АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СОБРАНИЕ ТРУДОВ АКАДЕМИКА А. Н. КРЫЛОВА

III

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА · ЛЕНИНГРАД

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СОБРАНИЕ ТРУДОВ

АКАДЕМИКА

А. Н. КРЫЛОВА

III

МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1949 ЛЕНИНГРАД

Ответственный редактор
академик В. И. СМИРНОВ

СОДЕРЖАНИЕ

Глава IV

Механические приборы для вычисления определенных интегралов

Глава V

Разложение функций в тригонометрические ряды

Глава VI

Формулы, выражающие связь между суммою и интегралом, разностями и производными. Формулы интерполирования

Глава VII

Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений

Глава VIII

Способ наименьших квадратов

ОТ РЕДАКЦИИ

„Лекции о приближенных вычислениях" перепечатываются по последнему изданию, вышедшему в 1935 г. Текст был пересмотрен, исправлены замеченные опечатки и в некоторых местах внесены несущественные редакционные изменения в изложение; эти места отмечены звездочками. В подготовке настоящего тома к изданию принимали участие проф. Н. И. Идельсон, проф. К. В. Меликов и акад. В. И. Смирнов.

18 февраля 1948 г.

ЛЕКЦИИ
О ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Заключающийся в этой книге курс лекций о приближенных вычислениях был прочитан мною в 1906 г. небольшому кружку лиц, собиравшихся в помещении гимназии К. Мая и образовавших вольный математический факультет, руководимый проф. Н. М. Гюнтером. Этот курс тогда же был отлитографирован в ограниченном числе экземпляров, которые вскоре и разошлись.

В настоящее издание вошло все то, что заключалось в литографированном, и, кроме того, добавлено в главе VI об интерполировании и о механических квадратурах, и написана вновь глава VII о приближенном интегрировании дифференциальных уравнений.

Содержание курса видно из оглавления его, что же касается изложения, то оно предполагает читателя, знакомого с основаниями высшей алгебры и дифференциального и интегрального исчисления и имеющего некоторый навык в производстве численных вычислений.

Причина, побудившая меня к составлению этого курса, следующая: в современных руководствах математического анализа преимущественное внимание обращается на вполне строгое установление основных понятий и на строгое доказательство всех получаемых из них выводов. Ввиду этого зачастую весьма обстоятельно доказывается существование решения какого-либо вопроса и устанавливается теоретическая возможность получения его с любою степенью точности, и гораздо меньшее внимание уделяется практической части дела, т. е. действительному получению решения с данным, обыкновенно грубым, приближением, которое только и требуется в приложениях, но которое надо получить с возможно меньшею затратою труда и времени. Составленный мною курс лекций о приближенных вычислениях и имеет целью показать: действительно применимые практические приемы и способы вычисления корней численных уравнений, вычисления определенных интегралов, пользования тригонометрическими рядами и приближенного решения дифференциальных уравнений. Главная забота при этом была о том, чтобы показать, как и когда тем или иным приемом или способом пользоваться, а не о теоретической строгости обоснования самого приема или способа.

Я не касался разложений функции в ряды, расположенные по степеням переменной независимой, и пользования ими для вычислений, ибо этот вопрос обыкновенно весьма обстоятельно рассматривается в обычных руководствах анализа, отдел же об определении истинных значений выражений, принимающих неопределенный вид, может доставить множество упражнений, если вычислять значение этих выражений для значений переменной независимой, близких к тем, при которых имеет место неопределенность.

В заключение считаю своим долгом принести глубочайшую благодарность Совету Института инженеров путей сообщения императора Александра I, удостоившему этот курс напечатания в Сборнике Института.

Март 1911 г. *А. Крылов.*

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Первое печатное издание этого курса уже давно разошлось, между тем на эти лекции часто является спрос как со стороны многочисленных высших учебных заведений, особенно технических, так и со стороны проектировочных бюро, поэтому Редакционно-издательский совет Академии Наук включил эти лекции в серию справочно-технической литературы, издаваемой Академией Наук.

Первоначальный текст пересмотрен и где надо исправлен, кроме того, сделан ряд существенных добавлений, а именно — в главе V изложены общая метода усиления быстроты сходимости и суммирования тригонометрических рядов и общая метода вычисления периодов и коэффициентов таких рядов, в главе VII добавлено изложение методы Адамса — Штермера численного интегрирования дифференциальных уравнений, и, наконец, добавлена глава VIII, содержащая изложение методы наименьших квадратов, ограничиваясь тем, что из этой методы бывает нужно технику и инженеру.

А. Крылов.

Сентябрь 1932 г.

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ, ОБЩИЕ ПРАВИЛА ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

§ **1.** Математика прилагается теперь к решению многих вопросов, встречающихся не только в таких прикладных науках, как астрономия, геодезия, физика, но и в разных отраслях техники. При таких приложениях требуется часто не только установить зависимость между разными величинами, входящими в вопрос, т. е. не только составить надлежащую формулу, но и применять эту формулу к определенным частным случаям и найти численные величины искомых по данным.

В астрономии и геодезии обыкновенно начинают изложение с указания тех приемов и способов, которыми надо пользоваться при выполнении встречающихся в этих науках численных вычислений. Мы не будем останавливаться на этих специальных методах, но позаимствуем лишь общие их основания, одинаково приложимые ко всякого рода вычислениям, из которых мы будем иметь ввиду главным образом те, которые встречаются в приложениях математики к вопросам техническим.

§ 2. Необходимые для численного определения какой бы то ни было искомой величины данные доставляются обыкновенно наблюдениями или измерениями.

Всякому известно, что никакое измерение не может быть произведено *абсолютно* точно; напротив, результат всегда заключает некоторую погрешность, которая и обнаруживается при повторении измерения тем, что получается результат, отличающийся от первого. По этим отклонениям результатов друг от друга судят и о пределах погрешности в них.

Само собою понятно, что погрешности в данных переходят и в определяемые по этим данным искомые, даже и в том случае, когда вычисление или расчет производится по совершенно точным формулам и с полнейшею точностью.

В технических вопросах искомые определяются обыкновенно для того, чтобы быть осуществленными или исполненными на деле. Здесь опять возникают неизбежные погрешности исполнения или выделки; для всякого изделия существуют так называемые «допуски», т. е. пределы погрешностей, при которых изделие признается годным.

Отсюда ясно, что для прикладных вопросов нет надобности производить вычисления по абсолютно точным формулам и с совершенною точностью; напротив, можно пользоваться заведомо неточными формулами или приемами, лишь бы была уверенность, что происходящая от этого погрешность не превышает тех пределов, которые в данном вопросе допускаются.

К такому пользованию неточными или приближенными формулами и приемами вычисления побуждает следующее обстоятельство: в приложениях обыкновенно интересует не процесс вычисления, а результат его; поэтому и стараются получить этот результат с достаточной точностью при наименьшей затрате труда и времени.

Этой технической точки зрения мы и будем придерживаться в этих лекциях, предметом которых будет служить изложение общих приемов и способов приближенных вычислений в приложении: 1) к решению численных уравнений, 2) к нахождению численной величины определенных интегралов простых и кратных, 3) к нахождению сумм рядов и 4) к численному интегрированию обыкновенных уравнений. При этом мы будем знакомить и с теми механическими приспособлениями, которые имеются для автоматического выполнения некоторых из вышеупомянутых операций.

§ 3. Прежде всего необходимо остановиться на самом понятии *о точности* какого-либо результата.

Разность между истинным и приближенным значением какой-либо величины называется *абсолютною погрешностью* этого значения.

Указание одной только абсолютной погрешности обыкновенно недостаточно характеризует достоинство результата. Так, например, если сказать, что погрешность некоторой длины составляет 1 мм, то еще нельзя сказать, хорошо или плохо произведено измерение, — необходимо знать и самую измеряемую величину. Так, если бы сказанная погрешность относилась к базису длиною в 10 км, то можно сказать, что результат получен с небывалою еще до сих пор точностью, если же измерялся, например, диаметр проволоки или толщина металлического листа и вместо 3 мм намерили 2 мм, то, вероятно, всякий скажет, что это измерение никуда не годится.

Достоинство результата гораздо лучше характеризуется указанием так называемой *относительной погрешности*, которая представляет собою отношение абсолютной погрешности к самому значению величины.

Ясно, что относительная погрешность выражается всегда *отвлеченным* числом; так, в первом из наших примеров она составляет $\frac{1}{10000000}$, во втором $\frac{1}{2}$.

Чем меньше относительная погрешность, тем больше точность, с которою величина известна; поэтому относительная погрешность и принимается за меру точности результата.

Результат всякого вычисления и измерения выражается числом; условимся писать эти числа так, чтобы по самому их начертанию можно было судить о степени точности; для этого стоит только принять за правило писать число так, чтобы в нем *все* значащие цифры, *кроме последней*, были верны и лишь последняя цифра была бы сомнительна и притом не более, как на одну единицу.

Наиболее точные результаты получаются при взвешивании; здесь для грузов около 1 кг достигается точность до $\frac{1}{100}$ мг, так что относительная погрешность составляет всего $\frac{1}{100000000}$; следовательно, первые восемь цифр числа были бы верные и лишь девятая сомнительная, или, как говорят, результат верный до девятого знака. Но зато такое взвешивание требует таких предосторожностей, что продолжается, например, в Bureau International des Poids et Mesures около 24 часов.

Самое точное измерение длин достигает лишь седьмого знака. В большой части технических вопросов точность до $\frac{1}{1000}$ достаточна, значит и все вычисления могут быть производимы на четыре знака.

Обратим еще внимание на способ написания больших чисел. Пусть, например, в числе 12732000 четвертая цифра уже сомнительна, тогда мы это число будем писать так: $1.273 \cdot 10^7$; если бы была сомнительна пятая цифра, то это число написали бы так: $1.2732 \cdot 10^7$.

Точно так же, чтобы показать, что в величине, выражающейся целым числом, например, 37, ошибка начинается лишь с пятого знака, надо это число писать так: 37.000.

§ **4.** Рассмотрим теперь, как отражается на точности результата производство разного рода арифметических действий над приближенными числами.

С л о ж е н и е. Пусть даны числа

$$N_1, N_2, \ldots N_k$$

относительные погрешности коих соответственно суть

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_k$$

Легко видеть, что относительная погрешность ε суммы этих чисел заключается между наибольшею и наименьшею из относительных погрешностей слагаемых.

В самом деле, обозначая через

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_k$$

абсолютные погрешности слагаемых, видим, что

$$\varepsilon = \frac{\delta_1 + \delta_2 \ldots + \delta_k}{N_1 + N_2 \ldots + N_k}$$

С другой стороны, имеем равенства

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{N_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{N_2}; \quad \ldots \varepsilon_k = \frac{\delta_k}{N_k} \qquad (*)$$

а так как все дроби (*) рассматриваются лишь по их численной величине, то дробь

$$\frac{\delta_1 + \delta_2 \ldots + \delta_k}{N_1 + N_2 \ldots + N_k}$$

представляющая отношение суммы числителей к сумме знаменателей, заключается между наибольшею и наименьшею из дробей (*).

Поэтому, в том случае, когда все слагаемые приблизительно одинаковой величины (отношение наибольшего из них к наименьшему менее 10), надо все их писать с одним и тем же числом знаков — столько же верных знаков будет и в сумме.

Но часто приходится складывать числа хотя и известные с одинаковою степенью точности, но сильно разнящиеся по величине; тогда без ущерба точности окончательного результата можно упростить действие.

Пусть, например, надо сложить числа

52.374, 2.8232, 0.52181 и 0.014253

которые все четыре пятизначные, тогда не следует делать сложения так:

$$\begin{array}{r} 52.374 \\ 2.8232 \\ 0.52181 \\ 0.014253 \\ \hline 55.733263 \end{array}$$

ибо очевидно, что последние три цифры в сумме не могут быть верны; незачем было и выписывать как их, так и те цифры, из которых они получились, а следует поступать так:

$$\begin{array}{r} 52.374 \\ 2.823 \\ 0.522 \\ 0.014 \\ \hline 55.733 \end{array}$$

т. е., написав наибольшее из слагаемых, удерживать в остальных лишь столько цифр после точки, сколько их у наибольшего из слагаемых (в нашем примере — три), отбрасывая остальные цифры, последнюю из удержанных усиливать на 1, когда первая отброшенная цифра 5 или более.

В связи с сложением приближенных чисел находится такой вопрос: погрешность обыкновенно может быть как положительною, так и отрицательною, следовательно, при сложении может происходить взаимная компенсация погрешностей, в особенности когда число слагаемых велико. Этот вопрос рассмотрен и решен в теории вероятностей, и мы еще вернемся к нему в главе V.

Умножение. Покажем, что при умножении относительная погрешность произведения равна сумме относительных погрешностей множителей. В самом деле, пусть множители суть N_1 и N_2, и их относительные погрешности ε_1 и ε_2, следовательно, истинные величины этих множителей суть

$$N_1' = N_1(1+\varepsilon_1) \quad \text{и} \quad N_2' = N_2(1+\varepsilon_2)$$

Значит, истинная величина произведения будет

$$N_2' N_2' = N_1 N_2 (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) = N_1 N_2 [1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_1 \varepsilon_2]$$

Обыкновенно дроби ε_1 и ε_2 весьма малые, например $\frac{1}{1000}$, тогда произведение $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ будет весьма мало по сравнению с суммою $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, и им можно пренебречь, а тогда имеем

$$N_1' N_2' = N_1 N_2 [1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)] = N_1 N_2 + N_1 N_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

что и подтверждает высказанное свойство для случая двух множителей.

Очевидно, что оно тотчас же распространяется и на любое их число.

Деление. Так как деление на число N равносильно умножению на число $\frac{1}{N}$, то при делении относительная погрешность частного равна сумме относительных погрешностей делимого и делителя. Здесь надо заметить, что этой величины она достигнет, когда абсолютные погрешности делимого и делителя разных знаков.

Возвышение в степень. Из сказанного об умножении непосредственно следует, что относительная погрешность квадрата числа равна удвоенной относительной погрешности этого числа, куба — утроенной и т. д. Это свойство справедливо и для дробных степеней; в самом деле пусть N_1 есть приближенная величина возвышаемого количества и ε_1 — относительная погрешность его.

Тогда истинная величина есть $N = N_1(1+\varepsilon_1)$, откуда, возвышая в степень p, имеем

$$N^p = N_1^p (1+\varepsilon_1)^p = N_1^p \left(1 + p\varepsilon_1 + \frac{p(p-1)}{1.2} \cdot \varepsilon_1^2 + \dots\right)$$

Обыкновенно дробь ε_1 настолько мала, что всеми членами, содержащими эту дробь в степени выше первой, можно пренебречь, и тогда будет

$$N^p = N_1^p(1+p\varepsilon) = N_1^p + p\varepsilon N_1^p$$

откуда следует, что относительная погрешность величины N_1^p есть $p\varepsilon$, что и подтверждает высказанное свойство.

При многих вычислениях приходится пользоваться квадратами и кубами чисел. Для квадратов и кубов целых чисел от 1 до 10 000 составлены таблицы, где квадраты и кубы показаны вполне точно.

При пользовании этими таблицами надо избегать выписывания лишних знаков. Так, например, пусть дано число

$$N_1 = 11.66$$

Значит, за последнюю цифру нельзя ручаться, и истинное значение числа могло бы быть, например, и 11.67, но

$$11.66^2 = 135.9556 \quad \text{и} \quad 11.66^3 = 1585.242296$$

и

$$11.67^2 = 136.1889 \quad \text{и} \quad 11.67^3 = 1589.324463$$

Отсюда ясно, насколько бесполезно было бы выписывать все цифры, следующие за четвертой или даже за третьей, ибо все эти цифры для нашего приближенного числа неверны, и выписывание их составляет лишь напрасную трату труда и времени.

§ 5. При вычислениях с приближенными числами особенно невыгодным действием является *вычитание* в том случае, когда разность мала по отношению к уменьшаемому и вычитаемому. В самом деле, пусть даны числа 52.287 и 51.939; как видно, в каждом из них мы можем ручаться за первые четыре цифры, а так как в последней погрешность не более 1, то относительная погрешность наших данных не более $\frac{1}{50\,000}$. Между тем, в разности этих чисел 0.348 последняя цифра может быть неверна на две единицы, и относительная погрешность может составить $\frac{2}{348}$, т. е. в 300 раз бóльшую величину, нежели в данных.

Поэтому при вычислениях *надо стараться так преобразовать формулы, чтобы малые разности двух величин вычислялись непосредственно, не вычисляя самих величин.* Если же этого сделать нельзя, то необходимо иметь в виду, что относительная погрешность разности во столько же раз больше относительной погрешности в слагаемых, во сколько раз сама разность меньше каждого из них.

Отсюда понятна и выгода, доставляемая вычислением ряда значений какой-либо величины, мало разнящихся между собою, производя это вычисление так: вычислив лишь одно из этих значений непосредственно, для получения остальных вычислять те поправки, которые надо к сказанному значению присовокупить, чтобы получить все прочие. Поправки эти можно вычислять с тем меньшею относительною точностью, чем они меньше по сравнению с самою величиною.

Большая часть вычислений в астрономии и производится подобно вышесказанному — всегда стараются вычислять поправки и отклонения.

§ 6. Логарифмы. При большей части вычислений, вспомогательным средством служат логарифмы, поэтому необходимо рассмотреть, какая при вычислении по логарифмам с разным числом знаков происходит относительная погрешность.

Наиболее употребительные таблицы логарифмов, т. е. 4-, 5- и 7-значные, располагаются всегда так, чтобы для приискания логарифмов чисел, в таблице непосредственно не указанных, можно было пользоваться лишь первыми разностями, или пропорциональными частями. Это достигается тем, что разность между двумя смежными аргументами достаточно мала по сравнению с ними. В самом деле, пусть N и $N+h$ два последовательных аргумента, тогда разность их логарифмов (обыкновенных) будет

$$\Delta = \lg(N+h) - \lg N = \lg\frac{N+h}{N} = \lg\left(1+\frac{h}{N}\right)$$

Но по известной формуле

$$\lg\left(1+\frac{h}{N}\right) = M\left[\frac{h}{N} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{N}\right)^3 - \ldots\right] \qquad (*)$$

причем M есть модуль обыкновенных логарифмов, равный $0.43429\ldots$; чтобы при приискании логарифмов пользоваться лишь пропорциональными частями, надо, чтобы в формуле (*) член

$$\frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2$$

был настолько мал по сравнению с первым, чтобы не влиять на последний знак показанного в таблице логарифма; так, для четырехзначных таблиц, если взять (как и сделано)

$$\frac{h}{N} < \frac{1}{100}$$

то будет

$$\frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2 < \frac{1}{20000}$$

т. е. меньше пяти единиц пятого знака, поэтому в четырехзначных таблицах аргументы идут от 100 до 1000 через 1.

Точно также в пятизначных таблицах берут

$$\frac{h}{N} < \frac{1}{1000}$$

тогда

$$\frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2 < \frac{1}{2000000}$$

Наконец в семизначных таблицах аргументами служат целые числа от 10000 до 100000, и, следовательно,

$$\frac{h}{N} < \frac{1}{10000} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2 < \frac{1}{200000000}$$

т. е. меньше 0.000000005, что не оказывает влияния на седьмой знак.

Таким образом, для всякой таблицы логарифмов табличная разность Δ, т. е. разность между двумя последовательными, соответствующими числам N и $N+1$, логарифмами с достаточною точностью выражается формулой

$$\Delta = M\frac{1}{N} = 0.434 \cdot \frac{1}{N} \tag{1}$$

Отсюда ясно, что когда данное число N_1, для которого надо найти логарифм, заключается между N и $N+1$, так что

$$N < N_1 < N+1$$

то, полагая

$$N_1 = N + h$$

будем иметь

$$\lg N_1 = \lg N + 0.434\frac{h}{N} = \lg N + h \cdot \Delta \tag{2}$$

На этой формуле и основано приискание, пользуясь пропорциональными частями, логарифма для данного числа и наоборот.

Все показанные в таблице логарифмы заключают в себе погрешности, которые могут достигать до $\frac{1}{2}$ единицы последнего знака.

Отсюда ясно, что если число задано даже совершенно точно, все-таки его логарифм будет найден лишь приближенно с вышеуказанной погрешностью.

Но если самое число известно лишь приближенно, например с относительною погрешностью $\frac{h}{N} = \varepsilon$, то из ф-лы (2) видно, что погрешность в логарифме, происходящая от погрешности в числе, составит $0.43\,\varepsilon$. Поэтому, чтобы эта погрешность отражалась не более как на $\frac{1}{2}$ единицы последнего знака логарифма, надо, чтобы относительная погрешность числа составляла как раз столько, как одна единица последнего знака логарифма, т. е. для четырехзначного $\frac{1}{10000}$, для пятизначного $\frac{1}{100000}$ и т. д., иными словами, чтобы в числе было столько *верных* цифр, сколько их всех в мантиссе логарифма.

Отсюда ясно, насколько бесполезно приискивать для числа, в котором, например, всего четыре верных цифры, — семизначный логарифм.

При обратном приискании числа по данному логарифму, которого погрешность составляет одну единицу последнего его знака, мы сделаем в числе относительную ошибку $\varepsilon = \frac{1}{0.43}$, т. е. 2.30 этой единицы, т. е. для пятизначного логарифма $\frac{2.30}{100000} = \frac{1}{43400}$ не зависимо от величины числа.

Отсюда видно, что, определяя число по его логарифму, можно получить в числе лишь столько же верных цифр, сколько их всех в мантиссе логарифма, когда первая цифра числа есть 4 или меньше, и одною цифрою меньше, когда эта первая цифра есть 5 или более.

При этом предполагается, что ошибка в логарифме составляет одну единицу последнего знака. Надо заметить, что тот логарифм, по которому приходится приискивать число, обыкновенно происходит от сложения по крайней мере двух других логарифмов, а потому ошибка в нем на одну единицу последнего знака вполне возможна.

Лишь при извлечении корней, в особенности высокой степени, ошибки в последнем знаке логарифма может наверняка не быть.

Отсюда следует такое практическое правило: *пользоваться логарифмами с таким же числом знаков, сколько их всех в подлежащих вычислениям числах*, поэтому для большей части технических вопросов вполне достаточно четырехзначных таблиц, и даже часто было бы достаточно и трехзначных, но трехзначными таблицами пользоваться не стоит, гораздо удобнее пользоваться логарифмической линейкой, которая при длине в 25 см доставляет такую же точность, как и трехзначные таблицы. При длине 50 см можно получить почти такую же точность, как и от четырехзначных таблиц логарифмов.

§ 7. При вычислении по логарифмам необходимо привыкнуть пользоваться Гауссовыми логарифмами сумм и разностей.

Положим, что числа A и B известны лишь по своим логарифмам, и требуется найти логарифм их суммы, т. е. $\lg(A+B)$.

Пусть будет $A > B$.

Очевидно, имеем

$$\lg(A+B) = \lg A\left(1+\frac{B}{A}\right) = \lg A + \lg\left(1+\frac{B}{A}\right)$$

Так как логарифмы чисел A и B заданы, то, взяв разность $\lg A - \lg B = \lg\left(\frac{A}{B}\right)$, имели бы возможность вычислить величину $\lg\left(1+\frac{B}{A}\right)$. Это и сделано в таблицах, в которых с аргументом разности

$\lg A - \lg B$ прямо находится $\lg\left(1 + \frac{B}{A}\right)$, придав который к $\lg A$ и получим $\lg(A + B)$. Так, например,

$$\lg A = 0.47712$$

$$\lg B = 0.30103$$

тогда

$$\lg A - \lg B = 0.17609$$

с этим аргументом в таблице логарифмов сумм находим

$\lg\frac{A}{B}$	$\lg\left(1+\frac{B}{A}\right)$
. . .	. . . . .
0.176	0.22189_{40}
0.177	0.22149
. . .	. . . . .

следовательно, аргументу 0.17609 соответствует 0.22189 — . . . 3.6 = = 0.22185, и, значит, будет

$$\lg(A + B) = 0.47712 + 0.22185 = 0.69897$$

Таблица для нахождения логарифма разности составлена следующим образом. Имеем

$$\lg(A - B) = \lg A\left(1 - \frac{B}{A}\right) = \lg A - \lg\left(\frac{1}{1 - \frac{B}{A}}\right)$$

Пусть будет $\frac{A}{B} = \alpha$, тогда $\lg\alpha = \lg A - \lg B$, и для аргументов α может быть вычислена величина

$$\lg\frac{1}{1 - \frac{B}{A}} = \lg\frac{\alpha}{\alpha - 1} = \lg\beta$$

Эти величины и показаны в таблице, имеющей, следовательно, такой вид:

$\lg\alpha$	$\lg\beta$
. . .	. . .

Такое расположение таблиц сделано для сокращения их объема. В самом деле, когда α изменяется от 1 до ∞, то β изменяется от ∞ до 1, и когда $\alpha = 2$, то и $\beta = 2$.

Из равенства $\frac{\alpha}{\alpha-1}=\beta$ следует такое: $\alpha=\frac{\beta}{\beta-1}$; поэтому, если за аргумент $\lg\frac{A}{B}$ принять $\lg\beta$, то соответствующая величина $\lg\frac{1}{1-\frac{B}{A}}$ найдется в столбце $\lg\alpha$, и, следовательно, принятое расположение уменьшает объем таблиц вдвое.

Пусть, например,

$$\lg A=0.69897$$

$$\lg B=0.30103$$

Тогда

$$\lg\alpha=\lg\frac{A}{B}=0.39794$$

В таблицах находим

I	II
$\lg\alpha$	$\lg\beta$
. . . .	. . . .
0.3979	0.22188
0.3980	0.22181^{7}
. . . .	. . . .

Следовательно,

$$\lg\beta=0.22188-2.8=0.22185$$

Затем

$$\lg(A-B)=\lg A-\lg\beta=0.69897-0.22185=0.47712$$

Совершенно так же, если бы было дано

$$\lg A=0.69897$$

$$\lg B=0.47712$$

то имели бы

$$\lg\alpha=0.22185$$

Ближайшее к этому число найдем во II столбце, и по столбцу I находим число, ему соответствующее, именно:

$$0.39790+10\cdot\frac{3}{7}=0.39794=\lg\beta$$

и, следовательно, будет

$$\lg(A-B)=\lg\beta=0.69897-0.39794=0.30103$$

Пятизначные таблицы Гауссовых логарифмов помещены, например, в сборнике С. П. Глазенапа „Пятизначные таблицы логарифмов“, изд. Акад. Наук. Семизначные — в таблицах Zech'a „Tafeln der Additions und Subtractions Logarithmen für sieben Stellen“.

§ 8. Выскажем теперь сводку тех общих правил, которые вытекают из приведенных выше рассуждений:

1. О точности результата судят по относительной его погрешности.

2. Точность вычисления должно сообразовать с точностью данных, а точность данных — с той практическою потребностью, для которой результат вычисления нужен.

3. При вычислении надо избегать выписывания лишних знаков, ограничивая всегда числа так, чтобы в них все цифры, кроме последней, были верны, и лишь последняя была бы сомнительной.

4. При сложении многих чисел, значительно различающихся по величине, но одинаковой относительной точности, надо написать вперед наибольшее из слагаемых и удерживать в остальных лишь столько цифр после запятой, сколько их в этом наибольшем слагаемом.

5. Логарифмами пользоваться с таким числом знаков, сколько их в числах.

6. Малые разности стараться вычислять непосредственно, не вычисляя самих чисел.

7. Когда надо иметь ряд мало разнящихся значений какой-либо величины, то, вычислив непосредственно одно из них, для получения остальных вычислять „поправки“, которые надо присовокуплять к сказанному значению. При вычислении поправок довольствоваться тем меньшею относительною точностью, чем поправка меньше самой величины.

8. Для всякого вычисления следует предварительно составить схему, так чтобы каждое число писалось в свое место. При составлении схем надо заботиться о том, чтобы при действиях над рядом чисел одно действие не шло бы в перемешку с другими, а, напротив, один однообразный процесс сменялся другим, тоже однообразным, производимым над всеми числами ряда.

ГЛАВА II

РЕШЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 9. Для уравнений, степень коих выше 4, не существует формул, которые выражали бы величины корней через коэффициенты уравнения, и разыскание иррациональных корней может быть производимо лишь помощью приближений.

Самый процесс вычисления корней состоит из двух операций: 1) отделение корней, 2) вычисление корня с требуемою степенью точности.

В высшей алгебре доказывается знаменитая теорема Штурма, вполне решающая вопрос об отделении вещественных корней в теоретическом смысле. Вычисление мнимых корней вида $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ может быть приведено к нахождению величин α и β — вещественных, следовательно, по исключении одной из этих неизвестных, останется одно уравнение для определения другой, и так как для этого уравнения надо знать лишь вещественные величины корней, то теорема Штурма и здесь решает вопрос.

Но такое решение, безукоризненное в теоретическом отношении, на практике весьма затруднительно по длинноте и утомительности сопряженных с ним вычислений, в особенности относительно мнимых корней.

Между тем, если для практического вопроса надо решать численное уравнение высокой степени, то это приходится тогда, когда надо интегрировать какую-либо систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами, относящуюся к малым колебаниям какой-нибудь материальной системы или к вопросу о распределении токов в цепи, заключающей самоиндукцию и емкость.

В этих же случаях надо знать не только вещественные, но и мнимые корни.

Мы остановимся поэтому подробно на способе, с теоретической стороны не столь совершенном, как применение теоремы Штурма, но зато весьма удобно исполнимом практически.

§ 10. Этот способ вкратце изложен в „Алгебре“ Лобачевского, изданной в 1834 г., затем вновь предложен в 1837 г. цюрихским профессором Греффе (Gräffe) и подробно разработан и пояснен многими примерами астрономом Энке, поместившим изложение метода Греффе в „Berliner Astronomisches Jahrbuch" на 1841 г.

Сущность способа Греффе состоит в следующем.

Положим сперва для простоты рассуждений, что предложенное уравнение

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (1)$$

имеет только вещественные и положительные корни и притом неравные, пусть эти корни будут

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$$

и положим, что они расположены по порядку их величины, так что

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 \ldots > \alpha_{n-1} > \alpha_n$$

Таким образом у нас будет

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n) \qquad (2)$$

Если в первой части ур-ния (1) заменить x на $-x$ и затем умножить на $(-1)^n$, то, каково бы ни было число n, четное или нечетное, получится уравнение

$$f_1(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} - a_3 x^{n-3} \ldots + (-1)^n a_n = 0$$

корни которого суть

$$-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots -\alpha_n$$

и, следовательно, первая часть этого уравнения разлагается на произведение следующих множителей:

$$(x + \alpha_1)(x + \alpha_2) \ldots (x + \alpha_n)$$

Положим, что по данному ур-нию (1) составляется такое, корни которого суть

$$-\alpha_1^{2k}, -\alpha_2^{2k}, \ldots -\alpha_n^{2k}$$

пусть это уравнение будет

$$F(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \ldots + A_{n-1} z + A_n = 0$$

в силу равенства

$$F(z) = (z + \alpha_1^{2k})(z + \alpha_2^{2k}) \ldots (z + \alpha_n^{2k})$$

будем иметь

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \alpha_1^{2k} + \alpha_2^{2k} + \alpha_3^{2k} + \ldots + \alpha_n^{2k} \\
A_2 &= (\alpha_1\alpha_2)^{2k} + (\alpha_1\alpha_3)^{2k} + \ldots + (\alpha_{n-1}\alpha_n)^{2k} \\
A_3 &= (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{2k} + (\alpha_1\alpha_2\alpha_4)^{2k} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_n &= (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^{2k}
\end{aligned} \qquad (3)
$$

Если показатель $2k$ взят достаточно большим, то в каждой из сумм (3) первый член будет настолько велик по сравнению с прочими, что с принятою для вычисления степенью точности можно всеми этими членами пренебречь.

Тогда система (3) заменяется такою:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \alpha_1^{2k} \\
A_2 &= (\alpha_1\alpha_2)^{2k} \\
A_3 &= (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{2k} \\
&\ldots\ldots\ldots \\
A_{n-1} &= (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1})^{2k} \\
A_n &= (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^{2k}
\end{aligned} \qquad (4)
$$

Откуда непосредственно следует

$$
\alpha_1^{2k} = A_1; \quad \alpha_2^{2k} = \frac{A_2}{A_1}; \quad \alpha_3^{2k} = \frac{A_3}{A_2}; \quad \ldots \quad \alpha_n^{2k} = \frac{A_n}{A_{n-1}} \qquad (5)
$$

и корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ будут найдены из равенств (5).

В этом и состоит сущность метода Греффе.

§ 11. Итак, все сводится к составлению по данному ур-нию (1) такого ур-ния (2), которого корни были бы столь высокими степенями корней предложенного уравнения, чтобы равенства (4) имели место с требуемой степенью точности.

Для составления ур-ния (2) Греффе ведет преобразования последовательно, составляя прежде всего такое уравнение, которого корни были бы равны квадратам корней предложенного уравнения, взятым со знаком (—), т. е. коего корни

$$-\alpha_1^2, \ -\alpha_2^2, \ \ldots \ -\alpha_n^2$$

Повторив над этим уравнением тот же процесс, который служил для получения первого преобразованного уравнения по данному, получим второе преобразование, коего корни будут четвертыми степенями корней предложенного, т. е.

$$-\alpha_1^4, \ -\alpha_2^4, \ \ldots \ -\alpha_n^4$$

Сделав еще раз то же преобразование, получим уравнение, коего корни будут восьмыми степенями корней предложенного и т. д., пока не дойдем до столь высоких степеней, что равенства (4) будут иметь место, что, как покажем ниже, само собою обнаружится при наших преобразованиях.

Чтобы по данному уравнению составить первое преобразованное, заметим, что мы имели

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots + a_{n-1} x + a_n =$$

$$= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n)$$

и

$$(-1)^n f(-x) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - a_2 x^{n-3} + \ldots + (-1)^n a_n =$$
$$= (x + \alpha_1)(x + \alpha_2)(x + \alpha_3) \ldots (x + \alpha_n)$$

Следовательно, будет

$$(-1)^n f(x) f(-x) = (x^2 - \alpha_1^2)(x^2 - \alpha_2^2)(x^2 - \alpha_3^2) \ldots (x^2 - \alpha_n^2) = F_1(x^2)$$

Это равенство показывает, что если выполнить произведение многочленов

$$\begin{gathered} x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + a_4 x^{n-4} + \ldots + a_n \\ \text{и} \\ x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - a_3 x^{n-3} + a_4 x^{n-4} + \ldots + (-1)^n a_n \end{gathered} \tag{5}$$

то получится многочлен, содержащий только четные степени x, начиная с x^{2n}; пусть этот многочлен будет

$$x^{2n} + N_1 x^{2n-2} + N_2 x^{2n-4} + N_3 x^{2n-6} + \ldots + N_n$$

заменив в нем x^2 через z и переменив знаки у членов через один, мы получим многочлен

$$z^n - N_1 z^{n-1} + N_2 z^{n-2} - N_3 z^{n-3} + \ldots + (-1)^n N_n \tag{6}$$

который и есть требуемый, т. е. коего корни суть: $-\alpha_1^2, -\alpha_2^2, \ldots -\alpha_n^2$.

Этот многочлен есть

$$\begin{array}{r|r|r|l} z^n + a_1^2 & z^{n-1} + a_2^2 & z^{n-2} + a_3^2 & z^{n-3} + \ldots + a_n^2 \\ -2a_2 & -2a_1 a_3 & -2a_2 a_4 & \\ & +2a_4 & +2a_1 a_5 & \\ & & -2a_6 & \end{array} \tag{6'}$$

Формула (6') показывает, каким образом по коэффициентам данного уравнения составляются коэффициенты преобразованного, а именно: *в преобразованном уравнении коэффициент при всяком члене равняется квадрату коэффициента при члене с той же степенью неизвестной данного уравнения, минус удвоенное произведение коэффициентов тех двух членов, между которыми этот член заключается, плюс удвоенное произведение коэффициентов, между которыми заключаются эти два, минус и т. д...* пока не дойдем до крайнего члена предложенного уравнения.

Таким образом, составление преобразованного уравнения сводится к довольно простому и однообразному процессу.

§ **12.** Спрашивается, когда же остановиться в преобразованиях, т. е. как узнать, что равенства (4) уже имеют место.

Как уже сказано, это узнается по самому процессу; в самом деле, положим, что после того как сделано h преобразований, т. е. когда $2k=2^h$, равенства (4) имеют место; представим себе, что преобразование сделано еще раз, очевидно, что для этого преобразованного уравнения равенства (4) и подавно имеют место; обозначая коэффициенты этого уравнения через $A_1', A_2', \ldots A_n'$, будем иметь

$$\begin{aligned} A_1' &= \alpha_1^{4k} \\ A_2' &= (\alpha_1 \alpha_2)^{4k} \\ A_3' &= (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{4k} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ A_n' &= (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n)^{4k} \end{aligned} \tag{7}$$

в силу же равенств (4) отсюда следует

$$\begin{aligned} A_1' &= A_1^2 \\ A_2' &= A_2^2 \\ A_3' &= A_3^2 \\ &\ldots\ldots \\ A_n' &= A_n^2 \end{aligned} \tag{8}$$

т. е. в преобразованном уравнении коэффициенты будут равны квадратам соответствующих коэффициентов преобразуемого (с принятою при вычислении точностью); иначе говоря, если вычисление производилось по логарифмам, то в преобразованном уравненеи логарифмы коэффициентов равны *удвоенным* логарифмам коэффициентов преобразуемого.

Как только такое удвоение логарифмов наступило, дальше преобразовывать незачем, равенства (4) имеют место, и, значит, можно найти и величины корней.

§ **13.** Спрашивается, сколько же раз надо будет делать преобразование, пока это наступит.

Обращаясь к ф-лам (3), которые можно написать так:

$$A_1 = \alpha_1^{2k}\left[1+\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{2k}+\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^{2k}+\ldots\right] = \alpha_1^{2k}(1+\varepsilon_1)$$

$$A_2 = (\alpha_1\alpha_2)^{2k}\left[1+\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^{2k}+\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\right)^{2k}+\ldots\right] = (\alpha_1\alpha_2)^{2k}(1+\varepsilon_2)$$

. . . .

видим, что преобразование закончится тогда, когда дроби ε_1 и ε_2 и т. д. будут столь малы, что не окажут влияния на последний знак логарифма.

Так, например, если вычисление производится с пятью знаками, то надо, чтобы эти дроби были не более $\frac{1}{200000}$.

Главный член в выражении ε_1 есть $\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{2k}$; в выражении ε_2 это есть $\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^{2k}$ и т. д., поэтому, чем больше отношение двух смежных корней отличается от 1, тем меньше надо преобразований.

В самом деле, пусть наименьшее из этих отношений есть $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, следовательно, надо, чтобы было

$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{2k} \geqslant 200000$$

Откуда

$$2k \geqslant \frac{\lg 200000}{\lg\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}$$

или

$$2k \geqslant \frac{5.30103}{\lg\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}$$

Задавая разные величины $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, получаем (табл. 1):

Таблица 1

$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$	$2k$	$2^h \geqslant 2k$	h
2	18	$2^5 = 32$	5
1.5	30	$2^5 = 32$	5
1.1	128	$2^7 = 128$	7
1.01	1227	$2^{11} = 2048$	11
1.001	12215	$2^{14} = 16384$	14

Примечание. В этой и последующих таблицах числа без знака плюс надо понимать как положительные

В большей части случаев семи преобразований бывает достаточно; четырнадцать преобразований дадут корни даже в том случае, когда отношение их равно 1.001. Но практически выгоднее столь большого числа преобразований не делать, а принять в первом приближении эти близкие корни за равные между собой и трактовать их так, как будет показано ниже.

§ **14.** Прежде чем излагать дальнейшее развитие способа, т. е. разбирать случаи равных и мнимых корней, проделаем простейший пример, чтобы пояснить самый ход преобразований и производство этой операции.

Положим, дано уравнение

$$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x+2)(x-3)=0$$

Корни этого уравнения суть: 3, (—2) и 1.

Вычислим их по методе Греффе, пользуясь пятизначными логарифмами.

Это вычисление мы расположим, как показано в табл. 2.

Схема для этого вычисления получается из общей схемы (6') и есть следующая.

Данное уравнение:

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

Преобразованное:

$$\begin{array}{r|r|l} z^3+a_1^2 & z^2+a_2^2 & z+a_3^2 \\ -2a_2 & -2a_1a_3 & \end{array}$$

Таким образом, не выписывая неизвестной, а лишь коэффициенты при разных степенях ее, получаем приведенную ниже табл. 2 (стр. 32).

В этом примере вычисление проделано со всеми подробностями.

Первые три преобразования сделаны не пользуясь логарифмами, начиная с третьего вычисления ведены по логарифмам, причем вместо коэффициентов везде написаны их логарифмы.

Из самих преобразований видно, как относительная величина тех членов, которые присоединяются к квадратам коэффициентов, становится все меньше и меньше, и в первом коэффициенте при шестом преобразовании уже перестает влиять на пятый знак. В коэффициенте при первой степени неизвестной это наступает уже при пятом преобразовании.

Таким образом, окончательное уравнение будет то, которое дает $2^6=64$-ю степень неизвестной x, а именно:

$$z^3+A_1z^2+A_2z+A_3=0$$

причем

$$\lg A_1=30.53580$$
$$\lg A_2=49.80178$$
$$\lg A_3=49.80176$$

Таблица 2

m		a_1	a_2	a_3
1	1	-2	-5	6
2	1	$a_1^2 = 4$ $-2a_2 = 10$ 14	$a_2^2 = 25$ $-2a_1a_3 = 24$ 49	36
2	1	14	49	36
2^2	1	$a_1^2 = 196$ $-2a_2 = -98$ 93	$a_2^2 = 2401$ $-2a_1a_3 = -1003$ 1393	1296
$2^2 = 4$	1	98	1393	1296
2^3	1	$a_1^2 = 93^2 = 9604$ $-2a_2 = -2735$ 6818 $\lg 6818 = 3.83366$	$a_2^2 = 1940449$ $-2a_1a_3 = 254016$ 1683433 $\lg 1686433 = 6.22698$	1679616
$2^3 = 8$	0.00000	$\lg a_1 = 3.83366$	$\lg a_2 = 6.22693$	$\lg a_3 = 6.22522$
$2^4 = 16$	0.00000	$2\lg a_1 = 7.66732$ $a_1^2 = 4.6484 \cdot 10^7$ $\lg 2a_2 = 6.52801$ $-2a_2 = 0.3373 \cdot 10^7$ $4.3113 \cdot 10^7$ 7.63461	$2\lg a_2 = 12.45396$ $a_2^2 = 2.8442 \cdot 10^{12}$ $\lg 2a_1 = 4.13469$ $-2a_1a_3 = -0.0229 \cdot 10^{12}$ $\lg a_3 = 6.22522$ $2.8213 \cdot 10^{12}$ $\lg 2a_1a_3 = 10.35991$ 12.45045	
$2^4 = 16$	0.00000	7.63461	12.45045	12.45044
$2^5 = 32$	0.00000	$2\lg a_1 = 15.26922$ $a_1^2 = 1.8587 \cdot 10^{15}$ $\lg 2a_2 = 12.75143$ $-2a_2 = -0.0055 \cdot 10^{15}$ $1.8531 \cdot 10^{15}$ 15.26790	$2\lg a_2 = 24.90090$ $a_2^2 = 7.9599 \cdot 10^{24}$ $\lg 2a_2 = 7.93554$ $-2a_1a_2 = -0.0002 \cdot 10^{24}$ $\lg a_3 = 12.45044$ $7.9597 \cdot 10^{24}$ 20.38608 24.90089	
$2^5 = 32$	0.00000	15.26790	24.90089	24.90088
$2^6 = 64$	0.00000	$2\lg a_1 = 30.53580$ $a_1^2 = 3.4340 \cdot 10^{30}$ $\lg 2a_2 = 25.20192$ $-2a_2 = -0.0000 \cdot 10^{30}$ 3.4340 30.53580	49.30178	49.80176
$2^6 = 64$	0.00000	30.53580	49.80178	49.80176
		$64 \lg \alpha_1 = 30.53580$ $\lg \alpha_1 = 0.47712$ $\alpha_1 = 3.0000$	$64 \lg \alpha_2 = 19.26598$ $\lg \alpha_2 = 0.30101$ $\alpha_2 = -2.0000$	$64 \lg \alpha_3 =$ $= \bar{1}.99993$ $\lg \alpha_3 =$ $= 0.00000$ $\alpha_3 = 1.00000$

Имея величину корней, непосредственной подстановкой определяем, какой знак каждому из них должно приписать; так окажется, что $\alpha_2 = -2.0000$, а остальные два имеют знак $+$.

На основании ф-лы (4) имеем

$$64 \lg \alpha_1 = \lg A_1 \ = 30.53580$$

$$64 \lg \alpha_2 = \lg \frac{A_2}{A_1} = 19.26598$$

$$64 \lg \alpha_3 = \lg \frac{A_3}{A_2} = \bar{1}.99998$$

Отсюда сейчас же находятся и самые корни, и, как видно, они оказываются верными до пятого знака.

§ **15.** Первые три преобразования мы делали не пользуясь логарифмами, так как коэффициенты предложенного уравнения были весьма просты.

Если же эти коэффициенты выражаются многозначными числами, то выгоднее сразу вести вычисление по логарифмам. При этом вычисление может быть несколько упрощено, если преобразовать уравнение введением новой неизвестной так, чтобы известный член в новом уравнении был равен 1.

Для пояснения сделаем это для предыдущего примера, начиная с третьего преобразованного уравнения.

Это уравнение такое:

$$z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0 \qquad (*)$$

причем

$$\lg a_1 = 3.83366$$

$$\lg a_2 = 6.22698$$

$$\lg a_3 = 6.22522$$

Пусть будет

$$z = y \cdot a_3^{\frac{1}{3}}$$

Тогда ур-ние (*) примет вид

$$a_3 y^3 + a_1 a_3^{\frac{2}{3}} y^2 + a_2 a_3^{\frac{1}{3}} y + a_3 = 0$$

или по разделении на a_3

$$y_3 + a_1 a_3^{-\frac{1}{3}} y^2 + a_2 a_3^{-\frac{2}{3}} y + 1 = 0 \qquad (*)$$

и логарифмы новых коэффициентов будут

$$\lg a_1' = 1.75859; \quad \lg a_2' = 2.07683$$

так что уравнение для определения y есть

$$y^3 + a_1' y^2 + a_2' y + 1 = 0$$

и дальнейшие преобразования будут выполняться следующим образом (табл. 3):

Таблица 3

$n = 1$	0.00000	1.75859	2.07683	0.00000
$n = 2$	0.00000	3.51718 $\quad 3.2899 \cdot 10^3$ 2.37786 $\quad -0.2387 \cdot 10^3$ $\quad 3.0512 \cdot 10^3$ 3.48447	4.15366 $\quad 1.4245 \cdot 10^4$ 2.05962 $\quad -0.0115 \cdot 10^4$ $\quad 1.4130 \cdot 10^4$ 4.15014	0.00000
2	0.00000	3.48447	4.15014	0.00000
2^2	0.00000	6.96894 $\quad 9.3098 \cdot 10^6$ 4.45117 $\quad -0.0283 \cdot 10^6$ $\quad 9.2815 \cdot 10^6$ 6.96762	8.30028 $\quad 1.9965 \cdot 10^8$ 3.78548 $\quad -0.0000 \cdot 10^8$ $\quad 1.9965 \cdot 10^8$ 8.30028	0.00000
2^2	0.00000	6.96762	8.30028	0.00000
2^3	0.00000	13.93524 8.60131 13.93524	16.60056	0.00000
$2^3 = 8$	0.00000	13.93524	16.60056	0.00000

Таким образом, если обозначить через

$$\zeta = y^8 = \left(x^8 \cdot a_3^{-\frac{1}{3}}\right)^8 = x^{64} \cdot a_3^{-\frac{8}{3}}$$

то уравнение для ζ будет такое:

$$\zeta^3 + A_1' \zeta^2 + A_2' \zeta + 1 = 0$$

причем

$$\lg A_1' = 13.93514 \quad \text{и} \quad \lg A_2' = 16.60056$$

следовательно, уравнение, в коем неизвестная $z = x^{64}$, будет такое:

$$z^3 + A_1' a_3^{\frac{8}{3}} \cdot z^2 + A_2' a_3^{\frac{16}{3}} z + a_3^8 = 0$$

причем

$$\lg a_3 = 6.22522$$
$$\frac{8}{3}\lg a_3 = 16.60059$$

Таким образом получаем

$$64\lg\alpha_1 = 13.93524 + 16.60059 = 30.53583$$
$$64\lg\alpha_2 = 2.69532 + 16.60059 = 19.26591$$
$$64\lg\alpha_3 = 16.60059 - 16.60056 = 0.00003$$

Откуда

$$\lg\alpha_1 = 0.47712; \qquad \lg\alpha_2 = 0.30103; \qquad \lg\alpha_3 = 0.00000$$

и

$$\alpha_1 = 3.0000; \qquad \alpha_2 = -2.0000; \qquad \alpha_3 = 1.0000$$

как и раньше.

§ **16.** Положим теперь, что предложенное уравнение имеет мнимые корни; пусть, например,

$$\alpha_2 = g(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$
$$\alpha_3 = g(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

тогда

$$\alpha_2^m = g^m[\cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi]$$
$$\alpha_3^m = g^m[\cos m\varphi - \sqrt{-1}\sin m\varphi]$$

и

$$\begin{aligned} \alpha_2^m + \alpha_3^m &= 2g^m\cos m\varphi \\ (\alpha_2\alpha_3)^m &= g^{2m} \end{aligned} \tag{9}$$

Положим также, что остальные корни вещественные и что имеют место неравенства

$$\alpha_1 > g > \alpha_4 > \alpha_5 \ldots > \alpha_n \tag{10}$$

Тогда, если уравнение

$$F(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + A_3 z^{n-3} + \ldots + A_{n-1}z + A_n = 0$$

есть то, корни которого суть m-ые степени корней предложенного, взятые со знаком —, то, как мы видели, будет

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1^m + \alpha_2^m + \alpha_3^m + \alpha_4^m + \ldots \\ A_2 &= (\alpha_1\alpha_2)^m + (\alpha_1\alpha_3)^m + (\alpha_1\alpha_4)^m + \ldots \\ A_3 &= (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^m + (\alpha_1\alpha_2\alpha_4)^m + (\alpha_1\alpha_3\alpha_4)^m + \ldots \\ A_4 &= (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^m + (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^m + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{*}$$

Если m настолько велико, что будут иметь место неравенства

$$\begin{aligned} \alpha_1^{\,m} &> Kg^m \\ g^{\,m} &> K\alpha_4^{\,m} \\ \alpha_4^{\,m} &> K\alpha_5^{\,m} \end{aligned} \qquad (11)$$

и т. д., причем K есть столь большое число, что для вещественных корней имели бы место ф-лы (4) [т. е. для вычисления по пятизначным таблицам $K \geqslant 200\,000$], то предыдущие формулы напишутся так:

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1^{\,m}(1+\varepsilon_1) \\ A_2 &= \alpha_1^{\,m}(\alpha_2^{\,m}+\alpha_3^{\,m}) + \alpha_1^{\,m}\alpha_4^{\,m} + \ldots = 2\alpha_1^{\,m} g^m(\cos m\varphi + \varepsilon_2) \\ A_3 &= (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^m(1+\varepsilon_3) = \alpha_1^{\,m} g^{2m}(1+\varepsilon_3) \\ A_4 &= (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^m(1+\varepsilon_4) = \alpha_1^{\,m} g^{2m}\alpha_4^{\,m}(1+\varepsilon_3) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

причем $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \ldots$ малые дроби, не большие $\frac{1}{K}$ и, следовательно, не влияющие на последний знак логарифма; если эти дроби отбросить по сравнению с 1, то предыдущие формулы можно написать так:

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1^{\,m} \\ A_1 &= 2\alpha_1^{\,m} g^m \cos(m\varphi + \varepsilon_2) \\ A_3 &= \alpha_1^{\,m} g^{2m} \\ A_4 &= \alpha_1^{\,m} g^{2m} \alpha_4^{\,m} \\ A_5 &= \alpha_1^{\,m} g^{2m} \alpha_4^{\,m} \alpha_5^{\,m} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (12)$$

Из этих формул видно, что по мере возрастании числа m все коэффициенты в преобразованных уравнениях, кроме коэффициента A_2, будут стремиться к тому, что их логарифмы начнут удваиваться.

Совсем не то будет с коэффициентом A_2 — старший и главный член его заключает множитель $\cos m\varphi$, при изменениях числа m этот косинус может изменяться, принимая самые разнообразные значения и зачастую меняя свой знак; таким образом, при преобразованиях, в ходе этого коэффициента не будет никакой правильности, а перемена в нем знака будет служить явным признаком наличия мнимых корней. Из ф-л (12) мы сейчас же получаем

$$\begin{aligned} \alpha_1^{\,m} &= A_1 \\ g^{2m} &= \frac{A_3}{A_1} \\ \alpha_4^{\,m} &= \frac{A_4}{A_3} \\ \alpha_5^{\,m} &= \frac{A_5}{A_4} \end{aligned} \qquad (13)$$

и. т. д., т. е. мы найдем величины всех веществеыных корней и модуль мнимых.

Мы получили ф-лы (12) в силу допущенных неравенств (10).

Легко убедиться, что если бы величина g занимала в ряду корней место между α_i и α_{i+3}, то в предельном преобразованном уравнении коэффициенты расположились бы так:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \alpha_1{}^m \\
A_2 &= \alpha_1{}^m \alpha_2{}^m \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
A_i &= \alpha_1{}^m \alpha_2{}^m \alpha_3{}^m \dots \alpha_i{}^m \\
A_{i+1} &= 2\alpha_1{}^m \alpha_2{}^m \dots \alpha_i{}^m g^m (\cos m\varphi + \varepsilon_i) \text{ [неопред. и меняет знак]} \\
A_{i+2} &= \alpha_1{}^m \alpha_2{}^m \alpha_3{}^m \dots \alpha_i{}^m g^{2m} \\
A_{i+3} &= \alpha_1{}^m \alpha_2{}^m \alpha_3{}^m \dots \alpha_i{}^m g^{2m} \alpha_{i+3}
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

и т. д.

Из этих соотношений найдем все вещественные корни: $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_i$, χ_{i+3}, ... и т. д.; отношение $\frac{A_{i+2}}{A_i} = g^{2m}$ доставит величину модуля g мнимых корней.

Совершенно так же, предположив, что имеется две пары мнимых корней так что, например,

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 &= g_1 (\cos \varphi_1 + \sqrt{-1} \sin \varphi_1) \\
\alpha_3 &= g_1 (\cos \varphi_1 - \sqrt{-1} \sin \varphi_1)
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
\alpha_5 &= g_2 (\cos \varphi_2 + \sqrt{-1} \sin \varphi_2) \\
\alpha_6 &= g_2 (\cos \varphi_2 - \sqrt{-1} \sin \varphi_2)
\end{aligned}
$$

мы получили бы такие соотношения:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \alpha_1{}^m \\
A_2 &= 2\alpha_1{}^m g_1{}^m (\cos m\varphi_1 + \varepsilon_2) \\
A_3 &= \alpha_1{}^m g_1{}^{2m} \\
A_4 &= \alpha_1{}^m g_1{}^{2m} \alpha_4{}^m \\
A_5 &= 2\alpha_1{}^m g_1{}^{2m} \alpha_4{}^m g_2{}^m (\cos m\varphi_2 + \varepsilon_5) \\
A_6 &= \alpha_1{}^m g_1{}^{2m} \alpha_4{}^m g_2{}^{2m}
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

и т. д., из которых опять-таки найдутся величины вещественных корней и модули мнимых.

Нетрудно убедиться, что, каково бы ни было число пар мнимых корней и каков бы ни был порядок мест, занимаемых их модулями в ряду неравенств (10), всегда из отношения тех коэффициентов, ход которых правильный, найдем величины вещественных и модули мнимых корней.

Исключения составят те случаи, когда величины вещественных корней и модули мнимых будут между собою равны.

Эти исключительные случаи мы рассмотрим отдельно. Теперь же покажем, каким образом для каждого модуля находить соответствующий аргумент.

§ 17. В том случае, когда мнимых корней одна или две пары, нахождение аргументов по известному модулю почти не требует вычислений.

В самом деле, обращаясь к данному уравнению

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

замечаем, что по известному соотношению между корнями и коэффициентами имеет место равенство

$$-a_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + 2g\cos\varphi + \alpha_k + \ldots + \alpha_n \qquad (16)$$

из которого и найдется аргумент φ, соответствующий модулю g.

В том случае, когда имеется две пары мнимых корней

$$g_1(\cos\varphi_1 \pm \sqrt{-1}\sin\varphi_1)$$

и

$$g_2(\cos\varphi_2 \pm \sqrt{-1}\sin\varphi_2)$$

то стоит только в предложенном уравнении положить

$$x = \frac{1}{y}$$

а, значит,

$$y = \frac{1}{x}$$

то получится новое уравнение

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + a_{n-2} y^{n-2} + \ldots + a_2 y^2 + a_1 y + 1 = 0$$

или иначе

$$y^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} y^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n} y^{n-2} + \ldots + \frac{a_2}{a_n} y^2 + \frac{a_1}{a_n} y + \frac{1}{a_n} = 0$$

корни которого суть

$$\frac{1}{\alpha_1}, \quad \frac{1}{\alpha_2}, \quad \ldots \frac{1}{g_1}[\cos\varphi_1 \pm \sqrt{-1}\sin\varphi_1]; \quad \frac{1}{g_2}[\cos\varphi_2 \pm \sqrt{-1}\sin\varphi_2] \ldots$$

и из которого следует соотношение

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{2}{g_1}\cos\varphi_1+\frac{2}{g_2}\cos\varphi_2+\ldots+\frac{1}{\alpha_n} \tag{17}$$

которое вместе с соотношением

$$-a_1=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+2g_1\cos\varphi_1+2g_2\cos\varphi_2+\ldots+\alpha_n \tag{18}$$

следующим из заданного уравнения, и доставит величины аргументов φ_1 и φ_2.

Нетрудно также и в случае трех пар мнимых корней, не прибегая к общей теории, по найденным вещественным корням и модулям мнимых найти соответствующие им аргументы, стоит только к ур-ниям (17), (18) присоединить аналогичные им, относящиеся к первому преобразованному уравнению, т. е. к тому, коего корни суть

$$\alpha_1^2,\ \alpha_2^2,\ldots\ g_1^2(\cos 2\varphi_1\pm\sqrt{-1}\sin 2\varphi_1);\qquad g_2^2(\cos 2\varphi_2\pm\sqrt{-1}\sin 2\varphi_2);$$
$$g_3^2(\cos 2\varphi_3\pm\sqrt{-1}\sin 2\varphi_3)\ldots\alpha_n^2$$

И у нас получится такая система уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1+\alpha_2+\ldots+2g_1\cos\varphi_1+2g_2\cos\varphi_2+2g_3\cos\varphi_3+\ldots+\alpha_n=-a_1\\
&\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+2\frac{1}{g_1}\cos\varphi_1+2\frac{1}{g_2}\cos\varphi_2+2\frac{1}{g_3}\cos\varphi_3+\ldots+\frac{1}{\alpha_n}=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\\
&\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+2g_1^2\cos 2\varphi_1+2g_2^2\cos 2\varphi_2+2g_3^2\cos 2\varphi_3+\ldots+\alpha_n^2=-A\\
&\frac{1}{\alpha_1^2}+\frac{1}{\alpha_2^2}+\ldots+2\frac{1}{g_1^2}\cos 2\varphi_1+2\frac{1}{g_2^2}\cos 2\varphi_2+2\frac{1}{g_3^2}\cos 2\varphi_3+\ldots+\frac{1}{\alpha_n^2}=-\frac{A_{n-1}}{A_n}
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Полагая для краткости

$$\cos\varphi_1=t_1;\qquad \cos\varphi_2=t_2;\qquad \cos\varphi_3=t_3$$

и замечая, что

$$\cos 2\varphi_1=2\cos^2\varphi_1-1;\quad \cos 2\varphi_2=2\cos^2\varphi_2-1;\quad \cos 2\varphi_3=2\cos^2\varphi_3-1$$

видим, что предыдущие уравнения принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
g_1t_1+g_2t_2+g_3t_3&=b_1\\
\frac{1}{g_1}t_1+\frac{1}{g_2}t_2+\frac{1}{g_3}t_3&=b_2\\
g_1^2t_1^2+g_2^2t_2^2+g_3^2t_3^2&=b_3\\
\frac{1}{g_1^2}t_1^2+\frac{1}{g_2^2}t_2^2+\frac{1}{g_3^2}t_3^2&=b_4
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

из первых двух уравнений найдем выражения вида

$$\begin{aligned}t_2&=c_1t_1+d_1\\ t_3&=c_2t_1+d_2\end{aligned} \tag{20'}$$

и, по подстановке в последние два, получим два уравнения вида

$$m_1 t_1^2 + n_1 t_1 = p_1$$
$$m_2 t_1^2 + n_2 t_1 = p_2$$

или иначе

$$t_1^2 + \frac{n_1}{m_1} t_1 = \frac{p_1}{m_1}$$
$$t_1^2 + \frac{n_2}{m_2} t_1 = \frac{p_2}{m_2}$$

и так как t_1 есть *общий корень* обоих этих уравнений, то

$$t_1 = \frac{p_1 m_2 - p_2 m_1}{n_1 m_2 - n_2 m_1} \tag{21}$$

после чего по ф-ле (20') найдутся t_2 и t_3.

§ 18. В общем случае, когда число пар мнимых корней больше трех, изложенные выше частные приемы не ведут к цели, поэтому покажем общий способ нахождения аргумента, соответствующего данному модулю.

Паре мнимых корней соответствует трехчлен $x^2 - 2gx\cos\varphi + g^2$, на который должна делиться нацело функция $f(x)$, представляющая первую часть данного уравнения.

Обозначая для краткости

$$2g\cos\varphi = p$$

мы приходим к такой задаче: дан многочлен

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \tag{22}$$

и дана величина g^2, определить величину p так, чтобы многочлен $f(x)$ делился нацело на трехчлен

$$x^2 - px + g^2 \tag{23}$$

Решение этой задачи может быть выполнено весьма разнообразными способами. Простейший по идее такой: оставляя p неопределенным, будем выполнять деление многочлена $f(x)$ на трехчлен $x^2 - px + g^2$ до тех пор, пока получим остаток первой степени относительно x.

Пусть этот остаток будет

$$Px + Q$$

здесь P и Q выразятся как известные функции от p, а именно: P будет целый относительно p многочлен степени $n-1$, и Q — таковой же многочлен степени $n-2$, т. е. будет

$$P = p^{n-1} + b_1 p^{n-2} + \ldots + b_{n-2} p + b_{n-1} \tag{24}$$

$$Q = p^{n-2} + c_1 p^{n-3} + \ldots + c_{n-3} p + c_{n-2} \tag{25}$$

Так как величина p должна быть такова, чтобы деление выполнялось нацело, то необходимо, чтобы было

$$P = 0 \text{ и } Q = 0 \tag{26}$$

следовательно, p есть общий корень ур-ний (25), и, значит, его величина может быть найдена также простым делением, а именно: многочлены P и Q будут иметь общего делителя вида $p - h$, тогда величина

$$p = h$$

и есть искомая.

Поясним это рассуждение примером.

Положим, что для уравнения

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2 = 0$$

найдено, что

$$g^2 = 1$$

т. е. что $f(x)$ имеет трехчленного делителя вида

$$x^2 - px + 1$$

надо найти p.

Совершаем деление:

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + 2x^3 + x + 2 & x^2 - px + 1 \\
\hline
-x^4 \pm px^3 \mp x^2 & x^2 + (p+2)x + (p^2 + 2p - 1) \\
\quad (p+2)x^3 - x^2 + x & \\
\quad -(p+2)x^3 \pm (p^2 + 2p)x^2 \mp (p+2)x & \\
\qquad (p^2 + 2p - 1)x^2 - (p+1)x + 2 & \\
\qquad -(p^2 + 2p - 1)x^2 \pm (p^3 + 2p^2 - p)x \mp (p^2 + 2p - 1) & \\
\qquad\qquad (p^3 + 2p^2 - 2p - 1)x - (p^2 + 2p - 3) &
\end{array}$$

Значит, искомая величина p есть общий корень уравнений

$$P = p^3 + 2p^2 - 2p - 1 = 0$$

и

$$Q = p^2 + 2p - 3 = 0$$

Чтобы определить этот общий корень, ищем общего наибольшего делителя многочленов

$$p^3 + 2p^2 - 2p - 1 \text{ и } p^2 + 2p - 3$$

имеем

$$\begin{array}{l|l} p^3+2p^2-2p-1 & p^2+2p-3 \\ \underline{-p^3\mp 2p^2\pm 3p} & p \\ \qquad p-1 & \end{array}$$

Затем

$$\begin{array}{l|l} p^2+2p-3 & p-1 \\ \underline{p^2\pm p} & p+3 \\ \quad 3p-3 & \\ \quad \underline{3p-3} & \end{array}$$

Значит, общий наибольший делитель есть $p-1$, и искомое значение p есть

$$p-1$$

следовательно, искомый трехчлен есть

$$x^2-x+1$$

и, в самом деле,

$$x^4+2x^3+x+2=(x^2-x+1)(x^2+3x+2)$$

Хотя описанный прием и весьма прост по идее, но по выкладкам он сложен, в особенности для уравнений высокой степени, поэтому Энке, развивший способ Греффе в статье, помещенной в „Berliner Astronomisches Jahrbuch“ за 1841 г., предлагает другую методу, сущность которой состоит в следующем:

Какой бы степени ни было предложенное уравнение

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

всегда можно распорядиться так, чтобы эта степень была четною, так как если n нечетное, то стоит только, умножив первую часть уравнения на x, рассматривать новое уравнение

$$x^{n+1}+a_1x^n+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n+1}x^2+a_nx=0$$

которое имеет все те же самые корни, как и предложенное, и, сверх того, еще корень $x=0$.

Итак будем писать наше уравнение в виде

$$\begin{gathered} x^{2k}+a_1x^{2k-1}+a_2x^{2k-2}+\ldots+a_{k-1}x^{k+1}+a_kx^k+ \\ +a_{k+1}x^{k-1}+\ldots a_{2k-1}x+a_{2k}=0 \end{gathered} \tag{27}$$

и положим, что величина g есть найденная величина модуля одной из пар мнимых корней, так что эти корни суть

$$\begin{aligned} \alpha_i &= g(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) \\ \alpha_{i+1} &= g(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi) \end{aligned} \tag{28}$$

требуется определить величину аргумента φ.

Подставив величины (28) в первую часть ур-ния (27) и приравнивая отдельно нулю вещественную и мнимую часть, мы получим для определения φ уравнения

$$\begin{aligned} & g^{2k}\cos 2k\varphi + a_1 g^{2k-1}\cos(2k-1)\varphi + \ldots + a_{k-1}g^{k+1}\cos(k+1)\varphi + \\ & \qquad + a_k g^k \cos k\varphi + \ldots + a_{2k} = 0 \\ & g^{2k}\sin 2k\varphi + a_1 g^{2k-1}\sin(2k-1)\varphi + \ldots + a_{k-1}g^{k+1}\sin(k+1)\varphi + \\ & \qquad + a_k g_k \sin k\varphi + \ldots + a_{2k-1} g \sin\varphi = 0 \end{aligned} \tag{29}$$

Умножив первое уравнение на $\cos k\varphi$, второе — на $\sin k\varphi$ и сложив оба произведения, а затем умножив первое уравнение на $\sin k\varphi$ и второе на $\cos k\varphi$ и вычтя первое произведение из второго, получим два новых уравнения, которые по разделении на g^{2k} окажутся

$$\begin{aligned} & \beta\cos k\varphi + \frac{\beta_1}{g}\cos(k-1)\varphi + \frac{\beta_2}{g^2}\cos(k-2)\varphi + \ldots \\ & \qquad + \frac{\beta_{k-1}}{g^{k-1}}\cos\varphi + \frac{\beta_k}{2g^k} = 0 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\gamma\sin k\varphi + \frac{\gamma_1}{g}\sin(k-1)\varphi + \frac{\gamma_2}{g_2}\sin(k-2)\varphi + \ldots + \frac{\gamma_{k-1}}{g^{k-1}}\sin\varphi = 0 \tag{31}$$

причем положено

$$\begin{array}{ll} 1 + a_{2k}g^{-2k} = \beta; & 1 - a_{2k}g^{-2k} = \gamma \\ a_1 + a_{2k-1}g^{-(2k-2)} = \beta_1; & a_1 - a_{2k-1}g^{-(2k-2)} = \gamma_1 \\ a_2 + a_{2k-2}g^{-(2k-4)} = \beta_2; & a_2 - a_{2k-2}g^{-(2k-4)} = \gamma_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k-1} + a_{k+1}g^{-2} = \beta_{k-1}; & a_{k-1} - a_{k+1}g^{-2} = \gamma_{k-1} \\ a_k + a_k = \beta_k & \end{array} \tag{32}$$

Для решения ур-ний (30) Энке пользуется тем обстоятельством, что для всякого целого числа n как $\cos n\varphi$, так и $\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$ выражаются через целые степени $\cos\varphi$.

Формулы, сюда относящиеся, были даны И. Бернулли и затем Эйлером еще в 1720-х годах. Эти формулы следующие:

$$2\cos n\varphi = (2\cos\varphi)^n - \frac{n}{1}(2\cos\varphi)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}(2\cos\varphi)^{n-4} -$$
$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}(2\cos\varphi)^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(2\cos\varphi)^{n-8} -$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} = (2\cos\varphi)^{n-1} - \frac{n-2}{1}(2\cos\varphi)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}(2\cos\varphi)^{n-5} - \qquad (33)$$
$$-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}(2\cos\varphi)^{n-7} +$$
$$+\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(2\cos\varphi)^{n-9} -$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Полагая: $-2g\cos\varphi = t$ или $2\cos\varphi = -\frac{t}{g}$, делая затем в ф-ле (33) $n = k,\ k-1, \ldots$, подставляя полученные величины в ур-ния (30), получим для определения t следующие два уравнения:

$$\beta t^k - \beta_1 t^{k-1} + \beta_2 t^{k-2} - \beta_3 t^{k-3} + \ldots + (-1)^k \beta_k -$$
$$-g^2\left[k\beta t^{k-2} - (k-1)\beta_1 t^{k-3} + (k-2)\beta_2 t^{k-4} - \ldots\right] +$$
$$+g^4\left[\frac{k(k-3)}{1\cdot 2}\beta t^{k-4} - \frac{(k-1)(k-4)}{1\cdot 2}\beta_1 t^{k-5} + \frac{(k-2)(k-5)}{1\cdot 2}\beta_2 t^{k-6} - \ldots\right] -$$
$$-g^6\left[\frac{k(k-4)(k-5)}{1\cdot 2\cdot 3}\beta t^{k-6} - \frac{(k-1)(k-5)(k-6)}{1\cdot 2\cdot 3}\beta_1 t^{k-7} + \ldots\right] + \qquad (34)$$
$$+g^8\left[\frac{k(k-5)(k-6)(k-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\beta t^{k-8} - \ldots\right] -$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

и

$$\gamma t^{k-1} - \gamma_1 t^{k-2} + \gamma_2 t^{k-3} - \gamma_3 t^{k-4} + \ldots + (-1)^{k-1}\gamma_{k-1} -$$
$$-g^2(k-2)\gamma t^{k-3} - (k-3)\gamma_1 t^{k-4} + (k-4)\gamma_2 t^{k-5} - \ldots] +$$
$$+g^4\left[\frac{(k-3)(k-4)}{1\cdot 2}\gamma t^{k-5} - \frac{(k-4)(k-5)}{1\cdot 2}\gamma_1 t^{k-6} + \ldots\right] - \qquad (35)$$
$$-g^6\left[\frac{(k-4)(k-5)(k-6)}{1\cdot 2\cdot 3}\gamma t^{k-7} - \frac{(k-5)(k-6)(k-7)}{1\cdot 2\cdot 3}\gamma_1 t^{k-8} + \ldots\right] +$$
$$+g^8\left[\frac{(k-5)(k-6)(k-7)(k-8)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\gamma t^{k-9} - \ldots\right] -$$
$$-[\,]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

Искомая величина t есть общий корень этих двух уравнений и, следовательно, найдется розысканием общего наибольшего делителя многочленов, представляющих первые части ур-ний (34) и (35).

В простейших случаях ур-ния (34) и (35) суть следующие:

1) Предложенное уравнение 4-й степени

$$f(x) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

$$\begin{aligned} 1 + a_4 g^{-4} &= \beta; & 1 - a_4 g^{-4} &= \gamma \\ a_1 + a_3 g^{-2} &= \beta_1; & a_1 - a_3 g^{-2} &= \gamma_1 \\ 2a_2 &= \beta_2; \end{aligned}$$

$$\beta t^2 - \beta_1 t + (\beta_2 - 2\beta g^2) = 0$$

$$\gamma t - \gamma_1 = 0$$

как видно, в этом случае второе из уравнений и дает искомую величину t, первое может служить поверкою.

2) Предложенное уравнение 6-й степени

$$f(x) = x^6 + a_1 x^5 + a_2 x^4 + a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_5 x + a_6 = 0$$

$$\begin{aligned} 1 + a_6 g^{-6} &= \beta; & 1 - a_6 g^{-6} &= \gamma \\ a_1 + a_5 g^{-4} &= \beta_1; & a_1 - a_5 g^{-4} &= \gamma_1 \\ a_2 + a_4 g^{-2} &= \beta_2; & a_2 - a_4 g^{-2} &= \gamma_2 \\ 2a_3 &= \beta_3; \end{aligned}$$

$$\beta t^3 - \beta_1 t^2 + (\beta_2 - 3\beta g^2) t - (\beta_3 - 2\beta_1 g^2) = 0$$

$$\gamma t^2 - \gamma_1 t + (\gamma_2 - \gamma g^2) = 0$$

3) Предложенное уравнение 8-й степени

$$f(x) = x^8 + a_1 x^7 + a_2 x^6 + a_3 x^5 + \ldots + a_7 x + a_8 = 0$$

$$\begin{aligned} 1 + a_8 g^{-8} &= \beta; & 1 - a_8 g^{-8} &= \gamma \\ a_1 + a_7 g^{-6} &= \beta_1; & a_1 - a_7 g^{-6} &= \gamma_1 \\ a_2 + a_6 g^{-4} &= \beta_2; & a_2 - a_6 g^{-4} &= \gamma_2 \\ a_3 + a_5 g^{-2} &= \beta_3; & a_3 - a_5 g^{-2} &= \gamma_3 \\ 2a_4 &= \beta_4; \end{aligned}$$

$$\beta t^4 - \beta_1 t^3 + (\beta_2 - 4\beta g^2) t^2 - (\beta_3 - 3\beta_1 g^2) t + \beta_4 - 2\beta_2 g^2 + 2\beta g^4] = 0$$

$$\gamma t^3 - \gamma_1 t^2 + (\gamma_2 - 2\gamma g^2) t - (\gamma_3 - \gamma_1 g^2) = 0$$

Таким образом по данному модулю g найдется соответствующий трехчлен

$$x^2 - 2g \cos\varphi \cdot x + g^2 = x^2 + tx + g^2$$

что только и требуется для определения величин обоих мнимых корней.

Как видно, для определения величины t не придется решать ур-ния (34) и (35), а все сводится к делению и подстановкам.

Так как величины g^2 и зависящих от него коэффициентов в ур-ниях (34) и (35) будут по большей части несоизмеримые, и все вычисление производится по логарифмам, то и розыскание общего наибольшего делителя многочленов (34) и (35) Энке советует производить, пользуясь Гауссовыми логарифмами сумм и разностей, следующим образом:

Пусть данные многочлены суть

$$ct^n + c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} + \ldots + c_{n-1} t + c_n$$
$$bt^{n-1} + b_1 t^{n-1} + b_2 t^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$$

подыскав логарифмы коэффициентов $c, c_1, \ldots c_n, b, b_1, \ldots b_{n-1}$ и вычитая $\lg c$ и $\lg b$ из остальных, напишем наши многочлены так:

$$t^n + \delta_1 t^{n-1} + \delta_2 t^{n-2} + \ldots + \delta_{n-1} t + \delta_n$$
$$t^{n-1} + \varepsilon_1 t^{n-2} + \varepsilon_2 t^{n-3} + \ldots + \varepsilon_{n-1}$$

вычитаем соответствующие коффициенты один из другого и по аргументам

$$|\delta_1 - \varepsilon_1|, \ |\delta_2 - \varepsilon_2|, \ldots |\delta_{n-1} - \varepsilon_{n-1}|$$

абсолютных величин разностей их ищем сообразно знакам Гауссовы логарифмы сумм или разностей, которые, будучи приданы к соответствующим логарифмам, дадут логарифмы коэффициентов первого остатка в таком виде:

$$\xi t^{n-1} + \xi_1 t^{n-2} + \ldots + \xi_{n-1}$$

Вычитая ξ из остальных коэффициентов и полагая

$$\xi_1 - \xi = \lambda_1; \quad \xi_2 - \xi = \lambda_2; \ldots \xi_{n-1} - \xi = \lambda_{n-1}$$

получим

$$t^{n-1} + \lambda_1 t^{n-2} + \ldots + \lambda_{n-1}$$

и

$$t^{n-1} + \varepsilon_1 t^{n-2} + \ldots + \varepsilon_{n-1}$$

Вычтя и подыскав Гауссовы логарифмы, получим остаток первого деления в виде

$$\mu t^{n-2} + \mu_1 t^{n-3} + \ldots + \mu_{n-2}$$

на который затем совершенно так же делим многочлен

$$t^{n-1} + \varepsilon_1 t^{n-2} + \ldots + \varepsilon_{n-1}$$

и определяем остаток и т. д...

Так, например, положим, надо найти общий корень уравнений

$$t^4 - 0.56807\,t^3 - 8.7762\,t^2 + 0.73914\,t + 9.6278 = 0$$
$$t^3 + 0.56807\,t^2 - 4.3881\,t - 4.2464 = 0$$

Написав оба многочлена с логарифмическими коэффициентами, перед которыми поставлены надлежащие членам знаки, имеем

$$t^4 - \bar{1}.75440\,t^3 - 0.94331\,t^2 + \bar{1}.86872\,t + 0.98353$$
$$t^3 + \bar{1}.75440\,.^2 - 0.64228\,t - 0.62802$$

Аргументы	0.00000 *Ad*	0.30103 *Sub*	0.75930 *Ad*
Лог. Гаус.	0.30103	0.30103	0 06969

$$-0.05543\,t^3 - 0.64228\,t^2 + 0.69771\,t + 0.98353$$
$$t^3 + 0.58685\,t^2 - 0.64228\,t - 0.92810$$
$$t^3 + \bar{1}.75440\,t^2 - 0.64228\,t - 0.62802$$

Аргументы	0.83245 *Sub*	0.00000 *Sub*	0.30008 *Sub*
Лог. Гаус.	0.06909	∞	0.30198

$$0.51776\,t^2 \qquad - 0.62612$$

I остаток $\quad t^2 \qquad - 0.10836$

$$t^3 + \bar{1}.75440\,t^2 - 0.64228\,t - 0.62802$$
$$t^2 \qquad - 0.10836$$

Аргументы . .	0 53392 *Sub*
Лог. Гаус . . .	0.15025

$$+\bar{1}.75440\,t^2 - 0.49203\,t - 0.62802$$
$$t^2 - 0.73763\,t - 0.87362$$
$$t^2 \qquad - 0.10836$$

Аргументы	0.76526 *Sub*
Лог. Гаус.	0.08181

$$0.73763\,t - 0.79181$$
$$t + 0.05418$$

Итак, общий наибольший делитель есть

$$t + 0.05418$$

а так как число, соответствующее логарифму 0.05418, есть 1.1326, то общий корень есть

$$t = -1.1326$$

§ 19. Прежде чем перейти к примерам, заметим, что в случае двух весьма близких корней, например, α_2, α_3, система (*) § 16, т. е.

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1{}^m + \alpha_2{}^m + \alpha_3{}^m + \alpha_4{}^m + \ldots \\ A_2 &= (\alpha_1\alpha_2)^m + (\alpha_1\alpha_3)^m + \ldots \\ A_3 &= (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^m + (\alpha_1\alpha_2\alpha_4)^m + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

не доставила бы величины корней в отдельности, ибо логарифмы коэффициента A_2 не стали бы удваиваться, так как в этом коэффициенте члены $(\alpha_1\alpha_2)^m$ $(\alpha_1\alpha_3)^m$ имели бы весьма близкую друг к другу величину, но та же система из отношения коэффициентов $\frac{A_3}{A_1}$ дает произведение $\alpha_2\alpha_3$ этих корней.

Таким образом, для пары множителей

$$(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) = x^2 - (\alpha_2+\alpha_3)x + \alpha_2\alpha_3$$

будет соответствующий трехчлен

$$x^2 + tx + v$$

в котором величина v известна, и, следовательно, надо будет найти соответствующее значение t.

Само собою разумеется, что первая, из указанных в § 18, метода приложима без всяких изменений.

Нетрудно показать, что и вторая метода точно так же приложима в этом случае, но, прежде чем выводить относящиеся сюда формулы, сделаем следующее замечание: когда рассматриваемый трехчлен соответствует паре мнимых корней, то известный его член непременно положительный, в случае же вещественных корней о знаке величины v ничего сказать a priori нельзя; так как эта величина определяется по четной ее степени, то и неизвестно, какой знак ей приписать. поэтому следует брать первое из преобразованных уравнений, коего корни суть

$$-\alpha_2{}^2 \text{ и } -\alpha_3{}^2$$

и, значит, соответствующий трехчлен есть

$$(x+\alpha_2{}^2)(x+\alpha_3{}^2) = x^2 + t_1 x + (\alpha_2\alpha_3)^2$$

причем величина $(\alpha_2\alpha_3)^2$ непременно положительная, и мы попрежнему обозначим ее через g^2.

Пусть первое преобразованное уравнение будет

$$f(z) = z^{2k} + c_1 z^{2k-1} + c_2 z^{2k-2} + \ldots + c_k z^k + \ldots + c_{2k-1} z + c_{2k} = 0$$

сделаем

$$z = gy$$

тогда это уравнение примет вид

$$F(y) = y^{2k} + \frac{c_1}{g} y^{2k-1} + \frac{c_2}{g^2} y^{2k-2} + \ldots + \frac{c_k}{g^k} y^k + \\ + \ldots + \frac{c_{2k-1}}{g^{2k-1}} \cdot y + \frac{c_{2k}}{g^{2k}} = 0 \tag{36}$$

пара корней этого уравнения, которую мы ищем, есть

$$-\lambda = -\frac{\alpha_2^2}{g} \quad \text{и} \quad -\mu = -\frac{\alpha_3^2}{g} \tag{37}$$

и притом

$$\lambda\mu = \frac{\alpha_2^2 \alpha_3^2}{g^2} = 1$$

и соответствующий трехчлен есть

$$y^2 + ty + 1 = (y + \lambda)(y + \mu)$$

так что

$$\lambda + \mu = t$$

и

$$\lambda\mu = 1 \tag{38}$$

Так как $-\lambda$ и $-\mu$ суть корни ур-ния (36), о будет

$$\lambda^{2k} - \frac{c_1}{g} \lambda^{2k-1} + \frac{c_2}{g^2} \lambda^{2k-2} - \ldots - (-1)^k \frac{c_k}{g^k} \lambda^k + \\ + \ldots - \frac{c_{2k-1}}{g^{2k-1}} \lambda + \frac{c_{2k}}{g^{2k}} = 0$$

или иначе

$$\lambda^k - \frac{c_1}{g} \lambda^{k-1} + \frac{c_2}{g^2} \lambda^{k-2} - \ldots + (-1)^k \frac{c_k}{g^k} + \\ + \ldots - \frac{c_{2k-1}}{g^{2k-1}} \lambda^{-k+1} + \frac{c_{2k}}{g^{2k}} \lambda^{-k} = 0$$

а так как

$$\lambda^{-1} = \mu$$

то это уравнение можно написать так:

$$\lambda^k - \frac{c_1}{g} \lambda^{k-1} + \frac{c_2}{g^2} \lambda^{k-2} - \ldots + (-1)^k \frac{c_k}{g^k} + \\ + \ldots - \frac{c_{2k-1}}{g^{2k-1}} \mu^{k-1} + \frac{c_{2k}}{g^{2k}} \mu^k = 0 \tag{39}$$

Совершенно так же поступив с корнем μ, получим уравнение

$$\begin{gathered}\mu^k - \frac{c_1}{g}\mu^{k-1} + \frac{c^2}{g^2}\mu^{k-2} - \ldots + (-1)^k \frac{c_k}{g^k} + \\ + \ldots - \frac{c_{2k-1}}{g^{2k-1}}\lambda^{k-1} + \frac{c_{2k}}{g^{2k}}\lambda^k = 0\end{gathered} \tag{40}$$

Сложив ур-ния (39) и (40), а затем вычтя (40) из (39) и делая нижепоказанные обозначения, будем иметь

$$\begin{gathered}\beta(\lambda^k + \mu^k) - \frac{\beta_1}{g}(\lambda^{k-1} + \mu^{k-1}) + \frac{\beta_2}{g^2}(\lambda^{k-2} + \mu^{k-2}) - \ldots + \\ + (-1)^k \beta_k = 0 \\ \gamma(\lambda^k - \mu^k) - \frac{\gamma_1}{g}(\lambda^{k-1} - \mu^{k-1}) + \frac{\gamma_2}{g^2}(\lambda^{k-2} - \mu^{k-2}) - \ldots + \\ + (-1)^{k-1}(\lambda - \mu) = 0\end{gathered} \tag{41}$$

причем

$$\begin{array}{ll} 1 + c_{2k} g^{-2k} = \beta; & 1 - c_{2k} g^{-2k} = \gamma \\ c_1 + c_{2k-1} g^{-(2k-2)} = \beta_1; & c_1 - c_{2k-1} g^{-(2k-2)} = \gamma_1 \\ c_2 + c_{2k-2} g^{-(2k-4)} = \beta_2; & c_2 - c_{2k-2} g^{-(2k-4)} = \gamma_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 2c_k = \beta_k; & c_{k-1} - c_{k-1} g^{-2} = \gamma_{k-1} \end{array} \tag{42}$$

Эти формулы, как видно, совершенно аналогичны ф-лам (30), (31) и (32), только вместо $\cos k\varphi$ стоит $\lambda^k + \mu^k$ и вместо $\sin k\varphi \ldots \lambda^k - \mu^k$, но если обратиться к выводу ф-л (33), то мы увидим, что $\cos k\varphi$ и $\frac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}$ выражаются совершенно так же через $2\cos\varphi$, как величины $\lambda^k + \mu^k$ и $\frac{\lambda^k - \mu^k}{\lambda - \mu}$ через $\lambda + \mu$, где λ и μ суть корни уравнения

$$x^2 - tx + 1 = 0$$

а, значит, $-\lambda$ и $-\mu$ корни уравнения

$$y^2 + ty + 1 = 0$$

Наиболее общий вывод этих формул дан Лагранжем в его „Calcul des fonctions“ (leçon XI). Лагранж рассматривает уравнение

$$z^2 - 2pz + 1 = 0$$

коего корни суть

$$\begin{gathered}z_1 = p + \sqrt{p^2 - 1} \\ z_2 = p - \sqrt{p^2 - 1}\end{gathered}$$

и обращает внимание, что, сделав

$$p = \cos\varphi$$

и, следовательно,

$$\sqrt{1-p^2} = \sin\varphi$$

будет

$$z_1 = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$$
$$z_2 = \cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi$$

откуда следует

$$2\cos n\varphi = z_1^n + z_2^n = (p + \sqrt{p^2-1})^n + (p - \sqrt{p^2-1})^n$$

и

$$2\sqrt{-1}\sin n\varphi = z_1^n - z_2^n = (p + \sqrt{p^2-1})^n - (p - \sqrt{p^2-1})^n$$

разлагая затем вторые части этих равенств по степеням p, получим выражения $z_1^n + z_2^n$ и $\frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2}$ в функции p, из которых, сделав $p = \cos\varphi$, и получаются ф-лы (33).[1] Таким образом получается

$$\begin{aligned}
&\lambda^n + \mu^n = t^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}t^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}t^{n-6} + \ldots \\
&\frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu} = t^{n-1} - (n-2)t^{n-3} + \\
&\quad + \frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}t^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}t^{n-7} + \ldots
\end{aligned} \tag{43}$$

---

[1] Ф-лы (43) могут быть выведены также следующим образом: возьмем произведение

$$(z-\lambda)\left(z-\frac{1}{\lambda}\right) = z^2 - \left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)z + 1 = (1-\lambda z)\left(1-\frac{z}{\lambda}\right)$$

и, обозначая $\lambda + \frac{1}{\lambda}$ через t, имеем тожество

$$(1-\lambda z)\left(1-\frac{z}{\lambda}\right) = 1 - z(t-z)$$

Откуда, взяв логарифмы:

$$\lg\left[(1-\lambda z)\left(1-\frac{z}{\lambda}\right)\right] = \lg(1-\lambda z) + \lg\left(1-\frac{z}{\lambda}\right) = \lg[1-z(t-z)]$$

Разлагая логарифмы в ряды, получаем

$$\begin{aligned}
&\lambda z + \frac{1}{2}\lambda^2 z^2 + \frac{1}{3}\lambda^3 z^3 + \ldots + \frac{1}{n}\lambda^n z^n + \ldots \\
&+ \frac{z}{\lambda} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{\lambda^2} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{\lambda^3} + \ldots + \frac{1}{n}\frac{z^n}{\lambda^n} + \ldots
\end{aligned} = z(t-z) + \frac{1}{2}z^2(t-z)^2 + \ldots + \frac{1}{n}z^n(t-z)^n + \ldots$$

так как это равенство есть тожество, то коэффициенты при одинаковых степенях z

и, следовательно, все дальнейшие преобразования будут совершенно подобны тому, как в § 18, и ф-лы (34) и (35) будут иметь место и для нашего случая без всяких изменений и, следовательно, послужат для определения трехчлена, соответствующего паре весьма близких корней.

