не трудно показать, будет, с точностью до членов первого порядка относительно  $\theta_1$ , равно

$$gg_1 = i \frac{q}{p}$$

где  $i$  есть момент инерции площади  $ab$  свободной поверхности жидкости, относительно ее оси  $O$ , параллельной оси наклонения тела, и  $p$  есть вес жидкости в системе. Линия  $gg_1$  параллельна  $ll_1$ , т. е. в пределе она параллельна  $ab$ . Соответственно перемещению  $gg_1$  центр тяжести тела переместится параллельно  $gg_1$  в точку  $G_1$  (фиг. 5) и плечо востанавливающей пары будет не  $GN$ , как было при замороженной жидкости, а будет:

$$G_1N_1 = GN - GG_1 \cos(G_1GL)$$

При малости угла  $G_1GL$  будет:

$$\cos(G_1GL) = 1$$

Значит:

$$G_1N_1 = GN - GG_1$$

Но

$$GG_1 : gg_1 = p : P$$

Отсюда

$$GG_1 = \frac{p \cdot gg_1}{P} = \frac{iq}{P}$$

Таким образом условие равновесия будет:

$$P(GN - GG_1) = M$$

или иначе

$$(35) \quad P \left[ H\theta_1 - \frac{iq}{P} \theta_1 \right] = P \left[ H - \frac{iq}{P} \right] \theta_1 = M$$

Это уравнение совершенно подобно уравнению (34), только вместо величины  $H$  стоит величина

$$(36) \quad H_1 = H - \frac{iq}{P}$$

где, повторяем,  $i$  есть момент инерции площади  $ab$ , представляющей свободную поверхность жидкости, и  $q$  — вес единицы (куб. см.) объема.

Таким образом при включении гидравлического успокоителя вместо периода  $\tau_0$ , рассчитываемого по формуле (33)

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{An}{PH_\infty \cos \lambda}}$$

надо брать период

$$(37) \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{A_n}{PH_1 \omega \cos \lambda}}$$

иначе

$$(37') \quad T_0 = \tau_0 \sqrt{\frac{H}{H_1}} = \tau_0 \sqrt{\frac{H}{H - C}}$$

где

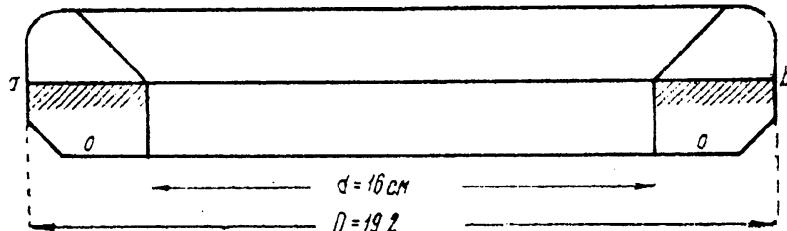
$$(37'') \quad C = \frac{iq}{P}$$

и уже, исходя из этого удлиненного периода, надо по приведенным выше формулам рассчитывать погашение размахов и их последовательные амплитуды.

В формуле (36), или, что то же, в (37) предположено, что поверхность жидкости в системе *вполне свободна*, что система не перегорожена *глухими* переборками и что вообще перетекание жидкости ничем не стеснено.

Если же есть подразделение системы *глухими* переборками, то для каждой части надо в отдельности рассчитать величину  $\frac{iq}{P}$  и затем, взяв сумму, рассчитать  $C$ .

Влияние *проницаемых* перегородок можно приближенно рассчитать, умножив  $C$  на некоторую *правильную* дробь  $\epsilon$ , и брать в формуле (37')



Фиг. 6

вместо  $C$  величину

$$C_i = C_0$$

В гиросфере геометрические размеры успокоителя даны на фиг. 6. Для кольцевой площади  $ab$ :

$$i = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64} (D - d)(D + d)(D^2 + d^2)$$

В нашем случае будет:

$$i = \frac{\pi}{64} 3,2 \cdot 35,2 \cdot (369 - 256) = \frac{\pi}{20} \cdot 35,2 \cdot 625 = 3460$$