§ **20.** Прежде чем приводить ряд примеров, обратим внимание на такие случаи, когда изложенные выше приемы не ведут к цели, т. е. к определению вещественных корней, весьма близких между собою.

Самый невыгодный случай тот, когда имеется несколько пар мнимых корней, имеющих равные модули; так, например, если взять уравнение

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

то первое преобразованное будет

$$z^4 \begin{array}{r} +1 \\ -2 \end{array} \left| z^3 \begin{array}{r} +1 \\ -2 \\ +2 \end{array} \right| z^2 \begin{array}{r} +1 \\ -2 \end{array} \Bigg| \; z \quad +1 \quad = 0$$

в обеих частях его должны быть между собою равны. Отберем члены с z^n. В левой части коэффициент есть $\frac{1}{n}\left(\lambda^n + \frac{1}{\lambda^n}\right)$, в правой части надо их отобрать из члена $\frac{1}{n} z^n (t - z^n)$ и членов, ему предшествующих, именно:

для члена	$\frac{1}{n} z^n (t-z)^n$	будет	$\frac{1}{n} t^n$
„ „	$\frac{1}{n-1} z^{n-1} (t-z)^{n-1}$	„	$-\frac{1}{n-1}(n-1) t^{n-2}$
„ „	$\frac{1}{n-1} z^{n-2} (t-z)^{n-2}$	„	$+\frac{1}{n-2} \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} t^{n-4}$
„ „	$\frac{1}{n-3} z^{n-3} (t-z)^{n-3}$	„	$-\frac{1}{n-3} \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} t^{n-6}$

. . . .

Вообще для члена $\frac{1}{n-h} z^{n-h} (t-z)^{n-h}$ будет

$$\frac{(-1)^h}{n-h} \cdot \frac{(n-h)(n-h-1)(n-h-2)\ldots(n-2h+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots h} t^{n-2h}$$

Отсюда, по сокращении, следует

$$\begin{aligned} \lambda^n + \frac{1}{\lambda^n} = t^n - n t^{n-2} - \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} t^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} t^{n-6} + \ldots \\ + (-1)^h \frac{n(n-h-1)(n-h-2)\ldots(n-2h+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots} t^{n-2h} + \ldots \end{aligned} \qquad (43')$$

причем в правой части надо окончить ряд, пока степень t не стала отрицательной. Таким образом получим первую из ф-л (43), ибо $\frac{1}{\lambda} = \mu$.

т. е.

$$z^4-z^3+z^2-z+1=0$$

второе преобразованное будет

$$\begin{array}{ll|ll|ll|lll}
z^4 & +1 & z^3 & +1 & z^2 & +1 & z & +1 & =0 \\
 & -2 & & -2 & & -2 & & & \\
 & & & +2 & & & & &
\end{array}$$

т. е.

$$z^4-z^3+z^2-z+1=0$$

и т. д., что ясно показывает, что преобразования не ведут к цели.

Если при вычислении обнаружится, что шесть или семь преобразований не отделяют корней, а присутствие отрицательных коэффициентов в преобразованных уравнениях укажет на существование мнимых корней, то это будет служить указанием, что модули этих корней весьма близки между собою, тогда придется все вычисление начать вновь, предварительно преобразовав уравнение, приняв за новую неизвестную величину

$$y=x-b$$

выбирая b так, чтобы оно было приблизительно равно среднему значению модуля корней, т. е. величине $a_n^{\frac{1}{n}}$.

Тогда очевидно, что если было раньше, например, две пары корней, которым (фиг. 1) соответствуют точки M_1, M_1' и N_1, N_1', причем $OM_1=ON_1$,

---

Для вывода второй из ф-л (43) продифференцируем по λ обе части равенства (43'), тогда, замечая, что $t=\lambda+\frac{1}{\lambda}$ и, следовательно, $t'=1-\frac{1}{\lambda^2}$, получим

$$n\left(\lambda^{n-1}-\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right)=\Big[nt^{n-1}-n(n-2)t^{n-3}+$$
$$+\frac{n(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}t^{n-5}-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}t^{n-7}+\ldots+$$
$$+(-1)^h\frac{(n-h-1)(n-h-2)\ldots(n-2h+1)(n-2h)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots h}t^{n-2h-1}\Big]t'$$

Отсюда, по сокращении, имеем

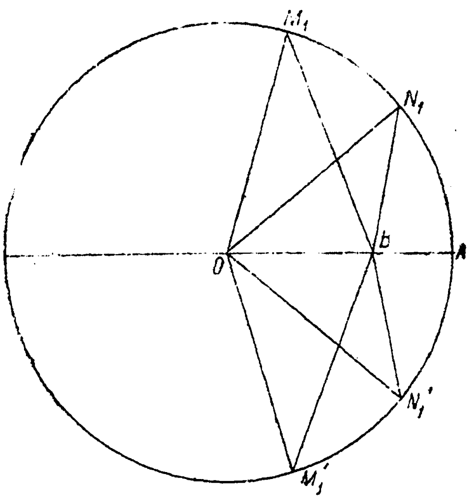
$$\frac{\lambda^n-\frac{1}{\lambda^n}}{\lambda-\frac{1}{\lambda}}=t^{n-1}-(n-3)t^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}t^{n-5}+\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}t^{n-7}+\ldots \tag{43''}$$
$$+(-1)^h\frac{(n-h-1)(n-h-2)\ldots(n-2h+1)(n-2h)}{1\cdot 2\ldots h}t^{n-2h-1}$$

то для уравнения, в котором неизвестное есть y, модули этих корней будут $M_1 B$ и $N_1 B_1$, уже неравные между собою, и последовательными преобразованиями модули этих корней отделятся и найдутся, и, следовательно, в уравнении могут остаться лишь близкие или равные между собой вещественные корни. Число и присутствие таких корней легко обнаружить по ходу коэффициентов в последовательных преобразованиях; так, например, положим, что два корня $\alpha_2 = \alpha_3$, тогда ф-лы (*) § 16 при достаточно большом m будут

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \alpha_1^{m}(1+\varepsilon_1)\\
A_2 &= 2(\alpha_1 \alpha_2)^{m}(1+\varepsilon_2)\\
A_3 &= (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{m}(1+\varepsilon_3)
\end{aligned}
$$

и т. д.

При повторении преобразования было бы



Фиг.1.

$$
\begin{aligned}
A_1' &= \alpha_1^{2m}(1+\varepsilon_1') = A_1^2\\
A_2' &= 2(\alpha_1 \alpha_2)^{2m}(1+\varepsilon_2') = \frac{1}{2} A_2^2 (1+\varepsilon')\\
A_3' &= (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{2m}(1+\varepsilon_3) A_3^2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

т. е. что логарифм коэффициента A_2 не удвоился, но разность

$$2\lg A_2 - \lg A_2' = \lg 2 = 0.30103$$

Совершенно так же, если бы было три равных корня, например,

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$$

то при достаточно большом m коэффициенты стали бы

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \alpha_1^{m}\\
A_2 &= 3(\alpha_1 \alpha_2)^{m}\\
A_3 &= 3(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{m}\\
A_4 &= (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)^{m}\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\qquad (44)
$$

При переходе к следующему преобразованию, т. е. к $2m$, степени корней будут

$$
\begin{aligned}
A_1' &= \alpha_1^{2m} = A_1^2 \\
A_2' &= 3(\alpha_1 \alpha_2)^{2m} = \frac{1}{3} A_2^2 \\
A_3' &= 3(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{2m} = \frac{1}{3} A_3^2 \\
A_4' &= (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)^{2m} = A_4^2
\end{aligned}
$$

Соотношения

$$2 \lg A_2 - \lg A_2' = \lg 3 = 0.47712$$

и

$$2 \lg A_3 - \lg A_3' = \lg 3 = 0.47712$$

укажут на присутствие трех равных корней, которые по ф-ле (44) тотчас же и определятся.

Совершенно так же для случая четырех равных корней будет

$$
\begin{aligned}
2 \lg A_2 - \lg A_2' &= \lg 4 = 0.60206 \\
2 \lg A_3 - \lg A_3' &= \lg 6 = 0.77815 \\
2 \lg A_4 - \lg A_4' &= \lg 4 = 0.60206
\end{aligned}
$$

и т. д., причем очевиден порядок биномиальных коэффициентов:

$$(x + \alpha)^4 = x^4 + 4x^3 \alpha + 6x^2 \alpha^2 + 4x\alpha^3 + \alpha^4$$

Само собою разумеется, что если бы равные корни занимали место не после корня α_1, а после корня α_i, то вместо

$$A_1, A_2, A_3, \ldots$$

надо бы написать

$$A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}$$

и т. д., но указанный выше характер соотношений сохранился бы.

Если бы корни не были равные между собою, а лишь весьма близкие, то тогда вышеприведенные соотношения имели бы место не точно, а лишь приближенно, т. е., например, для трех корней были бы приближенные равенства

$$
\begin{aligned}
2 \lg A_2 - \lg A_2' \quad &\text{прибл.} = \lg 3 = 0.47\ldots \\
2 \lg A_3 - \lg A_3' \quad &\text{прибл.} = \lg 3 = 0.47\ldots
\end{aligned}
$$

Когда, таким образом, присутствие равных или весьма близких корней будет обнаружено, то, чтобы убедиться, в точности ли корни равны между собою, надо поступать по известным приемам розыскания равных корней, отыскивая общий наибольший делитель между функцией $f(x)$ и ее производной.

Во всяком случае ф-лы (44) доставят приближенные значения этих корней, по которым нахождение точных значений может быть произведено как покажем ниже.

§ **21**. Итак положим, что для уравнения $f(x)$ найдены приближенные значения корней. При вычислении с пятизначными логарифмами, величины простых корней получатся обыкновенно с точностью до четвертого знака включительно. С тою же точностью получатся: модули мнимых, произведения корней равных или близких и величины t коэффициентов при первой степени x в трехчленах вида x^2+tx+g^2. Если бы по характеру вопроса такая точность была бы недостаточной, то по найденным приближенным величинам корней весьма легко находить более точные значения, вычисляя их не вновь с большим числом знаков, а находя те малые поправки, которые надо присовокуплять к приближенным значениям корней для получения более точных их значений.

Начнем с простейшего случая исправления значения простого корня, в смежности с которым нет близкого ему. (Здесь под словом „в смежности“ и „близкого“ надо разуметь, что разность между рассматриваемым приближенным значением корня и истинным его значением весьма мала по сравнению с разностью значений этого корня и ближайшего к нему).

Итак, пусть

$$x = \alpha_1$$

есть сказанное приближенное значение корня, и пусть

$$x = \alpha_1 + h = \beta_1$$

есть истинное его значение; следовательно, должно иметь место равенство

$$f(\alpha_1 + h) = 0$$

Но

$$f(\alpha_1 + h) = f(\alpha_1) + \frac{h}{1} f'(\alpha_1) + \frac{h^2}{1.2} f''(\alpha_1) + \ldots = 0 \tag{45}$$

и так как h предполагается малой величиной и так как в смежности с корнем α_1 другого корня нет, то величина $f'(\alpha_1)$ не есть малая, и, значит, в предыдущем уравнении главный член есть $\frac{h}{1} f'(\alpha_1)$, и приближенная величина h есть

$$h = -\frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} \tag{46}$$

Для численных вычислений удобнее вместо этой формулы брать такую:

$$\frac{h}{\alpha_1} = -\frac{f(\alpha_1)}{\alpha_1 f'(\alpha_1)} \tag{47}$$

в особенности, когда вычисление производится по логарифмам, ибо из сказанного в § 6 следует, что

$$\lg(\alpha_1 + h) - \lg \alpha_1 = M\frac{h}{\alpha_1} = 0{,}43429\,\frac{h}{\alpha_1} \tag{47'}$$

и, значит, величина $\frac{h}{\alpha_1}$ доставит прямо поправку, которую надо присовокуплять к логарифму величины α_1, чтобы получить логарифм $(\alpha_1 + h)$; кроме того, самое вычисление величины $\alpha_1 f'(\alpha_1)$ гораздо проще, нежели вычисление величины $f'(\alpha_1)$, — в самом деле, когда

$$f(\alpha_1) = \alpha_1^n + a_1\,\alpha_1^{n-1} + a_1\,\alpha_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\,\alpha_1 + a_n,$$

то

$$\alpha_1 f'(\alpha_1) = n\alpha_1^n + (n-1)\,a_1\,\alpha_1^{n-1} + (n-2)\,a_2\,\alpha_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\,\alpha_1$$

значит, когда вычислены члены α_1^n, $a_1\,\alpha_1^{n-1}$, ..., то стоит их умножить на *целые* и притом малые числа n, $n-1$, и т. д., чтобы получить соответствующие члены выражения $\alpha_1 f'(\alpha_1)$.

Вместо вычисления по ф-ле (47) можно применить и следующий прием, аналогичный тому, которым пользуется Гаусс при решении Кеплеровой задачи.

Сущность этого приема состоит в следующем: положим, что к $\lg \alpha_1$ мы придадим, например, десять единиц последнего знака, тогда к $\lg \alpha_1^n$ придается $10 \cdot n$ единиц, к $\lg a_1\,\alpha_1^{n-1}$ ... $10(n-1)$ единиц и т. д.; при приискивании чисел: α_1^n, $a_1\,\alpha_1^{n-1}$ и т. д. по их логарифмам приискиваем по пропорциональным частям и приращения, соответствующие вышеуказанным приращениям их логарифмов; пусть алгебраическая сумма этих приращений будет S, тогда поправка ε в единицах последнего знака, очевидно, получится по формуле

$$\varepsilon = -\frac{f(\alpha_1)}{S} \cdot 10$$

Самое вычисление расположится по такой схеме (табл. 4, стр. 58).

Поправка $\varepsilon = -\frac{f(\alpha_1)}{S} \cdot 10$ (единицы последнего знака логарифма)

$$\lg(\alpha_1 + h) = \lg \alpha_1 + \varepsilon$$

Само собою разумеется, что величинам δ_1, δ_2, ... δ_{n-1} надо приписывать те же знаки, как соответствующим членам $a_{n-1}\,\alpha_1$, $a_{n-2}\,\alpha_1^2$, ...

Таблица 4

Корень α_1; $\lg \alpha_1 = \ldots$

I	II	III	IV	V
lg коэффиц.	$\lg \alpha_1{}^k$	Числа, соотв. (II)	Перемены в логар.	Пропорц. части, соотв. (IV)
		a_n	—	
$\lg a_{n-1}$	$\lg \alpha_1$	$a_{n-1}\alpha_1$	10	δ_{n-1}
$\lg a_{n-2}$	$2\lg \alpha_1$	$a_{n-2}\alpha_1^2$	20	δ_{n-2}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$\lg a_2$	$(n-2)\lg \alpha_1$	$a_2\alpha_1^{n-2}$	$(n-2)\cdot 10$	δ_2
$\lg a_1$	$(n-1)\lg \alpha_1$	$a_1\alpha_1^{n-1}$	$(n-1)\cdot 10$	δ_1
0.000000	$n\lg \alpha_1$	α_1^n	$n\cdot 10$	δ
		$f(\alpha_1)$		S

Такой прием обыкновенно сразу приводит к цели, т. е. если принять найденную величину $\lg(\alpha_1+h)$ за логарифм искомого корня, то $f(a_1+h)$ будет отличаться от нуля лишь на такие величины, которые соответствуют точности самих логарифмических таблиц, и, следовательно, практически большей точности с этими таблицами и не достигнуть.

При предыдущем вычислении предполагалось, что вблизи с $x=\alpha_1$ нет другого корня, так что в разложении

$$f(\alpha_1+h)=f(\alpha_1)+\frac{h}{1}f'(\alpha_1)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(\alpha)+\ldots$$

при малых величинах h член $\frac{h}{1}f'(\alpha_1)$ является главным, сравнительно с которым все члены с высшими степенями h весьма малы. Но в том случае, когда α_1 есть приближенная величина одного из пары равных корней, то величина $f'(\alpha_1)$ будет также малою, и член $\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(\alpha_1)$ может и не оказаться малым по сравнению с $\frac{h}{1}f'(\alpha_1)$; в этом случае надо величину h определять из уравнения

$$f(\alpha_1)+\frac{h}{1}f'(\alpha_1)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(\alpha_1)=0 \tag{48}$$

или величину $\frac{h}{\alpha_1}$ из уравнения

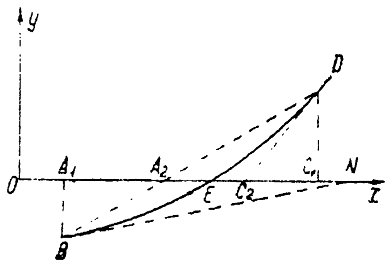
$$f(\alpha_1)+\frac{h}{\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_1 f'(\alpha_1)}{1}+\frac{h^2}{\alpha_1^2}\cdot\frac{\alpha_1^2 f''(\alpha_1)}{1\cdot 2}=0 \tag{48'}$$

которое для величины $\frac{h}{\alpha_1}$ доставит два значения, из которых непосредственной проверкой надо будет выбрать то, которое дает требуемое значение, т. е. для которого $f(\alpha_1)$ и $f'(\alpha_1)$ равны нулю.

Если α_1 есть приближенное значение одного из двух весьма близких между собою корней, то величины h_1 и h_2, следующие из ур-ния (48), доставят два значения $\alpha_1 + h_1$ и $\alpha_1 + h_2$, из которых одно будет приближенным значением одного корня, а другое — другого. Для дальнейшего, более точного, определения этих корней, надо сперва найти лежащую между ними величину β, при которой $f'(\beta) = 0$, и затем сближать пределы, между которыми заключается каждый из корней, как показано ниже.

§ **22.** В тех случаях, когда необходимо знать пределы погрешности в величине корня, то надо определить две величины, между которыми корень заключается. Пусть эти величины суть

$$C_1 > \beta_1 > c_1$$



Фиг. 2.

чтобы корень β_1 заключался между C_1 и c_1, надо, чтобы величины $f(C_1)$ и $f(c_1)$ были *разных* знаков. Поэтому, найдя приближенную величину α_1 нашего корня, надо найти другую величину γ_1, близкую к α_1 и такую, чтобы значения $f(\alpha_1)$ и $f(\gamma_1)$ были разных знаков и между α_1 и γ_1 других корней кроме β_1 не заключалось.

Тогда вычисляем величины

$$f(\alpha_1),\ f'(\alpha_1),\ f''(\alpha_1)$$
$$f(\gamma_1),\ f'(\gamma_1),\ f''(\gamma_1)$$

и, обратив внимание на знаки их, строим один из следующих схематических чертежей, представляющих ход функции $y = f(x)$ в пределах от $x = \alpha_1$ до $x = \gamma_1$.

Пусть (фиг. 2):

$$OA_1 = \alpha_1$$
$$OC_1 = \gamma_1$$
$$A_1B = f(\alpha_1)$$
$$C_1D = f(\gamma_1)$$

Знак величин $f'(\alpha_1)$ и $f'(\gamma_1)$ показывает направление касательной в точках B и D_1, знак величин $f''(\alpha_1)$ и $f''(\gamma_1)$ — сторону вогнутости кривой

$$y = f(x)$$

Так, для фиг. 2 будет

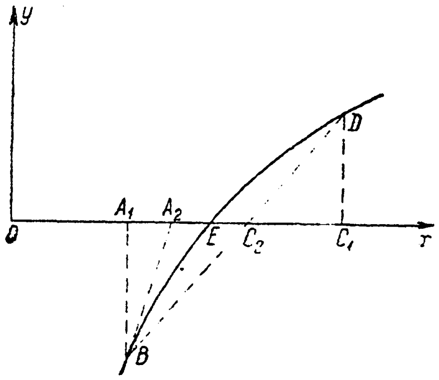
$$\begin{aligned} f(\alpha_1)&<0; & f(\gamma_1)&>0\\ f'(\alpha_1)&>0; & f'(\gamma_1)&>0\\ f''(\alpha_1)&>0; & f''(\gamma_1)&>0 \end{aligned}$$

Именно, если $f''(\alpha_1)>0$, то кривая обращена вогнутостью в сторону положительной оси y.

Новые два предела, между которыми заключается искомая величина $x=OE$, получатся если провести хорду BD, пересечение которой с осью x дает точку A_2, и касательную C_2D в точке D, которая дает точку C_2.

Таким образом будет

$$\begin{gathered} \alpha_2=\alpha_1-\frac{\gamma_1-\alpha_1}{f(\gamma_1)-f(\alpha_1)}f(\alpha_1)=\gamma_1-\frac{\gamma_1-\alpha_1}{f(\gamma_1)-f(\alpha_1)}f(\gamma_1)\\ \gamma_2=\gamma_1-\frac{f(\gamma_1)}{f'(\gamma_1)} \end{gathered} \tag{49}$$



Фиг. 3.

и

$$\alpha_1<\alpha_2<x<\gamma_2<\gamma_1$$

т. е. пределы α_2 и γ_2 для искомого корня более тесные, нежели α_1 и γ_1.

Если бы провести касательную в точке B, то получили бы некоторую точку N ее пересечения с осью x, и хотя было бы

$$OA_2<OE<ON$$

но нельзя с уверенностью сказать, что будет и

$$ON<OC_1$$

так, например, на нашем чертеже (фиг. 2)

$$ON>OC_1$$

и, значит, мы не получили бы более тесных пределов.

Надо брать ту касательную, которая идет между кривою и ординатою, как в нашем примере касательная в точке D.

Совершенно подобно, если бы было

$$\begin{aligned} f(\alpha_1)&<0; & f(\gamma_1)&>0\\ f'(\alpha_1)&>0; & f'(\gamma_1)&>0\\ f''(\alpha_1)&<0; & f''(\gamma_1)&<0 \end{aligned}$$

то надо было вести касательную в точке B (фиг. 3), т. е. вычислять новые пределы по формулам

$$\gamma_2=\gamma_1-\frac{\gamma_1-\alpha_1}{f(\gamma_1)-f(\alpha_1)}f(\gamma_1)=\alpha_1-\frac{\gamma_1-\alpha_1}{f(\gamma_1)-f(\alpha_1)}f(\alpha_1)$$
$$\alpha_2=\alpha_1-\frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} \tag{50}$$

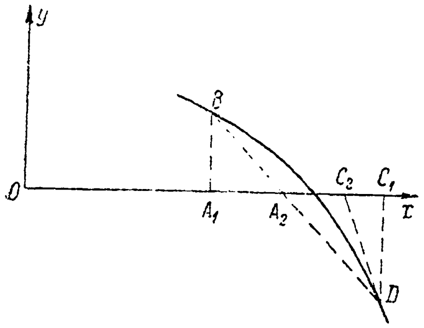
т. е. здесь надо касательную проводить в точке B, так как именно эта касательная идет между кривою и ординатою и доставит абсциссу

$$OA_2=\alpha_2$$

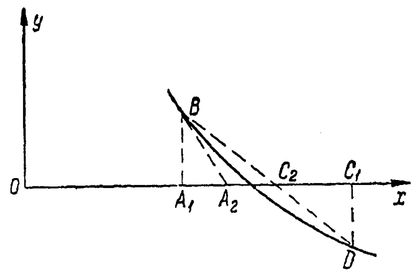
удовлетворяющую неравенствам

$$\alpha_1<\alpha_2<x<\gamma_2<\gamma_1$$

Точно так же, если бы было (фиг. 4)



Фиг. 4.



Фиг. 5.

$$f(\alpha_1)>0;\quad f(\gamma_1)<0$$
$$f'(\alpha_1)<0;\quad f'(\gamma_1)<0$$
$$f''(\alpha_1)>0;\quad f''(\gamma_1)>0$$

то надо бы брать касательную в точке B и вычислять предел α_2 по формуле

$$\alpha_2=\alpha_1-\frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}$$

Наконец, если бы было (фиг. 5)

$$f(\alpha_1)>0;\quad f(\gamma_1)<0$$
$$f'(\alpha_1)<0;\quad f'(\gamma_1)<0$$
$$f''(\alpha_1)<0;\quad f''(\gamma_1)<0$$

то надо бы вести касательную в точке D, т. е. вычислять предел γ_2 по формуле

$$\gamma_2=\gamma_1-\frac{f(\gamma_1)}{f'(\gamma_1)} \tag{51}$$

Отсюда видно, что во всех случаях надо касательную вести так, чтобы она проходила между хордою и крайнею ординатою.

Само собою разумеется, что все вышеприведенные формулы написаны алгебраически, и при вычислении по ним надо обращать внимание на знаки количеств, в них входящих.

При вычислении величин $f(\gamma_1)$, $f'(\gamma_1)$ надо сообразоваться с той степенью точности, которая требуется от величин α_2 и γ_2.

§ 23. Покажем теперь, каким образом, зная приближенные значения модуля и аргумента пары мнимых корней, вычислить более точные их значения.

Пусть

$$x_1 = \rho_1 (\cos\varphi_1 + \sqrt{-1}\,\sin\varphi_1)$$

есть приближенное значение одного из пары мнимых корней, в смежности с которым нет другого корня.

Ф-лы (46) и (47) попрежнему имеют место, и, следовательно, поправка h к найденному значению корня будет

$$\frac{h}{x_1} = -\frac{f(\alpha_1)}{x_1 f'(\alpha_1)} \tag{47'}$$

но при вычислении по этой формуле надо иметь в виду, что величины

$$f(\alpha_1);\quad x_1 f'(\alpha_1)$$

будут мнимые. Пусть, например,

$$f(\alpha_1) = P + Q\sqrt{-1} = R\,[\cos\omega + \sqrt{-1}\,\sin\omega]$$

причем

$$P = \rho_1^n \cos n\varphi_1 + a_1 \rho_1^{n-1} \cos(n-1)\varphi_1 + \ldots + a_{n-1}\rho_1\cos\varphi_1 + a_n$$

$$Q = \rho_1^n \sin n\varphi_1 + a_1 \rho_1^{n-1} \sin(n-1)\varphi_1 + \ldots + a_{n-1}\rho_1\sin\varphi_1$$

и

$$R = +\sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\left.\begin{aligned} R\cos\omega &= P \\ R\sin\omega &= Q \end{aligned}\right\} \tag{*}$$

так что

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{Q}{P} \tag{**}$$

Вместе с тем

$$x_1 f'(\alpha_1) = P_1 + Q_1\sqrt{-1} = R_1(\cos\omega_1 + \sqrt{-1}\,\sin\omega_1)$$

причем

$$P_1 = n\rho_1^n \cos n\varphi_1 + (n-1) a_1 \rho_1^{n-1} \cos (n-1) \varphi_1 + \ldots + a_{n-1} \rho_1 \cos \varphi_1$$

$$Q_1 = n\rho_1^n \sin n\varphi_1 + (n-1) a_1 \rho_1^{n-1} \sin (n-1) \varphi_1 + \ldots + a_{n-1} \rho_1 \sin \varphi_1$$

и

$$R_1 = + \sqrt{P_1^2 + Q_1^2}$$

$$R_1 \cos \omega_1 = P_1; \qquad R_1 \sin \omega_1 = Q_1$$

$$\operatorname{tg} \omega_1 = \frac{Q_1}{P_1}$$

то будет

$$\frac{h}{\alpha_1} = -\frac{R}{R_1} [\cos (\omega - \omega_1) + \sqrt{-1} \sin (\omega - \omega_1)]$$

или иначе

$$\frac{h}{\alpha_1} = \frac{R}{R_1} [\cos (\omega - \omega_1 + \pi) + \sqrt{-1} \sin (\omega - \omega_1 + \pi)] \qquad (52)$$

обозначая для краткости

$$\frac{R}{R_1} = r \quad \text{и} \quad \omega - \omega_1 + \pi = c \ .$$

будем иметь

$$h = \alpha_1 \cdot \frac{h}{\alpha_1} = \rho_1 (\cos \varphi_1 + \sqrt{-1} \sin \varphi_1) \cdot r (\cos c + \sqrt{-1} \sin c) =$$
$$= r\rho_1 [\cos (\varphi_1 + c) + \sqrt{-1} \sin (\varphi_1 + c)]$$

и новое значение корня будет

$$\alpha_1 + h = \rho_1 [\cos \varphi_1 + r \cos (\varphi_1 + c)] +$$
$$+ \rho_1 [\sin \varphi_1 + r \sin (\varphi_1 + c)] \sqrt{-1} \qquad (53)$$

Совершенно так же для сопряженного корня

$$\alpha_2 = \rho_1 \cos \varphi_1 - \sqrt{-1} \sin \varphi_1$$

будет

$$\alpha_2 + h = \rho_1 [\cos \varphi_1 + r \cos (\varphi_1 + c)] - \rho_1 [\sin \varphi_1 + r \sin (\varphi_1 + c)] \sqrt{-1} \quad (54)$$

Само собою понятно, что в том случае, когда имеются две пары весьма близких мнимых корней, то поправку h или $\frac{h}{\alpha_1}$ надо определить из уравнения

$$f(\alpha_1) + \frac{h}{\alpha_1}\alpha_1 f'(\alpha_1) + \frac{h^2}{\alpha_1^2}\cdot\frac{\alpha_1^2 f''(\alpha_1)}{1\cdot 2} = 0$$

которое хотя и будет с мнимыми коэффициентами; но решение которого затруднений не представит.

§ **24.** Дадим теперь несколько примеров для пояснения предыдущих способов, взяв эти примеры из названной выше статьи Энке.

Пример 1.

$$x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{63}{13}x^5 - \frac{175}{52}x^4 + \frac{175}{143}x^3 - \frac{63}{236}x^2 + \frac{7}{429}x - \frac{1}{3432} = 0$$

Если это уравнение написать с логарифмическими коэффициентами, то оно будет

$$x^7 - 0.5440680\,x^6 + 0.6853971\,x^5 - 0.5270347\,x^4 + 0.0877020\,x^3 -$$
$$- \bar{1}.3429745x^2 + \bar{2}.2126407x - \bar{4}.4644527 = 0$$

Для вычисления удобнее распорядиться так, чтобы известный член был 1, для чего стоит только за новую неизвестную принять $xa_n^{\frac{1}{7}}$, как то пояснено в § 15; придавая к логарифмам коэффициентов соответствующие кратные $-\frac{1}{7}\lg\frac{1}{3432} = 0.5050782$, новое уравнение будет

$$x^7 - 1.0491462x^6 + 1.6955535x^5 - 2.0422693x^4 + 2.1080148x^3 -$$
$$- 1.8683655x^2 + 1.2431099x - 0.0000000 = 0$$

Первые два преобразования следует сделать с семизначными логарифмами, ибо при вычислении с пятизначными было бы, например,

$$\lg a_2^2 = 3.39111$$
$$\lg -2a_1 a_3 = 3.39245\,(-)$$
$$\lg 2a_4 = 2.40904$$

и при разности 0.00134 двух первых логарифмов ошибке в одну единицу пятого знака в таблицах Гауссовых разностей соответствует перемена в 330 единиц.

Понятно, что при дальнейших преобразованиях эта погрешность переходила бы и в другие коэффициенты.

Таким образом последовательно будет:

Степень корней 2^1

$$x^7+1.4180045x^6+2.3959870x^5+3.0189949x^4+3.2738401x^3+$$
$$+3.0739348x^2+2.2004297x+0.0000000=0$$

Степень корней 2^2

$$x^7+2.2735725x^6+4.0410890x^5+5.3386202x^4+6.0534451x^3+$$
$$+5.9093643x^2+4.3578860x+0.0000000=0$$

Дальнейшие вычисления ведутся на пять знаков, и получается:

Степень корней 2^3

$$x^7+4.12268x^6+7.61495x^5+10.36176x^4+11.96640x^3+$$
$$+11.78333x^2+8.71441x+0.00000=0$$

Степень корней 2^4

$$x^7+7.97094x^6+15.03723x^5+20.65591x^4+23.91840x^3+$$
$$+23.56553x^2+17.42882x+0.00000=0$$

Степень корней 2^5

$$x^7+15.81746x^6+30.04231x^5+41.30800x^4+47.83679x^3+$$
$$+47.13106x^2+34.85764x+0.00000=0$$

Степень корней 2^6

$$x^7+31.61214x^6+60.08366x^5+82.61598x^4+95.67358x^3+$$
$$+94.26212x^2+69.71528x+0.00000=0$$

Степень корней 2^7

$$x^7+63.22365x^6+120.16732x^5+165.23196x^4+191.34716x^3+$$
$$+188.52424x^2+139.43056x+0.00000=0$$

На этом преобразование оканчивается, так как логарифмы коэффициентов удвоились, и, следовательно, приближенные равенства (4) наступили с точностью до пятого знака логарифмов.

Отсюда следует

$$\begin{aligned}
&128\lg\alpha_1'=\ \ 63.22365; && \lg\alpha_1'=0.493935\\
&128\lg\alpha_2'=\ \ 56.94367; && \lg\alpha_2'=0.444872\\
&128\lg\alpha_3'=\ \ 45.06464; && \lg\alpha_3'=0.352067\\
&128\lg\alpha_4'=\ \ 26.11520; && \lg\alpha_4'=0.204025\\
&128\lg\alpha_5'=125.17708-128; && \lg\alpha_5'=\bar{1}.977946\\
&128\lg\alpha_6'=\ \ 77.90632-128; && \lg\alpha_6'=\bar{1}.616456\\
&128\lg\alpha_7'=116.56944-256; && \lg\alpha_7'=\bar{2}.910699
\end{aligned}$$

Придавая ко всем логарифмам корней величину $\frac{1}{7}$ $\lg a_7 = \bar{1}.494922$, получим

$$
\begin{array}{ll}
\lg \alpha_1 = \bar{1}.98886; & \lg \alpha_5 = \bar{1}.47287 \\
\lg \alpha_2 = \bar{1}.93979; & \lg \alpha_6 = \bar{1}.11138 \\
\lg \alpha_3 = \bar{1}.84699; & \lg \alpha_7 = \bar{2}.40562 \\
\lg \alpha_4 = \bar{1}.69895; &
\end{array}
$$

Если бы мы пожелали получить более точные значения корней, то оказалось бы, что семизначных логарифмов для этой цели недостаточно; так, приняв, например, $\lg \alpha_2 = \bar{1}.9397900$, будем иметь

$$
\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
\alpha_2^7 = & 0.3789047 & 7\alpha_2^7 = & 2.6523329 \\
a_1 \alpha_2^6 = & -1.5233790 & 6a_1 \alpha_2^6 = & -\ 9.1402740 \\
a_2 \alpha_2^5 = & 2.4229648 & 5a_2 \alpha_2^5 = & 12.1148240 \\
a_3 \alpha_2^4 = & -1.9328347 & 4a_3 \alpha_2^4 = & -\ 7.7313388 \\
a_4 \alpha_2^3 = & 0.8073689 & 3a_4 \alpha_2^3 = & 2.4221067 \\
a_5 \alpha_2^2 = & -0.1669377 & 2a_5 \alpha_2^2 = & -\ 0.3338754 \\
a_6 \alpha_2 = & 0.0142047 & a_7 \alpha_2 = & 0.0142047 \\
\hline
a_7 = & -0.0002914 & \alpha_2 f'(\alpha_2) = & -\ 0.0020199 \\
\hline
f(\alpha_2) = & 0.0000003 & &
\end{array}
$$

и, следовательно, было бы

$$\frac{h}{\alpha_2} = \frac{-0.0000003}{-0.0020199}$$

но этой величине нельзя придавать веры, ибо за величину числителя ручаться нельзя, так как при вычислении по семизначным логарифмам не только восьмая значащая цифра в числах, из которых произошло 0.0000003, но и седьмая сомнительны.

Следовательно, здесь для вычисления поправки h надо бы или пользоваться десятизначными логарифмами, или производить самое вычисление величины $f(\alpha_2)$ без логарифмов и при том с двенадцатью знаками, причем, понятно, и самое уравнение надо бы брать с точными значениями его коэффициентов.

Рассмотренное уравнение относится к числу тех, которыми определяются значения абсцисс в Гауссовой методе приближенного исчисления интегралов, и у Гаусса вычислены корни этого уравнения с шестнадцатью знаками.

Пятизначные логарифмы этих истинных корней суть

	Разность
$\lg \alpha_1 = \bar{1}.98881$	0.00005
$\lg \alpha_2 = \bar{1}.93990$	0.00011
$\lg \alpha_3 = \bar{1}.84691$	0.00008
$\lg \alpha_4 = \bar{1}.69897$	0.00002
$\lg \alpha_5 = \bar{1}.47287$	0.00000
$\lg \alpha_6 = \bar{1}.11138$	0.00000
$\lg \alpha_7 = \bar{2}.40562$	0.00000

Пример 2. Для второго примера Энке берет следующее уравнение:

$$x^7-2x^5-3x^3+4x^2-5x+6=0$$

Тогда последовательно получается:

Степень корней 2^1

$$x^7+4x^6-2x^5-2x^4+29x^3-14x^2-23x+36=0$$

Степень корней 2^2

$$x^7+20x^6+78x^5+54x^4+589x^3+1386x^2+1537x+1296=0$$

или с логарифмическими коэффициентами

$$x^7+1.30103x^6+1.89209x^5+1.73239x^4+2.77012x^3+3.14176x^2+$$
$$+3.18667x+3.11261=0$$

Степень корней 2^3

$$x^7+2.38739x^6+3.70774x^5-4.56350x^4+5.58565x^3+5.39859x^2-$$
$$-6.08996x+6.22522=0$$

Степень корней 2^4

$$x^7+4.69313x^6+7.64995x^5-9.39198x^4+11.18557x^3+$$
$$+11.94810x^2+11.82750x+12.45044=0$$

Степень корней 2^5

$$x^7+9.37002x^6+15.34998x^5-18.87658x^4+22.44623x^3+$$
$$+23.75387x^2-24.65849x+24.90088=0$$

Степень корней 2^6

$$x^7+18.73969x^6+30.70300x^5-37.83535x^4+44.89718x^3+$$
$$+47.76037x^2+49.06887x+49.80176=0$$

Степень корней 2^7

$$x^7+37.47942x^6+61.40601x^5-75.51594x^4+89.79441x^3+$$
$$+95.49582x^2+97.80854x+99.60352=0$$

Степень корней 2^8

$$x^7+74.95884x^6+122.81202x^5-151.32153x^4+179.58882x^3+$$
$$+190.99129x^2+195.21132x+199.20704=0$$

Отрицательные коэффициенты при x^4 и x в преобразованных уравнениях указывают на мнимые корни.

Применяя ф-лу (15), имеем

$$\begin{aligned}
256\lg\alpha_1 &= 74.95884; & \lg\alpha_1 &= 0.292898\\
256\lg\alpha_2 &= 47.85318; & \lg\alpha_2 &= 0.186927\\
256\lg g_1^2 &= 56.77680; & \lg g_1^2 &= 0.221785\\
256\lg\alpha_5 &= 11.40247; & \lg\alpha_5 &= 0.044541\\
251\lg g_2^2 &= 8.21575; & \lg g_2^2 &= 0.032093
\end{aligned}$$

Подыскав соответствующие этим логарифмам числа, найдем величины корней

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -1.96249; & g_1^2 &= 1.66642\\
\alpha_2 &= +1.53790; & g_2^2 &= 1.07669\\
\alpha_5 &= +1.10800;
\end{aligned}$$

ибо не трудно убедиться, что α_1 — отрицательный, остальные два корня — положительные, т. е.

$$f(x) = (x+1.96249)(x-1.53790)(x-1.10800)\cdot$$
$$\cdot(x^2 - t_1x + 1.66642)(x^2 - t_2x + 1.07669)$$

Чтобы найти величины t_1 и t_2, составляем ур-ния (18') и (17'), а именно:

$$-1.96249 + 1.53790 + 1.10800 + t_1 + t_2 = 0$$

или

$$t_1 + t_2 = -0.68341 \qquad (18')$$

$$-\frac{1}{1.96249} + \frac{1}{1.53790} + \frac{1}{1.10800} + \frac{1}{1.66642}t_1 + \frac{1}{1.07669}t_2 = -\frac{-5}{6}$$

или

$$0.60009t_1 + 0.922877t_2 = -0.20988 \qquad (17')$$

Откуда

$$t_1 = -1.29258$$
$$t_2 = +0.60917$$

и, следовательно, трехчленные множители суть

$$x^2 + 1.29258x + 1.66642$$

и

$$x^2 - 0.60917x + 1.07669$$

Чтобы получить аргументы φ_1 и φ_2, стоит только заметить, что

$$2g_1 \cos\varphi_1 = t_1 \quad \text{и} \quad 2g_2 \cos\varphi_2 = t_2$$

откуда следует

$$\varphi_1 = 180^\circ - 59^\circ 57' 25''.3 = 120^\circ 02' 34''.7$$
$$\varphi_2 = 84^\circ 56' 28''.6$$

Чтобы найти более близкие величины, принимаем за первое приближение:

$$\lg g_1 = 0.11089$$
$$\varphi_1 = 120^\circ 02' 40''$$

округлив число секунд у φ_1 для простоты.

Тогда оказывается

$$\begin{array}{rl} g_1^7 \cos 7\varphi_1 &= -3.0148035 \\ a_2 g_1^5 \cos 5\varphi_1 &= +3.5605688 \\ a_4 g_1^3 \cos 3\varphi_1 &= -6.4534218 \\ a_5 g_1^2 \cos 2\varphi_1 &= -3.3238460 \\ a g_1 \cos \varphi_1 &= +3.2315655 \\ a_7 &= +6.0000000 \\ \hline P &= +0.0000630 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 7g_1^7 \cos 7\varphi_1 &= -21.1036245 \\ 5a_2 g_1^5 \cos 5\varphi_1 &= +17.8028440 \\ 3a_4 g_1^3 \cos 3\varphi_1 &= -19.3502654 \\ 2a_5 g_1^2 \cos 2\varphi_1 &= -\ 6.6476920 \\ a_6 g_1 \cos \varphi_1 &= +\ 3.2315655 \\ \hline S &= -26.071724 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} g_1^7 \sin 7\varphi_1 &= -5.1569226 \\ a_2 g_1^5 \sin 5\varphi_1 &= -6.2226992 \\ a_4 g_1^3 \sin 3\varphi_1 &= +0.0150177 \\ a_5 g_1^2 \sin 2\varphi_1 &= +5.7777520 \\ a_6 g_1 \sin \varphi_1 &= +5.5872230 \\ \hline Q &= +0.0003709 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 7g_1^7 \sin 7\varphi_1 &= -36.0984582 \\ 5a_2 g_1^5 \sin 5\varphi_1 &= -31.1134960 \\ 3a_4 g_1^3 \sin 3\varphi_1 &= +\ 0.0450531 \\ 2a_5 g_1^2 \sin 2\varphi_1 &= +11.5555040 \\ a_6 g_1 \sin \varphi_1 &= +\ 5.5872230 \\ \hline R &= -50.0241741 \end{array}$$

Отсюда следует, что, полагая

$$\alpha = g_1 (\cos\varphi_1 + \sqrt{-1}\sin\varphi_1)$$

будет

$$f(\alpha) = P + Q\sqrt{-1} = 0.0000630 + 0.0003709\sqrt{-1}$$

$$\alpha f'(\alpha) = S + R\sqrt{-1} = -26.071724 - 50.0241741\sqrt{-1}$$

или иначе, полагая

$$f(\alpha) = r(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)$$

$$\alpha f'(\alpha) = \rho(\cos\psi + \sqrt{-1}\sin\psi)$$

имеем

$$\lg r = \bar{4}.575433; \qquad \omega = \ 80°21'36'$$
$$\lg \rho = 1.751380; \qquad \psi = 242°28'\ 2''$$

и, следовательно,

$$\frac{h}{\alpha} = -\frac{r}{\rho}\left[\cos(\omega-\psi) + \sqrt{-1}\sin(\omega-\psi)\right]$$

Но удобнее находить поправки $\lg g_1$ и аргумента φ_1.

В самом деле, написав

$$\alpha = g_1 e^{\varphi_1\sqrt{-1}}$$

имеем

$$\operatorname{Log}\alpha = \operatorname{Log} g_1 + \varphi_1\sqrt{-1}$$

$$\operatorname{Log}(\alpha+h) = \operatorname{Log}\alpha\left(1+\frac{h}{\alpha}\right) = \operatorname{Log}\alpha + \operatorname{Log}\left(1+\frac{h}{\alpha}\right) = \operatorname{Log}\alpha + \frac{h}{\alpha}$$

Следовательно, будет

$$\lg(\alpha+h) = \left(\lg g_1 - \frac{r}{\rho}\cos(\omega-\psi)\right) + \sqrt{-1}\left(\varphi_1 - \frac{r}{\rho}\sin(\omega-\psi)\right)$$

и, следовательно, для исправленного корня

$$\alpha + h = g_1'\left[\cos\varphi_1' + \sqrt{-1}\sin\varphi_1'\right]$$

будет

$$\lg g_1' = \lg g_1 - \frac{r}{\rho}\cos(\omega-\psi) \qquad (*)$$

$$\varphi_1' = \varphi_1 - \frac{r}{\rho}\sin(\omega-\psi)$$

Если же вместо Неперовых логарифмов брать обыкновенные, то надо обе части ф-лы (*) умножить на $\frac{1}{M} = 0.434\ldots$, тогда, замечая, что $\frac{1}{M}\lg g_1' = \lg g_1'$ и $\frac{1}{M}\lg g_1 = \lg g_1$, получим

$$\lg g_1' = \lg g_1 - \frac{1}{M}\cdot\frac{r}{\rho}\cos(\omega-\psi)$$

и

$$\varphi_1' - \varphi_1 = -\frac{r}{\rho}\sin(\omega-\psi).$$

Так, в нашем случае будет

$$\frac{1}{M} = 0.43429 \ldots \lg \frac{1}{M} = \bar{1}.637780$$

$$\lg \frac{r}{\rho} = \bar{6}.824053$$

$$360^\circ + \omega - \psi = 197^\circ 33' 34'' \ldots \lg \cos(\omega - \psi) = \bar{1}.979277\,(n)$$

$$\bar{6}.441110\,(n)$$

$$-\frac{1}{M}\frac{r}{\rho}\cos(\omega - \psi) = 0.00000276 \ldots$$

Значит,

$$\lg g_1' = 0.1108900 + 0.0000028 = 0.1108928$$

Чтобы получить величину $\varphi' - \varphi_1$ в секундах дуги, надо числовую величину этого угла умножить на число секунд, заключающихся в угле, равном 1, т. е. 206265:

$$\lg 206265 = 5.31442$$

$$\lg \frac{r}{\rho} = \bar{6}.82405$$

$$\lg \sin(\omega - \psi) = \frac{\bar{1}.47954}{\bar{1}.61801}$$

$$\varphi_1' - \varphi_1 = +0''.42$$

Следовательно,

$$\varphi_1' = 120^\circ 02' 40'' + 0''.42 = 120^\circ 02' 40''.42$$

Чтобы привести пример нахождения поправки к lg вещественного корня, возьмем корень α_1, для которого

$$\lg \alpha_1 = 0.2928080\ (n)$$

и

$$\alpha_1 = -1.96249$$

тогда получится, производя вычисление по семизначным логарифмам,

$$\begin{aligned}
\alpha_1^7 &= -112.112997 \\
a_2\alpha_1^5 &= +\ 58.219704 \\
a_4\alpha_1^3 &= +\ 22.674894 \\
a_5\alpha_1^2 &= +\ 15.405508 \\
a_6\alpha_1 &= +\ 9.812460 \\
a_0 &= +\ 6.000000 \\
\hline
f(\alpha_1) &= -\ 0.000431
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
7\alpha_1^7 &= -784.790979 \\
5a_2\alpha_1^5 &= +291.098520 \\
3a_4\alpha_1^3 &= +\ 68.024682 \\
2a_5\alpha_1^2 &= +\ 30.811016 \\
a_6\alpha_1 &= +\ 9.812460 \\
\hline
\alpha_1 f'(\alpha_1) &= -385.044301
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{h}{\alpha_1} = -\frac{f(\alpha_1)}{\alpha_1 f'(\alpha_1)} = -\frac{0.000431}{385.04} = 0.00000112$$

$$\Delta \lg \alpha_1 = \frac{1}{M} \cdot \frac{h}{\alpha_1} = -0.0000005$$

Значит,

$$\lg \alpha_1 = 0.2928075 \ (n)$$
$$\alpha_1 = -1.9624901$$

Совершенно подобным образом, вычислив поправки для остальных корней, получим следующее разложение функции $f(x)$ на множители:

$$f(x) = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 =$$
$$= (x + 1.9624901)(x - 1.5378905)(x - 1.1080166) \cdot$$
$$\cdot (x^2 - 0.6092132x + 1.0766801)(x^2 + 1.2926302x + 1.6664238)$$

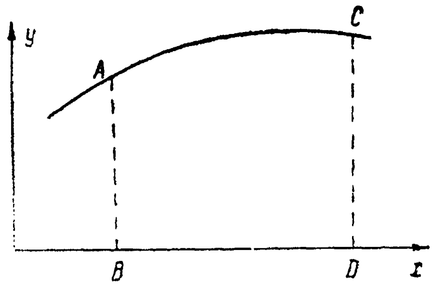
В большей части технических вопросов такой большой точности не требуется, и первого приближения, получаемого по пятизначным логарифмам, более чем достаточно.

ГЛАВА III

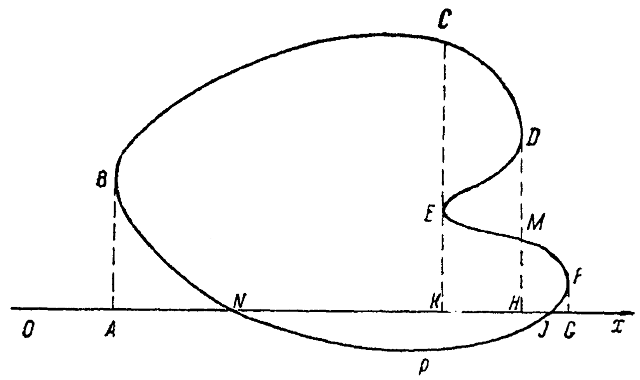
ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

§ 25. Вычисление площадей, объемов, положения их центра тяжести и пр. сводится к нахождению некоторых определенных интегралов, которые мы сперва и приведем, а затем покажем общие приемы вычисления численной величины любого такого определенного интеграла, независимо от того, что он собою представляет.

Вычисление площади, ограниченной какою угодно сомкнутою кривою, приводится к вычислению так называемых простых площадей. Простою площадью называется площадь (фиг. 6), ограниченная двумя ординатами AB и CD, частью оси абсцисс BD и кривою AC.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Длину BD называют основанием этой площади. В частном случае одна из крайних ординат, AB или CD, или даже обе могут быть равны и нулю, площадь от этого не перестает быть простою.

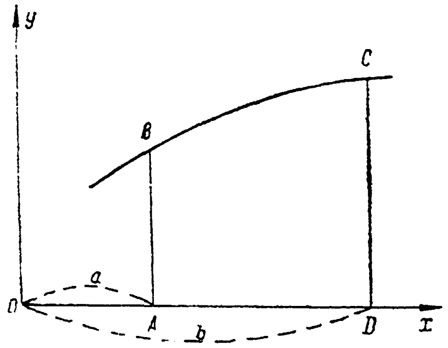
Если дана какая-нибудь кривая, то, чтобы привести вычисление площади, ею ограниченной, к вычислению простых площадей, поступают так: проводят прямую OX (фиг. 7), которую принимают за ось абсцисс, затем проводят к кривой касательные, перпендикулярные к OX; пусть эти касательные будут AB, DH, EK, FG, тогда легко видеть, что предложенная площадь, ограниченная кривою $BCDEFJN$, может быть представлена в виде следующей алгебраической суммы простых площадей:

$$\text{площ. } BCDFJN = \text{площ. } ABCK - \text{площ. } ABN + \text{площ. } KCDH - \text{площ. } KEDH + \text{площ. } KEMH + \text{площ. } HMFG - \text{площ. } JFG + \text{площ. } JPN$$

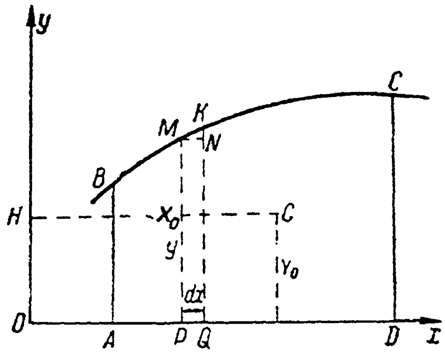
Остается показать, каким образом вычисляется простая площадь. Пусть данная площадь есть $ABCD$ (фиг. 8) и уравнение кривой BC есть $y=f(x)$, тогда, как известно, площадь $ABCD$ выражается следующим определенным интегралом:

$$\text{площ. } ABCD = S = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

где a есть абсцисса точки B, и b — абсцисса точки C. Во многих случаях практики функция $f(x)$ не задается аналитически, т. е. не будет известно уравнение кривой BC, а эта кривая будет изображена на чер-



Фиг. 8.



Фиг. 9.

теже, с которого и можно снять ординату, соответствующую любой данной абсциссе, что и выражают тогда обозначением

$$y=f(x)$$

Вычисление положения центра тяжести простой площади сводится также к нахождению простых определенных интегралов.

Как известно, абсцисса X_0 центра тяжести площади $ABCD$ получится, если момент этой площади относительно оси OY разделить на самую площадь. Разбив основание площади AD на бесконечно малые части, такие, как PQ, и проведя через точки деления ординаты, мы разобьем самую площадь на бесконечно малые площадки, такие, как $PMKQ$, которые отличаются лишь на бесконечно малые величины высших порядков от соответствующего каждой из них прямоугольника, такого, как $PMNQ$. Площадь $ABCD = S$ есть предел суммы площадей сказанных бесконечно малых прямоугольников, момент этой площади есть предел суммы моментов площадей всех этих прямоугольников. Момент же площади прямоугольника $PMNQ$, при сделанных на чертеже (фиг. 9) обозначениях, выражается так:

$$\text{Мом. площ. } PMNQ = \text{площ. } PMNQ \cdot \left(x + \frac{1}{2}\, dx\right) =$$

$$= ydx \cdot \left(x + \frac{1}{2}\, dx\right) = yxdx + \frac{1}{2}\, ydx \cdot dx$$

последний член представляет собою бесконечно малую величину второго порядка по отношению к dx и, следовательно, при розыскании предела суммы, не изменяя этого предела, может быть отброшен, и мы таким образом получим

$$\text{Мом. площ. } ABCD = SX_0 = \int_a^b yxdx$$

откуда

$$X_0 = \frac{1}{S} \int_a^b yxdx \tag{2}$$

Чтобы найти ординату центра тяжести Y_0, надо взять момент данной площади относитлеьно оси ox и разделить на самую площадь.

Совершенно так же, как и выше, этот момент будет представлять собою предел суммы моментов таких бесконечно малых площадей, как $PMNQ$, который, очевидно, выражается так:

$$ydx \cdot \frac{1}{2}\, y = \frac{1}{2}\, y^2\, dx$$

следовательно,

$$\text{мом. площ. } ABCD = SY_0 = \frac{1}{2} \int_a^b y^2\, dx$$

откуда

$$Y_0 = \frac{1}{2S} \int_a^b y^2\, dx \tag{3}$$

Когда предложенная площадь не простая, то, разбив ее на простые и вычислив в отдельности координаты центра тяжести каждой из этих последних, найдем по следующим формулам координаты центра тяжести заданной площади.

Пусть s_1, s_2, s_3, ... s_k суть те простые площади, на алгебраическую сумму коих данная площадь S разбита, и пусть $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, ... $x_k y_k$ суть координаты их центров тяжести и X_0, Y_0 координаты центра тяжести площади S.

Если

$$S = s_1 + s_2 - s_3 \ldots + s_k$$

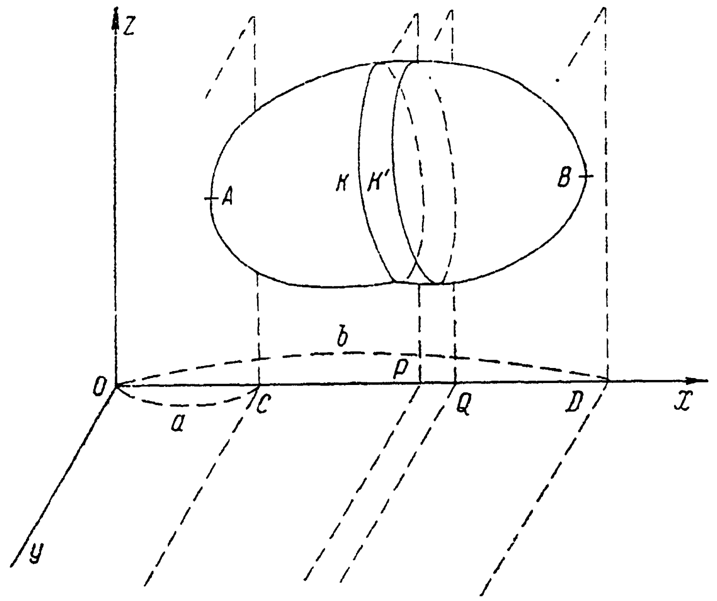
то

$$X_0 = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2 - s_3 x_3 + \ldots + s_k x_k}{S} \tag{4}$$

и

$$Y_0 = \frac{s_1 y + s_2 y_2 - s_3 y_3 + \ldots + s_k y_k}{S} \tag{5}$$

что вытекает непосредственно из известной теоремы моментов.



Фиг. 10.

Вычисление объема, ограниченного кривою поверхностью, может быть приведено к вычислению простых определенных интегралов.

Пусть дан объем V, ограниченный какою-нибудь сомкнутою поверхностью.

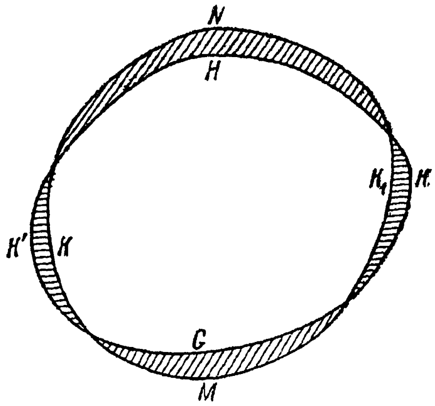
Проведя к этой поверхности касательные плоскости, параллельные плоскости zoy, мы получим абсциссы a и b крайних точек этой поверхности, разделив отрезок CD на бесконечно малые части и проведя через точки деления плоскости, параллельные zoy, мы рассечем данный объем, на бесконечно тонкие слои, такие, как указанный на чертеже (фиг. 10).

Каждый из этих слоев ограничен двумя плоскостями и заключенною между ними частью поверхности. Эта поверхность пересекается с сказанными плоскостями по кривым K и K'.

Вообразим, что из всех точек кривой K проведены прямые, параллельные оси X, до пересечения их с плоскостью Q, тогда получится прямой цилиндр с основанием K и высотою PQ, и в сечении этого цилиндра с плоскостью Q получится кривая, равная K. Совершенно так же, взяв кривую K' и построив соответственно ей цилиндр до пересечения с плоскостью P, мы и на этой плоскости получим ту же фигуру, что и на плоскости Q. Таким образом на каждой из этих плоскостей получаются две кривые, K и K'.

Очевидно, что рассматриваемый слой будет заключаться внутри цилиндра, коего основание есть кривая $NK'MK_1'$, цилиндр же с основанием KHK_1G будет весь заключаться внутри слоя.

В пределе, когда расстояние PQ обращается в нуль, то обе кривые, K и K', сливаются в одну, значит заштрихованная на чертеже (фиг. 11) площадь обращается в пределе в нуль, и, следовательно, есть бесконечно малая, а так как высота PQ рассматриваемых цилиндров и слоя есть также бесконечно малая, то, значит, объем слоя отличается от объема каждого из этих цилиндров, а значит, и от объема цилиндра с основанием K, на бесконечно малые величины высших порядков, и при розыскании предела суммы можно эти бесконечно малые высших порядков отбрасывать и рассматривать заданный объем как предел суммы объемов цилиндров с основанием K.



Фиг. 11.

Обозначим через ω площадь кривой K соответствующей плоскости P, абсцисса коей есть x, очевидно, что ω будет некоторой функцией от x. Пусть

$$\omega = F(x)$$

Тогда объем сказанного цилиндра с основанием ω будет: $\omega \cdot dx$, и предел суммы таких объемов будет выражаться интегралом $\int\limits_a^b \omega dx$, и мы получим формулу

$$V = \int\limits_a^b \omega dx = \int\limits_a^b F(x) dx \tag{6}$$

где $\omega = F(x)$ есть площадь сечения, соответствующего абсциссе x. Таким образом, вычисление объема приводится к вычислению площадей сечения и затем определенного интеграла (6).

Чтобы найти абсциссу X_0 центра тяжести объема V, стоит только рассуждать подобно тому, как было сделано для площадей, беря моменты относительно плоскости zoy, и тогда получится следующая формула:

$$X_0 = \frac{1}{V} \int\limits_a^b \omega x dx \tag{7}$$

Чтобы вычислить координату Y_0 центра тяжести рассматриваемого объема, надо рассекать его плоскостями, параллельными плоскости zox, совершенно подобно тому, как сделали выше. Обозначая через σ площадь сечения, соответствующую расстоянию y от плоскости zox, и через c и d расстояния до нее касательных плоскостей к данной поверхности, параллельных ей, очевидно, получим

$$Y_0 = \frac{1}{V}\int_c^d \sigma y dy \tag{8}$$

ибо числитель этой дроби представляет момент объема V относительно плоскости zox.

Совершенно так же, чтобы вычислить координату Z_0, надо проводить секущие плоскости параллельно yox и брать сумму моментов бесконечно малых цилиндров, на которые тогда объем V разобьется относительно этой плоскости. Обозначая через τ площадь сечения поверхности, ограничивающей объем V плоскостью, проведенной в расстоянии z от xoy, и через g и h расстояния до нее касательных плоскостей, ей параллельных, увидим, что

$$Z_0 = \frac{1}{V}\int_g^h \tau z dz \tag{9}$$

Сведя таким образом главнейшие из обычно встречающихся вычислений к определенным интегралам, нам надо показать, каким образом находить величину этих последних, в особенности когда не дано аналитического выражения функций, стоящих под знаком интеграла, а они заданы графически.

§ **26.** Вычисление определенного интеграла

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

когда функция $f(x)$ задана аналитически и когда может быть найден неопределенный интеграл

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

производится по формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

В тех случаях, когда неопределенный интеграл найден быть не может, приходится для вычисления определенного интеграла пользоваться приближенными формулами.

Точность этих формул может быть сделана сколько угодно большою; но для практики обыкновенно нет надобности в большой точности, и здесь надо руководствоваться правилами, изложенными в главе I.

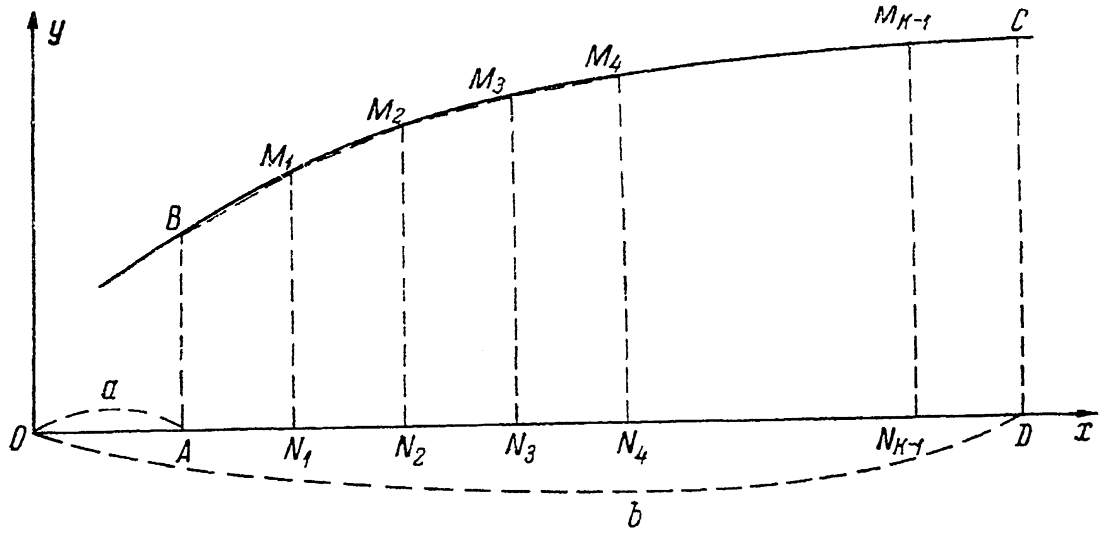
Итак, положим, что надо найти величину определенного интеграла

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

Какое бы количество этот интеграл собою ни представлял, всегда можно вообразить такую кривую, уравнение которой было бы

$$y = f(x)$$

тогда интеграл будет представлять собою площадь $ABCD$, ограниченную



Фиг. 12.

частью оси x, двумя ординатами и кривою, значит численно эта площадь и будет равна интегралу S.

Чтобы найти площадь $ABCD$ (фиг. 12), один из простейших приемов состоит в том, что основание AD разделяется на несколько равных частей, через точки деления проводят ординаты, и концы их соединяют прямыми линиями и получают таким образом ломанную, вписанную в данную кривую, как показано на чертеже, и вместо площади $ABCD$ берут площадь, ограниченную этой ломанной $BM_1M_2 \ldots M_{k-1}C$. Эта последняя площадь, представляя собою сумму площадей трапеций, таких как $N_1M_1M_2N_2$, легко вычисляется, если измерены или вычислены ординаты $y_0, y_1, y_2, \cdots y_k$, именно будет

$$\text{площ. } BM_1 \ldots M_{k-1}C = \frac{1}{2}(y_0 + y_1)h + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)h + \frac{1}{2}(y_2 + y_3)h + $$
$$+ \ldots + \frac{1}{2}(y_{k-2} + y_{k-1})h + \frac{1}{2}(y_{k-1} + y_k)h =$$
$$= \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{k-1} + \frac{1}{2}y_k\right)h$$

где h есть расстояние между двумя смежными ординатами, равное $\frac{b-a}{k}$.

Приняв эту площадь за площадь кривой, мы получим для вычисления определенного интеграла $\int_a^b ydx$ такую приближенную формулу:

$$\int_a^b ydx = \frac{b-a}{k}\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots y_{k-1} + \frac{1}{2}y_k\right) \tag{1}$$

Если $y = f(x)$, то, полагая

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_1 &= a + h \\ x_2 &= a + 2h \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_{k-1} &= a + (k-1)h \\ x_k &= a + kh = b \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} y_0 &= f(x_0) \\ y_1 &= f(x_1) \\ y_2 &= f(x_2) \\ &\ldots\ldots \\ y_k &= f(x_k) \end{aligned}$$

и предыдущая формула напишется так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{k}\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{k-1}) + \frac{1}{2}f(x_k)\right]$$

Эта формула называется формулою трапеций и может служить для вычисления любого определенного интеграла по частным значениям подъинтегральной функции.

Нетрудно видеть, что чем число k будет больше, тем точнее будет результат, даваемый этой формулой. Мы не будем выводить общего выражения погрешности этой формулы, а приведем его ниже без доказательства, совместно с подобными же выражениями, относящимися до других формул.

§ **27.** Другой прием вычисления площади S основан на замене частей данной кривой не прямыми, как в правиле трапеций, а дугами парабол, оси которых параллельны оси Y. Получаемая таким путем приближенная формула называется формулою Симпсона.

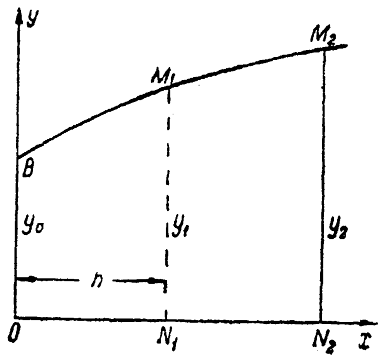
Перенесем начало координат в точку A, сохраняя направление осей, и возьмем участок BM_2 нашей кривой (фиг. 13). Уравнение параболы, коей ось параллельна оси y, есть

$$y = A_0 + A_1 x + A_1 x^2 \qquad (*)$$

проведем эту параболу так, чтобы она проходила через точки B, M_1 и M_2, ею и заменим часть BM_2 данной кривой.

Чтобы парабола $(*)$ проходила через точки B, M_1, M_2, надо определить коэффициенты A_0, A_1, A_2 так, чтобы координаты этих точек удовлетворяли ур-нию $(*)$, что даст следующие условные уравнения:

$$\begin{aligned} y_0 &= A_0 \\ y_1 &= A_0 + A_1 h + A_2 h^2 \qquad (**) \\ y_2 &= A_0 + 2A_1 h + 4A_2 h^2 \end{aligned}$$



Фиг. 13.

Площадь, заключенная между параболой $(*)$, осью x и ординатами OB и $N_2 M_2$, выражается интегралом

$$\int_0^{2h} y\,dx = \int_0^{2h} (A_0 + A_1 x + A_2 x^2)\,dx = 2A_0 h + 2A_1 h^2 + \frac{8A_2 h^3}{3} =$$

$$= \frac{h}{3}(6A_0 + 6A_1 h + 8A_2 h^2)$$

В силу же ур-ний $(**)$ величина, стоящая в скобках, равна $y_0 + 4y_1 + y_2$, в чем убеждаемся, умножив второе из этих уравнений на 4 и приложив его к двум остальным.

Таким образом получаем приближенную формулу

$$\text{площ. } OBM_2 N_2 = (y_0 + 4y_1 + y_2)\frac{h}{3} \qquad (***)$$

Положим, что число делений k четное, $k = 2n$, тогда совершенно так же заменив дугу $M_2 M_3 M_4$ данной кривой параболой, проходящей через точки M_2, M_3 и M_4, получим

$$\text{площ. } N_2 M_2 M_4 N_4 = (y_2 + 4y_3 + y_4)\frac{h}{3}$$

Точно так же

$$\text{площ. } N_4 M_4 M_6 N_6 = (y_4 + 4y_5 + y_6)\frac{h}{3}$$

и т. д. Сложив эти формулы, получим

$$\text{площ. } ABCD = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right]$$

а, значит, и такую формулу для вычисления определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{b-a}{2n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\right] \quad (2)$$

которая и называется *формулой Симпсона.*

§ **28.** Прием, служивший для вывода формул трапеций и Симпсона, может быть обобщен и доставит какое угодно число аналогичных этим двум формул.

Сущность изложенных приемов состоит, как было видно, в том, что данная кривая или части ее заменяются или прямою (уравнение ее вида $y = A_0 + A_1 x$), или параболою (уравнение коей вида $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$), поэтому естественное обобщение этих приемов будет состоять в замене данной кривой другою, имеющей с данною назначенные общие точки и уравнение коей было бы вида

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n \quad (*)$$

Возьмем на основании данной площади AD несколько промежуточных между A и D точек и обозначим через

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n$$

абсциссы их; в числе этих точек могут быть и сами точки A и D. Проведем соответствующие этим абсциссам ординаты и обозначим их через

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_n$$

и определим коэффициенты A_0, A_1, A_2, ... A_n в ур-нии (*) так, чтобы кривая (*) проходила через точки

$$x_0 y_0,\ x_1 y_1,\ x_2 y_2,\ \ldots\ x_n y_n$$

эти условия выразятся следующими n уравнениями, из коих, например, первое представляет условие, чтобы кривая (*) проходила через точку $(x_0 y_0)$, т. е. чтобы координаты этой точки удовлетворяли уравнению кривой:

$$\begin{aligned}
y_0 &= A_0 + A_1 x_0 + A_2 x_0^2 + \ldots + A_n x_0^n \\
y_1 &= A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_1^2 + \ldots + A_n x_1^n \\
y_2 &= A_0 + A_1 x_2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_n x_2^n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n &= A_0 + A_1 x_n + A_2 x_n^2 + \ldots + A_n x_n^n
\end{aligned} \quad (**)$$

Эта система $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots\ A_n$$

доставит для каждой из этих неизвестных одно вполне определенное значение; подставив эти значения в ур-ние (*), мы и получим уравнение требуемой кривой.

Но решить систему (**) относительно неизвестных $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ и найденные значения подставить в ур-ние (*), значит исключить эти буквы в числе $n+1$ из $n+2$ ур-ний (*) и (**), и нам нет надобности знать величины неизвестных, а надо иметь лишь результат исключения их. Это же исключение может быть выполнено и не решая ур-ний (**) на основании следующих соображений.

Нетрудно видеть, что если бы ур-ния (**) решить относительно A_0, A_1, $A_2, \ldots A_n$, то эти решения заключали бы буквы $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ лишь в первой степени и друг на друга не умноженные.

Значит, и по подстановке найденных значений A_0, A_1, $\ldots$ A_n ур-ние (*) будет заключать буквы $y_0, y_1, \ldots y_n$ лишь в первой степени, буква же x будет входить в это уравнение в степени не выше n.

Таким образом, результат исключения будет вида

$$y = y_0 F_0(x) + y_1 F_1(x) + \ldots + y_n F_n(x) \tag{*}$$

где $F_0(x), F_1(x), \ldots F_n(x)$ представляют собою некоторые целые функции переменной x степени не выше n.

Таким образом, нам надо только определить вид этих функций. Для этого составим те условия, которым эти функции удовлетворяют.

Уже сказано, что при $x = x_0$, y должно равняться y_0, следовательно, когда $x = x_0$, то функция $F_0(x)$ обратится в 1, а остальные функции — в нуль, так что будет:

при	$x = x_0$	при	$x = x_1 \ldots$	при	$x = x_n$
	$y = y_0;$		$y = y_1; \ldots$		$y = y_n$
	$F_0(x_0) = 1;$		$F_0(x_1) = 0; \ldots$		$F_0(x_n) = 0$
	$F_1(x_0) = 0;$		$F_1(x_1) = 1; \ldots$		$F_1(x_n) = 0$
	$F_2(x_0) = 0;$		$F_2(x_1) = 0; \ldots$		. . . . .
	. . . . . .		. . . .		. . . . .
	$F_n(x_0) = 0;$		$F_n(x_1) = 0; \ldots$		$F_n(x_n) = 1$

Вообще условие, чтобы кривая (*) проходила через точку $x_i y_i$, выражается тем, что когда $x = x_i$, то y должно равняться y_i, значит, функция $F_i(x_i)$ равна 1, остальные — нулю, и получается вышенаписанная таблица.

Так как каждая из этих функций $F_0, F_1, \ldots F_n$ целая, то из вышеприведенной таблицы заключим, что, например, функция $F_0(x)$ делится без остатка на произведение

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

и вообще функция $F_i(x)$ на произведение

$$(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)$$

а так как это произведение степени n, той же самой, как и каждая из функций, то частное буквы x содержать не может и будет некоторое число, обозначая которое для функции F_i через P_i, получим

$$F_i(x)=P_i(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)$$

Чтобы определить число P_i, стоит только обратиться к оставшемуся условию относительно функции F_i, именно, что при $x=x_i$ она обращается в 1, т. е. надо, чтобы было

$$1=P_i(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)$$

Откуда

$$P_i=\frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

и, следовательно,

$$F_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

и, значит, кривая (*) будет иметь уравнение

$$\begin{aligned}
y=y_0&\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\dots(x_0-x_n)}+\\
+y_1&\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)}+\\
+y_2&\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)}+\\
+&\dots\dots\dots\dots\dots\dots+\\
+y_n&\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})}
\end{aligned}\tag{1}$$

Заметим, что полученная формула доставляет решение такого вопроса: составить целую функцию n-ой степени относительно переменной независимой x, которая при $n+1$ частных значениях этой переменной: x_0, x_1, x_2, ... x_n принимала бы заданные частные значения y_0, y_1, y_2, ... y_n.

Решение этого последнего вопроса составляет одну из задач так называемой интерполяции (см. главу VI), почему и ф-ла (1) носит название интерполяционной формулы Лагранжа, который ее вывел.

Пример. Составить трехчлен второй степени относительно x, который при $x=1$ принимал бы значение 5, при $x=2$ значение 13 и при $x=5$ значение 17.

Полагая в ф-ле (1)

$$x_0=1;\ x_1=2;\ x_2=5$$
$$y_0=5;\ y_1=13;\ y_2=17$$

и $n=2$, получаем

$$y=5\cdot\frac{(x-2)(x-5)}{(1-2)(1-5)}+13\cdot\frac{(x-1)(x-5)}{(2-1)(2-5)}+$$
$$+17\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{(5-1)(5-2)}=-\frac{5}{3}x^2+13x-\frac{19}{3}$$

§ **29.** Покажем теперь, как, пользуясь формулою Лагранжа, получить ряд формул для приближенного вычисления определенных интегралов.

Если дан интеграл

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

то всегда можно преобразовать переменную так, чтобы пределы в этом интеграле были 0 и 1.

Действительно, возьмем

$$x=a+(b-a)z$$

тогда будет

$$dx=(b-a)\,dz$$
и при $x=a$ будет $z=0$
„ „ $x=b$ „ $z=1$

и предложенный интеграл примет вид

$$S=\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)z]\,dz$$

Нетрудно видеть, что это преобразование равносильно тому, что начало координат перенесено в точку A и основание площади принято за 1.

Положим, что основание площади разделено на n равных частей, тогда абсциссы точек деления будут, полагая

$$\frac{b-a}{n}=h$$

$$x_0=a;\ x_1=a+h;\ x_2=a+2h;\ \ldots\ x_{n-1}=a+(n-1)h;\ x_n=b$$

и соответствующие им значения z будут

$$z_0=0;\; z_1=\frac{1}{n};\quad z_2=\frac{2}{n};\; \ldots\; z_{n-1}=\frac{n-1}{n};\quad z_n=1$$

ординаты же соответственных точек данной кривой будут

$$y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$$

т. е.

$$f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots\ f(x_n)$$

Вместо заданной кривой возьмем ту, уравнение которой есть

$$Y=A_0+A_1\,x+A_2x^2+\ldots A_nx^n$$

и которая проходит через вышеуказанные $n+1$ точек данной кривой.

Применяя формулу Лагранжа, введя в нее вместо переменной x переменную z, очевидно, получим

$$Y=y_0\frac{\left(z-\frac{1}{n}\right)\left(z-\frac{2}{n}\right)\cdots(z-1)}{\left(0-\frac{1}{n}\right)\left(0-\frac{2}{n}\right)\cdots(0-1)}+$$

$$+y_1\frac{(z-0)\left(z-\frac{2}{n}\right)\cdots(z-1)}{\left(\frac{1}{n}-0\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(\frac{1}{n}-1\right)}+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$+y_n\frac{(z-0)\left(z-\frac{1}{n}\right)\left(z-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(z-\frac{n-1}{n}\right)}{(1-0)\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(\,.-\frac{n-1}{n}\right)}$$

Вместо площади данной кривой $y=f(x)$ возьмем площадь кривой Y, которая будет близка к данной; иначе полагаем приближенное равенство

$$\int_a^b ydx=\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int_0^1 Y\cdot dz$$

внося в которое место Y его значение, получим

$$\int_a^b ydx=(b-a)\left[\;y_0\frac{\int_0^1\left(z-\frac{1}{n}\right)\left(z-\frac{2}{n}\right)\cdots(z-1)dz}{\left(0-\frac{1}{n}\right)\left(0-\frac{2}{n}\right)\cdots(0-1)}+\right.$$

$$+y_1\frac{\int\limits_0^1 (z-0)\left(z-\frac{2}{n}\right)\cdots(z-1)\,dz}{\left(\frac{1}{n}-0\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(\frac{1}{n}-1\right)}+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$\left.+y_n\frac{\int\limits_0^1 (z-0)\left(z-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(z-\frac{n-1}{n}\right)dz}{(1-0)\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}\right]$$

Стоящие под знаками интегралов функции—целые относительно z, и как только число n будет задано, то эти интегралы могут быть вычислены для каждого данного n раз навсегда.

Полагая

$$C_n^0=\frac{\int\limits_0^1 \left(z-\frac{1}{n}\right)\left(z-\frac{2}{n}\right)\cdots(z-1)\,dz}{\left(0-\frac{1}{n}\right)\left(0-\frac{2}{n}\right)\cdots(0-1)}$$

$$C_n^1=\frac{\int\limits_0^1 (z-0)\left(z-\frac{2}{n}\right)\cdots(z-1)\,dz}{\left(\frac{1}{n}-0\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(\frac{1}{n}-1\right)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_n^i=\frac{\int\limits_0^1 (z-0)\left(z-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(z-\frac{i-1}{n}\right)\left(z-\frac{i+1}{n}\right)\cdots(z-1)\,dz}{\left(\frac{i}{n}-0\right)\left(\frac{i}{n}-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)\left(\frac{i}{n}-\frac{i+1}{n}\right)\cdots\left(\frac{i}{n}-1\right)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_n^n=\frac{\int\limits_0^1 (z-0)\left(z-\frac{1}{n}\right)\left(z-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(z-\frac{n-1}{n}\right)dz}{(1-0)\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}$$

и задавая n, можно вычислить числа или коэффициенты $C_n^0, C_n^1, \ldots C_n^n$, и ф-ла (**) примет такой вид:

$$\int\limits_a^b y\,dx=(b-a)\left[C_n^0 y_0+C_n^1 y_1+\ldots+C_n^i y_i+\ldots+C_n^n y_n\right] \qquad (1)$$

или иначе

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\left[C_n^0 f(x_0) + C_n^1 f(x_1) + \ldots + C_n^n f(x_n)\right]$$

где

$$x_0 = a;\ x_1 = a + h;\ x_2 = a + 2h;\ \ldots\ x_n = b \text{ и } h = \frac{b-a}{n}$$

Эта формула носит название формулы Котеса, предложившего ее для вычисления площадей в начале XVIII столетия.

Вычислим теперь для примера коэффициенты C_n^i при различных значениях числа n, начиная с наименьшего из них.

Итак, пусть $n=1$. Значит, кривую заменяем прямой.

Тогда

$$C_1^0 = \frac{\int_0^1 (z-1)\,dz}{0-1} = \frac{\left[\frac{z^2}{2} - z\right]_0^1}{-1} = \frac{1}{2}$$

$$C_1^1 = \frac{\int_0^1 z dz}{-1} = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

и ф-ла (1) будет

$$\int_a^b y dx = (b-a)\cdot\frac{y_0 + y_1}{2}$$

Это есть формула трапеций.

Пусть $n=2$. Данная кривая, значит, заменяется параболой второй степени, и мы получим

$$C_2^0 = \frac{\int_0^1 \left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1)\,dz}{\left(0-\frac{1}{2}\right)(0-1)} = \frac{\int_0^1 \left(z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}\right)dz}{\frac{1}{2}} = \frac{\left[\frac{z^3}{3} - \frac{3}{4}z^2 + \frac{z}{2}\right]_0^1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

$$C_2^1 = \frac{\int_0^1 (z-0)(z-1)\,dz}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)} = \frac{\int_0^1 (z^2 - z)\,dz}{-\frac{1}{4}} = \frac{\left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2}\right]_0^1}{-\frac{1}{4}} = \frac{4}{6}$$

$$C_2^2 = \frac{\int\limits_0^1 (z-0)\left(z-\frac{1}{2}\right)dz}{(1-0)\left(1-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\int\limits_0^1 \left(z^2-\frac{z}{2}\right)dz}{\frac{1}{2}} = \frac{\left[\frac{z^3}{3}-\frac{z^3}{4}\right]_0^1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

и ф-ла (1) примет вид

$$\int\limits_a^b ydx = \frac{b-a}{6}(y_0+4y_1+y_2)$$

т. е. формулы Симпсона.

Совершенно подобным же образом могут быть вычислены коэффициенты $C_n^{(i)}$ для $n=3, 4, 5$ и т. д., и получится следующая таблица их:

Коэффициенты формулы Котеса

$$\int\limits_a^b ydx = (b-a)[C_n^0 y_0 + C_n^1 y_1 + \ldots + C_n^n y_n]$$

$n = 1;\quad C_1^0 = C_1^1 = \frac{1}{2}$

$n = 2;\quad C_2^0 = C_2^2 = \frac{1}{6};\quad C_2^1 = \frac{4}{6}$

$n = 3;\quad C_3^0 = C_3^3 = \frac{1}{8};\quad C_3^1 = C_3^2 = \frac{3}{8}$

$n = 4;\quad C_4^0 \quad C_4^4 = \frac{7}{90};\quad C_4^1 = C_4^3 = \frac{16}{45};\quad C_4^2 = \frac{2}{15}$

$n = 5;\quad C_5^0 = C_5^5 = \frac{19}{288};\quad C_5^1 = C_5^4 = \frac{25}{96};\quad C_5^2 = C_5^3 = \frac{25}{144}$

$n = 6;\quad C_6^0 = C_6^6 = \frac{41}{840};\quad C_6^1 = C_6^5 = \frac{9}{35};\quad C_6^2 = C_6^4 = \frac{9}{280};\quad C_6^3 = {}_{105}$

$n = 7;\quad C_7^0 = C_7^7 = \frac{751}{17280};\quad C_7^1 = C_7^6 = \frac{3577}{17280};\quad C_7^2 = C_7^5 = \frac{1323}{17280};\quad C_7^3 = C_7^4 = \frac{2989}{17280}$

$n = 8;\quad C_8^0 = C_8^8 = \frac{989}{28350};\quad C_8^1 = C_8^7 = \frac{5838}{28350};\quad C_8^2 = C_8^6 = \frac{-928}{28350};\quad C_8^3 = C_8^5 = \frac{10496}{28350};\quad C_8^4 = \frac{-4540}{28350}$

$n = 9;\quad C_9^0 = C_9^9 = \frac{2857}{89600};\quad C_9^1 = C_9^8 = \frac{15741}{89600};\quad C_9^2 = C_9^7 = \frac{1080}{89600};\quad C_9^3 = C_9^6 = \frac{19344}{89600};\quad C_9^4 = C_9^5 = \frac{5778}{89600}$

$n = 10;\quad C_{10}^0 = C_{10}^{10} = \frac{16067}{598752};\quad C_{10}^1 = C_{10}^9 = \frac{106300}{598752};\quad C_{10}^2 = C_{10}^8 = \frac{-48525}{598752};$

$C_{10}^3 = C_{10}^7 = \frac{272400}{598752};\quad C_{10}^1 = C_{10}^6 = \frac{-260550}{598752};\quad C_{10}^5 = \frac{427368}{598752}.$

Формула Котеса дает при том же числе ординат тем более точный результат, чем величина $b-a$ меньше, поэтому часто, вместо того, чтобы брать ту формулу, которая соответствует большому числу n, подразделяют основание площади $b-a$ на несколько равных частей и к каждой из них применяют формулу Котеса для меньших значений n.

Так, например, разбив $b-a$ на k равных частей и применив для каждой части формулу Котеса для $n=1$, получим, обозначая через

$$y_0, y_1, y_2, \ldots y_k$$

ординаты, проведенные через точки деления и через концы основания:

площадь 1-й части

$$S_1 = \frac{b-a}{k} \cdot \left(\frac{1}{2} y_0 + \frac{1}{2} y_1\right)$$

площадь 2-й части

$$S_2 = \frac{b-a}{k} \cdot \left(\frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2\right)$$

площадь 3-й части

$$S_3 = \frac{b-a}{k} \cdot \left(\frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} y_3\right)$$

. . . .

площадь k-й части

$$S_k = \frac{b-a}{k} \cdot \left(\frac{1}{2} y_{k-1} + \frac{1}{2} y_k\right)$$

Сложив эти равенства и положив

$$\frac{b-a}{k} = h$$

получим площадь всей кривой:

$$S = h\left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \ldots y_{k-1} + \frac{1}{2} y_k\right)$$

т. е. ранее выведенное правило трапеций.

Совершенно так же, если бы к каждой части применить формулу для $n=2$, то надо бы было сперва подразделить основание каждой части на 2 и провести кроме вышеуказанных еще средние между ними ординаты, тогда полное число ординат будет $2k+1$ — нечетное, и промежуток между двумя смежными ординатами будет $h=\frac{b-a}{2k}$. Тогда получим, нумеруя ординаты по порядку от 0 до $2k$:

площадь 1-й части

$$S_1 = \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

площадь 2-й части

$$S_2 = \frac{h}{3} \cdot (y_2 + 4y_3 + y_4)$$

. . . .

площадь k-й части

$$S_k = \frac{h}{3} \cdot (y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k})$$

и, сложив эти равенства, будем иметь

$$S = \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k})$$

т. е. формулу Симпсона, которую имели и раньше.

§ **30. Формула Чебышева.** Выведенная в § 28 интерполяционная формула Лагранжа дает возможность составить бесчисленное множество приближенных формул вида

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)[C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n)] \tag{1}$$

где $x_1, x_2, \ldots x_n$ некоторые промежуточные между a и b числа.

Действительно, задав $x_1, x_2, \ldots x_n$ как угодно и рассуждая совершенно так же, как мы делали для вывода формулы Котеса, мы получим для вычисления коэффициента C_i такую формулу:

$$C_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})\ldots(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}\,dx \tag{I}$$

Обыкновенно такие коэффициенты будут выражаться сложными дробями, и полученная формула будет неудобная для вычислений.

Чебышев поставил обратную задачу: именно задать не абсциссы $x_1, \ldots x_n$, а коэффициенты C, и искать соответствующие им абсциссы.

При этом коэффициенты C задаются так, чтобы формула была возможно проще для вычислений, что, очевидно, будет тогда, когда все коэффициенты между собою равны, т. е.

$$C_1 = C_2 = C_3 \ldots = C_n$$

и тогда ф-ла (1) примет такой вид:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,C_n \cdot [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] \tag{2}$$

и требуется определить как величину C_n, так и значение абсцисс

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

Ф-ла (2), подобно формуле Котеса, представляет собою приближенное равенство, которое обращается в точное, лишь когда функция $f(x)$ целая и степень ее не выше $n-1$. Это последнее условие и послужит для определения неизвестных $C_n, x_1, x_2, \ldots x_n$. Чтобы иметь эти величины в форме, удобной для всех случаев, приведем сперва пределы интеграла к -1 и $+1$. Положим

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} z$$

тогда будет

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{1} z\right) dz$$

и, следовательно, вышеуказанная подстановка сводит вычисление всякого интеграла к такому, у которого пределы $+1$ и -1, т. е. к интегралу вида

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, dx$$

Итак, формула

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = 2C_n [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] \qquad (*)$$

должна быть точною для всякой функции $f(x)$ вида

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \qquad (**)$$

но

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}\right) dx =$$

$$= 2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \ldots\right)$$

Сумма же, стоящая в правой части равенства $(*)$, будет

$$2C_n \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} + \\ + a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} + \\ + a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 + \ldots + a_{n-1} x_3^{n-1} + \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{array}{l} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ + a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + a_3 x_n^3 + \dots + a_{n-1} x_n^{n-1} \end{array}\right\}$$

или иначе

$$\begin{aligned} 2C_n \{ & na_0 + a_1 (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \\ & + a_2 (x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2) + a_3 (x_1^3 + x_2^3 + \dots x_n^3) + \\ & + \dots + a_{n-1} (x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}) \} \end{aligned}$$

а так как эта величина для всякой функции $f(x)$ вида (**) должна равняться величине интеграла, т. е.

$$2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \dots\right)$$

значит, при всяких значениях букв a_0, a_1, $a_2, \dots$ должно иметь место равенство

$$\begin{aligned} 2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \dots\right) = 2C_n \{ & na_0 + a_1 (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \\ & + a_2 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + \\ & + \dots\dots\dots\dots + \\ & + a_{n-1} (x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}) \} \end{aligned}$$

Это требует, чтобы было

$$nC_n = 1$$

откуда

$$C_n = \frac{1}{n}$$

и затем

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \frac{n}{3} \\ x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0 \\ x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 = \frac{n}{5} \\ x_1^5 + x_2^5 + \dots + x_n^5 = 0 \\ x_1^6 + x_2^6 + \dots + x_n^6 = \frac{n}{7} \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \qquad (3)$$

причем этих уравнений получится как раз столько, сколько коэффициентов

$$a_0,\ a_1,\ a_2, \dots a_{n-1}$$

т. е. n, значит как раз столько, сколько неизвестных.

Для решения системы ур-ний (3) пользуются тем обстоятельством, что левые части этих уравнений представляют собою суммы одинаковых степеней букв $x_1, x_2, \dots x_n$, т. е. простейшие симметрические функции этих букв. В алгебре доказывается, что суммы одинаковых степеней корней уравнения n-ой степени выражаются рационально через коэффициенты его и наоборот, поэтому, пользуясь системою (3), нетрудно составить такое уравнение n-ой степени, коего корни были бы как раз

$$x_1,\ x_2, \dots x_n$$

Пусть

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n$$

есть требуемая первая часть этого уравнения, т. е. что

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

Составить эту функцию, — значит найти коэффициенты

$$A_1,\ A_2, \dots A_n$$

Очевидно, имеем тожественно

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \dots + \frac{1}{x - x_n}$$

откуда следует тожество

$$F'(x) = \frac{F(x)}{x - x_1} + \frac{F(x)}{x - x_2} + \dots + \frac{F(x)}{x - x_n} \qquad (***)$$

но

$$F'(x) = nx^{n-1} + (n-1) A_1 x^{n-2} + (n-2) A_2 x^{n-3} + \dots + A_{n-1}$$

частное же

$$\frac{F(x)}{x - x_1} = x^{n-1} + (A_1 + x_1) x^{n-2} + (A_2 + A_1 x_1 + x_1^2) x^{n-3} \dots +$$
$$+ (A_{n-1} + A_{n-2} x_1 + \dots + A_1 x_1^{n-2} + x_1^{n-1})$$

точно так же

$$\frac{F(x)}{x - x_2} = x^{n-1} + (A_1 + x_2) x^{n-1} + (A_2 + A_1 x_2 + x_2^2) x^{n-3} + \dots +$$
$$+ (A_{n-1} + A_{n-2} x_2 + \dots + A_1 x_2^{n-2} + x_2^{n-1})$$

и т. д. Обозначая соответственно через

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \dots\ s_{n-1}$$

суммы 1-х, 2-х, ... $(n-1)$ степеней букв $x_1,\ x_2,\ \dots\ x_{n-1}$, мы получим из тождества (***) такое тождество:

$$\begin{aligned}F'(x) &= nx^{n-1}+(n-1)A_1x^{n-2}+(n-2)A_2x^{n-3}+\dots+A_{n-1}= \\ &= nx^{n-1}+(nA_1+s_1)x^{n-2}+(nA_2+A_1s_1+s_2)x^{n-3}+ \\ &\quad +(nA_3+A_2s_1+A_1s_2+s_3)x^{n-4}+\dots+ \\ &\quad +(nA_{n-1}+A_{n-2}s_1+A_{n-3}s_2+\dots+A_1s_{n-2}+s_{n-1})\end{aligned}$$

из которого вытекают следующие равенства (коэффициентов при одинаковых степенях x в обеих частях):

$$\begin{aligned}(n-1)A_1 &= nA_1+s_1 \\ (n-2)A_2 &= nA_2+A_1s_1+s_2 \\ (n-3)A_3 &= nA_3+A_2s_1\ A_1s_2+s_3 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{n-1} &= nA_{n-1}+A_{n-2}s_1+A_{n-3}s_2+\dots+As_{1n-2}+s_{n-1}\end{aligned}$$

или иначе

$$\begin{aligned}A_1+s_1&=0 \\ 2A_2+s_1A_1+s_2&=0 \\ 3A_3+s_1A_2+s_2A_1+s_3&=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots& \\ (n-1)A_{n-1}+s_1A_{n-2}+s_2A_{n-3}+\dots+s_{n-1}&=0\end{aligned} \qquad (4)$$

так как в силу системы (3) величины $s_1,\ s_2,\ \dots\ s_{n-1}$ известны, то из этих уравнений, число коих $(n-1)$, и можно найти величины $A_1,\ A_2,\ A_{n-1}$.

Чтобы найти величину A_n, заметим, что, по предположению

$$\begin{aligned}F(x_1) &= x_1^n+A_1x_1^{n-1}+A_2x_1^{n-2}+\dots+A_{n-1}x_1+A_n=0 \\ F(x_2) &= x_2^n+A_1x_2^{n-1}+A_2x_2^{n-2}+\dots+A_{n-1}x_2+A_n=0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ F(x_n) &= x_n^n+A_1x_n^{n-1}+A_2x_n^{n-2}+\dots+A_{n-1}x_n+A_n=0\ .\end{aligned}$$

сложив эти равенства, имеем

$$s_n+A_1s_{n-1}+A_2s_{n-1}+\dots+A_{n-1}s_1+nA_n=0 \qquad (5)$$

т. е. уравнение совершенно того же типа, как и прочие уравнения системы (4), к которой мы его и присоединим.

Подставляя вместо $s_1, s_2, \dots s_n$ их величины из системы (3), увидим, что система (4) примет вид

$$
\begin{gathered}
A_1 = 0 \\
2A_2 + \frac{n}{3} = 0 \\
A_3 = 0 \\
4A_4 + \frac{n}{3}A_2 + \frac{n}{5} = 0 \\
A_5 = 0 \\
6A_6 + \frac{n}{3}A_4 + \frac{n}{5}A_2 + \frac{n}{7} = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered}
\tag{6}
$$

из которого очевидно, что она допускает решение относительно неизвестных

$$A_1,\ A_2, \dots A_n$$

Найдя эти значения, составляем функцию

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n$$

уравняв которую нулю и решив полученное уравнение, и найдем величины

$$x_1,\ x_2, \dots x_n$$

Заметим относительно уравнения $F(x)=0$, что в нем коэффициенты

$$A_1 = A_3 = A_5 \dots = A_{2k+1} = 0$$

следовательно, если n число нечетное, например $2k+1$, то это уравнение будет вида

$$x^{2k+1} + A_2 x^{2k-1} + A_4 x^{2k-3} + \dots + A_{2k} x = 0$$

один из его корней есть $x=0$, а остальные корни попарно равны по величине, но обратных знаков; когда же n число четное, $2k$, то уравнение $F(x)=0$ будет

$$x^{2k} + A_2 x^{2k-2} + \dots + A_{2k-2} x^2 + A_{2k} = 0$$

$x=0$ не будет его корнем, но все корни попарно равны и обратных знаков.

Величина $x=0$ соответствует середине основания площади, значит, при всяком числе ординат они располагаются симметрично относительно середины, причем при нечетном числе средняя ордината проходит через середину основания.

Покажем теперь на численных примерах вычисление абсцисс для правила Чебышева.

Пусть $n=1$, уравнение $F(x)=0$ будет

$$x=0$$

и соответствующий коэффициент $C_1=1$.

Пусть $n=2$, система (6) будет

$$A_1=0$$
$$A_2+\frac{1}{3}=0$$

откуда

$$A_2=-\frac{1}{3}$$

Уравнение $F(x)=0$ будет

$$x^2-\frac{1}{3}=0$$

откуда

$$x_1=-\sqrt{\frac{1}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}=-0.577350$$
$$x_2=+\sqrt{\frac{1}{3}}=+\frac{\sqrt{3}}{3}=+0.577350$$
$$C_2=\frac{1}{2}$$

При $n=3$, система (6) будет

$$A_1=0$$
$$2A_2+1=0$$
$$A_2=0$$

Уравнение $F(x)=0$ будет

$$x^3-\frac{1}{2}x=0$$

Его корни

$$x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}=-0.707107$$
$$x_2=0$$
$$x_3=+\frac{\sqrt{2}}{2}=+0.707107$$
$$C_3=\frac{1}{3}$$

При $n=4$, имеем

$$A_1=0;\quad A_3=0$$

$$2A_2+\frac{4}{3}=0$$

$$4A_4+\frac{4}{3}A_2+\frac{4}{5}=0$$

Откуда

$$A_2=-\frac{2}{3};\quad A_4=\frac{1}{45}$$

Уравнение $F(x)=0$ будет

$$x^4-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{45}=0$$

Его корни

$$\begin{aligned}x_1&=-0.794654\\x_2&=-0.187592\\x_3&=0.187592\\x_4&=0.794654\end{aligned}$$

$$C_4=\frac{1}{4}$$

Продолжая совершенно так же, мы получим при

$$n=5\ \ldots\ F(x)=x^5-\frac{5}{6}x^3+\frac{7}{12}x=0$$

$$n=6\ \ldots\ F(x)=x^6-x^4+\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{105}=0$$

$$n=7\ \ldots\ F(x)=x^7-\frac{7}{6}x^5+\frac{119}{360}x^3-\frac{149}{1480}x=0$$

$$n=9\ \ldots\ F(x)=x^9-\frac{3}{2}x^7+\frac{27}{40}x^5-\frac{57}{560}x^3+\frac{53}{22400}x=0$$

Уравнение, при $n=8$, имеет корни мнимые, почему его и не приводим.

По этим уравнениям составлена следующая таблица значений абсцисс для разного числа ординат в формуле Чебышева:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx=\frac{2}{n}[f(x_1)+f(x_2)\ \ldots\ +f(x_n)]$$

Число ординат n	Значение абсцисс x
2	$x_1 = -x_2 = 0.577350$
3	$x_1 = -x_3 = 0.707107$
	$x_2 = 0$
4	$x_1 = -x_4 = 0.794654$
	$x_2 = -x_3 = 0.187592$
5	$x_1 = -x_5 = 0.832498$
	$x_2 = -x_4 = 0.374541$
	$x_2 = 0$
6	$x_1 = -x_6 = 0.866247$
	$x_2 = -x_5 = 0.422519$
	$x_3 = -x_4 = 0.266635$
7	$x_1 = -x_7 = 0.883862$
	$x_2 = -x_6 = 0.529657$
	$x_3 = -x_5 = 0.323912$
	$x_4 = 0$
9	$x_1 = -x_9 = 0.911589$
	$x_2 = -x_8 = 0.601019$
	$x_3 = -x_7 = 0.528762$
	$x_4 = -x_6 = 0.167906$
	$x_5 = 0$

Когда заданный интеграл имеет пределы a и b, то формула Чебышева принимает вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}[f(X_1) + f(X_2) + \ldots + f(X_n)]$$

где

$$X_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_i$$

и x_i имеет указанное в таблице значение.

§ 31. Формула Гаусса. Общая формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)[C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n (x_n)] \qquad (1)$$

для приближенного вычисления интеграла заключает в себе $2n$ произвольных величин $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и $x_1, x_2, \ldots x_n$. Гаусс предложил избрать их так, чтобы при данном числе ординат n эта формула давала возможно большую точность, что будет достигнуто, если величины коэффициентов $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и абсцисс $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определить так, что ф-ла (1) будет справедлива (а не только приближенная) для всякой функции $f(x)$, целой относительно x, степени не выше $2n-1$, т. е. вида

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n-1} x^{2n-1}$$

тогда как формулы Котеса и Чебышева, при том же числе ординат, верны лишь для целых функций, степень которых не выше $n-1$.

Для вывода формулы Гаусса предположим, что пределы интеграла суть -1 и $+1$, и начнем с вычисления абсцисс $x_1, x_2, \ldots x_n$, когда же абсциссы будут найдены, то соответствующие коэффициенты могут быть вычислены по формуле (1) § 30.

Пусть функция

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

будет такова, что корни ее суть

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

так что

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

если мы сумеем найти функцию $F(x)$, т. е. коэффициенты $A_1, A_2, \ldots A_n$, то нахождение величины абсцисс

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

сведется к решению уравнения

$$F(x) = 0$$

Какова бы ни была функция

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n-1} x^{2n-1}$$

для которой должна иметь место точно формула

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n) \qquad (*)$$

всегда можно, разделив многочлен $f(x)$, степень коего $2n-1$, на $F(x)$, коего степень n, и обозначив через $Q(x)$ частное и через $R(x)$ остаток такого деления, написать тождество

$$f(x) = F(x)\,Q(x) + R(x)$$

причем степени функций $Q(x)$ и $R(x)$ будут не выше $n-1$.

Тогда очевидно, что

$$f(x_1)=R(x_1);\quad f(x_2)=R(x_2);\ \dots f(x_n)=R(x_n)$$

ибо при

$$x=x_1;\quad x=x_2;\ \dots x=x_n$$

функция $F(x)$ обращается в нуль, и ф-ла (*) примет вид

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{+1} F(x)Q(x)\,dx+\int_{-1}^{+1} R(x)\,dx=$$

$$=C_1 R(x_1)+C_2 R(x_2)+\dots+C_n R(x_n)$$

С другой стороны, так как функция $R(x)$ целая и степени $n-1$, т. е. ниже $2n-1$, то эта же формула будет иметь место точно и для функции $R(x)$, т. е. будет

$$\int_{-1}^{+1} R(x)\,dx=C_1 R(x_1)+C_2 R(x_2)+\dots+C_n R(x_n)$$

вычитая это равенство из предыдущего, получаем

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,Q(x)\,dx=0 \tag{I}$$

Этим равенством функция $F(x)$ вполне определяется — действительно, так как $f(x)$ произвольная целая функция степени $2n-1$, то $Q(x)$ есть произвольная целая функция степени $n-1$, т. е. вида

$$Q(x)=b_0 x^{n-1}+b_1 x^{n-2}+\dots+b_{n-2}x+b_{n-1}$$

равенство же (I) должно иметь место при всяких величинах

$$b_0,\ b_1,\ \dots b_{n-1},\ b_{n-1},$$

следовательно, должно быть в отдельности

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-1}^{+1} x^{n-1}\,F(x)\,dx=0\\
&\int_{-1}^{+1} x^{n-2}\,F(x)\,dx=0\\
&\dots\dots\dots\\
&\int_{-1}^{+1} x\,F(x)\,dx=0\\
&\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx=0
\end{aligned}\right\} \tag{I'}$$

Подставляя вместо $F(x)$ его величину и выполняя интегрирование, мы из вышенаписанных уравнений получаем для определения коэффициентов

$$A_1,\ A_2,\ \ldots\ A_n$$

такую систему n уравнений:

$$\begin{array}{l} \dfrac{A_1}{2n-1}+\dfrac{A_3}{2n-3}+\dfrac{A_5}{2n-5}+\ldots=0 \\ \dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{A_2}{2n-3}+\dfrac{A_4}{2n-5}+\ldots=0 \\ \dfrac{A_1}{2n-3}+\dfrac{A_3}{2n-5}+\dfrac{A_5}{2n-7}+\ldots=0 \\ \dfrac{1}{2n-3}+\dfrac{A_2}{2n-5}+\dfrac{A_6}{2n-7}+\ldots=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad \text{(II)}$$

Из этих уравнений нетрудно видет, что

$$A_1=A_3=A_5=A_7\ldots=0$$

и, следовательно, если n число четное, $2k$, то вид функции $F(x)$ таков:

$$x^{2k}+A_2x^{2k-2}+A_4x^{2k-4}+\ldots+A_{2k}$$

и, следовательно, корни уравнения $F(x)=0$ попарно равны по абсолютной величине и противоположны по знакам. Когда же $n=2k+1$, т. е. число нечетное, то функция $F(x)$ имеет вид

$$x^{2k+1}+A_2x^{2k-1}+A_4x^{2k-3}+\ldots+A_{2k}x$$

из которого следует, что один из корней ее есть $x=0$, а остальные корни между собою попарно равны по абсолютной величине и противоположны по знакам.

Найдя из ур-ний (II) коэффициенты A, составляем функцию $F(x)$ и, уравняв ее нулю и вычислив корни полученного уравнения, найдем величины

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n$$

по которым затем, пользуясь ф-лой (1) § 30, вычислим коэффициенты C.

Возьмем для примера $n=2$, тогда функция $F(x)$ определяется условиями

$$\int_{-1}^{+1} xF(x)\,dx=0$$

и

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx=0$$

причем $F(x)=x^2+A_1x+A_2$.

Система ур-ний (II) будет

$$\frac{A_1}{3} = 0$$

$$\frac{1}{3} + A_2 = 0$$

значит,

$$F(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

откуда

$$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -0.577\ldots$$

$$x_2 = +\frac{\sqrt{3}}{3} = +0.577\ldots$$

Коэффициент C_1 найдется по формуле

$$C_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\, dx = \int_{-1}^{+1} \frac{x - \frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}\, dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}x\right]_{-1}^{+1} = 1$$

и совершенно так же увидим, что $C_2 = 1$.

Якоби показал, что по условиям (I) может быть составлен общий вид функции $F(x)$, без того чтобы решать систему ур-ний (II), определяющих коэффициенты A; именно функция $F(x)$ есть такая:

$$F(x) = K\frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

причем постоянная K может иметь любое значение. Это значение выбирают обыкновенно так, чтобы при $x = 1$ функция $F(x)$ принимала значение, равное 1.

Тогда

$$K = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n \cdot 2^n}$$

Чтобы убедиться в справедливости того, что функция $F(x)$ этого вида удовлетворяет вопросу, достаточно показать, что интеграл

$$\int_{-1}^{+1} x^k \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx}\, dx$$

равен нулю для всякого целого значения k, меньшего n, Интегрируя по частям, имеем

$$S_k = \int_{-1}^{+1} x^k \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}\, dx =$$

$$= \left[x^k \cdot \frac{d^{n-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-1}} \right]_{-1}^{+1} - k \int_{-1}^{+1} x^{k-1} \frac{d^{n-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\, dx$$

но легко видеть, что производная порядка $n-1$ от $(x^2-1)^n$ заключает множитель x^2-1, и значит, при обоих пределах интеграла обращается в нуль, так что

$$S_k = -k \int_{-1}^{+1} x^{k-1} \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\, dx$$

Совершенно так же увидим, что

$$\int_{-1}^{+1} x^{k-1} \frac{d^{n-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\, dx =$$

$$= \left[x^{k-1} \frac{d^{n-2} (x^2-1)^n}{dx^{n-2}} \right]_{-1}^{+1} - (k-1) \int_{-1}^{+1} x^{k-2} \frac{d^{n-2} (x-1)^n}{dx^{n-2}}\, dx =$$

$$= -(k-1) \int_{-1}^{+1} x^{k-2} \frac{d^{n-2}(x^2-1)^n}{dx^{n-2}}\, dx$$

$$\int_{-1}^{+1} x^{k-2} \frac{d^{n-2} (x^2-1)^n}{dx^{n-2}}\, dx = -(k-2) \int_{-1}^{+1} x^{k-2} \frac{d^{n-3} (x^2-1)^n}{dx^{n-3}}\, dx$$

. . . .

$$\int_{-1}^{+1} x^{k-(k-1)} \frac{d^{n-(k-1)} (x^2-1)^n}{dx^{n-(k-1)}}\, dx = -1 \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-k} (x^2-1)^n}{dx^{n-k}}\, dx$$

предполагая, что $k < n$.

Перемножив эти равенства, имеем

$$S_k = (-1)^k \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-k} (x-1)^n}{dx^{n-k}}\, dx$$

но интеграл

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-k} (x^2-1)^n}{dx^{n-k}}\, dx = \left[\frac{d^{n-k-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-k-1}} \right]_{-1}^{+1} = 0$$

а значит, и $S_k = 0$, и, следовательно, функция

$$F(x) = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

удовлетворяет условиям (I) и есть требуемая.

Можно доказать, что всякая другая функция, удовлетворяющая этим условиям, отличается от вышеприведенной лишь постоянным множителем, за который, как выше указано, принято

$$K = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n \cdot 2^n}$$

но можно принять и всякий другой, например, если взять

$$K = \frac{1}{2n(2n-1)\ldots(n+1)}$$

то коэффициент при x^n будет равен 1.

Так, например, при $n=2$ будет

$$F(x) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} \frac{d^2(x^2-1)^2}{dx^2} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2^2}[x^4 - 2x^2 + 1]'' =$$

$$= \frac{1}{8}(12x^2 - 4) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

т. е. $F(x)$ отличается лишь множителем $\frac{3}{2}$ от функции $x^2 - \frac{1}{3}$, которую мы нашли раньше.

Для вычисления коэффициентов C_k можно вместо общей формулы § 30 получить другую более простую, применив формулу

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n)$$

к функциям частного вида, выбирая эти последние так, чтобы во второй части этой формулы оставался всего один член; так, например, можно взять

$$f(x) = 2F_k(x)\,F_k'(x)$$

где

$$F_k(x) = \frac{F(x)}{x - x_k} =$$

$$= K(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)$$

которая степени $2n-3$, и, следовательно, для нее формула верна.

Но

$$\int_{-1}^{+1} 2F_k(x)\,F_k'(x)\,dx = [\{F_k(x)\}^2]_{-1}^{+1} = \frac{\{F(1)\}^2}{(1-x_k)^2} - \frac{\{F(-1)\}^2}{(1+x_k)^2} =$$

$$= \frac{4x_k}{(1-x_k^2)^2} F^2(1) = \frac{4x_k}{(1-x_k^2)^2}$$

ибо, очевидно,

$$\{F(-1)\}^2 = \{F(1)\}^2 = 1$$

С другой стороны, по ф-ле (*)

$$\int_{-1}^{+1} 2F_k(x)\,F_k'(x)\,dx = 2C_k F_k(x_k)\,F_k'(x_k) \qquad (^{**})$$

ибо все остальные члены, очевидно, обращаются в нуль. Но

$$(x - x_k)F_k(x) = F(x)$$

дифференцируя дважды это равенство и полагая затем $x = x_k$, получим

$$F_k(x_k) = F'(x_k)$$

и

$$2F_k'(x_k) = F''(x_k)$$

Внося эти величины в ф-лу (**) и уравняв полученный результат значению интеграла, найдем

$$C_k = \frac{4x_k}{(1-x_k^2)^2} \cdot \frac{1}{F'(x_k)\cdot F''(x_k)}$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$(x^2 - 1)\,F''(x) + 2x\,F'(x) - n\,(n+1)\,F(x) = 0$$ [1]

Делая в нем $x = x_k$ и замечая, что $F(x_k) = 0$, получим

$$(x_k^2 - 1)\,F''(x_k) + 2x_k F'(x_k) = 0$$

откуда

$$F''(x) = \frac{2x_k F'(x_k)}{1 - x_k^2}$$

---

[1] Предлагается в виде задачи проверить это.

подставляя, будем иметь

$$C_k = \frac{2}{(1 - x_k^2)\,[F'(x_k)]^2} \tag{*}$$

Этот же результат можно получить и иначе, взяв вместо $F(x)$ функцию $[F_k(x)]^2$, причем

$$F_k(x) = \frac{F(x)}{x - x_k}$$

и, составив интеграл

$$S = \int_{-1}^{+1} [F_k(x)]^2\,dx = \int_{-1}^{+1} [F(x)]^2 \frac{dx}{(x - x_k)^2}$$

вычислить его двумя манерами, а именно:

1) так как подъинтегральная функция степени $2n-2$, то по формуле Гаусса имеем

$$S = \int_{-1}^{+1} [F_k(x)]^2\,dx = C_k [F_k(x_k)]^2$$

ибо все остальные члены равны нулю; но очевидно, что

$$F_k(x_k) = F'(x_k)$$

таким образом,

$$S = C_k \cdot [F'(x_k)]^2 \tag{1}$$

2) с другой стороны, интегрируя по частям, имеем

$$S = \int_{-1}^{+1} [F(x)]^2 \frac{dx}{(x - x_k)^2} =$$

$$= \left[-\frac{1}{x - x_k} F^2(x) \right]_{-1}^{+1} + 2 \int_{-1}^{+1} F(x) F'(x) \frac{dx}{x - x_k} =$$

$$= \frac{-2}{1 - x_k^2} + 2 \int_{-1}^{+1} F(x) F'(x) \frac{dx}{x - x_k}$$

Но замечая, что

$$\frac{F(x)}{(x - x_k)} = F_k(x)$$

т. е. в последнем интеграле подъинтегральная функция есть целая и притом степени $2n-2$, и, значит, формула Гаусса, будучи к нему применена, даст верный результат, так что будет

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,F'(x)\,\frac{dx}{x-x_k} = \int_{-1}^{+1} F_k(x)\,F'(x)\,dx = C_k\,[F'(x_k)]^2$$

подставляя и сличая с ф-лой (1), получим для определения C_k уравнение

$$C_k\,[F'(x_k)]^2 = \frac{-2}{1-x_k^2} + 2C_k\,[F'(x_k)]^2$$

откуда следует

$$C_k = \frac{2}{(1-x_k^2)\cdot[F'(x_k^2)]}$$

т. е. та же самая формула, которую мы имели и раньше.

При вышеприведенном вычислении абсцисс и коэффициентов формул Гаусса предположено, что пределы интеграла суть -1 и $+1$. Отсюда легко перейти к общему случаю, когда пределы какие угодно, например a и b.

Тогда формула Гаусса напишется в таком виде:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,\{A_1 f(X_1) + A_2 f(X_2) + \ldots + A_n f(X_n)\}$$

где

$$X_i = a + (b-a)\cdot x_i$$

причем абсциссы и коэффициенты показаны в следующей таблице для значений пределов интеграла

$$a=0;\quad b=1$$

при которых формула Гаусса будет

$$\int_0^1 f(x)\,dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_n f(x_n)$$

Абсциссы и коэффициенты формулы Гаусса

$n=1: x_1=0.5$	$A_1=1$	
$n=2: x_1=0.21132487$	$A_1=\frac{1}{2}$	$\lg A_1=\bar{1}.6989700$
$x_2=0.78867513$	$A_2=\frac{1}{2}$	
$n=3: x_1=0.11270167$	$A_1=\frac{5}{18}$	$\lg A_1=\bar{1}.4436975$
$x_2=0.5$	$A_1=\frac{4}{9}$	$\lg A_1=\bar{1}.6478175$
$x_3=0.88729833$	$A_1=\frac{5}{18}$	

$n=4: x_1=0.06943184$	$A_1=A_4=0.17392742$	$\lg A_1=\bar{1}.2403681$
$x_2=0.33000948$	$A_2=A_3=0.32607258$	$\lg A_2=\bar{1}.5133143$
$x_3=0.66999052$		
$x_4=0.93056816$		
$n=5: x_1=0.04691008$	$A_1=A_5=0.11846344$	$\lg A_1=\bar{1}.0735843$
$x_2=0.23076534$	$A_2=A_4=0.23931433$	$\lg A_2=\bar{1}.3789687$
$x_3=0.5$	$A_3=0.28444444=\frac{64}{225}$	$\lg A_3=1.4539975$
$x_4=0.76923466$		
$x_5=0.95308992$		
$n=6: x_1=0.03376524$	$A_1=A_6=0.08566225$	$\lg A_1=\bar{2}.9327895$
$x_2=0.16939531$	$A_2=A_5=0.18038079$	$\lg A_2=\bar{1}.2561903$
$x_3=0.38069041$	$A_3=A_4=0.23395697$	$\lg A_3=\bar{1}.3691360$
$x_4=0.61930959$		
$x_5=0.83060469$		
$x_6=0.96623476$		
$n=7: x_1=0.02544604$	$A_1=A_7=0.06474248$	$\lg A_1=\bar{2}.8111894$
$x_2=0.12923441$	$A_2=A_6=0.13985269$	$\lg A_2=\bar{1}.1456708$
$x_3=0.29707742$	$A_3=A_5=0.190915025$	$\lg A_3=\bar{1}.2808401$
$x_4=0.5$	$A_4=0.20897959$	$\lg A_4=\bar{1}.3201039$
$x_5=0.70292258$		
$x_6=0.87076559$		
$x_7=0.97455396$		
$x=8: x_1=0.01985507$	$A_1=A_8=0.05061427$	$\lg A_1=\bar{2}.7042730$
$x_2=0.10166676$	$A_2=A_7=0.11119052$	$\lg A_2=\bar{1}.0460677$
$x_3=0.23723379$	$A_3=A_6=0.15685332$	$\lg A_3=\bar{1}.1954937$
$x_4=0.40828268$	$A_4=A_5=0.18134189$	$\lg A_4=\bar{1}.2584981$
$x_5=0.59171732$		
$x_6=0.76276621$		
$x_7=0.89833324$		
$x_8=0.98014493$		

При одинаковом числе ординат формула Гаусса дает вообще бóльшую точность, нежели другие формулы, но зато вычисление по ней сложнее, поэтому ее выгодно применять в том случае, когда вычисление ординат затруднительно; когда же ординаты легко снять с чертежа, то проще снять большее их число, нежели множить эти ординаты на сложные множители, и тогда выгоднее применять другую формулу, например, Чебышева, трапеций или Симпсона.

§ 32. Дадим теперь несколько примеров, чтобы показать приложение предыдущих формул. Пусть надо найти интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = -\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

вычислим этот интеграл по приближенным формулам:

1) Формула трапеций. Возьмем $n=10$, тогда величина промежутка h будет

$$h=\frac{1}{10}\cdot\frac{\pi}{2}=0.1570796\ldots=9^\circ$$

Значения аргументов x будут

$$0^\circ,\ 9^\circ,\ 18^\circ,\ 27^\circ,\ldots\ 81^\circ,\ 90^\circ$$

и, следовательно,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=0.157\ldots\left[\frac{1}{2}\sin 0^\circ+\sin 9^\circ+\ldots+\sin 81^\circ+\frac{1}{2}\sin 90^\circ\right]$$

Итак имеем

$\frac{1}{2}\sin 0^\circ=0.00000$	$\sin 54^\circ=0.80902$
$\sin 9^\circ=0.15643$	$\sin 63^\circ=0.89101$
$\sin 18^\circ=0.30902$	$\sin 72^\circ=0.95106$
$\sin 27^\circ=0.45399$	$\sin 81^\circ=0.98769$
$\sin 36^\circ=0.58779$	$\frac{1}{2}\sin 90^\circ=0.50000$
$\sin 45^\circ=0.70711$	
2.21434	4.13878

$$\begin{aligned}
&2.21434\\
&\underline{4.13878}\\
\sum&=6.35312\\
\lg\sum&=0.8029871\\
\lg h&=\bar{1}.1961198\\
\hline
\lg S&=\bar{1}.9991069\qquad S=0.997946
\end{aligned}$$

2) Правило Симпсона:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot dx=\frac{2}{3}\cdot 0.157\ldots\left[\frac{1}{2}\sin 0^\circ+\right.$$

$$\left.+2\sin 9^\circ+\sin 18^\circ+2\sin 27^\circ+\ldots+2\sin 81^\circ+\frac{1}{2}\sin 90^\circ\right]$$

Таким образом будет

$\frac{1}{2}\sin 0^\circ = 0.00000$	$\sin 9^\circ = 0.15643$
$\sin 18^\circ = 0.30902$	$\sin 27^\circ = 0.45399$
$\sin 36^\circ = 0.58779$	$\sin 45^\circ = 0.70711$
$\sin 54^\circ = 0.80902$	$\sin 63^\circ = 0.89101$
$\sin 72^\circ = 0.95106$	$\sin 81^\circ = 0.98769$
$\frac{1}{2}\sin 90^\circ = 0.50000$	
3.15689	3.19623
6.39246	

$$\Sigma = 9.54935$$

$$\frac{2}{3}\Sigma = 6.36623 \ldots \lg\frac{2}{3}\Sigma = 0.8038823$$

$$\lg h \quad = \bar{1}.1961198$$

$$\lg\frac{2}{3}\cdot h\cdot\Sigma = 0.0000021$$

$$S = \frac{2}{3}\,h\Sigma = 1.00000$$

Само собою понятно, что за последнюю цифру ручаться нельзя, ибо ординаты вычислены на пять знаков.

3) Правило Чебышева. Вычислим тот же интеграл, применив правило Чебышева и взяв, например, пять ординат.

Тогда будет

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{\pi}{2}\,[\sin X_1 + \sin X_2 + \sin X_3 + \sin X_4 + \sin X_5]$$

Аргументы $X_1, \ldots X_0$ определяются по формулам

$$X_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,x,$$

причем по таблице имеем

$$x_1 = -x_5 = 0.832498$$
$$x_2 = -x_4 = 0.374541$$
$$x_3 = 0.000000$$

Вместе с тем

$$a = 0;\ b = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

так что

$$\frac{a+b}{2} = 45^\circ; \quad \frac{b-a}{2} = 45^\circ$$

Таким образом будет

$$
\begin{array}{ll}
X_1 = 45^\circ + 45^\circ \cdot 0.832498 = 82^\circ 27'.74 & \sin X_1 = 0.99136 \\
X_2 = 45^\circ + 45^\circ \cdot 0.374541 = 61^\circ 51'.26 & \sin X_2 = 0.88176 \\
X_3 = 45^\circ + 45^\circ \cdot 0.00000 \ \ = 45^\circ 00 & \sin X_3 = 0.70711 \\
X_4 = 45^\circ - 45^\circ \cdot 0.374541 = 28^\circ 08'.74 & \sin X_4 = 0.47171 \\
X_5 = 45^\circ - 45^\circ \cdot 0.832498 = \ \ 7^\circ 32'.26 & \sin X_5 = 0.13117 \\
 & \Sigma = 3.18311
\end{array}
$$

$$\lg \Sigma = 0.5028517$$

$$\lg \frac{\pi}{10} = \bar{1}.4971499$$

$$\lg S = \lg \frac{\pi}{10} \Sigma = 0.0000016$$

$$S = 1.000004$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1.000004$$

4) Формула Гаусса. Применим к вычислению того же интеграла формулы Гаусса, взяв также пять ординат. У нас будет

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} [A_1 \sin X_1 + A_2 \sin X_2 + A_3 \sin X_3 +$$

$$+ A_4 \sin X_4 + A_5 \sin X_5]$$

причем величины абсцисс X_i даются формулой

$$X_i = a + (b - a) x_i$$

где величины x_i и A_i даны на странице 109 для $n = 5$.

В нашем случае

$$a = 0; \ b = \frac{\pi}{2}; \quad b - a = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

Итак будет

$$
\begin{array}{l}
X_1 = 00^\circ \cdot 0.04691008 = \ \ 4^\circ 13' 18''.87 \\
X_2 = 90^\circ \cdot 0.23076534 = 20^\circ 46' \ 7''.96 \\
X_3 = 90^\circ \cdot 0.5 \qquad\qquad\ = 45^\circ \ 0' \ 0'' \\
X_4 = 90^\circ \cdot 0.76923466 = 69^\circ 13' 52''.03 \\
X_5 = 90^\circ \cdot 0.95308992 = 85^\circ 46' 41''.13
\end{array}
$$

$$\lg 0.63661970 = \bar{1}.8038801$$

Таблица 5

X_i	$\lg \sin X_i$	$\lg A_i$	$\lg A_i \sin X_i$	$A_i \sin X_i$
4°13'13".87	$\bar{2}.8669931$	$\bar{1}.0735813$	$\bar{3}.9405774$	0.00372122
20°45' 7".97	$\bar{1}.5497377$	$\bar{1}.3789637$	$\bar{2}.9287064$	0.03486067
45° 0' 0"	$\bar{1}.8491850$	$\bar{1}.4539975$	$\bar{1}.3034325$	0.20113260
69°13'52".03	$\bar{1}.9708201$	$\bar{1}.3789587$	$\bar{1}.3497883$	0.22376325
85°46'41".13	$\bar{1}.9983199$	$\bar{1}.0735843$	$\bar{1}.0724042$	0.11814195
				0.6366190

$$\lg \frac{\pi}{2} = 0.1961199$$

$$\lg \frac{\pi}{2} \cdot \Sigma = 0.0000000$$

$$\frac{\pi}{2} \Sigma = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot dx = 1.0000000$$

При вычислении по формулам Чебышева и Гаусса интегралов, заключающих тригонометрические функции, выгодно пользоваться таблицами с новым десятичным делением углов. Такие таблицы изданы Depod de la Guerre, пятизначные и восьмизначные.

Выгода здесь та, что вычисление абсцисс совершается гораздо проще, нежели при градусном делении, и не требуется перевода в минуты и секунды десятичных частей градусов.

Для примера вычислим интеграл

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

причем $\lg k^2 = \bar{1}.78734$. Интеграл этот, представляет собою длину четверти эллипса, коего большая полуось равна 1.00000 и малая равна 0.62222.

Для вычисления возьмем формулу Гаусса при пяти ординатах и расположим вычисление следующим образом (табл. 6, стр. 114).

$$\lg \Sigma = \bar{1}.91494$$

$$\lg \frac{\pi}{2} = 0.19612$$

$$\lg S = 0.11106$$

$$S = 1.2913$$

Таблица 6

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Арг. φ в новом дел.	$\lg \frac{1}{\sin\varphi}$	$2\cdot$(II)	(III) $+ \lg \frac{1}{k^2}$ $\left(\lg \frac{1}{k} = 0.21266\right)$	$\lg(1-k^2\sin^2\varphi)$ по табл. разностей	$\frac{1}{2}\cdot(V)$	$\lg A$	(VI) + (VII)	$A\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$
4.6910	1.13301	2.26602	2.47868	$\bar{1}.99356$	$\bar{1}.99928$	$\bar{1}.07358$	$\bar{1}.07286$	0.11827
23.0765	0.45026	0.90052	1.11318	$\bar{1}.96517$	$\bar{1}.98259$	$\bar{1}.37897$	$\bar{1}.36155$	0.22990
50.000	0.150515	0.30103	0.51369	0.84109	$\bar{1}.92054$	$\bar{1}.45400$	1.37454	0.23689
76.9235	0.02918	0.05836	0.27102	$\bar{1}.66673$	$\bar{1}.83337$	$\bar{1}.37897$	$\bar{1}.21234$	0.16306
95.3090	0.00118	0.00236	0.21502	$\bar{1}.59161$	$\bar{1}.79580$	$\bar{1}.07358$	$\bar{2}.86938$	0.07402
								$\Sigma = 0.82214$

Для проверки найденного значения, можем воспользоваться таблицами длин четверти эллипса (см., например: Schlömilch. Fünfstellige Logarithmentafeln, p. 151), в которой с аргументом отношения $\frac{\text{малая полуось}}{\text{большая полуось}} = \frac{b}{a}$, находим

$$\frac{b}{a} = 0.62 \qquad S = 1.28991$$

$$\qquad\qquad\qquad 683$$

$$0.63 \qquad S = 1.29674$$

$$\qquad\qquad\qquad 688$$

$$0.64 \qquad S = 1.30362$$

Отсюда следует, что при

$$\frac{b}{a} = 0.62222\ldots \quad \text{будет, } S = 1.28991 + \frac{2}{9}\cdot 0.00683 = 1.29143.$$

Приведем еще несколько примеров вычисления интегралов по вышеприведенным приближенным формулам.

Возьмем интеграл

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \lg 2 = 0.69314718$$

приводимый в сочинении Bertrand „Traité de calcul différentiel et intégral“ (t. II).

Взяв равноотстоящие ординаты и полагая $n=10$ и обозначая $\frac{1}{1+x}$ через $\varphi(x)$, имеем

$$\varphi(0)=1.00000; \qquad \varphi\left(\frac{6}{10}\right)=0.62500$$
$$\varphi\left(\frac{1}{10}\right)=0.90909; \qquad \varphi\left(\frac{7}{10}\right)=0.58824$$
$$\varphi\left(\frac{2}{10}\right)=0.83333; \qquad \varphi\left(\frac{3}{10}\right)=0.55556$$
$$\varphi\left(\frac{3}{10}\right)=0.76923; \qquad \varphi\left(\frac{9}{10}\right)=0.52632$$
$$\varphi\left(\frac{4}{10}\right)=0.71429; \qquad \varphi(1)=0.50000$$
$$\varphi\left(\frac{5}{10}\right)=0.66667;$$

Применяя формулу трапеций, т. е. полагая

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx=\frac{1}{10}\left[\frac{1}{2}\varphi(0)+\varphi\left(\frac{1}{10}\right)+\ldots+\varphi\left(\frac{9}{10}\right)+\frac{1}{2}\varphi(1)\right]$$

получим

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx=0.69377$$

Взяв формулу Котеса при $n=10$, т. е. полагая

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx=A_0\varphi(0)+A_1\varphi\left(\frac{1}{10}\right)+\ldots+A_{10}\varphi(1)$$

причем согласно таблице (стр. 89)

$$A_0=A_{10}=\frac{16\,057}{593\,752}; \qquad A_1=A_9=\frac{106\,300}{593\,752}$$
$$A_2=A_8=-\frac{43\,525}{593\,752}; \qquad A_2=A_7=\frac{272\,400}{593\,752}$$
$$A_4=A_6=\frac{260\,550}{593\,752}; \qquad A_5=\frac{427\,363}{593\,752}$$

получим

$$S=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=0.69314733$$

Применим для вычисления того же интеграла формулу Чебышева, взяв семь ординат.

Сделаем сперва $x = \frac{1+z}{2}$, тогда пределы у нового интеграла будут -1 и $+1$ и мы получим

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{3+z}$$

обозначая $\frac{1}{3+z} = \psi(z)$, по формуле Чебышева будем иметь при семи ординатах

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(z)\,dz = \frac{2}{7}\left[\psi(z_1) + \psi(z_2) + \ldots + \psi(z_7)\right]$$

причем по таблице (стр. 99) имеем

$$z_1 = -z_7 = 0.883862$$
$$z_2 = -z_6 = 0.529657$$
$$z_3 = -z_5 = 0.323912$$
$$z_4 = 0.000000$$

тогда получаем

$$\psi(z_1) = 0.4725587$$
$$\psi(z_2) = 0.4048019$$
$$\psi(z_3) = 0.3735798$$
$$\psi(z_4) = 0.3333333$$
$$\psi(z_5) = 0.3008503$$
$$\psi(z_6) = 0.2833137$$
$$\psi(z_7) = 0.2574757$$
$$\Sigma = 2.4260134$$
$$\frac{2}{7} \cdot \Sigma = 0.6931467$$

Точная же величина, как мы видим, есть

$$S = 0.69314718$$

Для того же примера формула Гаусса при пяти ординатах дает (табл. 7):

Таблица 7

$1+x$	$\lg \frac{1}{1+x}$	$\lg A$	$\lg A \cdot \frac{1}{1+x}$	$A \cdot \frac{1}{1+x}$
1.04691008	$\bar{1}.98009062$	$\bar{1}.07358435$	$\bar{1}.05367497$	0.11315532
1.23076534	$\bar{1}.9098247$	$\bar{1}.3789687$	$\bar{1}.2887934$	0.19444350
1.5	$\bar{1}.8239087$	$\bar{1}.4539975$	$\bar{1}.2779062$	0.18952965
1.76923465	$\bar{1}.7522146$	$\bar{1}.3739687$	$\bar{1}.1311833$	0.13526433
1.95308992	$\bar{1}.7092778$	$\bar{1}.0735843$	$\bar{2}.7828621$	0.06055437
				$\Sigma = 0.69314718$

Итак,

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0.69314718$$

Как другой пример, Бертран берет интеграл

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{8} \lg 2 = 0.2721982613\ldots$$

и, вычисляя его по формуле Симпсона при 10 промежутках, получает

$$S = 0.2722012\ldots$$

По формуле Котеса при $n=5$ получается

$$S = 0.2722091$$

Формула Гаусса при $n=5$ дает

$$S = 0.27219801$$

Сам Гаусс в своем мемуаре „Methodus Nova integralium valores per approximationem inveniendi“ (Werke, Bd. 3) применяет выведенную им формулу к нахождению величины интеграла

$$S = \int_{100000}^{200000} \frac{dx}{\lg x} = 8406.24312$$

и приводит следующие результаты, где сделаны такие обозначения:

$$\Delta = 200000 - 100000 = 100000$$

$$R^{(i)} = R(x_i) = \frac{1}{\lg x_i}$$

A — коэффициенты формулы Гаусса

I. При $n=1$	$\Delta R\ A$	$=8390.394608$
II. При $n=2$	$\Delta R\ A$	$=4271.810097$
	$\Delta R'\ A'$	$=4134.144502$
		$S=8405.954599$
III. При $n=3$	$\Delta R\ A$	$=2390.572772$
	$\Delta R'\ A'$	$=3729.064270$
	$\Delta R''\ A''$	$=2286.599733$
		$S=8406.236775$
IV. При $n=4$	$\Delta R\ A$	$=1501.957053$
	$\Delta R'\ A'$	$=2763.769240$
	$\Delta R''\ A''$	$=2711.454637$
	$\Delta R'''\ A'''$	$=1429.062040$
		$S=8405.242970$
V. При $n=5$	$\Delta R\ A$	$=1024.879445$
	$\Delta R'\ A'$	$=2041.833335$
	$\Delta R''\ A''$	$=2336.601133$
	$\Delta R'''\ A'''$	$=1980.509616$
	$\Delta R''''\ A''''$	$=972.419588$
		$S=8405.243117$
VI. При $n=6$	$\Delta R\ A$	$=741.912854$
	$\Delta R'\ A'$	$=1545.757256$
	$\Delta R''\ A''$	$=1976.737668$
	$\Delta R'''\ A'''$	$=1950.465223$
	$\Delta R''''\ A''''$	$=1488.588550$
	$\Delta R^{V}\ A^{V}$	$=702.780570$
		$S=8406.243121$
VII. При $n=7$	$\Delta R\ A$	$=561.1213804$
	$\Delta R'\ A'$	$=1202.0551998$
	$\Delta R''\ A''$	$=1621\ 6290819$
	$\Delta R'''\ A'''$	$=1753.4212406$
	$\Delta R''''\ A''''$	$=1584.9790252$
	$\Delta R^{V}\ A^{V}$	$=1152.0681116$
	$\Delta R^{VI}\ A^{VI}$	$=530.9690816$
		$S=8405.2431211$

§ 33. Предыдущие примеры показывают, какая высокая степень точности может быть получаема по вышеприведенным формулам, в особенности по формуле Гаусса, но не надо думать, что это всегда имеет место;

легко составить такие примеры, где применение данной приближенной формулы даст какую угодно ошибку.

Возьмем, например, функцию

$$F(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)^2 =$$
$$= 3969x^{10} - 8820x^8 + 6790x^6 - 2100x^4 + 225x^2$$

Тогда

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx = [360.81818 - 980 + 970 - 420 + 75] \cdot 2 = 11.63636$$

Если мы для вычисления этого интеграла применим формулу Гаусса, взяв $n = 5$, то получим

$$S = 0$$

ибо функция

$$f(x) = 63x^5 - 70x^3 + 15x$$

обращается в нуль при значениях x, соответствующих пяти Гауссовым абсциссам, т. е. при следующих:

$$x = \pm (1 - 2 \cdot 0.046910\ldots) = \pm 0.90617985$$
$$x = \pm (1 - 2 \cdot 0.230765\ldots) = \pm 0.53846931$$
$$x = \quad (1 - 2 \cdot 0.5) \quad = \quad 0.000000$$

Чтобы нагляднее представить ход функций $f(x)$ и $F(x) = [f(x)]^2$, приводим в табл. 8 еще следующие их значения:

Таблица 8

x	$f(x)$	$F(x) = [f(x)]^2$
0.0	0.00000	0.0000
0.1	1.43063	2.0466
0.2	2.46016	6.0523
0.3	2.76309	7.6345
0.4	2.16512	4.6877
0.5	0.71875	0.5166
0.6	—1.22112	1.4912
0.7	—2.92159	8.5357
0.8	—3.19616	10.2155
0.9	—0.32913	0.1083
1.0	8.00000	64.0000

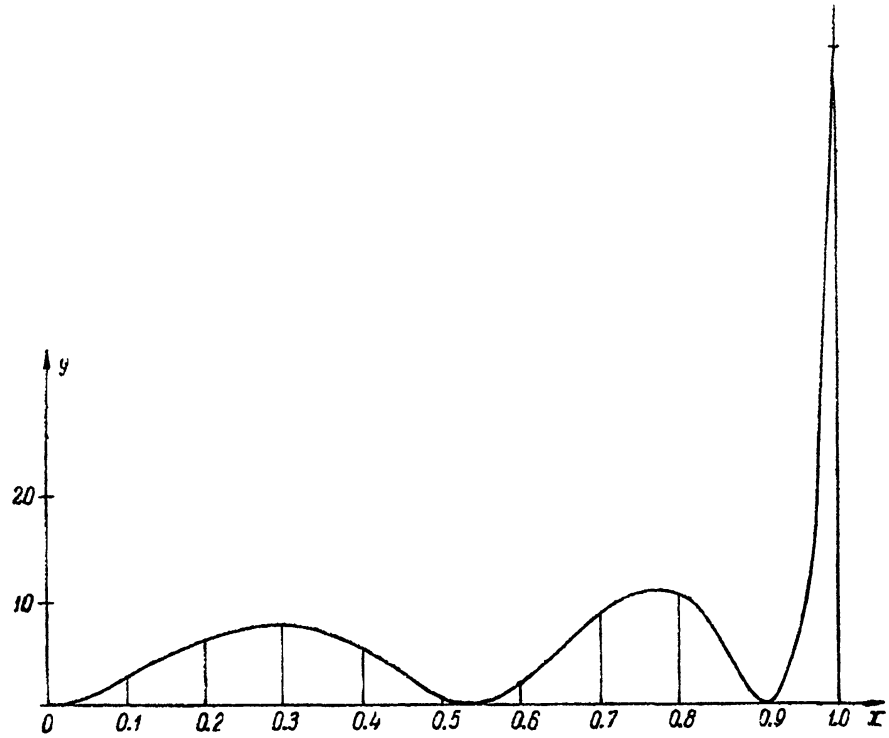
и составляем чертеж (фиг. 14):

$$y = F(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)^2$$

По вышеприведенным данным, применяя правило трапеций, получим:

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx = 14.656$$

и по правилу Симпсона



Фиг. 14.

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx = 12.448$$

как видно, приближение также весьма грубое.

Понятно, что если взять формулу Котеса при $n = 10$, то так как функция $F(x)$ есть целая и десятой степени, то мы должны получить верный результат, и, действительно, получаем (табл. 9, стр. 121).

$$\begin{aligned} \lg \Sigma &= 1.54215 \\ \operatorname{colg} 5.98752 &= \bar{1}.22275 \\ \lg 2 &= 0.30103 \\ \hline \lg S &= 1.06593 \\ S &= 11.639 \end{aligned}$$

тогда как истинное значение 11.6363.

Таблица 9

I	II	III	IV	V
$F(x_i)+F(x_{10-i})$	lg (I)	lg A_i·5.98752	(II)+(III)	Числа соотв. (IV)
64.000	1.80618	$\bar{1}$.20593	0.01211	10.2828
2.1549	0.33343	0.02653	0.35996	2.2907
16.2678	1.21133	$\bar{1}$.63597(n)	0.89730(n)	− 7.8920
16.1702	0.20372	0.43521	1.64393	46.0180
6.1739	0.79031	0.41589(n)	1.20680(n)	−16.0990
0.5166	$\bar{1}$.71316	0.63080	0.34396	2.2078
				58.8393
				−23.9930
				$\Sigma = 34.8463$

Разница — вполне понятная при вычислении на пять знаков.

Таким образом, предыдущие примеры показывают, что при вычислении интегралов по приближенным формулам, при том же числе ординат и при той же формуле, можно получать весьма различную степень точности.

Сам собою возникает вопрос, как судить о пределах погрешности, которую мы сделаем, применяя к вычислению заданного интеграла которую-нибудь из приближенных формул.

Теоретически этот вопрос можно считать решенным, так как составлены выражения остаточных членов для этих формул. Эти выражения и вывод их можно найти в сочинении акад. А. А. Маркова „Исчисление конечных разностей“. Мы приведем главнейшие из них без доказательств.

Пусть предложенный интеграл есть

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

тогда при вычислении по *правилу трапеций* по $n+1$ ординатам, т. е. при разделении основания площади $b-a$ на n частей, погрешность ε выражается так:

$$\varepsilon = -\frac{1}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2}\cdot f''(\xi)$$

причем ξ есть некоторая промежуточная между a и b величина.

Для *формулы Симпсона* та же погрешность выражается так:

$$\varepsilon = -\frac{1}{90}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^5\cdot\frac{f^{IV}(\xi)}{n^4}$$

причем число делений есть $2n$.

Для *формулы Гаусса* при n ординатах остаточный член выражается так:

$$\varepsilon = \frac{(b-a)^{2n-1}}{2n+1}\cdot\left\{\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}\right\}^2\cdot\frac{f^{(2n)}(\xi)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n}$$

Присутствие в этих выражениях производных $f''(\xi)$, $f^{IV}(\xi)$, $f^{(2n)}(\xi)$ делает пользование ими на практике часто довольно затруднительным, а когда функция $f(x)$ задана не аналитически, а чертежом, — то и совершенно невозможным; поэтому на практике приходится часто прибегать не к этим точным выражениям остаточных членов, а к другого рода приемам.

Когда функция $f(x)$ задана аналитически, а надо вычислить интеграл

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

то полезно прежде всего ознакомиться с ходом этой функции в пределах интегрирования и хотя с грубым приближением построить эту функцию графически, чтобы наглядно видеть: 1) меняет ли в промежутке между a и b предложенная функция свой знак, и если меняет, то при каких значениях x обращается в нуль, 2) имеет ли maxima и minima и при каких значениях x.

Построив ход функции, следует выбрать ту приближенную формулу, по которой предполагают произвести вычисление интеграла, и нанести на чертеж соответствующие ординаты и определяемые ими точки кривой, затем надо вообразить, что заданы только эти точки и провести через них „согласную", т. е. такую кривую, кривизна которой изменяется непрерывно. Если избранные точки приходятся так, что они характеризуют собою ход функции $f(x)$, и проведенная через них согласная кривая по необходимости будет близка к действительной, то от применения избранной формулы и взятых ординат можно ожидать удовлетворительного результата. Если же избранные ординаты придутся на такие места кривой, что этими точками кривая не характеризуется, т. е. обойдены, например, места максимумов или минимумов, или случайно точки пришлись или только вблизи нулей, или только вблизи максимумов и т. п., то не стоит и времени тратить на точное вычисление интеграла по избранной формуле — результат не может быть удовлетворительным. Тогда надо взять или другую формулу, или другое, обыкновенно большее, число ординат. Когда вычисление производится по равноотстоящим ординатам, то в тех местах, где кривизна кривой $y=f(x)$ значительная, надо вводить дополнительные ординаты, подразделяя соответствующие промежутки на несколько равных частей. Затем полезно применить разные правила к взятым равноотстоящим ординатам, т. е. трапеций, Симпсона, Котеса. Если вычисление по всем этим правилам дает близкие между собою результаты, то по ним можно составить и некоторое суждение о степени их точности, если же эти результаты значительно разнятся между собою, то число ординат недостаточно, и результат доверия не заслуживает.

Для проверки полезно затем перевычислить тот же интеграл и по правилам Чебышева или Гаусса, беря для Чебышевского правила приблизительно половинное число ординат, нежели для правила трапеций, и для Гауссовского — половинное число сравнительно с Котесовским правилом, обыкновенно результаты должны получаться близкие между собою.

В некоторых вопросах, например в теории корабля, приходится иметь дело лишь с кривыми, вид которых приблизительно один и тот же, тогда можно предыдущие вычисления проделать раз навсегда и определить, какую степень точности дает каждое правило при данном числе ординат, чтобы затем уже действовать с уверенностью.

Из предыдущих замечаний видно, что мнение, высказываемое Laurent[1] о приближенных формулах для вычисления интегралов, — „Эти формулы доставляют численное значение искомого интеграла с приближением, которое в общем зависит от терпения вычислителя", — на практике оправдывается, несмотря на то, что для этих формул выражения остаточных членов и известны.

§ **31.** Во многих технических вопросах встречается надобность вычислять значение определенного интеграла

$$F(X)=\int_a^X f(x)\,dx$$

с переменным верхним пределом X, причем функция $f(x)$ задается графически.

Значение интеграла $F(X)$ надо представить или в виде таблицы, аргументом в которой будет X, или также графически.

Это вычисление производят следующим образом.

Пусть BC (фиг. 15) есть заданная кривая

$$y=f(x)$$

Отложив начальную абсциссу $OA=a$, строим ординату $AB=y$, затем откладываем по оси X от точки A длины

$$Aa_1=a_1a_2=a_2a_3=\ldots=a_9a_{10}=\ldots=h$$

---

[1] H. Laurent. Traité d'analyse, t. III, p. 498.

выбрав h так, чтобы каждая из площадей между двумя смежными ординатами могла быть принята за трапецию, при той точности, с которою чертеж составлен.

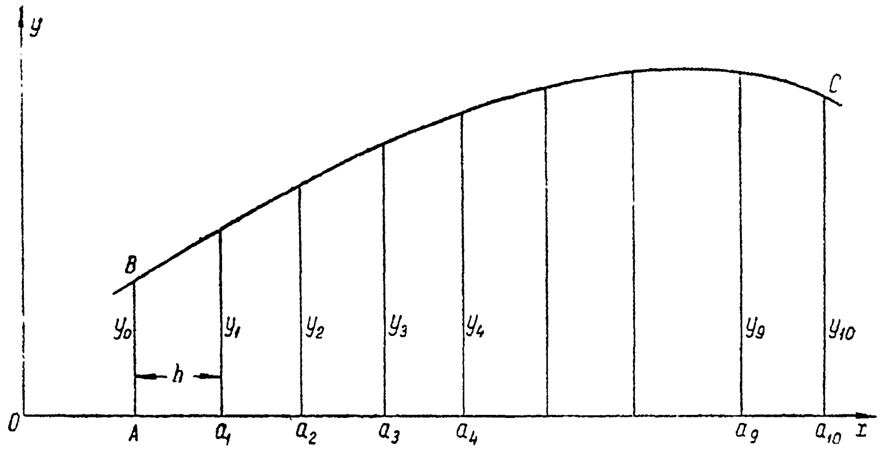
По формуле трапеций, положив $X = Oa_k = a + kh = X_k$, имеем

$$F(X_k) = \int_a^{a+kh} y\,dx = h\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{k-1} + \frac{1}{2}y_k\right]$$

точно так же при $X = X_{k+1} = a + (k+1)h$ будет

$$F(X_{k+1}) = \int_a^{a+(k+1)h} y\,dx = h\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_k + \frac{1}{2}y_{k+1}\right] =$$

$$= F(X_k) + \frac{1}{2}h(y_k + y_{k+1})$$



Фиг. 15.

Итак,

$$F(X_{k+1}) = F(X_k) + \frac{1}{2}h(y_k + y_{k+1})$$

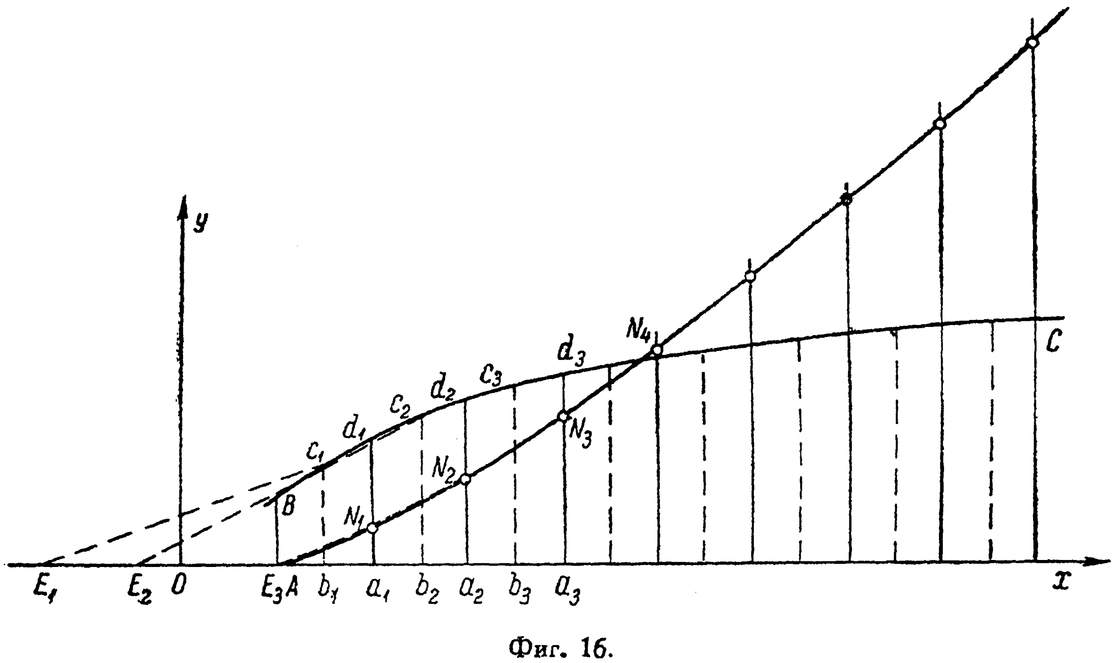
Эта формула показывает, как от одного значения функции $F(X)$ переходит к следующему $F(X+h)$. Вычисление это располагается в схеме (табл. 10).

Предыдущее вычисление может быть выполнено и графически следующим образом: пусть BC (фиг. 16) есть заданная кривая; построив ординаты, соответствующие абсциссам: a, $a+h$, $a+2h, \ldots$, подразделяем промежутки между ними пополам и строим вторую серию ординат, которые, в отличие от первых, проводим пунктиром. Отложив затем от точки b_1 — основания первой пунктирной ординаты, длину $b_1E_1 = l$, которая принята за масштаб для площадей, соединяем точку E_1 с точкою c_1 — концом первой пунктирной ординаты, и через точку A проводим прямую AN_1,

Таблица 10

Вычисление $F(X) = \int\limits_a^X y dx$

I	II	III	IV	V	VI
k	X	y_k	Суммы чисел (II) попарно $s_k = y_k + y_{k-1}$	Суммы чисел (IV) начиная сверху $\sum\limits_{n=1}^{n=k} s_n$	$(V) \cdot \frac{1}{2} h$ $F(x) = \frac{1}{2} h \sum\limits_{n=1}^{n=k} s_n$
0	a	y_0		0	0
1	$a+h$	y_1	$s_1 = y_0 + y_1$	s_1	$\frac{1}{2} h \cdot s_1$
2	$a+2h$	y_2	$s_2 = y_1 + y_2$	$s_1 + s_2$	$\frac{1}{2} h (s_1 + s_2)$
3	$a+3h$	y_3	$s_3 = y_2 + y_3$	$s_1 + s_2 + s_3$	. . . . . .
4	$a+4h$	y_4	$s_4 = y_3 + y_4$	$s_1 + s_2 + s_3 + s_4$	
5	$a+5h$	y_5	$s_5 = y_4 + y_5$	. . . .	
6	$a+6h$	y_5	$s_6 = y_5 + y_6$		
			. . . . . .		



Фиг. 16.

параллельную $E_1 c_1$, точка N_1 будет принадлежать искомой кривой $F(X)$, т. е. длина $a_1 N_1$ изобразит в принятом масштабе площадь первой трапеции $ABd_1 a_1$.

Действительно, площадь

$$ABd_1 a_1 = b_1 c_1 \cdot A_1 a,$$

а так как за масштаб принята длина $b_1 E_1 = l$, что (т. е. площадь квадрата, сторона коего равна $b_1 E_1$) должно изображаться длиною l, то в этом масштабе площадь $ABd_1 a_1$ должна изображаться длиною

$$a_1 N_1 = \frac{b_1 c_1 \cdot A_1 a_1}{l}$$

Из подобия же треугольников $b_1 E_1 c_1$ и $Aa_1 N_1$ следует

$$a_1 N_1 : b_1 c_1 = A_1 a_1 : b_1 E_1$$

откуда

$$a_1 N_1 = \frac{b_1 c_1 \cdot A_1 a_1}{b_1 E_1}$$

т. е. имеет как раз требуемую величину. Отложив от точки b_2 длину $b_2 E_2 = l$, соединив точку E_2 с точкою c_2 — концом второй пунктирной ординаты, и проведя через a_1 прямую параллельно $E_2 c_2$ до пересечения с $a_2 d_2$, получим длину, изображающую в принятом масштабе площадь второй трапеции $a_1 d_1 d_2 a_2$; чтобы получить сумму площадей обеих трапеций, надо к этой длине придать $a_1 N_1$, а для этого стоит только провести прямую $N_1 N_2$ параллельно $c_2 E_2$ не через точку a_1, а через точку N_1, тогда и получится сразу точка N_2 такая, что ордината $a_2 N_2$ и представит в принятом масштабе площадь $ABd_2 a_2$.

Продолжая это построение совершенно так же, получаем точки $N_2 N_4, \ldots$, проведя через которые кривую и получим графическое изображение функции

$$F(X) = \int_a^X y dx$$

в принятом масштабе.

При построении точек $N_1, N_2, \ldots$, очевидно, нет надобности проводить таких прямых, как $E_1 c_1$, $E_2 c_2$, $A_1 N_1$, $N_1 N_2$ и т. д., а достаточно только, приложив по этим линиям чертежный треугольник, делать надлежащие засечки на сплошных ординатах.

За длину l удобно брать целое кратное длины h — промежутка между ординатами той же серии, тогда точки E будут совпадать с точками b. Так, например, на чертеже взято $l = 3h$, и тогда E_4 совпадает с b_1, E_5 с b_2 и т. д.

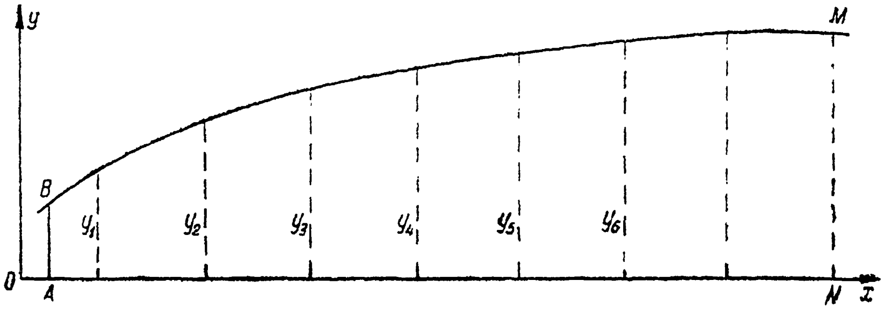
Существует также весьма удобный графический прием для непосредственного получения функции

$$F(x) = \int_a^x dx \int_a^x f(x)\, dx$$

т. е. результата дважды повторенного интегрирования заданной функции $f(x)$.

Пусть кривая (фиг. 17) представляет заданную функцию $f(x)$.

Сделав то же построение ординат, которое описано выше, принимаем какую-нибудь длину OK за 1 для построения кривой $F(x)$ и поступаем так (фиг. 18): проводим прямую OK и к ней в точке K перпендикуляр, по которому откладываем длины: $Ka_1 = y_1$; $a_1 a_2 = y_2$; $a_2 a_3 = y_3$, и проводим затем лучи: Oa_1, Oa_2, Oa_3 и т. д. Считая, что точке O соответствует обсцисса $x=a$, откладываем $Ob_1 = h$, $Ob_2 = 2h\ldots$, и проводим ординаты, им соответствующие.



Фиг. 17.

Затем отмечаем точку пересечения n_1 луча Oa_1 с первой ординатой, проводим через точку n_1 — прямую $n_1 n_2$, параллельную второму лучу Oa_2, до пересечения со второю ординатою и т. д.; кривая $On_1 n_2 \ldots$ и будет искомою, представляющею функцию $F(x)$, причем кривая эта вычерчена в масштабе $\frac{1}{h}$.

§ **35.** При вычислении интегралов по приближенным формулам некоторую особенность представляют те случаи, когда или пределы интеграла бесконечные, или когда подъинтегральная функция обращается в бесконечность для какого-либо частного значения независимой переменной между пределами интегрирования.

Пусть, например, надо вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} \cdot dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

при $a = \frac{1}{2}$, т. е. интеграл

$$S = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi$$

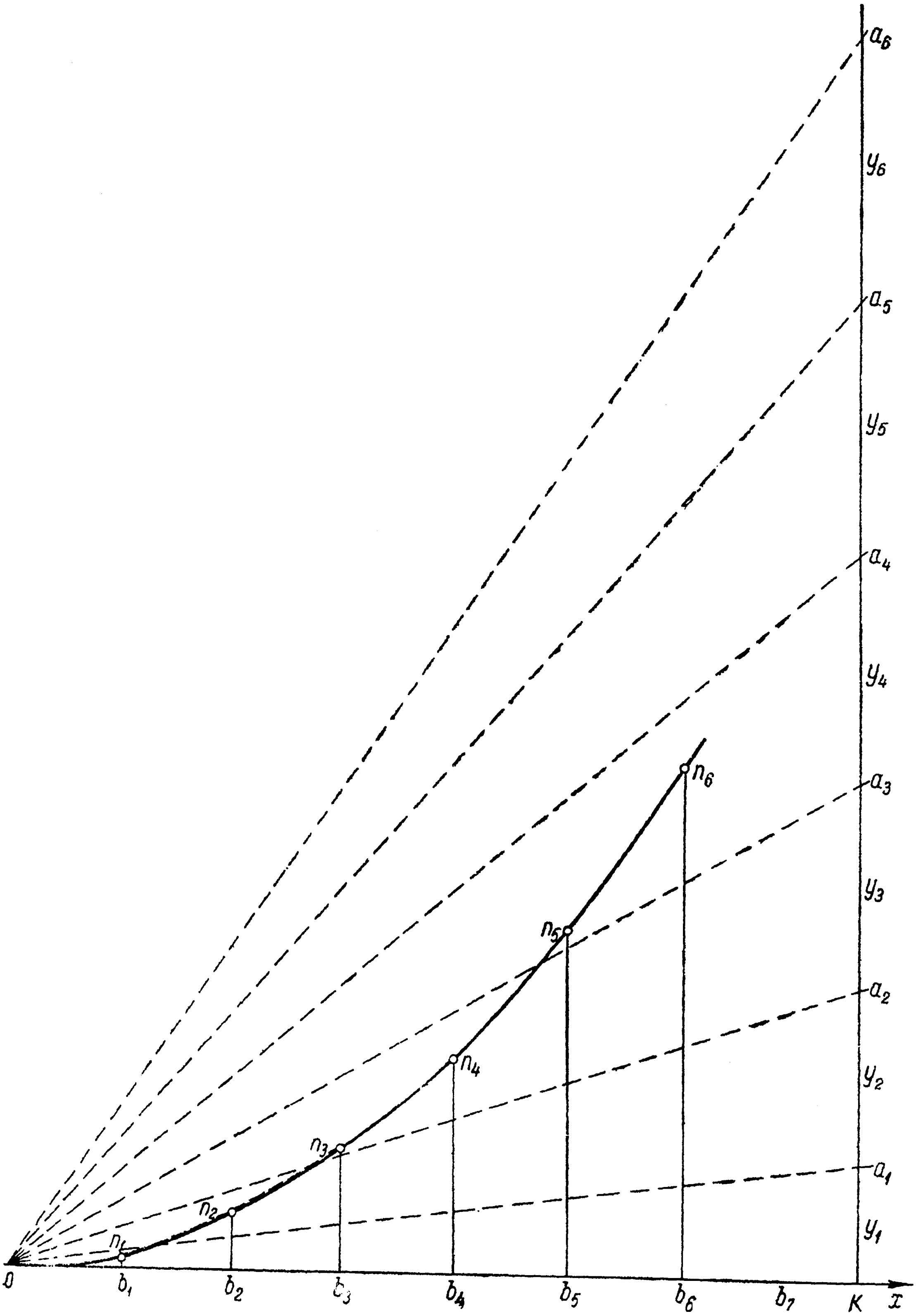
В этом интеграле как раз заключаются обе указанные особенности.

Чтобы избавиться от бесконечного верхнего предела, подразделяем интеграл на два, а именно:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} + \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

и во втором из этих двух интегралов делаем $x = \frac{1}{z}$, так что, будет

$$dx = -\frac{dz}{z^2}$$



Фиг. 18.

и пределы:

$$\text{когда } x=\infty, \quad \text{то } z=0$$

и

$$\text{когда } x=1, \quad \text{то } z=1$$

таким образом будет

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = -\int_1^0 \frac{dz}{(z+1)\sqrt{z}} + \int_0^1 \frac{dz}{(1+z)\sqrt{z}}$$

итак имеем

$$S=\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

При $x=0$ подъинтегральная функция, очевидно, обращается в бесконечность; чтобы избавиться от этого обстоятельства, стоит только выполнять интегрирование по частям, и у нас будет

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \left(2\sqrt{x}\,\frac{1}{1+x}\right)_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx = 1+2\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx$$

Таким образом будет

$$S=2+4\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx$$

причем последний интеграл никаких уже особенностей не представляет и, применяя к вычислению формулу Гаусса, получим табл. 11 (стр. 130).

$$S=2+4S_1=2+1.14427=3.14427$$

точное же значение интеграла есть

$$S=3.14159\ldots$$

Случай, когда подъинтегральная функция обращается в бесконечность при одном из пределов, встречается в приложениях при следующем вопросе.

Часто приходится исследовать прямолинейное движение материальной точки, или центра тяжести тела, на которую действует сила, зависящая от расстояния точки до начала, т. е. надо интегрировать уравнение такого вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f(x) \tag{*}$$

Таблица II

I	II	III	IV	V	VI
$\frac{1}{2}\lg x$	$2\lg(1+x)$	(II)—(II)= $=\lg\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}$	$\lg A$	$\lg A\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}$	$A\frac{\sqrt{x}}{(2+x)^2}$
$\bar{1}.33563$	0.03982	$\bar{1}.29581$	$\bar{1}.07358$	$\bar{2}.36939$	0.023410
$\bar{1}.68159$	0.18035	$\bar{1}.50124$	$\bar{1}.37897$	$\bar{2}.88021$	0.075893
$\bar{1}.84949$	0.35218	$\bar{1}.49731$	$\bar{1}.45400$	$\bar{2}.95131$	0.089392
$\bar{1}.94303$	0.49557	$\bar{1}.44746$	$\bar{1}.37897$	$\bar{2}.82643$	0.067055
$\bar{1}.98957$	0.58144	$\bar{1}.40313$	$\bar{1}.07358$	$\bar{2}.48171$	0.030317
					$S_1=0.286067$

при условиях: при $t=0$ должно быть $x=a$ и $\frac{dx}{dt}=0$. При этом функция $f(x)$ бывает часто задаваема не аналитически, а чертежом.

Из ур-ния (*) следует

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}dt=2f(x)\,dx$$

Откуда

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=2\int f(x)\,dx+C$$

так как при $x=a$ должно быть $\frac{dx}{dt}$ равно 0, то будет

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=2\int_0^x f(x)\,dx=F(x)-F(a)$$

причем очевидно, что $F'(x)=2f(x)$.

Далее имеем

$$\frac{dx}{\sqrt{F(x)-F(a)}}=dt$$

и, интегрируя, получаем

$$t=\int_a^x\frac{dx}{\sqrt{F(x)-F(a)}} \qquad (**)$$

Так как по предположению функция $f(x)$ задана чертежом, то понятно, что как функция $F(x)$, так и интеграл (**) могут быть вычисляемы лишь по приближенным способам.

Но в последнем интеграле при $x=a$ подъинтегральная функция обращается в бесконечность, и, значит, непосредственное его вычисление по приближенным формулам невозможно.

Здесь следует применить такое преобразование: умножим числителя и знаменателя подъинтегральной дроби на

$$2F'(x)=4f(x)$$

тогда получим

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{F(x)-F(a)}}=2\int_a^x \frac{F'(x)\,dx}{2F'(x)\sqrt{F(x)-F(a)}}=\int_a^x \frac{1}{f(x)}\,d\sqrt{F(x)-F(a)}$$

последний интеграл преобразуем, интегрируя по частям, и мы получим

$$\int_a^x \frac{1}{f(x)}\,d\sqrt{F(x)-F(a)}=$$

$$=\left[\frac{1}{f(x)}\sqrt{F(x)-F(a)}\right]_a^x+\int_a^x \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}\sqrt{F(x)-F(a)}\,dx=$$

$$=\frac{1}{f(x)}\sqrt{F(x)-F(a)}+\int_a^x \sqrt{F(x)-F(a)}\,\frac{f'(x)\,dx}{[f(x)]^2}$$

Последний из этих интегралов уже не заключает никаких особенностей, но непосредственное его вычисление представляется неудобным ввиду того, что подъинтегральная функция содержит множитель $f'(x)$, по предложению же функция $f(x)$ задана графически, а для функции так заданной нахождение производной требовало бы нахождения угловых коэффициентов касательной к кривой $y=f(x)$, проведение же касательной и нахождение ее уклона для графической кривой представляет затруднения и не дает уверенности в точности.

Чтобы избавиться от необходимости проводить касательные, следует поступать так.

Пусть чертеж (фиг. 19) представляет кривую: $y=f(x)$. Само собою разумеется, что с этого чертежа, задавая y, можно снимать соответствующие им значения x, а это равносильно тому, что y принимается за переменную независимую, а x — за функцию от y.

Понятно также, что когда дана кривая $y=f(x)$, то не трудно построить и другую кривую

$$z=\frac{1}{f(x)}$$

Введем теперь в наш интеграл вместо переменной x переменную z уравнением

$$z=\frac{1}{f(x)}$$

тогда будет

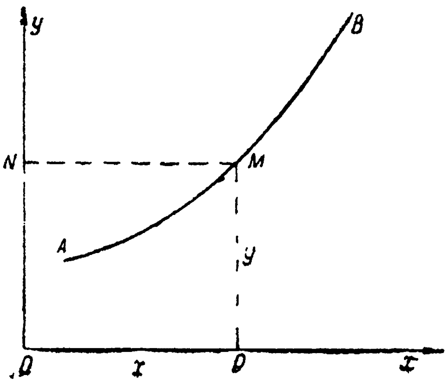
$$dz=-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}\cdot dx$$

При $x=a$ пусть будет $z=\frac{1}{f(a)}=b$.

Так как для всякого данного значения z сейчас же имеем и соответствующее значение x, то функцию $F(x)$ можно рассматривать как некоторую заданную функцию $F_1(z)$, и мы получим

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{F(x)-F(a)}}=\frac{1}{f(x)}\sqrt{F(x)-F(a)}-\int_b^z \sqrt{F_1(z)-F_1(a)}\,dz$$

Вычисление этого последнего интеграла уже никаких затруднений не представит.



Фиг. 19.

§ 36. Показанные выше приближенные формулы прилагаются и к вычислению кратных интегралов, из которых особенно часто встречаются в приложениях те, которые выражают объем, ограниченный данной поверхностью, и статические моменты этого объема, нужные для определения положения центра тяжести его.

Пусть например, дан объем V, ограниченный поверхностью, уравнение которой есть

$$z=f(x,y)$$

и четырьмя плоскостями, коих уравнения соответственно суть

$$x=a;\qquad x=b$$
$$y=c;\qquad y=d$$

тогда объем этот выразится интегралом

$$V=\int_a^b dx\int_c^d z\,dy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$$

Положим, что для вычисления этого объема мы будем пользоваться первым его выражением, т. е. что первое интегрирование делаем по переменной y.

Геометрическое значение интеграла

$$\int_c^d f(x, y)\, dy = \omega = F(x)$$

есть величина площади сечения данного объема плоскостью x, параллельной плоскости координат zoy. Очевидно, что ω будет некоторой функцией от x.

Таким образом, наш объем выразится формулой

$$V = \int_a^b \omega\, dx = \int_a^b F(x)\, dx$$

т. е. простым интегралом, для вычисления коего мы можем применить любое из правил, и, значит, получим вообще приближенное выражение вида

$$V = \int_a^b F(x)\, dx = (b-a)\left[A_1 F(x_1) + A_2 F(x_2) + \ldots + A_n F(x_n)\right]$$

причем абсциссы $x_1, x_2, \ldots x_n$ суть частные значения величины x, заключенные между a и b. Эти значения могут быть или равноотстоящие, или нет, смотря по тому, каким правилом пользуются.