Полагая:

$$q = 1,00; \quad P = 8000; \quad \varepsilon = 1$$

имеем

$$C = \frac{3460}{8000} = 0,433 \text{ см}$$

Значит:

$$H = 0,750$$

$$H_3 = 0,317$$

Таким образом будет при  $\tau_0 = 5000$ :

$$T_0 = 5000 \sqrt{\frac{750}{317}} = 5000 \sqrt{2,37} = 5000 \cdot 1,54 = 7700 \text{ сек.}$$

Следовательно, для случая

$$\tau_1 = 10\,000; \quad T_0 = 7700$$

будет:

$$2 \log D = 1,8615 \left[ \left( \frac{10\,000}{7700} \right)^2 - 1 \right] = 1,8615 [(1,3)^2 - 1] = 4,285$$

$$\lg D = 0,6425; \quad D = 4,39$$

что даже довольно близко сходится с действительностью.

---

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
От комиссии по изданию полного собрания трудов академика А. Н. Крылова	3
О земном магнетизме . . . . .	7
Компасное дело . . . . .	
Возмущения показаний компаса, происходящие от качки корабля на волнении . . . . .	153
Вычисление делений сил дефлектора компаса . . . . .	193
Об использовании Курской магнитной аномалии для достижения на самолетах и дирижаблях полного уничтожения девиации компаса, т. е. такого, что она остается уничтоженной для всех мест земной поверхности при всякой высоте полета . . . . .	211
О баллистической погрешности гирокомпаса (без успокоителя) . . . . .	215
О баллистической погрешности гирокомпаса, снабженного гидравлическим успокоителем . . . . .	223
Прибавление (Выход формулы Пуазейля) . . . . .	245
Дополнение к заметке о формуле Пуазейля . . . . .	248
О затухающих колебаниях гиросферы . . . . .	253

---

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Академии Наук СССР

А-00686. Подписано и печати 1/II 1947 г.

Формат бум. 70×108<sup>1/16</sup>. Печ. л. 16,5+8 вкл. Уч.-изд. 22. Тир. 1000

---

Набрано в 16-й типографии треста „Полиграф книга“ Огиза при Совете Министров Союза ССР. Москва. Трехпрудный пер., д. 9.

---

Отпечатано с матриц по 2-й типографии Издательства Академии Наук Союза ССР  
Москва. Шубинский пер., д. 10. Зав. 3558