Для вычисления величин $F(x_i)$ имеем формулу

$$F(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)\, dy$$

так как здесь величина x_i есть постоянная, то и этот интеграл найдется по любой из приближенных формул, и мы будем иметь формулу вида

$$F(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)\, dy =$$

$$= (d-c)\left[C_1 f(x_i, y_1) + C_2 f(x_i, y_2) + \ldots + C_k f(x_i, y_k)\right]$$

Очевидно, что это вычисление становится особенно простым, если в обоих случаях применить формулу Чебышева, в силу которой будет

$$V = \frac{b-a}{n}\left[F(x_1) + F(x_2) + \ldots + F(x_n)\right]$$

и

$$F(x_i) = \frac{d-c}{k}\left[f(x_i, y_1) + f(x_i, y_2) + \ldots + f(x_i, y_k)\right]$$

и, следовательно, подставляя, получим

$$V = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{k} [f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2) + \ldots + f(x_1, y_k) +$$
$$+ f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2) + \ldots + f(x_2, y_k) +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ f(x_n, y_1) + f(x_n, y_2) + \ldots + f(x_n, y_k)]$$

Так как $f(x_i, y_j)$ есть не что иное, как величина ординаты z, соответствующей значениям x_i и y_j двух других координат, то наша поверхность

$$z = f(x, y)$$

может быть задана и чертежом, например, ее сечениями плоскостями x = постоянной и y = постоянной.

ГЛАВА IV

МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

§ 37. Для вычисления определенных интегралов имеется множество разного рода механических приборов. В этой главе мы дадим общую теорию их, пользуясь которой уже нетрудно для прибора любого устройства составить соответствующие ему формулы и разобрать смысл его показаний.

Эта теория принадлежит французскому корабельному инженеру Андраду (Andrades) и помещена в „Mémorial du Génie Maritime" за 1874 г. Так как это издание считается секретным, то, несмотря на свою простоту и общность, теория Андрада не нашла себе места в обычных руководствах.

Теория Андрада основана на рассмотрении площади, описываемой прямой линией определенной длины при движении ее по плоскости.

Если прямая линия AB скользит по плоскости, каждый элемент этой линии оставляет след на плоскости; мы будем рассматривать площадь этого следа как положительную, когда, смотря по направлению от A к B, площадь, описываемая элементом, будет оставаться налево от AB, и как отрицательную, когда площадь будет направо. Полная площадь, описываемая линией AB, будет алгебраическая сумма всех элементарных следов, взятых с принадлежащими им знаками. Таким образом, если оставить неподвижной середину линии AB и повернуть ее на некоторый угол, то полная площадь, описываемая линией AB, будет равна нулю, так как сумма отрицательных следов равна сумме положительных.

Сделав вышеуказанные положения, будем иметь следующую теорему.

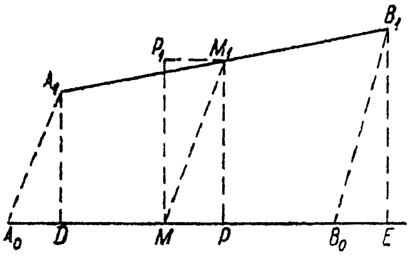
Теорема. *Бесконечно малая площадь, описываемая прямой линией AB при бесконечно малом перемещении от первоначального положения A_0B_0 до второго положения A_1B_1, равна площади прямоугольника, одна сторона которого AB, а другая — проекция пути, пройденного среднею точкою M, на перпендикуляр к направлению линии AB.*

Положим, что A_0B_0 и A_1B_1 (фиг. 20) представляют два последовательных положения линии AB; описанная ею площадь есть $A_0B_0A_1B_1$. Проводя перпендикуляры A_1D и B_1E, мы получаем трапецию A_1DB_1E, площадь которой отличается от $A_0 B_0 A_1 B_1$ алгебраической суммой площадей $A_0 A_1 D$ и $B_0 B_1 E$. Эти две площади в общем случае будут каждая второго порядка малости, когда площадь $A_0 B_0 A_1 B_1$ будет первого порядка; предельное отношение $A_0 B_0 A_1 B_1$ к $A_1 D B_1 E$ равно единице, и эти две площади эквивалентны.

Очевидно,

$$\text{площ. } A_1 D B_1 E = DE \cdot M_1 P = AB \cdot MP_1 = \Delta Q$$

с точностью до бесконечно малых второго порядка, ибо длина DE отличается от AB на бесконечно малые величины, и MP_1 есть также величина бесконечно малая.



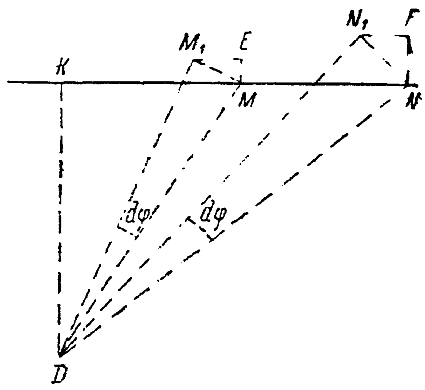
Фиг. 20.

Всякая конечная площадь Q, описываемая линией AB, есть предел суммы таких элементарных площадок, как $A_0 B_0 A_1 B_1$; согласно основной теореме теории пределов, при розыскании предела суммы, каждый элемент суммы может быть заменен ему эквивалентным без изменения предела суммы.

Таким образом будет

$$Q = \lim \sum A_0 B_0 A_1 B_1 = \lim \sum A_1 D B_1 E = \lim \sum AB \cdot MP_1 =$$
$$= AB \lim \sum MP_1$$

Последний предел $\lim \sum MP_1$ представляет длину дуги, на которую повернулся бы острый край колесика, ось которого есть прямая AB и плоскость которого проходит через точку M.



Фиг. 21.

Таким образом, мы имеем следующее следствие: *площадь, описываемая прямой линией AB данной длины l, измеряется произведением этой длины l на длину дуги, на которую повернется вышеуказанное колесико, расположенное в средней точке M линии AB.*

Рассмотрим теперь, какая разница получится в длине дуг, на которые повернутся колесики, расположенные одно в M и другое в N, причем расстояние MN равно длине a.

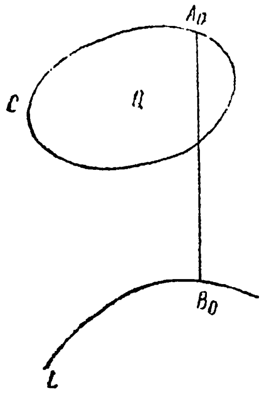
Всякое бесконечно малое перемещение линии AB может быть заменено вращением на угол $d\varphi$ около соответствующего мгновенного центра D. Элементарные дуги, описываемые колесиками M и N, будут соответственно ME и NF (фиг. 21), но

$$ME = MM_1 \cdot \cos(M_1 ME) = DM\, d\varphi \cdot \cos M_1 ME = KM \cdot d\varphi$$
$$NF = NN_1 \cdot \cos(N_1 NF) = DN\, d\varphi \cdot \cos N_1 NF = KN \cdot d\varphi$$

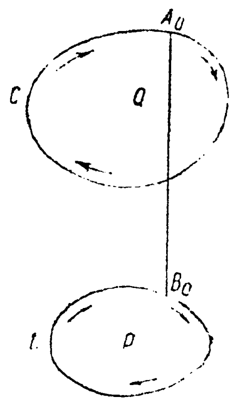
откуда

$$NF - ME = [KN - KM] \cdot d\varphi = MN \cdot d\varphi = a \cdot d\varphi$$

Этот результат показывает, что при конечном перемещении линии AB разность полных дуг поворота колесиков в M и в N равна $a\varphi$, где φ есть угол, образуемый двумя крайними положениями прямой AB. Если конечное положение этой прямой совпадает с начальным, и если в продолжение перемещения линия AB не описала полного оборота, то угол φ равен нулю, и тогда местоположение мерительного колесика совершенно безразлично, так как дуга поворота остается одна и та же, где бы колесико ни помещалось. Если прямая AB сделала полный оборот, то угол $\varphi = 2\pi$; и если мерительное колесико помещено в N, в расстоянии a от середины, то к длине дуги поворота s должна быть прибавлена длина $2\pi a$, или, иначе, величина $2\pi al$ должна быть прибавлена к площади sl, вычисленной по показанию колесика.



Фиг. 22.



Фиг. 23.

Положим, что точка A линии AB описала замкнутую кривую C, причем точка B двигалась по данной кривой L, и положим, что колесико находится в точке N. Тогда, если линия AB, выйдя из первоначального положения A_0B_0 (фиг. 22), придет снова в это положение, причем точка A опишет всю кривую C, то полная площадь, описанная линией AB, равна площади Q, ограниченной этой кривой C, так как части плоскости, заключенные между C и L, будут пройдены линией AB дважды, притом в двух противоположных направлениях, и в сумме сократятся В этом случае площадь Q измеряется произведением $l \cdot s$, где s есть длина дуги, на которую повернулось мерительное колесико N.

Мы предположили ведущую линию L — разомкнутой и не имеющей петель; но если ведущая линия L будет так же замкнутая, как и обводимая кривая C, то площадь, описываемая (фиг. 23) прямою AB при ее перемещении от начального положения A_0B_0 до того же самого конечного положения, будет равна алгебраической разности площади Q кривой C и площади P кривой L, которая описана точкой B.

Для того, чтобы определить относительные знаки площадей P и Q, достаточно принять, согласно указанному выше, площадь, ограниченную кривой, описываемой точками A или B, за положительную, когда соответствующая кривая будет обойдена движущейся по ней точкою A или B по направлению часовой стрелки, и за отрицательную — обходимую в обратном направлении.

Таким образом, на фиг. 23 обе площади P и Q — положительные, а на фиг. 24 площадь Q — положительная, а площадь P — отрицательная. В первом случае (фиг. 23), если s есть дуга поворота мерительного колесика N, то будет

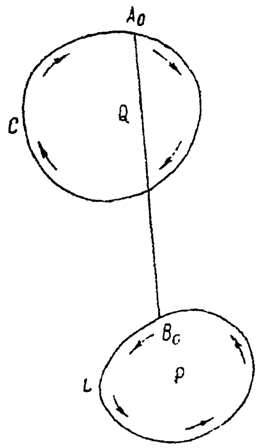
$$Q - P = ls$$

откуда

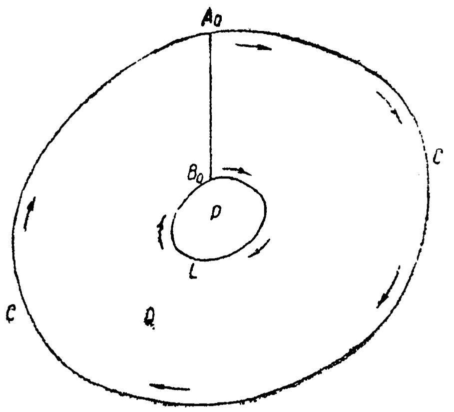
$$Q = ls + P$$

Во втором случае (фиг. 24)

$$Q - [-P] = Q + P = ls$$



Фиг. 24.



Фиг. 25.

откуда

$$Q = ls - P$$

Если замкнутая кривая C, площадь которой желают измерить, вполне объемлет собою ведущую кривую L (фиг. 25), то AB сделает полный оборот в то время, когда точка A опишет кривую C, и площадь Q будет

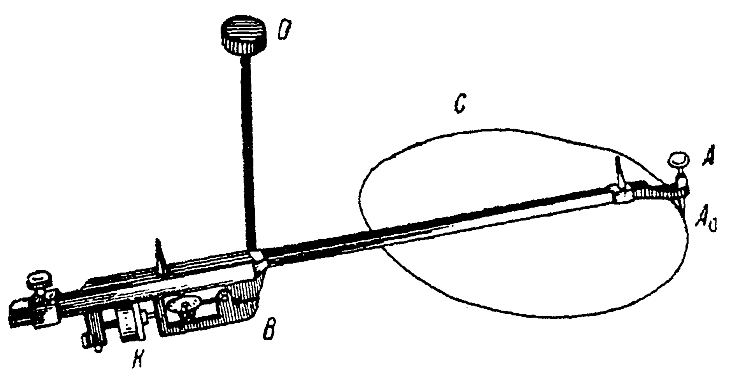
$$Q = ls + P + 2\pi la$$

Эта теория показывает, что ведущая кривая L может быть взята произвольно. В общеупотребительных *полярных* планиметрах Амслера эта кривая есть окружность; в его интеграторе и линейном планиметре ведущая линия есть прямая.

§ **38.** Устройсто *планиметра Амслера* в общих чертах следующее: два стержня AK и BO (фиг. 26) соединены в точке B шарниром. В конце O стержня BO имеется острый штифт, которым этот конец укрепляется неподвижно к чертежу. На конце A стержня AK укреплено острие, которым обводят по контуру обмеряемой площади: на конце K того же стержня насажено колесико с острым ободом, причем плоскость этого колесика перпендикулярна к линии AK. К этому колесику прикреплен второй обод с делениями, по которым, по установленному на стержне индексу можно отсчитывать угол поворота колесика.

Употребление прибора весьма просто. Чтобы измерить площадь, заключенную внутри заданного контура C, укрепляют точку O к чертежу, ставят острие A в какую угодно точку A_0 на контуре C, производят отсчет положения колесика по индексу (пусть этот отсчет будет θ_0), затем обводят острием A по контуру C, например по часовой стрелке, и когда острие, после полного обхода контура, снова придет в A_0, производят второй отсчет положения колесика; пусть этот отсчет будет θ_1, тогда разность отсчетов $\theta_1 - \theta_0$ будет пропорциональна площади Q, заключенной внутри контура C, так что

$$Q = k(\theta_1 - \theta_0).$$

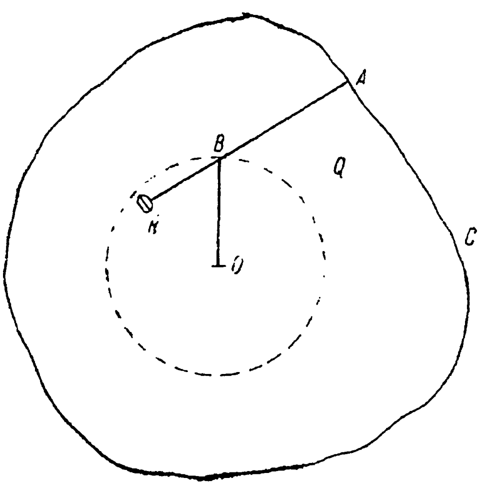


Фиг. 26

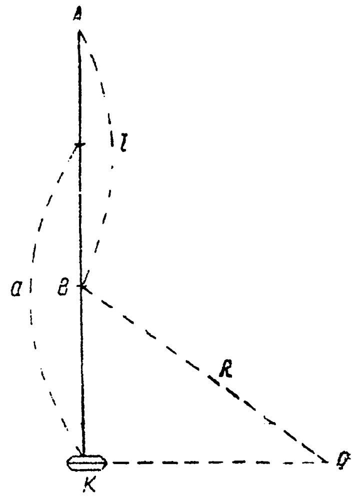
Из предыдущего видно, что величина k выражается так: $k = l \cdot r$, где l есть длина стержня AB и r — радиус колесика. Обыкновенно, чтобы определить коэффициент пропорциональности k, обводят острием A такой контур, заключенная внутри коего площадь легко вычисляется, например прямоугольник данных сторон, квадрат или круг заданного радиуса; очевидно, что этот коэффициент k может быть определен для данного прибора раз навсегда. В большинстве случаев прибором пользуются так, что точка O располагается вне обмеряемой площади.

Из формулы $k = rl$ видно, что постоянная прибора пропорциональна длине стержня AB, заключенной между шарниром и острием. Этим свойством пользуются для устройства планиметров, назначенных для обмера индикаторных диаграмм, где надо знать не самую площадь, а среднюю ординату, т. е. отношение величины площади к длине основания ее. В этом случае стержень планиметра делается так, что его легко продвигать в муфте шарнира, тогда, устанавливая длину AB равной основанию площади, по отсчетам колесика будем получать величины, пропорциональные средней ординате. На фиг. 26 и изображен такой планиметр.

В том случае, когда точка O взята внутри обмеряемой площади, то, как видно (фиг. 27), описанная длиною AB площадь есть та кольцевая площадь, которая заключается между ведущим кругом, т. е. кругом, описанным точкою B и контуром C. Кроме того, при переходе от своего начального до конечного положения прямая AB совершила полный оборот, а так как мерительное колесико находится не по середине длины AB, а отстоит от середины на длину a, то, на основании сказанного в § 37, к длине дуги, описанной колесиком, надо прибавить величину $2\pi \cdot al$.



Фиг. 27.



Фиг. 28.

Таким образом будет

$$Q - \pi R^2 = (s + 2\pi a)\, l$$

где

$$s = r(\theta_1 - \theta_0)$$

или

$$Q = s \cdot l + 2\pi a l + \pi R^2 = k(\theta_1 - \theta_0) + \pi (R^2 + 2al)$$

Величина $R^2 + 2al$ имеет весьма простое геометрическое значение (фиг. 28).

В самом деле, вообразим себе, что прибор поставлен так, что плоскость колесика проходит через точку O, тогда будет

$$\overline{OA}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{OK}^2$$

$$\overline{AK}^2 = \left(a + \frac{l}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{l^2}{4} + al$$

$$\overline{OK}^2 = R^2 - \left(a - \frac{l}{2}\right)^2 = R^2 - a^2 - \frac{l^2}{4} + al$$

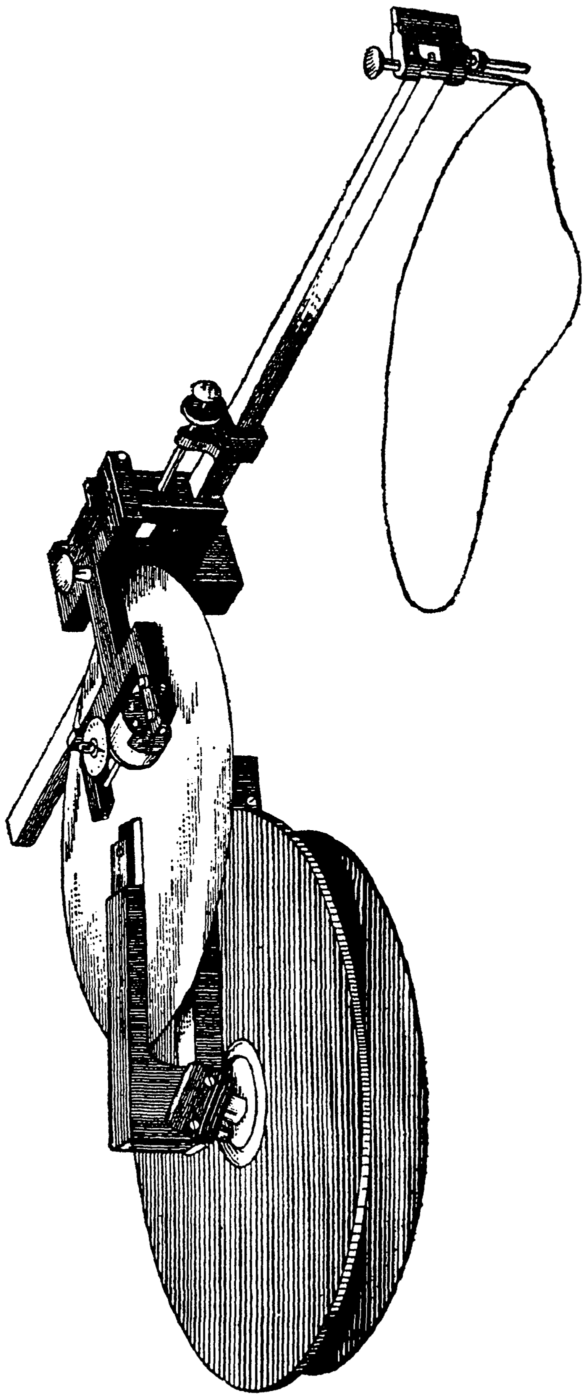
Значит

$$OA^2 = R^2 + 2al$$

Таким образом, полагая $\overline{OA}^2 = R^2$, получим

$$Q = k(\theta_1 - \theta_0) + \pi R^2.$$

Амслер, кроме описанного планиметра, строит другой, основанный на том же принципе, но в котором колесико K катится не по чертежу, а по особому диску, вращающемуся пропорционально повороту стержня BO, благодаря чему увеличивается поворот колесика в большое число раз и, значит, увеличивается точность отсчета угла $\theta_1 - \theta_0$, кроме того, самые показания прибора точнее, ибо устранена возможность скольжения колесика, когда, например, чертеж на очень гладкой бумаге или коленкоре; вместе с тем, таким планиметром с диском можно обмерять и чертеж, на котором остались следы складок (фиг. 29).



Фиг. 29.

Схема устройства этого планиметра такая: цилиндр E (фиг. 30а) имеет выступающий обод, на котором насечены весьма мелкие зубцы.

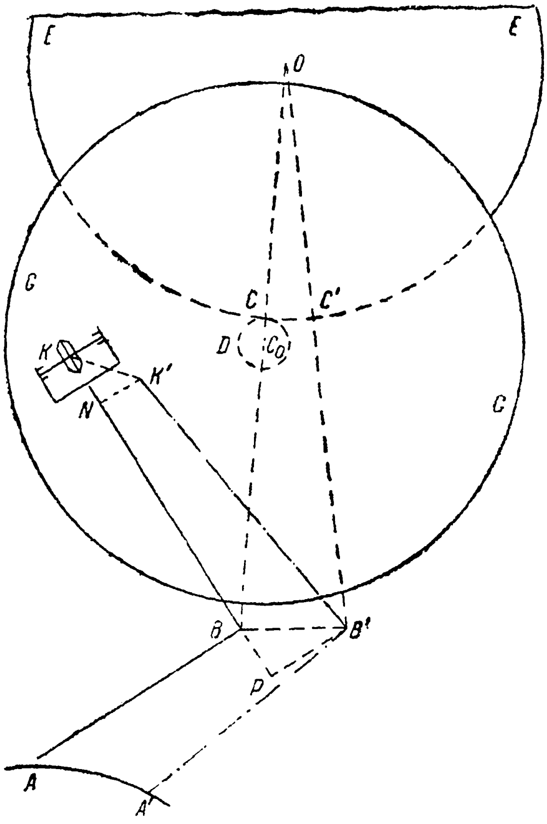
Радиус OB, вращающийся свободно около центральной оси O цилиндра, несет на себе шестеренку D, ось которой параллельна оси O и которая катится по ободу цилиндра C. Эта шестеренка неизменно соединена с диском G, делающим, следовательно, такой же поворот, как и шестеренка. На конце B радиуса OB укреплена вторая ось, параллельная первой, и около нее может свободно вращаться коленчатый стержень ABK, оканчивающийся острием A и вилкою, несущей мерительное колесико K, плоскость которого перпендикулярна к AB и которое катается по диску G.

Само собою разумеется, что острием A обводят контур измеряемой площади и делают отсчеты по колесику K.

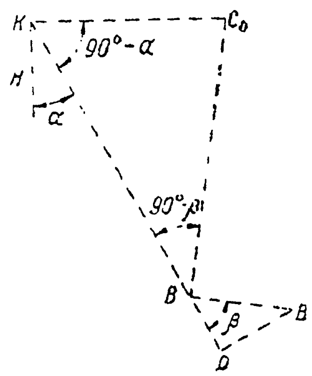
Понятно, что в существенных чертах это есть тот же полярный планиметр, у которого ведущею кривой служит круг, описываемый точкою B, все прочие части служат лишь для увеличения показаний мерительного колесика.

Чтобы составить формулы, относящиеся к этому планиметру, стоит только найти соотношение между углами поворота мерительного колесика K, имеющегося действительно и катающегося по диску с таковым же K_1, которое было бы насажено где-нибудь на самом стержне AB и каталось бы по плоскости чертежа.

Для этого составим в линиях



Фиг. 30а.



Фиг. 30б.

схему прибора и вообразим, что колесико K_1 помещено в точке B (фиг. 30а).

Пусть острие A описало элемент AA' дуги контура, площадь коего обмеряется, прямая AB описала при этом площадь $ABB'A'$, тогда колесо K_1 прошло бы путь BB', и угол его поворота будет

$$d\varphi = \frac{BP}{r}$$

где точка P есть проекция точки B' на направление плоскости колесика K_1.

Плоскость колесика K совпадает с плоскостью K_1; если бы диск был неподвижен, то дуга, пройденная точкою K, была бы KK', и поворот $d\psi$ колесика K определился бы из формулы

$$d\psi = \frac{KN}{r}$$

Так как угол между направлениями AB и $A'B'$ бесконечно малый, то и угол между перпендикулярными направлениями BK и $B'K'$ бесконечно малый, и, следовательно, длина NP проекции прямой $B'K'$ разнится лишь на бесконечно малые величины высших порядков от длины самой прямой, т. е.

$$K'B' = KB = NP + \text{бесконечно малые высшего порядка}$$

откуда следует

$$KN = BP$$

или иначе

$$d\varphi = d\psi$$

т. е. углы поворота колесиков K и K_1 были бы одинаковы, если бы диск оставался неподвижным.

Остается, следовательно, рассмотреть, на какой угол повернется колесико K от поворота диска.

Пусть будет

$$OB = R; \qquad OC_0 = R_1$$

и пусть радиус шестеренки есть ρ.

Тогда поворот радиуса OB будет

$$d\sigma = \frac{BB'}{R}$$

Угол поворота шестеренки, а значит, и диска по отношению к радиусу OB':

$$d\sigma_1 = \frac{OC}{\rho} \cdot d\sigma = \frac{R_1}{\rho} d\sigma = \frac{R_1}{R} \cdot \frac{BB'}{\rho}$$

Следовательно, диск пройдет под колесиком K путь KH, длина коего есть

$$HK = KC_0 \cdot d\sigma_1 = ds_1$$

и заставит колесико K повернуться на угол $d\omega$, определяемый формулой

$$d\omega = \frac{ds_1 \cdot \cos\alpha}{r} = \frac{1}{r} KC_0 \cdot \cos\alpha \cdot d\sigma_1$$

Но из треугольника KC_0B (фиг. 306) имеем

$$\frac{KC_0}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{BC_0}{\sin(90^\circ - \alpha)}$$

откуда

$$KC_0 \cdot \cos\alpha = BC_0 \cdot \cos\beta = (R - R_1)\cos\beta$$

Итак будет

$$d\omega = \frac{R - R_1}{r} \cdot \cos\beta \cdot d\sigma_1$$

подставляя вместо $d\sigma_1$ его величину, имеем

$$d\omega = \frac{R - R_1}{r} \cdot \frac{R_1}{R} \cdot \frac{BB' \cdot \cos\beta}{\rho}$$

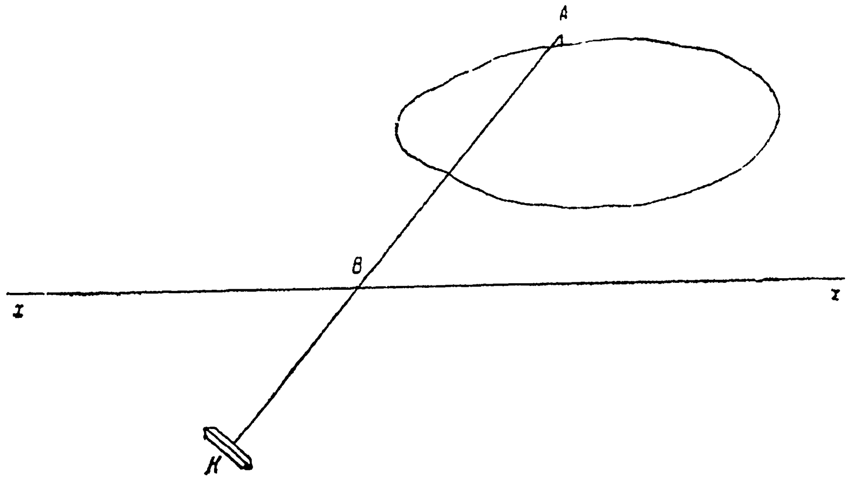
но

$$BB' \cdot \cos\beta = BP = r \cdot d\varphi$$

Значит, будет

$$d\omega = \frac{R - R_1}{R} \cdot \frac{R_1}{\rho} \cdot d\varphi$$

Этот угол $d\omega$ приложится к углу $d\varphi$, на который повернулось бы колесико K при неподвижном диске; значит, полный угол его поворота будет



Фиг. 31.

$$d\omega + d\varphi = \left(\frac{R - R_1}{R} \cdot \frac{R_1}{\rho} + 1\right) d\varphi$$

т. е. пропорционален тому углу поворота $d\varphi$, который имело бы колесико K_1 обыкновенного планиметра.

Величина $\frac{R - R_1}{R}$ близка к $\frac{1}{2}$, величина же отношения $\frac{R_1}{\rho}$ обыкновенно большая, около 10, отсюда ясно, что $\frac{R - R_1}{R} \cdot \frac{R_1}{\rho} + 1$ будет составлять около 6.

Таким образом, отсчеты в дисковом планиметре могут быть увеличены в любое число раз, что и способствует большей точности, им доставляемой.

Точность планиметра Амслера, при обмере площади величиною около 100 кв. см, до $\frac{1}{2}$ %, точность дискового — до $\frac{1}{10}$ %.

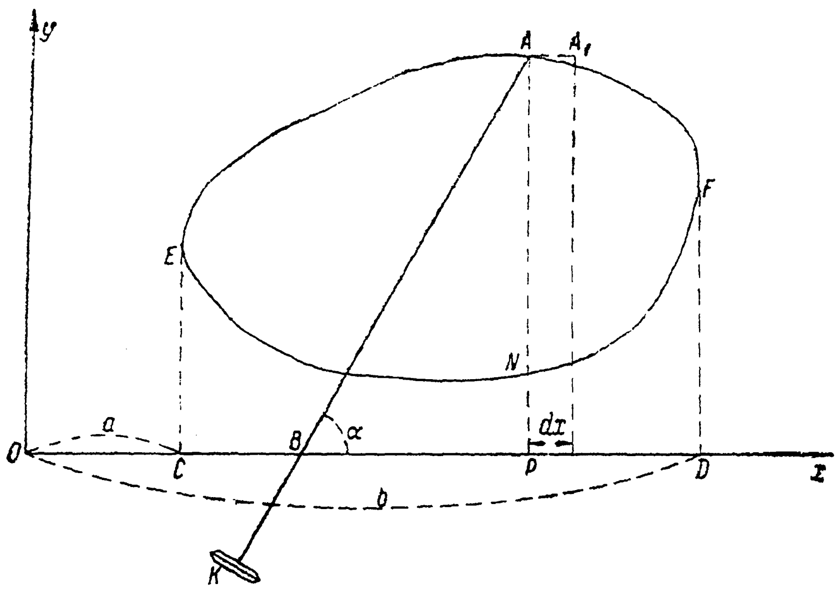
§ 39. **Интегратор Амслера** отличается в простейшем своем виде от его планиметра только тем, что точка B стержня AK ведется не по кругу, как у планиметра, а по данной прямой xx (фиг. 31), а так как формула

$Q = k(\theta_1 - \theta_0)$ показывает, чта площадь Q, заключенная внутри контура, описанного точкою A, пропорциональна углу поворота колесика, причем коэффициент пропорциональности не зависит от радиуса круга, описываемого точкою B, то эта формула будет иметь место и в том случае, когда этот радиус, неопределенно увеличиваясь, обратится в бесконечность, т. е. точка B будет двигаться по прямой, а тогда планиметр полярный обратится в изображенный на схеме интегратор.

Нетрудно и непосредственно убедиться в справедливости соотношения

$$Q = rl(\theta_1 - \theta_0)$$

между площадью контура, обведенного острием A интегратора, длиною l стержня AB (фиг. 32) и радиусом колесика r. Для этого стоит только



Фиг. 32.

разбить заданную площадь на элементарные прямоугольники, коих основание есть dx, и заметить, что при обходе сторон такого прямоугольника, перпендикулярных к оси x, повороты колесика взаимно уничтожаются, при обходе же сторон, параллельных оси x, выражаются так:

$$d\theta = \frac{1}{r} dx \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{r} dx \cdot \sin\alpha$$

но

$$\sin\alpha = \frac{AP}{AB} = \frac{Y}{l}$$

значит, поворот колесика, при обходе от E до F по верхней половине контура, будет

$$\theta_2 - \theta_0 = \frac{1}{r} \int_a^b \sin\alpha \cdot dx = \frac{1}{rl} \int_a^b Y \cdot dx = \frac{\text{площ. } CEAFD}{rl}$$

При обходе по нижней половине контура от F до E поворот колесика будет

$$\theta_1-\theta_2=\frac{1}{r}\int_b^a \sin\alpha\cdot dx=\frac{1}{rl}\int_b^a y\,dx=-\frac{1}{rl}\int_a^b y\,dx=$$
$$=\frac{-\text{площ. } CENFD}{rl}$$

Значит, полный поворот колесика при обходе контура будет

$$\theta_1-\theta_0=\frac{\text{площ. } CEAFD-\text{площ. } CENFD}{rl}=\frac{Q}{rl}$$

откуда

$$Q=rl(\theta_1-\theta_2)$$

Амслер делает при своем интеграторе еще два добавочных колесика, пользуясь которыми можно найти: 1) статический момент обводимой острием A площади относительно оси x и 2) момент инерции этой площади относительно той же оси. Чтобы найти статический момент площади относительно оси x, заметим, что он выражается так:

$$M=\frac{1}{2}\int_a^b (Y^2-y^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_a^b Y^2\,dx-\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx$$

где Y — ордината верхней части контура, y — нижней.

Но, как мы видели,

$$Y=l\cdot\sin\alpha;\qquad y=l\cdot\sin\alpha_1$$

где через α и α_1 обозначены углы, составляемые прямою AB с осью x, когда острие будет в A и в N. Значит,

$$\frac{1}{2}\int_a^b Y^2\,dx=\frac{1}{2}\int_a^b l^2\sin^2\alpha\,dx=\frac{1}{4}l^2\int_a^b (1-\cos 2\alpha)\,dx$$

и, следовательно,

$$M=\frac{1}{2}\int_a^b Y^2\,dx-\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx=\frac{1}{2}\int_a^b Y^2\,dx+\frac{1}{2}\int_b^a y^2\,dx=$$
$$=\frac{1}{4}l^2\left[\int_a^b (1-\cos 2\alpha)\,dx+\int_b^a (1-\cos 2\alpha_1)\,dx\right]=$$
$$=\frac{1}{4}l^2\left[\int_a^b \cos 2\alpha_1\,dx+\int_b^a \cos 2\alpha\,dx\right]= \tag{1}$$
$$=\frac{l^2}{4}\left[\int_a^b \sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha_1\right)dx+\int_b^a \sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)dx\right.$$

Момент инерции площади Q относительно оси x выражается так:

$$J = \frac{1}{3} \int_a^b (Y^3 - y^3) dx$$

Подставляя вместо Y и y их величины $Y = l \sin \alpha$ и $y = l \sin \alpha_1$ и замечая, что $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$, получим

$$J = \frac{l^3}{4} \int_a^b \sin \alpha dx - \frac{l^3}{12} \int_a^b \sin 3\alpha dx +$$

$$+ \frac{l^3}{4} \int_b^a \sin \alpha_1 dx - \frac{l^3}{12} \int_b^a \sin 3\alpha_1 dx$$

Откуда следует

$$J = \frac{l^2}{4} Q - \frac{l^3}{12} \left[\int_a^b \sin 3\alpha dx + \int_b^a \sin 3\alpha_1 dx \right]$$

ибо

$$l \int_a^b \sin \alpha \, dx + l \int_b^a \sin \alpha_1 dx = \int_a^b Y dx + \int_b^a y dx =$$

$$= \int_a^b (Y - y) \, dx = Q$$

Таким образом, вычисление статического момента и момента инерции площади Q относительно оси x сведено к вычислению интегралов

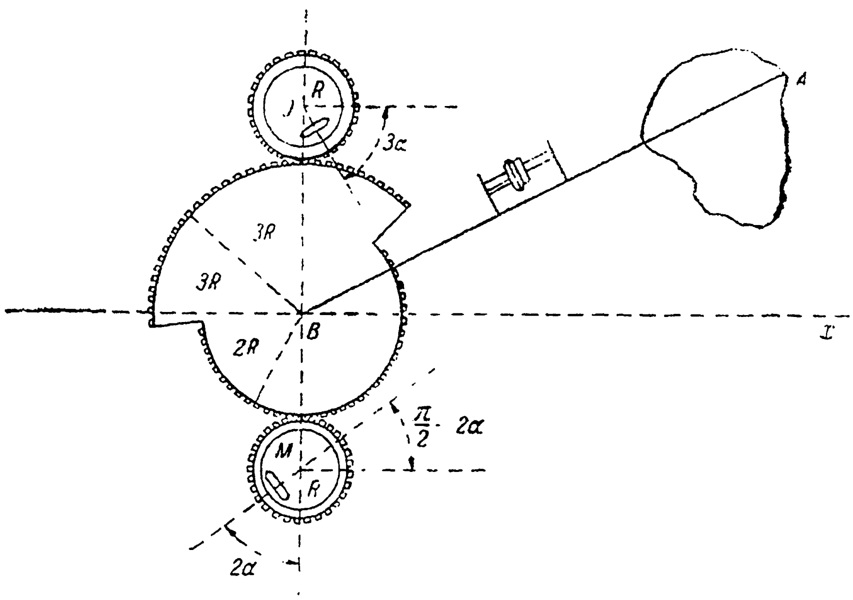
$$\int_a^b \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) dx \qquad \text{и} \qquad \int_a^b \sin 3\alpha dx$$

Чтобы находить величины, пропорциональные интегралам

$$\int_a^b \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) dx \qquad \text{и} \qquad \int_a^b \sin 3\alpha dx$$

к стержню AB (фиг. 33) прикреплено зубчатое колесо, состоящее из двух частей, причем радиус одной в полтора раза более радиуса другой. Эти радиусы обозначим через $2R$ и $3R$. С этим большим колесом сцепляются два меньших колеса радиуса R, к ободу этих последних колес прикреплены оси M и J роликов, катающихся по плоскости чертежа. Колеса эти устанавливаются так, что когда угол $\alpha = 0$, то ось ролика M совпадает с линией BO_1, перпендикулярной к оси x, ось же ролика J тогда параллельна оси x, таким образом, что если стержень AB будет составлять с осью x угол α, то ось ролика M составит с этою осью угол $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$, ось же ролика J составит угол 3α, и, следовательно, отсчеты углов поворота этих роликов при обводе острием A по контуру и дадут величины, пропорциональные интегралам

$$\int_a^b \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) dx \quad \text{и} \quad \int_a^b \sin 3\alpha dx$$



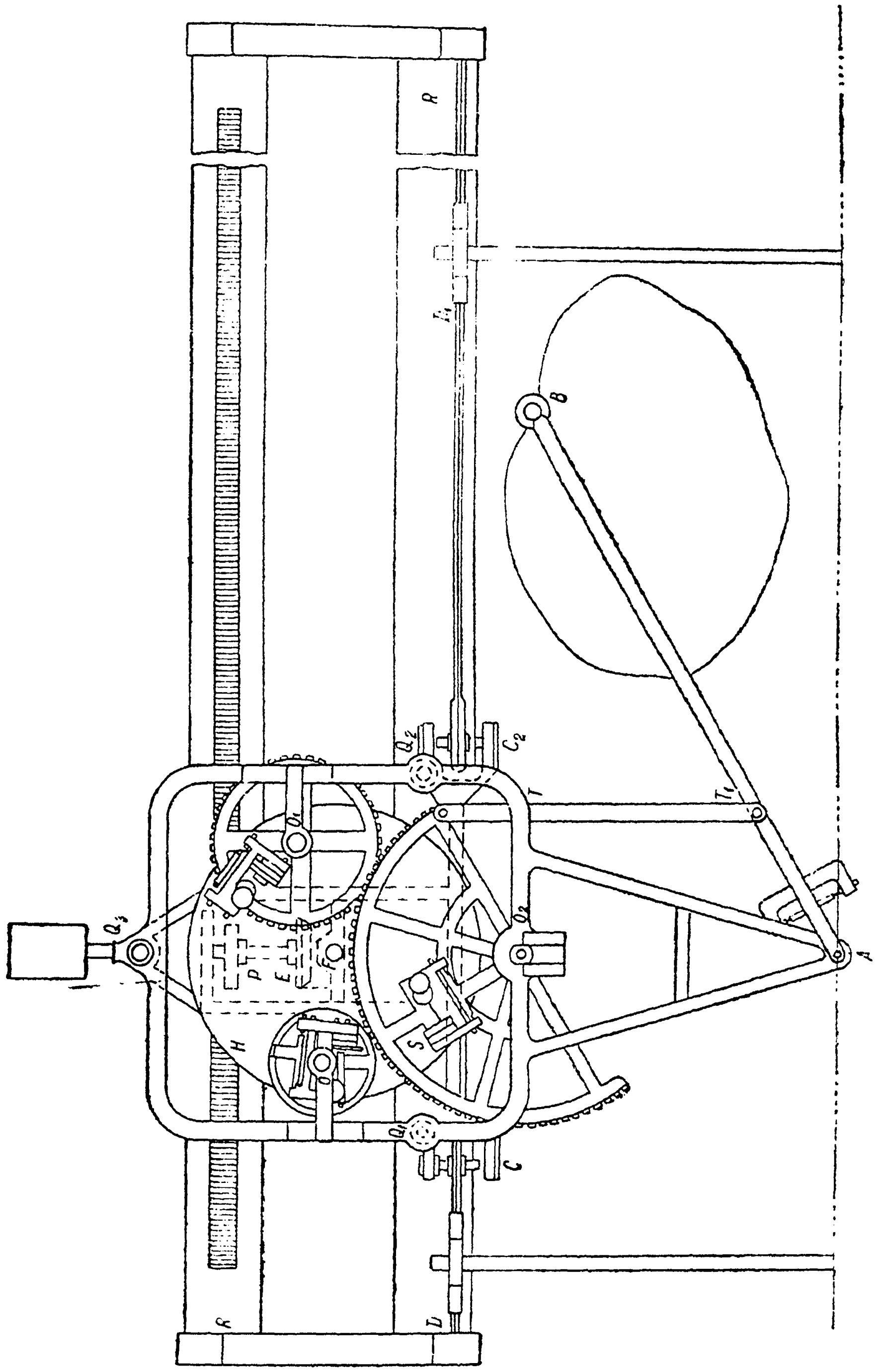
Фиг. 33.

которые входят в выражение статического момента и момента инерции той площади Q, величина которой дается отсчетом по ролику S.

Кроме описанного, Амслер изготовляет и такие интеграторы, у которых счетные ролики S, M и J катятся не по плоскости чертежа, а по отдельному диску, поворот которого пропорционален длине пути, проходимого точкою B по оси x; устройство этого интегратора в общих чертах следующее:

На раму R (фиг. 34), состоящую из двух линеек, из коих на одной нарезаны очень мелкие зубцы, а в другой выбрана борозда DD_1, накладывается рама CC_2 так, чтобы ее ролики C и C_2 катались по борозде DD_1, а колесо P с мелкою нарезкою катилось по нарезке линейки R. Колесо P насажено на общую ось с коническою зубчаткою E, захватывающей за другую коническую же зубчатку F, скрепленную с диском H, углы поворота которого таким образом пропорциональны перемещению рамы CC_2

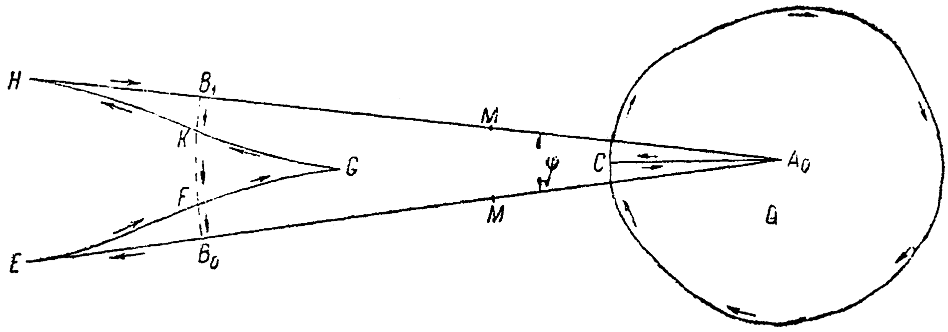
вдоль линеек. На раме же CC_2 укреплены три опоры Q_1, Q_2, Q_3, на которые накладывается своими гнездами вторая рама L, несущая центры O, O_1 и O_2 зубчатых колес, сцепленных между собою, радиусы этих колес относятся



Фиг. 34.

между собою как 3 : 2 : 1, и эти колеса несут на себе оси роликов S, M, J, катящихся по диску. Наибольшее из этих зубчатых колес соединено тягою TT_1 с шарнирами со стержнем AB, которого острием обводят по контуру. Отсчеты поворотов роликов S, M и J и дадут величины, пропорциональные: площади контура, его статического момента относительно прямой xx_1, описываемой точкою A и параллельной борозде на линейке, и величине интеграла $\int \sin 3\alpha\, dx$, который входит в выражение момента инерции площади относительно оси xx_1.

§ **40. Планиметр-топорик** состоит из очерчивающего штифта A, которым обводится периметр площади, которую желают измерить, неизменно соединенного с острым и закругленным лезвием B, установленным таким образом, что плоскость его острого края проходит через точку A. Главное свойство острого края заключается в том, что, когда он касается плоскости чертежа, он заставляет двигаться точку B по направлению прямой линии, соединяющей эту точку с концом штифта A. Таким образом, когда точкою A обводится



Фиг. 35.

какая-нибудь линия, то точка B описывает соответствующую кривую преследования или погонную линию. Это свойство указывает, что в планиметре-топорике не имеется материально воспроизведенной, постоянной, ведущей кривой L, напротив того, эта кривая изменяется в зависимости от обводимой штифтом A и от начального положения прибора; одним словом, ведущая кривая L есть погонная линия, соответствующая обводимой C и движению очерчивающего ее штифта A.

Положим теперь, что точка A планиметра, выйдя от A_0, обойдет кривую C и вернется снова в A_0, тогда лезвие B, выйдя из B_0, прочертит соответствующую погонную линию и придет в B_1; таким образом, конечное положение прямой линии AB будет A_0B_1. Чтобы совместить эту прямую с ее первоначальным положением, нам надо только повернуть ее на угол $\varphi = B_1A_0B_0$ около точки A_0. Тогда ведущая линия L будет дополнена дугой круга B_1B_0 (фиг. 35) и станет замкнутою. В этом случае полная площадь Ω, описанная линией AB, равна алгебраической разности площади Q и площадей, заключенных между частями ведущей кривой, причем каждую часть надо брать с надлежащим знаком.

Итак, описанная площадь будет

$$\Omega = Q - (B_0EF + KHB_1 - FGK)$$

Описанная же площадь измеряется произведением длины линии AB на длину дуги s, на которую повернулось бы колесико, установленное в точке M.

Чтобы определить эту дугу, мы заметим, что если бы колесико было помещено в B, причем ось его была бы направлена вдоль AB, то плоскость колесика составляла бы прямой угол с плоскостью лезвия; перемещение точки касания колесика с плоскостью чертежа всегда было бы направлено перпендикулярно к плоскости колесика: значит, колесико оставалось бы неподвижным, и его показание было бы равно нулю все время, пока точка A двигалась бы по погонной линии.

Сопоставляя это с теоремой 2-й, видим, что мерительное колесико, установленное в средней точке M, должно было бы повернуться на дугу $\frac{1}{2}l\varphi$, где φ есть угол $B_0A_0B_1$, когда прибор придет в положение A_0B_1. Когда же прибор будет повернут около точки A_0, чтобы привести его конечное положение в совпадение с начальным, то колесико, находящееся в M, очевидно, повернулось бы еще на дугу $\frac{1}{2}l\varphi$.

Таким образом, полная дуга поворота колесика, установленного в M, была бы

$$\frac{1}{2}l\varphi+\frac{1}{2}l\varphi=l\varphi$$

и, следовательно, мера описанной прямою AB площади будет

$$\Omega=l\cdot l\varphi=l^2\varphi=l\operatorname{arc}(B_0B_1)$$

Таким образом мы имеем следующее точное соотношение:

$$l^2\varphi=Q-(B_0EF+KHB_1-FGK)$$

Надлежащим выбором исходной точки A_0 (она должна браться близ центра тяжести площади кривой C) можно сделать, что сумма площадей $(B_0EF+KHB_1-FGK)$ будет близка к нулю, и мы будем иметь простое соотношение

$$Q=l^2\varphi \text{ или } Q=l\operatorname{arc}(B_0B_1)$$

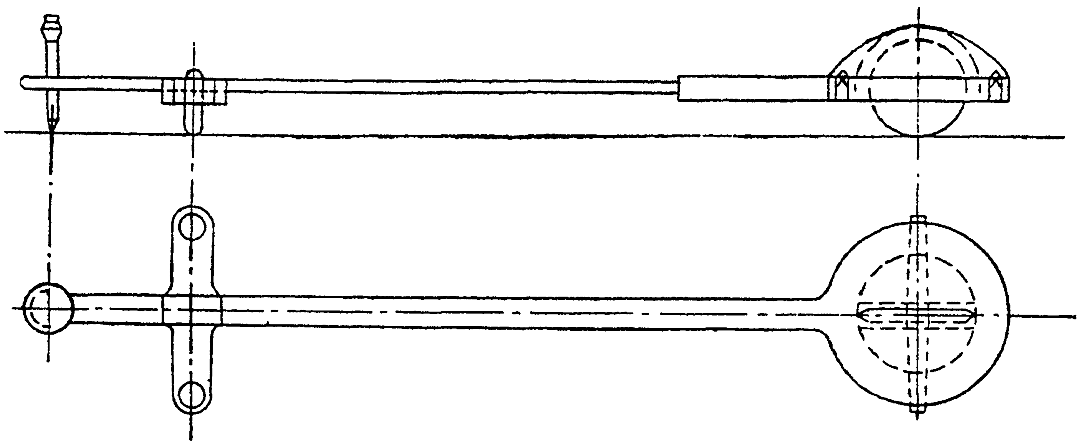
Если угол φ будет меньше $20°$, то дуга B_0B_1 практически может быть заменена ее хордой, и мы будем иметь соотношение

$$Q=l\cdot B_0B_1$$

Чтобы обеспечить более правильное движение ведущей точки B, устройство планиметра-топорика слегка изменено; ведущее лезвие заменено небольшим колесиком с острым ребром; плоскость этого колеса установлена так, что она проходит через конец штифта A; этот же штифт свободно вращается в своей втулке. Фиг. 36 представляет прибор в том виде, как он изготовлен по моим указаниям.

Для пользования инструментом надо положить кусок копировальной бумаги под колесико, чтобы была прочерчена кривая преследования и по ней можно было бы легко измерить расстояние $B_0 B_1$, выбирая при этом положение этой линии так, чтобы сумма площадей положительных была бы на глаз равна сумме площадей отрицательных.

Очевидно также, что, имея погонную кривую вычерченной, легко вышеупомянутые площади и обмерить, а следовательно, и определить предел сделанной погрешности.



Фиг. 36.

§ 41. **Интеграф Абданк-Абакановича** воспроизводит механически то построение, которое было указано в § 34 для нахождения интеграла $\int_a^x f(x)\,dx$, когда функция $f(x)$ задана чертежом.

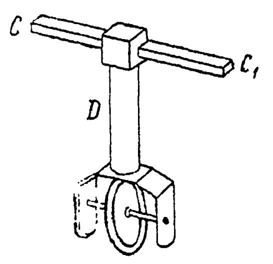
Из построения, указанного в § 34, видно, что если вообразить, что промежуток между ординатами неопределенно уменьшается, то прямая Ec, частные положения которой суть $E_1 c_1$, $E_2 c_2$ и т. д., будет двигаться непрерывным образом, тогда и точка N опишет требуемую кривую также непрерывным движением; кривая эта будет, очевидно, обладать тем свойством, что в каждой ее точке касательная параллельна соответствующему положению прямой Ec, иными словами надо точку N перемещать одновременно с прямою Ec так, чтобы во всякий момент перемещение точки N происходило параллельно прямой Ec. Такое перемещение и воспроизведено в интеграфе.

Существенную часть этого прибора составляет колесико K, изображенное отдельно на чертежах фиг. 37а, 37б, самый же прибор представлен на фиг. 38.

Это колесико с острым ребром может свободно вращаться в охватывающей его вилке на остриях, которыми оканчиваются винты A и A_1.

Круглый стержень D вилки проходит через подшипник в раме тележки, которая может свободно кататься по верхнему рельсу прибора.

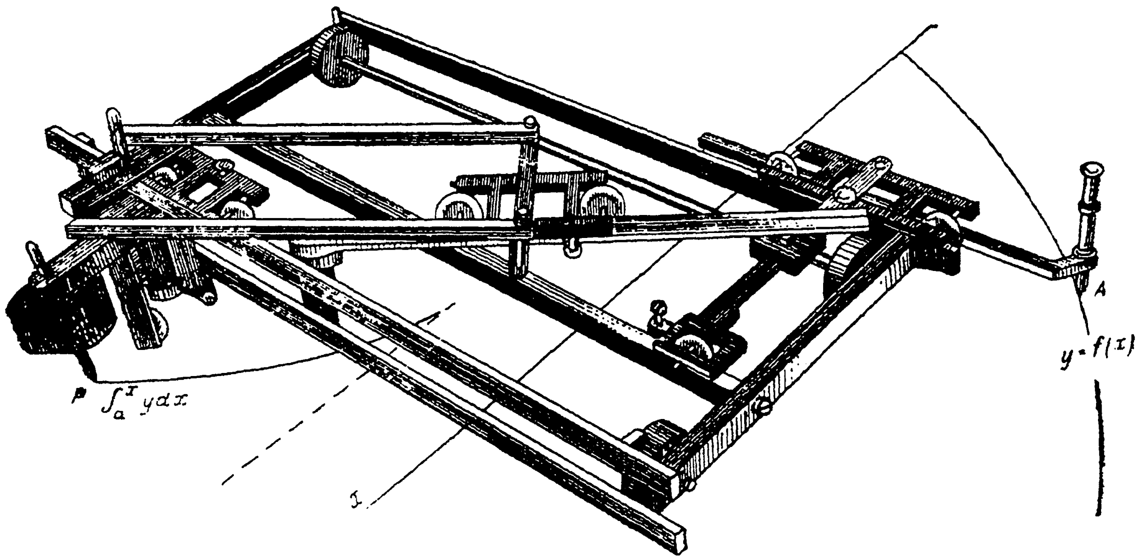
Этот рельс установлен параллельно осям цилиндрических катков, на которых прибор ставится на плоскость чертежа. Оси катков выверены строго параллельно между собой, и все четыре катка — равного диаметра, поэтому, если катить прибор по плоскости, то он перемещается так, что рельс движется, все время оставаясь параллельным своему первоначальному положению.



Фиг. 37.

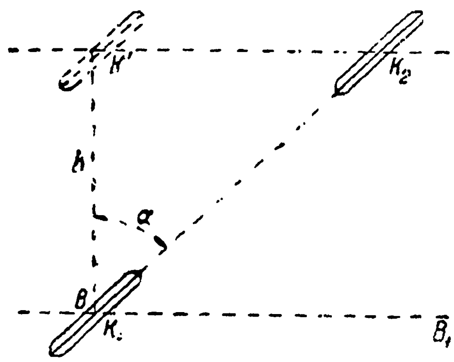
Рассмотрим сперва, что произойдет, если прокатить прибор по плоскости чертежа на некоторую длину h (фиг. 39), удерживая стержнем CC_1 (фиг. 37) плоскость колесика K под постоянным углом α к направлению движения.

Так как тележка может весьма легко кататься по рельсу BB_1 в направлении, перпендикулярном h, а острое ребро колесика K препятствует ему скользить по плоскости чертежа, не препятствуя ему по этой плоскости



Фиг. 33.

катиться, то колесико K придет не в положение K', а покатится, оставаясь в своей плоскости, до положения K_2, причем тележка по рельсу прокатится на длину $K'K_2$. Таким образом, центр колесика K и всякая точка тележки, с ним связанная, при перемещении прибора движется параллельно плоскости колесика. Теперь нетрудно видеть назначение и действие прочих частей прибора. Около центра, неизменно скрепленного с основной рамой прибора, к которой прикреплен и верхний рельс, может вращаться в плоскости чертежа линейка с бороздою посредине. Этою бороздкою линейка накладывается на ролики нижней тележки, катающейся по нижнему бороздчатому и среднему гладкому рельсу основной рамы, эта тележка несет штифт A, который ведут по данной кривой $f(x)$. При помощи параллелограма плоскость колесика K удерживается параллельно бороздке поворотной линейки, не препятствуя свободе движения тележки, несущей колесико K по верхнему рельсу.



Фиг. 39.

Действие прибора следующее: установив его на плоскость чертежа так, чтобы он катился в направлении оси xx_1, ставят среднюю линейку параллельно этой оси и ведущий штифт A устанавливают на ось xx_1; тогда если прокатить прибор по плоскости чертежа, то пишущий штифт P опишет прямую $x'x'$, параллельную оси xx_1 — нулевую линию площадей, затем катят прибор по плоскости вторично, ведя все время штифтом A по данной кривой, тогда пишущий штифт опишет соответствующую интегральную кривую (кривую площадей), масштаб которой будет зависеть от начальной установки прибора, т. е. от расстояния от центра вращения линейки до проекции на ось xx_1 центра вращения нижней тележки, через посредство которой поворотная линейка связана с ведущим штифтом, которым обводят заданную кривую $y = f(x)$. Это расстояние, которое обозначим буквою l, служит единицею масштаба кривой площадей и имеет то же значение, как и означенная тою же буквою длина $E_1 b_1$ (фиг. 16).

ГЛАВА V

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

§ **42.** Во многих вопросах прикладной математики приходится иметь дело с приближенным представлением функции при помощи ряда, расположенного по синусам и косинусам аргументов, возрастающих в арифметической прогрессии. Такого рода разложения встречаются постоянно в вопросах математической физики, а теперь они проникают и в вопросы чисто технические как в области электротехники, так и машиностроения, поэтому в этой главе мы разберем приемы этих разложений и обращения с такого рода рядами.

Пусть задана функция

$$V=f(\theta) \tag{1}$$

аргумента θ в промежутке от $\theta=-\pi$ до $\theta=+\pi$, и положим, что эту функцию надо представить в виде ряда следующего вида:

$$\begin{aligned} f(\theta)=A_0+A_1\cos\theta+A_2\cos 2\theta+A_3\cos 3\theta+\ldots+A_n\cos n\theta+\ldots \\ +B_1\sin\theta+B_2\sin 2\theta+B_3\sin 3\theta+\ldots+B_n\sin n\theta+\ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Само собою разумеется, что первый вопрос состоит в указании способа вычисления коэффициентов этого ряда, а затем в исследовании полученного разложения. Для вычисления коэффициентов Эйлер показал следующий прием:

1) *Для получения коэффициента* A_0 *надо умножить обе части равенства* (2) *на* $d\theta$ *и проинтегрировать в пределах от* $-\pi$ *до* $+\pi$, *тогда будет*

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)d\theta \tag{3}$$

2) *Для получения коэффициента* A_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ *надо умножить обе части равенства* (2) *на* $\cos n\theta\cdot d\theta$ *и проинтегрировать в пределах от* $\theta=-\pi$ *до* $\theta=+\pi$, *тогда будет*

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta \tag{4}$$

3) *Для получения коэффициентов* B_n *надо обе части равенства* (2) *умножить на* $\sin n\theta\, d\theta$ *и проинтегрировать в пределах от* $\theta = -\pi$ *до* $\theta = +\pi$, *тогда будет*

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \sin n\theta\, d\theta \tag{5}$$

Чтобы доказать этот прием и равенства (3), (4) и (5), стоит только обратить внимание на следующие равенства:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos n\theta\, d\theta = \frac{1}{n} [\sin n\theta]_{-\pi}^{+\pi} = \frac{1}{n} [\sin n\pi - \sin(-n\pi)] = 0 \tag{6}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin n\theta\, d\theta = -\frac{1}{n} [\cos n\theta]_{-\pi}^{+\pi} = -\frac{1}{n} [\cos n\pi - \cos(-n\pi)] = 0 \tag{7}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin k\theta \cos n\theta\, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} [\sin(k+n)\theta - \sin(n-k)\theta]\, d\theta = 0 \tag{8}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin k\theta \sin n\theta\, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} [\cos(n-k)\theta - \cos(n+k)\theta]\, d\theta = 0 \text{ если } k \neq n \tag{9}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos k\theta \cos n\theta\, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} [\cos(n-k)\theta + \cos(n+k)\theta]\, d\theta = 0 \text{ если } k \neq n \tag{10}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos k\theta \cos k\theta\, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} (1 + \cos 2k\theta)\, d\theta = \pi \tag{11}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin k\theta \sin k\theta\, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} (1 - \cos 2k\theta)\, d\theta = \pi \tag{12}$$

в силу этих равенств видно, что по умножении (2), например, на $\cos n\theta\, d\theta$ и интегрировании, чтобы получить A_n, в правой части будем иметь интеграл

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \cos n\theta\, d\theta$$

а во второй части сумму интегралов вида

$$A_k \int_{-\pi}^{+\pi} \cos k\theta \cos n\theta\, d\theta \quad \text{и} \quad B_k \int_{-\pi}^{+\pi} \sin k\theta \cos n\theta\, d\theta$$

которые все равны нулю, кроме одного, именно:

$$A_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos n\theta \cos n\theta\, d\theta = \pi \cdot A_n$$

и, следовательно, будет

$$A_n = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta$$

§ **43.** От разложения функции $f(\theta)$, заданной в промежутке от $\theta = -\pi$ до $\theta = +\pi$, нетрудно перейти к разложению любой функции

$$y = F(x)$$

заданной в промежутке от $-l$ до $+l$, стоит только положить

$$\frac{\pi x}{l} = \theta$$

тогда будет

$$y = F\left(\frac{\theta \cdot l}{\pi}\right) = f(\theta)$$

и ф-лы (2) ... (5) дают

$$y = A_0 + A_1 \cos\theta + A_2 \cos 2\theta + \ldots + A_n \cos n\theta + \ldots$$
$$\ldots + B_1 \sin\theta + B_2 \sin 2\theta + \ldots + B_n \sin n\theta + \ldots$$

причем

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \cdot d\theta$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta; \qquad B_n = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta$$

подставляя в эти формулы вместо θ его величину $\frac{\pi x}{l}$ и замечая, что $f(\theta)$ обратится в $F(x)$, пределы в интегралах будут $-l$ и $+l$ и $d\theta = \frac{\pi}{l} \cdot dx$, получим

$$y = A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{l} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{l} + A_3 \cos\frac{3\pi x}{l} + \ldots + A_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \ldots$$
$$\ldots + B_1 \sin\frac{\pi x}{l} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots + B_n \sin\frac{n\pi x}{l} + \ldots \tag{13}$$

причем

$$A_0 = \frac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{+l} F(x) dx$$

$$A_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{+l} F(x) \cos\frac{n\pi x}{l} dx; \qquad B_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{+l} F(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx \tag{14}$$

Ф-лами (13) и (14) решается вопрос о разложении в тригонометрический ряд функции $F(x)$, заданной в промежутке от $-l$ до $+l$.

Если функция $f(\varphi)$ задана вообще в промежутке от $\varphi=\alpha$ до $\varphi=\alpha+2\pi$, то стоит только положить

$$\varphi=\alpha+\pi+\theta$$

и рассматриваемый промежуток будет для θ соответствовать от $-\pi$ до $+\pi$, причем в этом промежутке значения функции будут известны, и, следовательно, будет

$$f(\varphi)=f(\alpha+\pi+\theta)=F(\theta)=A_0+A_1\cos\theta+A_2\cos 2\theta+\ldots+A_n\cos n\theta+\ldots$$
$$\ldots+B_1\sin\theta+B_2\sin 2\theta+\ldots+B_n\sin n\theta+\ldots$$

причем

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(\theta)\,d\theta;\qquad A_n=\int_{-\pi}^{+\pi}F(\theta)\cos n\theta\,d\theta;\qquad B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(\theta)\sin n\theta\,d\theta$$

подставляя вместо θ его величину, имеем

$$f(\varphi)=A_0+A_1\cos(\varphi-\alpha-\pi)+A_2\cos 2(\varphi-\alpha-\pi)+\ldots+A_n\cos n(\varphi-\alpha-\pi)+\ldots$$
$$\ldots+B_1\sin(\varphi-\alpha-\pi)+B_2\sin 2(\varphi-\alpha-\pi)+\ldots+B_n\sin n(\varphi-\alpha-\pi)+\ldots$$

причем

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(\varphi)\,d\varphi$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(\varphi)\cos n(\varphi-\alpha-\pi)d\varphi=(-1)^n\cdot\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(\varphi)\cos n(\varphi-\alpha)d\varphi$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(\varphi)\sin n(\varphi-\alpha-\pi)d\varphi=(-1)^n\cdot\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(\varphi)\sin n(\varphi-\alpha)\,d\varphi$$

Отсюда видно, что функцию $f(\varphi)$, заданную в промежутке от $\varphi=\alpha$ до $\varphi=\alpha+2\pi$, можно разложить в ряд

$$f(\varphi)=A_0+A_1\cos(\varphi-\alpha)+A_2\cos 2(\varphi-\alpha)+\ldots+A_n\cos n(\varphi-\alpha)+\ldots$$
$$\ldots+B_1\sin(\varphi-\alpha)+B_2\sin 2(\varphi-\alpha)+\ldots+B_n\sin n(\varphi-\alpha)+\ldots \tag{2'}$$

Вычисляя коэффициенты по формулам

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(\varphi)\,d\varphi;\qquad A_n=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(\varphi)\cos n(\varphi-\alpha)d\varphi$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(\varphi)\sin n(\varphi-\alpha)\,d\varphi \tag{3'}$$

Из этих формул сейчас же вытекает, что если функция $F(x)$ задана в промежутке от $x = a$ до $x = a + 2l$, то ее можно представить в виде ряда

$$\begin{aligned} F(x) = A_0 + A_1 \cos\frac{\pi(x-a)}{l} + A_2\cos\frac{2\pi(x-a)}{l} + \ldots + A_n \cos\frac{n\pi(x-a)}{l} + \ldots \\ \ldots + B_1 \sin\frac{\pi(x-a)}{l} + B_2 \sin\frac{2\pi(x-a)}{l} + \ldots + B_n \sin\frac{n\pi(x-a)}{l} + \ldots \end{aligned} \tag{13'}$$

Вычисляя коэффициенты по формулам

$$A_0 = \frac{1}{2l}\int_a^{a+2l} F(x)\,dx; \qquad A_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} F(x)\cos\frac{n\pi(x-a)}{l}\,dx$$

$$B_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} F(x)\sin\frac{n\pi(x-a)}{l}\,dx \tag{14'}$$

ф-лы (2') можно представить и в ином виде.

Возьмем общий член

$$A_n \cos n(\varphi - \alpha) + B_n \sin n(\varphi - \alpha)$$

его можно написать так:

$$(A_n \cos n\alpha - B_n \sin n\alpha)\cos n\varphi + (A_n \sin n\alpha + B_n \cos n\alpha)\sin n\varphi$$

в силу же выражений (3') будет

$$A_n \cos n\alpha - B_n \sin n\alpha = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(\varphi)[\cos n(\varphi-\alpha)\cos n\alpha + \sin n(\varphi-\alpha)\sin n\alpha]\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi$$

Совершенно так же увидим, что

$$A_n \sin n\alpha + B_n \cos n\alpha = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi$$

Таким образом видим, что функция $f(\varphi)$, заданная в промежутке от α до $\alpha + 2\pi$, может быть представлена в виде ряда

$$\begin{aligned} f(\varphi) = A_0 + A_1 \cos\varphi + A_2 \cos 2\varphi + \ldots + A_n \cos n\varphi + \ldots \\ \ldots + B_1 \sin\varphi + B_2 \sin 2\varphi + \ldots + B_n \sin n\varphi + \ldots \end{aligned} \tag{2''}$$

причем коэффициенты вычисляются по формулам

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(\varphi)\,d\varphi; \qquad A_n = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi$$

Отсюда следует, что функция $F(x)$, заданная в промежутке от $x=a$ до $x=a+2l$, может быть представлена в виде ряда

$$\begin{aligned} F(x) = A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{l} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{l} + \ldots + A_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \ldots \\ \ldots + B_1 \sin\frac{\pi x}{l} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots + B_n \sin\frac{n\pi x}{l} + \ldots \end{aligned} \tag{13'}$$

причем коэффициенты выражаются формулами

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2l} \int\limits_a^{a+2l} F(x)\,dx \\ A_n &= \frac{1}{l} \int\limits_a^{a+2l} F(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\,dx \\ B_n &= \frac{1}{l} \int\limits_a^{a+2l} F(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\,dx \end{aligned} \tag{14'}$$

§ **44.** Положим теперь, что заданная функция $F(x)$ четная, так что

$$F(-x) = F(x)$$

тогда будет

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{+l} F(x)\,dx = \frac{1}{l} \int\limits_0^l F(x)\,dx \\ A_n &= \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{+l} F(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l} \int\limits_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\,dx \end{aligned} \tag{15}$$

и

$$A_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{+l} F(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

так что остается разложение

$$F(x) = A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{l} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{l} + \ldots + A_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \ldots \tag{16}$$

причем коэффициенты даются ф-лами (15).

Совершенно так же, если положить, что $F(x)$ есть функция нечетная, так что

$$F(-x) = -F(x)$$

то все коэффициенты A в ф-ле (13) обратятся в нули, и останется только разложение, заключающее синусы, а именно:

$$F(x) = B_1 \sin \frac{\pi x}{l} + B_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + B_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \ldots + B_n \sin \frac{n\pi x}{l} + \ldots$$

причем (17)

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx.$$

§ **45.** Как видно, все эти результаты сами собою следуют из ф-л (2), (3), (4), (5), но по поводу этих формул возникают следующие вопросы:

1) Вывод ф-л (3), (4), (5) основан на допущении, что разложение (2) имеет место и что ряд (2) можно интегрировать *почленно*. Это требует проверки.

2) Относительно функции $f(\theta)$ мы не делали никаких ограничений кроме того, что при вычислении коэффициентов эта функция подвергается интегрированию, и, следовательно, она может быть и разрывною. Пусть функция $f(\theta)$ при $\theta = \theta_0$ имеет разрыв непрерывности, тогда абсциссе θ_0 соответствуют две ординаты BE и CE. Между тем, во второй части будет стоять ряд

$$\begin{aligned} &A_0 + A_1 \cos \theta_0 + A_2 \cos 2\theta_0 + \ldots + A_n \cos n\theta_0 + \ldots \\ &+ B_1 \sin \theta_0 + B_2 \sin 2\theta_0 + \ldots + B_n \sin n\theta_0 + \ldots \end{aligned}$$

имеющий только *одно* значение. Спрашивается, которую же из ординат BE или CE этот ряд представляет, или ни ту, ни другую?

3) Если сделать $\theta = -\pi$ и $\theta = +\pi$, то получится во второй части одна и та же величина

$$A_0 + A_1 \cos \pi + A_2 \cos 2\pi + A_3 \cos 3\pi + \ldots$$

или

$$A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \ldots + -(1)^n A_n + \ldots$$

в первой же части при $\theta = -\pi$ получится $f(-\pi)$, и при $\theta = \pi$ получается $f(\pi)$, если, как на нашем чертеже, $f(-\pi)$ не равна $f(+\pi)$, то спрашивается, которую же из этих двух величин представляет наш ряд, или ни ту, ни другую?

*На все эти вопросы дал ответ *Дирихле*, доказавший теорему, которую мы формулируем и докажем ниже. Предварительно введем некоторые новые понятия. Положим, что $f(\theta)$ терпит разрыв непрерывности при $\theta = \theta_0$, но обладает тем свойством, что $f(\theta_0 - h)$ и $f(\theta_0 + h)$ при стремлении положительного переменного h к нулю имеют определенные конечные пределы. Мы будем обозначать эти пределы следующим образом:

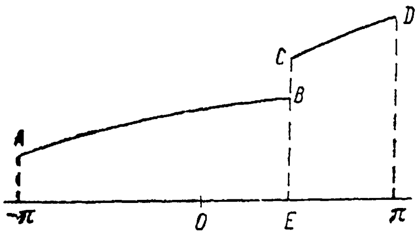
$$f(\theta_0 - 0) = \lim_{h=0} f(\theta_0 - h); \qquad f(\theta_0 + 0) = \lim_{h=0} f(\theta_0 + h) \qquad (h > 0)$$

При этом говорят, что $f(\theta)$ имеет при $\theta=\theta_0$ *разрыв непрерывности первого рода*. Мы должны иметь $f(\theta_0-0)\neq f(\theta_0+0)$, ибо в случае равенства $f(\theta_0-0)=f(\theta_0+0)$ функция $f(\theta)$ не имела бы разрыва непрерывности при $\theta=\theta_0$. На фиг. 40 $f(\theta_0-0)$ изображается ординатой EB и $f(\theta_0+0)$ ординатой EC.

Далее говорят, что функция $f(\theta)$ удовлетворяет на конечном промежутке от a до b *условиям Дирихле*: если

1) она непрерывна в этом промежутке или имеет конечное число разрывов первого рода; 2) она имеет конечное число максимумов и минимумов в упомянутом промежутке и 3) предельные значения $f(a+0)$ и $f(b-0)$ на концах промежутка конечны.

В силу сказанного выше относительно максимумов и минимумов весь промежуток от a до b можно разбить на конечное число таких частных промежутков, в каждом из которых $f(\theta)$ меняется монотонно.



Фиг. 40.

Теорема Дирихле. Если $f(\theta)$ удовлетворяет на промежутке от $(-\pi)$ до π условиям Дирихле, то при разложении этой функции в тригонометрический ряд по формулам (2), (3), (4) *и* (5) *оказывается, что предел суммы первых n членов ряда при возрастании n для всякого значения θ, при котором функция $f(\theta)$ непрерывна есть $f(\theta)$; для тех значений $\theta=\theta_k$, где функция претерпевает разрыв, сказанная сумма есть*

$$\frac{1}{2}[f(\theta_k-0)+f(\theta_k+0)]$$

и, наконец, при $\theta=-\pi$ и при $\theta=\pi$ сказанная сумма есть

$$\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(+\pi-0)]^*.$$

Доказательство этой теоремы довольно сложно и длинно и основано на непосредственном разыскании предела суммы S_n первых n членов ряда (2) при неопределенном возрастании n. Итак имеем

$$\begin{aligned}S_n=A_0+A_1\cos\theta+A_2\cos 2\theta+\ldots+A_n\cos n\theta\\+B_1\sin\theta+B_2\sin 2\theta+\ldots+B_n\sin n\theta\end{aligned}$$

заменяя коэффициенты $A_0, A_1, \ldots A_n, \ldots B_n$ их значениями и написав под знаком интеграла, во избежание путаницы, вместо буквы θ букву t и внося множители $\sin k\theta$ и $\cos k\theta$ под знак интеграла, имеем

$$S_n=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}+\cos\theta\cdot\cos t+\cos 2\theta\cdot\cos 2t+\ldots+\cos n\theta\cdot\cos tn\\ +\sin\theta\cdot\sin t+\sin 2\theta\cdot\sin 2t+\ldots+\sin n\theta\cdot\sin nt\end{array}\right]dt$$

или

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \cos(t-\theta) + \cos 2(t-\theta) + \ldots + \cos n(t-\theta)\right] dt$$

Сумма, стоящая в [ ], представляет собою сумму косинусов дуг, возрастающих в арифметической прогрессии, и, как известно,

$$\frac{1}{2} + \cos(t-\theta) + \cos 2(t-\theta) + \ldots + \cos n(t-\theta) = \frac{\sin(2n+1)\frac{t-\theta}{2}}{2\sin\frac{t-\theta}{2}}$$

так что будет

$$S = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-\theta)}{2\sin\frac{t-\theta}{2}}\,dt$$

или, полагая

$$z = \frac{t-\theta}{2}$$

получим

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi+\theta}{2}}^{\frac{\pi-\theta}{2}} f(\theta+2z)\,\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz \tag{18}$$

Таким образом, весь вопрос сведен к исследованию интеграла (18).

Положим сперва, что θ не равно ни $-\pi$, ни $+\pi$, тогда имеем

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi-\theta}{2}} f(\theta+2z)\,\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz + \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi+\theta}{2}}^{0} f(\theta+2z)\,\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz$$

или, полагая во втором интеграле $z = -u$:

$$\begin{aligned} S_n = {} & \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi-\theta}{2}} f(\theta+2z)\,\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz + \\ & + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi+\theta}{2}} f(\theta-2u)\,\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du \end{aligned} \tag{18'}$$

и наш вопрос сводится к исследованию интегралов, входящих в формулу (18').

§ **46.** Для исследования этих интегралов докажем сперва так называемую вторую теорему о среднем: *Пусть $f(x)$ есть некоторая непрерывная функция в промежутке от a до b и $\varphi(x)$ — монотонная и ограниченная в этом промежутке функция, тогда*

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx = \varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)\,dx + \varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx$$

причем ξ — некоторое значение из упомянутого промежутка.

Достаточно показать формулу для случая убывающей функции $\varphi(x)$, ибо если $\varphi(x)$ возрастающая функция, то $[-\varphi(x)]$ — убывающая, и, применяя формулу $k[-\varphi(x)]$ и меняя в обеих частях равенства знаки, получим такие же равенства для $\varphi(x)$. Итак будем считать, что $\varphi(x)$ — убывающая или, лучше сказать, невозрастающая функция. Пусть будет:

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

Разделим промежуток от a до b на k частей, и обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_k$ абсциссы промежуточных точек. Тогда по первой теореме о средней имеем:

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)$$

причем ξ_i принадлежит промежутку от x_i до x_{i+1}.

Написав ряд подобных равенств для всех значений i от 0 до $(k-1)$ и умножая каждое равенство на $\varphi(\xi_i)$ и сложив их, получим:

$$\varphi(\xi_0)[F(x_1) - F(x_0)] + \varphi(\xi_1)[F(x_2) - F(x_1)] + \ldots +$$
$$+ \varphi(\xi_{k-1})[F(b) - F(x_{k-1})] = \sum_{i=0}^{k-1} (x_{i+1} - x_i)\varphi(\xi_i) f(\xi_i)$$

причем $F(a) = 0$. Сумму, стоящую в левой части этого равенства можно переписать так:

$$F(x_1)[\varphi(\xi_0) - \varphi(\xi_1)] + F(x_2)[\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)] + \ldots +$$
$$+ F(x_{k-1})[\varphi(\xi_{k-2}) - \varphi(\xi_{k-1})] + F(b)\varphi(\xi_{k-1})$$

Если обозначить через m и M наименьшее и наибольшее значение функции $F(x)$ в промежутке от a до b, где она непрерывна, то, принимая во внимание, что все разности $\varphi(\xi_i)-\varphi(\xi_{i+1})$ не отрицательны, можем утверждать, что при замене всех $F(x_i)$ на m предыдущая сумма не увеличится, а при замене всех $F(x_i)$ на M она не уменьшится. После первой замены предыдущее выражение будет:

$$m\left\{[\varphi(\xi_0)-\varphi(\xi_1)]+[\varphi(\xi_1)-\varphi(\xi_2)]+\ldots+[\varphi(\xi_{k-2})-\varphi(\xi_{k-1})]\right\}+$$
$$+F(b)\varphi(\xi_{k-1})=m[\varphi(\xi_0)-\varphi(\xi_{k-1})]+F(b)\varphi(\xi_{k-1})$$

и после второй замены оно будет:

$$M[\varphi(\xi_0)-\varphi(\xi_{k-1})]+F(b)\varphi(\xi_{k-1})$$

Мы приходим таким образом к неравенству

$$m[\varphi(\xi_0)-\varphi(\xi_{k-1})]+F(b)\varphi(\xi_{k-1})\leqslant\sum_{i=0}^{k-1}(x_{i+1}-x_i)\varphi(\xi_i)f(\xi_i)\leqslant$$
$$\leqslant M[\varphi(\xi_0)-\varphi(\xi_{k-1})]+F(b)\varphi(\xi_{k-1})$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу, считая, что число делений k неопределенно растет, и наибольшая из разностей $(x_{i+1}-x_i)$ стремится к нулю. При этом сумма, стоящая в средней части неравенства, имеет своим пределом:

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx$$

ξ_0 имеет своим пределом a, так как она заключается между a и x_1, точно так же ξ_{k-1} имеет своим пределом b.

Таким образом предыдущее неравенство в пределе дает нам:

$$m[\varphi(a+0)-\varphi(b-0)]+F(b)\varphi(b-0)\leqslant\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx\leqslant$$
$$\leqslant M[\varphi(a+0)-\varphi(b-0)]+F(b)\varphi(b-0)$$

и, следовательно, найдется такое число p, удовлетворяющее неравенству $m\leqslant p\leqslant M$, что

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx=p[\varphi(a+0)-\varphi(b-0)]+F(b)\varphi(b-0).$$

Но известно, что непрерывная функции $F(x)$ принимает все значения, лежащие между ее наименьшим значением m и наибольшим M, а потому найдется такое значение ξ из промежутка от a до b, что

$$p=F(\xi)$$

и предыдущая формула переписывается в виде:

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = [\varphi(a+0) - \varphi(b-0)] F(\xi) + \varphi(b-0) F(b)$$

или

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = \varphi(a+0) F(\xi) + \varphi(b-0) [F(b) - F(\xi)]$$

т. е., принимая во внимание определение $F(x)$:

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = \varphi(a+0) \int_a^\xi f(x)\, dx + \varphi(b-0) \left[\int_a^b f(x)\, dx - \int_a^\xi f(x)\, dx \right]$$

и таким образом имеем

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = \varphi(a+0) \int_a^\xi f(x)\, dx + \varphi(b-0) \int_\xi^b f(x)\, dx$$

что мы и хотели доказать. Если $\varphi(x)$ непрерывна при $x=a$ и $x=b$, то формула переписывается в виде:

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = \varphi(a) \int_a^\xi f(x)\, dx + \varphi(b) \int_\xi^b f(x)\, dx.$$

Так как „теоремы о средней" будут служить основанием для всей теории тригонометрических рядов, то остановимся еще на этих теоремах.

1-ая теорема о средней. *Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в промежутке от a до b (включая концы) и кроме того $f(x)$ не меняет знаки в указанном промежутке, то*

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = \varphi(\xi) \int_a^b f(x)\, dx$$

причем ξ принадлежит упомянутому промежутку. Положим, что $f(x)$ остается в промежутке от a до b положительной. Пусть далее A и B наименьшее и наибольшее значения $\varphi(x)$ в упомянутом промежутке. Таким образом будет постоянно

$$\varphi(x) - B \leqslant 0 \text{ и } \varphi(x) - A \geqslant 0$$

и значит будет:

$$\int_a^b f(x) [\varphi(x) - B]\, dx \leqslant 0$$

и

$$\int_a^b f(x)[\varphi(x)-A]\,dx \geqslant 0$$

или иначе

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leqslant B\int_a^b f(x)\,dx$$

и

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \geqslant A\int_a^b f(x)\,dx$$

Отсюда видно, что есть такое число C, удовлетворяющее неравенству $A \leqslant C \leqslant B$, при котором будет

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx$$

а так как $\varphi(x)$ непрерывна, то существует такое значение $x=\xi$, при котором

$$\varphi(\xi)=C$$

а тогда и будет

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_a^b f(x)\,dx$$

Очевидно, что совершенно так же можно бы провести доказательство и в том случае, когда $f(x)$ все время отрицательна.

2-я теорема о средней, которая доказана была выше, выражается равенством

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + \varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$$

Мы докажем сейчас эту формулу, считая, как и раньше, $f(x)$ непрерывной, а $\varphi(x)$ будем считать не только монотонной, но и непрерывной и имеющей непрерывную производную $\varphi'(x)$. В силу монотонности $\varphi(x)$ эта производная сохраняет неизменный знак.

Пусть будет

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$$

и, значит

$$F'(x)=f(x)$$

$$\int_a^b \varphi(x)F'(x)\,dx=[\varphi(x)F(x)]_{x=a}^{x=b}-\int_a^b \varphi'(x)F(x)\,dx=$$

$$=\varphi(b)\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b \varphi'(x)F(x)\,dx$$

ибо очевидно, что

$$F(a)=0 \text{ и } F(b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

Так как по предположению функция $\varphi'(x)$ сохраняет свой знак, то по 1-й теореме о средней будет

$$\int_a^b \varphi'(x)F(x)\,dx=F(\xi)\int_a^b \varphi'(x)\,dx=F(\xi)[\varphi(b)-\varphi(a)]=$$

$$=[\varphi(b)-\varphi(a)]\int_a^\xi f(x)\,dx$$

Подставляя, получаем

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+\varphi(b)\left[\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^\xi f(dx)\right]=$$

$$=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+\varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$$

Этим равенством и выражается 2-я теорема о средней.

§ **47.** Для доказательства теоремы Дирихле нам понадобятся еще две леммы.

Лемма 1. *Если $F(z)$ удовлетворяет на промежутке от 0 до b условиям Дирихле, то*

$$\lim_{\mu=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^b F(z)\frac{\sin\mu z}{z}\,dz=\frac{1}{2}F(+0) \qquad (*)$$

При доказательстве будем пока считать, что $F(z)$ не только удовлетворяет условиям Дирихле, но и монотонна на промежутке от 0 до b.

Известно, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z}\, dz = \frac{\pi}{2}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{c} \frac{\sin z}{z}\, dz$$

это — непрерывная функция c, равная нулю при $c=0$ и стремящаяся к $\frac{\pi}{2}$, когда c неограниченно возрастает. Отсюда можно заключить, что написанный интеграл при всех положительных c остается по абсолютной величине меньше, чем некоторое определенное положительное число M. Рассмотрим теперь интеграл с двумя любыми положительными пределами

$$\int_p^{q} \frac{\sin z}{z}\, dz$$

Мы имеем

$$\int_p^{q} \frac{\sin z}{z}\, dz = \int_0^{q} \frac{\sin z}{z}\, dz - \int_0^{p} \frac{\sin z}{z}\, dz$$

и

$$\left| \int_p^{q} \frac{\sin z}{z}\, dz \right| \leqslant \left| \int_0^{q} \frac{\sin z}{z}\, dz \right| + \left| \int_0^{p} \frac{\sin z}{z}\, dz \right| < 2M$$

Прежде чем переходить к доказательству (*) рассмотрим более простой интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{b} \frac{\sin \mu z}{z}\, dz$$

Совершая замену переменной $u=\mu z$, получим

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{b} \frac{\sin \mu z}{z}\, dz = \lim_{\mu=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu b} \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{2}$$

и следовательно

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{b} F(+0) \frac{\sin \mu z}{z}\, dz = \frac{1}{2} F(+0)$$

Для доказательства (*) нам достаточно показать

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^b [F(z) - F(+0)] \frac{\sin \mu z}{z} dz = 0$$

т. е. что выражение, стоящее под знаком предела, при достаточно больших μ по абсолютной величине меньше любого заданного положительного ε. Разобьем промежуток интегрирования от 0 до b на два: от 0 до δ и от δ до b, где число δ будет выбрано в дальнейшем. Покажем, что каждый из интегралов

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\delta [F(z) - F(+0)] \frac{\sin \mu z}{z} dz \text{ и } \frac{1}{\pi} \int_\delta^b [F(z) - F(+0)] \frac{\sin \mu z}{z} dz \qquad (**)$$

при всех достаточно больших значениях μ меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ по абсолютной величине. Можно взять δ настолько малым, чтобы в промежутке от 0 до δ $F(z)$ не имела разрывов непрерывности.

Принимая во внимание монотонность $F(z)$ и применяя вторую теорему о средней, получим:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\delta [F(z) - F(+0)] \frac{\sin \mu z}{z} dz = \frac{1}{\pi} [F(\delta) - F(+0)] \int_\xi^\delta \frac{\sin \mu z}{z} dz$$

откуда

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^\delta [F(z) - F(+0)] \frac{\sin \mu z}{z} dz \right| < \frac{1}{\pi} \left| F(\delta) - F(+0) \right| \cdot 2M$$

и можно выбрать положительное δ настолько близким к нулю, чтобы последнее выражение было $< \frac{\varepsilon}{2}$. Обратимся теперь ко второму из интегралов (**) и применим к нему также 2-ю теорему о средней; получим:

$$\frac{1}{\pi} [F(\delta) - F(+0)] \int_\delta^\xi \frac{\sin \mu z}{z} dz + \frac{1}{\pi} [F(b-0) - F(+0)] \int_\xi^b \frac{\sin \mu z}{z} dz$$

Множители, стоящие перед интегралами, суть постоянные, и нам остается показать, что оба интеграла стремятся к нулю при неограниченном возрастании μ. После этого можно будет утверждать, что второй из интегралов (**) по абсолютной величине $< \frac{\varepsilon}{2}$ при всех достаточно больших μ. Вводя новую переменную интегрирования $u = \mu z$, получим:

$$\int_\delta^\xi \frac{\sin \mu z}{z} dz = \int_{\mu\delta}^{\mu\xi} \frac{\sin u}{u} du$$

Так как δ — фиксированное положительное число и $\xi > \delta$, то $\mu\delta$ и $\mu\xi$ стремятся оба к бесконечности, и последний интеграл очевидно стремится к нулю. Совершенно аналогично рассуждаем и относительно интеграла:

$$\int_{\xi}^{b} \frac{\sin \mu z}{z} dz = \int_{\mu\xi}^{\mu b} \frac{\sin u}{u} du$$

Таким образом формула (*) доказана в предположении, что $F(z)$ — монотонная функция. Положим теперь, что $F(z)$ удовлетворяет условиям Дирихле. В силу этих условий промежуток от 0 до b можно разбить на конечное число частных промежутков, в каждом из которых $F(z)$ монотонна. Пусть, например, таких частичных промежутков три: $(0, b_1)$, (b_1, b_2), $b_2, b)$. Мы имеем:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^b F(z) \frac{\sin \mu z}{z} dz = \frac{1}{\pi} \int_0^{b_1} F(z) \frac{\sin \mu z}{z} dz + \frac{1}{\pi} \int_{b_1}^{b_2} F(z) \frac{\sin \mu z}{z} dz +$$
$$+ \frac{1}{\pi} \int_{b_2}^{b} F(z) \frac{\sin \mu z}{z} dz$$

Первый интеграл справа имеет предел $F(+0)$, и остается доказать, что оба другие интеграла имеют предел, равный нулю. Ограничимся рассмотрением первого из них. Продолжим функцию $F(z)$ из промежутка (b_1, b_2) на промежуток $(0, b_1)$ так, чтобы полученная таким путем в промежутке $(0, b_2)$ функция $F_1(z)$ была монотонной. На промежутке (b_1, b_2) функция $F_1(z)$ по построению совпадает с $F(z)$. Мы имеем:

$$\frac{1}{\pi} \int_{b_1}^{b_2} F(z) \frac{\sin \mu z}{z} dz = \frac{1}{\pi} \int_0^{b_2} F_1(z) \frac{\sin \mu z}{z} dz - \frac{1}{\pi} \int_0^{b_1} F_1(z) \frac{\sin \mu z}{z} dz$$

В правой части оба интеграла по доказанному стремятся к $F_1(+0)$, а потому их разность стремится к нулю, что мы и хотели доказать. Таким образом формула (*) доказана для любой функции $F(z)$, удовлетворяющей условиям Дирихле на промежутке от 0 до b, и лемма I доказана.

Лемма 2. *Если $F(z)$ удовлетворяет на промежутке от 0 до b условиям Дирихле и $0 < b < \pi$, то*

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^b F(z) \frac{\sin \mu z}{\sin z} dz = \frac{1}{2} F(+0) \qquad (***)$$

При доказательстве будем пока считать, что $F(z)$ положительна и не убывает на промежутке от 0 до b. Отношение $\frac{z}{\sin z}$ положительно, возрастает и остается ограниченным в упомянутом промежутке, ибо $b < \pi$

Следовательно функция $\Phi(z)=F(z)\frac{z}{\sin z}$ положительна и не убывает в упомянутом промежутке. Из формулы

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b F(z)\frac{\sin\mu z}{\sin z}dz=\frac{1}{\pi}\int_0^b \Phi(z)\frac{\sin\mu z}{z}dz$$

и леммы 1 непосредственно следует, что написанный интеграл стремится к $\Phi(+0)$. Но из определения $\Phi(z)$ непосредственно следует, что $\Phi(+0)=F(+0)$, и формула (***) доказана для случая неубывающей положительной функции $F(z)$. Тем самым формула справедлива, когда $F(z)$ — положительная постоянная. Если $F(z)$ не убывает и ограничена, но не положительна, то можно выбрать положительное число p такое, что неубывающая функция $F(z)+p$ положительна. К этой функции мы можем применить формулу (***):

$$\lim_{\mu=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^b [F(z)+p]\frac{\sin\mu z}{\sin z}dz=\frac{1}{2}F(+0)+\frac{1}{2}p$$

но, как мы видели выше:

$$\lim_{\mu=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^b p\frac{\sin\mu z}{z}dz=\frac{1}{2}p$$

и для $F(z)$ мы имеем формулу (***). Таким образом эта формула доказана для любой неубывающей функции. Если $F(z)$ невозрастающая функция, то $[-F(z)]$ — неубывающая функция, и для $[-F(z)]$ мы можем написать формулу (***). Таким образом эта формула доказана для любой монотонной функции. Обобщение формулы на случай любой функции $F(z)$, удовлетворяющей условиям Дирихле, может быть проделано совершенно так же, как это мы делали для фурмулы (*) при доказательстве леммы 1

Переходим теперь к доказательству теоремы Дирихле о пределе суммы S_n первых членов ряда (2). Для этой суммы мы имели формулу (18'). Если $-\pi<\theta<+\pi$, то оба верхних предела у интегралов, стоящих в правой части формулы, заключаются между нулем и π, так что к обеим интегралам применима лемма 2, причем для одного интеграла $F(z)=f(\theta-2z)$ и для другого $F(z)=f(\theta+2z)$. В первом случае $F(+0)=f(\theta-0)$ и во втором $F(+0)=f(\theta+0)$, так что

$$\lim_{n=\infty}S_n=\frac{1}{2}[f(\theta-0)+f(\theta+0)]$$

что мы и хотели доказать.

Пусть будет $\theta=\pi$. Тогда формула (18') принимает вид:

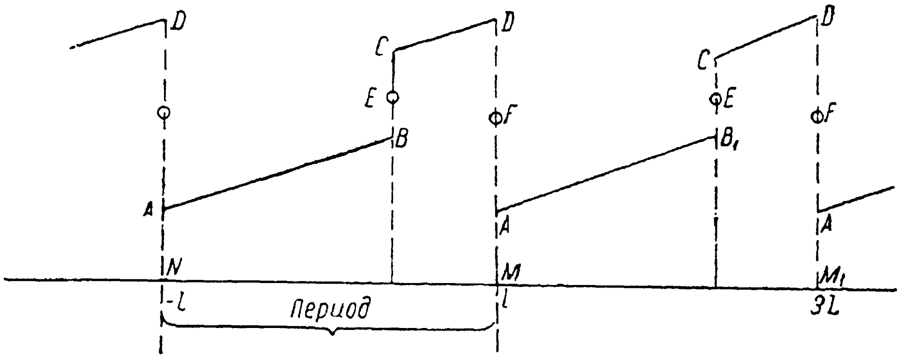
$$S_n=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\pi-2u)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}du$$

Разобьем этот интеграл на два:

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - 2u)\,\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\pi - 2u)\,\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du$$

и сделаем во втором из них $u = \pi - z$, тогда будет

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - 2u)\,\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(-\pi + 2z)\,\frac{\sin(2n+1)z}{z}\,dz.$$



Фиг. 41.

В каждом из этих двух интегралов верхние пределы меньше π и, следовательно,

$$\lim S_n = \frac{1}{2}\left[f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)\right]$$

Совершенно к тому же результату придем и сделав $\theta = -\pi$.

Таким образом, теорема Дирихле доказана*.

§ 48. Из самого приема, которым были получены ряды для представления функции, заданной между пределами $-l$ и $+l$, следует, что в тех местах, где функция непрерывна, сумма ряда представляет значение функции, в местах разрывов сумма ряда представляет среднюю арифметическую из двух значений функции, соответствующих месту разрыва, и, наконец, при $x = -l$ и при $x = +l$ сумма ряда представляет полусумму значений

$$\frac{1}{2}\left[f(-l+0) + f(l-0)\right]$$

Очевидно, что эти свойства относятся и к разложениям § 44 для функции четной по ф-ле (15) и (16) и нечетной по ф-ле (17).

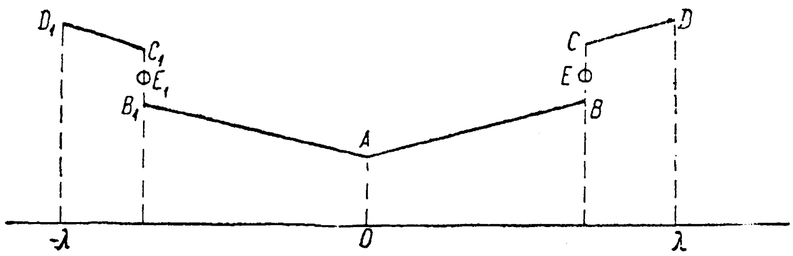
Сумма ряда представляет функцию периодическую, с периодом 2π для ф-лы (2) и с периодом $2l$ для остальных, таким образом, если линия $ABCD$ представляет заданную функцию в промежутке от $-l$ до $+l$, то ряд представляет эту функцию и ее периодические повторения, как представлено на чертеже (фиг. 41), причем в местах разрывов ряд представляет полусумму соответственных ординат.

Если бы промежуток NM обозначить через λ и, считая начало в точке N, принять эту функцию за четную и разложить ее в ряд по косинусам, т. е. по формуле

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{\lambda} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{\lambda} + \ldots + A_n \cos\frac{n\pi x}{\lambda} + \cdots$$

причем

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\lambda f(x)\,dx$$



Фиг. 42.

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\lambda f(x)\cos\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx$$

то сумма ряда представляется чертежом (фиг. 42), ибо этот ряд предполагает, что $f(-x) = f(x)$, когда $-\lambda < x < \lambda$.

Если же эту функцию принять за нечетную и разложить по формуле

$$f(x) = B_1 \sin\frac{\pi x}{\lambda} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{\lambda} + B_3 \sin\frac{3\pi x}{\lambda} + \cdots + B_n \sin\frac{n\pi x}{\lambda} + \cdots$$

причем

$$\Gamma_n = \frac{2}{\lambda}\int_0^\lambda f(x)\sin\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx$$

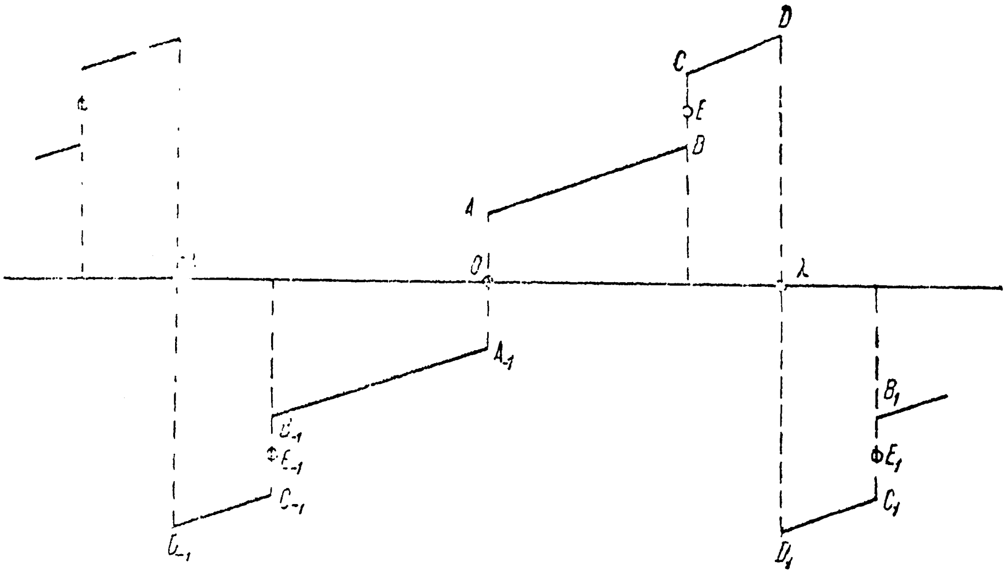
то сумма ряда представляется чертежом (фиг. 43), причем при абсциссах

$$0,\ \pm\lambda,\ \pm 2\lambda, \ldots$$

сумма ряда дает 0.

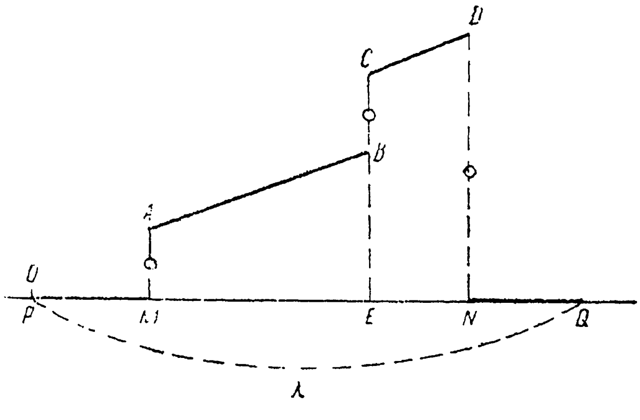
Отсюда видно, что тот же участок кривой $ABCD$ может быть представлен в различной форме.

Эту форму можно разнообразить на бесчисленное множество маneров,

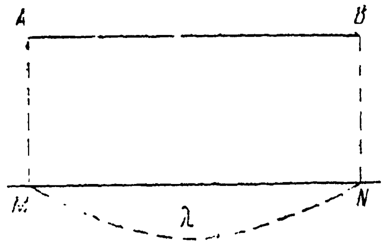


Фиг. 43.

принимая за $2l$ или за λ длину PQ, большую, нежели разность MN абсцисс точек A и D, например, как показано на чертеже (фиг. 44), и считая, что $f(x)=0$ от P до M и что $f(x)$ также равна нулю от N по Q.



Фиг. 44.



Фиг. 45.

Полученное разложение будет в промежутке от M до N представлять ординаты линии $ABCD$, при точках же M и N — лишь половины ординат AM и DN.

§ **49.** Покажем теперь несколько примеров разложения функций в тригонометрические ряды.

Пример 1. Функция $f(x)$ в промежутке MN представляется линией AB, т. е. имеет постоянное значение a; разложить ее в ряд по синусам, принимая M за начало и считая $MN = \lambda$ (фиг. 45):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k \sin \frac{k\pi x}{\lambda}$$

причем

$$B_k = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) \sin \frac{k\pi x}{\lambda}\, dx$$

В нашем случае для промежутка от $x = 0$ до $x = \lambda$ функция $f(x) = a$, следовательно,

$$B_k = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda a \sin \frac{k\pi x}{\lambda}\, dx = \frac{2a}{\lambda} \cdot \left[-\frac{\lambda}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{\lambda} \right]_0^\lambda = \frac{2a}{k\pi} [1 - \cos k\pi]$$

отсюда видно, что при k четном

$$B_k = 0$$

и при k нечетном

$$B_k = \frac{4a}{k\pi}$$

Итак,

$$B_{2p+1} = \frac{4a}{(2p+1)\pi}$$

$$B_{2p} = 0$$

и, следовательно, наше разложение будет

$$f(x) = \frac{4a}{\pi} \left[\frac{1}{1} \sin \frac{\pi x}{\lambda} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{\lambda} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{\lambda} + \cdots \right]$$

Отсюда следует, что при $0 < x < \lambda$ [так как $f(x) = a$]:

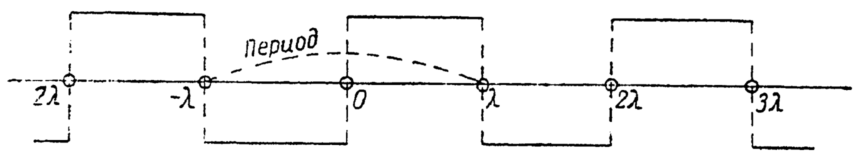
$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} \sin \frac{\pi x}{\lambda} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{\lambda} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{\lambda} + \cdots \qquad (19)$$

и в частном случае, например, при $x = \frac{1}{2}\lambda$ будет

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

При $x=\lambda$ и при $x=0$ сумма ряда представляет 0, а не a. При дальнейших значениях x сумма ряда представляет те значения, которые вытекает из периодичности и представляются на чертеже фиг. 46:

Пример 2. Функция $f(x)$ в промежутке от O до N равна x; принять длину ON за λ и разложить $f(x)$: 1) по синусам, 2) по косинусам. Изобразить графически ход функции, представляемой полученными разложениями.

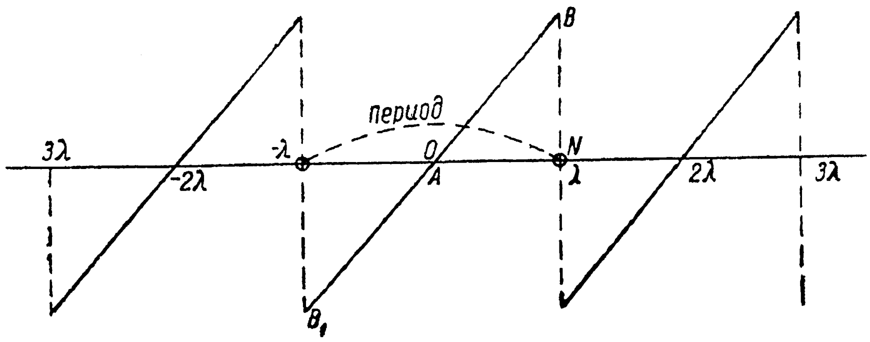


Фиг. 46.

Итак, в промежутке от $x=0$ до $x=\lambda$ функция $f(x)=x$, следовательно, будет

$$B_k=\frac{2}{\lambda}\int_0^\lambda x\sin\frac{k\pi x}{\lambda}\,dx=\frac{2}{\lambda}\left[-\frac{\lambda}{k\pi}x\cos\frac{k\pi x}{\lambda}+\frac{\lambda^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{\lambda}\right]_0^\lambda=$$

$$=-\frac{2\lambda}{\pi k}\cos k\pi=\frac{2\lambda}{\pi k}\cdot(-1)^{k+1}$$



Фиг. 47.

Таким образом имеем

$$f(x)=\frac{2\lambda}{\pi}\left[\frac{1}{1}\sin\frac{\pi x}{\lambda}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{\lambda}-\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi x}{\lambda}+\cdots\right]$$

причем в промежутке от $x=-\lambda$ до $x=+\lambda$ функция $f(x)=x$ при

$$x=\pm\lambda;\ \pm 2\lambda;\ \ldots f(x)=0$$

Ход функции представляется чертежом фиг. 47.

Для разложения по косинусам имеем

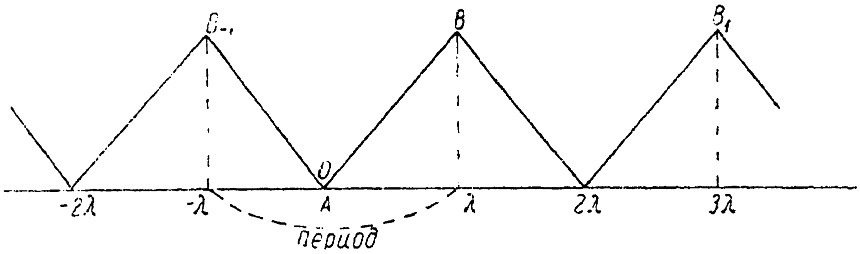
$$A_0 = \frac{2}{\lambda}\int_0^\lambda x\,dx = \frac{1}{2}\lambda$$

$$A_k = \frac{2}{\lambda}\int_0^\lambda x\cos\frac{k\pi x}{\lambda}\,dx = \frac{2}{\lambda}\left[\frac{\lambda}{k\pi}x\sin\frac{k\pi x}{\lambda} + \frac{\lambda^2}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{\lambda}\right]_0^\lambda =$$

$$= \frac{2\lambda}{k^2\pi^2}[\cos k\pi - 1]$$

следовательно,

$$A_{2p} = 0$$



Фиг. 48.

и

$$A_{2p+1} = \frac{-4\lambda}{(2p+1)^2\cdot\pi^2}$$

и, следовательно, будет

$$f(x) = \frac{1}{2}\lambda - \frac{4\lambda}{\pi^2}\left[\frac{1}{1}\cos\frac{\pi x}{\lambda} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{\lambda} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{\lambda} + \cdots\right]$$

Ход функции $f(x)$, которая в промежутке от $x=0$ до $x=\lambda$ равна x, представляется графически чертежом фиг. 48.

Таким образом имеем формулу, справедливую от 0 до λ:

$$x = \frac{1}{2}\lambda - \frac{4\lambda}{\pi^2}\left[\frac{1}{1}\cos\frac{\pi x}{\lambda} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{\lambda} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{\lambda} + \cdots\right] \qquad (20)$$

Если положить $x=0$, то получаем

$$0 = \frac{1}{2}\lambda - \frac{4\lambda}{\pi^2}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right]$$

откуда следует

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

известная формула, найденная Эйлером. Если сделать $x=\lambda$, то получим

$$\lambda=\frac{1}{2}\lambda+\frac{4\lambda}{\pi^2}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right]$$

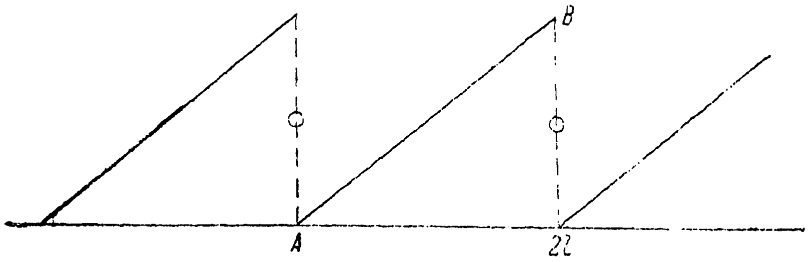
откуда следует то же самое значение вышеприведенной суммы.

Пример 3. Функция $f(x)$ задана в промежутке от $x=0$ до $x=2l$ и равна x.

Делая в ф-лах (13′) и (14′) $\alpha=0$ и полагая $F(x)=x$ в промежутке от 0 до $2l$, имеем

$$A_0=\frac{1}{2l}\int\limits_0^{2l} x\,dx=l$$

$$A_n=\frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} x\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{l}\left[\frac{l}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{l}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{l}\right]_0^{2l}=0$$



Фиг. 49.

$$B_n=\frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} x\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=$$

$$=\frac{1}{l}\left[-\frac{l}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{l}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_0^{2l}=-\frac{2l}{n\pi}$$

и, следовательно, разложение функции $F(x)$ будет

$$F(x)=l-\frac{2l}{\pi}\left[\frac{1}{1}\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{l}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l}+\cdots\right] \tag{21}$$

Ход этой функции, период коей есть $2l$ и которая в промежутке от 0 до $2l$ равна x, представляется чертежом фиг. 49; при $x=0$ и при $x=2l\ldots$ получается лишь половина соответствующих ординат, т. е. $F(0)=l$.

Пример 4. Функция $f(x)$ в промежутке от $x=0$ до $x=\lambda$ задана чертежом фиг. 50; представить эту функцию в виде ряда, расположенного: 1) по синусам, 2) по косинусам.

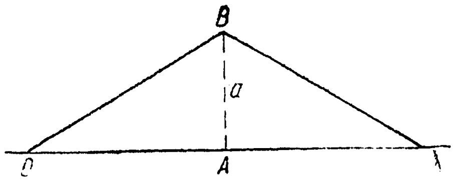
Как видно из чертежа, функция $f(x)$ определяется следующим образом.

В промежутке от $x=0$ до $x=\frac{\lambda}{2}\ldots f(x)=\frac{2ax}{\lambda}$

„ „ „ $x=\frac{\lambda}{2}$ „ $x=\lambda\ldots f(x)=2a-\frac{2ax}{\lambda}$

Значит,

$$B_n=\frac{2}{\lambda}\int\limits_0^\lambda f(x)\sin\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx=\frac{2}{\lambda}\int\limits_0^{\frac{\lambda}{2}}\frac{2ax}{\lambda}\sin\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx+$$



$$+\frac{2}{\lambda}\int\limits_{\frac{\lambda}{2}}^{\lambda}\left(2a-\frac{2ax}{\lambda}\right)\sin\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx$$

Фиг. 50.

$$\int\limits_0^{\frac{\lambda}{2}}\frac{x}{\lambda}\sin\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx=\left(-\frac{x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{\lambda}+\frac{\lambda}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{\lambda}\right)_0^{\frac{\lambda}{2}}=$$

$$=\frac{\lambda}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{\lambda}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$-\int\limits_{\frac{\lambda}{2}}^{\lambda}\frac{x}{\lambda}\sin\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx=-\left[-\frac{x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{\lambda}+\frac{\lambda}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{\lambda}\right]_{\frac{\lambda}{2}}^{\lambda}=$$

$$=\frac{\lambda}{n\pi}\cos n\pi+\frac{\lambda}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{\lambda}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$\int\limits_{\frac{\lambda}{2}}^{\lambda}\sin\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx=-\frac{\lambda}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi x}{\lambda}\right]_{\frac{\lambda}{2}}^{\lambda}=-\frac{\lambda}{n\pi}\cos n\pi+\frac{\lambda}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}$$

Сложив эти величины и умножив результат на $\frac{4a}{\lambda}$, получим

$$B_n=\frac{8a}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

что показывает: коэффициент $B_{2k}=0$ и

$$B_{2k+1}=\frac{8a}{(2k+1)^2\pi^2}\cdot\sin\frac{2k+1}{2}\cdot\pi=(-1)^k\cdot\frac{8a}{(2k+1)^2\pi^2}$$

и, следовательно, будет

$$f(x)=\frac{8a}{\pi^2}\left[\frac{1}{1}\sin\frac{\pi x}{\lambda}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{\lambda}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{\lambda}-\ldots\right]$$

Ход функции изображен на фиг. 51

Выполнить разложение по косинусам предлагается в виде задачи.

Пример 5. Функции $f(\theta)=\sin\mu\theta$, и $F(\theta)=\cos\mu\theta$ причем μ есть какое угодно не целое число. Разложить эти функции на промежутке от $(-\pi)$ до π в ряды.

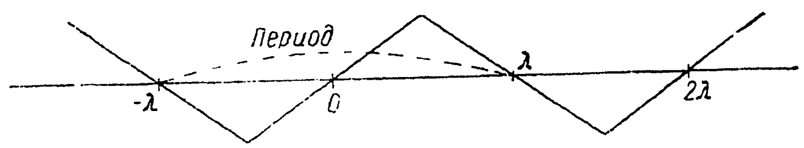
Так как предложенная функция $f(\theta)$ нечетная, то будем ее разлагать в ряд по синусам:

$$f(\theta)=B_1\sin\theta+B_2\sin 2\theta+\ldots B_n\sin n\theta+\ldots$$

причем

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\sin n\theta\, d\theta$$

В нашем случае будет



Фиг. 51.

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\mu\theta\sin n\theta\, d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[\cos(n-\mu)\theta-\cos(\mu+n)\theta]\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n-\mu}\sin(n-\mu)\theta-\frac{1}{n+\mu}\sin(n+\mu)\theta\right]_0^\pi=(-1)^{n+1}\frac{2n\sin\mu\pi}{\pi(n^2-\mu^2)}$$

и, следовательно, будет

$$\sin\mu\theta=\frac{2\sin\mu\pi}{\pi}\left[\frac{1}{1^2-\mu^2}\sin\theta-\frac{2}{2^2-\mu^2}\sin 2\theta+\frac{3}{3^2-\mu^2}\sin 3\theta-\ldots\right] \quad (22)$$

причем это уравнение имеет место для всех значений θ от. 0 до π, но не при $\theta=\pi$.

Функцию $F(\theta)=\cos\mu\theta$ разложим в ряд по косинусам, и получим

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos\mu\theta\, d\theta=+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\mu}[\sin\mu\theta]_0^\pi=\frac{1}{\pi\cdot\mu}\sin\mu\pi$$

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos\mu\theta\cos n\theta\, d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[\cos(n+\mu)\theta+\cos(n-\mu)]\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+\mu}\sin(n+\mu)\theta+\frac{1}{n-\mu}\sin(n-\mu)\theta\right]_0^\pi=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\cdot\frac{2\mu}{n^2-\mu^2}\sin\mu\pi$$

и, следовательно,

$$\cos\mu\theta=\frac{\sin\mu\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\mu}+\frac{2\mu}{1^2-\mu^2}\cos\theta-\frac{2\mu}{2^2-\mu^2}\cos 2\theta+\frac{2\mu}{3^2-\mu^2}\cos 3\theta+\ldots\right]$$

причем этот ряд имеет место и для $\theta=\pi$ и $\theta=-\pi$, ибо

$$\cos\mu\pi=\cos(-\mu\pi).$$

Делая $\theta=\pi$, получим

$$\operatorname{cotg}\mu\pi=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\mu}-\frac{2\mu}{1^2-\mu^2}-\frac{2\mu}{2^2-\mu^2}-\frac{2\mu}{3^2-\mu^2}-\ldots\right]$$

или иначе

$$\begin{aligned}\pi\operatorname{cotg}\mu\pi=\frac{1}{\mu}&-\frac{1}{1-\mu}+\frac{1}{1+\mu}-\\&-\frac{1}{2-\mu}+\frac{1}{2+\mu}-\\&-\frac{1}{3+\mu}+\frac{1}{3+\mu}-\ldots\end{aligned}$$

известное разложение $\operatorname{cotg}\mu\pi$ на частные дроби.

Точно так же, делая в ф-ле (22) $\theta=\frac{\pi}{2}$, заметив, что

$$\sin\mu\pi=2\sin\frac{\mu\pi}{2}\cdot\cos\frac{\mu\pi}{2}$$

получим

$$\frac{\pi}{2}\sec\frac{\mu\pi}{2}=\frac{2\cdot 1}{1-\mu^2}-\frac{2\cdot 3}{3^2-\mu^2}+\frac{2\cdot 5}{5^2-\mu^2}-\ldots$$

стоит в этой формуле положить $\frac{\mu\pi}{2}=z$, и получится разложение sec на частные дроби.

§ 50. * Относительно тригонометрических рядов доказаны следующие свойства:

1) Ряд вида

$$A_0+A_1\cos\theta+A_2\cos 2\theta+\ldots+A_n\cos n\theta+\ldots \qquad (*)$$

сходящийся, если только все коэффициенты положительные или переменно положительные и отрицательные и при возрастании значка n неограниченно убывают по абсолютной величине. В первом случае сходимость может нарушиться, если θ есть четное кратное π или $\theta=0$, а во втором случае, если θ нечетное кратное π. В самом деле обозначим через S_n сумму первых $(n+1)$ членов ряда (*), и положим сперва, что все коэффициенты положительны.

Умножив выражение S_n на $2\sin\frac{\theta}{2}$, имеем:

$$2S_n\sin\frac{\theta}{2}=\sum_{k=0}^{k=n}2A_k\cos k\theta\sin\frac{\theta}{2}=\sum_{k=0}^{k=n}A_k\left[\sin\frac{2k+1}{2}\theta-\sin\frac{2k-1}{2}\theta\right]$$

откуда

$$2(S_{n+p}-S_n)\sin\frac{\theta}{2}=\sum_{k=n+1}^{k=n+p}A_k\left[\sin\frac{2k+1}{2}\theta-\sin\frac{2k-1}{2}\theta\right]$$

или, написав сумму иначе, имеем:

$$-2(S_{n+p}-S_n)\sin\frac{\theta}{2}=A_{n+1}\sin\frac{2n+1}{2}\theta+(A_{n+2}-A_{n+1})\sin\frac{2n+3}{2}\theta+$$
$$+(A_{n+3}-A_{n+2})\sin\frac{2n+5}{2}\theta+\ldots+$$
$$+(A_{n+p}-A_{n+p-1})\sin\frac{2n+2p-1}{2}\theta-A_{n+p}\sin\frac{2n+2p+1}{2}\theta$$

Сравнивая эту сумму со следующей

$$\sigma_{n,p}=A_{n+1}+(A_{n+2}-A_{n+1})+(A_{n+3}-A_{n+2})+\ldots$$
$$\ldots+(A_{n+p}-A_{n+p-1})+A_{n+p}$$

все члены которой положительные, ибо A_n убывает по мере возрастания значка, и которая равна $2A_{n+p}$, мы можем написать:

$$2|S_{n+p}-S_n|\cdot\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\leqslant 2A_{n+p}$$

ибо мнижители $\sin\frac{2k-1}{2}\theta$ не больше 1 по абсолютной величине. Но при произвольном положительном p и при возрастании n величина A_{n+p} стремится к нулю, а потому, если θ отлично от нуля и четного кратного π, и величина $|S_{n+p}-S_n|$ стремится к нулю, т. е. ряд (*) сходится.

Когда коэффициенты A знакопеременные, то стоит положить

$$\theta=\pi-\varphi$$

и получится новый ряд, расположенный по косинусам углов, кратных φ и с коэффициентами знакопостоянными.

Совершенно также можно доказать сходимость ряда, расположенного по синусам

$$A_1\sin\theta+A_2\sin 2\theta+\ldots+A_n\sin n\theta+\ldots$$

при прежних предположениях о коэффициентах A_n. Такой ряд сходится при всех θ без исключения*.

2) Покажем теперь, что если функция $f(\theta)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то при разложении ее в тригонометрический ряд коэффициенты будут порядка по крайней мере $\frac{1}{n}$.

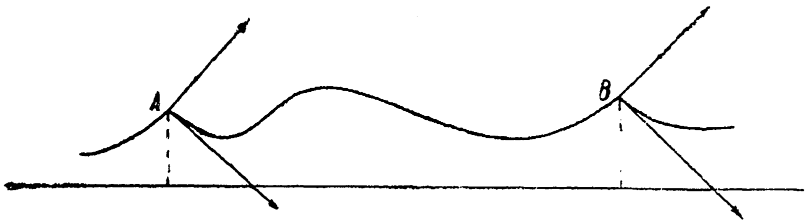
В самом деле,

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta$$

Так как функция $f(\theta)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то можно промежуток от $-\pi$ до $+\pi$ разбить на такие:

$$-\pi \text{ до } a_1; \quad \text{от } a_1 \text{ до } a_2; \ \ldots \ \text{от } a_k \text{ до } +\pi$$

в каждом из которых функция $f(\theta)$ будет изменяться в одну сторону, т. е. или все время возрастать, или все время убывать, или оставаться постоянной, и число k таких промежутков будет конечное.



Фиг. 52.

Возьмем один из этих промежутков: например от a_i до a_{i+1}, тогда соответствующая часть интеграла будет

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta$$

применяя к нему 2-ю теорему о средней, имеем

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta = f(a_i) \int_{a_i}^{\xi} \cos n\theta \, d\theta + f(a_{i+1}) \int_{\xi}^{a_{i+1}} \cos n\theta \, d\theta$$

значит,

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta = f(a_i) \frac{\sin n\xi - \sin n a_i}{n} + f(a_{i+1}) \frac{\sin n a_{i+1} - \sin n\xi}{n} = \frac{K_i}{n}$$

при K_i есть величина, которая остается ограниченной при возрастании n.

Отсюда следует

$$A_n = \frac{1}{\pi} [K_1 + K_2 + \ldots + K_k] \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{K}{n}$$

где величина K остается ограниченной при возрастании n, что и доказывает высказанную теорему.

Совершенно так же убедимся, что и коэффициенты B_n обладают этим свойством.

Примеры 1, 2, 3 представляют как раз такие ряды, где порядок коэффициентов есть $\frac{1}{n}$.

Положим теперь, что функция $f(\theta)$ периодическая с периодом 2π непрерывна и такова, что она имеет *производную*, удовлетворяющую условиям Дирихле на промежутке от $-\pi$ до π (фиг. 52). Тогда порядок коэффициентов будет не менее как $\frac{1}{n^2}$.

В самом деле,

$$\pi A_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta = \left[\frac{1}{n}\sin n\theta \cdot f(\theta)\right]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin n\theta f'(\theta)\, d\theta =$$

$$= -\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin n\theta f'(\theta)\, d\theta$$

последний же интеграл, как мы видели, порядка $\frac{1}{n}$, т. е. равен $\frac{K}{n}$, где K остается ограниченной при возрастании n, и, значит, A_n будет порядка $\frac{1}{n^2}$, т. е. вида $\frac{K}{n^2}$.

Коэффициент B_n определяется из равенства

$$\pi B_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta = \left[-\frac{1}{n} f(\theta)\cos n\theta\right]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos n\theta f'(\theta)\, d\theta$$

В силу периодичности $f(\theta)$ внеинтегральный член пропадет, и, следовательно,

$$\pi B_n = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos n\theta f'(\theta)\, d\theta = \frac{1}{n^2}\cdot K$$

в силу доказанного относительно A_n для функции $f'(\theta)$.

Предыдущую теорему, хотя и выражают обыкновенно в вышеуказанной форме, но проще ее выражать так: *Если представляемая рядом функция непрерывна между пределами $-\pi$ и $+\pi$ и имеет производную, удовлетворяющую условиям Дирихле, и притом $f(\pi)=f(-\pi)$, то коэффициенты A_n и B_n будут порядка $\frac{1}{n^2}$, т. е. при возрастании n произведения*

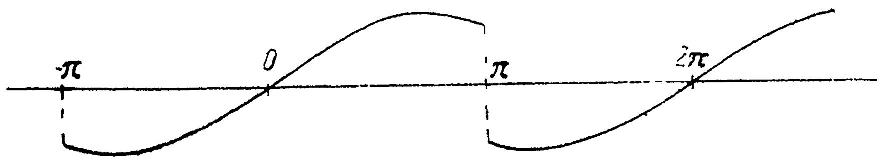
$$A_n \cdot n^2 \quad \text{и} \quad B_n \cdot n^2$$

будут конечные.

Нетрудно видеть, как это свойство обобщать далее и применять к разложениям от 0 до π, т. е. только по синусам и только по косинусам.

Пример 4 может служить для подтверждения этой теоремы. Точно так же пример 5 показывает, что при разложении функции

$$f(\theta)=\sin\mu\theta$$

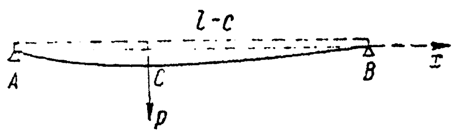


Фиг. 53.

ход которой показан на фиг. 53 [если $\mu<1$, так что $f(-\pi)$ не равна $f(+\pi)$], коэффициент

$$B_n=\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2n\cdot\sin\mu\pi}{\pi(n^2-\mu^2)}$$

— *первого* порядка по отношению к n, а не второго, хотя сама функция и непрерывна в заданных границах. Можно показать, что когда функция представлена тригонометрическим рядом, то этот ряд всегда можно интегрировать. Дифференцирование же не всегда допустимо.



Фиг. 54.

Так, например, интегрируя в пределах от 0 до λ ф-лы (19), мы получим ф-лу (20), что и предлагается проверить.

Задача. Форма, которую принимает упругая балка, подпертая в точках A и B, под нагрузкой P, приложенной в точке C, абсцисса которой есть $x=c$, определяется следующими двумя уравнениями:

$$\text{от } x=0 \text{ до } x=c\ldots z=\frac{P}{EJ}\cdot\frac{c(l-c)}{6l}\cdot\left[(2l-c)x-\frac{x^3}{c}\right]$$

$$\text{» } x=c \text{ » } x=l\ldots z=\frac{P}{EJ}\cdot\frac{c(l-c)}{6l}\cdot\left[(l+c)(l-x)-\frac{(l-x)^3}{l-c}\right]$$

где E и J — некоторые постоянные. Показать, что на *всем* протяжении от $x=0$ до $x=l$ величина z может быть представлена уравнением

$$z=\frac{2Pl^3}{EJ\cdot\pi^4}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^4}\sin\frac{k\pi c}{l}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}$$

§ **51.** Дадим еще одно любопытное приложение тригонометрических рядов к решению следующей задачи: *Какова вероятность того, что* *ошибка в сумме Σ, составленной из s слагаемых, в каждом из которых может быть с одинаковою вероятностью ошибка, равная одному из чисел ряда:*

$$-n;\ -(n-1);\ -(n-2);\ \ldots -2;\ -1;\ 0;\ +1;\ +2;\ \ldots +(n-1);\ +n \quad (*)$$

заключается между пределами $-h$ и $+h$, *причем* $h < ns$.

Для решения этой задачи Лаплас поступает следующим образом: он ищет сперва, какова вероятность того, что ошибка суммы Σ равна какому-нибудь заданному числу k, а затем берет сумму полученных вероятностей, давая k значения

$$-h;\ -(h-1);\ \ldots -2;\ -1;\ 0;\ +2;\ \ldots +h$$

Чтобы исчислить упомянутую вероятность $p(k)$, надо определить число всех равновозможных случаев и число случаев, благоприятствующих появлению в сумме Σ ошибки, равной k.

Очевидно, что число всех равновозможных случаев есть $(2n+1)^s$, число же благоприятствующих случаев есть то, сколькими способами число k может быть составлено из s слагаемых, взятых в ряду $(*)$, причем в числе этих слагаемых могут быть и равные между собою.

Когда числа n и s малые, то непосредственный счет числа этих случаев не представляет затруднений, но как только числа n или s становятся больше нескольких единиц, то непосредственный счет становится уже затруднительным, и Лаплас прибегает к следующему искусственному приему.

Возьмем многочлен

$$Q = x^{-n} + x^{-(n-1)} + x^{-(n-2)} + \ldots + x^{-1} + 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

возвышаем его в степень s, тогда получим новый многочлен, в котором наивысшая степень x будет x^{ns}, наинизшая x^{-ns}; возьмем в этом многочлене член, содержащий x^k, тогда коэффициент A_k, стоящий при этом члене, и покажет требуемое число способов составления числа k из указанных слагаемых.

Очевидно, что при x^{-k} будет тот же коэффициент A_k, так что многочлен Q^s будет состоять из членов вида

$$A_k(x^k + x^{-k})$$

Само собою разумеется, что коэффициент A_k не зависит от того или иного значения, приписываемого букве x, поэтому положим

$$x = e^{+\theta\sqrt{-1}}$$

тогда будет

$$Q = e^{-n\theta\sqrt{-1}} + e^{-(n-1)\theta\sqrt{-1}} + \ldots + e^{-\theta\sqrt{-1}} + 1 + e^{+\theta\sqrt{-1}}$$
$$+ e^{2\theta\sqrt{-1}} + \ldots + e^{n\theta\sqrt{-1}} =$$
$$= 1 + 2\cos\theta + 2\cos 2\theta + 2\cos 3\theta + \ldots + 2\cos n\theta$$

С другой стороны, будет

$$A_k(x^k + x^{-k}) = A_k(e^{-k\theta\sqrt{+1}} + e^{-k\theta\sqrt{-1}}) = 2A_k\cos k\theta$$

Таким образом должно иметь место равенство

$$(1 + 2\cos\theta + 2\cos 2\theta + \ldots + 2\cos n\theta)^s = 1 + 2\sum_{k=1}^{k=n} A_k \cos k\theta$$

Обозначая первую часть этого равенства через $f(\theta)$, видим, что коэффициент A_k выражается так:

$$A_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\cos k\theta\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos k\theta\, d\theta$$

Написав выражение $f(\theta)$ так:

$$f(\theta) = \left[e^{-n\theta\sqrt{-1}} + e^{-(n-1)\theta\sqrt{-1}} + \ldots + e^{-\theta\sqrt{-1}} + \ldots + e^{n\theta\sqrt{-1}}\right]^s$$

видим, что величина, стоящая в скобках, есть сумма геометрической прогрессии. Эта сумма равна

$$\frac{e^{-n\theta\sqrt{-1}} - e^{(n+1)\theta\sqrt{-1}}}{1 - e^{\theta\sqrt{-1}}} = \frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\sqrt{-1}} - e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\sqrt{-1}}}{e^{-\frac{\theta\sqrt{-1}}{2}} - e^{\frac{\theta\sqrt{-1}}{2}}} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

следовательно,

$$f(\theta) = \left[\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right]^s$$

и предыдущее выражение коэффициента A_k обращается в такое:

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right]^s \cos k\theta\, d\theta$$

и искомая вероятность $p(k)$ выразится так:

$$p(k)=\frac{A_k}{(2n+1)^s}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}}{(2n+1)\sin\frac{\theta}{2}}\right]^s\cos k\theta\, d\theta$$

* Нетрудно видеть, что при значительной величине s в этом интеграле имеют значения лишь элементы, соответствующие малым углам θ, при которых возвышаемое в степень s количество близко к единице. Положим для краткости письма

$$2n+1=m \qquad \frac{\theta}{2}=\varphi$$

При этом

$$\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}}{(2n+1)\sin\frac{\theta}{2}}\right]^s=\left(\frac{\sin m\varphi}{m\sin\varphi}\right)^s \tag{*}$$

и, разлагая по степеням φ, будем иметь при φ близких к нулю:

$$\left(\frac{\sin m\varphi}{m\sin\varphi}\right)^s=\left(\frac{m\varphi-\frac{m^3\varphi^3}{6}+\ldots}{m\varphi-\frac{m\varphi^3}{6}+\ldots}\right)^s=\left(1-\frac{m^2-1}{6}\varphi+\ldots\right)^s=$$

$$=1-\frac{(m^2-1)s}{6}\varphi+\ldots$$

Функция $e^{-\frac{(m^2-1)s}{6}\varphi^2}$ для больших s заметно отлична от нуля лишь при φ, близких к нулю, и имеет те же два первые члена разложения по степеням φ, что и функция (*). Заменяя в выражении $p(k)$ функцию (*) функцией $e^{-\frac{(m^2-1)s}{6}\varphi^2}$ и подставляя $\theta=2\varphi$, получим:

$$p(k)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{(m^2-1)s}{6}\varphi^2}\cos 2k\varphi\, d\varphi$$

При больших s мы можем, незначительно меняя результат, продолжить интегрирование до бесконечности и положить:

$$p(k)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{(m^2-1)s}{6}\varphi^2}\cos 2k\varphi\, d\varphi$$

Вводим вместо φ новую переменную интегрирования x, полагая

$$\sqrt{\frac{(m^2-1)s}{6}}\,\varphi = x$$

Подставляя $m=2n+1$ и вводя обозначение

$$q=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n(n+1)s}}$$

получим:

$$p(k)=\frac{q}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos kqx\,dx$$

Но

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos kqx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{k^2q^2}{4}}$$

и, следовательно,

$$p(k)=\frac{q}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{k^2q^2}{4}}$$

Найденная величина представляет вероятность того, что ошибка равна k. Чтобы найти вероятности того, что ошибка заключается между пределами $-h$ и $+h$, надо взять сумму

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=-h}^{+h}e^{-\frac{k^2q^2}{4}}\cdot\frac{q}{2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=-h}^{+h}e^{-\left(k\frac{q}{2}\right)^2}\cdot\frac{q}{2}$$

Когда k увеличивается на единицу, то выражение $t=k\frac{q}{2}$ увеличивается на $\frac{q}{2}$. Принимая во внимание множитель $\frac{q}{2}$, а также тот факт, что q мало при больших s, мы можем заменить написанную сумму интегралом, и получим, обозначая искомую вероятность через $P(h)$:

$$P(h)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-H}^{+H}e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^H e^{-t^2}dt*$$

причем

$$H=\frac{q}{2}h=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{n(n+1)s}}\cdot h$$

Для функции

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^H e^{-u^2}\,du = \Theta(H)$$

составлены таблицы, которые можно найти, например, в сочинении I. Bertrand „Calcul des probabilités", выдержка из которых приведена в главе VIII этого курса, можно также воспользоваться весьма подробными таблицами значения интеграла

$$\int_x^\infty e^{-t^2}\cdot dt$$

составленными акад. А. А. Марковым.

Так, например, положим, что надо найти, какова вероятность того, что при сложении ста чисел, в каждом из которых погрешность не превышает пяти единиц следующего за последним знака, погрешность в сумме не превзойдет пяти единиц последнего знака, т. е. пятидесяти единиц следующего. В этом случае можно было бы взять $n=5$, $s=100$ и $h=50$, тогда будет

$$\frac{\sqrt{6}\cdot h}{2\sqrt{n\cdot(n+1)\,s}} = \frac{\sqrt{6}\cdot 50}{2\sqrt{5\cdot 6\cdot 100}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1.118$$

по таблицам имеем

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1.118} e^{-u^2}\cdot du = 0{,}886$$

Очевидно, что можно было бы выражать погрешность в единицах второго знака, следующего за последним, т. е. брать $n=50$, $h=500$ и $s=100$, вообще можно было бы выражать погрешность в каких угодно долях, и тогда надо бы брать $n=5N$, $h=50N$ и $s=100$, и было бы

$$H = \frac{\sqrt{5}\cdot 50\cdot N}{2\sqrt{5N\cdot(5N+1)\cdot 100}}$$

что при неопределенном возрастании N приближается к

$$\frac{\sqrt{6}}{2} = 1.225$$

и искомая вероятность

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1.225} e^{-u^2}\cdot du = 0{,}917$$

Само собою разумеется, что в большей части случаев надо именно рассматривать, что погрешность может, заключаясь между двумя данными пределами, например $\pm$ пять единиц следующего за последним знака, принимать всякое значение, между ними лежащее, а не только значения

$$-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ -0,\ +1,\ +2,\ +3,\ +4,\ +5$$

и тогда надо поступать, как сейчас показано.

Этот пример показывает, насколько велика вероятность того, что при сложении большого числа приближенных чисел, округленных по обычному правилу, ошибки не накопляются, а, напротив, компенсируются.

§ **52. Формулы Фурье.** Фурье, который особенно развил теорию тригонометрических рядов, прилагая ее к разного рода вопросам математической физики, дал следующую формулу:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \cdot \cos\alpha(\theta - x) \cdot d\theta \tag{1}$$

* Для доказательства формулы Фурье предположим, что функция $f(x)$, определенная внутри промежутка $(-\infty, +\infty)$, подчиняется следующим требованиям: 1) в любом конечном промежутке она удовлетворяет условиям Дирихле; 2) она абсолютно интегрируема по бесконечному промежутку, т. е. интегралы

$$\int_{-\infty}^{0} |f(x)|\, dx \quad \text{и} \quad \int_{0}^{\infty} |f(x)|\, dx$$

имеют конечные значения. Мы будем доказывать формулу Фурье при указанных выше условиях. При этом в местах разрыва надо брать полусумму соответствующих пределов слева и справа, т. е. формула Фурье имеет вид

$$\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)] = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \cos\alpha(\theta - x)\, d\theta \tag{2}$$

Если x есть точка непрерывности $f(x)$, то

$$\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)] = f(x)$$

и мы получаем написанную выше формулу. В § 47 была доказана формула Дирихле

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{b} F(z) \frac{\sin\mu z}{z}\, dz = \frac{1}{2} F(+0)$$

причем считается, что $F(z)$ удовлетворяет условиям Дирихле на конечном промежутке от 0 до b. Для доказательства формулы Фурье надо показать, что

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \cos\alpha(\theta - x)\, d\theta = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)] \qquad (*)$$

В силу абсолютной интегрируемости $f(\theta)$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \cos\alpha(\theta - x)\, d\theta$$

сходится равномерно при всех вещественных α. Действительно, интегралы

$$\int_N^{N'} f(\theta) \cos\alpha\ (\theta - x)\, d\theta \text{ и } \int_{-N'}^{-N} f(\theta) \cos\alpha(\theta - x)\, d\theta \qquad (0 < N < N')$$

по абсолютной величине не превосходят интегралов

$$\int_{N'}^{N} |f(\theta)|\, d\theta \quad \text{и} \quad \int_{-N'}^{-N} |f(\theta)|\, d\theta \qquad (**)$$

которые не зависят от α, и для любого заданного положительного ε существует такое N_0, что при всех N и $N' > N_0$ интегралы (**) будут $< \varepsilon$. Равномерная сходимость указанного интеграла позволяет менять порядок интегрирования в повторном интеграле основной фврмулы (*), и мы можем написать, вводя специальное обозначение $V(\mu, x)$ для этого интеграла:

$$V(\mu, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \cos\alpha(\theta - x)\, d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\, d\theta \int_0^{\mu} \cos\alpha(\theta - x)\, d\alpha$$

Выполняя интегрирование по α во внутреннем интеграле правой части, получим

$$V(\mu, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \frac{\sin\mu(\theta - x)}{\theta - x}\, d\theta$$

Разбив промежуток интегрирования $(-\infty, +\infty)$ на два промежутка $(-\infty, x)$ и $(x, +\infty)$ и вводя вместо $\theta - x$ переменную $(-z)$ в первом и z во втором промежутке, получим:

$$V(\mu, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x - z) \frac{\sin\mu z}{z}\, dz + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x + z) \frac{\sin\mu z}{z}\, dz$$

Оба написанные интеграла суть интегралы того же вида, что и интеграл, входящий в формулу Дирихле, при чем для первого из них $F_1(z)=f(x-z)$ и для второго $F_2(z)=f(x+z)$. Осложнением является тот факт, что промежуток интегрирования для них бесконечен. Пользуясь указанными выше условиями, которым удовлетворяет $f(x)$, нетрудно показать, что несмотря на бесконечность промежутка интегрирования для обоих интегралов — имеет место обычная формула Дирихле, причем $F_1(+0)=f(x-0)$ и $F_2(+0)=f(x+0)$, т. е.

$$\lim_{\mu=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x-z)\frac{\sin\mu z}{z}dz=\frac{1}{2}f(x-0)$$

$$\lim_{\mu=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x+z)\frac{\sin\mu z}{z}dz=\frac{1}{2}f(x+0) \qquad (***)$$

Из этих формул и написанного выражения $V(\mu, z)$ и следует непосредственно основная формула (*). Докажем первую из формул (***). При $z>1$ функция $\frac{\sin\mu z}{z}$ при любом вещественном μ по абсолютной величине <1, а функция $f(x-z)$ по условию абсолютно интегрируема по промежутку $(0, \infty)$. Поэтому при любом заданном положительном ε существует такое число N, большее единицы, что при всяком μ:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_N^\infty f(x-z)\frac{\sin\mu z}{z}dz\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_N^\infty |f(x-z)|\,dz<\varepsilon$$

Интеграл Дирихле

$$\frac{1}{\pi}\int_0^N f(x-z)\frac{\sin\mu z}{z}dz$$

на конечном промежутке стремится к $\frac{1}{2}f(x-0)$ при бесконечном возрастании μ, и, следовательно, при всех достаточно больших μ мы будем иметь:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^N f(x-z)\frac{\sin\mu z}{z}dz-\frac{1}{2}f(x-0)\right|<\varepsilon$$

Далее мы можем, очевидно, написать:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x-z)\frac{\sin\mu z}{z}dz-\frac{1}{2}f(x-0)=\frac{1}{\pi}\int_N^\infty f(x-z)\frac{\sin\mu z}{z}dz+$$

$$+\left[\frac{1}{\pi}\int_0^N f(x-z)\frac{\sin\mu z}{z}dz-\frac{1}{2}f(x-0)\right]$$

Принимая во внимание предыдущие неравенства, получим при всех достаточно больших μ:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x-z)\frac{\sin\mu z}{z}\,dz-\frac{1}{2}f(x-0)\right|<\left|\frac{1}{\pi}\int_N^\infty f(x-z)\frac{\sin\mu z}{z}\,dz\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{\pi}\int_0^N f(x-z)\frac{\sin\mu z}{z}\,dz-\frac{1}{2}f(x-0)\right|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

откуда, в силу произвольности ε, и следует первая из формул (***). Вторая доказывается совершенно так же, и таким образом формула Фурье доказана при указанных выше ограничениях*.

Формулу Фурье (2) пишут иногда и так:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{\infty-}^{+\infty}f(\theta)\cos\alpha(\theta-x)\,d\theta \tag{3}$$

что, очевидно, равносильно (2), ибо функция $\cos\alpha(\theta-x)$ четная.

Так как $\sin\alpha(\theta-x)$ нечетная функция от α, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(\theta)\sin\alpha(\theta-x)\,d\theta=0 \tag{*}$$

если написанный интеграл существует, ибо все элементы его попарно уничтожаются.

Умножив ф-лу (*) на $\sqrt{-1}$ и сложив с (3), получим в силу равенства

$$e^{\alpha(\theta-x)\sqrt{-1}}=\cos\alpha(\theta-x)+\sqrt{-1}\sin\alpha(\theta-x)$$

формулу Фурье для непрерывной функции в таком виде:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(\theta)\,e^{\alpha(\theta-x)\sqrt{-1}}\,d\theta$$

или

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\theta)\,e^{\alpha(\theta-x)\sqrt{-1}}\,d\alpha\,d\theta \tag{4}$$

Формула Фурье обобщается на сколько угодно переменных. В самом деле, положим, что функция $f(x)$ содержит, кроме x, еще какую-нибудь букву y, которую рассматриваем как произвольный параметр, так что можно писать

$$f(x)=f(x,\,y)$$

тогда имеем

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\theta, y)\, e^{\alpha(\theta-x)\sqrt{-1}}\, d\alpha\, d\theta$$

Но рассматривая в выражении $f(\theta, y)$ букву θ как параметр, по той же формуле Фурье имеем

$$f(\theta, y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\theta, y)\, e^{\beta(\varphi-y)\sqrt{-1}}\, d\beta\, d\varphi$$

и, подставляя, получим

$$f(x, y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\overline{\iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty}} f(\theta, \varphi)\, e^{[\alpha(\theta-x)+\beta(\varphi-y)]\sqrt{-1}}\, d\alpha\, d\beta\, d\theta d\varphi \tag{5}$$

Отсюда обобщение на произвольное число переменных следует само собою.

Если функция $f(x)$ четная, так что

$$f(-x)=f(x)$$

то, написав ф-лу (2) в таком виде:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\cos\alpha\theta\cos\alpha x\, d\theta+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} d\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\sin\alpha\theta\sin\alpha x\, d\theta$$

видим, что интеграл, заключающий множитель $\sin\alpha\theta$, будет равен нулю, как интеграл от нечетной функции, элементы коего попарно уничтожаются, и эта формула принимает вид

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} d\alpha\int\limits_{0}^{\infty} f(\theta)\cos\alpha\theta\cos\alpha x\, d\theta \tag{6}$$

Эту формулу можно применять и для всякой функции, но только для *положительных* x, так как при выводе ее предположено, что для отрицательных значений x:

$$f(-x)=f(x)$$

Точно так же, если $f(-x)=-f(x)$ и $f(0)=0$, то интеграл, содержащий множитель $\cos\alpha\theta$, будет равен нулю, и у нас останется

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} d\alpha\int\limits_{0}^{\infty} f(\theta)\sin\alpha\theta\sin\alpha x\, dx \tag{7}$$

Формула Фурье имеет много приложений в вопросах математической физики о распространении тепла, электричества, света, звука.

§ **53.** Во многих прикладных вопросах электротехники, теории девиации компасов и пр. встречается надобность разлагать в тригонометрический ряд функцию, или заданную графически, или для которой известен лишь ряд частных значений, соответствующих различным значениям аргумента на протяжении целого периода.

Обыкновенно эти значения бывают равноотстоящие.

Итак положим, что для функции $y=f(x)$, период которой равен l, известны значения

$$Y_0, Y_1, Y_2, \dots Y_{n-1}$$

соответствующие значениям

$$0; \frac{l}{n}; \quad 2\frac{l}{n}; \quad 3\frac{l}{n}; \dots (n-1)\frac{l}{n}$$

переменной независимой x, число которых n удобнее брать четным.

Мы видели, что функция y может быть представлена в виде ряда

$$y=A_0+A_1\cos\frac{2\pi x}{l}+A_2\cos\frac{4\pi x}{l}+A_3\cos\frac{6\pi x}{l}+\dots$$

$$\dots+B_1\sin\frac{2\pi x}{l}+B_2\sin+\frac{4\pi x}{l}+B_3\sin\frac{6\pi x}{l}+\dots$$

или если положить

$$\frac{2\pi x}{l}=\theta$$

то будет

$$y=A_0+A_1\cos\theta+A_2\cos 2\theta+A_3\cos 3\theta+\dots$$
$$\dots+B_1\sin\theta+B_2\sin 2\theta+B_3\sin 3\theta+\dots$$

Обыкновенно бывает достаточно знать в этом ряду лишь небольшое число первых его членов, например до аргумента 3θ или 4θ.

В этом случае каждое из известных значений функции дает возможность написать соответствующее ему уравнение, система которых и послужит для определения неизвестных коэффициентов $A_0, A_1, \dots B_1, B_2, \dots$

Число таких уравнений бывает обыкновенно гораздо больше числа неизвестных, и для решения их применяют так называемый „способ наименьших квадратов“, который изложен в главе VIII этого курса, составляя по этому способу по данной системе уравнений новую систему „нормальных уравнений“, в которой число уравнений уже равно числу неизвестных.

Правило составления „нормальных уравнений“ состоит в том, что каждое уравнение предложенной системы умножается на находящийся в нем коэффициент при первой неизвестной и все полученные таким образом уравнения складываются, получается первое уравнение нормальной системы, совершенно так же для получения второго нормального уравнения умножают каждое из уравнений предложенной системы на находящийся в нем коэффициент при второй неизвестной и складывают полученные таким образом уравнения. Точно так же поступают и по отношению к каждой из неизвестных. Применим этот способ к нашему случаю, ограничиваясь для простоты писания лишь членами до 3θ в нашем ряду.

Система, служащая для определения неизвестных

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ B_1,\ B_2,\ B_3$$

при обозначении $\frac{2\pi}{n}$ через α будет

$$\theta=0;\quad Y_0=A_0+A_1+A_2+A_3$$

$$\theta=\alpha;\quad Y_1=A_0+A_1\cos\alpha+A_2\cos 2\alpha+A_3\cos 3\alpha+B_1\sin\alpha+B_2\sin 2\alpha+ \\ +B_3\sin 3\alpha$$

$$\theta=2\alpha;\quad Y_2=A_0+A_1\cos 2\alpha+A_2\cos 4\alpha+A_3\cos 6\alpha+B_1\sin 2\alpha+B_2\sin 4\alpha+ \\ +B_3\sin 6\alpha$$

. . . .

$$\theta=i\alpha;\quad Y_i=A_0+A_1\cos i\alpha+A_2\cos 2i\alpha+A_3\cos 3i\alpha+B_1\sin i\alpha+B_2\sin 2i\alpha+ \\ +B_3\sin 3i\alpha$$

. . . .

$$\theta=(n-1)\alpha;\quad Y_{n-1}=A_0+A_1\cos(n-1)\alpha+A_2\cos 2(n-1)\alpha+ \\ +A_3\cos 3(n-1)\alpha+B_1\sin(n-1)\alpha+B_2\sin 2(n-1)\alpha+B_3\sin 3(n-1)\alpha$$

Соответствующая нормальная система будет

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} Y_i=nA_0+A_1\sum_{i=0}^{i=n-1}\cos i\alpha+A_2\sum_{i=0}^{i=n-1}\cos 2i\alpha+\ldots+B_3\sum_{i=0}^{i=n-1}\sin 3i\alpha$$

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} Y_i\cos i\alpha=A_0\sum_{i=0}^{i=n-1}\cos i\alpha+A_1\sum_{i=0}^{i=n-1}\cos^2 i\alpha+A_2\sum_{i=0}^{i=n-1}\cos i\alpha\cos 2i\alpha+\ldots \\ \ldots+B_3\sum_{i=0}^{i=n-1}\cos i\alpha\sin 3i\alpha$$

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} Y_i\cos 2i\alpha=A_0\sum_{i=0}^{i=n-1}\cos 2i\alpha+A_1\sum_{i=0}^{i=n-1}\cos 2i\alpha\cos i\alpha+A_2\sum_{i=0}^{i=n-1}\cos^2 2i\alpha+\ldots \\ \ldots+B_3\sum_{i=0}^{i=n-1}\cos 2i\alpha\sin 3i\alpha$$

. . . .

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} Y_i \sin 3i\alpha = A_0 \sum_{i=0}^{i=n-1} \sin 3i\alpha + A_1 \sum_{i=1}^{i=n-1} \sin 3i\alpha \cos i\alpha + \ldots$$

$$\ldots + B_3 \sum_{i=0}^{i=n-1} \sin^2 3i\alpha$$

Нетрудно видеть, что эти уравнения могут быть значительно упрощены, если воспользоваться тем обстоятельством, что стоящие под знаком сумм значения аргументов возрастают в арифметической прогрессии и обходят один или несколько раз целую окружность: именно, каждое уравнение будет содержать только одну неизвестную, так как все суммы, в него входящие, кроме одной, будут равны нулю.

В самом деле, возьмем например, сумму

$$S_1 = \sum_{i=0}^{i=n-1} \cos i\alpha = 1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos(n-1)\alpha$$

причем $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

Имеем следующий ряд равенств:

$$\begin{aligned}
2\sin\alpha &= 2\sin\alpha \\
2\cos\alpha \cdot \sin\alpha &= \sin 2\alpha \\
2\cos 2\alpha \cdot \sin\alpha &= \sin 3\alpha - \sin\alpha \\
2\cos 3\alpha \cdot \sin\alpha &= \sin 4\alpha - \sin 2\alpha \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
2\cos(n-2)\alpha \sin\alpha &= \sin(n-1)\alpha - \sin(n-3)\alpha \\
2\cos(n-1)\alpha \sin\alpha &= \sin n\alpha - \sin(n-2)\alpha
\end{aligned}$$

сложив которые имеем

$$2 \cdot S_1 \sin\alpha = \sin\alpha + \sin(n-1)\alpha + \sin n\alpha$$

а так как $n\alpha = 2\pi$, то будет

$$\sin\alpha + \sin(n-1)\alpha + \sin n\alpha = \sin\alpha + \sin(2\pi - \alpha) + \sin 2\pi = 0$$

откуда следует

$$S_1 = 0$$

Совершенно так же увидим, что и такие суммы, как

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \sin i\alpha = 0; \quad \sum_{i=0}^{i=n-1} \sin 2i\alpha = 0; \quad \sum_{i=0}^{i=n-1} \cos 2i\alpha = 0 \ldots$$

Что же касается, например, суммы такого вида:

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \cos i\alpha \cos 2i\alpha$$

то так как

$$2 \cos i\alpha \cdot \cos 2i\alpha = \cos 3i\alpha + \cos i\alpha$$

то будет

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \cos i\alpha \cos 2i\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{i=n-1} \cos 3i\alpha + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{i=n-1} \cos i\alpha = 0$$

Таким образом останутся только суммы

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \cos^2 i\alpha; \quad \sum_{i=0}^{i=n-1} \cos^2 2\alpha; \quad \sum_{i=0}^{i=n-1} \cos^2 3i\alpha$$

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \sin^2 i\alpha; \quad \sum_{i=0}^{i=n-1} \sin^2 2i\alpha; \quad \sum_{i=0}^{i=n-1} \sin^2 3i\alpha$$

Легко показать, что каждая из этих сумм равна $\frac{n}{2}$. В самом деле, имеем

$$2 \cos^2 i\alpha = 1 + \cos 2i\alpha$$

Значит,

$$2 \sum_{i=0}^{i=n-1} \cos^2 i\alpha = \sum_{i=0}^{i=n-1} (1 + \cos 2i\alpha) = n + \sum_{i=0}^{i=n-1} \cos 2i\alpha = n$$

Точно так же

$$2 \sin^2 i\alpha = 1 - \cos 2i\alpha$$

Значит,

$$2 \sum_{i=0}^{i=n-1} \sin^2 i\alpha = \sum_{i=0}^{i=n-1} (1 - \cos 2i\alpha) = n - \sum_{i=0}^{i=n-1} \cos 2i\alpha = n$$

Совершенно так же найдем и остальные суммы.

Таким образом, нормальная система уравнений будет

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} Y_i = nA_0$$

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} Y_i \cos i\alpha = \frac{n}{2} A_1$$

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} Y_i \cos 2i\alpha = \frac{n}{2} A_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} Y_i \sin 3i\alpha = \frac{n}{2} B_3$$

Откуда и найдутся величины коэффициентов

$$A_0,\ A_1,\ \ldots\ B_3$$

§ **54.** Тригонометрические ряды являются в приложениях как решения некоторых вопросов математической физики, и часто нужно бывает знать не только самую величину, представленную таким рядом, но и ее производные различных порядков. Так, например, в вопросе об изгибе и колебании балок получаемая в виде тригонометрического ряда величина есть прогиб z в каждой точке балки, для расчетов же прочности ее надо знать изгибающий момент в каждой точке и срезывающее усилие. Первая из этих величин выражается через вторую производную, вторая — через третью производную z.

Переходя затем к численным вычислениям, мы можем встретиться с такого рода обстоятельствами: сама величина z представляется рядом, быстро сходящимся, а ее производные — рядами, столь медленно сходящимися, что пришлось бы брать огромное число членов для получения достаточной степени точности.

Следующий прием часто дает возможность упростить вычисления, усилив быстроту сходимости ряда; для этого его стараются разложить на сумму нескольких других рядов, причем те из них, которые сходятся медленно, суммируются непосредственно.

Поясним сказанное сперва на частном примере.

Пусть, например, дан ряд

$$S = \frac{\cos\varphi}{1+\alpha^2} - \frac{3\cos 3\varphi}{9+\alpha^2} + \frac{5\cos 5\varphi}{25+\alpha^2} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{(2n+1)\cos(2n+1)\varphi}{(2n+1)^2+\alpha^2} + \cdots$$

и положим, что $\alpha = 1$ и надо вычислить его сумму, т. е.

$$S_1 = \frac{\cos\varphi}{1+1} - \frac{3}{9+1}\cos 3\varphi + \frac{5}{25+1}\cos 5\varphi + \cdots +$$

$$+ (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{(2n+1)^2+1}\cos(2n+1)\varphi + \cdots$$

ряд этот будет медленно сходящийся, но если мы обратим внимание на следующую формулу:

$$\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \frac{1}{5}\cos 5\varphi + \cdots +$$

$$+ (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)\varphi + \cdots = \begin{cases} \frac{\pi}{4}\left(0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}\right) \\ -\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \pi\right) \end{cases}$$

то будем иметь

$$\pm\frac{\pi}{4} - S_1 = \frac{1}{1+1}\cos\varphi - \frac{1}{3(9+1)}\cos 3\varphi + \frac{1}{5(25+1)}\cos 5\varphi + \cdots +$$

$$+ (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)[(2n+1)^2+1]}\cos(2n+1)\varphi \cdots$$

и понятно, что предложенный ряд сходится столь же медленно, как ряд коего общий член есть $\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$, преобразованный же — как ряд, коего общий член есть $\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$, т. е. гораздо быстрее, и ясно, что получение численной величины $\pm\frac{\pi}{4} - S_1$ и, затем, по ней величины S_1 может быть выполнено гораздо проще, нежели непосредственное вычисление величины S_1 по ряду, представляющему ее.

§ **55.** Чтобы пользоваться подобного рода преобразованиями, необходимо иметь таблицу сумм некоторых наиболее замечательных и наиболее часто встречающихся рядов, которые все получаются из следующих двух разложений:

$$\operatorname{arctg}\frac{x\sin\varphi}{1 - x\cos\varphi} = \frac{x}{1}\sin\varphi + \frac{x^2}{2}\sin 2\varphi + \frac{x^3}{3}\sin 3\varphi + \cdots \tag{1}$$

$$-\frac{1}{2}\lg(1 - 2x\cos\varphi + x^2) = \frac{x}{1}\cos\varphi + \frac{x^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{x^3}{3}\cos 3\varphi + \cdots \tag{2}$$

Чтобы вывести эти формулы, можно поступить так: обозначим через u и v суммы

$$u = \frac{x}{1}\cos\varphi + \frac{x^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{x^3}{3}\cos 3\varphi + \cdots$$

$$v = \frac{x}{1}\sin\varphi + \frac{x^2}{2}\sin 2\varphi + \frac{x^3}{3}\sin 3\varphi + \cdots$$

тогда будем иметь

$$u + v\sqrt{-1} = \frac{x}{1}e^{\varphi\sqrt{-1}} + \frac{x^2}{2}e^{2\varphi\sqrt{-1}} + \frac{x^3}{3}e^{3\varphi\sqrt{-1}} + \cdots =$$

$$= \frac{xe^{\varphi\sqrt{-1}}}{1} + \frac{\left(xe^{\varphi\sqrt{-1}}\right)^2}{2} + \frac{\left(xe^{\varphi\sqrt{-1}}\right)^3}{3} + \cdots$$

Замечая же разложение

$$\lg(1-z) = -\frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \ldots$$

имеем

$$u + v\sqrt{-1} = -\lg\left[1 - xe^{\varphi\sqrt{-1}}\right] = -\lg\left[1 - x(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)\right]$$

Откуда следует

$$e^{-(u+v\sqrt{-1})} = e^{-u}(\cos v - \sqrt{-1}\sin v) = (1 - x\cos\varphi) - \sqrt{-1}\cdot x\sin\varphi$$

Следовательно,

$$e^{-u}\cos v = 1 - x\cos\varphi$$
$$e^{-u}\sin v = x\sin\varphi$$

или иначе

$$\operatorname{tg} v = \frac{x\sin\varphi}{1 - x\cos\varphi}$$

$$e^{-2u} = (1 - x\cos\varphi)^2 + x^2\sin^2\varphi = 1 - 2x\cos\varphi + x^2$$

следовательно,

$$v = \operatorname{arctg}\frac{x\sin\varphi}{1 - x\cos\varphi}$$

$$u = -\frac{1}{2}\lg(1 - 2x\cos\varphi + x^2)$$

т. е. те две формулы, которые мы имели в виду доказать.

Положив в ф-лах (1) и (2) $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ и написав затем вновь вместо буквы θ букву φ, получим

$$\operatorname{arctg}\frac{x\cos\varphi}{1 - x\sin\varphi} = \frac{x}{1}\cos\varphi + \frac{1}{2}x^2\sin 2\varphi - \frac{x^3}{3}\cos 3\varphi - \frac{x^4}{4}\sin 4\varphi +$$
$$+ \frac{x^5}{5}\cos 5\varphi + \cdots$$

$$-\frac{1}{2}\lg(1 - 2x\sin\varphi + x^2) = \frac{x}{1}\sin\varphi - \frac{x^2}{2}\cos 2\varphi - \frac{x^3}{3}\sin 3\varphi +$$
$$+ \frac{x^4}{4}\cos 4\varphi + \frac{x^5}{5}\sin 5\varphi - \cdots$$

Затем, заменив x на $-x$, получим

$$x\sin\varphi + \frac{1}{2}x^2\cos 2\varphi - \frac{1}{3}x^3\sin 3\varphi - \frac{1}{4}x^4\cos 4\varphi + \frac{1}{5}x^5\sin 5\varphi + \cdots =$$
$$= \frac{1}{2}(1 + 2x\sin\varphi + x^2)$$

$$x\cos\varphi - \frac{1}{2}x^2\sin 2\varphi - \frac{1}{3}x^3\cos 3\varphi + \frac{1}{4}x^4\sin 4\varphi + \frac{1}{5}x^5\cos 5\varphi - \cdots =$$
$$= \operatorname{arctg}\frac{x\cos\varphi}{1+x\sin\varphi}$$

Эти четыре соотношения, по соединении попарно, дадут

$$x\sin\varphi - \frac{1}{3}x^3\sin 3\varphi + \frac{1}{5}x^5\sin 5\varphi - \cdots = \frac{1}{4}\lg\frac{1+2x\sin\varphi+x^2}{1-2x\sin\varphi+x^2}$$
$$x\cos\varphi - \frac{1}{3}x^3\cos 3\varphi + \frac{1}{5}x^5\cos 5\varphi - \cdots = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x\cos\varphi}{1-x^2}$$

Затем, заменив φ на $\frac{\pi}{2}-\varphi$, имеем

$$x\cos\varphi + \frac{1}{3}x^3\cos 3\varphi + \frac{1}{5}x^5\cos 5\varphi + \cdots = \frac{1}{4}\lg\frac{1+2x\cos\varphi+x^2}{1-2x\cos\varphi+x^2}$$
$$x\sin\varphi + \frac{1}{3}x^3\sin 3\varphi + \frac{1}{5}x^5\sin 5\varphi + \cdots = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x\sin\varphi}{1-x^2}$$

Таким образом имеем систему формул

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}\cos n\varphi = -\frac{1}{2}\lg(1-2x\cos\varphi+x^2) \tag{A}$$

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}\sin n\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x\sin\varphi}{1-x\cos\varphi} \tag{B}$$

$$\sum_0^\infty \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)\varphi = \frac{1}{4}\lg\frac{1+2x\cos\varphi+x^2}{1-2x\cos\varphi+x^2} \tag{C}$$

$$\sum_0^\infty \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\sin(2n+1)\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x\sin\varphi}{1-x^2} \tag{D}$$

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x\cos\varphi}{1-x^2} \tag{E}$$

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\sin(2n+1)\varphi = \frac{1}{4}\lg\frac{1+2x\sin\varphi+x^2}{1-2x\sin\varphi+x^2} \tag{F}$$

Ряды $A, \cdots F$, сходящиеся при x^2 меньшем 1, остаются сходящимися и при $x=\pm 1$. Таким образом получаем формулы

$$\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \cdots = -\lg\left(2\sin\frac{1}{2}\varphi\right) \tag{3}$$

$$\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi + \cdots = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \tag{4}$$

$$\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \frac{1}{5}\cos 5\varphi + \cdots = \frac{1}{2}\lg\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi \tag{5}$$

$$\sin\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi + \frac{1}{5}\sin 5\varphi + \cdots = \frac{\pi}{4} \tag{6}$$

$$\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \frac{1}{5}\cos 5\varphi - \cdots = \begin{matrix} \frac{\pi}{4} \text{ при } 0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{4} \text{ при } \frac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \pi \end{matrix} \tag{7}$$

$$\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin 3\varphi + \frac{1}{5}\sin 5\varphi - \cdots = \frac{1}{2}\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \tag{8}$$

$$\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi - \cdots = \lg\left(2\cos\frac{1}{2}\varphi\right) \tag{9}$$

$$\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \cdots = \frac{1}{2}\varphi \tag{10}$$

Ф-лы (4), (6), (7), (10) легко получить непосредственным разложением в тригонометрические ряды по правилам § 43, и они имеют место при всяких значениях угла φ, заключенных между 0 и π.

Пользоваться этими разложениями надо сообразно тому, как показано в приведенном выше примере, т. е. надо выбрать то разложение, которое содержит синусы или косинусы тех же дуг, как и предложенный ряд, и у которого знаки коэффициентов чередуются так же, как у предложенного ряда: умножив затем общий член этого разложения на неопределенный множитель, придают его к общему члену предложенного ряда и, после приведения коэффициента к простейшему виду, получают его в виде дроби, числитель которой будет некоторой функцией нумера члена n и будет содержать сказанный неопределенный множитель. Этим множителем распоряжаются затем так, чтобы в числителе пропал член с высшею степенью буквы n.

Если при этом окажется, что упомянутый множитель имеет *постоянную* (независимую от n) величину, то преобразование и достигает своей цели.

§ **56.** Рассмотрим теперь, каков вообще будет порядок относительно $\frac{1}{n}$ коэффициентов ряда Фурье при разложении разного рода функций.

Мы знаем, что если

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

то коэффициенты a_n и b_n выражаются формулами

$$\pi a_n = \int_0^{2\pi} f(\xi)\cos n\xi\, d\xi$$

$$\pi b_n = \int_0^{2\pi} f(\xi)\sin n\xi\, d\xi$$

Положим, что функция $f(x)$ в промежутке от 0 до 2π имеет производные, но как сама функция, так и ее производные допускают конечное число разрывов первого рода в упомянутом промежутке. Пусть $k_1, k_2, \ldots k_p$ места разрыва $f(x)$.

Тогда мы можем, написав равенство

$$\pi a_n = \int_0^{k_1} f(\xi)\cos n\xi d\xi + \int_{k_1}^{k_2} f(\xi)\cos n\xi d\xi + \ldots + \int_{k_p}^{2\pi} f(\xi)\cos n\xi d\xi$$

выполнить интегрирование по частям, после чего имеем

$$\pi a_n = \left[\frac{\sin n\xi}{n} f(\xi)\right]_0^{k_1} + \left[\frac{\sin n\xi}{n} f(\xi)\right]_{k_1}^{k_2} + \cdots +$$

$$+ \left[\frac{\sin n\xi}{n} f(\xi)\right]_{k_p}^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{k_1} f'(\xi)\sin n\xi d\xi - \frac{1}{n}\int_{k_1}^{k_2} f'(\xi)\sin n\xi d\xi - \ldots -$$

$$-\frac{1}{n}\int_{k_p}^{2\pi} f'(\xi)\sin n\xi d\xi$$

и, пользуясь обозначением

$$\lim_{\varepsilon=0} f(k+\varepsilon) = f(k+0)$$

и $\qquad\qquad (\varepsilon > 0)$

$$\lim_{\varepsilon=0} f(k-\varepsilon) = f(k-0)$$

получим

$$\pi a_n = \frac{A_n}{n} - \frac{\pi b'_n}{n}$$

где

$$A_n = \sin nk_1[f(k_1-0) - f(k_1+0)] + \sin nk_2[f(k_2-0) - f(k_2+0)] +$$
$$+ \ldots + \sin nk_p[f(k_p-0) - f(k_p+0)]$$

величина же b_n' есть коэффициент при $\sin nx$ в разложении функции, составленной из производных $f'(x)$ так же, как сама функция $f(x)$ составлена из значений $f(x)$, заданных в вышеупомянутых промежутках.

Совершенно так же получим

$$\pi b_n = \frac{B_n}{n} + \frac{\pi a'_n}{n}$$

где

$$B_n = -[-f(+0) + \cos nk_1[f(k_1-0) - f(k_1+0)] +$$
$$+ \cos nk_2[f(k_2-0) - f(k_2+0)] + \ldots + f(2\pi - 0)]$$

величина же a_n' есть коэффициент при $\cos nx$ в вышеупомянутом разложении функции, составленной из $f'(x)$.

Совершенно так же будем иметь

$$\pi a'_n = \frac{A'_n}{n} - \frac{\pi b_n''}{n}$$

где $k_1', k_2', \ldots k_q'$ суть места разрыва $f'(x)$,

$$\begin{aligned} A'_n = [\sin nk_1 [f'(k_1' - 0) - f'(k_1' + 0)] + \\ + \sin nk_2' [f'(k_2' - 0) - f'(k_2' + 0)] + \ldots + \\ + \sin nk_p' [f(k_q' - 0) - f(k_q' + 0)]] \end{aligned}$$

и b_n'' есть коэффициент при $\sin nx$ в разложении функции, составленной из значений $f''(x)$ для каждого из вышеуказанных промежутков.

Точно так же

$$\pi b_n' = \frac{B'_n}{n} + \frac{\pi a_n''}{n}$$

где

$$\begin{aligned} B'_n = [-f'(+0) + \cos nk_1' [f'(k_1' - 0) - f'(k_1' + 0)] + \ldots + \\ + f'(2\pi - 0)] \end{aligned}$$

и a_n'' есть коэффициент при $\cos nx$ в разложении функции, составленной из значений $f''(x)$.

Таким образом будет

$$\pi a_n = \frac{A_n}{n} - \frac{B'_n}{n^2} - \frac{a_n''}{n^2}$$

$$\pi b_n = \frac{B_n}{n} + \frac{A'_n}{n^2} - \frac{b''}{n^2}$$

следовательно, чтобы полученный ряд Фурье был *абсолютно* сходящимся, достаточно, чтобы при всяком n было

$$A_n = 0 \text{ и } B_n = 0]$$

ибо при этом условии полученный ряд будет иметь коэффициенты второго порядка относительно $\frac{1}{n^2}$ и абсолютная величина его членов будет меньше членов ряда

$$\frac{c}{1} + \frac{c}{2^2} + \frac{c}{3^2} + \ldots + \frac{c}{n^2} + \ldots$$

где c — некоторая постоянная, а тогда этот ряд будет не только абсолютно, но и *равномерно* сходящимся.

Но мы будем иметь $A_n = B_n = 0$, если выполнены условия

$$\begin{aligned} f(k_1 - 0) &= f(k_1 + 0) \\ f(k_2 - 0) &= f(k_2 + 0) \\ &\dots\dots\dots \\ f(k_p - 0) &= f(k_p + 0) \\ f(2\pi - 0) &= f(+0) \end{aligned}$$

Таким образом, видим, что *ряд Фурье, представляющий непрерывную функцию в промежутке от* 0 *до* 2π *и такую, что* $f(0) = f(2\pi)$, *будет абсолютно и равномерно сходящийся. При этом предполагалось также, что* $f(x)$ *имеет конечные производные* $f'(x)$ и $f''(x)$ — *непрерывные или с конечным числом разрывов первого рода.*

Если функция, представляемая рядом Фурье, или имеет разрывы непрерывности в промежутке от 0 до 2π, или значения ее, соответствующие 0 и 2π, между собою не равны, то коэффициенты в разложении будут *первого* порядка относительно $\frac{1}{n}$.

§ **57.** Полученные в предыдущем параграфе выражения показывают, что коэффициенты при $\frac{1}{n}$ в составе величин a_n и b_n зависят только от величины скачков в значениях функции $f(x)$ в местах разрывов; поэтому, если функцию $f(x)$ представить в виде

$$f(x) = F(x) + \varphi(x)$$

и выбрать функцию $F(x)$ так, чтобы она имела те же скачки, как и $f(x)$, то разность $\varphi(x) = f(x) - F(x)$ представится таким рядом Фурье, порядок коэффициентов которого будет не ниже второго.

Наоборот, если дано разложение некоторой функции в ряд Фурье, то ясно, что, при нахождении суммы этого ряда или при приближенном представлении этой функции, первыми членами ряда, вообще говоря, можно взять, для достижения одной и той же степени точности, тем меньшее число членов, чем их порядок относительно $\frac{1}{n}$ выше.