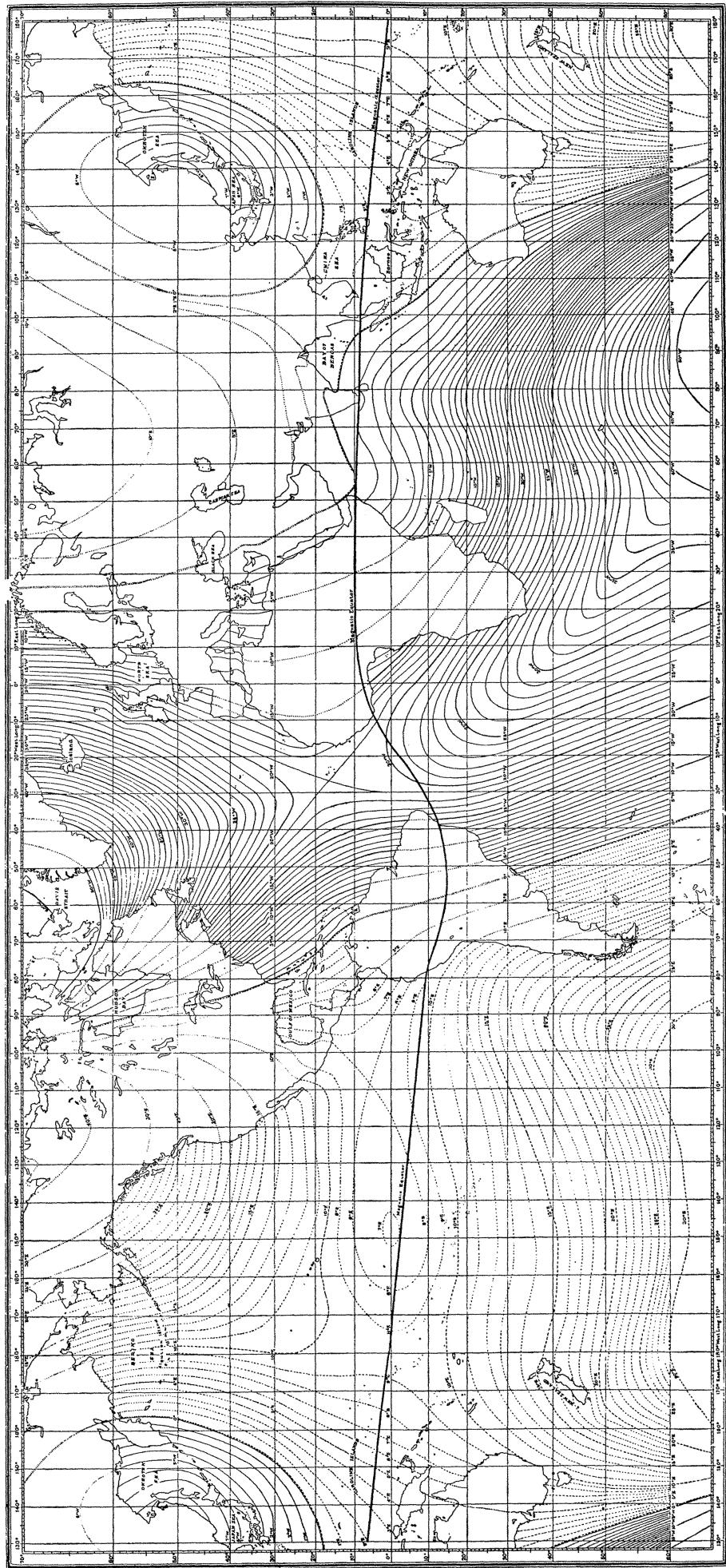
О П Е Ч А Т К И

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
41	4 сн.	$\int_0^b x^2 f(x) dx$	$b^2 \int_0^b x f(x) dx$
41	8 сн.	$= 2 \int_0^b x^3 f(x) dx =$	$= 2 \int_0^b x^3 f(x) dx =$
45	11 сн.	$\left[ \frac{n}{r^{n+2}} + \right.$	$\left[ \frac{n}{r^{n+1}} + \dots \right.$
71	6 сн.	$+ \frac{Q}{r}$	$+ \frac{Q_1}{r}$
84	13 св.	$+ [-147.439]$	$+ [-147.439]$
99	4 св.	сеодолит	теодолит
132	6 св.	$\delta_1 = \frac{u'}{2} +$	$\delta_1 = \frac{u'_1 + u''_1}{2}$
133	3 св.	$ t  m  A  m  $ $= nh$	$ t  m  A  Am  $ $x = nh$
149	1 сн.	$\int_0^1$	
172	10 св.	$ 1 \Phi  - \zeta_1 $	$ 1 \Phi  - \Psi $
183	{ 7 сн.	$\sin(kt + \varepsilon - \varepsilon_1)$	$\sin(kt + \varepsilon + \varepsilon_1)$
	11 сн.	$E \operatorname{tg} t$	$E \operatorname{tg} i$
184	13 св.	$(a_e h_e \Psi)$	$(a_e + h_e \Psi)$
217	10 св.	$\frac{2\pi t}{\tau}$	$\frac{2\pi t}{\sigma}$
230	12 св.	$\sqrt{\frac{An}{P_1 a_2 \omega_1}}$	$\sqrt{\frac{An}{P_1 a_2 \omega_1}}$
233	14 св.	$\psi = 0$	$\psi' = 0$
	{ 3 сн.	$\int_{d_1}^{d_2}$	$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}$
238	{ 3 сн.	$\frac{1}{4} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}$	$\frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}$
	2 сн.	$= \frac{1}{8} R^4 [(\alpha_2 - \alpha_1) =$	$= \frac{1}{8} R^4 [(\alpha_2 - \alpha_1) -$
241	1 сн.	$- 12,4 y_k^k$	$- 12,4 y_k^2$
256	1 сн.	$\delta = 2,30259 \Delta$	$\Delta = 2,30259 \delta$
	{ 2 св.	$\log u_j$	$\log u_j$
	9 св.	$t_1 = \frac{\tau_1}{4}$	$t_1 = \frac{\tau_1}{4}$
257	{ 4 сн.	$k =$	$h =$
	4 сн.	$\sqrt{(\tau_1 - \tau_0)(\tau_1 + \tau_0)}$	$\sqrt{(\tau_1 - \tau_0)(\tau_1 + \tau_0)}$
	{ 10 св.	$\delta^2 = 10^{\frac{1}{2}}$	$10^{\frac{1}{2}}$
258	14 св.	$\delta^2 = 1,8615$	$\delta^2 = 1,8615$
263	5 сн.	$\tau_1 = 10000$	$\tau_1 = 10000$

По техническому недосмотру стр. 193 и стр. 194 повторена дважды.