Оказывается, что такое выделение функции $F(x)$ возможно всегда выполнить таким образом, что остаток $\varphi(x)$ представится рядом Фурье, коэффициенты которого будут сколь угодно высокого порядка относительно $\frac{1}{n}$.

Покажем теперь общий прием такого выделения.

Мы видели, что в разложении функции $f(x)$, заданной от 0 до 2π в ряд вида

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

коэффициенты a_n и b_n выражаются так:

$$\pi a_n = \int_0^{2\pi} f(\xi)\cos n\xi d\xi$$

и

$$\pi b_n = \int_0^{2\pi} f(\xi)\sin(n\xi)\, d\xi$$

Воспользовавшись общею формулою интегрирования по частям

$$\int uv^{(k)}\,dx = uv^{(k-1)} - u' v^{(k-2)} + u'' v^{(k-3)} - u''' v^{(k-4)} + \ldots \pm$$

$$\pm u^{(p-1)} v^{(k-p)} \mp \int u^{(p)} v^{(k-p)} dx$$

получим, останавливаясь, для краткости письма, на членах $\frac{1}{n^4}$:

$$\int f(\xi)\cos n\xi\, d\xi = \frac{1}{n} f(\xi)\sin n\xi + \frac{1}{n^2} f'(\xi)\cos n\xi - \frac{1}{n^3} f''(\xi)\sin n\xi -$$

$$- \frac{1}{n^4} \cos n\xi f'''(\xi) + \frac{1}{n^4} \int f^{\mathrm{IV}}(\xi)\cos n\xi\, d\xi$$

$$\int f(\xi)\sin n\xi\, d\xi = -\frac{1}{n} f(\xi)\cos n\xi + \frac{1}{n^2} f'(\xi)\sin n\xi - \frac{1}{n^3} f''(\xi)\cos n\xi -$$

$$- \frac{1}{n^4} \sin n\xi f'''(\xi) + \frac{1}{n^4} \int f^{\mathrm{IV}}(\xi)\sin n\xi\, d\xi$$

Обозначая затем через $k_1, k_2, k_3, \ldots k_p$ места разрывов функции $f(x)$ между пределами 0 и 2π, через $k_1', k_2', \ldots k_q'$ — места разрывов функции $f'(x)$, т. е. места разрывов производных тех функций, из совокупности коих для отдельных промежутков функция $f(x)$ составлена, через $k_1'', k_2'', \ldots k_r''$ — то же для функции $f''(x)$ и т. д., получим

$$\begin{aligned} n\pi a_n &= A_n + \frac{A_{1n}}{n} - \frac{A_{2n}}{n^2} - \frac{A_{3n}}{n^3} + \frac{A_{4n}}{n^4} - \frac{a_n^{\mathrm{V}}}{n^4} \\ n\pi b_n &= -B_n + \frac{B_{1n}}{n} + \frac{B_{2n}}{n^2} - \frac{B_{3n}}{n^3} - \frac{B_{4n}}{n^4} - \frac{b_n^{\mathrm{V}}}{n^4} \end{aligned} \qquad (1)$$

где

$$A_n = [f(k_1 - 0) - f(k_1 + 0)]\sin nk_1 + [f(k_2 - 0) - f(k_2 + 0)]\sin nk_2 +$$
$$+ \ldots + [f(k_p - 0) - f(k_p + 0)]\sin nk_p$$
$$A_{1n} = f'(2\pi - 0) - f'(+0) + [f'(k_1' - 0) - f'(k_1' + 0)]\cos nk' + \ldots +$$
$$+ [f'(k_q' - 0) - f'(k_q' + 0)]\cos nk_q'$$
$$-A_2 = [f''(k_1'' - 0) - f''(k_1'' + 0)]\sin nk_1'' + \ldots +$$
$$+ [f''(k_r'' - 0) - f''(k_r'' + 0)]\sin nk_r''$$

. . . .

$$-B_n = f(2\pi - 0) - f(+0) + [f(k_1 - 0) - f(k_1 + 0)]\cos nk_1 + \ldots +$$
$$+ [f(k_1 - 0) - f(k_p + 0)]\cos nk_p$$
$$B_1 = [f'(k_1' - 0) - f'(k_1' + 0)]\sin nk' +$$
$$+ \ldots + [f'(k_q' - 0) - f'(k_q' + 0)]\sin nk_q'$$
$$B_{2n} = [f''(2\pi - 0) - f''(+0)] + [f''(k_1'' - 0) - f''(k_1'' + 0)]\cos nk_1'' +$$
$$+ \ldots + [f''(k_r'' - 0) - f''(k_r'' + 0)]\cos nk_r''$$

. . . .

a_n^{V} и b_n^{V} обозначают коэффициенты в разложении $f^{\mathrm{V}}(x)$ по косинусам и синусам.

Полагая

$$\begin{array}{ll} f(2\pi - 0) - f(+0) = K_0; & f'(2\pi - 0) - f'(+0) = K_0' \\ f(k_1 - 0) - f(k_1 + 0) = K_1; & f'(k_1' - 0) - f'(k_1' + 0) = K_1' \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ f(k_p - 0) - f(k_p + 0) = K_p; & f'(k_q' - 0) - f'(k_q' + 0) = K_q' \end{array}$$
$$f''(2\pi - 0) - f''(+0) = K_0''$$
$$f''(k_1'' - 0) - f''(k_1' + 0) = K_1'' \qquad (*)$$

. . . .

$$f''(k_r'' - 0) - f''(k_r'' + 0) = K_r''$$

мы можем предыдущие формулы написать так:

$$A_n = K_1 \sin nk_1 + K_2 \sin nk_2 + \ldots + K_p \sin nk_p$$
$$A_{1n} = K_0' + K_1' \cos nk_1' + K_2' \cos nk_2' + \ldots + K_q' \cos nk_q'$$
$$-A_{2n} = K_1'' \sin nk_1'' + K_2'' \sin nk_2'' + \ldots + K_r'' \sin nk_r''$$

. . . .

$$-B_n = K_0 + K_1 \cos nk_1 + K_2 \cos nk_2 + \ldots + K_p \cos nk_p$$
$$B_{1n} = K_1' \sin nk_1' + K_2' \sin nk_2' + \ldots + K_q' \sin nk_q'$$
$$B_{2n} = K_0'' + K_1'' \cos nk_1'' + K_2'' \cos nk_2'' + \ldots + K_r'' \cos nk_r''$$

. . . .

Ф-лы (1) и (2) показывают, что в разложении коэффициентов a_n и b_n в ряды, расположенные по степеням $\frac{1}{n}$, коэффициенты A_n и B_n при первой степени $\frac{1}{n}$ зависят только от мест разрывов и величины скачков самой функции $f(x)$, коэффициенты A_{1n} и B_{1n} при $\frac{1}{n^2}$ зависят только от мест разрывов и величины скачков первой производной $f'(x)$ той функции, которая данным рядом Фурье представляется, коэффициенты A_{2n} и B_{2n} при $\frac{1}{n^3}$ зависят только от мест разрывов и величины скачков второй производной $f''(x)$ и т. д.

Отсюда видно, что если желательно, например, выделить функцию $F(x)$ в выражении

$$f(x) = F(x) + \varphi(x) \qquad (3)$$

так, чтобы ряд Фурье, представляющий функцию $\varphi(x)$, имел бы коэффициент порядка j относительно $\frac{1}{n}$, то надо, определив места разрывов функции $f(x)$ и первых ее $j-1$ производных, составить функцию $F(x)$ из отдельных кусков прямых линий и параболических кривых, уравнения коих:

$$y = \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1$$
$$y = \alpha_2 x^3 + \beta_2 x^2 + \gamma_2 x + \delta$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y = a_{j-2} x^{j-1} + \beta_{j-2} x^{j-2} + \ldots + \lambda$$

определенных так, чтобы величины скачков и места разрывов функции $f_1(x)$ и первых ее $j-1$ производных были как раз те же самые, как и найденные для заданной рядом функции $f(x)$.

Самый процесс такого нахождения функции $F(x)$ выполняется в следующей постепенности: прежде всего находим места разрывов и величины скачков самой функции $f(x)$, т. е. величины

$$k_1, k_2, \ldots k_p \text{ и } K_0, K_1, K_2, \ldots K_p$$

воспользовавшись для этого ф-лами (2) и (1), которые должны иметь место тождественно, т. е. при всяком значении n. Сделав затем в предложенном ряде x равным $0, k_1, k_2, \ldots k_p$, вычисляем соответствующие значения суммы этого ряда. На основаниии теоремы Дирихле эти значения будут

$$\frac{1}{2}[f(2\pi - 0) + f(+0)]$$
$$\frac{1}{2}[f(k_1 - 0) + f(k_1 + 0)]$$
$$\frac{1}{2}[f(k_2 - 0) + f(k_2 + 0)]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{2}[f(k_p - 0) + f(k_p + 0)]$$

а так как

$$f(2\pi - 0) - f(+0) = K_0$$
$$f(k_1 - 0) - f(k_1 + 0) = K_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(k_p - 0) - f(k_p + 0) = K_p$$

и величины $K_0, K_1, \ldots K_p$ уже найдены, то найдутся и значения

$f(+0)$ и $f(2\pi - 0)$; $f(k_1 - 0)$ и $f(k_1 + 0)$; . . : $f(k_p - 0)$ и $f(k_p + 0)$

Наносим эти значения на график и проводим через соответствующие точки прямые линии, тогда функция $F_1(x)$, составленная из этих прямолинейных участков, и будет такою, которая имеет те же разрывы, те же скачки и те же самые значения в местах разрывов и при $x=0$ и при $x=2\pi$, как и предложенная $f(x)$. Иными словами, функция $F_1(x)$ определяется так:

$$
\begin{aligned}
&F_1(x)=f(+0)+\frac{x}{k_1}\cdot f(k_1-0) && \text{для}\quad 0<x<k_1 \\
&F_1(x)=f(k_1+0)+\frac{x-k_1}{k_2-k_1}[f(k_2-0)-f(k_1+0)] && \text{для}\quad k_1<x<k_2 \\
&F_1(x)=f(k_2+0)+\frac{x-k_2}{k_3-k_2}[f(k_3-0)-f(k_2+0)] && \text{для}\quad k_2<x<k_3 \qquad (4) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&F_1(x)=f(k_p+0)+\frac{x-k_p}{2\pi-k_p}[f(2\pi-0)-f(k_p+0)] && \text{для}\quad k_p<x<2\pi
\end{aligned}
$$

Если взять

$$F(x)=F_1(x)$$

т. е. положить

$$f(x)=F_1(x)+\varphi_1(x)$$

то функция

$$\varphi_1(x)=f(x)-F_1(x)$$

будет непрерывна на всем протяжении от $x=0$ до $x=2\pi$, и вместе с тем будет

$$\varphi_1(0)=0 \text{ и } \varphi_1(2\pi)=0$$

следовательно, при разложении в ряд Фурье функции $\varphi_1(x)$, коэффициенты получаются по меньшей мере второго порядка относительно $\frac{1}{n}$.

Отсюда видно, что стоит только разложить функцию $F_1(x)$ в ряд Фурье и полученное разложение вычесть из заданного, остаток и будет функцией

$$\varphi_1(x)$$

Пусть полученный таким образом ряд для

$$\varphi_1(x)=f(x)-F_1(x)$$

будет

$$\varphi_1(x)=c_0+\sum_{n=1}^{n=\infty} c_n\cos nx+\sum_{n=1}^{n=\infty} d_n\sin nx \qquad (5)$$

коэффициенты c_n и d_n будут, вообще говоря, второго порядка относительно $\frac{1}{n}$; значит, функцию $\varphi_1(x)$ можно дифференцировать почленно.

Выполнив это дифференцирование, получим разложение $\varphi_1'(x)$, в коем коэффициенты будут первого порядка относительно $\frac{1}{n}$.

Совершенно подобно предыдущему представляем $\varphi_1'(x)$ в виде

$$\varphi_1'(x) = \psi_1(x) + \omega_1(x) \tag{6}$$

так, чтобы функция $\psi_1(x)$ состояла из прямолинейных отрезков и имела те же самые скачки и те же места разрывов, как и $\varphi_1'(x)$; тогда функция $\omega_1(x)$ будет представляться рядом, коего коэффициенты — второго порядка относительно $\frac{1}{n}$.

Интегрируя равенство (6), получим функцию

$$\varphi_1(x) = \int \psi_1(x)\,dx + \int \omega_1(x)\,dx$$

При вычислении интеграла

$$\int \psi_1(x)\,dx$$

обнаруживается, что вместо прямолинейного отрезка $ax+b$ получится соответствующая ему парабола

$$\frac{1}{2}ax^2 + bx + C$$

Постоянные произвольные C, вводимые таким интегрированием определятся из того условия, что функция $\varphi_1(x)$ непрерывна, и частные ее значения, соответствующие местам разрывов функции $\psi_1(x)$, найдутся по ф-ле (5).

Интеграл же

$$\int \omega_1(x)\,dx$$

будет представлен рядом, коего коэффициенты третьего порядка относительно $\frac{1}{n}$.

Полагая

$$\int \psi_1(x)\,dx = F_2(x) \quad \text{и} \quad \int \omega_1(x)\,dx = \varphi_2(x)$$

получим равенство

$$f(x) = F_1(x) + F_2(x) + \varphi_2(x)$$

Очевидно, что если взять

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

то в равенстве

$$f(x) = F(x) + \varphi_2(x)$$

ряд, представляющий функцию $\varphi_2(x)$, будет иметь коэффициенты третьего порядка относительно $\frac{1}{n}$, разрывная же функция $F(x)$, заданная чертежом или аналитически, для отдельных промежутков будет состоять из прямолинейных отрезков и отрезков парабол.

Функцию $\varphi_2(x)$ продифференцируем дважды; тогда ряд, представляющий $\varphi_2''(x)$, будет иметь коэффициенты первого порядка; определив места разрывов и величины скачков функции $\varphi_2''(x)$ и составив функцию $\psi_2(x)$ из прямолинейных отрезков так, чтобы она имела те же места разрывов и те же скачки, как и $\varphi_2''(x)$, делаем

$$\varphi_2''(x) = \psi_2(x) + \omega_2(x)$$

Это равенство интегрируем два раза под ряд почленно, причем постоянные произвольные определяем по частным значениям функции $\varphi_2(x)$ и ее производной; получим выражение вида

$$\varphi_2(x) = F_3(x) + \varphi_3(x)$$

в котором $\varphi_3(x)$ будет представлена рядом с коэффициентами четвертого порядка относительно $\frac{1}{n}$. Продолжая таким образом, можем, очевидно, дойти до любого порядка.

Заметим, что из тех же выражений следует, что если функция $f(x)$ составлена из отдельных частей, каждая из которых есть целая функция относительно x, то коэффициенты a_n и b_n будут целыми функциями от $\frac{1}{n}$, степени коих не более как *единицею* выше, нежели наивысшая степень x.

Так, например, если бы $f(x)$ была задана условиями

$$f(x) = ax + b \quad \text{для } x \text{ от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{4} \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(x) = x^2 \quad \text{для } x \text{ от } \frac{\pi}{4} \text{ до } \frac{\pi}{2} \qquad \left(\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = 0 \quad \text{для } x \text{ от } \frac{\pi}{2} \text{ до } 2\pi \qquad \left(\frac{\pi}{2} < x < 2\pi\right)$$

то коэффициенты a_n и b_n были бы вида

$$\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + \frac{\gamma}{n^3}$$

Применяя вышеописанный процесс, мы получили бы $\varphi_3(x) = 0$ на всем протяжении от $x = 0$ до $x = 2\pi$ и, значит, по данному разложению нашли бы и самое функцию $f(x)$.

Возьмем, например, ряд

$$S_1 = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots$$

который, как мы видели, сходящийся для всех значений x между 0 и 2π. При $x=0$ и при $x=2\pi$ величина $S_1=0$.

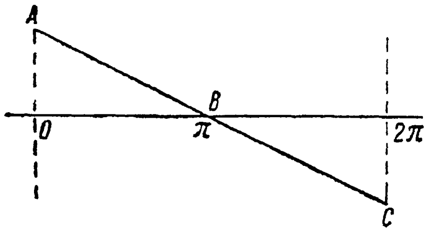
Имеем

$$n\pi a_n = 0 = K_1 \sin nk_1 + K_2 \sin nk_2 + \ldots$$
$$n\pi b_n = \pi = -[K_0 + K_1 \cos nk_1 + \ldots]$$

Из второго уравнения следует

$$K_0 = f(2\pi - 0) - f(+0) = -\pi; \qquad K_1 = K_2, \ldots = 0$$

Следовательно, функция $f(x)$ в промежутке от $x=0$ до $x=2\pi$ мест разрыва не имеет, но разность значений $f(2\pi - - 0) - f(+0) = -\pi$.



Фиг. 55.

Так как, при $x=\pi$, $f(x)=0$, то если мы возьмем за функцию $F_1(x)$ участок прямой, проходящий через точки A, B и C, то функция (фиг. 55)

$$\varphi(x) = f(x) - F_1(x)$$

не будет иметь разрывов, и так как $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$, то разложение $\varphi(x)$ может иметь только коэффициенты второго порядка относительно $\frac{1}{n}$.

Итак, функция

$$F_1(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

для

$$0 \leqslant x \leqslant 2\pi;$$

составив ее разложение, увидим, что

$$F_1(x) = f(x)$$

и что $\varphi(x) = 0$.

Необходимо иметь в виду, что во всех этих рассуждениях предполагается, что сама функция $f(x)$ и ее производные до рассматриваемого порядка $j-1$ остаются конечными для всех значений x между 0 и 2π, включая и эти пределы, поэтому, если бы мы взяли ряд

$$f(x) = \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos x}{2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n} + \ldots$$

то для этого ряда наши рассуждения были бы неприменимы, ибо, при $x=0$ и $x=2\pi$, $f(x)=\infty$, и, значит, формулы, коими мы пользовались, не применимы.

§ **58.** В приложениях гораздо чаще встречаются ряды, расположенные или только по синусам, или только по косинусам аргументов, кратных $\frac{\pi x}{l}$, предполагая, что функция $f(x)$ задана от $x=0$ до $x=l$.

В этом случае коэффициенты разложений

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

и

$$f(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

выражаются формулами

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)\,d\xi$$

и

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\cdot d\xi \qquad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\cdot d\xi$$

Поступая совершенно подобно предыдущему, получим

$$\begin{aligned}\frac{n\pi a_n}{2}&= A_n+\frac{l}{\pi}\cdot\frac{A_{1n}}{n}-\frac{l^2}{\pi^2}\cdot\frac{A_{2n}}{n^2}-\frac{l^3}{\pi^3}\cdot\frac{A_{3n}}{n^3}+\ldots\\ \frac{n\pi b_n}{2}&=-B_n+\frac{l}{\pi}\cdot\frac{B_{1n}}{n}+\frac{l^2}{\pi^2}\cdot\frac{B_{2n}}{n^2}-\frac{l^3}{\pi^3}\cdot\frac{B_{3n}}{n^3}-\ldots\end{aligned} \tag{7}$$

причем

$$A_n=[f(k_1-0)-f(k_1+0)]\sin\frac{n\pi k_1}{l}+\ldots+$$
$$+[f(k_p-0)-f(k_p+0)]\sin\frac{n\pi k_p}{l}$$

$$A_{1n}=f'(l-0)\cos n\pi-f'(+0)+[f'(k'-0)-f'(k'+0)]\cos\frac{n\pi k'}{l}+$$
$$+\ldots+[f'(k_q'-0)-f'(k_q+0)]\cos\frac{n\pi k_q}{l}$$

$$-A_{2n}=[f''(k_1''-0)-f''(k_1''+0)]\sin\frac{n\pi k_1''}{l}+\ldots+$$
$$+[f''(k_r''-0)-f''(k_r''+0)]\sin\frac{n\pi k_r''}{l}$$

. . . .

$$-B_n = f(l-0)\cos n\pi - f(+0) + [f(k_1-0) - f(k_1+0)]\cos\frac{n\pi k_1}{l} + \ldots$$

$$+ \ldots + [f(k_p-0) - f(k_p+0)]\sin\frac{n\pi k_p}{l}$$

$$B_{1n} = [f'(k_1'-0) - f'(k_1'+0)]\sin\frac{n\pi k_1'}{l} +$$

$$+ [f'(k_2'-0) - f'(k_2'+0)]\sin\frac{n\pi k_2'}{l} + \ldots$$

$$B_{2n} = f''(l-0)\cos n\pi - f''(+0) +$$

$$+ [f''(k_1''-0) - f''(k_1''+0)]\cos\frac{n\pi k_1''}{l} + \ldots$$

. . . .

Полагая, подобно тому как в § 63,

$$K_0 = f(l-0)\cos n\pi - f(+0); \quad K_0' = f'(l-0) - f'(+0)$$
$$K_1 = f(k_1-0) - f(k_1+0); \quad K_1' = f'(k'_1-0) - f'(k_1'+0)$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$
$$K_p = f(k_p-0) - f(k_p+0); \quad K_q' = f'(k_q'-0) - f'(k_q'+0)$$

мы предыдущие формулы напишем таким образом:

$$\left.\begin{aligned}
A_n &= K_0'\sin\frac{n\pi k_1}{l} + K_2\sin\frac{n\pi k_2}{l} + \ldots + K_p\sin\frac{n\pi k_p}{l}\\
A_{1n} &= K_0' + K_1'\cos\frac{n\pi k_1'}{l} + \ldots + K_q'\cos\frac{n\pi k_q'}{l}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-B_n &= K_n + K_1\cos\frac{n\pi k_1}{l} + K_2\cos\frac{n\pi k_2}{l} + \ldots + K_p\cos\frac{n\pi k_p}{l}\\
B_{1n} &= K_1'\sin\frac{n\pi k_1'}{l} + K_2'\sin\frac{n\pi k_2'}{l} + \ldots + K_q'\sin\frac{n\pi k_q'}{l}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

В остальном надо поступать совершенно так, как сказано выше. Так, положим, что дан ряд, представляющий функцию $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

заданную в пределах от $x=0$ до $x=l$. Пусть эта функция изображается чертежом (фиг. 56).

Так как в пределах между 0 и l эта функция имеет разрывы при $x=k_1$, $x=k_2$, $x=k_3$, соответственно равные

$$K_1 = AB = f(k_1+0) - f(k_1-0); \quad K_2 = CD = f(k_2+0) - f(k_2-0)$$
$$-EF = -K_3 = f(k_3-0) - f(k_3+0)$$

то составим, определив величину и места этих разрывов, функцию $F'_1(x)$, которая была бы такова:

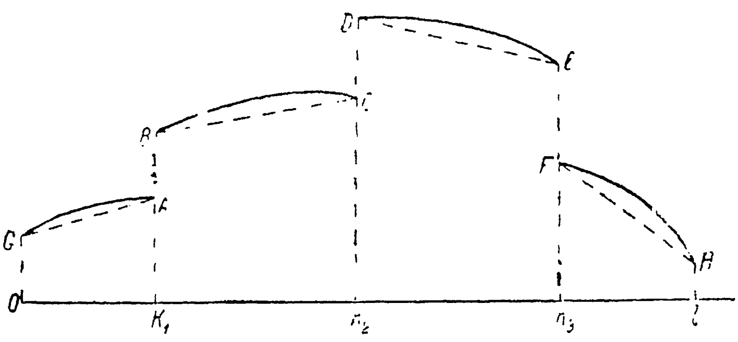
$$F_1(x) = f(+0) + \frac{f(k_1-0)}{k_1} \cdot x \qquad \text{для } 0 < x < k_1$$

$$F_1(x) = f(k_1+0) + \frac{x-k_1}{k_2-k_1}[f(k_2-0) - f(k_1+0)] \quad \text{для } k_1 < x < k_2$$

$$F_1(x) = f(k_2+0) + \frac{x-k_2}{k_3-k_2}[f(k_3-0) - f(k_2+0)] \quad \text{для } k_2 < x < k_3$$

$$F_1(x) = f(k_3+0) + \frac{x-k_3}{l-k_3}[f(l-0) - f(k_3+0)] \quad \text{для } k_3 < x < l$$

т. е. $F_1(x)$ представляется изображенной на чертеже линией, составленной из прямолинейных участков так, чтобы скачки были как раз равны и на тех же местах, как у заданной функции.



Фиг. 56.

Составленную таким образом функцию $F_1(x)$ разлагаем в ряд Фурье по синусам аргументов кратных $\frac{\pi x}{l}$ и вычитаем этот ряд из предложенного; останется такой ряд, в котором коэффициенты — второго порядка относительно $\frac{1}{n}$; обозначим эту функцию через $\varphi(x)$. Составляем производную $\varphi'(x)$; дифференцируя этот ряд почленно, получим ряд, подобный предложенному. Находим его места разрывов и величину скачков и, подобно предыдущему, составляем функцию $\varphi_1(x)$, которая имела бы те же скачки и те же места разрывов, как и $\varphi(x)$, и состояла бы из прямолинейных участков. Тогда будет

$$\varphi'(x) = \varphi_1(x) + \psi(x)$$

причем $\psi(x)$ будет представлять функцию, разложение которой по косинусам имеет коэффициенты не ниже второго порядка относительно $\frac{1}{n}$.

Разлагаем $\varphi_1(x)$ в ряд Фурье и определяем разложение $\psi(x)$, взяв разность рядов

$$\varphi'(x) - \varphi_1(x) = \psi(x)$$

Интегрируя, имеем

$$\varphi(x) = \int \varphi_1(x)\,dx + \int \psi(x)\,dx$$

Интеграл

$$\int \varphi_1(x)\,dx$$

будет состоять: для участков, где $\varphi_1(x)$ изображается прямою, параллельною оси x-ов, из соответствующего прямолинейного участка вида $\alpha x + \beta$, где же $\varphi_1(x)$ изображалось прямой $ax + b$, будет $\frac{ax^2}{2} + bx + \gamma$; постоянные произвольные определим по значениям функции $\varphi(x)$ в местах разрывов ее производной. Таким образом выделим из нашего разложения функцию

$$F_1(x) + \int \varphi_1(x)\,dx$$

такую, что остаток будет представлять ряд с коэффициентами третьего порядка относительно $\frac{1}{n}$. Таким образом можем продолжать до тех пор, пока получится такой ряд, вычисление суммы которого с требуемой степенью точности уже не представит затруднений, ибо он будет достаточно быстро сходящимся.

Пример 1. Возьмем ряд

$$f(x) = \frac{8\beta}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{2}\sin\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{2}\sin\frac{5\pi x}{l} - \ldots\right]$$

который мы имели в § 49 и для которого коэффициент b_n выражается формулою

$$b_n = \frac{8\beta}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

и положим, что мы хотим найти ту функцию, которая этим рядом представляется.

Так как коэффициент b_n — второго порядка относительно $\frac{1}{n}$, то самая функция $f(x)$ от $x = 0$ до $x = l$ непрерывна.

Составляем производную

$$f'(x) = \frac{8\beta}{\pi}\cdot\frac{1}{l}\left[\frac{1}{1}\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi x}{l} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{8\beta}{\pi l}\cdot\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

По ф-ле (7) имеем

$$\frac{n\pi\cdot a_n}{2} = \frac{4\beta}{l}\cdot\sin\frac{n\pi}{2} = \left[[f'(k_1 - 0) - f'(k_1 + 0)]\sin\frac{nk_1\pi}{l} + \ldots\right]$$

так как это равенство должно иметь место тождественно, то будет

$$\frac{\pi n k_1}{l} = \frac{n\pi}{2}$$

т. е.

$$k_1 = \frac{l}{2}$$

$$f'(k_1 - 0) - f'(k_1 + 0) = \frac{4\beta}{l}$$

По теореме Дирихле для места разрыва

$$k_1 = \frac{l}{2}$$

имеем

$$\frac{1}{2}\left[f'(k_1 - 0) + f'(k_1 + 0)\right] = \frac{8\beta}{l} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \cdot \cos \frac{n\pi}{2} = 0$$

Отсюда следует

$$f'(k_1 - 0) = \frac{2\beta}{l}\,; \qquad f'(k_1 + 0) = -\frac{2\beta}{l}\,.$$

Значит, за $F_1'(x)$ следует взять функцию

$$F_1'(x) = \frac{2\beta}{l} \quad \text{для} \quad 0 < x < \frac{l}{2}$$

$$F_1'(x) = -\frac{2\beta}{l} \quad \text{для} \quad \frac{l}{2} < x < l$$

т. е. $F_1'(x)$ изображается графически чертежом (фиг. 57).

И в самом деле, разлагая $F_1'(x)$ в ряд Фурье, получаем

$$F_1'(x) = \frac{8\beta}{\pi l} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \cdot \cos \frac{n\pi x}{l}$$

т. е.

$$f'(x) = F_1'(x)$$

Значит,

$$f(x) = F_1(x) + C$$

Но, интегрируя величину $F_1'(x)$, видим, что для участка от $x = 0$ до $x = \frac{l}{2}$ получится

$$F_1(x) = \frac{2\beta}{l} x \quad \text{для} \quad 0 < x < \frac{l}{2}$$

так как при $x = 0$ должно быть $F_1(x) = 0$.

Для участка от $\frac{l}{2}$ до l получится

$$F_1(x) = -\frac{2\beta}{l}x + C_1$$

и так как при $x = l$ должно быть $F_1(x) = 0$, то

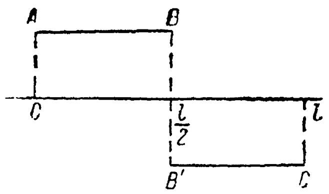
$$C_1 = 2\beta$$

и, значит,

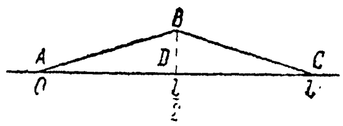
$$F_1(x) = \frac{2\beta}{l}(l - x) \quad \text{для} \quad \frac{l}{2} < x < l$$

Таким образом будет

$$f(x) = F_1(x) = \frac{2\beta}{l}x \quad \text{для} \quad 0 < x < \frac{l}{2}$$



Фиг. 57.



Фиг. 58.

$$f(x) = F(x) = \frac{2\beta}{l}(l - x) \quad \text{для} \quad \frac{l}{2} < x < l$$

т. е. графически $f(x)$ изображается чертежом (фиг. 58), т. е. ломаною ABC, причем стрелка $BD = \beta$ и $AD = DC = \frac{l}{2}$.

Нетрудно видеть, что когда коэффициенты в ряде Фурье выражаются целыми функциями от $\frac{1}{n}$, с коэффициентами, не зависящими от n, то, поступая подобным образом, мы составим функцию, им представляемую, и она на отдельных участках будет выражаться кривыми, уравнения коих будут вида

$$y = ax^k + bx^{k-1} + \ldots + h$$

где k — целое и положительное число.

Пример 2. Возьмем теперь ряд, у которого коэффициенты не суть целые функции от $\frac{1}{n}$. Пусть будет

$$f(x) = a\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2 - 1^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

и желательно усилить быстроту сходимости этого ряда.

Разлагаем коэффициент b_n по степеням $\frac{1}{n^2}$ и остановимся на члене с $\frac{1}{n^5}$, тогда имеем

$$\frac{n}{n^2-1^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{n}\left[1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}\right]$$

следовательно, предложенный ряд можно написать так:

$$S=-\frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1^2}\sin\frac{n\pi x}{l}=S_1+S_3+\Omega$$

причем

$$S_1=-\frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$S_3=-\frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

и

$$\Omega=-\frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^5}\frac{1}{1-\frac{1}{n^5}}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

Обозначим функцию, представляемую рядом S_1, через $F_1(x)$; тогда для ряда S_1 имеем

$$\frac{n\pi}{2}b_n=-a\cos\frac{n\pi}{2}=$$

$$=-\left[F_1(l-0)\cos n\pi-F_1(+0)+[F_1(k_1-0)-F_1(k_1+0)]\cdot\cos\frac{n\pi k_1}{l}+\ldots\right]$$

откуда следует

$$F_1(l-0)=0;\qquad F_1(+0)=0$$

$$\frac{n\pi}{2}=\frac{n\pi k_1}{l}$$

т. е.

$$k_1=\frac{l}{2}$$

и

$$F_1(k_1-0)-F_1(k_1+0)=a$$

т. е. что функция $F_1(x)$ при $x=k_1=\frac{l}{2}$ делает скачок, величина коего есть a.

Чтобы найти значения $F_1(k_1+0)$ и $F_1(k_1-0)$, подставляем $x=\frac{l}{2}$ в ряд S_1:

$$F_1(k_1-0)+F_1(k_1+0)=0$$

Таким образом имеем уравнения

$$F_1(k_1-0)-E_1(k_1+0)=a$$

и

$$F_1(k_1-0)+F_1(k_1+0)=0$$

откуда следует

$$F_1(k_1-0)=\frac{a}{2}$$

и

$$F_1(k_1+0)=-\frac{a}{2}$$

а так как

$$F_1(+0)=0$$

и

$$F_1(l-0)=0$$

то за $F_1(x)$ берем функцию

$$F_1(x)=\frac{a}{l}x \quad \text{для} \quad 0<x<\frac{l}{2}$$

$$F_1(x)=\frac{a}{l}(x-l) \quad \text{для} \quad \frac{l}{2}<x<l$$

и представляем ее в виде ряда Фурье, расположенного, как и предложенный, по синусам аргументов, кратных от $\frac{\pi x}{l}$.

Будем иметь

$$b_{1,n}=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{a}{l}\xi\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,b\xi+\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}\frac{a}{l}(\xi-l)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi=$$

$$=\frac{2a}{l^2}\int_0^{l}\xi\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi-\frac{2a}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi=-\frac{2a}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}$$

Следовательно,

$$F_1(x)=S_1=-\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

Таким образом будет

$$f(x)-\frac{a}{2}\sin\frac{\pi x}{l}-F_1(x)=S_3+\Omega$$

Сумма

$$S_3=-\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

представляет функцию, непрерывную вместе с первою своею производною; поэтому, дифференцируя эту функцию дважды, получим

$$S_3''=+\frac{2a\pi}{l^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}=F_3''(x)$$

а эта функция, на основании сказанного о функции $F_1(x)$, определяется равенствами

$$F_3''(x)=-\frac{a\pi^2}{l^3}x \quad \text{для} \quad x \text{ от } 0 \text{ до } \frac{l}{2}$$

$$F_3''(x)=-\frac{a\pi^2}{l^3}(x-l) \quad \text{для } x \text{ от } \frac{l}{2} \text{ до } l$$

Значит,

$$F_3(x)=-\frac{a\pi^2}{l^3}\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2 \quad \text{для} \quad x \text{ от } 0 \text{ до } \frac{l}{2}$$

$$F_3(x)=-\frac{a\pi^2}{l^3}\frac{(x-l)^3}{6}+C_3(x-l)+C_4 \quad \text{для } x \text{ от } \frac{l}{2} \text{ до } l$$

Для определения постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 имеем условия

$$F_3(0)=0; \quad F_3(l)=0$$

$$\left(-\frac{a\pi^2}{l^3}\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2\right)_{x=\frac{l}{2}}=\left(-\frac{a\pi^2}{l^3}\frac{(x-l)^3}{6}+C_3(x-l)+C_4\right)_{x=\frac{l}{2}}$$

$$\left(-\frac{a\pi^2}{l^3}\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2\right)'_{x=\frac{l}{2}}=\left(-\frac{a\pi^2}{l^3}\frac{(x-l)^3}{6}+C_3(x-l)+C_4\right)'_{x=\frac{l}{2}}$$

ибо функция $F_3(x)$ сама и первая ее производная непрерывны для $0<x<l$ и вместе с тем $F_3(0)=F_3(l)=0$.

Таким образом будет:

$$C_2=C_4=0; \quad C_1=C_3=\frac{a\pi^2}{24l}$$

и, значит, функция $F_3(x)$ такова:

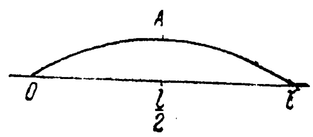
$$F_3(x)=-\frac{a\pi^2}{6l^3}x^3+\frac{a\pi^2}{24l}x \quad \text{для } x \text{ от } 0 \text{ до } \frac{l}{2}$$

$$F_3(x) = -\frac{a\pi^2}{6l^3}(x-l)^3 + \frac{a\pi^2}{24l}(x-l) \quad \text{для} \quad \frac{l}{2} < x < l$$

так что $F_3(x)$ представляется графически чертежом (фиг. 59). Полагая

$$f(x) = \frac{a}{2}\sin\frac{\pi x}{l} + F_1(x) + F_3(x) + \Omega$$

где $F_1(x)$ и $F_3(x)$ суть найденные выше функции, мы сведем вычисление значений функции $f(x)$ к вычислению значений функций $F_1(x)$, $F_3(x)$, которое весьма просто, и к вычислению суммы Ω, представляемой рядом, коего коэффициенты — пятого порядка относительно $\frac{1}{n}$, тогда как в предложенном ряду они были первого порядка.



Фиг. 59.

§ 59. К такому приему выделения из данного ряда тех его членов, которые дают разрывы или в самой функции, или в ее производных, приходится по необходимости прибегать в том случае, когда надо вычислить или представить в виде ряда производную первого или высшего порядка данной функции и когда непосредственно этой производной дифференцированием предложенного ряда найти нельзя.

Поясним это на примере.

Пусть, например, функция $f(x)$ задана так:

$$f(x) = a\sin\frac{\pi x}{l} \quad \text{для} \quad 0 < x < \frac{l}{2}$$

и

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad \frac{l}{2} < x < l$$

Очевидно, что такая функция лишь в месте разрыва, т. е. при

$$x = \frac{l}{2}$$

не имеет производной, для всех же остальных значений x существует производная *любого* порядка.

Так, например, для предложенной функции производная второго порядка была бы

$$f''(x) = -\frac{\pi^2 a}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l} \quad \text{для} \quad 0 < x < \frac{l}{2}$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{для} \quad \frac{l}{2} < x < l$$

между тем, ряд Фурье, представляющий данную функцию, имел бы свои коэффициенты *первого* порядка относительно $\frac{1}{n}$; если бы его дважды продифференцировать почленно, то получился бы ряд, коего коэффициенты были бы первого порядка относительно n, т. е. коего члены неопределенно возрастали бы, — такой ряд, как расходящийся, не имел бы смысла.

Между тем, если представить эту функцию так:

$$f(x) = F_1(x) + F_2(x) + \varphi(x)$$

где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ были бы те функции, которые имеют те же разрывы, как $f(x)$ и $f'(x)$, и, значит, $\varphi(x)$ имела бы разложение, коего коэффициенты были бы третьего порядка относительно $\frac{1}{n}$, тогда можно бы написать равенство

$$f''(x) = F_1''(x) + F_2''(x) + \varphi''(x)$$

причем $F_1''(x)$ и $F_2''(x)$ определялись бы пользуясь *заданием* функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$, а не дифференцированием тех рядов, коими они представляются, $\varphi''(x)$ — дифференцированием соответствующего ему ряда почленно.

Так, возьмем наш пример, т. е.

$$f(x) = a \sin\frac{\pi x}{l} \quad \text{для} \quad 0 < x < \frac{l}{2}$$

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad \frac{l}{2} < x < l$$

тогда ряд для $f(x)$ такой:

$$f(x) = \frac{a}{2}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

который рассмотрен в предыдущем параграфе, и мы имели равенство

$$f(x) = \frac{a}{2}\sin\frac{\pi x}{l} + F_1(x) + S_3 + \Omega$$

Но

$$S_3 + \Omega = -\frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n(n^2-1)}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

функция же $F_1(x)$ состоит из прямолинейных участков, и, следовательно, производная второго порядка от нее равна нулю, кроме места разрыва, где этой производной нет.

Таким образом имеем

$$f(x) = \frac{a}{2}\sin\frac{\pi x}{l} + F_1(x) - \frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n(n^2-1)}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

и двукратное дифференцирование дает

$$f''(x) = -\frac{a}{2}\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{2a}{2}\frac{\pi^2}{l^2}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin\frac{n\pi x}{l} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{l^2}\left[\frac{a}{2}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin\frac{n\pi x}{l}\right] = -f(x)\frac{\pi^2}{l^2}$$

и, значит,

$$f''(x) = -\frac{a\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l} \quad \text{для} \quad 0 < x < \frac{l}{2}$$

и

$$f''(x) = 0 \quad \text{для} \quad \frac{l}{2} < x < l$$

при $x = \frac{l}{2}$ функция $f''(x)$ имеет разрыв.

Если бы функция (x) нам была неизвестна, то полученное уравнение

$$f''(x) + \frac{\pi^2}{l^2}f(x) = 0$$

послужило бы для ее определения.

В самом деле, из этого уравнения следует

$$f(x) = C_1\sin\frac{\pi x}{l} + C_2\cos\frac{\pi x}{l}$$

причем C_1 и C_2 суть произвольные постоянные, которые для разных участков функции $f(x)$ могут иметь и различные значения, ибо функция $f(x)$ при изменении x от 0 до l имеет разрывы.

Значения постоянных C_1 и C_2 должны быть определены по значениям функции для начала и конца каждого участка.

Так, мы нашли в § 58, пример 2-й, что функция $f(x)$ имеет разрыв при $x = \frac{l}{2}$. Следовательно, первый ее участок — от $x = 0$ до $x = \frac{l}{2}$. Для этого промежутка мы видели, что

$$f(0) = 0 \quad \text{и} \quad f\left(\frac{l}{2} - 0\right) = a$$

следовательно,

$$C_1 = a \quad \text{и} \quad C_2 = 0$$

и, значит, будет

$$f(x) = a\sin\frac{\pi x}{l} \quad \text{для} \quad 0 < x < \frac{l}{2}$$

Второй участок нашей функции — от $x=\frac{l}{2}$ до $x=l$. В этом промежутке, как мы видели,

$$f\left(\frac{l}{2}+0\right)=0 \quad \text{и} \quad f(l)=0$$

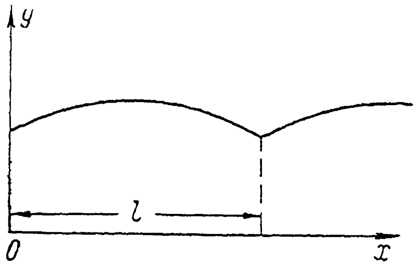
следовательно,

$$C_1=0 \quad \text{и} \quad C_2=0$$

т. е.

$$f(x)=0 \quad \text{для} \quad \frac{1}{2}<x<l$$

Таким образом, функция $f(x)$ и определена вполне.



Фиг. 60.

При пользовании рядами Фурье для решения вопросов теории упругости и сопротивления материалов, необходимо всегда иметь в виду сказанное в этом параграфе о вычислении производных функций, представленных такими рядами.

Заметим также, что изложенный прием усиления быстроты сходимости рядов Фурье и нахождения производных от функций, ими представляемых, может служить для доказательства или для проверки того, что представляемая рядом функция, действительно, удовлетворяет тому дифференцальному уравнению, как решение коего она найдена, хотя бы самый ряд и нельзя было дифференцировать почленно требуемое число раз.

§ **60.** Разложение в тригонометрические ряды функций, заданных не аналитически, а графически, например в виде записи разного рода самопишущих приборов для какого-нибудь периодического явления с *заранее известным* периодом, требует довольно утомительных вычислений, указанных в § 53.

Чтобы облегчить эту работу, построены приборы для автоматического вычисления коэффициентов искомых разложений.

Из этих приборов, называемых *гармоническими анализаторами*, мы ограничимся описанием двух, а именно: анализатора проф. Генрици (Henrici) в Лондоне и инженера Мадера в Мюнхене. Устройство анализатора Генрици основано на следующих соображениях. Пусть заданная графически функция $f(x)$ имеет своим периодом длину l (фиг. 60), и требуется разложить ее в тригонометрический ряд, который, как показано в § 43, будет вида

$$f(x)=A_0+A_1\cos\theta+A_2\cos 2\theta+\ldots+A_k\cos k\theta+$$
$$+\ldots+B_1\sin\theta+B_2\sin 2\theta+\ldots+B_k\sin k\theta+\ldots$$

причем $\theta = \frac{2\pi x}{l}$, и коэффициенты ряда выражаются формулами

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x)\, dx$$

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos k \frac{2\pi x}{l}\, dx$$

$$B_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin k \frac{2\pi x}{l}\, dx$$

Обозначим $f(x)$ через y и преобразуем выражения для A_k и B_k интегрированием по частям; будем иметь

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l y \cos k \frac{2\pi x}{l}\, dx = \frac{1}{k\pi} \left| y \sin k \frac{2\pi x}{l} \right|_0^l - \frac{1}{k\pi} \int_0^l \sin k \frac{2\pi x}{l}\, dy =$$

$$= -\frac{1}{k\pi} \int_0^l \sin k \frac{2\pi x}{l}\, dy$$

и

$$B_k = \frac{2}{l} \int_0^l y \sin k \frac{2\pi x}{l}\, dx = -\frac{1}{k\pi} \left| y \cos k \frac{2\pi x}{l} \right|_0^l + \frac{1}{k\pi} \int_0^l \cos k \frac{2\pi x}{l}\, dy =$$

$$= \frac{1}{k\pi} \int_0^l \cos k \frac{2\pi x}{l}\, dy$$

так как по предположению значения $y = f(x)$, соответствующие значениям $x = 0$ и $x = l$, равны между собою. Таким образом, вычисление коэффициентов ряда сводится к вычислению интегралов следующих видов:

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x)\, dx = \int_0^l y\, dx$$

$$A_k = -\frac{1}{k\pi} \int_0^l \sin k \frac{2\pi x}{l}\, dy$$

и

$$B_k = \frac{1}{k\pi} \int_0^l \cos k \frac{2\pi x}{l}\, dy^1$$

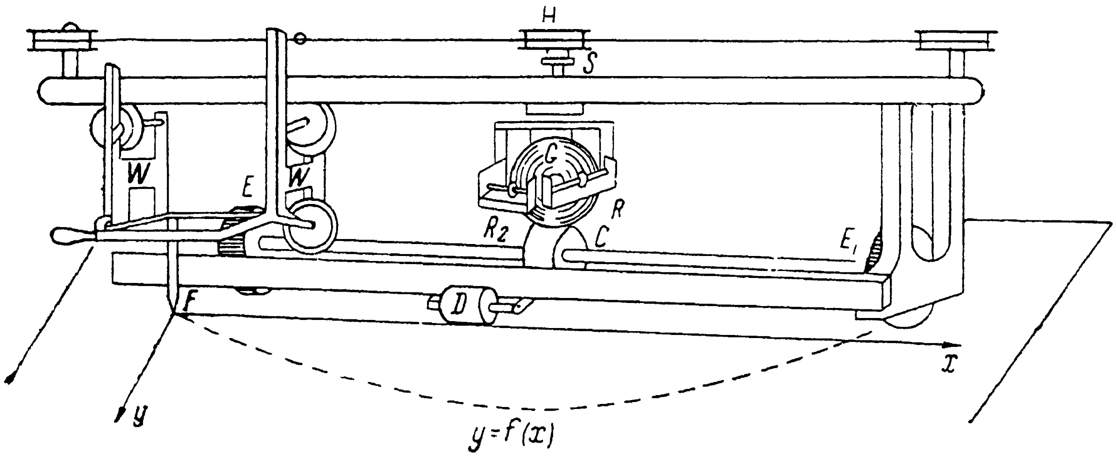
Первый из этих интегралов находится обыкновенным планиметром; для нахождения последних двух построен анализатор Генрици.

[1] В формулах для A_k и B_k переменной интегрирования является x и $dy = y' dx$.

Сущность устройства этого прибора (фиг. 61) состоит в следующем: основная рама прибора несет ось, параллельную длинной своей стороне. На концах этой оси насажены колеса E и E_1 с весьма мелко зарубцованными широкими ободами.

С передней стороны прибора к основной же его раме прикреплена неподвижно вилка, несущая бегунок D, ось которого параллельна оси EE_1. Будучи поставлен на чертежную доску, прибор и касается ее ободами колес E, E_1 и D.

Кроме того, на ось EE_1 насажены цилиндры C с гладкими ободами; диаметр этих цилиндров несколько меньше диаметра колес E и E_1, так



Фиг. 61.

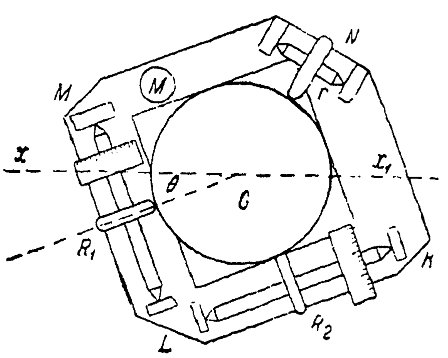
что цилиндры C не касаются чертежа, когда прибор катится по плоскости чертежа. На чертеже показан один из цилиндров C.

Передняя сторона рамы служит вместе с тем направляющим рельсом, по которому может катиться тележка W, несущая острие F, которым при употреблении прибора обводится разлагаемая кривая $y = f(x)$.

Прибор ставится на плоскость чертежа, укрепляемого для этого на хорошей чертежной доске так, чтобы ось прибора EE_1 была параллельна оси x, тогда весь прибор будет свободно катиться параллельно оси y. Таким образом, если острие F вести параллельно оси x, то будет перемещаться только тележка W по своему рельсу, весь же прибор будет оставаться неподвижным; если же вести штифт F параллельно оси y, то весь прибор будет перемещаться, катясь на колесах EE_1, тележка же W будет оставаться на своем рельсе неподвижной относительно прибора.

Понятно, что когда штифт F описывает какую-нибудь кривую, то оба вышеупомянутых движения происходят совместно. Длина хода тележки W ограничена длиною рамы и равна как раз той величине l, которая принимается за величину периода, поэтому разлагаемая кривая должна быть вычерчена в таком масштабе, где бы это условие было выполнено. Над каждым из цилиндров C, насаженных на ось EE_1, находится укрепляемая в верхней части рамы втулка, сквозь которую пропущена свободно вращающаяся в этой втулке ось S. Эта ось и несет на себе собственно интегрирующее приспособление (фиг. 62), состоящее из квадратной рамки $KLMN$, которая несет два интегрирующих ролика R_1 и R_2, совершенно подобных роликам Амслеровского планиметра, оси этих роликов R_1 и R_2 взаимно перпендикулярны. Кроме того, рама несет нажимной ролик r с пружиною.

На каждый из цилиндров C положен свободно лежащий шар G, охватываемый рамою $KLMN$, так что ролики R_1 и R_2 касаются этого шара по плоскости большого круга, параллельного плоскости чертежа и, следовательно, перпендикулярного к оси S. Шар же касается до обода цилиндра точкою большого круга, перпендикулярного к оси EE_1 и, следовательно, проходящего через ось S.



Фиг. 62.

Нажимной ролик r с его пружиной и служит для удержания шара в вышеуказанном положении, не препятствуя, однако, вращению шара.

На каждую из осей S насажен барабан H, охватываемый туго обтянутой проволокой, оба конца которой, обойдя через неподвижно укрепленные на раме шкивы, крепятся к тележке W. Барабаны H сделаны такого диаметра, что окружность первого из них равна l, второго $\frac{1}{2} l$, третьего $\frac{1}{3} l$ и т. д.; таким образом, если прокатить тележку W по ее рельсу во всю его длину l, то первый барабан сделает полный оборот, и, следовательно, ось S вместе со своей рамкой $KLMN$ сделает также полный оборот, второй барабан сделает тогда два полных оборота, третий — три и т. д. Прибор выверяется так, что когда тележка W стоит в крайнем своем положении, соответствующем $x=0$, то оси роликов R_2 параллельны оси x, оси же роликов R_1 перпендикулярны к ней. Ясно, что если тележку продвинуть на длину x, то первая рамка с роликом повернется на угол $\theta_1 = \frac{2\pi x}{l}$, вторая рамка повернется на угол $\theta_2 = 2 \cdot \frac{2\pi x}{l}$ и т. д.

Положим теперь, что при таком положении тележки W острие F будет продвинуто по чертежу параллельно оси y на величину dy, весь прибор прокатится на такую же величину, колеса EE_1 повернутся на некоторый угол $d\varphi = \frac{dy}{\rho}$, где ρ радиус колес E и E_1, на такой же угол повернутся и сидящие на оси EE_1 цилиндры C, и на такой же угол повернутся и все лежащие на цилиндрах C стеклянные шары, ибо диаметр этих шаров равен диаметру цилиндров C, причем поворот каждого шара произойдет около оси nd, параллельной оси EE_1, т. е. оси x чертежа, Из фиг. 62 видно, что ролик R_1 первой рамы, будучи увлекаем шаром, повернется на угол $d\omega_1 = \frac{\lambda}{\rho} \sin\theta \cdot dy$, ролик же R_2 этой рамы на угол $d\varphi = \frac{\lambda}{\rho} \cos\theta \cdot dy$, причем коэффициент пропорциональности λ, очевидно, равен отношению радиуса шара к радиусу ролика.

Вторая рамка будет стоять так, что угол $xGR_1 = 2\theta = \frac{4\pi x}{l}$, и, следовательно, ее ролики повернутся на углы

$$d\omega_2 = \frac{\lambda}{\rho} \sin 2\theta \cdot dy$$

$$d\varphi_2 = \frac{\lambda}{\rho} \cos 2\theta \cdot dy$$

и т. д.

Таким образом видно, что, при обводе острием F заданной кривой CD отсчеты углов поворотов роликов первой рамки будут

$$\omega_1 = \frac{\lambda}{\rho} \int_0^l \sin \frac{2\pi x}{l} \, dy$$

$$\varphi_1 = \frac{\lambda}{\rho} \int_0^l \cos \frac{2\pi x}{l} \, dy$$

второй рамки

$$\omega_2 = \frac{\lambda}{\rho} \int_0^l \sin 2 \frac{2\pi x}{l} \, dy$$

$$\varphi_2 = \frac{\lambda}{\rho} \int_0^l \cos 2 \frac{2\pi x}{l} \, dy$$

и т. д., т. е. эти отсчеты будут соответственно пропорциональны коэффициентам A_1 и B_1, A_2 и B_2 и т. д. искомого разложения, причем коэффициент пропорциональности зависит только от размеров частей прибора и определяется раз навсегда и дается в прилагаемом к нему аттестате.

Обычный размер анализатора Генрици таков, что длина $l = 400$ мм

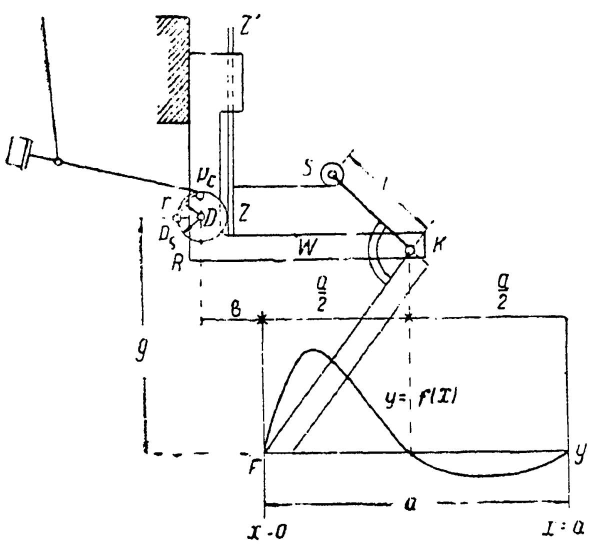
Как видно из предыдущего описания, прибор Генрици требует предварительного приведения длины основания (периода) анализируемой кривой к вполне определенной величине, вместе с тем цена этого прибора высока.

§ 61. Анализатор Мадера. В № 36 „Electrotechnische Zeitschrift" за 1909 г. помещены описание устройства и теория в высшей степени простого и остроумного гармонического анализатора для любого основания, изобретенного Г. О. Мадером (O. Mader) в Мюнхене, Сущность устройства этого прибора состоит в следующем (фиг. 63): тележка W, могущая двигаться только в направлении оси y, несет на себе следующие части:

1) Коленчатый рычаг FKS, который вращается около точки K и на конце одного из плеч коего имеется ролик S, на конце другого плеча — острие F, коим обводится анализируемая кривая.

2) Зубчатая рейка ZZ', которая в свою очередь может перемещаться по тележке W также по направлению оси y, причем это перемещение происходит от действия ролика S на укрепленное перпендикулярно к рейке, следовательно, параллельное оси x, колено.

3) Зубчатое колесо радиуса R, которое вращается около центра D, укрепленного на тележке, это колесо сцепляется с вышеупомянутою зубчатою рейкою ZZ'; таким образом повороты рычага FKS передаются колесу, которое и поворачивается на соответствующий угол около точки D. В этом колесе сделано два маленьких конических отверстия P_c и P_s, расположенных на 90° одно от другого, в расстоянии r от D. В эти отверстия вставляется острие ведущего рычага обыкновенного планиметра Амслера.



Фиг. 63.

Положим, что мы поставили острие планиметра в отверстие P_s и установили прибор так, что когда его острие F постановлено в начальную точку O анализируемой кривой, то радиус DP_s параллелен оси x и направлен в отрицательную ее сторону; тогда координаты точки P_s, при сделанных на чертеже обозначениях будут

$$x_s = -(b + r)$$

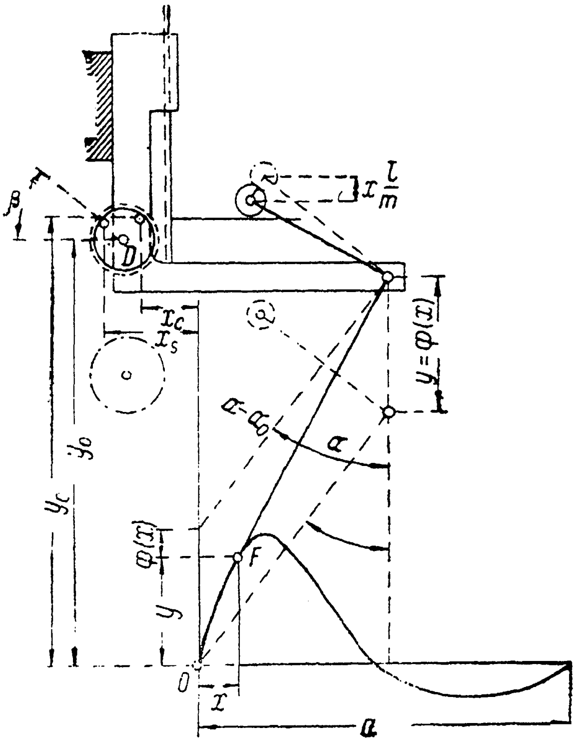
$$y_s = g$$

координаты же точки P_c будет

$$x_s = -b$$

$$y_c = g + r$$

Когда острие F переместится по кривой $y = f(x)$ от начального положения $x = 0$, $y = 0$ до какого-нибудь (x, y) (фиг. 64), то тележка W переместится на величину $y + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — некоторая величина, зависящая от x. При указанном перемещении коленчатый рычаг FK повернется на угол $\alpha - \alpha_0$, такой, что проекция перемещения точки F на ось x равна x, следовательно, центр ролика S переместится на такую величину, проекция коей на ось y, есть $\frac{x \cdot l}{m}$, где $l = KS$ и $m = FK$. Настолько же переместится и рейка, и, значит, зубчатое колесо повернется на угол $\beta = \frac{xl}{R \cdot m}$, центр же этого колеса D переместится, вследствие общего передвижения тележки, на величину $y + \varphi(x)$. Таким образом новые координаты точек P_s и P_c будут



Фиг. 64.

$$x_s = -(b + r \cdot \cos\beta)$$

$$y_s = g + y + \varphi(x) + r \cdot \sin\beta \quad (1)$$

и

$$x_c = -b + r \cdot \sin\beta$$

$$y_c = g + y + \varphi(x) + r \cdot \cos\beta \quad (2)$$

Очевидно, что при обходе острием F заданной кривой $y = f(x)$ от $x = 0$ до $x = a$ и возвращаясь затем обратно по оси x-ов от $x = a$ до $x = 0$, мы описываем им некоторый замкнутый контур, следовательно, и точки P_s и P_c опишут некоторые замкнутые контуры, ограничивающие площади Q_s и Q_c.

Имеем:

$$Q_s = \int_0^a y_s\, dx_s + \int_a^0 y_0\, dx_s = \int_0^a (y_s - y_0)\, dx_s$$

где y_0 обозначает значение координаты y_s для обратного пути по оси x, т. е.

$$y_0 = g + \varphi(x) + r \sin\beta$$

В силу ф-л (1) и (2) имеем

$$Q_s = \frac{rl}{Rm} \int_0^a y \sin\frac{xl}{Rm}\, dx \quad (3)$$

Совершенно так же для площади, ограниченной контуром описываемым точкою P_c, получим

$$Q_c = \frac{rl}{Rm} \int_0^a y \cos\frac{xl}{Rm}\, dx \quad (4)$$

Из этих выражений видно, что стоит только брать R и r так, чтобы было

$$R = \frac{a \cdot l}{m} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n}$$

$$r = \frac{1}{n\pi} K$$

причем $n = 1, 2, 3, \ldots$, то будет

$$Q_s = K \frac{2}{a} \int_0^a y \sin \frac{2n\pi x}{a}\, dx = K B_n$$

$$Q_c = K \frac{2}{a} \int_0^a y \cos \frac{2n\pi x}{a}\, dx = K A_n$$

т. е. Q_c и Q_s — пропорциональны коэффициентам A_n и B_n в разложении функции $y = f(x)$, заданной в промежутке от $x = 0$ до $x = a$ в тригонометрический ряд вида

$$y = A_0 + A_1 \cos \frac{2\pi x}{a} + A_2 \cos \left(2 \cdot \frac{2\pi x}{a}\right) + A_3 \cos \left(3 \cdot \frac{2\pi x}{a}\right) + \ldots$$

$$+ B_1 \sin \frac{2\pi x}{a} + B_2 \sin 2 \left(\frac{2\pi x}{a}\right) + B_3 \sin \left(3 \frac{2\pi x}{a}\right) + \ldots$$

Таким образом, стоит только с точкою P_s, а затем с точкою P, сцепить ведущее острие обыкновенного планиметра Амслера и обвести заданную кривую как указано выше, то мы и получим величины коэффициентов этого ряда.

Прибор Мадера изготовляется таких размеров, что длина a может быть от 20 до 360 мм, причем к нему отпускается подбор зубчатых колес, дающих возможность получать первые 12 коэффициентов A и B в разложении, размеры же остальных частей подобраны так, чтобы K равнялось 10, т. е. 1 см^2 площади Q_s или Q_c соответствовал 0.1 см амплитуды.

Упомянем еще о гармоническом анализаторе Майкельсона и Стратона (Michelson and Stratton), описание которого можно найти в „Philosophical Magasine„ за 1898 г.

Этот анализатор основан на совершенно иных началах, нежели анализаторы Генрици и Мадера, и дает первые 80 (восемьдесят) членов разложения. Кроме того, он служит для автоматического вычерчивания функции, представляемой данным тригонометрическим рядом, причем можно брать до 80 первых членов этих рядов. К указанной статье приложено множество снимков такого рода графиков, дающих наглядное представление о приближении к разложенной функции по мере того, как берется большее и большее число членов в ряде, коим она представляется.

Для образца прилагается копия (фиг. 65) одного из таких чертежей, где представлена функция

$$f(x) = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots$$

которая равна $\frac{\pi}{4}$ на протяжении от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$ и равна $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ от $x = \frac{\pi}{2}$ до $x = \pi$.

§ **62.** В некоторых приложениях математики приходится встречаться с разложением данной по своей графической записи кривой на сумму членов вида

$$B_k \sin\frac{2\pi x}{\lambda_k} + C_k \cos\frac{2\pi x}{\lambda_k}$$

или иначе члена вида

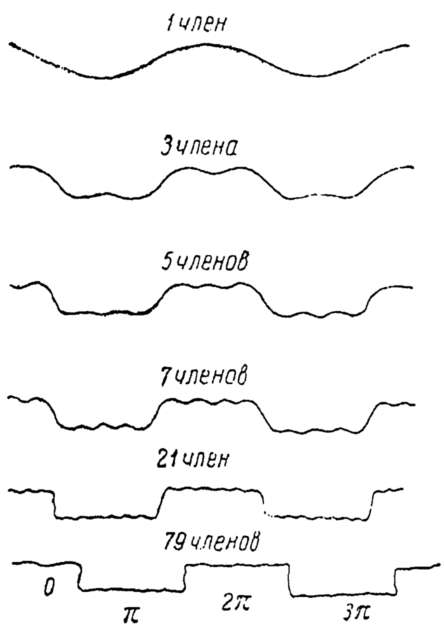
$$A_k \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_k} + \alpha_k\right)$$

Очевидно, что оба разложения равнозначущи, стоит только взять

$$A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}$$

и

$$\alpha_k = \operatorname{arctg}\frac{C_k}{B_k}$$



Фиг. 65.

Такими разложениями приходится обыкновенно пользоваться при исследовании записей, относящихся к разного рода колебательным движениям, тогда каждый член вида $A_k \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_k} + \alpha_k\right)$ представляет собою одно из составляющих движений (колебаний или волн), коэффициент A_k называют *амплитудою* этого колебания, λ_k—*длиною его волны* (или периодом, если x представляет собою время) и α_k—*начальною фазою.*

При решении этого вопроса надо различать два случая: 1) периоды (или длины волн) составляющих колебаний известны, и при данной записи требуется найти лишь амплитуды и начальные фазы, и 2) как периоды, так амплитуды и фазы неизвестны, дана лишь запись, требуется найти составляющие колебания.

Начнем с первого случая и сделаем для сокращения письма

$$\frac{2\pi}{\lambda_k} = n_k$$

Таким образом, наш вопрос ставится так. Дана функция $f(x)$, представляющая собою сумму членов вида

$$A_k \sin(n_k x + \alpha_k)$$

т. е.

$$f(x) = A_1 \sin(n_1 x + \alpha_1) + A_2 \sin(n_2 x + \alpha_2) + \dots \qquad (*)$$

известно число l членов этой суммы, и известны числа $n_1, n_2, \dots$, требуется определить величины $A_1, A_2, \dots$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots$

Написав предыдущее выражение в виде

$$\begin{aligned} f(x) = B_1 \sin n_1 x + C_1 \cos n_1 x + B_2 \sin n_2 x + C_2 \cos n_2 x + \\ + \dots + B_l \sin n_l x + C_l \cos n_l x \end{aligned} \qquad (**)$$

мы видим, что стоит только снять с чертежа значения функции $f(x)$, соответствующие $2l$ значениям переменной независимой x:

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_{2l}$$

и у нас составится $2l$ уравнений первой степени относительно искомых коэффициентов B_k и C_k, и, следовательно, вопрос сведется к решению системы этих уравнений.

Само собою разумеется, что можно брать бо́льшее число значений функции $f(x)$, нежели строго необходимое $2l$, и при решении системы составленных уравнений применять методу наименьших квадратов (см. гл. VIII).

Когда периоды $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_l$ соизмеримы между собою, то нетрудно видѣть, что надо взять длину L, представляющую наименьшее кратное всех величин $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_l$, и, распределив по этой длине n равноотстоящих абсцисс

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_n,$$

мы, при решении по способу наименьших квадратов полученной системы уравнений, будем иметь упрощения, совершенно подобные описанным в § 53.

В общем случае периоды не будут соизмеримы между собою, и сказанные упрощения не будут иметь места, и вычисления становятся весьма утомительными, если их производить по общим правилам.

Следующее замечание позволяет определять приближенную величину коэффициентов, не решая обычными приемами вышеуказанной системы многих уравнений со многими неизвестными, а в этом решении и состоит одна из главных трудностей.

Возьмем равенство

$$f(x) = B_1 \sin n_1 x + C_1 \cos n_1 x + B_2 \sin n_2 x + C_2 \cos n_2 x + \dots \qquad (*)$$

в котором функция $f(x)$ задана, величины

$$n_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}; \quad n_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}; \ \cdots$$

известны, число членов задано, и требуется лишь определить величины коэффициентов.

Положим, что

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \ldots$$

выберем такую длину L_1, которая представляла бы целое кратное длины λ_1, например $L_1 = 10\lambda_1$ или вообще $L_1 = \lambda_1 p_1$, и, умножив обе части равенства (*) сперва на $\sin n_1 x\,dx$, затем на $\cos n_1 x\,dx$, проинтегрируем его в пределах от 0 до L_1.

Так как функция $f(x)$ задана (хотя бы графически), то интегралы, стоящие в левой части, могут быть вычислены. Пусть будет

$$N_1 = \int_0^{L_1} f(x) \sin n_1 x\,dx, \qquad M_1 = \int_0^{L_1} f(x) \cos n_1 x\,dx$$

и у нас получаются равенства следующего вида:

$$N_1 = B_1 \int_0^{L_1} \sin^2 n_1 x\,dx + C_1 \int_0^{L_1} \cos n_1 x \sin n_1 x\,dx + \sum \int_0^{L_1} B_k \sin n_k x \sin n_1 x\,dx + \\ + \sum \int_0^{L_1} C_k \cos n_k x \sin n_1 x\,dx$$

$$M_1 = B_1 \int_0^{L_1} \sin n_1 x \cos n_1 x\,dx + C_1 \int_0^{L_1} \cos^2 n_1 x\,dx + \sum \int_0^{L_1} B_k \sin n_k x \cos n_1 x\,dx + \\ + \sum \int_0^{L_1} C_k \cos n_k x \cos n_1 x\,dx$$

а так как по предположению

$$L_1 = p_1 \lambda_1 \quad \text{и} \quad n_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \quad \text{и} \quad n_k = \frac{2\pi}{\lambda_k}$$

причем p_1 есть целое число, то будет

$$\int_0^{L_1} \sin^2 n_1 x\,dx = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} (1 - \cos 2n_1 x)\,dx = \frac{1}{2} L_1 = \frac{p_1 \lambda_1}{2}$$

$$\int_0^{L} \cos^2 n_1 x\,dx = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} (1 + \cos 2n_1 x)\,dx = \frac{1}{2} L_1 = \frac{p_1 \lambda_1}{2}$$

$$\int_0^{L_1} \cos n_1 x \sin n_1 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} \sin 2n_1 x dx = 0$$

$$\int_0^{L_1} \sin n_k x \sin n_1 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} [\cos (n_k - n_1) x - \cos (n_k + n_1) x] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (n_k - n_1) L_1}{n_k - n_1} - \frac{\sin (n_k + n_1) L_1}{n_k + n_1} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_k - n_1} - \frac{1}{n_k + n_1} \right) \sin \frac{2p_1 \pi \lambda_1}{\lambda_k} = \frac{n_1}{n_k^2 - n_1^2} \sin 2\pi \frac{p_1 \lambda_1}{\lambda_k} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_k^2 \lambda_1}{\lambda_1^2 - \lambda_k^2} \sin 2\pi \frac{p_1 \lambda_1}{\lambda_k}$$

$$\int_0^{L_1} \cos n_k x \cos n_1 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} [\cos (n_k - n_1) x + \cos (n_k + n_1) x] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n_k - n_1} + \frac{1}{n_k + n_1} \right] \sin 2\pi \frac{p_1 \lambda_1}{\lambda_k} = \frac{n_k}{n_k^2 - n_1^2} \sin 2\pi \frac{p_1 \lambda_1}{\lambda_k} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_k \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_k^2} \sin 2\pi \frac{p_1 \lambda_1}{\lambda_k}$$

$$\int_0^{L_1} \cos n_k x \sin n_1 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} [\sin (n_1 + n_k) x - \sin (n_k - n_1) x] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n_k - n_1} \cos (n_k - n_1) x - \frac{1}{n_k + n_1} \cos (n_k + n_1) x \right]_0^{L_1} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_k - n_1} - \frac{1}{n_k + n_1} \right) \cos 2\pi \frac{p_1 \lambda_1}{\lambda_k} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_k - n_1} - \frac{1}{n_k + n_1} \right) =$$

$$= - \frac{n_1}{n^2_k - n^2_1} \left(1 - \cos 2\pi \frac{p_1 \lambda_1}{\lambda_k} \right) =$$

$$= - \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_k^2 \lambda_1}{\lambda_1^2 - \lambda_k^2} \left(1 - \cos 2\pi \frac{p_1 \lambda_1}{\lambda_k} \right)$$

и, наконец,

$$\int_0^{L_1} \sin n_k x \cos n_1 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} [\sin (n_1 + n_k) x + \sin (n_k - n_1) x] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n_k + n_1} \cos (n_k + n_1) x + \frac{1}{n_k - n_1} \cos (n_k - n_1) x \right]_0^{L} =$$

$$= \frac{n_k}{n_k^2 - n_1^2} \left(1 - \cos 2\pi \frac{p_1 \lambda_1}{\lambda_k} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_k \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_k^2} \left(1 - \cos 2\pi \frac{p_1 \lambda_1}{\lambda_k} \right)$$

Таким образом, по разделении на $\frac{\lambda_1}{2}$, у нас получатся уравнения

$$\frac{2}{\lambda_1} N_1 = p_1 B_1 + \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\lambda_k^2}{\lambda_1^2 - \lambda_k^2} B_k \sin 2\pi \frac{p_1 \lambda^2}{\lambda_k} -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\lambda_k^2}{\lambda_1^2 - \lambda_k^2} C_k \left(1 - \cos 2\pi \frac{p_1 \lambda_1}{\lambda_k}\right)$$

и

$$\frac{2}{\lambda_1} M_1 = p_1 C_1 + \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\lambda_k \lambda_1}{\lambda_1^2 - \lambda_k^2} B_k \left(1 - \cos 2\pi \frac{p_1 \lambda_1}{\lambda_k}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\lambda_k \lambda_1}{\lambda_1^2 - \lambda_k^2} C_k \sin 2\pi \frac{p_1 \lambda_1}{\lambda_k}$$

причем при суммировании исключается значение $k = 1$.

Взяв затем такую величину L_2, чтобы она равнялась целому кратному длины λ_2, т. е. чтобы было $L_2 = p_2 \lambda_2$, где p_2 — целое число, и составив интегралы

$$M_2 = \int_0^{L_2} f(x) \cos n_2 x \, dx$$

и

$$N_2 = \int_0^{L_2} f(x) \sin n_2 x \, dx$$

мы получим два уравнения вида

$$\frac{2}{\lambda_2} N_2 = p_2 B_2 + \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\lambda_k^2}{\lambda_2^2 - \lambda_k^2} B_k \sin 2\pi \frac{p_2 \lambda_2}{\lambda_k} -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\lambda_k^2}{\lambda_2^2 - \lambda_k^2} C_k \left(1 - \cos 2\pi \frac{p_2 \lambda_2}{\lambda_k}\right)$$

$$\frac{2}{\lambda_2} M_2 = p_2 C_2 + \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\lambda_k \lambda_2}{\lambda_2^2 - \lambda_k^2} B_k \left(1 - \cos 2\pi \frac{p_2 \lambda_2}{\lambda_k}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\lambda_k \lambda_2}{\lambda_2^2 - \lambda_k^2} C_k \sin 2\pi \frac{p_2 \lambda_2}{\lambda_k}$$

причем при суммировании исключается $k = 2$.

Суммирование во всех этих формулах и уравнениях распространяется на значения k

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots n$$

Совершенно так же будем поступать и для остальных коэффициентов.

Полученная система уравнений заключает те же самые неизвестные, но она представляет ту особенность, что в каждом из этих уравнений входит одна из неизвестных, имея большой коэффициент, при всех же остальных неизвестных, содержащихся в этом уравнении, коэффициенты — малые. Такая система уравнений допускает решение по способу последовательных приближений, причем за первое приближение можно принять систему

$$\frac{2}{\lambda_1} N_1 = p_1 B_1; \qquad \frac{2}{\lambda_1} M_1 = p_1 C_1$$

$$\frac{2}{\lambda_2} N_2 = p_2 B_2; \qquad \frac{2}{\lambda_2} M_2 = p_2 C_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

откуда следует

$$B'_1 = \frac{2N_1}{p_1 \lambda_1}; \qquad C'_1 = \frac{2M_1}{p_1 \lambda_1}$$

$$B'_2 = \frac{2N_2}{p_2 \lambda_2}; \qquad C'_2 = \frac{2M_2}{p_2 \lambda_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Чтобы получить второе приближение, подставляем найденные приближенные величины $B'_1, C'_1, \ldots$, вместо $B_1, C_1, \ldots$, под знаки сумм; пусть значения этих сумм будут соответственно

$$S_1 \text{ и } T_1; \; S_2 \text{ и } T_2; \ldots$$

и составляем систему

$$\frac{2}{\lambda_1} N_1 = p_1 B_1 + \frac{1}{2\pi} S_1$$

$$\frac{2}{\lambda_1} M_1 = p_1 C_1 + \frac{1}{2\pi} T_1$$

$$\frac{2}{\lambda_2} N_2 = p_2 B_2 + \frac{1}{2\pi} S_2$$

$$\frac{2}{\lambda_2} M_2 = p_2 C_2 + \frac{1}{2\pi} T_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

отсюда находим второе приближение. По нему совершенно так же найдем третье и т. д., пока два последовательных приближения не дадут для наших неизвестных значений, разность между которыми лежит в пределах требуемой от результата точности.

Подобного рода вычисления приходится делать при исследовании приливов в данном порте; здесь мы не можем входить в подробности этого дела и отсылаем читателей к статье кап. 1-го ранга А. М. Бухтеева „Наблюдения приливов на Мурмане и обработка этих наблюдений“ (Зап. по гидр., вып. XXXII, 1910).

§ **63.** В том случае, когда величины периодов тоже неизвестны, а задана лишь кривая $f(x)$, представляющая, по своему характеру, наложение нескольких синусоид друг на друга, то разыскание этих составляющих становится еще сложнее предыдущего, и вычисление может быть выполнено или путем последовательных приближений, или более точно, как показано в § 64.

Понятно, что в этом случае составление уравнений вида

$$f(x_k) = A_0 + B_1 \sin n_1 x_k + C_1 \cos n_1 x_k + B_2 \sin n_2 x_k + C_2 \cos n_2 x_k + \ldots \qquad (*)$$

которые получались бы приписывая абсциссе x какое-либо частное значение $x = x_k$ и снимая с чертежа соответствующее значение функции $f(x_k)$, не ведет непосредственно к цели, ибо в этих уравнениях не только неизвестны A_0, A_1, C_1, ..., но и величины n_1, n_2, ..., так что уравнения по отношению к этим последним неизвестным трансцендентные.

Сущность того приближенного метода, который в этом случае удобнее применяется, состоит в следующем: пусть $y = f(x)$ есть та данная графически кривая, ординаты которой представляют сумму соответствующих ординат нескольких синусоид, или, как принято выражаться, сумму нескольких синусоидальных кривых, наложенных друг на друга, так что

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin(n_1 x + \alpha_1) + A_2 \sin(n_2 x + \alpha_2) + \ldots \qquad (*)$$

причем положим, что

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$$

Возьмем какую-нибудь длину L_1, по возможности большую и вычислим интеграл

$$\int_0^{L_1} f(x)\,dx$$

Тогда приближенная величина A_0 будет

$$A_0 = \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} f(x)\,dx$$

Переносим ось x параллельно самой себе на величину A_0 и составляем функцию

$$f_1(x) = f(x) - A_0 = A_1 \sin(n_1 x + \alpha_1) + A_2 \sin(n_2 x + \alpha_2) + \ldots$$

и, пользуясь интеграфом Абданка-Абакановича или вообще одним из способов, изложенных в предыдущих главах, составляем функцию

$$F_1(x) = \int_0^x f_1(x)\,dx$$

Очевидно, что эта функция будет

$$F_1(x) = -\left[\frac{A_1}{n_1}\cos(n_1 x + \alpha_1) + \frac{A_2}{n_2}\cos(n_2 x + \alpha_2) + \ldots\right] +$$
$$+ \left(\frac{A_1}{n_1}\cos\alpha_1 + \frac{A_2}{n_2}\cos\alpha_2 + \ldots\right)$$

Взяв опять ту же длину L_1, вычисляем интеграл

$$\int_0^{L_1} F_1(x)\,dx$$

Тогда опять имеем приближенное равенство

$$\left(\frac{A_1}{n_1}\cos\alpha_1 + \frac{A_2}{n_2}\cos\alpha_2 + \ldots\right) = \frac{1}{L_1}\int_0^{L_1} F_1(x)dx = K_1$$

Переносим опять ось x параллельно самой себе на величину K и, составив функцию

$$f_2(x) = F_1(x) - K_1$$

интегрируем ее и получаем

$$F_2(x) = \int_0^x f_2(x)\,dx$$

Ясно, что будет

$$F_2(x) = -\left[\frac{A_1}{n_1^2}\sin(n_1 x + \alpha_1) + \frac{A_2}{n_2^2}\sin(n_2 x + \alpha_2) + \ldots\right] +$$
$$+ \left[\frac{A_1}{n_1^2}\sin\alpha_1 + \frac{A_2}{n_2^2}\sin\alpha_2 + \ldots\right]$$

Вычислив затем интеграл

$$\int_0^{L_1} F_2(x)\,dx$$

получим приближенную величину постоянной

$$\frac{A_1}{n_1^2}\sin\alpha_2 + \frac{A_2}{n_2^2}\sin\alpha_2 + \ldots = K_2$$

и продолжаем описанный процесс далее.

Нетрудно видеть, что вследствие такого процесса происходит: у начальной кривой амплитуды слагающих волн относились между собою, как числа

$$A_1 : A_2 : A_3 : \ldots$$

После первого интегрирования, они относятся между собою, как числа

$$\frac{A_1}{n_1} : \frac{A_2}{n_1} : \frac{A_3}{n_3} : \ldots$$

После второго интегрирования — как числа

$$\frac{A_1}{n_1^2} : \frac{A_2}{n_2^2} : \frac{A_3}{n_3^3} : \ldots$$

вообще после k-ого преобразования амплитуды составляющих кривую $f_k(x)$ волн относятся между собою, как числа

$$\frac{A_1}{n_1^k} : \frac{A_2}{n_2^k} : \frac{A_3}{n_3^k} : \ldots$$

Если при построении кривых $f_1(x), f_2(x), \ldots f_k(x)$ мы будем брать такой масштаб, чтобы наибольшая ордината преобразованной кривой оставалась приблизительно такой же величины, как и у преобразуемой, то мы увидим, как постепенно кривая сглаживается, причем последовательно отпадают волны коротких периодов, и ясно, что когда мы сделаем столько преобразований, что величина $\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^k A_2$ будет настолько мала по сравнению с A_1 (чего всегда достигнем, ибо по предположению $n_1 < n_2$), что она на чертеже становится уже незаметною, то кривая $f_k(x)$ будет представлять собою чистую синусоиду вида

$$f_k(x) = \frac{A_1}{n_1^k}\sin(n_1 x + \alpha_1)$$

вычерченную лишь в ином масштабе для ординат, нежели предложенная кривая $f(x)$. С этой синусоиды находим длину λ_1 ее периода, а значит и величину $n_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}$.

Обратив затем внимание на масштаб ординат, найдем сейчас же, зная n_1, и наибольшие по абсолютной величине ординаты кривой $f_k(x)$ и амплитуду A_1, а по месту пересечения этой кривой с перенесенной осью x — и начальную фазу α_1.

Таким образом получается волна

$$A_1 \sin(n_1 x + \alpha_1) = A_1 \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_1} + \alpha_1\right)$$

длина которой λ_1 есть наибольшая.

Вычертив эту волну, составляем функцию

$$\varphi(x) = f(x) - A_1 \sin(n_1 x + \alpha_1)$$

и подвергаем эту функцию тому же процессу, изменив, в случае надобности, и весь масштаб чертежа, т. е. и масштаб для абсцисс, что удобно делается пантографом или фотографически, и получаем вторую волну, т. е. синусоиду

$$A_2 \sin(n_2 x + \alpha_2)$$

и т. д., „отсеивая" описанным способом одну волну или слагающую за другою, начиная с волн наибольшей длины.

Конечно, описанный процесс, если его исполнять без всяких вспомогательных средств, т. е. интеграфа, планиметра, пантографа, фотографического и проекционного аппарата, будет весьма утомителен, но если обработка и исследование записи $f(x)$ производится при надлежащем оборудовании, то описанный процесс далеко не сложен, тогда как решение системы уравнений таких, как ур-ние (*), требует продолжительных вычислений, как то видно из следующего параграфа. Понятно, что когда приближенные величины

$$A_1,\ n_1,\ \alpha_1;\ A_2,\ n_2,\ \alpha_2;\ \ldots$$

найдены, то можно найти более точные по общим правилам разыскания поправок, которые изложены в главе VIII о способе наименьших квадратов.

§ **64.** Ряды, расположенные по синусам и косинусам аргументов различных периодов, представляют частный случай рядов, расположенных по показательным функциям.

Пусть будет

$$F(x) = a_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 e^{\alpha_2 x} + a_3^{\alpha_3 x} + \ldots \tag{1}$$

такой ряд; ясно, что когда числа

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots$$

чисто мнимые, то этот ряд сейчас же преобразуется в тригонометрический, когда же эти числа комплексные, то члены ряда будут вида

$$ce^{ax} \cos bx \quad \text{и} \quad ge^{ax} \sin bx.$$

Таким образом, вопрос сводится к определению коэффициентов

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

и показателей

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

в ряде (1), когда в нем для представления заданной функции или кривой

$$y = f(x)$$

берется определенное, обыкновенно небольшое, число членов.

Для простоты рассуждения положим, что взято три члена, так что мы хотим представить заданную кривую формулою

$$y = a_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 e^{\alpha_2 x} + a_3 e^{\alpha_3 x} \tag{2}$$

Отметим равноотстоящие абсциссы

$$x_0, \; x_0 + h, \; x_0 + 2h, \ldots x_0 + nh \tag{3}$$

и снимем с чертежа или вычислим соответствующие им ординаты

$$y_0, \; y_1, \; y_2, \ldots y_n \tag{4}$$

Положим

$$p_1 = a_1 e^{\alpha_1 x_0}; \quad p_2 = a_2 e^{\alpha_2 x_0}; \quad p_3 = a_3 e^{\alpha_3 x_0} \tag{5}$$

$$z_1 = e^{\alpha_1 h}; \quad z_2 = e^{\alpha_2 h}; \quad z_3 = e^{\alpha_3 h} \tag{6}$$

тогда, полагая в ф-ле (2) последовательно x равным значениям (3), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
y_0 &= p_1 + p_2 + p_3 \\
y_1 &= p_1 z_1 + p_2 z_2 + p_3 z_3 \\
y_2 &= p_1 z_1^2 + p_2 z_2^2 + p_3 z_3^2 \\
y_3 &= p_1 z_1^3 + p_2 z_2^3 + p_3 z_3^3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_k &= p_1 z_1^k + p_2 z_2^k + p_3 z_3^k \\
y_{k+1} &= p_1 z_1^{k+1} + p_2 z_2^{k+1} + p_3 z_3^{k+1} \\
y_{k+2} &= p_1 z_1^{k+2} + p_2 z_2^{k+2} + p_3 z_3^{k+2} \\
y_{k+3} &= p_1 z_1^{k+3} + p_2 z_2^{k+3} + p_3 z_3^{k+3} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n &= p_1 z_1^n + p_2 z_2^n + p_3 z_3^n
\end{aligned} \tag{*}$$

Из этой системы и надо определить неизвестные

$$p_1, \; p_2, \; p_3 \quad \text{и} \quad z_1, \; z_2, \; z_3$$

Положим, что величины z_1, z_2, z_3 суть корни уравнения

$$z^3 + Cz^2 + Bz + A = 0 \tag{7}$$

Возьмем в нашей системе какую-нибудь группу четырех последовательных уравнений, например группу (*), умножим первое уравнение этой группы на A, второе на B, третье на C и приложим к четвертому, получим

$$\begin{aligned} Ay_k + By_{k+1} + Cy_{k+2} + y_{k+3} = p_1 z_1^k (A + Bz_1 + Cz_1^2 + z_1^3) + \\ + p_2 z_2^k (A + Bz_2 + Cz_2^2 + z_2^3) + \\ + p_3 z_3^k (A + Bz_3 + Cz_3^2 + z_3^3) \end{aligned}$$

Так как по предположению z_1, z_2, z_3 суть корни ур-ния (7), то

$$A + Bz_1 + Cz_1^2 + z_1^3 = 0; \quad A + Bz_2 + Cz_2^2 + z_2^3 = 0$$
$$A + Bz_3 + Cz_3^2 + z_3^3 = 0$$

и, значит, будет

$$Ay_k + By_{k+1} + Cy_{k+2} + y_{k+3} = 0 \tag{8}$$

Таким образом, полагая последовательно k равным

$$0,\ 1,\ 2, \ldots\ (n-3)$$

получим систему линейных уравнений с неизвестными A, B, C.

$$\begin{aligned} Ay_0 + By_1 + Cy_2 + y_3 = 0 \\ Ay_1 + By_2 + Cy_3 + y_4 = 0 \\ Ay_2 + By_3 + Cy_4 + y_5 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Ay_{n-3} + By_{n-2} + Cy_{n-1} + y_n = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Решаем эту систему по методе наименьших квадратов (см. гл. VIII) и, получив вероятнейшие значения величин

$$A,\ B,\ C$$

составляем уравнение

$$z^3 + Cz^2 + Bz + A = 0$$

и вычисляем его корни

$$z_1,\ z_2,\ z_3$$

и найденные значения подставляем в первоначальную систему, которую опять-таки решаем по способу наименьших квадратов, и находим неизвестные

$$p_1,\ p_2,\ p_3$$

после чего из ур-ний (6) получаем

$$\alpha_1 = \frac{1}{h} \lg z_1; \quad \alpha_2 = \frac{1}{h} \lg z_2; \quad \alpha_3 = \frac{1}{h} \lg z_3 \tag{10}$$

затем

$$a_1 = p_1 e^{-\alpha_1 x_0}; \quad a_2 = p_2 e^{-\alpha_2 x_0}; \quad a_3 = p_3 e^{-\alpha_3 x_0} \tag{11}$$

тогда в формуле

$$y = a_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 e^{\alpha_2 x} + a_3 e^{\alpha_3 x}$$

все будет известно.

Очевидно, что это рассуждение само собою обобщается на тот случай, когда в ф-ле (1) взято не три, а бо́льшее число членов.

ГЛАВА VI

ФОРМУЛЫ, ВЫРАЖАЮЩИЕ СВЯЗЬ МЕЖДУ СУММОЮ И ИНТЕГРАЛОМ, РАЗНОСТЯМИ И ПРОИЗВОДНЫМИ. ФОРМУЛЫ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

§ 65. Представление функции под видом тригонометрического ряда дает возможность вывести знаменитую формулу Эйлера, выражающую зависимость между суммою ряда и интегралом. Эта формула имеет то важное значение, что она дает возможность вычислять по приближению как суммы рядов, так и интегралы.

В § 48 указано, что когда функция задана в промежутке от a до $a+2$, то она представляется таким рядом:

$$f(x)=A_0+A_1\cos\frac{\pi(x-a)}{l}+A_2\cos\frac{2\pi(x-a)}{l}+$$

$$+\ldots+A_n\cos\frac{n\pi(x-a)}{l}+\ldots \qquad (1)$$

$$\ldots+B_1\sin\frac{\pi(x-a)}{l}+B_2\sin\frac{2\pi(x-a)}{l}+\ldots+B_n\sin\frac{n\pi(x-a)}{l}+\ldots$$

причем

$$A_0+\frac{1}{2l}\int\limits_a^{a+2l}f(\xi)\,d\xi$$

$$A_n=\frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l}f(\xi)\cos\frac{n\pi(\xi-a)}{l}\,d\xi\,; \qquad B_n=\frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l}f(\xi)\sin\frac{n\pi(\xi-a)}{l}\,d\xi$$

Вместе с тем в главе V доказано, что если в ф-ле (1) положить $x=a$, то получится сумма, равная

$$\frac{1}{2}[f(a)+f(a+2l)]$$

т. е. будет

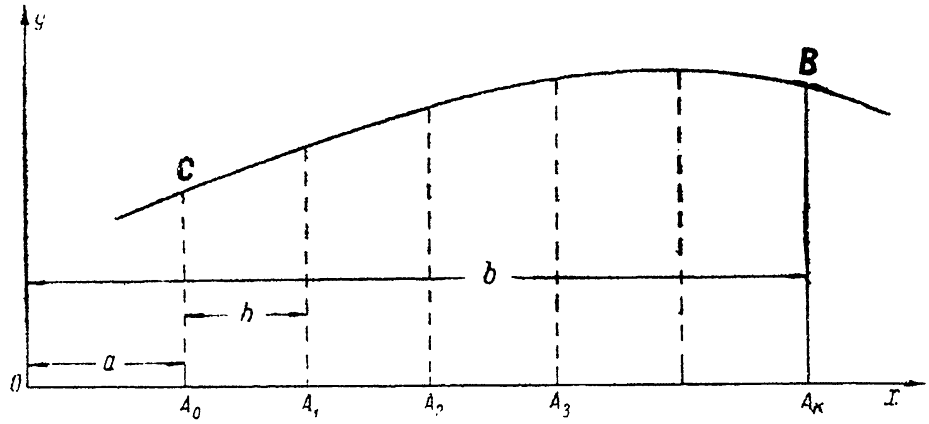
$$\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(a+2l)=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{a}^{a+2l} f(\xi)\,d\xi+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{a}^{a+2l} f(\xi)\cos\frac{n\pi(\xi-a)}{h}\,d\xi \tag{2}$$

Полагая $2l=h$, можем ф-лу (2) написать так:

$$\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(a+h)=\frac{1}{h}\int_{a}^{a+h} f(\xi)\,d\xi+\frac{2}{h}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{a}^{a+h} f(\xi)\cos\frac{2n\pi(\xi-a)}{l}\,d\xi$$

Умножая на h и написав x вместо ξ под знаком интеграла, имеем



Фиг. 66.

$$\frac{h}{2}[f(a)+f(a+h)]=\int_{a}^{a+h} f(x)\,dx+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{a}^{a+h} f(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx \tag{3}$$

Положим теперь, что дана какая-нибудь функция $f(x)$ в промежутке от $x=a$ до $x=b$ (фиг. 66).

Разделим промежуток $b-a$ на произвольное число k равных частей, и пусть

$$\frac{b-a}{k}=h$$

тогда абсциссы промежуточных точек A_1, A_2, ... A_{k-1} будут соответственно

$$a+h,\quad a+2h,\ldots a+(k-1)h$$

Применим для каждого из этих промежутков ф-лу (3), тогда, замечая, что

$$\cos\frac{2\pi n(x-a+ph)}{h}=\cos\frac{2\pi n(x-a)}{h}$$

получим следующий ряд формул:

$$\frac{h}{2}[f(a)+f(a+h)]=\int_{a}^{a+h} f(x)\,dx+\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{a}^{a+h} f(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx$$

$$\frac{h}{2}[f(a+h)+f(a+2h)]=$$

$$=\int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{a+h}^{a+2h} f(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx$$

. . . .

$$\frac{h}{2}[f(a+(p-1)h)+f(a+ph)]=$$

$$=\int_{a+(p-1)h}^{a+ph} f(x)\,dx+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{a+(p-1)h}^{a+ph} f(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx$$

. . . .

$$\frac{h}{2}[f(a+(k-1)h)+f(b)]=$$

$$=\int_{a+(k-1)h}^{b} f(x)\,dx+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{a+(k-1)h}^{b} f(x)\cdot\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx$$

Складывая эти все равенства, в левой части получим следующую сумму:

$$T=\left[\frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+f(a+k-1h)+\frac{1}{2}f(b)\right]$$

т. е. как раз ту сумму, которая при вычислении по правилу трапеций будучи умножена на h, представляет приближенную величину площади A_0BCA_k, в правой же части получится

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{a}^{b} f(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx$$

Итак имеем равенство

$$T\cdot h=\int_{a}^{b} f(x)\,dx+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{a}^{b} f(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx \tag{4}$$

Заметив, что $b = a + kh$, преобразуем стоящие под знаком суммы интегралы, интегрируя по частям $2p$ раз сряду; получим

$$\int f(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{h}{2\pi}f(x)\sin\frac{2n\pi(x-a)}{h} - \frac{1}{n}\frac{h}{2\pi}\int f'(x)\sin\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx\,;$$

$$-\frac{1}{n}\frac{h}{2\pi}\int f'(x)\sin\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 f'(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h} - \frac{1}{n^2}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2\int f''(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx\,;$$

$$-\frac{1}{n^2}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2\int f''(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{n^3}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^3 f''(x)\sin\frac{2n\pi(x-a)}{h} + \frac{1}{n^3}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^3\int f'''(x)\sin\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx\,;$$

$$\frac{1}{n^3}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^3\int f'''(x)\sin\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{n^2}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^4 f'''(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h} + \frac{1}{n^4}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^4\int f^{\mathrm{IV}}(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx\,;$$

. . . .

— закон последовательности членов очевиден; подставляя пределы a и $b = a + kh$, видим, что все члены с синусами пропадут, все же косинусы вне интеграла при обоих пределах обращаются в 1, так что, сложив полученные равенства, будем иметь

$$\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2[f'(b) - f'(a)] - \frac{1}{n^4}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^4[f'''(b) - f'''(a)] +$$

$$+ \frac{1}{n^6}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^6[f^{\mathrm{IV}}(b) - f^{\mathrm{IV}}(a)] + \ldots + (-1)^{p-1}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2p}\frac{1}{n^{2p}}[\overset{(2p-1)}{f}(b) - \overset{(2p-1)}{f}(a)] +$$

$$+ (-1)^p\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2p}\frac{1}{n^{2p}}\int_a^b f^{(2p)}(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx$$

Делая здесь последовательно $n = 1, 2, 3, \ldots$, подставляя в ф-лу (4) и вынося постоянные величины за знаки сумм, получим

$$Th = \int_a^b f(x)\,dx +$$

$$+ 2\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2[f'(b) - f'(a)]\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^2} - 2\left(\frac{h}{2\pi}\right)^4[f'''(b) - f'''(a)]\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^4} +$$

$$+2\left(\frac{h}{2\pi}\right)^6[f^{\mathrm{V}}(b)-f^{\mathrm{V}}(a)]\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^6}+\ldots \tag{5}$$

$$\ldots+2(-1)^{p-1}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2p}[f^{(2p-1)}(b)-f^{(2p-1)}(a)]\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{2p}}+R_{2p}$$

причем

$$R_{2p}=2(-1)^p\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2p}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{2p}}\int_a^b f^{(2p)}(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx$$

Известна следующая общая формула:

$$S_{2p}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{2p}}=\frac{\pi^{2p}\cdot B_p 2^{2p-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2p}=\frac{\pi^{2p}\,B_p 2^{2p-1}}{(2p)!}$$

где B_p есть так называемое p-ое Бернуллиево число.

Первые из вышеприведенных сумм по этой формуле оказываются таковы:

$$S_2=\frac{\pi^2}{6}=1.6449341 \qquad S_4=\frac{\pi^4}{90}=1.0823232$$

$$S_6=\frac{\pi^6}{945}=1.0173431 \qquad S_8=\frac{\pi^8}{9450}=1.0040773$$

$$S_{10}=\frac{\pi^{10}}{93555}=1.0009946$$

Подставляя эти величины в предыдущую формулу, получим

$$Th=\int_a^b f(x)\,dx+\frac{1}{12}h^2[f'(b)-f'(a)]-\frac{1}{720}h^4[f'''(b)-f'''(a)]+$$

$$+\frac{1}{30240}h^6[f^{\mathrm{V}}(b)-f^{\mathrm{V}}(a)]-\frac{1}{1\,209\,600}h^8[f^{\mathrm{VII}}(b)-f^{\mathrm{VII}}(a)]+ \tag{6}$$

$$+\frac{1}{47\,900\,160}h^{10}[f^{\mathrm{IX}}(b)-f^{\mathrm{IX}}(a)]+\ldots+$$

$$+(-1)^{p-1}\frac{B_p}{(2p)!}h^{2p}[f^{(2p-1)}(b)-f^{(2p-1)}(a)]+R_{2p}$$

причем

$$T=\frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(k-1)h)+\frac{1}{2}f(b)$$

и остаточный член

$$R_{2p}=2(-1)^p\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2p}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{2p}}\int_a^b f^{(2p)}(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx$$

Это и есть знаменитая формула Эйлера, выражающая связь между суммою и интегралом.

По поводу выражения остаточного члена заметим, во-первых, что интегрируя один раз по частям, имеем

$$\int_a^b f^{(2p)}(x)\cos\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx = \left[\frac{h}{2\pi}\frac{1}{n}f^{(2p)}\sin\frac{2n\pi(x-a)}{h}\right]_a^b -$$

$$-\frac{1}{n}\frac{1}{2\pi}\int_a^b f^{(2p+1)}(x)\sin\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{n}\frac{h}{2\pi}\int_a^b f^{(2p+1)}(x)\sin\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx$$

Следовательно, можно писать

$$R_{2p} = (-1)^{p+1}\,2\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2p+1}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{2p+1}}\int_a^b f^{(2p+1)}(x)\sin\frac{2n\pi(x-a)}{h}\,dx$$

* Введя функцию

$$P_{2p+1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi(x-a)}{2^{2p}\pi^{2p+1}n^{2p+1}}$$

можем переписать остаточный член в виде

$$R_{2p} = (-1)^{p+1}h^{2p+1}\int_a^b f^{2p+1}(x)\,P_{2p+1}(x)\,dx \qquad (*)$$

Формула (6) может служить как для вычисления суммы

$$S = f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+\overline{k-1}h) + f(b)$$

так и для вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

В самом деле, очевидно, что

$$S = T + \frac{1}{2}[f(a) + f(b)]$$

и формула (6) дает для вычисления суммы такое выражение

$$S = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{1}{2h}[f(a)+f(b)] + \frac{1}{12h}[f'(b) - f'(a)] -$$

$$-\frac{1}{720}h^{3}\,[f'''(b)-f'''(a)]+\ldots+(-1)^{p-1}\frac{B_p}{(2p)!}h^{2p-1}[f^{(2p-1)}(b)- \tag{7}$$
$$-f^{(2p-1)}(a)]+R_{2p}$$

и, наоборот, для вычисления интеграла имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx=hT-\frac{1}{12}h^2[f'(b)-f'(a)]++\frac{1}{720}h^4[f'''(b)-f'''(a)]-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^p\frac{B_p}{(2p)!}h^{2p}[f^{(2p-1)}(b)-f^{(2p-1)}(a)] \tag{8}$$

§ **66.** Дадим теперь несколько примеров применения формулы Эйлера для вычисления сумм.

Пример 1. Вычислить при большом k сумму

$$S_k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}$$

Очевидно, что если k число большое, например 1 000 000, то непосредственное вычисление этой суммы невозможно.

Воспользуемся формулой (7). Для этого стоит только положить:

$$f(x)=\frac{1}{x};\quad a=1;\quad b=k\quad \text{и}\quad h=1$$

тогда будет

$$S=f(a)+f(a+h)+\ldots+f(b)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}=S_k$$

и, заметив, что

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_1^k\frac{1}{x}\,dx=\lg k$$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2};\quad f'(b)-f'(a)=1-\frac{1}{k^2}$$

$$f'''(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'''=-1\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{x^4};\qquad f'''(b)-f'''(a)=1\cdot2\cdot3\left(1-\frac{1}{k^4}\right)$$

$$f^{\mathrm{V}}(x)=\frac{-1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{x^6}$$

имеем по формуле (7)

$$S_k=\lg k+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)-\frac{1\cdot2\cdot3}{720}\left(1-\frac{1}{k^4}\right)+$$
$$+\int_1^k\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{x^6}P_5(x)\,dx$$

где

$$P_5(x) = \frac{1}{2^4 \pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n^5}$$

есть непрерывная периодическая функция с периодом, равным единице. При беспредельном возрастании целого положительного числа k интеграл

$$\int_1^k \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{x^6} P_5(x)\, dx$$

стремится к конечному пределу, и из предыдущей формулы для S_k мы видим, что разность $S_k - \lg k$ имеет конечный предел при беспредельном возрастании k:

$$\lim_{k-\infty} (S_k - \lg k) = C$$

Этот предел C называется постоянной Эйлера. Мы можем таким образом написать

$$S_k = \lg k + C + \varepsilon_k$$

где ε_k стремится к нулю при беспредельном возрастании k. Обращаясь к написанной выше формуле для S_k и считая, что в ее остаточном члене положено $k = \infty$, получим следующую приближенную формулу для вычисления C:

$$C \approx S_k - \lg k - \varphi\left(\frac{1}{k}\right)$$

где

$$\varphi\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{k} - \frac{1}{12}\frac{1}{k^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{720}\frac{1}{k^4}$$

Применим указанную выше приближенную формулу для C при $k = 10$*.

Чтобы вычислить S_{10}, поступаем так:

$$S_{10} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} =$$

$$= 2 + \frac{3}{8} + \frac{3}{10} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$$

$$2 = 2.0000000$$

$$\frac{3}{8} = 0.3750000$$

$$\frac{3}{10} = 0.3000000$$

$$\frac{1}{7} = 0.1428571$$

$$\frac{1}{9} = 0.1111111$$

$$S_{10} = 2.9289682$$

$$\begin{array}{r} \lg 10 = 2.3025851 \\ \hline S_{10} - \lg 10 = 0.6263831 \end{array}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k} - \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{k^2} + \frac{1}{120}\cdot\frac{1}{k^4}$$

Значит,

$$-\varphi\left(\frac{1}{10}\right) = -\frac{1}{20} + \frac{1}{1200} - \frac{1}{120}\cdot\frac{1}{10^4} - \ldots$$

$$\begin{array}{rr} \frac{1}{20} = & 0.0500000 \\ \frac{1}{120\cdot 10^4} = & 0.0000008 \\ \hline & -0.0500008 \\ \frac{1}{1200} = & +0.0008333 \\ \hline -\varphi\left(\frac{1}{10}\right) = & -0.0491675 \\ S_{10} - \lg 10 = & 0.6263831 \\ \hline S = & 0.5772156 \end{array}$$

Причем здесь все знаки верны, так как более точное вычисление дает

$$C = 0.57721566490153 28\ldots$$

* Пример 2. Вычислить величину

$$\lg(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots k)$$

иначе сумму

$$S_k = \lg 1 + \lg 2 + \lg 3 + \ldots + \lg k$$

Непосредственное вычисление этой суммы представляется затруднительным при большом k. Пример этот доставит нам вывод знаменитой формулы Стирлинга, дающей величину суммы S_k для больших значений числа k.

Делаем в ф-ле (7)

$$f(x) = \lg x; \quad a = 1; \quad b = k; \quad h = 1$$

Имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_1^k \lg x\,dx = [x\lg x - x]_{x=1}^{x=k} = k\lg k - k + 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}; \quad f'(b) - f'(a) = \frac{1}{k} - 1$$

$$f'''(x)=\frac{1\cdot 2}{x^3};\quad f'''(b)-f'''(a)=1\cdot 2\left(\frac{1}{k^3}-1\right)$$

$$f^{V}(x)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x^5}$$

Таким образом можем написать:

$$S_k=k\lg k-k+\frac{1}{2}\lg k+1+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{k}-1\right)-\frac{1}{360}\left(\frac{1}{k^3}-1\right)-$$

$$-\int\limits_1^k\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x^5}P_5(x)\,dx$$

где $P_5(x)$ имеет указанное выше выражение. Мы можем переписать предыдущую формулу в виде:

$$S_k=k\lg k-k+\frac{1}{2}\lg k+C_1+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{k}-\frac{1}{360}\cdot\frac{1}{k^3}+$$

$$+\int\limits_k^\infty\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x^5}P_5(x)\,dx$$

где

$$C_1=1-\frac{1}{12}+\frac{1}{360}-\int\limits_1^\infty\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x^5}P_5(x)\,dx$$

Обозначим:

$$\rho_k=\int\limits_k^\infty\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x^5}P_5(x)\,dx$$

Полагая $x=kt$, получим

$$\rho_k=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{k^4}\int\limits_1^\infty\frac{P_5(kt)}{t^5}\,dt$$

Из выражения для $P_5(x)$ мы имеем:

$$|P_5(x)|\leqslant\frac{1}{2^4\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}<\frac{1}{8\pi^5}$$

и, обозначая $m=\frac{1}{8\pi^5}$, получим:

$$|\rho_k|\leqslant\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot m}{k^4}\int\limits_1^\infty\frac{dt}{t^5}=\frac{6m}{k^4}$$

откуда видно, что ρ_k стремится к нулю при возрастании k, причем произведение $k^4\rho_k$ остается ограниченным.

Можно показать, что и произведение $k^5 \rho_k$ остается ограниченным. При принятых обозначениях формулу для S_k мы можем переписать в виде:

$$S_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \lg k - k + C_1 + \eta_k \qquad (*)$$

где

$$\eta_k = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{360} \cdot \frac{1}{k^3} + \rho_k$$

Для определения постоянной C_1 воспользуемся формулой Wallis'а:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \ldots (2n-1)^2} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

Эту формулу можно писать так:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \lim_{n=\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \lim_{n=\infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n)^2}{(2n)!} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Логарифмируя и обозначая попрежнему:

$$S_n = \lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg n$$
$$S_{2n} = \lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg (2n)$$

получаем, в силу формулы (*):

$$\frac{1}{2} \lg \pi - \frac{1}{2} \lg 2 = \lim_{n=\infty} \left[2_n \lg 2 + 2S_n - S_{2n} - \frac{1}{2} \lg (2n+1) \right] =$$

$$= \lim_{n=\infty} \left\{ 2n \lg 2 + 2\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \lg n - n + C_1 + \eta_n\right] - \left[\left(2n + \frac{1}{2}\right) \lg (2n) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2n + C_1 + \eta_{2n}\right] - \frac{1}{2} \lg (2n+1)\right\} = \lim_{n=\infty} \left[-\frac{1}{2} \lg \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lg \frac{2n+1}{n} + \right.$$

$$\left. + C_1 + 2\eta_n - \eta_{2n} \right] \qquad (*)$$

При неопределенном возрастании числа n, $\lg \dfrac{2n+1}{n}$ имеет своим пределом $\lg 2$; величины η_n и η_{2n} имеют своим пределом 0, и предыдущее уравнение дает

$$C_1 = \frac{1}{2} \lg \pi + \frac{1}{2} \lg 2 = \lg \sqrt{2\pi}$$

Таким образом имеем формулу

$$S_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \lg k - k + \lg \sqrt{2\pi} + \eta_k. \qquad (1)$$

где

$$\eta_k = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{320} \cdot \frac{1}{k^3} + \rho_k$$

Из этой формулы следует такая:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k = \sqrt{2\pi k} \cdot k \quad \cdot e^{-k} \cdot e^{\left(\frac{1}{12}\frac{1}{k} - \frac{1}{360} \cdot \frac{1}{k^3} + \rho_k\right)} \qquad (2)$$

В этой формуле последний множитель при возрастании числа k имеет своим пределом 1, следовательно, предыдущее равенство выражает такую теорему: *Предел отношения* $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}{\sqrt{2\pi k}\, k^k \cdot e^{-k}}$ *при неопределенном возрастании числа k есть 1.*

Чтобы показать степень точности этих формул, положим $k = 10$ и вместо натуральных возьмем обыкновенные табличные логарифмы, тогда ф-ла (1) дает

$$\lg(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 10) = \lg\sqrt{2\pi} + \left(10 + \frac{1}{2}\right) -$$
$$- 10M + M\left(\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{10} - \frac{1}{360} \cdot \frac{1}{1000} + \rho_k\right)$$

причем

$$M = 0.43429448.$$

Таким образом имеем для правой части равенства

$$\begin{array}{rr}
\frac{1}{2}\lg 2 = & 0.1505150 \\
\frac{1}{2}\lg \pi = & 0.2485749 \\
\hline
\frac{1}{2}\lg 2\pi = & 0.3990899 \\
10 + \frac{1}{2} = & 10.5000000 \\
\frac{1}{120}M = & 0.0036191 \\
\hline
 & 10.9027090 \\
 & -\ 4.3429450 \\
\hline
\lg N = & 6.5597630
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
10\,M = & 4.3429448 \\
\frac{1}{360\,000}\,M = & 0.0000012 \\
\hline
 & 4.3429460
\end{array}$$

С другой стороны, имеем

$$N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots 10 = 720 \cdot 5040 = 3\,628\,800$$
$$\lg N = 6.5597630$$

т. е. наш результат верен до последнего знака; следовательно, если бы мы этим результатом воспользовались для определения $\lg C_1$, то хотя и получили бы $\lg C_1 = 0.3990899$, но тогда формула не имела бы того изящества, которое ей придал Стирлинг.

Пример 3. Вычислим по формуле Эйлера интеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} = \lg 2 = 0.69314718$$

который мы имели в § 32 и для которого

$$hT = 0.69377$$

при

$$h = \frac{1}{10}$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x} = \quad (1+x)^{-1} \\ f'(x) &= \qquad\quad -(1+x)^{-2} \\ f''(x) &= \quad 1\cdot 2\cdot \quad (1+x)^{-3} \\ f'''(x) &= -1\cdot 2\cdot 3\cdot (1+x)^{-4} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

следовательно, будет

$$f'(1) = -\frac{1}{4};\quad f'(0) = -1$$

$$f'''(1) = -\frac{3}{8};\quad f''(0) = -6$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Затем

$$\begin{aligned} hT &= & &= 0.69377 \\ -\frac{1}{12}\cdot h^2[f'(1) - f'(0)] &= -\frac{1}{1600} & &= -0.00062 \\ +\frac{h^4}{720}[f'''(1) - f'''(0)] &= +\frac{1}{1230000} & &= +0.00000 \\ & & & \overline{\quad 0.69315} \end{aligned}$$

Таким образом получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0.69315$$

§ 67. Интерполирование. Формула Эйлера дает связь между суммою и интегралом для таких функций, аналитическое выражение которых задано и для которых можно составить выражение производных первого, третьего, пятого и т. д. порядков. Но во многих случаях надо иметь возможность вычислять интеграл, имея лишь частные значения функции для последовательных равноотстоящих значений аргумента, в других же случаях надо по таким же частным значениям найти частные значения первой, второй и т. д. производной для заданных частных значений аргумента. Этот последний вопрос представляется, например, в том случае, когда, имея графическую запись движения центра тяжести твердого тела, требуется найти величину равнодействующей сил, к нему приложенных.

Решение как первого вопроса, так и второго, относится к так называемому *интерполированию*, для выполнения которого имеется множество различных формул и приемов, из них мы ограничимся простейшими.

Положим, что для функции

$$y = f(x)$$

заданной или не заданной аналитически, составлен ряд частных значений

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots y_n, \ldots$$

соответствующих значениям

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ a+3h, \ldots a+nh$$

аргумента.

По этим значениям функции составляют значения ее первых разностей, а именно:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0;\ \Delta y_1 = y_2 - y_1;\ \Delta y_2 = y_3 - y_2;\ \ldots\ \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} \quad (1)$$

По первым разностям составляют значения вторых разностей или разностей второго порядка, вычитая из каждой последующей разности предыдущую, т. е. полагая

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0;\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1;\ \Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 \quad (2)$$

По разностям второго порядка составляем разности третьего порядка, полагая

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0;\ \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1;\ \Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 \quad (3)$$

и т. д., вообще будет

$$\begin{gathered} \Delta^k y_0 = \Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0;\ \Delta^k y_1 = \Delta^{k-1} y_2 - \Delta^{k-1} y_1 \\ \Delta^k y_2 = \Delta^{k-1} y_3 - \Delta^{k-1} y_2 \end{gathered} \quad (4)$$

Таким образом можем составить табл. 12.

Эту таблицу часто располагают несколько иначе, вписывая разности между теми двумя числами, из коих они образуются, и тогда запись получает такой вид, как в табл. 13.

Таблица 12

Аргументы	Функции	Первые разности	Вторые разности	Третьи разности	Четвертые разности	Пятые разности
a	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
$a+h$	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_1$
$a+2h$	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_2$	
$a+3h$	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_3$		
$a+4h$	y_4	Δy_4	$\Delta^2 y_4$			
$a+5h$	y_5	Δy_5				
$a+6h$	y_6					
. . .						

Таблица 13

№№ k	Аргументы x_k	Функции y_k	Первые разности Δy_k	Вторые разности $\Delta^2 y_k$	Третьи разности $\Delta^3 y_k$	Четвертые разности $\Delta^4 y_k$	Пятые разности $\Delta^5 y_k$
0	a	y_0	Δy_0				
1	$a+h$	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$		
2	$a+2h$	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
3	$a+3h$	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_1$
4	$a+4h$	y_4	Δy_4	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_3$	$\Delta^4 y_2$	
5	$a+5h$	y_5	Δy_5	$\Delta^2 y_4$			
6	$a+6h$	y_6					
. .	. . .						

Из ф-л (1), (2), (3) и т. д. вытекают следующие соотношения:

Во-первых:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$
$$\Delta^2 y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$$
$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0) =$$
$$= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

$$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 + (y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1) - (y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0) = \\ = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$$

. . . .

$$\Delta^k y_0 = y_k - k y_{k-1} + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2} y_{k-2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3} y_{k-3} + \dots \\ \dots + (-1)^{k-1} k\, y_1 + (-1)^k y_0 \qquad \text{(I)}$$

причем в последнем выражении коэффициенты — биномиальные, т. е. те же, как при возвышении количества $(\alpha - 1)^k$, а вместо степеней буквы α стоят буквы y с таким значком, как показатель при α.

Эта формула тотчас же проверяется переходом от k к $k+1$.

Во-вторых:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0$$
$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = (y_0 + \Delta y_0) + (\Delta y_0 + \Delta^2 y_0) = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$$
$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 + (\Delta y_0 + 2\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_0) = \\ = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$$

. . . .

вообще

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_0 + \dots + \Delta^k y \qquad \text{(II)}$$

причем и эту формулу легко проверить переходом от k к $k+1$ или же, заметив, что символически можно писать

$$y_1 = (1+\Delta) y_0;\quad y_2 = (1+\Delta)^2 y_0;\quad y_3 = (1+\Delta)^3 y_0$$

. . . .

допустить символическую формулу

$$y_k = (1+\Delta)^k y_0$$

и, обратив внимание, что тогда символически будет

$$y_{k+1} = (1+\Delta) y_k = (1+\Delta)(1+\Delta)^k y_0 = (1+\Delta)^{k+1} y_0$$

т. е., что приняв справедливость этой символической формулы для k, видим, что она справедлива и вообще, а значит, справедлива и равносильная ей несимволическая ф-ла (II).

Ф-ла (II), как видно, имеет место для *целых и положительных* значений буквы k; эту формулу распространяют на любые значения k, тогда, написав вместо буквы k букву t, получим выражение

$$y_t = y_0 + \frac{t}{1}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_0 + \dots \qquad \text{(III)}$$

В правой части (III) мы получили бесконечный ряд от переменной t. Сохраняя в этом ряде только n членов его, мы допустим погрешность, которую можно оценить, исследовав остаточный член этого ряда. Но в этот вопрос входить здесь не будем, отослав интересующихся к сочинению акад. А. А. Маркова „Исчисление конечных разностей“ (1913, стр. 20).

Очевидно, что выражение (III) представляет такую целую функцию буквы t, которая обращается

$$\begin{array}{lll} \text{при } t=0 & \text{в} & y_0 \\ \text{„ } t=1 & \text{„} & y_1 \\ \text{„ } t=2 & \text{„} & y_2 \end{array}$$

и т. д.

Как видно, в ф-лы (II) и (III), при первом расположении, входят значения функции и ее разностей, находящиеся в одной горизонтальной строке.

При втором расположении, в эти формулы входят значения функции и ее разностей, находящиеся в одной наклонной сверху вниз строке.

Ясно, что обе эти формулы можно писать начиная с любого индекса n, т. е. любого значения аргумента $x_n = a + nh$, и у нас будет

$$y_{n+k} = y_n + k\Delta y_n + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 y_n + \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3 y_n + \\ + \ldots + \Delta^k y_n \qquad \text{(II')}$$

$$y_{n+t} = y_n + t\Delta y_n + \frac{t(t-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 y_n + \frac{t(t-1)(t-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3 y_n + \ldots \qquad \text{(III')}$$

причем будет

$$y_{n+t} = f[a + (n+t)h]$$

Ф-лой (III), называемой интерполяционной формулой Ньютона, пользуются обыкновенно для составления значений функций y, соответствующих промежуточным значениям аргумента, лежащим между a и $a+h$.

Так, например, положим, что даны значения $a = 1000$, $h = 10$ и известны значения функции y для ряда аргументов, идущих в такой арифметической прогрессии; требуется составить значения y для промежуточных аргументов через $h = 1$.

Пусть значения функции y даются табл. 14.

Таблица 14

x	y	x	y
1000	3.0000000	1030	3.0128372
1010	3.0043214	1040	3.0170333
1020	3.0086002	1050	3.0211893

По этим значениям составляем таблицу разностей (табл. 15).

Таблица 15

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1000	3.0000000	0.0043214	—0.0000426	0.0000008
1010	3.0043214	0.0042788	—0.0000418	0.0000009
1020	3.0086002	0.0042370	—0.0000409	0.0000008
1030	3.0128372	0.0041961	—0.0000401	
1040	3.0170333	0.0041560		
1050	3.0211893			

Из этой таблицы ясно, что третьи разности $\Delta^3 y$ в рассматриваемых пределах аргумента можно считать постоянными и равными $+0.00000085$ и, следовательно, писать

$$y_t = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_0$$

Причем

$$y_0 = 3.0000000;\ \Delta y_0 = 0.0043214;\ \Delta^2 y_0 = -0.0000426$$

и

$$\Delta^3 y_0 = +0.00000085$$

Давая величине t последовательно значения: $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}$ и т. д., располагая вычисления по следующей схеме (табл. 16), получим требуемые значения y.

При получении величины y восьмой знак после запятой отброшен, причем седьмой усилен на единицу, когда отбрасываемый был более 5.

Взяв любую семизначную таблицу логарифмов, убедимся, что функция y есть не что иное, как $\lg x$, и мы увидим, что все полученные нами значения *верны* до последнего знака.

Замечая, что в нашем случае

$$x = a + th$$

и

$$t = \frac{x-a}{h}$$

Таблица 16

I	II	III	IV	V	VI
t	x	$t\cdot\Delta y_0$	$\frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0$	$\frac{t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_0$	y_0+(III)+(IV)+(V)$=y$
0	1000	0	0	0	3.0000000
0.1	1001	0.00043214	0.00000192	0.00000002	3.0004341
0.2	1002	0.00086428	0.00000343	0.00000004	3.0008577
0.3	1003	0.00129642	0.00000447	0.00000005	3.0013009
0.4	1004	0.00172856	0.00000511	0.00000005	3.0017337
0.5	1005	0.00216070	0.00000532	0.00000005	3.0021661
0.6	1006	0.00259284	0.00000511	0.00000005	3.0025930
0.7	1007	0.00302498	0.00000447	0.00000004	3.0030295
0.8	1008	0.00345712	0.00000343	0.00000002	3.0034606
0.9	1009	0.00388926	0.00000192	0.00000001	3.0038912
1.0	1010	0.00432140	0.00000000	0.00000000	3.0043214

мы можем ф-лу (III) написать в таком виде:

$$y=y_0+\frac{x-a}{h}\Delta y_0+\frac{(x-a)(x-a-h)}{1\cdot 2}\frac{\Delta^2 y_0}{h^2}+$$
$$+\frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\Delta^3 y_0}{h^3}+\ldots \qquad \text{(IV)}$$

Само собою разумеется, что, взяв за исходное то значение, которое соответствует индексу n, будем иметь формулу

$$y=y_n+\frac{x-a_n}{1}\cdot\frac{\Delta y_n}{h}+\frac{(x-a_n)(x-a_n-h)}{1\cdot 2}\frac{\Delta^2 y_n}{h^2}+$$
$$+\frac{(x-a_n)(x-a_n-h)(x-a_n-2h)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\Delta^3 y_n}{h^3}+\ldots \qquad \text{(IV')}$$

где

$$a_n=a+nh$$

есть значение аргумента при индексе n.

При интерполировании по ф-лам (III) и (III') величина t получает значения, заключенные между 0 и 1, а если исходить от ближайшего показанного в таблице аргумента, то между $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$; то же самое будет и со значениями $\frac{x-a}{h}$ и $\frac{x-a_n}{h}$ при пользовании ф-лами (IV) и (IV'); в этом случае все множители при разностях будут по абсолютной величине меньше 1, благодаря чему эти формулы и дают достаточно точные результаты.

Иногда приходится находить значения функции, заданной таблично, для значения аргумента, лежащего вне границ таблицы, тогда прибегают к так называемому *экстраполированию*, пользуясь тою же формулою Ньютона, исходя от крайнего, показанного в таблице, аргумента; здесь величине t или величине $\frac{x-a_n}{h}$ приходится придавать значение и большее 1 по абсолютной величине.

Так, например, положим, что, имея вышеприведенную таблицу значений функции y для аргументов x от 1000 до 1050 через табличный промежуток $h=10$, мы хотим иметь значение y при $x=960$, тогда в ф-ле (IV) пришлось бы положить

$$y_0=3.0000000;\ h=10;\ x-a=-40$$

$$\Delta y_0=0.0043214;\ \Delta^2 y_0=-0.0000426;\ \Delta^3 y_0=+0.0000008$$

и все разности выше третьего порядка считать равными нулю.

Подставляя в ф-лу (IV), имеем

$$\begin{aligned}
y_0 &= 3.0000000 && = 3.0000000\\
\frac{x-a}{1}\frac{\Delta y_0}{h} &= -40\cdot\frac{0.0043214}{10} && = -0.0172856\\
\frac{x-a}{1}\frac{x-a-h}{2}\frac{\Delta^2 y_0}{h^2} &= \frac{(-40)(-50)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{-0.0000426}{100}\right) && = -0.0004260\\
\frac{x-a}{1}\frac{x-a-h}{2}\frac{x-a-2h}{3}\frac{\Delta^3 y_0}{h^3} &= \frac{(-40)(-50)(-60)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{0.0000008}{1000} && = -0.0000160\\
y &= && = 2.9822724
\end{aligned}$$

Значения множителей при Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$

суть 4, 10, 20

поэтому в произведении -0.0172856 нельзя ручаться за последний знак, а в произведениях -0.0004260 и -0.0000160 нельзя ручаться и за два последние знака, значит, в сумме два последние знака могут быть и не верны, и, в самом деле, истинное значение есть

$$y=\lg 960=2.9822712$$

Но если бы мы захотели получить значение y, лежащее далеко вне пределов таблицы, например, при $x=500$, то мы имели бы

$$x-a=-500$$

и было бы

$$y_0 = \frac{x-a}{1}\frac{\Delta y_0}{h} = -500 \cdot \frac{0.0043214}{10} = \qquad 3.0000000$$

$$\frac{x-a}{1}\frac{\Delta y_0}{h} = -500\,\frac{0.0043214}{10} = -50 \cdot 0.0043214 = - \quad 0.2161070$$

$$\frac{x-a}{1}\,\frac{x-a-h}{2}\,\frac{\Delta^2 y_0}{h^2} = \frac{(-500)\,(-510)}{2}\,\frac{0.0000426}{100} =$$

$$= -1275 \cdot 0.0000426 = -0.0533150$$

$$\frac{x-a}{1}\,\frac{x-a-h}{2}\,\frac{x-a-2h}{3}\,\frac{\Delta^3 y_0}{h^3} =$$

$$= \frac{(-500)\,(-510)\,(-520)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,\frac{0.0000008}{1000} =$$

$$= -2210 \cdot 0.0000008 = -0.0176800$$

$$y = \qquad\qquad = \quad 2.7128980$$

вместо

$$y = \lg 500 = 2.6989700$$

Здесь накопление погрешностей произошло не только от отброшенных в величинах Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$ знаков, умноженных затем на 50, 1275, 2210, но главным образом от предположения, что третьи разности на всем протяжении от $x = 500$ до $x = 1000$ постоянно равны 0.0000008, а четвертые и все следующие за ними разности в точности равны нулю, значит, несмотря на большие при них множители, члены, этим разностям соответствующие, равны нулю. Ясно, что это предположение места не имеет.

Отсюда видно, что экстраполирование может давать надежные результаты лишь в смежности с границами таблицы, т. е. при малых значениях отношения $\frac{x-a}{h}$.

Очевидно, что правая часть ф-лы (IV) представляет целый многочлен относительно буквы x, степень которого равна порядку последней из удержанных разностей. Этот многочлен принимает при значениях переменной x, равных

$$a,\ a+h,\ a+2h, \ldots a+kh$$

соответственно значения

$$y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots y_k$$

Такой многочлен может быть составлен и не пользуясь разностями, например по формуле Лагранжа (§ 28) или по методе неопределенных коэффициентов, но какую бы методу ни применять, результаты будут тождественны между собою.

Во многих случаях, при обработке опытов или наблюдений, составляют так называемые эмпирические формулы вида

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_k x^k$$

не прибегая к методе разностей, затем применяют эту формулу не только для значений x, лежащих в промежутке между наблюдениями, что соответствует интерполированию, но и для значений x, лежащих вне этого промежутка, что соответствует экстраполированию. Предыдущий пример показывает, с какою осторожностью надо к экстраполированию относиться и сколь малого доверия заслуживают результаты, полученные для значений аргумента, лежащих далеко вне границ наблюдений.

При расположении, принятом для табл. 12 и 13, предположено, что индексы начинаются со значения 0 и идут в возрастающем порядке. Ясно, что часто приходится пользоваться среднею частью таблицы, тогда можно исходное значение функции принять за y_0, приписать ему индекс 0 и считать индексы в обе стороны, как показано в табл. 17, причем разности попрежнему будут

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0; \quad \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0; \quad \Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 \ldots$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1; \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1; \quad \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 \ldots$$
$$\Delta y_2 = y_3 - y_2; \quad \Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2; \quad \Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 \ldots$$

. . . .

Таблица 17

Индекс n	Аргумент x_n	Функция y_n	Δy_n	$\Delta^2 y_n$	$\Delta^3 y_n$	$\Delta^4 y_n$
. . . .	. . . .					
-4	$a-4h$	y_{-4}				
			Δy_{-4}			
-3	$a-3h$	y_{-3}		$\Delta^2 y_{-4}$		
			Δy_{-3}		$\Delta^3 y_{-4}$	
-2	$a-2h$	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$
			Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$	
-1	$a-h$	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$
			Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$	
0	a	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$
			Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$	
1	$a+h$	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$
			Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
2	$a+2h$	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
			Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
3	$a+3h$	y_3		$\Delta^2 y_2$		
			Δy_3			
4	$a+4h$	y_4				
. . . .	. . . .					

Для такого расположения таблицы попрежнему будем иметь ф-лы (II), (III), (IV).

Представим себе, что та же таблица функций расположена по индексам или аргументам, идущим в убывающем порядке, как показано в табл. 18, причем разности для отличия помечены знаками δ, δ^2, δ^3, ... Ясно, что эти разности будут

$$\delta y_0 = y_{-1} - y_0 = -\Delta y_{-1}; \quad \delta^2 y_0 = \delta y_{-1} - \delta y_0 = \Delta y_{-1} - \Delta y_{-2} = \Delta^2 y_{-2}$$
$$\delta y_{-1} = y_{-2} - y_{-1} = -\Delta y_{-2}; \quad \delta^2 y_{-1} = \delta y_{-2} - \delta y_{-1} = \Delta y_{-2} - \Delta y_{-3} = \Delta^2 y_{-3}$$
$$\delta y_{-2} = y_{-3} - y_{-2} = -\Delta y_{-3}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

так что вообще будет

$$\delta y_0 = -\Delta y_{-1}; \quad \delta^2 y_0 = \Delta^2 y_{-2}; \quad \delta^3 y_0 = -\Delta^3 y_{-3}; \quad \delta^4 y_0 = \Delta^4 y_{-4}$$

Эти разности располагаются в следующую табл. 18:

Для табл. 18 ф-ла (II) будет

$$y_{-k} = y_0 + k\delta y_0 + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\delta^3 y_0 +$$
$$+ \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\delta^4 y_0 + \ldots$$

Таблица 18

Индекс n	Аргумент x_n	Функция y_n	$\delta^1 y_n$	$\delta^2 y_n$	$\delta^3 y_n$	$\delta^4 y_n$
....	....					
4	$a+4h$	y_4				
			δy_4			
3	$a+3h$	y_3		$\delta^2 y_4$		
			δy_3		$\delta^3 y_4$	
2	$a+2h$	y_2		$\delta^2 y_3$		$\delta^4 y_4$
			δy_2		$\delta^3 y_3$	
1	$a+h$	y_1		$\delta^2 y_2$		$\delta^4 y_3$
			δy_1		$\delta^3 y_2$	
0	a	y_0		$\delta^2 y_1$		$\delta^4 y_2$
			δy_0		$\delta^3 y_1$	
−1	$a-h$	y_{-1}		$\delta^2 y_0$		$\delta^4 y_1$
			δy_{-1}		$\delta^3 y_0$	
−2	$a-2h$	y_{-2}		$\delta^2 y_{-1}$		$\delta^4 y_0$
			δy_{-2}		$\delta^3 y_{-1}$	
−3	$a-3h$	y_{-3}		$\delta^2 y_{-3}$		
			δy_{-3}			
−4	$a-4h$	y_{-4}				
....	....					

Заменив разности δy_0, $\delta^2 y_0, \ldots$ их величинами через разности Δ, получим для табл. 17:

$$y_{-k}=y_0-k\Delta y_{-1}+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_{-2}-\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_{-3}+ \\ +\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^4 y_{-4}+\ldots \qquad \text{(IV}'')$$

т. е. формулу, в которую входят разности, находящиеся в косой строке, наклоненной снизу вверх.

Очевидно, что приняв за исходное значение y_n, получим следующие формулы:

$$y_{n-k}=y_n-k\,\Delta y_{n-1}+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_{n-2}-\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_{n-3}+ \\ +\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^4 y_{n-4}+\ldots$$

$$y_{n-t}=y_n-t\,\Delta y_{n-1}+\frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_{n-2}-\frac{t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_{n-3}+ \\ +\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^4 y_{n-4}-\ldots$$

$$y=y_n-\frac{x-a_n}{1}\,\frac{\Delta y_{n-1}}{h}+\frac{(x-a_n)(x-a_n-h)}{1\cdot 2}\,\frac{\Delta^2 y_n}{h^2}- \\ -\frac{(x-a_n)(x-a_n-h)(x-a_n-2h)}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{\Delta^3 y_{n-3}}{h^3}+\ldots \qquad \text{(IV}''')$$

Этими формулами приходится пользоваться при экстраполировании в конце таблицы.

§ **68.** Рассмотренные выше интерполяционные формулы представляют, как уже сказано, целые многочлены относительно переменной x, принимающие заданные наперед значения при данных значениях переменной x, которые в нашем случае идут в арифметической прогрессии.

Очевидно, что более общий случай есть тот, когда эти значения не являются равноотстоящими одно от другого, так что ставится задача: составить такой целый многочлен

$$y=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_kx^k \qquad (*)$$

который при значениях x, равных

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_k$$

принимал бы соответственно значения

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_k$$

В § 28 указано решение этой задачи, данное Лагранжем, и приведена его формула; покажем здесь решение, данное, примерно, за 120 лет перед тем Ньютоном.

Полагая в ф-ле (*) последовательно

$$x = a_0,\ x = a_1,\ x = a_2, \ldots x = a_k$$

и уравнивая получаемые результаты величинам

$$y_0,\ y_1, \ldots y_k$$

получаем, для определения коэффициентов, следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
y_0 &= A_0 + A_1 a_0 + A_2 a_0^2 + A_3 a_0^3 + \ldots + A_k a_0^k \\
y_1 &= A_0 + A_1 a_1 + A_2 a_1^2 + A_3 a_1^3 + \ldots + A_k a_1^k \\
y_2 &= A_0 + A_1 a_2 + A_2 a_2^2 + A_3 a_2^3 + \ldots + A_k a_2^k \\
y_3 &= A_0 + A_1 a_3 + A_2 a_3^2 + A_3 a_3^3 + \ldots + A_k a_3^k \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Вычитая первое уравнение из второго, второе из третьего, третье из четвертого и т. д. и замечая, что правая часть первого из получаемых таким образом уравнений делится на $a_1 - a_0$, второго — на $a_2 - a_1$, третьего — на $a_3 - a_2$ и т. д., выполняем это деление и, обозначая левые части через δy_0, δy_1, $\delta y_2, \ldots$, мы получим уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{y_1 - y_0}{a_1 - a_0} &= \delta y_0 = A_1 + A_2 (a_1 + a_0) + A_3 (a_1^2 + a_1 a_0 + a_0^2) + \ldots \\
\frac{y_2 - y_1}{a_2 - a_1} &= \delta y_1 = A_1 + A_2 (a_2 + a_1) + A_3 (a_2^2 + a_2 a_1 + a_1^2) + \ldots \\
\frac{y_3 - y_2}{a_3 - a_2} &= \delta y_2 = A_1 + A_2 (a_3 + a_2) + A_3 (a_3^2 + a_3 a_2 + a_2^2) + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Поступая с этими уравнениями подобным же образом, обозначая левые части соответственно через $\delta^2 u_0$, $\delta^2 u_1$, $\delta^2 u_2, \ldots$, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\delta y_1 - \delta y_0}{a_2 - a_0} &= \delta^2 y_0 = A_2 + A_3 (a_2 + a_1 + a_0) + \ldots \\
\frac{\delta y_2 - \delta y_1}{a_3 - a_1} &= \delta^2 y_1 = A_2 + A_3 (a_3 + a_2 + a_1) + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Поступим с этими уравнениями так же, и получим, по разделении на $a_3 - a_0$, $a_4 - a_1, \ldots$,

$$\frac{\delta^2 y_1 - \delta^2 y_0}{a_3 - a_0} = \delta^3 y_0 = A_3 + A_4 (\ldots) + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Отсюда ход выкладок ясен; если бы было желательно функцию y представить полиномом третьей степени, то из предыдущих уравнений мы получили бы

$$
\begin{aligned}
A_3 &= \delta^3 y_0 \\
A_2 &= \delta^2 y_0 - (a_2 + a_1 + a_0) \\
A_1 &= \delta y_0 - (a_1 + a_0)\,\delta^2 y_0 + (a_2 a_1 + a_1 a_0 + a_2 a_0)\,\delta^3 y_0 \\
A_0 &= y_0 - a_0\,\delta y_0 + a_0 a_1\,\delta^2 y_0 - a_2 a_1 a_0\,\delta^3 y_0
\end{aligned}
$$

и, подставляя эти величины, имели бы формулу

$$
y = y_0 + (x - a_0)\,\delta y_0 + [x^2 - (a_1 + a_0)\,x + a_1 a_0]\,\delta^2 y_0 +
$$

$$
+ [x^3 - (a_2 + a_1 + a_0)\,x^2 + (a_2 a_1 + a_1 a_0 + a_2 a_0)\,x - a_2 a_1 a_0]\,\delta^3 y_0
$$

или, разлагая величины, стоящие в [ ], на множителей, получим

$$
y = y_0 + (x - a_0)\,\delta y_0 + (x - a_0)(x - a_1)\,\delta^2 y_0 + (x - a_0)(x - a_1)(x - a_2)\,\delta^3 y_0
$$

Совершенно подобно поступили бы и для функции любой степени, и получили бы формулу

$$
\begin{aligned}
y = y_0 &+ (x - a_0)\,\delta y_0 + (x - a_0)(x - a_1)\,\delta^2 y_0 + \\
&+ (x - a_0)(x - a_1)(x - a_2)\,\delta^3 y_0 + \cdots + \qquad \text{(V)} \\
&+ (x - a_0)(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_k)\,\delta^{k+1} y_0
\end{aligned}
$$

Расположение величин δy_0, $\delta^2 y_0, \ldots$ показано в табл. 19:

Таблица 19

Индексы n	Аргументы a_n	Функции y_n	δy_n	$\delta^2 y_n$	$\delta^3 y_n$	$\delta^4 y_n$	. .
0	a_0	y_0					
			δy_0				
1	a_1	y_1		$\delta^2 y_0$			
			δy_1		$\delta^3 y_0$		
2	a_2	y_2		$\delta^2 y_1$		$\delta^4 y_0$	. .
			δy_2		$\delta^3 y_1$		
3	a_3	y_3		$\delta^2 y_2$		$\delta^4 y_1$	. .
			δy_3		$\delta^3 y_2$		
4	a_4	y_4		$\delta^2 y_3$			
			δy_4				
5	a_5	y_5					
. .	. . .						

Табл. 19 составляется по следующей схеме:

$$\delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{a_1 - a_0}; \qquad \delta^2 y_0 = \frac{\delta y_1 - \delta y_0}{a_2 - a_0}; \qquad \delta^3 y_0 = \frac{\delta^2 y_1 - \delta^2 y_0}{a_3 - a_0}$$

$$\delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{a_2 - a_1}; \qquad \delta^2 y_1 = \frac{\delta y_2 - \delta y_1}{a_3 - a_1}; \qquad \delta^3 y_1 = \frac{\delta^2 y_2 - \delta^2 y_1}{a_4 - a_1}$$

$$\delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{a_3 - a_2}; \qquad \delta^2 y_2 = \frac{\delta y_3 - \delta y_2}{a_4 - a_2}; \qquad \delta^3 y_2 = \frac{\delta^2 y_3 - \delta^2 y_2}{a_5 - a_2}$$

$$\delta y_3 = \frac{y_4 - y_3}{a_4 - a_3}; \qquad \delta^2 y_3 = \frac{\delta y_4 - \delta y_3}{a_5 - a_3}; \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

т. е. числители составляются совершенно так же, как и при равноотстоящих аргументах, знаменатели же в первом столбце суть разности последовательных смежных аргументов, т. е.

$$a_1 - a_0; \quad a_2 - a_1; \quad a_3 - a_2; \ldots$$

во втором столбце знаменателями служат разности аргументов, индексы коих различаются на две единицы, т. е.

$$a_2 - a_0; \quad a_3 - a_1; \quad a_4 - a_2; \ldots$$

в третьем столбце знаменателями служат разности аргументов, индексы коих различаются на три единицы, т. е.

$$a_3 - a_0; \quad a_4 - a_1; \quad a_5 - a_2; \ldots$$

вообще в i-ом столбце знаменателями служат разности аргументов, индексы коих различаются на i единиц, т. е.

$$a_i - a_0; \quad a_{i+1} - a_1; \quad a_{i+2} - a_2; \ldots$$

Нетрудно видеть, что для аргументов равноотстоящих, т. е. идущих в арифметической прогрессии с разностью h, будет

$$\delta y_0 = \frac{\Delta y_0}{h}; \quad \delta^2 y_0 = \frac{\Delta^2 y_0}{1 \cdot 2 \cdot h^2}; \quad \delta^3 y_0 = \frac{\Delta^3 y_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot h^3}; \ldots$$

и ф-ла (V) и обратится в ф-лу (IV).

Функции, стоящие в правых частях формулы Лагранжа и формулы Ньютона, при одинаковом числе заданных абсцисс x и ординат y, представляют целые функции x одной и той же степени k. Эти функции принимают те же самые значения

$$y_0, y_1, y_2, \ldots y_k$$

при значениях x, равных

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_k$$

число которых есть $k+1$, следовательно, эти функции между собою тождественны, т. е. в общих многочленах коэффициенты, при одинаковых степенях x, равны между собою. Это свойство составляет известную теорему высшей алгебры, на доказательстве которой не будем останавливаться, но дадим вместо того замечательный вывод Гаусса,[1] которым он из формулы Лагранжа получает формулу Ньютона.

Пусть будет

$$y = y_0 \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_k)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\dots(a_0-a_k)} + y_1 \frac{(x-a_0)(x-a_2)\dots(x-a_k)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\dots(a_1-a_k)} +$$
$$+ \dots + y_k \frac{(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{k-1})}{(a_k-a_0)(a_k-a_1)\dots(a_k-a_{k-1})}$$

интерполяционная формула Лагранжа. Обозначим правую часть этой формулы через X_k и составим выражения

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4, \dots$$

получим

$$X_1 = y_0$$
$$X_2 = y_0 \frac{x-a_1}{a_0-a_1} + y_1 \frac{x-a_0}{a_1-a_0}$$
$$X_3 = y_0 \frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)} + y_1 \frac{(x-a_0)(x-a_2)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)} + y_2 \frac{(x-a_0)(x-a_1)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)}$$
$$X_4 = y_0 \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)} + y_1 \frac{(x-a_0)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)} +$$
$$+ y_2 \frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)} + y_3 \frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_0)(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Взяв разности этих количеств, имеем

$$X_1 = y_0$$
$$X_2 - X_1 = (x-a_0)\left[\frac{y_0}{a_0-a_1} + \frac{y_1}{a_1-a_0}\right]$$
$$X_3 - X_2 = (x-a_0)(x-a_1)\left[\frac{y_0}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{y_1}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)} + \frac{y_2}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)}\right]$$
$$X_4 - X_3 = (x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\left[\frac{y_0}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)} + \right.$$
$$+ \frac{y_1}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)} + \frac{y_2}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)} +$$
$$\left. + \frac{y_3}{(a_3-a_0)(a_3-a_1)(a_3-a_2)}\right]$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

[1] C. F. Gauss. Werke, Bd. III, pp. 273 u. ff.

Сложив эти равенства, имеем

$$X = y_0 + (x - a_0)[a_0 a_1] + (x - a_0)(x - a_1)[a_0 a_1 a_2] +$$
$$+ (x - a_0)(x - a_1)(x - a_2)[a_0 a_1 a_2 a_3] + \dots$$

причем положено

$$[a_0 a_1] = \frac{y_0}{a_0 - a_1} + \frac{y_1}{a_1 - a_0}$$
$$[a_0 a_1 a_2] = \frac{y_0}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)} + \frac{y_1}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2)} + \frac{y_3}{(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)}$$
$$[a_0 a_1 a_2 a_3] = \frac{y_0}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)(a_0 - a_3)} + \frac{y_1}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} +$$
$$+ \frac{y_2}{(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)} + \frac{y_3}{(a_3 - a_0)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$$
. . . .

Из этих формул и сделанных при выводе формулы Ньютона обозначений следует

$$[a_0 a_1] = \frac{y_1 - y_0}{a_1 - a_0} = \delta y_0$$
$$[a_0 a_1 a_2] = \frac{[a_1 a_2] - [a_0 a_1]}{a_2 - a_0} = \frac{\delta y_1 - \delta y_0}{a_2 - a_0} = \delta^2 y_0$$
$$[a_0 a_1 a_2 a_3] = \frac{[a_1 a_2 a_3] - [a_0 a_1 a_2]}{a_3 - a_0} = \frac{\delta^2 y_1 - \delta^2 y_0}{a_3 - a_0} = \delta^3 y_0$$
. . . .

Значит, количества

$$[a_0, a_1],\ [a_0 a_1 a_2], \dots$$

составляются по той же самой схеме, как и разности

$$\delta y_0,\ \delta y_1, \dots$$

и могли бы быть расположены в такую же точно таблицу, как разности δ (см. табл. 20, стр. 278).

Отсюда следует, что многочлен X можно писать или в форме

$$X = y_0 + (x - a_0)[a_0 a_1] + (x - a_0)(x - a_1)[a_0 a_1 a_2] +$$
$$+ (x - a_0)(x - a_1)(x - a_2)[a_0 a_1 a_2 a_3] + \dots \tag{VI}$$

или же в форме Ньютона

$$X = y_0 + (x - a_0)\delta y_0 + (x - a_0)(x - a_1)\delta^2 y_0 +$$
$$+ (x - a_0)(x - a_1)(x - a_2)\delta^3 y_0 + \dots \tag{VI}$$

и, таким образом, тождественность формул Лагранжа и Ньютона становится очевидной.

Таблица 20

Индексы n	Аргументы x	Функции y_n	$[a_n\, a_{n+1}]$	$[a_n\, a_{n+1}\, a_{n+2}]$	$[a_n\, a_{n+1}\, a_{n+2}\, a_{n+3}]$	...
0	a_0	y_0	$[a_0\, a_1]$	$[a_0\, a_1\, a_2]$	$[a_0\, a_1\, a_2\, a_3]$	...
1	a_1	y_1	$[a_1\, a_2]$	$[a_1\, a_2\, a_3]$	$[a_1\, a_2\, a_3\, a_4]$	...
2	a_2	y_2	$[a_2\, a_3]$	$[a_2\, a_3\, a_4]$	$[a_2\, a_3\, a_4\, a_5]$	...
3	a_3	y_3	$[a_3\, a_4]$	$[a_3\, a_4\, a_5]$		
4	a_4	y_4	$[a_4\, a_5]$			
5	a_5	y_5				
. .						

Так как при составлении этих формул порядок, в котором расположены аргументы и функции, не играет никакой роли, важны лишь самые значения аргументов и функций, то можно индексов не писать и заменить аргументы

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots a_k$$

и соответствующие им значения функций

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots y_k$$

через

$$a,\ b,\ c,\ d \ldots$$

и

$$y_a,\ y_b,\ y_c,\ y_d, \ldots$$

так что табл. 20 примет вид табл. 21.

Само собою разумеется, что введя, вместо скобок [ ], для обозначения разностей, символ δ, получим вместо табл. 21 табл. 22, и ф-лы (VI) и (VI') примут тогда вид

$$\begin{aligned} X = y_a &+ (x-a)[ab] + (x-a)(x-b)[abc] + \\ &+ (x-a)(x-b)(x-c)[abcd] + \\ &+ (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)[abcde] + \\ &+ (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)[abcdef] + \ldots \end{aligned} \tag{VI''}$$

и

$$\begin{aligned} X = y_a &+ (x-a)\delta y_a + (x-a)(x-b)\delta^2 y_a + \\ &+ (x-a)(x-b)(x-c)\delta^3 y_a + \\ &+ (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\delta^4 y_a + \\ &+ (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)\delta^5 y_a + \ldots \end{aligned} \tag{VI'''}$$

Таблица 21

Аргументы x	Функции y	$[ab]$	$[abc]$	$[abcd]$	$[abcde]$	$[abcdef]$	...
a	y_a	$[ab]$	$[abc]$	$[abcd]$	$[abcde]$	$[abcdef]$	...
b	y_b	$[bc]$	$[bcd]$	$[bcde]$	$[bcdef]$		...
c	y_c	$[cd]$	$[cde]$	$[cdef]$			
d	y_d	$[de]$	$[def]$				
e	y_e	$[ef]$					
f	y_f						
...							

Таблица 22

Аргументы x	Функции y	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$	$\delta^4 y$	$\delta^5 y$
a	y_a	δy_a	$\delta^2 y_a$	$\delta^3 y_a$	$\delta^4 y_a$	$\delta^5 y_a$
b	y_b	δy_b	$\delta^2 y_b$	$\delta^3 y_b$	$\delta^4 y_b$	
c	y_c	δy_c	$\delta^2 y_c$	$\delta^3 y_c$		
d	y_d	δy_d	$\delta^2 y_d$			
e	y_e	δy_e				
f	y_f					

Таблица 23

Аргументы x	Функции y	$[ab]$	$[abc]$	$[abcd]$	$[abcde]$	$[abcdef]$
d	y_d	$[dc]$	$[dce]$	$[dceb]$	$[dcebf]$	$[dcebfa]$
c	y_c	$[ce]$	$[ceb]$	$[cebf]$	$[cebfa]$	
e	y_e	$[eb]$	$[ebf]$	$[ebfa]$		
b	y_b	$[bf]$	$[bfa]$			
f	y_f	$[fa]$				
a	y_a					

Те же аргументы можно расположить в ином порядке, например:

$$d\,c\,e\,b\,f\,a\ldots$$

$$y_d\;y_c\;y_e\;y_b\;y_f\;y_a\ldots$$

соответственно которому будет табл. 23 (стр. 279),
и формула (VI'') примет вид

$$\begin{aligned}X=y_d&+(x-d)[dc]+(x-d)(x-c)[dce]+\\&+(x-d)(x-c)(x-e)[dceb]+(x-d)(x-c)(x-e)(x-b)[dcebf]+\\&+(x-d)(x-c)(x-e)(x-b)(x-f)[dcebfa]+\ldots\end{aligned}$$

но величины $[dc]$, $[dce]$ и т. д. не зависят, как легко видеть по их составлению, от порядка аргументов, а лишь от их величины, поэтому

$$[dc]=[cd];\ [dce]=[cde];\ [dceb]=[bcde];\ [dcebf]=[bcdef];$$
$$[dcebfa]=[abcdef]$$

и предыдущая формула может быть написана так:

$$\begin{aligned}X=y_d&+(x-d)[cd]+(x-d)(x-c)[cde]+\\&+(x-d)(x-c)(x-e)[bcde]+\\&+(x-d)(x-c)(x-e)(x-b)[bcdef]+\\&+(x-d)(x-c)(x-e)(x-b)(x-f)[abcdef]\end{aligned}\tag{VII}$$

Обращаясь к табл. 21, видим, что в эту формулу входят разности, расположенные в горизонтальной строке, аргумент которой есть d, и в горизонтальной строке, лежащей между строками, коих аргументы суть c и d. Совершенно так же, если бы вместо порядка аргументов

$$a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\ldots$$

мы взяли порядок

$$d\,e\,c\,f\,b\,g\,a\ldots$$

то получили бы формулу

$$\begin{aligned}X=y_d&+(x-d)[de]+(x-d)(x-e)[cde]+\\&+(x-d)(x-e)(x-c)[cdef]+\\&+(x-d)(x-e)(x-c)(x-f)[bcdef]+\\&+(x-d)(x-e)(x-c)(x-f)(x-b)[bcdefg]+\ldots\end{aligned}\tag{VIII}$$

в которую входят разности, расположенные в горизонтальной строке, аргумент коей есть d, и в горизонтальной строке, расположенной между строками, коих аргументы суть d и e.

Само собою разумеется, что введя, вместо скобок [ ], для обозначения разностей, символ δ, мы, на основании табл. 22, вместо ф-л (VII) и (VIII), получим формулы

$$
\begin{aligned}
X = y_d &+ (x-d)\,\delta y_c + (x-d)(x-c)\,\delta^2 y_c + \\
&+ (x-d)(x-c)(x-e)\,\delta^3 y_b + \\
&+ (x-d)(x-c)(x-e)(x-b)\,\delta^4 y_b + \\
&+ (x-d)(x-c)(x-e)(x-b)(x-f)\,\delta^5 y_a + \ldots
\end{aligned}
\tag{VII'}
$$

и

$$
\begin{aligned}
X = y_d &+ (x-d)\,\delta y_d + (x-d)(x-e)\,\delta^2 y_c + \\
&+ (x-d)(x-e)(x-c)\,\delta^3 y_c + \\
&+ (x-d)(x-e)(x-c)(x-f)\,\delta^4 y_b + \\
&+ (x-d)(x-e)(x-c)(x-f)(x-b)\,\delta^5 y_b + \ldots
\end{aligned}
\tag{VIII'}
$$

в первую из которых входят разности, расположенные в табл. 22 в горизонтальной строке, аргумент которой есть d, и в горизонтальной строке, лежащей между строками с аргументами d и c; во вторую формулу входят разности, расположенные в горизонтальной строке с аргументом d и в строке, лежащей между горизонтальными строками, коих аргументы d и e.

Множители следуют тому же порядку, как аргументы.

Положим теперь, что аргументы

$$a\ b\ c\ d\ e\ f \ldots$$

идут в арифметической прогрессии, так что

$$b - a = c - b = d - c = e - d \ldots = h$$

и аргумент d соответствует индексу n и равен a_n, то будет

$$
\begin{aligned}
y_d &= y_n \\
a &= a - 3h = a_{n-3} \\
b &= a - 2h = a_{n-2} \\
c &= a - h = a_{n-1} \\
d &= a_n \\
e &= a_n + h = a_{n+1} \\
f &= a_n + 2h = a_{n+2} \\
g &= a + 3h = a_{n+3} \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

тогда между разностями δ и Δ имеют место соотношения, приведенные выше, именно:

$$\delta y_d = \frac{\Delta y_n}{h}; \quad \delta^2 y_d = \frac{\Delta^2 y_n}{1 \cdot 2 h^2}; \quad \delta^3 y_d = \frac{\Delta^3 y_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 h^3}; \ldots$$

то, положив вообще

$$x = a_n + kh$$

мы получим из ф-лы (VII')

$$y_{n+k} = X(a_n + kh) = y_n + \frac{k}{1}\Delta y_{n-1} + \frac{(k+1)k}{1\cdot 2}\Delta^2 y_{n-1} +$$
$$+ \frac{(k+1)k(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_{n-2} + \frac{(k+2)(k+1)k(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^4 y_{n-2} + \qquad \text{(VII'')}$$
$$+ \frac{(k+2)(k+1)k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\Delta^5 y_{n-3} + \ldots$$

и из ф-лы (VIII')

$$y_{n+k} = X(a_n + kh) = y_n + \frac{k}{1}\Delta y_n + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_{n-1} +$$
$$+ \frac{(k+1)k(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_{n-1} + \frac{(k+1)k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^4 y_{n-2} +$$
$$+ \frac{(k+2)(k+1)k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\Delta^5 y_{n-2} + \ldots \qquad \text{(VIII'')}$$

Взяв полусумму этих выражений, имеем

$$y_{n+k} = y_n + \frac{k}{1}\,\frac{\Delta y_{n-1} + \Delta y_n}{2} + \frac{k^2}{1\cdot 2}\Delta^2 y_{n-1} +$$
$$+ \frac{(k+1)k(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{\Delta^3 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-1}}{2} + \frac{(k+1)k\cdot k(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^4 y_{n-2} +$$
$$+ \frac{(k+2)(k+1)k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,\frac{\Delta^5 y_{n-3} + \Delta^5 y_{n-1}}{2} + \ldots \qquad \text{(IX)}$$

Эта формула называется формулою Стирлинга, те же две, из которых она получена, называются формулами Гаусса.

§ **69.** Чтобы составить формулы для вычисления интеграла $\int\limits_a^{a+nh} y\,dx$, Лаплас („Mécanique celeste“, livr. IX, § 5) исчисляет сперва интеграл $\int\limits_a^{a+h} y\,dx$; умножив обе части равенства (IV) на dx и интегрируя в указанных пределах, он получает

$$\int\limits_a^{a+h} y\,dx = h\Big[y_0 + \frac{1}{2}\Delta y_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{24}\Delta^3 y_0 - \frac{19}{720}\Delta^4 y_0 +$$
$$+ \frac{3}{160}\Delta^5 y_0 - \frac{863}{60480}\Delta^6 y_0 + \ldots\Big]$$

Чтобы исчислить интеграл $\int\limits_{a+h}^{a+2h} y\,dx$, Лаплас замечает, что, в силу ф-лы (IV), можно для этих пределов заменить y величиною

$$Y_1 = y_1 + \frac{x-a_1}{h}\Delta y_1 + \frac{(x-a_1)(x-a_1-h)}{1\cdot 2}\frac{\Delta^2 y_1}{h^2} +$$
$$+ \frac{(x-a_1)(x-a_1-h)(x-a_1-2h)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\Delta^3 y_1}{h^3} + \ldots$$

где $a_1 = a + h$, и, следовательно, будет

$$\int\limits_{a+h}^{a+2h} y\,dx = \int\limits_{a_1}^{a_1+h} Y_1\,dx = h\left[y_1 + \frac{1}{2}\Delta y_1 - \frac{1}{12}\Delta^2 y_1 + \frac{1}{24}\Delta^3 y_1 - \ldots\right]$$

Совершенно так же для интеграла $\int\limits_{a+2h}^{a+3h} y\,dx$ можно писать

$$\int\limits_{a+2h}^{a+3h} y\,dx = \int\limits_{a_2}^{a_2+h} Y_2\,dx = h\left[y_2 + \frac{1}{2}\Delta y_2 - \frac{1}{12}\Delta^2 y_2 + \frac{1}{24}\Delta^3 y_2 - \ldots\right]$$

причем

$$Y_2 = y_2 + \frac{x-a_2}{1}\frac{\Delta y_2}{h} + \frac{(x-a_2)(x-a_2-h)}{1\cdot 2}\frac{\Delta^2 y_2}{h^2} + \ldots$$

и

$$a_2 = a + 2h$$

Продолжая поступать таким же образом далее и взяв затем сумму

$$\int\limits_{a}^{a+nh} y\,dx = \int\limits_{a}^{a+h} y\,dx + \int\limits_{a+h}^{a+2h} y\,dx + \int\limits_{a+2h}^{a+3h} y\,dx + \ldots + \int\limits_{a+(n-1)h}^{a+nh} y\,dx$$

мы имеем

$$\frac{1}{h}\int\limits_{a}^{a+nh} y\,dx = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots + \Delta y_{n-1}\right] -$$
$$- \frac{1}{12}\left[\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_1 + \Delta^3 y_2 + \ldots + \Delta^2 y_{n-1}\right] +$$
$$+ \frac{1}{24}\left[\Delta^3 y_0 + \Delta^3 y_1 + \Delta^3 y_2 + \ldots + \Delta^3 y_{n-1}\right] + \ldots$$

Но замечая, что

$$\Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots + \Delta y_{n-1} =$$
$$= (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) = y_n - y_0.$$
$$\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2 + \ldots + \Delta^2 y_{n-1} =$$
$$= (\Delta y_1 - \Delta y_0) + (\Delta y_2 - \Delta y_1) + \ldots + (\Delta y_n - \Delta y_{n-1}) = \Delta y_n - \Delta y_0.$$

получаем по подстановке

$$\frac{1}{h}\int\limits_a^{a+nh} y\,dx = \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) - \frac{1}{12}(\Delta y_n - \Delta y_0) +$$
$$+ \frac{1}{24}(\Delta^2 y_n - \Delta^2 y_0) - \frac{19}{720}(\Delta^3 y_n - \Delta^3 y_0) + \frac{3}{160}(\Delta^4 y_n - \Delta^4 y_0) - \qquad (\alpha)$$
$$- \frac{863}{60480}[\Delta^5 y_n - \Delta^5 y_0] + \ldots$$

В таком виде эта формула представляет то неудобство, что разности

$$\Delta y_n,\ \Delta^2 y_n,\ \Delta^3 y_n, \ldots$$

требуют знания величин

$$y_{n+1},\ y_{n+2},\ y_{n+3} \ldots$$

лежащих вне пределов интегрирования.

Не выводя общих формул, сюда относящихся, ограничимся теми, которые нам понадобятся. Из самого способа составления таблицы разностей имеем

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$$
$$\Delta y_n = \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-1}$$
$$\Delta^2 y_{n-1} = \Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-2}$$
$$\Delta^3 y_{n-2} = \Delta^3 y_{n-3} + \Delta^4 y_{n-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Сложив эти равенства и замечая, что

$$y_{n+1} - y_n = \Delta y_n$$

имеем

$$\Delta y_n = \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \Delta^4 y_{n-4} + \ldots \qquad (1)$$

На основании этого равенства можем написать такое:

$$\Delta^k y_{n-l} = \Delta^k y_{n-l-1} + \Delta^{k+1} y_{n-l-2} + \Delta^{k+2} y_{n-l-3} + \Delta^{k+3} y_{n-l-4} + \dots \qquad (*)$$

из которого следуют

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y_{n-1} &= \Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \Delta^4 y_{n-4} + \Delta^5 y_{n-5} + \dots \\
\Delta^3 y_{n-2} &= \qquad\qquad \Delta^3 y_{n-3} + \Delta^4 y_{n-4} + \Delta^5 y_{n-5} + \dots \\
\Delta^4 y_{n-3} &= \qquad\qquad\qquad\qquad \Delta^4 y_{n-4} + \Delta^5 y_{n-5} + \dots \\
\Delta^5 y_{n-4} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Delta^5 y_{n-5} + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Сложив эти равенства, в силу ф-лы (1), получим

$$\Delta^2 y_n = \Delta^2 y_{n-2} + 2\Delta^3 y_{n-3} + 3\Delta^4 y_{n-4} + 4\Delta^5 y_{n-5} + \dots \qquad (2)$$

Совершенно так же, в силу ф-лы (2), имеем ряд равенств

$$\begin{aligned}
\Delta^3 y_{n-1} &= \Delta^3 y_{n-3} + 2\Delta^4 y_{n-4} + 3\Delta^5 y_{n-5} + 4\Delta^6 y_{n-6} + \dots \\
\Delta^4 y_{n-2} &= \qquad\qquad \Delta^4 y_{n-4} + 2\Delta^5 y_{n-5} + 3\Delta^6 y_{n-6} + \dots \\
\Delta^5 y_{n-3} &= \qquad\qquad\qquad\qquad \Delta^5 y_{n-5} + 2\Delta^6 y_{n-6} + \dots \\
\Delta^6 y_{n-4} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Delta^6 y_{n-6} + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

сложив которые, в силу ф-лы (*) имеем

$$\Delta^3 y_n = \Delta^3 y_{n-3} + 3\Delta^4 y_{n-4} + 6\Delta^5 y_{n-5} + 10\Delta^6 y_{n-6} + \dots \qquad (3)$$

Обратив внимание, как из ф-лы (1) мы получили ф-лу (2) и из ф-лы (2) ф-лу (3), видим, что будет

$$\begin{aligned}
\Delta^4 y_n &= \Delta^4 y_{n-4} + (1+3)\Delta^5 y_{n-5} + (1+3+6)\Delta^6 y_{n-6} + \\
&\quad + (1+3+6+10)\Delta^7 y_{n-7} \dots = \\
&= \Delta^4 y_{n-4} + 4\Delta^5 y_{n-5} + 10\Delta^6 y_{n-6} + 20\Delta^7 y'_{n-7} + \dots \\
\Delta^5 y_n &= \Delta^5 y_{n-5} + (1+4)\Delta^6 y_{n-6} + (1+4+10)\Delta^7 y_{n-7} + \\
&\quad + (1+4+10+20)\Delta^8 y_{n-8} = \\
&= \Delta^5 y_{n-5} + 5\Delta^6 y_{n-6} + 15\Delta^7 y_{n-7} + \dots
\end{aligned} \qquad (4)$$

Подставляя в ф-лу (α) вместо

$$\Delta y_n,\quad \Delta^2 y_n,\quad \Delta^3 y_n,\quad \Delta^4 y_n,\quad \Delta^5 y_n \qquad (5)$$

их величины (1), (2), (3), (4), (5), по приведении подобных членов, мы и получим следующую формулу Лапласа:

$$\frac{1}{h}\int\limits_a^{a+nh} ydx = \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + \frac{1}{2}y_n\right) - \frac{1}{12}(\Delta y_{n-1} - \Delta y_0) -$$

$$- \frac{1}{24}(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0) - \frac{19}{720}(\Delta^3 y_{n-3} - \Delta^3 y_0) - \frac{3}{160}(\Delta^4 y_{n-4} + \Delta^4 y_0) - \quad \text{(X)}$$

$$- \frac{863}{60\,480}(\Delta^5 y_{n-5} - \Delta^5 y_0) - \ldots$$

Сличая эту формулу с данною в § 34, мы видим величину той поправки, которую надо присовокуплять к формуле § 34 для получения более точного результата.

§ **70.** Перейдем теперь к решению обратного вопроса, т. е. составлению зависимости между производной функции и ее разностями различных порядков.

Для этого обратимся к ф-ле (III)

$$y = y_0 + \frac{t}{1}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_0 + \ldots \quad \text{(III)}$$

и сличим ее с разложением функции $y = f(t)$, даваемым рядом Маклорена, т. е.

$$y = f(t) = f(0) + \frac{t}{1}f'(0) + \frac{t^2}{1\cdot 2}f''(0) + \frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(0) + \ldots$$

Располагая ф-лу (III) по степеням буквы t, получим

$$y = y_0 + \frac{t}{1}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y_0 - \ldots\right] +$$

$$+ \frac{t^2}{1\cdot 2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \ldots\right] +$$

$$+ \frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left[\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \frac{7}{4}\Delta^5 y_0 - \ldots\right] +$$

$$+ \frac{t^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}[\Delta^4 y_0 - 2\Delta^5 y_0 + \ldots] +$$

$$+ \frac{t^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}[\Delta^5 y_0 - \ldots] + \ldots$$

Следовательно, будет

$$f'(0) = \Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y_0 \ldots$$

$$f''(0) = \qquad \Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 \ldots$$

$$f'''(0) = \qquad \Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \frac{7}{4}\Delta^5 y_0 \ldots$$

. . . .

Замечая, что $t=\frac{x-a}{h}$ и, значит, $dt=\frac{dx}{h}$, видим, что

$$f'(0)=h\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a};\qquad f''(0)=h^2\cdot\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=a}$$

и т. д., условившись обозначать через y_0', y_0'', y_0'''... значения

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a};\qquad \left(\frac{d^2y}{dx^2y}\right)_{x=a};\ldots$$

мы получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
y_0' &=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0-\frac{1}{4}\Delta^4 y_0+\frac{1}{5}\Delta^5 y_0-\ldots\right]\\
y_0'' &=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0-\frac{5}{6}\Delta^5 y_0+\ldots\right]\\
y_0''' &=\frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_0-\frac{3}{2}\Delta^4 y_0+\frac{7}{4}\Delta^5 y_0-\ldots\right]\\
y_0^{\mathrm{IV}} &=\frac{1}{h^4}[\Delta^4 y_0-2\Delta^5 y_0+\ldots]
\end{aligned}\qquad\text{(XI)}$$

. . . .

Пример. Положим, что при записи прямолинейного движения некоторой точки получены показанные в таблице величины ее расстояния от начального положения через каждую $\frac{1}{100}$ долю секунды. Требуется найти скорость и ускорение точки в соответствующие моменты.

Пусть запись движения такова (табл. 24).

Составляем таблицу разностей (табл. 25).

Чтобы вычислить скорости v, составляем табл. 26.

Совершенно так же, для получения ускорения w, имеем (табл. 27).

Как видно, табл. 26 и 27 дают скорости и ускорения для значений t, не превосходящих 0.04, ибо для дальнейших нет разностей пятого порядка, до которых мы ведем вычисление.

Если бы наша функция y была задана так, что можно было бы получить ее значения и для дальнейших значений аргумента t, то, очевидно, как бы продолжались таблицы; в том же случае, когда других значений y, кроме имеющихся, получить нельзя, то можно поступить так: понятно, что мы могли бы принять за исходное значение t не 0.00, а 0.09, и расположить аргументы в убывающем порядке и, обернув таким образом таблицу, составить разности, а по ним первые и вторые производные, полагая при этом $h=-0.01$ сек. Таким образом получим табл. 28.

По этим разностям, для вычисления скорости, составляем табл. 29.

Совершенно так же, для вычисления ускорения, имеем табл. 30 (см. стр. 290).

Таблица 24

Время t $\left(\frac{1}{100}\text{ сек.}\right)$	Путь y (см)	Время t $\left(\frac{1}{100}\text{ сек.}\right)$	Путь y (см)	Время t $\left(\frac{1}{100}\text{ сек.}\right)$	Путь y (см)	Время t $\left(\frac{1}{100}\text{ сек.}\right)$	Путь y (см)	Время t $\left(\frac{1}{100}\text{ сек.}\right)$	Путь y (см)
0	0.000	2	6.031	4	23.396	6	50.000	8	82.635
1	1.519	3	13.397	5	35.721	7	65.798	9	100.000

Таблица 25

t	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	0.000	1.519	2.993	—0.139	—0.082	—0.004
1	1.519	4.512	2.854	—0.221	—0.086	0.021
2	6.031	7.366	2.633	—0.307	—0.065	0.002
3	13.397	9.999	2.326	—0.372	—0.063	0.018
4	23.396	12.325	1.954	—0.435	—0.045	0.014
5	35.721	14.279	1.519	—0.430	—0.031	
6	50.000	15.798	1.039	—0.511		
7	65.798	16.837	0.528			
8	82.635	17.365				
9	100.000					

Таблица 26

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
t	Δy	$-\frac{1}{2}\Delta^2 y$	$\frac{1}{3}\Delta^3 y$	$-\frac{1}{4}\Delta^4 y$	$+\frac{1}{5}\Delta^5 y$	(VII)=(II)+(III)+ +(IV)+(V)+(VI)	$v=\frac{(\text{VII})}{h}$ $\left(h=\frac{1}{100}\right)$
0	1.519	—1.497	—0.046	0.020	—0.001	—0.005	— 0.5
1	4.512	—1.427	—0.074	0.021	0.004	3.036	303.6
2	7.366	—1.317	—0.102	0.016	0.000	5.953	596.3
3	9.999	—1.163	—0.124	0.016	0.004	8.732	873.2
4	12.325	—0.977	—0.145	0.011	0.003	11.217	1121.7

Таблица 27

I	II	III	IV	V	VI	VII
t	$\Delta^2 y$	$-\Delta^3 y$	$+\frac{11}{12}\Delta^4 y$	$-\frac{5}{6}\Delta^5 y$	(VI)=(II)+ +(III)+(IV)+ +(V)	$w=\frac{(VI)}{h^2}$ $\left(h=\frac{1}{100}\right)$
0	2.993	0.139	—0.075	0.003	3.060	30600
1	2.854	0.221	—0.079	—0.018	2.978	29780
2	2.633	0.307	—0.060	—0.002	2.878	28780
3	2.326	0.372	—0.058	—0.015	2.625	26250
4	1.954	0.435	—0.041	—0.012	2.336	23360

Таблица 28

t	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
9	100.000	—17.365	0.528	0.511	—0.031	—0.014
8	82.635	—16.837	1.039	0.480	—0.045	—0.018
7	65.798	—15.798	1.519	0.435	—0.063	—0.002
6	50.000	—14.279	1.954	0.372	—0.065	—0.021
5	35.721	—12.325	2.326	0.307	—0.086	0.004
4	23.396	— 9.999	2.633	0.221	—0.082	
3	13.397	— 7.366	2.854	0.139		
2	6.031	— 4.512	2.993			
1	1.519	— 1.519				
0	0.000					

Чтобы судить, в какой мере этот прием дает результаты, согласные с действительностью, вычислим истинные величины скоростей и ускорений для нашего случая, в котором

$$y=100\left(1-\cos\frac{100\pi t}{18}\right)$$

значит,

$$\begin{aligned} v=y'&=\frac{10\,000\cdot\pi}{18}\sin\frac{100\pi t}{18}=1745.33\sin\frac{100\pi t}{18}\\ w=y''&=\frac{1\,000\,000\cdot\pi^2}{18^2}\cos\frac{100\pi t}{18}=30462\cos\frac{100\pi t}{18}\end{aligned}\qquad(*)$$

Таблица 29

I	II	III	IV	V	VI	VII	VII
t_1	$+\Delta y$	$-\frac{1}{2}\Delta^2 y$	$+\frac{1}{3}\Delta^3 y$	$-\frac{1}{4}\Delta^4 y$	$+\frac{1}{5}\Delta^5 y$	(VII)=(II)+(III)+ +(IV)+(V)+(VI)	$v=\frac{\text{(VII)}}{h}$ $\left(h=-\frac{1}{100}\right)$
9	—17.365	—0.264	0.170	0.008	—0.003	—17.454	1745.4
8	—16.837	—0.520	0.160	0.011	—0.004	—17.190	1719.0
7	—15.798	—0.760	0.145	0.016	—0.000	—16.397	1639.7
6	—14.279	—0.977	0.124	0.016	—0.004	—15.020	1502.0
5	—12.325	—1.163	0.102	0.021	0.001	—13.364	1336.4

Таблица 30

I	II	III	IV	V	VI	VII
t_1	$+\Delta^2 y$	$-\Delta^3 y$	$+\frac{11}{12}\Delta^4 y$	$-\frac{5}{6}\Delta^5 y$	(VI)=(II)+ +(III)+(IV)+ +(V)	$w=\frac{\text{(VI)}}{h^2}$
9	0.528	—0.511	—0.029	0.012	0.000	0.00
8	1.039	—0.480	—0.041	0.015	0.533	5330
7	1.519	—0.435	—0.058	0.002	1.028	10280
6	1.954	—0.372	—0.060	0.018	1.540	15400
5	2.326	—0.307	—0.079	—0.003	1.937	19370

Таким образом имеем табл. 31.