**Линии равного склонения  
(изогониесис)**

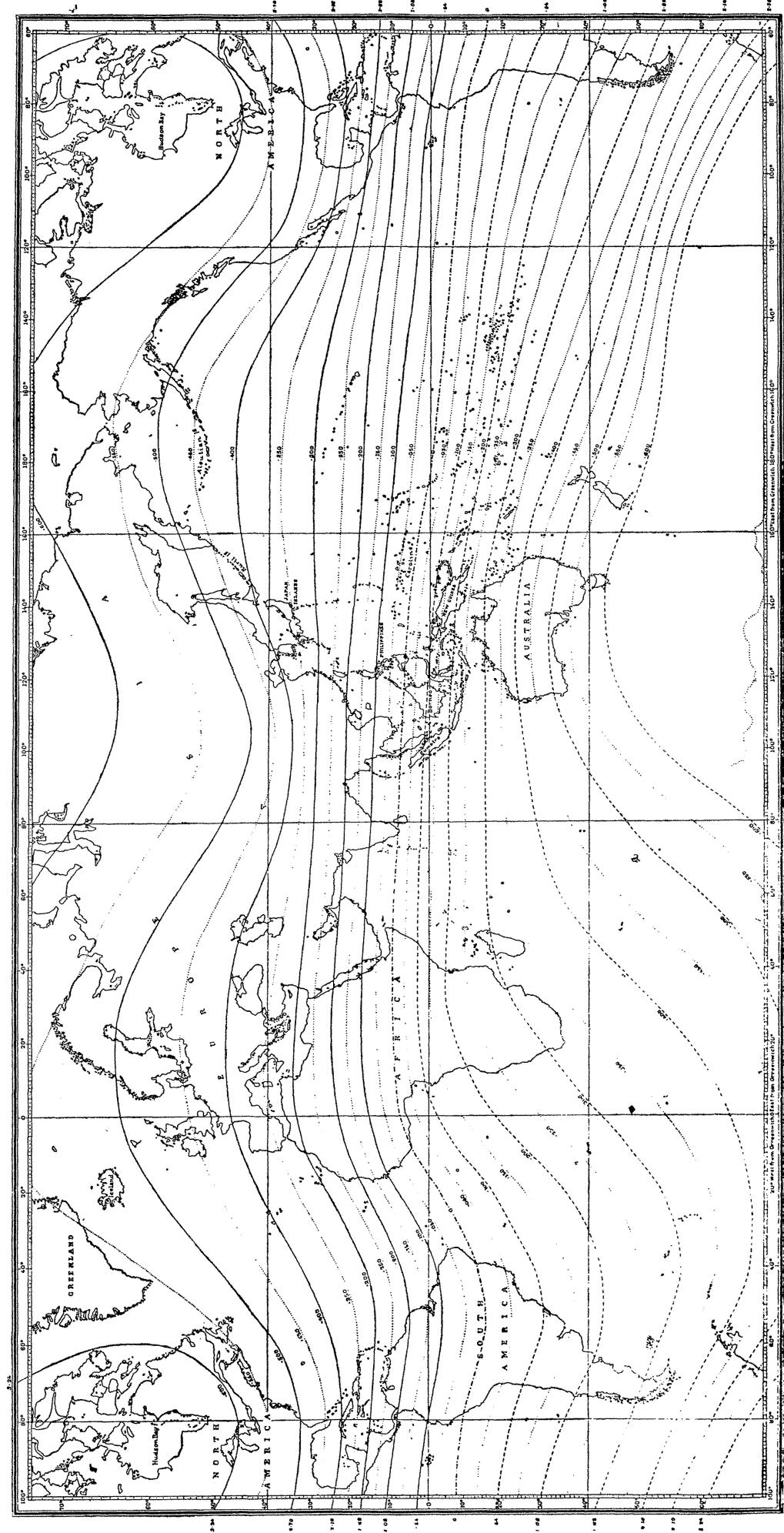


С карты, изданной Адмиралтейством для 1907 года



**Линии равного магнитного наклона**

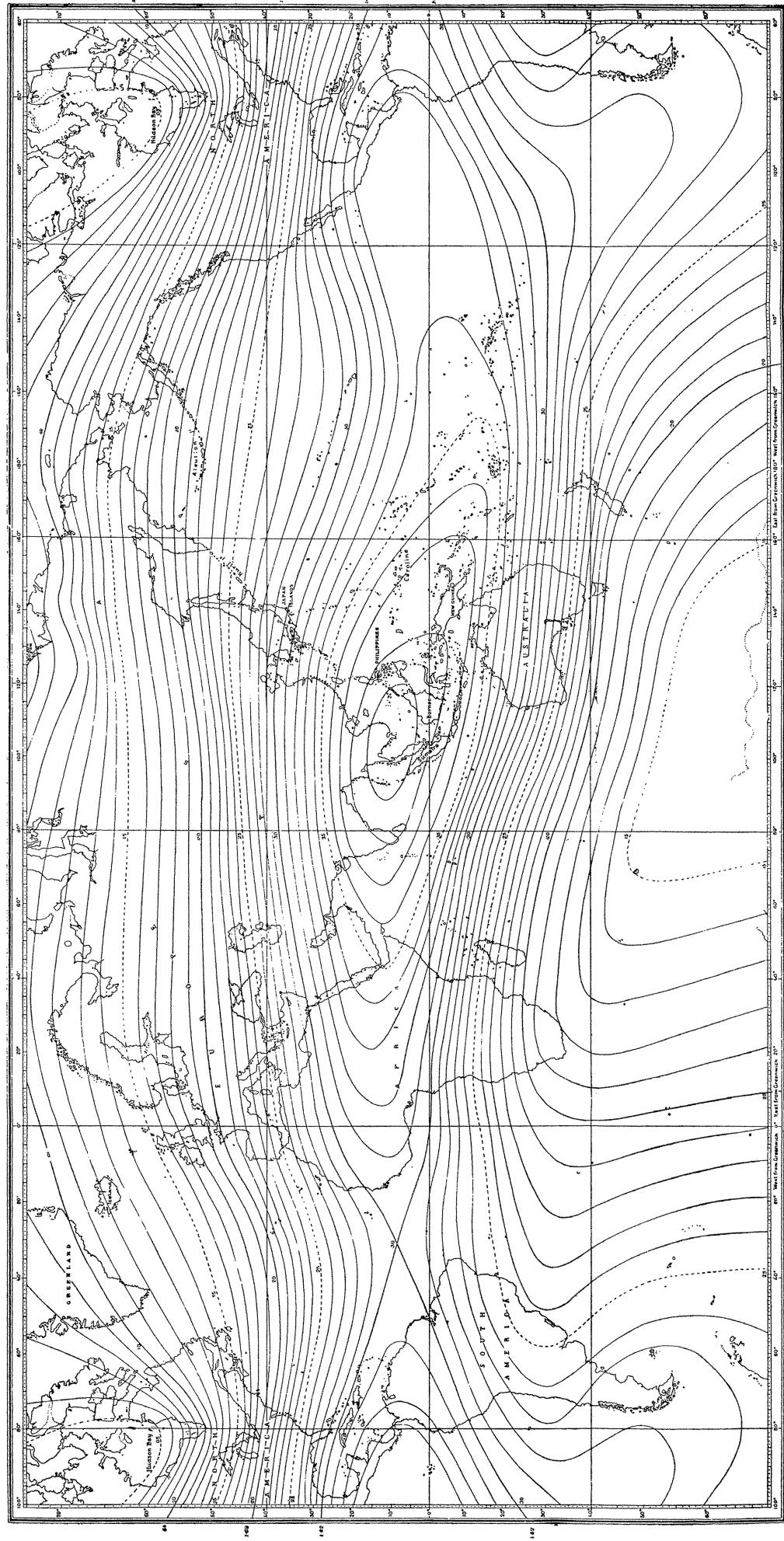
(изоглифы)



С картой, изданной Адмиралтейским Адмиралтейством для 1907 года



Линии равной горизонтальной магнитной силы в CGS  
(изодинамическое)



С карты, изданной Адмиралтейством для 1907 года.