§ **71.** В предыдущих примерах мы придерживались обычно принятого в исчислении конечных разностей обозначения и формул, но в астрономии, где к интерполированию приходится прибегать особенно часто, составляя разного рода таблицы, показывающие движение небесных светил, т. е. дающие их координаты в зависимости от времени, по почину Гаусса и затем Энке и Бесселя, принято иное расположение как таблицы разностей, так и их обозначения и формул интерполирования; мы ознакомимся с некоторыми наиболее употребительными из этих формул, так как во многих случаях их применение удобнее, нежели формул §§ 67, 68 и 69.

Пусть $y=f(x)$ есть заданная функция, тогда таблица разностей составляется и располагается так, чтобы то значение аргумента, которое

Таблица 31

По точным формулам (*)			По интерполяционным	
t	v	w	v	w
0.00	0.00	30462	— 0.5	30600
0.01	303.08	30001	303.6	29780
0.02	596.98	28[illegible]25	596.3	28780
0.03	872.66	26381	873.2	26250
0.04	1121.9	23340	1121.7	23360
0.05	1337.0	19581	1336.4	19370
0.06	1511.5	15231	1502.0	15400
0.07	1640.1	10348	1639.7	10280
0.08	1718.8	5289	1719.0	5330
0.09	1745.3	0.000	1745.4	0.000

мы принимаем за исходное, располагалось посредине таблицы, т. е. чтобы значения аргумента x были

$$\ldots a-3h;\quad a-2h;\quad a-h;\quad a;\quad a+h;\quad a+2h;\quad a+3h;\ldots$$

Значение же каждой разности пишется посредине между теми двумя числами, из коих разность образуется; порядок разности обозначается значком при букве f, аргументом же пишут полусумму аргументов тех функций, коих разность составлена (табл. 32).

Табл. 32 затем дополняют тем, что между каждыми двумя числами того же столбца вписывают еще их среднее арифметическое, приписывая ему по аналогии и аргумент, равный среднему арифметическому аргументов функций (табл. 33).

В табл. 33 собственно функции и разности напечатаны обыкновенным шрифтом, а добавленные их полусуммы жирным.

При таком обозначении формула Ньютона напишется так:

$$f(a+th)=f(a)+\frac{t}{1}\,f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right)+\frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\,f^2\,(a+h)+$$

$$+\frac{t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,f^3\left(a+\frac{3}{2}h\right)+\ldots$$

Таблица 32

Аргументы x	Функции $f(x)$	Первые разности	Вторые разности	Третьи разности	Четвертые разности	Пятые разности
$a-3h$	$f(a-3h)$					
		$f^1\left(a-\frac{5}{2}h\right)$				
$a-2h$	$f(a-2h)$		$f^2(a-2h)$			
		$f^1\left(a-\frac{3}{2}h\right)$		$f^3\left(a-\frac{3}{2}h\right)$		
$a-h$	$f(a-h)$		$f^2(a-h)$		$f^4(a-h)$	
		$f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)$		$f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)$		$f^5\left(a-\frac{1}{2}h\right)$
a	$f(a)$		$f^2(a)$		$f^4(a)$	
		$f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right)$		$f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right)$		$f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right)$
$a+h$	$f(a+h)$		$f^2(a+h)$		$f^4(a+h)$	
		$f^1\left(a+\frac{3}{2}h\right)$		$f^3\left(a+\frac{3}{2}h\right)$		
$a+2h$	$f(a+2h)$		$f^2(a+2h)$			
		$f^1\left(a+\frac{5}{2}h\right)$				
$a+3h$	$f(a+3h)$					

В эту формулу мы можем ввести разности, относящиеся к аргументу a или $\left(a+\frac{1}{2}h\right)$; в самом деле,

$$f^2(a+h)=f^2(a)+f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right)$$

$$f^3\left(a+\frac{3}{2}h\right)=f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right)+f^4(a+h)=$$

$$=f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right)+f^4(a)+f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right)$$

$$f^1(a+2h)=f^4(a+h)+f^5\left(a+\frac{3}{2}h\right)=$$

$$=f^4(a)+f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right)+f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right)+f^6(a+h)=$$

$$=f^4(a)+2f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right)+f(a+h)$$

$$f^5\left(a+\frac{5}{2}h\right)=f^5\left(a+\frac{3}{2}h\right)+f^6(a+2h)=$$

$$=f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right)+f^6(a+h)+f^6(a+2h)$$

Таблица 33

Аргументы x	Функции $f(x)$	Первые разности	Вторые разности	Третьи разности	Четвертые разности	Пятые разности
$a-3h$	$f(a-3h)$					
	$f\left(a-\frac{5}{2}h\right)$	$f^1\left(a-\frac{5}{2}h\right)$				
$a-2h$	$f(a-2h)$	$f^1(a-2h)$	$f^2(a-2h)$			
	$f\left(a-\frac{3}{2}h\right)$	$f^1\left(a-\frac{3}{2}h\right)$	$f^2\left(a-\frac{3}{2}h\right)$	$f^3\left(a-\frac{3}{2}h\right)$		
$a-h$	$f(a-h)$	$f^1(a-h)$	$f^2(a-h)$	$f^3(a-h)$	$f^4(a-h)$	
	$f\left(a-\frac{1}{2}h\right)$	$f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)$	$f^2\left(a-\frac{1}{2}h\right)$	$f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)$	$f^4\left(a-\frac{1}{2}h\right)$	$f^5\left(a-\frac{1}{2}h\right)$
a	$f(a)$	$f^1(a)$	$f^2(a)$	$f^3(a)$	$f^4(a)$	$f^5(a)$
	$f\left(a+\frac{1}{2}h\right)$	$f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right)$	$f^2\left(a+\frac{1}{2}h\right)$	$f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right)$	$f^4\left(a+\frac{1}{2}h\right)$	$f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right)$
$a+h$	$f(a+h)$	$f^1(a+h)$	$f^2(a+h)$	$f^3(a+h)$	$f^4(a+h)$	
	$f\left(a+\frac{3}{2}h\right)$	$f^1\left(a+\frac{3}{2}h\right)$	$f^2\left(a+\frac{3}{2}h\right)$	$f^3\left(a+\frac{3}{2}h\right)$		
$a+2h$	$f(a+2h)$	$f^1(a+2h)$	$f^2(a+2h)$			
	$f\left(a+\frac{5}{2}h\right)$	$f^1\left(a+\frac{5}{2}h\right)$				
$a+3h$	$f(a+3h)$					

Подставляя, получим формулу

$$f(a+th)=f(a)+\frac{t}{1}f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right)+\frac{t(t-1)}{1\cdot 2}f^2(a)+$$
$$+\frac{(t+1)t(t-1)}{1\cdot 2\cdot 3}f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right)+\frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f^4(a)+$$
$$+\frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right)+\ldots$$

Закон составления коэффициентов в функции переменой t, очевидно, состоит в том, что в числителе поочередно прибавляется то множитель в начале, то множитель в конце, а в знаменателе — всегда следующее натуральное число.

Если в этой формуле мы заменим величины, относящиеся к аргументам $a+\frac{1}{2}h$, величинами, относящимися к аргументам $a-\frac{1}{2}h$, т. е. сделаем

$$f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right)=f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)+f^2(a)$$
$$f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right)=f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)+f^4(a)$$
$$f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right)=f^5\left(a-\frac{1}{2}h\right)+f^6(a)$$

то получим формулу

$$f(a+th)=f(a)+\frac{t}{1}f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\frac{(t+1)t}{1\cdot 2}f^2(a)+$$
$$+\frac{(t+1)t(t-1)}{1\cdot 2\cdot 3}f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\frac{(t+2)(t+1)t(t-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f^4(a)+$$
$$+\frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}f^5\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\ldots$$

Сложим эти две формулы и взяв их полусумму, заменим величины

$$\frac{1}{2}\left[f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)+f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right)\right]=f^1(a)$$
$$\frac{1}{2}\left[f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)+f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right)\right]=f^3(a)$$

их значениями, вписанными в строку, относящуюся к аргументу a, тогда получим такую формулу:

$$f(a+th)=f(a)+\frac{t}{1}f^1(a)+\frac{t^2}{1\cdot 2}f^2(a)+$$
$$+\frac{(t+1)t(t-1)}{1\cdot 2\cdot 3}f^3(a)+\frac{(t+1)t^2(t-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f^4(a)+ \qquad \text{(XII)}$$
$$+\frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}f^5(a)+\ldots$$

Таким образом мы вновь получили формулы Гаусса и Стирлинга, которые были выведены выше иным образом.

§ **72.** Разложив входящие в состав этой формулы коэффициенты по степеням буквы t и сличая полученное разложение с разложением функции $f(a+th)$ по ряду Тейлора, найдем такое соотношение:

$$f(a+th)=f(a)+\frac{th}{1}\cdot\frac{df}{da}+\frac{t^2h^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^2f}{da^2}+\frac{t^3h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{d^3f}{da^3}+\ldots=$$
$$=f(a)+\frac{t}{1}\left[f^1(a)-\frac{1}{6}f^3(a)+\frac{1}{30}f^5(a)-\frac{1}{140}f^7(a)+\ldots\right]+$$

$$+\frac{t^2}{1\cdot 2}\left[f^2(a)-\frac{1}{12}f^4(a)+\frac{1}{90}f^6(a)-\frac{1}{560}f^8(a)+\ldots\right]+$$

$$+\frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left[f^3(a)-\frac{1}{4}f^5(a)+\frac{7}{120}f^7(a)\ldots\right]+ \qquad (*)$$

$$+\frac{t^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left[f^4(a)-\frac{1}{6}f^6(a)\ldots\right]+$$

$$+\frac{t^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\left[f^5(a)-\frac{1}{3}f^7(a)\ldots\right]$$

. . . .

Откуда следует

$$\frac{df}{da}=\frac{1}{h}\left[f^1(a)-\frac{1}{6}f^3(a)+\frac{1}{30}f^5(a)-\ldots\right]$$

$$\frac{d^2f}{da^2}=\frac{1}{h^2}\left[f^2(a)-\frac{1}{12}f^4(a)+\frac{1}{90}f^6(a)\ldots\right] \qquad \text{(XIII)}$$

. . . .

Иногда бывает нужно знать величины производных для промежуточных значений аргумента x или $a+ht$, соответствующих дробным значениям переменной t. Для этого стоит только продифференцировать по букве t формулу

$$f(a+th)=f(a)+\frac{th}{1}\cdot\frac{df(a)}{da}+\frac{t^2h^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^2f(a)}{da^2}+\frac{t^3h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{d^3f(a)}{da^3}+\ldots$$

и мы получим

$$\frac{df(a+th)}{dt}=h\frac{df(x)}{dx}=h\frac{df}{da}+\frac{h^2t}{1}\cdot\frac{d^2f}{da^2}+\frac{h^3t^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^3f(a)}{da^3}+\ldots$$

откуда следует

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{df}{da}+\frac{ht}{1}\cdot\frac{d^2f}{da^2}+\frac{h^2t^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^3f}{da^3}+\ldots$$

подставляя вместо

$$\frac{df}{da};\quad \frac{d^2f}{da^2};\ldots$$

их величины (XIII), получим

$$\frac{df}{dx}=\frac{1}{h}\cdot\frac{df(a+th)}{dt}=\frac{1}{h}\left[f^1(a)+tf^2(a)+\frac{3t^2-1}{1\cdot 2\cdot 3}f^3(a)+\right.$$

$$\left.+\frac{4t^3-2t}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f^4(a)+\frac{5t^4-15t^2+4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}f^5(a)+\ldots\right] \qquad \text{(XIIIa)}$$

Заметив, что

$$f^1(a)=f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\frac{1}{2}f^2\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\frac{1}{4}f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\cdots$$

$$f^2(a)=f^2\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\frac{1}{2}f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\cdots$$

и т п., и, подставляя в предыдущую формулу, получим такую:

$$\frac{df}{dx}=\frac{1}{h}\left[f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\left(t+\frac{1}{2}\right)f^2\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\right. \tag{XIIIb}$$
$$\left.+\frac{3t^2-3t+\frac{1}{2}}{1\cdot2\cdot3}f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\frac{4t^3+6t^2-2t-2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}f^4\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\ldots\right]$$

Совершенно так же, выразив $f^1(a)$, $f^2(a)$ и т. д. через разности, относящиеся к аргументу $a+\frac{1}{2}h$, получили бы формулы

$$\frac{df}{dx}=\frac{1}{h}\left[f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right)+\left(t-\frac{1}{2}\right)f^2\left(a+\frac{1}{2}h\right)+\right. \tag{XIIIc}$$
$$\left.+\frac{3t^2-3t+\frac{1}{2}}{1\cdot2\cdot3}f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right)+\frac{4t^3-6t^2-2t+2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}f^4\left(a+\frac{1}{2}h\right)+\ldots\right]$$

Подобные же формулы можно составить и для вторых производных, дифференцируя (XIIIa), (XIIIb), (XIIIc) по букве t, так, например, будет

$$\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{1}{h^2}\left[f^2\left(a+\frac{1}{2}h\right)+\left(t-\frac{1}{2}\right)f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right)+\right. \tag{XIIId}$$
$$\left.+\frac{12t^2-12t-2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}f^4\left(a+\frac{1}{2}h\right)+\ldots\right)$$

Чтобы составить формулы для вычисления интегралов, аналогичные формуле Лапласа, но с обозначениями Энке и Гаусса, проинтегрируем ф-лу (*), получим

$$\int f(a+th)\,dt = C+tf(a)+\frac{t^2}{1\cdot2}\left[f^1(a)-\frac{1}{6}f^3(a)+\frac{1}{30}f^5(a)+\ldots\right]+$$
$$+\frac{t^3}{1\cdot2\cdot3}\left[f^2(a)-\frac{1}{12}f^4(a)+\frac{1}{90}f^6(a)-\frac{1}{560}f^8(a)+\ldots\right]+$$
$$+\frac{t^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\left[f^3(a)-\frac{1}{4}f^5(a)+\frac{7}{120}f^7(a)-\ldots\right]+$$
$$+\frac{t^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\left[f^4(a)-\frac{1}{6}f^6(a)+\ldots\right]+$$
$$+\frac{t^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\left[f^5(a)-\frac{1}{3}f^7(a)+\ldots\right]+\ldots$$

Подставляя вместо t значения $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ и взяв разность, получим

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(a+th)\,dt=f(a)+\frac{1}{24}\left[f^2(a)-\frac{1}{12}f^4(a)+\frac{1}{90}f^6(a)-\ldots\right]+$$

$$+\frac{1}{1920}\left[f^4(a)-\frac{1}{6}f^6(a)+\ldots\right]+\ldots$$

$$=f(a)+\frac{1}{24}f^2(a)-\frac{17}{5760}f^4(a)+\frac{367}{967680}f^6(a)-\ldots \qquad (*)$$

Совершенно так же имеем

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(a+th)\,dt=\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{8}f^1(a)+$$

$$+\frac{1}{48}f^2(a)-\frac{7}{384}f^3(a)-\frac{17}{11520}f^4(a)+\frac{163}{46030}f^5(a)\ldots \qquad (**)$$

Из схемы разностей имеем

$$f^1(a)=\frac{1}{2}f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right)+\frac{1}{2}f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)$$

$$\frac{1}{2}f^2(a)=\frac{1}{2}f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\frac{1}{2}f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)$$

следовательно,

$$f^1(a)=f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\frac{1}{2}f^2(a)$$

Точно так же получим

$$f^3(a)=f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\frac{1}{2}f^4(a)$$

$$f^5(a)=f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\frac{1}{2}f^6(a)$$

. . . .

в силу чего последняя формула напишется так:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(a+th)\,dt=\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{8}f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\frac{1}{24}f^2(a)-\frac{7}{384}f^3\left(a+\frac{1}{2}h\right)+$$

$$+\frac{11}{1440}f^4(a)+\frac{163}{46080}f^5\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\frac{191}{120960}f^6(a)+\ldots \qquad (1)$$

Так как очевидно, что безразлично, какой аргумент считать за исходный, то, заменив в ф-лах (*) и (**) a на $a+ih$, имеем

$$\int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+th)\,dt=f(a+ih)+\frac{1}{24}f^2(a+ih)-\frac{17}{5760}f^4(a+ih)+$$

$$+\frac{367}{967680}f^6(a+ih)-\ldots \qquad (2)$$

$$\int\limits_{i}^{i+\frac{1}{2}} f(a+th)\,dt = \frac{1}{2} f(a+ih) + \frac{1}{8} f^1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right] - \frac{1}{24} f^2(a+ih) - \tag{3}$$
$$- \frac{7}{384} f^3\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right] + \frac{11}{1440} f^4(a+ih) + \ldots$$

Эти две формулы в соединении с ф-лами (*) и (**) и дают возможность составить выражение интегралов от функции $f(a+th)$ при низшем пределе 0 и $\frac{1}{2}$ и при высшем i и $i+\frac{1}{2}$.

В самом деле,

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} + \ldots + \int\limits_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}$$

Но мы имеем

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(a+th)\,dt = f(a) + \frac{1}{24} f^2(a) - \frac{17}{5760} f^4(a) + \ldots$$

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(a+th)\,dt = f(a+h) + \frac{1}{24} f^2(a+h) - \frac{17}{5760} f^4(a+h) + \ldots$$

$$\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} f(a+th)\,dt = f(a+2h) + \frac{1}{24} f^2(a+2h) - \frac{17}{5760} f^4(a+2h) + \ldots$$

. . . .

$$\int\limits_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+th)\,dt = f(a+ih) + \frac{1}{24} f^2(a+ih) - \frac{17}{5760} f^4(a+ih) + \ldots$$

Следовательно, будет

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(a+th)\,dt = [f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+ih)] +$$
$$+ \frac{1}{24}[f^2(a) + f^2(a+h) + \ldots + f^2(a+ih)] -$$

$$-\frac{17}{5760}[f^4(a)+f^4(a+h)+\ldots+f^4(a+ih)]+\ldots$$

Но так как

$$f^2(a)=f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right)-f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)$$

$$f^2(a+h)=f^1\left(a+\frac{3}{2}h\right)-f^1\left(a+\frac{1}{2}h\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^2(a+ih)=f^1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]-f^1\left[a+\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right]$$

то

$$f^2(a)+f^2(a+h)+\ldots+f^2(a+ih)=f^1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]-f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)$$

Точно так же

$$f^4(a)+f^4(a+h)+\ldots+f^4(a+ih)=f^3\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]-f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и мы получим окончательно

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+th)dt=&[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+ih)]+\\ &+\frac{1}{24}\left[f^1\left(a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right)-f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)\right]-\\ &-\frac{17}{5760}\left[f^3\left(a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right)-f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)\right]+\\ &+\frac{367}{967680}\left[f^5\left(a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right)-f^5\left(a-\frac{1}{2}h\right)\right]-\ldots\end{aligned}\qquad\text{(XIV)}$$

Заметив, что

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i}=\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}-\int_{i}^{i+\frac{1}{2}}$$

в силу ф-л (XIV) и (3) получим

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i} f(a+ht)\,dt=[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+ih)]-$$

$$-\frac{1}{2}f(a+ih)-\frac{1}{12}f^1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]+$$

$$+\frac{1}{24}f^2(a+ih)+\frac{11}{720}f^3\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]-\frac{11}{1440}f^4(a+ih)+\ldots$$

$$-\frac{1}{24}f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\frac{17}{5760}f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)-\frac{367}{967680}f^5\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\ldots$$

Но замечая, что

$$f^2(a+ih)=f^1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]-f^1\left[a+\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right]$$

$$f^4(a+ih)=f^3\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]-f^3\left[a+\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и вместе с тем

$$f^1(a+ih)=\frac{1}{2}\left[f^1\left(a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right)+f^1\left(a+\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right)\right]$$

$$f^3(a+ih)=\frac{1}{2}\left[f^3\left(a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right)+f^3\left(a+\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right)\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

мы, по подстановке в предыдущую формулу, получим

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{i} f(a+ht)\,dt=[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+ih)]-$$

$$-\frac{1}{2}f(a+ih)-\frac{1}{12}f^1(a+ih)+\frac{11}{720}f^3(a+ih)-\frac{191}{60480}f^5(a+ih)+\ldots \quad \text{(XV)}$$

$$-\frac{1}{24}f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\frac{17}{5760}f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)-\frac{367}{967680}f^5\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\ldots$$

Если мы хотим иметь интегралы, у коих нижний предел есть 0, то пишем

$$\int\limits_{0}^{i+\frac{1}{2}}=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}-\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}$$

причем, в силу ф-лы (XV), делая в ней $i=0$, имеем

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} f(a+ht)\,dt=\frac{1}{2}f(a)-\frac{1}{12}f^1(a)+\frac{11}{720}f^3(a)-$$

$$-\frac{191}{60480}f^5(a)+\ldots+K,$$

где

$$K_1 = -\frac{1}{24} f^1\left(a - \frac{1}{2}h\right) + \frac{17}{5760} f^3\left(a - \frac{1}{2}h\right) - \frac{367}{967680} f^5\left(a - \frac{1}{2}h\right) + \ldots$$

$$\int\limits_0^{i+\frac{1}{2}} f(a+ht)\,dt = [f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+ih)] +$$

$$+ \frac{1}{24} f^1\left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h\right] - \frac{17}{5760} f^2\left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h\right] + \qquad \text{(XVI)}$$

$$+ \frac{367}{967680} f^5\left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h\right] + \ldots + C_1$$

причем

$$C_1 = -\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{12} f^1(a) - \frac{11}{720} f^3(a) + \frac{191}{60480} f^5(a) - \ldots$$

Совершенно так же в силу формулы

$$\int\limits_0^i = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{i} - \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}$$

будет

$$\int\limits_0^i f(a+ht)\,dt = \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+(i-1)h) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} f(a+ih)\right] - \frac{1}{12}[f^1(a+ih) - f^1(a)] +$$

$$+ \frac{11}{720}[f^3(a+ih) - f^3(a)] - \frac{191}{60480}[f^5(a+ih) - f^5(a)] + \ldots \qquad \text{(XVII)}$$

Заметим, что для получения интеграла $\int\limits_a^{a+ih} f(x)\,dx$ стоит только воспользоваться соотношением

$$\int\limits_a^{a+ih} f(x)\,dx = h\int\limits_0^i f(a+ht)\,dt$$

§ 73. По аналогии с образованием разностей и их обозначением, по предложению Гаусса и Энке, введено условное обозначение сумм по схеме (см. табл. 34, стр. 302).

Чтобы составлять числа табл. 34, поступают так: полагают $f_1\left(a - \frac{1}{2}h\right)$ равным произвольной постоянной C_1 (ниже мы укажем, как эту постоян-

Таблица 34

Аргументы	Суммы 2-го порядка	Суммы 1-го порядка	Функции
$a-4h$	$f_2(a-4h)$		
	$f_2\left(a-\frac{7}{2}h\right)$	$f_1\left(a-\frac{7}{2}h\right)$	
$a-3h$	$f_2(a-3h)$	$f_1(a-3h)$	$f(a-3h)$
	$f_2\left(a-\frac{5}{2}h\right)$	$f\left(a-\frac{5}{2}h\right)$	$f\left(a-\frac{5}{2}h\right)$
$a-2h$	$f_2(a-2h)$	$f_1(a-2h)$	$f(a-2h)$
	$f_2\left(a-\frac{3}{2}h\right)$	$f_1\left(a-\frac{3}{2}h\right)$	$f\left(a-\frac{3}{2}h\right)$
$a-h$	$f_2(a-h)$	$f_1(a-h)$	$f(a-h)$
	$f_2\left(a-\frac{1}{2}h\right)$	$f_1\left(a-\frac{1}{2}h\right)=C_1$	$f\left(a-\frac{1}{2}h\right)$
a	$f_2(a)=C_2$	$f_1(a)$	$f(a)$
	$f_2\left(a+\frac{1}{2}h\right)$	$f_1\left(a+\frac{1}{2}h\right)$	$f\left(a+\frac{1}{2}h\right)$
$a+h$	$f_2(a+h)$	$f_1(a+h)$	$f(a+h)$
	$f_2\left(a+\frac{3}{2}h\right)$	$f_1\left(a+\frac{3}{2}h\right)$	$f\left(a+\frac{3}{2}h\right)$
$a+2h$	$f_2(a+2h)$	$f_1(a+2h)$	$f(a+2h)$
	$f_2\left(a+\frac{5}{2}h\right)$	$f_1\left(a+\frac{5}{2}h\right)$	$f\left(a-\frac{5}{2}h\right)$
$a+3h$	$f_2(a+3h)$	$f_1(a+3h)$	$f(a+3h)$
	$f_2\left(a+\frac{7}{2}h\right)$	$f_1\left(a+\frac{7}{1}h\right)$	
$a+4h$	$f_2(a+4h)$		

ную выбирать), придают к этому значению $f_1\left(a-\frac{1}{2}h\right)$ величину $f(a)$, стоящую от нее непосредственно вправо и ниже, полученную сумму

$$f_1\left(a-\frac{1}{2}h\right)+f(a)=C_1+f(a)$$

обозначают через $f_1\left(a+\frac{1}{2}h\right)$ и вписывают против фиктивного аргумента $\left(a+\frac{1}{2}h\right)$; к полученному числу $f_1\left(a+\frac{1}{2}h\right)$ придают стоящее непосредственно правее и ниже его число $f(a+h)$ и, полагая

$$f_1\left(a+\frac{3}{2}h\right)=f_1\left(a+\frac{1}{2}h\right)+f(a+h)$$

вписывают его против фиктивного аргумента $a+\frac{3}{2}h$; продолжая таким образом далее, заполняют всю нижнюю половину столбца, озаглавленного «суммы первого порядка», теми величинами, которые напечатаны обыкновенным шрифтом.

Чтобы получить верхнюю половину этого столбца, берут опять число $C_1=f_1\left(a-\frac{1}{2}h\right)$ и *вычитают* из него число $f(a-h)$, стоящее правее и выше его, полученную разность

$$C_1-f(a-h)=f_1\left(a-\frac{1}{2}h\right)-f(a-h)$$

обозначают через $f_1\left(a-\frac{3}{2}h\right)$ и вписывают против фиктивного аргумента $\left(a-\frac{3}{2}h\right)$; взяв число $f_1\left(a-\frac{3}{2}h\right)$, вычитают из него число, стоящее правее и выше, т. е. $f(a-2h)$, полученную разность обозначают через $f_1\left(a-\frac{5}{2}h\right)$ и вписывают против фиктивного аргумента $a-\frac{5}{2}h$ и т. д.

Поступая совершенно подобным же образом с числами f_1 и начав с произвольного значения $C_2=f_2(a)$, составляем все суммы второго порядка, соответствующие аргументам a, $a+h$, $a+2h,\ldots$ и $a-h$, $a-2h,\ldots$, все эти числа напечатаны обыкновенным шрифтом.

Затем, подобно тому как и для разностей, берем средние арифметические между каждою парою смежных чисел того же столбца и вписываем их в промежутки, как показано, жирным шрифтом. Очевидно, что можно было бы продолжать далее до сумм какого угодно порядка, но обыкновенно не приходится иметь дело с суммами выше второго порядка.

Из самого составления табл. 34 видно, что по отношению к суммам второго порядка суммы первого порядка являются их первыми разностями, по отношению к суммам первого порядка сами функции являются разностями первого порядка и, значит, разностями второго порядка по отношению к суммам второго порядка.

При таком условном обозначении и такой схеме составления сумм, очевидно, что будет

$$C_1+f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+ih)=$$
$$=f_1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}h\right)\right]$$

$$C_1 - \{f(a) + f(a-h) + f(a-2h) + \ldots + f(a-ih)\} =$$
$$= f_1\left[a - \left(i + \frac{1}{2}\right) h\right]$$

Точно так же, в виду равенства

$$f_1(a+ih) = \frac{1}{2} f_1\left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) h\right] + \frac{1}{2} f_1\left[a + \left(i - \frac{1}{2}\right) h\right]$$

будет

$$f_1(a+ih) = C_1 + f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots$$
$$+ f[a+(i-1)h] + \frac{1}{2} f(a+ih)$$

и совершенно то же

$$f_1(a-ih) =$$
$$= C_1 - \left[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a-(i-1)h) + \frac{1}{2} f(a-ih)\right]$$

Условившись брать постоянную C_1 так, чтобы она представляла совокупность всех постоянных, т. е. независящих от значка i членов, мы видим, что ф-лы (XIV, XV, XVI, XVII) пишутся так:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+th)\,dt = f_1\left[a + \left(i - \frac{1}{2}\right) h\right] + \frac{1}{24} f^1\left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) h\right] -$$
$$- \frac{17}{5760} f^3\left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) h\right] + \frac{367}{967680} f^5\left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) h\right] + \ldots \qquad \text{(XIV')}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i} f(a+th)\,dt = f_1(a+ih) - \frac{1}{12} f^1(a+ih) + \frac{11}{720} f^3(a+ih) -$$
$$- \frac{191}{60480} f^5(a+ih) + \ldots \qquad \text{(XV')}$$

причем при составлении суммы надо брать

$$C_1 = -\frac{1}{24} f^1\left(a - \frac{1}{2} h\right) + \frac{17}{5760} f^3\left(a - \frac{1}{2} h\right) - \frac{367}{967680} f^5\left(a - \frac{1}{2} h\right) + \ldots$$

Точно так же при нижнем пределе, равном 0, будет

$$\int_0^{i+\frac{1}{2}} f(a+th)\,dt = f_1\left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) h\right] + \frac{1}{24} f^1\left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) h\right] -$$
$$- \frac{17}{5760} f^3\left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) h\right] + \frac{367}{967680} f^5\left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) h\right] + \ldots \qquad \text{(XVI')}$$

$$\int\limits_0^i f(a+th)\,dt=f_1(a+ih)-\frac{1}{12}f^1(a+ih)+\frac{11}{720}f^3(a+ih)-$$
$$-\frac{191}{60480}f^5(a+ih)+\ldots \tag{XVII'}$$

причем для ф-л (XVI′) и (XVII′), при образовании суммы, надо брать

$$C_1=-\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{12}f^1(a)-\frac{11}{720}f^3(a)+\frac{191}{60480}f^5(a)-\ldots$$

Совершенно подобным же образом для двукратного интегрирования получаются следующие формулы.

Для нижнего предела, равного $-\frac{1}{2}$, будет

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}dt\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}f(a+ht)\,dt=f_2\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]-\frac{1}{24}f\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]+$$
$$+\frac{17}{1920}f^2\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]-\frac{367}{193536}f^4\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]+\ldots \tag{XVIII}$$

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{i}dt\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{i}f(a+ht)\,dt=f_2(a+ih)+\frac{1}{12}f(a+ih)-\frac{1}{240}f^2(a+ih)+$$
$$+\frac{31}{60480}f^4(a+ih)-\ldots \tag{XIX}$$

причем, при образовании сумм, за величины C_1 и C_2 надо брать

$$C_1=-\frac{1}{24}f^1\left(a-\frac{1}{2}h\right)+\frac{17}{5760}f^3\left(a-\frac{1}{2}h\right)-\frac{367}{967680}f^5\left(a-\frac{1}{2}h\right)$$
$$C_2=+\frac{1}{24}f(a-h)-\frac{17}{5760}[2f^2(a-h)+f^2(a)]+\frac{367}{967630}[3f^4(a-h)+2f^4(a)]$$

Когда же нижний предел интегралов есть 0, то формулы будут

$$\int\limits_0^{i+\frac{1}{2}}dt\int\limits_0^{i+\frac{1}{2}}f(a+ht)\,dt=f_2\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]-\frac{1}{24}f\left[a-\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]+$$
$$+\frac{17}{1920}f^2\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]-\frac{367}{193536}f^4\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]+\ldots \tag{XX}$$

$$\int\limits_0^i dt\int\limits_0^i f(a+ht)\,dt=f_2(a+ih)+\frac{1}{12}f(a+ih)-\frac{1}{240}f^2(a+ih)+$$
$$+\frac{31}{60480}f^4(a+ih)-\ldots \tag{XXI}$$

и, при образовании сумм, надо брать исходные значения

$$f_1\left(a-\frac{1}{2}h\right)=C_1=-\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{12}f^1(a)-\frac{11}{720}f^3(a)+\frac{191}{60480}f^5(a)-\ldots$$

и

$$f_2(a)=C_2=-\frac{1}{12}f(a)+\frac{1}{240}f^2(a)-\frac{31}{60480}f^4(a)+\ldots$$

Само собою разумеется, что двукратный интеграл с переменной x приводится к интегралу с переменной t по формуле

$$\int\limits_a^{a+ih} dx \int\limits_a^{a+ih} f(x)\,dx=h^2\int\limits_0^i dt\int\limits_0^i f(a+th)\,dt$$

и совершенно такое же соотношение имеет место и для других пределов.

Этими формулами приходится пользоваться в тех случаях, когда указанные в главе III приемы вычисления интегралов с переменным верхним пределом, дающие, как нетрудно видеть, первые члены этих формул, окажутся недостаточными для той точности, которую имеют в виду достигнуть. Такой случай имеет, например, место в астрономии при вычислении возмущений. Во всяком случае, эти формулы являются естественным дополнением формул главы III, давая возможность оценить погрешность, которую мы делаем пользуясь ими.

§ **74.** Дадим теперь несколько примеров применения этих формул. Возьмем сперва пример § 67, т. е. положим, что нам известны логарифмы чисел через десять единиц и мы хотим иметь их через одну единицу от 1000 до 1010.

В этом случае, как мы видели, $h=10$; если мы хотим применить формулу Стирлинга (VII), то надо распорядиться так, чтобы число 1000 соответствовало значению $t=0$, и, значит, надо выбрать логарифмы чисел, предшествующих 1000 и следующих за этим числом, например, взять

980 . . .	2.9912261
990 . . .	2.9956352
1000 . . .	3.0000000
1010 . . .	3.0043214
1020 . . .	3.0086002

тогда таблица разностей будет такая (табл. 35).

Дополняем табл. 35 теми средними, которые соответствуют значению $t=0$ и которые только нам и понадобятся.

Таким образом, в формуле Стирлинга

$$f(a+th)=f(a)+\frac{t}{1}f^1(a)+\frac{t^2}{1\cdot 2}f^2(a)+\frac{(t+1)t(t-1)}{1\cdot 2\cdot 3}f^3(a)$$

Таблица 35

x	t	$f(x)$	$f^1(x)$	$f^2(x)$	$f^3(x)$
980	—2	2.9912261			
			0.0044091		
990	—1	2.9956352		—0.0000443	
			0.0043648		0.0000009
1000	0	3.0000000	0.0043431	—0.0000434	0.00000085
			0.0043214		0.0000008
1010	1	3.0043214		—0.0000426	
			0.0042788		
1020	2	3.0086002			

будет

$$a = 1000;\ h = 10;\ f(a) = 3.0000000;\ f^1(a) = 0.0043431;$$
$$f^2(a) = -0.0000434 \text{ и } f^3(a) = 0.00000085$$

и наше вычисление расположится так, как показано в табл. 36.

Таблица 36

t	x	$tf^1(a)$	$\frac{1}{2}t^2f^2(a)$	$\frac{(t^2-1)}{6}f^3(a)$	$f(x)$
0	1000	0	—	—	3.0000000
0.1	1001	0.00043431	—0.00000022	—0.00000000	3.0004341
0.2	1002	0.00086862	—0.00000087	—0.00000001	3.0008677
0.3	1003	0.00130293	—0.00000196	—0.00000002	3.0013009
0.4	1104	0.00173724	—0.00000348	—0.00000005	3.0017337
0.5	1005	0.00217155	—0.00000544	—0.00000005	3.0021661
0.6	1006	0.00260586	—0.00000782	—0.00000005	3.0025980
0.7	1007	0.00304017	—0.00001065	—0.00000005	3.0030295
0.8	1008	0.00347448	—0.00001389	—0.00000004	3.0034605
0.9	1009	0.00399879	—0.00001756	—0.00000002	3.0038912
1.0	1010	0.00434310	—0.00002170	—0.00000000	3.0043410

Как видно, результат получился тот же самый, как и при вычислении Ньютона, и самое вычисление не проще, а даже сложнее, ибо числа $\frac{1}{2}t^2 f^2(a)$ больше, нежели числа $\frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0$.

Мы выполняли интерполирование для нашего промежутка так, что величина t изменялась от 0 до 1; но когда составляются таблицы при помощи интерполирования, то всегда можно распорядиться так, чтобы величина t изменялась только от $-\frac{1}{2}$ до $+\frac{1}{2}$; так, в нашем примере для чисел от 1000 до 1005 надо принять за исходное число 1000, и тогда t изменялось бы от 0 до $+\frac{1}{2}$; а для чисел от 1005 до 1010 — принять за исходное число 1010, и тогда t изменилось бы от 0 до $-\frac{1}{2}$. Понятно, что это замечание относится в равной мере ко всякой формуле интерполирования.

Таблица 37

t	$y=f(t)$	$f^1(t)$	$f^2(t)$	$f^3(t)$	$f^4(t)$	$f^5(t)$
0	0.000					
		1.519				
1	1.519		**2.993**			
		4.512				
				—0.139		
2	6.031	**5.939**				
			2.854	**—0.180**	—0.082	
	9.711	7.366				
			2.743	—0.221	**—0.084**	—0.004
3	13.397	**8.683**				
			2.633	**—0.264**	—0.086	**+0.009**
	18.397	9.999				
			2.480	—0.307	**—0.075**	+0.021
4	23.396	**11.162**				
			2.326	**—0.340**	—0.065	**+0.011**
	29.559	12.325				
			2.140	—0.372	**—0.064**	+0.002
5	35.721	**13.302**				
			1.954	**—0.404**	—0.063	**+0.010**
	42.860	14.279				
			1.737	—0.435	**—0.054**	+0.018
6	50.000	**15.038**				
			1.519	**—0.457**	—0.045	**+0.016**
	57.899	15.798				
			1.279	—0.480	**—0.038**	+0.014
7	65.798	**16.318**				
			1.039	**—0.495**	—0.031	
		16.837				
				—0.511		
8	82.635					
			0.528			
		17.365				
9	100.000					

Для облегчения вычислений, величины множителей $\frac{t^2}{2}$, $\frac{(t-1)\cdot t\cdot(t+1)}{6}$ и т. д. даются в особых таблицах по аргументу t. Такая таблица помещена в конце этой книги (табл. 100).

Применим теперь ф-лу (VIII) к нашему второму примеру (§ 69), т. е. к определению производных первого и второго порядка для функций, заданных или графически или таблично.

Таблица разностей, дополненная их средними арифметическими, для тех пределов аргумента, которые нам понадобятся, будет, при принятом нами обозначении, такова (табл. 37).

Для вычисления скоростей составляем табл. 38, причем $\frac{1}{30}f^{(5)}$ равно нулю до всех значений t в рассматриваемых пределах.

Таблица 38

I	II	III	VI	V
t	f^1	$-\frac{1}{6}f^3$	(II) + (III)	$v=\frac{(II)+(III)}{h}$
2	5.939	0.030	5.969	596.9
3	8.683	0.044	8.727	872.7
4	11.162	0.057	11.219	1121.9
5	13.302	0.067	13.369	1336.9
6	15.038	0.076	15.114	1511.4
7	16.318	0.083	16.401	1640.1

Точно так же для вычисления ускорения имеем табл. 39.

Таблица 39

I	II	III	IV	V
t	f^2	$-\frac{1}{12}f^4$	(II) + (III)	$w=\frac{(II)+(III)}{h^2}$
2	2.854	0.007	2.861	28610
3	2.633	0.007	2.640	26400
4	2.326	0.005	2.331	23310
5	1.954	0.005	1.959	19590
6	1.519	0.004	1.523	15230
7	1.039	0.003	1.042	10420

Сопоставление этого расчета с исполненным по формуле Ньютона показывает, что при обработке записи движения с целью получения скоростей и ускорений следует для моментов, близких к началу и концу промежутка, пользоваться формулою Ньютона, для моментов же, близких к середине — формулою Стирлинга. Такое совместное пользование обеими формулами дает наиболее надежные результаты.

Еще лучшие результаты можно получить, если воспользоваться ф-лами (XIIIc) и (XIIId), сделав в них $t=\frac{1}{2}$, и, следовательно, определять скорости и ускорения не в моменты $0, h, 2h, \ldots$, для которых имеются отсчеты расстояний, а в моменты $\frac{1}{2}h$, $\frac{3}{2}h$ и т. д., лежащие посередине этих промежутков.

Формулы интегрирования имеют особенное значение при приближенном решении дифференциальных уравнений, в особенности тех, которые встречаются в вопросах механики и астрономии, почему они и носят название „механических квадратур“, и, после вышеприведенных объяснений, пользование ими затруднений представить не может.

ГЛАВА VII

ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 75. К дифференциальным уравнениям приводит множество вопросов; достаточно упомянуть динамику, чтобы видеть важность учения о дифференциальных уравнениях для практических приложений математики.

В этом курсе мы ограничимся только уравнениями *обыкновенными* и системами таких уравнений, совершенно не касаясь уравнений с частными производными.

При изложении этой главы предполагаются известными те основные общие свойства обыкновенных дифференциальных уравнений, которые излагаются в обычных руководствах по анализу, а также те простейшие классы этих уравнений, интегрирование которых может быть выполнено в конечном виде и в квадратурах. Предполагается также известным способ изменения постоянных произвольных в применении к линейным дифференциальным уравнениям.

Таким образом, эта глава заключает изложение приемов для нахождения приближенных решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Приемы такого решения можно подразделить на следующие группы:

1) разложение общего интеграла в ряды, расположенные по степеням переменной независимой;

2) разложение общего интеграла в ряды, расположенные по степеням постоянных параметров, входящих в уравнение;

3) разложение в ряды, расположенные по степеням постоянных, представляющих начальные значения искомой функции и ее производных;

4) применение способа последовательного приближения и „механических квадратур“.

5) приближенное численное интегрирование.

§ 76. Нахождение решения дифференциального уравнения в виде ряда, расположенного по степеням переменной независимой, производится: а) или пользуясь теоремою Тейлора, когда разлагают по степеням величины $x-a$, б) или пользуясь рядом Маклорена, когда разлагают по степеням самой переменной независимой x, в) или пользуясь методом неопределенных коэффициентов и показателей.

Все эти три способа обыкновенно с достаточною полнотою и подробностью излагаются в обычных руководствах, почему мы ограничимся лишь краткими указаниями, не вдаваясь ни в подробности доказательства того, что получаемые ряды представляют, действительно, решение рассматриваемого уравнения, ни в розыскание условий сходимости этих рядов, отсылая, например, к сочинению E. Goursat „Cours d'analyse mathématique", t. II.

В практических приложениях разлагать по степеням переменной независимой, например времени — в вопросах о движении, надо в том случае, когда требуется получить решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, и это решение, нужно лишь для малых значений переменной. Подобный случай имеет место, например, когда трактуем о движении снаряда внутри канала орудия, когда разбираем откат орудия, вылет мины из аппарата и вообще разного рода движения, продолжающиеся весьма короткое время.

Применение теоремы Тейлора состоит в следующем: положим, что дано дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots y^{(n-1)}) \tag{1}$$

в котором x есть переменная независимая, y — ее искомая функция, $y', y'', \dots y^{(n-1)}, y^{(n)}$ — производные от y по переменной x; требуется представить в виде ряда, расположенного по степеням $x-a$, такое решение этого уравнения, которое удовлетворяет следующим „начальным", относящимся к частному значению $x=a$, условиям:

при $x=a$	величина	y	должна	равняться	b
„ $x=a$	„	y'	„	„	b_1
„ $x=a$	„	y''	„	„	b_2
. . . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
„ $x=a$	„	$y^{(n-1)}$	„	„	b_{n-1}

причем $b_0, b_1, b_2, \dots b_{n-1}$ суть *заданные* постоянные.

В силу ряда Тейлора можем написать, *допуская, что разложение величины y по целым и положительным степеням $x-a$ существует*, такое равенство:

$$y = b + b_1 \frac{x-a}{1} + b_2 \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} + \dots + b_{n-1} \frac{(x-a)^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} +$$
$$+ y_0^{(n)} \frac{(x-a)^n}{1 \cdot 2 \dots n} + y_0^{(n+1)} \frac{(x-a)^{n+1}}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} + \dots$$

в котором $y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}, \dots$ суть значения, которые принимают $y^{(n)}, y^{(n+1)}, \dots$ при $x=a$.

Для нахождения этих значений обращаемся к данному дифференциальному уравнению, делая в нем

$$x = a \quad \text{и} \quad y = b; \quad y' = b_1, \ldots y^{(n-1)} = b_{n-1}$$

получим

$$y_0^{(n)} = f(a, b, b_1, b_2, \ldots b_{n-1}) = c_0 \tag{2}$$

Чтобы найти значение следующих производных, дифференцируем предложенное уравнение, рассматривая в нем x как переменную независимую, а y и его производные — как функции x, тогда будем иметь

$$y^{(n+1)} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} \tag{*}$$

подставляя сюда вместо $y^{(n)}$ его величину из ур-ния (1), видим, что $y^{(n+1)}$ выразится как известная функция от букв: $x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$; пусть будет

$$y^{(n+1)} = f_1(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}) \tag{3}$$

Поступив с этим уравнением точно так же, получим

$$y^{(n+2)} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \frac{\partial f_1}{\partial y'} y'' + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}$$

заменив в котором $y^{(n)}$ его величиною из ур-ния (1), будем иметь уравнение вида

$$y^{(n+2)} = f_2(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}) \tag{4}$$

в котором f_2 будет известная вполне определенная функция от букв, стоящих под ее знаком.

Продолжая действовать таким образом, можем составить выражения до производной любого порядка от y в функции букв $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$.

Делая затем в этих выражениях $x = a$ и подставляя вместо $y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ те значения, которые они должны принимать при $x = a$, т. е. $b, b_1, \ldots b_{n-1}$, мы получим значения

$$y_0^{(n+1)} = f_1(a, b, b_1, b_2, \ldots b_{n-1}) = c_1$$
$$y_0^{(n+2)} = f_2(a, b, b_1, b_2, \ldots b_{n-1}) = c_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

которые, будучи подставлены в выражение y, и дадут для него ряд

$$y = b + b_1 \frac{x-a}{1} + b_2 \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} + \ldots + b_{n-1} \frac{(x-a)^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} +$$
$$+ c_0 \frac{(x-a)^n}{1 \cdot 2 \ldots n} + c_1 \frac{(x-a)^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} + \ldots$$

Само собою разумеется, что если бы надо было разлагать по степеням переменной x, то стоило бы только повторить предыдущее рассуждение, полагая $a=0$.

Пример. Дано дифференциальное уравнение движения точки:

$$y'' + (1 + 0.1t)\, y + 0.1 y'^2 = 0$$

и при $t=0$ должно быть $y=1$ м, $y'=2$ м/сек.; разложить решение этого уравнения в ряд по степеням времени t и найти амплитуду первого размаха.

Решив предложенное уравнение относительно y'', имеем

$$y'' = -y - 0.1ty - 0.1y'^2 \tag{1}$$

Дифференцируя это уравнение, получим

$$\begin{aligned}
y''' &= -y' - 0.1\,(ty' + y) - 0.2y'y'' \\
y^{IV} &= -y'' - 0.1\,(ty'' + 2y') - 0.2\,(y'y''' + y''^2) \\
y^{V} &= -y''' - 0.1\,(ty''' + 3y'') - 0.2\,(y'y^{IV} + 3y''y''') \\
y^{VI} &= -y^{IV} - 0.1\,(ty^{IV} + 4y''') - 0.2\,(y'y^{V} + 4y''y^{IV} + 3y'''^2) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{*}$$

Из ур-ния (1), подставляя вместо t его начальное значение 0 и вместо y и y' их начальные значения 1 и 2, имеем

$$y_0'' = c_0 = -1.4$$

внося это значение в первое из ур-ний (*), получим

$$y_0''' = c_1 = -1.54$$

после чего второе ур-ние (*) дает

$$y_0^{IV} = c_2 = +1.224$$

Затем, продолжая так же далее, получим

$$\begin{aligned}
y^{V} &= +0.1768 \\
y^{VI} &= -0.7308 \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Следовательно, будет

$$\frac{y_0''}{1\cdot 2} = -0.7;\quad \frac{y_0'''}{1\cdot 2\cdot 3} = -0.2567;\quad \frac{y_0^{IV}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = +0.051$$

$$\frac{y_0^{V}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = +0.00147;\quad \frac{y_0^{VI}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 6} = -0.00101$$

и, значит, искомое разложение, ограничиваясь членами с t^6, таково:

$$y = y_1 = 1 + 2t - 0.7t^2 - 0.2567t^3 + 0.051t^4 + 0.00147t^5 - 0.00101t^6$$

Чтобы найти амплитуду первого размаха, составляем y' и ищем его наименьший положительный корень: имеем

$$y_1' = 2 - 1.4t - 0.77t^2 + 0.204t^3 + 0.00735t^4 - 0.00606t^5$$

Нетрудно видеть, что искомый корень будет близок к $t = 1$. В самом деле, при $t = 1$ будет

$$y'_1 = 2.211 - 2.176 = + 0.035$$

Вычисляем соответствующее значение y_1'':

$$y_1'' = -1.4 - 1.54t + 0.612t^2 + 0.0294t^3 - 0.0303t^4 \qquad (2)$$

будет

$$y_1'' = -2.339$$

Значит, искомое значение t есть

$$t_1 = 1 + \frac{0.035}{2.339} = 1.015$$

и соответствующее значение y_1 есть

$$Y_1 = 1 + 2.030 - 0.721 - 0.267 + 0.053 + 0.001 - 0.001 = 2.095$$

Чтобы проверить, насколько близко найденная величина y удовлетворяет уравнению, вычислим значения y, y', y'' для моментов

$$t = 0;\ 0.1;\ 0.2; \ldots 1.0$$

и подставим их в предложенное уравнение.

Это вычисление расположим в виде табл. 40.

Затем составляем схемы для вычисления y (табл. 41), y' (табл. 42) и y'' (табл. 43).

Таким образом, мы видим, что в пределах точности нашего вычисления величина

$$y = y_1 = 1 + 2t - 0.7t^3 - 0.2567t^3 + 0.051t^4 + 0.00147t^5 - 0.00101t^6$$

удовлетворяет нашему уравнению вполне до момента $t = 0.5$, после чего начинается систематическое уклонение, и, обратив внимание на вычисление, мы видим, что члены высших степеней совсем не оказывают влияния на саму величину y, но они становятся заметны в величине y' и еще более заметны в y''.

Таблица 40

t	t^2	t^3	t^4	t^5	t^6
0.1	0.01	0.001	0.0001	0.0000	0.0000
0.2	0.04	0.008	0.0016	0.0003	0.0001
0.3	0.09	0.027	0.0081	0.0024	0.0007
0.4	0.16	0.064	0.0256	0.0102	0.0041
0.5	0.25	0.125	0.0625	0.0313	0.0156
0.6	0.36	0.216	0.1296	0.0778	0.0467
0.7	0.49	0.343	0.2401	0.1681	0.1176
0.8	0.64	0.512	0.4096	0.3277	0.2621
0.9	0.81	0.729	0.6561	0.5905	0.5314
1.0	1.00	1.000	1.0000	1.0000	1.0000

Таблица 41

Вычисление y

t	$1+2t$	$-0.7\,t^2$	$-0.2567\,t^3$	$+0.051\,t^4$	$+0.00147\,t^5$	$-0.00101\,t^6$	y
0.0	1.000	0	0	0	0	0	1.000
0.1	1.200	—0.007	—0.000	0.000	0	0	1.193
0.2	1.400	—0.028	—0.002	0.000	0	0	1.370
0.3	1.600	—0.063	—0.007	0.000	0	0	1.530
0.4	1.800	—0.112	—0.016	0.001	0	0	1.673
0.5	2.000	—0.175	—0.032	0.003	0	0	1.796
0.6	2.200	—0.252	—0.055	0.006	0	0	1.899
0.7	2.400	—0.343	—0.088	0.012	0	0	1.981
0.8	2.600	—0.448	—0.131	0.020	0	0	2.041
0.9	2.800	—0.567	—0.187	0.032	0.001	—0.001	2.079
1.0	3.000	—0.700	—0.257	0.051	0.001	—0.001	2.094
1.015	3.030	—0.721	—0.267	0.053	0.001	—0.001	2.095

Поэтому, если бы мы к величине y присоединили еще один член вида kt^7, то в выражении y'' мы получили бы член $42kt^5$; следовательно, взяв

$$42k = +0.026$$

Таблица 42

Вычисление y'

t	$2-1.4\,t$	$-0.77\,t^2$	$+0.204\,t^3$	$+0.00735t^4$	$-0.00606t^5$	y'
0	2.000	0	0	0	0	2.000
0.1	1.860	—0.008	0.000	0	0	1.852
0.2	1.720	—0.031	0.002	0	0	1.691
0.3	1.580	—0.069	0.006	0	0	1.517
0.4	1.440	—0.123	0.013	0	0	1.330
0.5	1.300	—0.192	0.026	0	0	1.134
0.6	1.160	—0.277	0.044	0.001	0	0.928
0.7	1.020	—0.378	0.070	0.002	—0.001	0.713
0.8	0.880	—0.493	0.104	0.003	—0.002	0.492
0.9	0.740	—0.624	0.149	0.005	—0.004	0.266
1.0	0.600	—0.770	0.204	0.007	—0.006	0.035
1.015	0.579	—0.793	0.213	0.008	—0.007	0.000

Таблица 43

Вычисление y''

t	$-(1.4+1.54\,t)$	$+0.612\,t^2$	$+0.0294\,t^3$	$-0.00303\,t^4$	y''
0	—1.400	0	0	0	—1.400
0.1	—1.554	0.006	0.000	0.000	—1.548
0.2	—1.708	0.025	0.000	0.000	—1.683
0.3	—1.862	0.055	0.001	0.000	—1.806
0.4	—2.016	0.098	0.002	—0.001	—1.917
0.5	—2.170	0.153	0.004	—0.002	—2.015
0.6	—2.324	0.220	0.006	—0.004	—2.102
0.7	—2.478	0.300	0.010	—0.007	—2.175
0.8	—2.632	0.391	0.015	—0.012	—2.238
0.9	—2.786	0.495	0.021	—0.020	—2.290
1.0	—2.940	0.612	0.029	—0.030	—2.329
1.015	—2.962	0.630	0.031	—0.032	—2.333

Таблица 44

Поверка

t	y_1	$0.1\, ty_1$	$-0.1 y_1'^2$	y'' по ур-нию (1)	y_1'' по ур-нию (2)	$f(t) = y'' - y_1''$
0.0	1.000	0.000	0.400	—1.400	—1.400	0.000
0.1	1.193	0.012	0.344	—1.549	—1.548	—0.001
0.2	1.370	0.027	0.287	—1.684	—1.683	—0.001
0.3	1.530	0.046	0.230	—1.806	—1.806	—0.000
0.4	1.673	0.067	0.177	—1.917	—1.917	—0.000
0.5	1.796	0.090	0.129	—2.015	—2.015	+0.000
0.6	1.899	0.114	0.086	—2.099	—2.102	+0.003
0.7	1.981	0.139	0.050	—2.170	—2.175	+0.005
0.8	2.041	0.163	0.025	—2.229	—2.238	+0.009
0.9	2.079	0.187	0.007	—2.273	—2.290	+0.017
1.0	2.094	0.209	0.000	—2.303	—2.329	+0.026
1.015	2.095	0.212	0.000	—2.307	—2.333	+0.026

Таблица 45

t	$\delta y = 0.0006\, t^7$	$\delta y' = 0.0042\, t^6$	$\delta y'' = 0.0252\, t^5$
0	0	0	
0.1	0	0	
0.2	0	0	
0.3	0	0	
0.4	0	0	
0.5	0	0	0.001
0.6	0	0	0.002
0.7	0	0	0.004
0.8	0	0.001	0.008
0.9	0	0.002	0.015
1.00	0.001	0.004	0.025

или

$$k = + 0.0006$$

мы получили бы для y, y' и y'' поправки (табл. 45).

Следовательно, величина

$$y = 1 + 2t - 0.7t^2 - 0.2567t^3 + 0.051t^4 + 0.00147t^5 - 0.00101t^6 + 0.0006t^7$$

будет удовлетворять нашему уравнению в рассматриваемых пределах значений t со всею желаемою точностью как по отношению значений самого y, так и первых двух его производных.

Этот пример в достаточной мере выясняет, каким образом в приложении к практическим вопросам пользоваться разложением величины y в ряд по теореме Тейлора или Маклорена.

§ **77.** Метода неопределенных коэффициентов и показателей применяется с удобством к уравнениям линейным или приводящимся к таковым как, например, уравнение Бесселя, уравнение Рикатти и т. п., которые и трактуются весьма подробно в курсах анализа, почему мы на этой методе останавливаться не будем.

§ **78.** Разложение решения дифференциального уравнения в ряд, расположенный по степеням постоянных, входящих в самое уравнение, применяется в том случае, когда уравнение заключает в своем составе двоякого рода члены: 1) главные и 2) второстепенные, причем эти последние характеризуются присутствием в них *малых постоянных* (т. е. не содержащих ни переменной независимой, ни ее искомой функции) множителей. Так, например, в задачах о движении планет около Солнца главные члены будут происходить от действия Солнца, второстепенные — от взаимодействия планет друг на друга; в задачах о движении тел в сопротивляющейся среде, когда это сопротивление сравнительно мало, члены, происходящие от сопротивления, и будут второстепенными и т. п.

Подобные вопросы в механике носят вообще название вопросов „о возмущенном движении“, причем вышеупомянутые второстепенные члены и представляют „возмущения“. Обыкновенно все эти вопросы такого рода, что если отбросить члены, представляющие возмущение, иными словами положить равными нулю постоянные множители, их характеризующие, то уравнения допускают точное решение.

Поясним сущность метода на простейшем уравнении, относящемся, например, к прямолинейному движению точки по оси y; такое уравнение будет вида

$$y'' = f(t, y, y') + \alpha\varphi(t, y, y') + \beta\psi(t, y, y') + \gamma\omega(t, y, y') + \ldots$$

где $f(x, y, y')$ представляет совокупность главных членов, остальные же члены суть возмущения, причем α, β, γ — малые постоянные множители, в большей части вопросов технического характера таких различных членов будет один, редко два.

Итак, для простоты рассуждений и письма будем рассматривать уравнение вида

$$y'' = f(t, y, y') + \alpha\varphi(t, y, y') + \beta\psi(t, y, y') \tag{1}$$

и положим, что уравнение

$$y_1'' = f(t, y, y_1') \tag{1'}$$

допускает точное решение

$$y_1 = F_1(t, C_1, C_2)$$

Найдя это решение, определяем значения произвольных постоянных по начальным условиям. Уравнение

$$y = y_1 = F_1(t, C_1, C_2) \tag{*}$$

и будет представлять невозмущенное движение. Чтобы найти возмущения, полагаем

$$y = y_1 + \eta_1$$

и подставляем эту величину в *первую* часть уравнения, а во вторую его часть, в член $f(t, y, y')$, подставляем вместо y — величину $y_1 + \eta_1$, в члены же, заключающие множители α и β, подставляем величину $y = y_1$, тогда, ограничиваясь первыми степенями величин η_1 и η_1', будем иметь

$$\begin{aligned} f(t, y, y') &= f(t, y_1 + \eta_1, y_1' + \eta_1') = \\ &= f(t, y_1, y_1') + \eta_1 f'_{y_1}(t, y_1, y_1') + \eta_1' f'_{y'_1}(t, y_1, y_1') \end{aligned} \tag{2}$$

заменив в этом выражении y_1 его величиною (*), получим выражение вида

$$f(t, y, y') = f(t, y_1, y_1') + \eta_1 f_1(t) + \eta_1' g_1(t)$$

где $f_1(t)$ и $g_1(t)$ будут известные функции времени; точно так же, по подстановке в выражения $\varphi(t, y, y')$ и $\psi(t, y, y')$ вместо y его величины y_1, мы получим их в функции времени t, т. е. вида $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$, и, следовательно, для определения величины η_1, мы будем иметь, на основании ур-ния (1'), такое:

$$\eta_1'' = \eta_1 f_1(t) + \eta_1' g_1(t) + \alpha\varphi_1(t) + \beta\psi_1(t)$$

Особенность этого уравнения та, что оно *линейное*, и если мы положим

$$\eta_1 = \alpha p + \beta q$$

то оно распадается на два:

$$\left.\begin{aligned} p'' - p' \cdot g_1(t) - p \cdot f_1(t) &= \varphi_1(t) \\ q'' - q' \cdot g_1(t) - q \cdot f_1(t) &= \psi_1(t) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Во всех тех случаях, когда ур-ние (1') само линейное и с постоянными коэффициентами, то и ур-ния (3) будут также с *постоянными коэффициентами*, и, следовательно, их общие интегралы сейчас же найдутся. Если же предложенное уравнение было нелинейное, то вообще ур-ния (3) хотя и будут линейными, но с переменными коэффициентами.

В большей части вопросов технических, относящихся к исследованию колебательного движения какой-либо системы, будем иметь первый случай, т. е. ур-ния (3) будут линейные с постоянными коэффициентами, так что их интегрирование не представит затруднений.

Таким образом, когда величина

$$\eta_1 = \alpha p + \beta q$$

будет найдена, то получим

$$y = y_1 + \eta_1 = y_1 + \alpha p + \beta q = y_2$$

Если надо второе приближение, то полагаем

$$y = y_2 + \eta_2$$

и поступаем подобно предыдущему, удерживая в разложении функции $f(t, y, y')$ члены со вторыми степенями η_1 и η_1', т. е. с α^2, $\alpha\beta$ и β^2, а в разложениях $\varphi(t, y, y')$ и $\psi(y, y, y')$ лишь члены с первыми степенями α и β, ибо эти члены множатся на α и β; тогда для определения величины η_2 получим уравнение вида

$$\eta_2'' = \eta_2 f_2(t) + \eta_2' g_2(t) + \alpha^2 \varphi_2(t) + \alpha\beta\omega_2(t) + \beta^2\psi_2(t)$$

и величину η_2 в виде

$$\eta_2 = \alpha^2 p_1(t) + \alpha\beta r_1(t) + \beta^2 g_1(t)$$

и т. д.

Поясним этот процесс на том же самом примере:

$$y'' + (1 + 0.1t)\, y + 0.1 y'^2 = 0$$

Напишем это уравнение так:

$$y'' + y + \alpha t y + \beta y'^2 = 0 \tag{1}$$

тогда $\alpha = 0.1$ и $\beta = 0.1$ и будут те малые параметры, по степеням коих мы должны вести наше разложение.

Первое приближение y_1 дается уравнением

$$y_1'' + y_1 = 0$$

Общий интеграл его

$$y_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

Начальные условия: при $t=0$, y_1 должно равняться 1 и $y'=2$, дают

$$1=C_1;\qquad 2=C_2$$

и, следовательно,

$$y_1=\cos t+2\sin t$$

Делаем

$$y=y_1+\eta_1$$

и подставляем в ур-ние (1), написанное так:

$$y''=-(y+\alpha ty+\beta y'^2)$$

получаем

$$y_1''+\eta_1''=-(y_1+\eta_1+\alpha ty_1+\beta y_1'^2)$$

откуда следует для определения η_1 уравнение

$$\eta_1''+\eta_1=-\alpha t(\cos t+2\sin t)-\beta[2\cos t-\sin t]^2$$

и, следовательно, для определения функций p и q в выражении

$$\eta_1=-\alpha p-\beta q$$

будут служить уравнения

$$p''+p=t\cos t+2t\sin t$$

$$q''+q=4\cos^2 t-4\sin t\cos t+\sin^2 t=$$

$$=2(1+\cos 2t)-2\sin 2t+\frac{1}{2}(1-\cos 2t)=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\cos 2t-2\sin 2t$$

при начальных условиях: при $t=0$ должно быть $p=0$ и $p'=0$; $q=0$ и $q'=0$.

Из этих уравнений следует

$$p=C_3\cos t+C_4\sin t-\frac{1}{2}t^2\cos t+\frac{1}{4}t\cos t+\frac{1}{4}t^2\sin t+\frac{1}{2}t\sin t$$

определив постоянные произвольные C_3 и C_4 по начальным условиям, имеем

$$C_3=0;\qquad C_4=0$$

и, следовательно,

$$p=-\frac{1}{2}t^2\cos t+\frac{1}{4}t\cos t+\frac{1}{4}t^2\sin t+\frac{1}{2}t\sin t$$

Точно так же

$$q=C_3\cos t+C_4\sin t-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{2}{3}\sin 2t+\frac{5}{2}$$

причем для определения постоянных произвольных имеем

$$0 = C_3 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}; \quad C_3 = -2$$

$$0 = C_4 + \frac{4}{3}; \quad C_4 = -\frac{4}{3}$$

и, таким образом,

$$q = -2\cos t - \frac{4}{3}\sin t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{2}{3}\sin 2t + \frac{5}{2}$$

и величина η_1 будет

$$\eta_1 = -\alpha p - \beta q = \left(\frac{1}{20}t^2 - \frac{1}{40}t + \frac{1}{5}\right)\cos t -$$

$$-\left(\frac{1}{40}t^2 + \frac{1}{20}t - \frac{2}{15}\right)\sin t + \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{15}\sin 2t - \frac{1}{4}$$

Совершенно так же продолжили бы разложение и дальше.

Для сличения результатов вычислим по формуле

$$y = y_1 + \eta_1$$

величину y, соответствующую моменту $t = \frac{1}{2}$ сек. При составлении аргументов $\cos t$ и $\sin t$ надо помнить, что t означает здесь отвлеченное число, показывающее отношение протекшего от начального до рассматриваемого момента промежутка времени к промежутку, принятому за единицу, т. е. к 1 сек., следовательно, во всех формулах надо делать

$$t = \frac{{}^1\!/_2 \text{ сек.}}{1 \text{ сек.}} = \frac{1}{2}$$

и, значит, будет

$$y_1 = \cos t + 2\sin t = \cos\frac{1}{2} + 2\sin\frac{1}{2} = \cos(28^\circ\, 38'.9) + 2\sin(28^\circ\, 38'.9)$$

а не писать так, как иногда ошибаются начинающие учиться астрономии:

$$y_1 = \cos t + 2\sin t = \cos\frac{1}{2}\text{ сек.} + 2\sin\frac{1}{2}\text{ сек.} =$$

$$= \cos(0^\circ\, 0'\, 7''.5) + 2\sin(0^\circ\, 0'\, 7''.5)$$

ибо 1 сек. времени $= 15''$ дуги.

Итак будет

$$y_1 = \cos 28^\circ\, 38'.9 + 2\sin 28^\circ\, 38'.9 = 0.8776 + 0.9588 = 1.8364$$

Затем

$$\eta_1 = \left(\frac{1}{80} - \frac{1}{80} + \frac{1}{5}\right)\cos\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{160} + \frac{1}{40} - \frac{2}{15}\right)\sin\frac{1}{2} +$$

$$+ \frac{1}{20}\cos 1 - \frac{1}{15}\sin 1 - \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{5}\cos(28^\circ\, 28'.9) + \frac{49}{480}\sin(28^\circ\, 38'.9) +$$

$$+\frac{1}{20}\cos(57^\circ\,17'.7)-\frac{1}{15}\sin(57^\circ\,17'.7)-\frac{1}{4}=$$

$$=+0.1755+0.0490+0.0270-0.0561-0.2500=-0.0546$$

следовательно,

$$y=y_1+\eta_1=1.8364-0.0546=1.7818$$

Как видно, разница с более точною величиною 1.796 чувствительная; эта разница вполне объяснима, ибо величины α^2 и β^2, которыми мы пренебрегаем, выражаются в $\frac{1}{100}$.

Следовательно, для достижения большей точности надо бы продолжить разложение, в новом разложении прибавились бы члены вида

$$at^3\cos t;\quad bt^3\sin t;\quad c\cos 3t;\quad d\sin 3t;\quad e\cos 4t;\quad f\sin 4t$$

Отсюда становится понятною сложность формул небесной механики, где приходится прибегать к подобного рода разложениям, идя до членов высших порядков.

§ **79.** Составление уравнений для определения величин $p, q, \ldots$ может быть упрощено, если поступать так: полагаем

$$y=y_1+\alpha p_1+\beta q_1+\alpha^2 p_2+\alpha\beta r_2+\beta^2 q_2+\ldots$$

составляем выражения y' и y'^2, в которых удерживаем члены, порядок коих на 1 меньше того, до которого желаем итти в разложении величины y; так, например, если мы хотим ограничиваться лишь членами второго порядка, то будет

$$y'^2=y_1'^2+2(\alpha p_1'+\beta q_1')\,y_1'$$

и подставляем величину y в данное уравнение, в котором удерживаем лишь члены до второго порядка, тогда получим

$$\begin{gathered}y_1''+\alpha p_1''+\beta q_1''+\alpha^2 p_2''+\alpha\beta r_2''+\beta^2 q_2''+\\+(y_1+\alpha p_1+\beta q_1+\alpha^2 p_2+\alpha\beta r_2+\beta^2 q_2)+\alpha t(y_1+\alpha p_1+\beta q_1)+\\+\beta(y_1'^2+2\alpha p_1' y_1'+\beta q_1' y_1')=0\end{gathered}$$

Собирая члены с одинаковыми степенями α и β, т. е. представляя это уравнение в таком виде:

$$\begin{gathered}(y_1''+y_1)+\alpha(p_1''+p_1+ty_1)+\beta(q_1''+q_1+y_1'^2)+\alpha^2(p_2''+p_2+p_1t)+\\+\beta^2(q_2''+q_2+q_1'y_1')+\alpha\beta(r_2''+r_2+tq_1+2p_1'y_1')=0\end{gathered}$$

видим, что оно распадается на такие:

$$\left.\begin{aligned}y_1''+y_1&=0\\p_1''+p_1&=-ty_1\\q_1''+q_1&=-y_1'^2\\p_2''+q_2&=-tp_1\\q_2''+q_2&=-q_1'y_1'\\r_2''+r_2&=-tq_1-2p_1'y_1'\end{aligned}\right\}\qquad(*)$$

Причем начальные условия в нашем случае таковы:

При $t=0$ должно быть

$$y_1=1;\quad y_1'=2$$
$$p_1=0;\quad p_1'=0;\quad q_1=0;\quad q_1'=0$$
$$p_2=0;\quad p_2'=0;\quad r_2=0;\quad r_2'=0;\quad q_2=0;\quad q_2'=0$$

Очевидно, что первое уравнение системы (*) доставит величину y_1; подставив эту величину во второе и третье уравнения, найдем p_1 и q_1; подставив их в следующие три уравнения, найдем p_2, r_2, q_2, и таким образом и получим наше разложение до членов второго порядка относительно α и β.

§ **80.** В § 78 мы видели, что в общем случае уравнения системы, подобной системе (*), хотя и будут линейными, но не с постоянными коэффициентами. Линейные уравнения с переменными коэффициентами встречаются во многих вопросах математической физики, и некоторые из них изучены весьма обстоятельно, как, например, уравнения:

1) Бесселя

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$$

2) Рикатти

$$y''-a^2x^m y=0$$

3) Уравнение гипергеометрического ряда

$$x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y=0$$

мы на этих уравнениях останавливаться не будем, а покажем одну общую методу, которая приложима для получения решения, пригодного в сравнительно небольших пределах изменяемости величины x, как то и требуется во многих вопросах прикладных наук.

Итак положим, что дано линейное дифференциальное уравнение

$$y''+Py'+Qy=0 \tag{1}$$

где P и Q суть заданные функции переменной независимой x.

Покажем, во-первых, что это уравнение может быть приведено к виду

$$z''=Rz$$

в самом деле, сделаем

$$y=uz$$

тогда

$$y'=u'z+z'u;\qquad y''=u''z+2u'z'+uz''$$

и наше уравнение будет

$$uz''+(2u'+Pu)z'+(u''+Pu'+Qu)z=0$$

выберем теперь u так, чтобы было

$$2u' + Pu = 0$$

т. е.

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^x P dx}$$

тогда будет

$$u'' + Pu' + Qu = u\left[Q - \frac{1}{2}P - \frac{1}{4}P^2\right]$$

и, следовательно, полагая

$$-R = Q - \frac{1}{2}P' - \frac{1}{4}P^2$$

получим для определения z уравнение

$$z'' = Rz \tag{2}$$

к которому надо присоединить и начальные условия: при $x = a$ должно быть

$$z = A; \qquad z' = B$$

Ур-ние (2), будучи написано так:

$$d(z') = Rz\,dx$$

дает по интегрировании

$$z' = \frac{dz}{dx} = B + \int\limits_a^x Rzdx$$

и по вторичном интегрировании

$$z = A + B(x - a) + \int\limits_a^x dx \int\limits_a^x Rzdx \tag{3}$$

Сделаем для сокращения письма

$$z_1 = A + B(x - a)$$

тогда, подставляя под знаком интеграла в ур-нии (3) вместо z его величину

$$z = z_1 + \int\limits_a^x dx \int\limits_a^x Rzdx \tag{*}$$

получим уравнение

$$z = z_1 + \int_a^x dx \int_a^x R z_1 dx + \int_a^x dx \int_a^x R dx \int_a^x dx \int_a^x Rzdx$$

и, продолжая поступать таким же образом далее, будем получать

$$z = z_1 + \int_a^x dx \int_a^x R z_1 dx + \int_a^x dx \int_a^x Rdx \int_a^x dx \int_a^x R z_1 dx +$$
$$+ \int_a^x dx \int_a^x Rdx \int_a^x dx \int_a^x Rdx \int_a^x dx \int_a^x Rzdx \dots$$

Если условимся обозначать действие

$$\int_a^x dx \int_a^x R z_1 dx = \Phi_1 (z_1)$$

то же действие, повторенное дважды, т. е.

$$\int_a^x dx \int_a^x Rdx \int_a^x dx \int_a^x R z_1 dx = \Phi_1 [(\Phi_1) z_1] = \Phi_2 (z_1)$$

и вообще

$$\Phi_1 [\Phi_n (z_1)] = \Phi_{n+1} (z_1)$$

то предыдущее равенство напишется так:

$$z = z_1 + \Phi_1 (z_1) + \Phi_2 (z_1) + \Phi_3 (z_1) + \dots + \Phi_{n-1} (z_1) + \Phi_n (z) \qquad (4)$$

Таким образом, мы видим, что если только при неопределенном возрастании n

$$\lim_{n=\infty} \Phi_n (z) = 0$$

при всяком значении x, лежащем между рассматриваемыми границами, то z представится в виде ряда, каждый член коего получается из предшествующего ему умножением на R и двукратным затем интегрированием от a до x.

К этому результату можно прийти и иначе, положим

$$z = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \qquad (**)$$

и постараемся распорядиться так, чтобы быть в состоянии по предыдущим членам этого ряда составлять последующие; ур-ние (2) дает

$$v_0'' + v_1'' + v_2'' + \dots + v_n'' + \dots = R(v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots)$$

Если ряд (**) таков, что при неопределенном возрастании n величина v_n приближается к нулю при *всяком* значении x между рассматриваемыми пределами, так и при самих пределах, то мы можем удовлетворить предыдущему уравнению и начальным условиям, выбрав v_0, v_1, ... v_n так чтобы было

$$\begin{aligned} v_0'' &= 0 \\ v_1'' &= Rv_0 \\ v_2'' &= Rv_1 \\ v_3'' &= Rv_2 \\ &\dots \\ v_n'' &= Rv_{n-1} \end{aligned}$$

при начальных условиях: при $x = a$ должно быть

$$\begin{array}{ll} v_0 = A; & v_0' = B \\ v_1 = 0; & v_1' = 0 \\ v_2 = 0; & v_2' = 0 \\ \dots & \dots \\ v_{n-1} = 0; & v'_{n-1} = 0 \\ v_n = 0; & v_n' = 0 \end{array}$$

тогда будет

$$\begin{aligned} v_0 &= A + B(x-a) \\ v_1 &= \int_a^x dx \int_a^x Rv_0\, dx \\ v_2 &= \int_a^x dx \int_a^x Rv_1\, dx \\ &\dots\dots \\ v_k &= \int_a^x dx \int_a^x Rv_{k-1}\, dx \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

Покажем теперь, что величина v_n, определяемая такою последовательностью действий, действительно, имеет своим пределом 0 при неопределенном возрастании числа n.

В самом деле, положим, что пока x заключается в рассматриваемых границах, т. е. между a и X, где X есть то наибольшее значение, для которого нам решение уравнения нужно, что функция $R(x)$ не превосходит по абсолютной величине некоторой конечной положительной величины M; величина z_1 при конечных значениях A и B, a и X, очевидно, не превзойдет по абсолютной величине некоторого числа N, тогда будет по предположению

$$|v_0| < N$$

следовательно,

$$|v_1| < \int_a^x dx \int_a^x NM\,dx$$

т. е.

$$|v_1| < NM\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}$$

затем

$$|v_2| < \int_a^x dx \int_a^x NM^2 \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}\,dx$$

т. е.

$$|v_2| < NM^2\frac{(x-a)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

продолжая так же далее, видим, что будет

$$|v_n| < NM^n\frac{(x-a)^{2n}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n} \qquad (5)$$

таким образом, при всяком *конечном* значении разности $x-a$ и чисел N и M, предел величины $|v_n|$ есть нуль.

Остается показать, что при неопределенном возрастании n остаток ряда (4) или равносильного ему ряда (*), представляющего величину z, т. е. $\Phi_n(z)$, имеет своим пределом нуль. Для этого достаточно показать, что величина z в рассматриваемом промежутке $x-a$ по численной величине не может превзойти некоторого конечного числа μ.

В самом деле, допустим, что такое число μ существует, так что

$$|z| < \mu$$

тогда будет

$$|\Phi(z)| < \mu M^n\frac{(x-a)^{2n}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n}$$

вместе с тем сумма

$$z_1 + \Phi_1(z_1) + \ldots + \Phi_{n-1}(z_1)$$

по численной величине меньше суммы

$$N\left[1+\frac{M(x-a)^2}{1\cdot 2}+\frac{M^2(x-a)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{M^{n-1}(x-a)^{2n-2}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n-2)}\right]$$

т. е. меньше

$$\frac{N}{2}\left[e^{\sqrt{M}(x-a)}+e^{-\sqrt{M}(x-a)}\right]$$

Обозначив через P наибольшее значение этой величины в рассматриваемом промежутке, видим, что будет иметь место неравенство

$$|z| < P + \mu\frac{(x-a)^{2n}\cdot M^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n}$$

Значит, надо выбрать μ, так чтобы было

$$\mu > P + \mu\frac{(x-a)^{2n}\cdot M^n}{1\cdot 2\ldots 2n}$$

При достаточно большом n всегда можно сделать

$$\frac{M^n(x-a)^{2n}}{1\cdot 2\ldots 2n} < \varepsilon$$

где ε сколь угодно малое наперед назначенное положительное число, значит стоит только взять

$$\mu > \frac{P}{1-\varepsilon} \tag{5'}$$

и неравенства

$$|z| < \mu$$

$$|\Phi_n(z)| < \mu M^n\frac{(x-a)^{2n}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n} \tag{5''}$$

будут удовлетворены, вместе с тем ф-лы (5) и (5″) дают нам предел погрешности, которую мы сделаем в величине z, остановившись на данном члене нашего ряда.

Как видно, этот процесс требует только выполнения действия

$$\int_a^x dx\int_a^x Rv_k\,dx$$

в предыдущей главе был показан тот симметричный и определенный процесс, коим это действие совершается, когда оно не может быть выполнено аналитически.

Из этого становится понятным то значение, которое имеет способ „механических квадратур“ для вычисления возмущений в вопросах астрономии, вместе с тем ясно и самое происхождение этого термина.

§ 81. Прием разложения решения дифференциального уравнения в ряд по степеням начальных значений искомой функции применяется к тем вопросам механики, когда исследуется колебательное движение какой-нибудь системы и заведомо известно, что эти колебания остаются малыми, причем в каждом частном вопросе надо сделать определение того, что под словом „малое“ разумеется.

Так, например, в вопросе о качаниях маятника под словом „малая“ амплитуда разумеют такую амплитуду θ, что с тою степенью точности, которая требуется, можно считать

$$\sin\theta = \theta$$

т. е. пренебрегать величиною $\frac{\theta^3}{6}$ перед θ, иными словами величиною $\frac{\theta^2}{6}$ перед 1. Так, например, если бы мы довольствовались относительною точностью до $\frac{1}{1000}$, то $\frac{\theta^2}{6}$ должно бы оставаться меньше $\frac{1}{1000}$, иначе $\theta < \frac{1}{13}$ или кругло $\theta < 5^\circ$, и т. п. В вопросе об упругих колебаниях какой-либо системы малое значит — пока деформации не превзойдут „предела пропорциональности“, который обыкновенно лежит ниже „предела упругости“, так как лишь при этом условии имеют место те линейные уравнения, коими пользуются, и т. д.

Поясним сущность этого приема на типичном примере качаний маятника (или корабля) в среде, сопротивление которой выражается формулою

$$F = av + bv^2$$

где v есть скорость движущегося тела.

В этом случае придется иметь дело с уравнением вида

$$u'' + 2hu' + n^2 u \pm ku'^2 = 0$$

причем знак $+$ при члене с u' надо брать, пока $u' > 0$, и знак — когда $u' < 0$, начальные условия таковы: при $t = 0$ должно быть $u = \alpha$ и $u' = 0$, где α предполагается положительным, так что при первом размахе u' будет отрицательное, и уравнение движения будет

$$u'' + 2hu' + n^2 u - ku'^2 = 0$$

Величина α предполагается малой.

Полагаем

$$u = \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \ldots$$

причем φ_1, φ_2 суть неизвестные функции времени t. Это уравнение пишем, потому что очевидно, если $\alpha = 0$, то и u будет постоянно равно 0.

Составляем выражение

$$u' = \alpha\varphi_1' + \alpha^2\varphi_2'$$

$$u'' = \alpha\varphi_1'' + \alpha^2\varphi_2''$$

Затем

$$u'^2 = \alpha^2 \varphi_1'^2 + \ldots$$

и подставляем в предложенное уравнение, которое тогда примет вид

$$\alpha(\varphi_1'' + 2h\varphi_1' + n^2\varphi_1) + \alpha^2(\varphi_2'' + 2h\varphi_2' + n^2\varphi_2 - k\varphi_1'^2) + \ldots = 0$$

Так как это уравнение должно иметь место при всяком значении α, то должно быть в отдельности

$$\varphi_1'' + 2h\varphi_1' + n^2\varphi_1 = 0$$
$$\varphi_2'' + 2h\varphi_2' + n^2\varphi_2 = k\varphi_1'^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Начальные же условия для функций φ_1, φ_2 при $t=0$ должны быть

$$\varphi_1 = 1; \quad \varphi_1' = 0$$
$$\varphi_2 = 0; \quad \varphi_2' = 0$$
$$\ldots\ldots$$

Из первого уравнения находим, полагая

$$n_1 = \sqrt{n^2 - h^2}$$

ибо обыкновенно h мало по сравнению с n,

$$\varphi_1 = e^{-ht}(C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t)$$

В силу начальных условий будет

$$C_1 = 1; \quad C_2 = \frac{h}{n_1}$$

так что

$$\varphi_1 = e^{-ht}\left(\cos n_1 t + \frac{h}{n_1}\sin n_1 t\right)$$

Тогда уравнение для определения φ_2 будет

$$\varphi_2'' + 2h\varphi_2' + n^2\varphi_2 = \frac{kn^4}{2n_1^2} e^{-2ht}(1 - \cos 2n_1 t)$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$\varphi_2 = e^{-ht}(C_3 \cos n_1 t + C_4 \sin n_1 t) + \frac{kn^2}{2n_1^2} e^{-2ht} + e^{-2ht}(B \cos 2n_1 t + D \sin 2n_1 t)$$

причем B и D определятся из уравнений, получаемых от подстановки вместо величины φ_2 величины

$$e^{-2ht}(B \cos 2n_1 t + D \sin 2n_1 t)$$

причем полученное выражение приравнивается величине

$$-\frac{kn^4}{2n_1^2}e^{-2ht}\cos 2n_1 t$$

стоящей во второй части: именно, будет

$$(3n^2-4h^2)B+4hn_1 D=\frac{kn^4}{2n_1^2}$$

$$4hn_1 B-(3n^2-4h^2)D=0$$

Откуда следует

$$B=\frac{kn^4}{2n_1^2}\cdot\frac{3n^2-4h^2}{(3n^2-4h^2)^2+16h^2n_1^2}$$

$$D=\frac{kn^4}{2n_1^2}\cdot\frac{4hn_1}{(3n^2-4h^2)^2+16h^2n_1^2}$$

из начальных же условий следует

$$C_3=-(A+B);\qquad C_4=\frac{h}{n_1}(A+B)-2D$$

Таким образом и будет найдено решение, точное до вторых степеней величины α и относящееся до движения в сторону убывающих амплитуд, т. е. до того значения времени, при котором в первый раз будет $u'=0$. Эта величина приблизительно есть $\frac{\pi}{n_1}$.

Дальнейшее исследование не относится уже к интегрированию нашего уравнения, которое мы взяли лишь для пояснения способа.

§ 82. По поводу всех этих разложений как по степеням малых параметров, входящих в уравнение, так и по степеням начальных значений, необходимо иметь в виду следующее обстоятельство: откидывая в самом уравнении члены, содержащие параметр α в степени выше какого-либо избранного числа k, мы не можем поручиться, что и в общем интеграле будут откинуты члены, начиная с того же самого порядка, а не с низшего.

Последний случай может иметь место, например, когда при нахождении частного интеграла линейного уравнения с постоянными коэффициентами, у которого вторая часть будет вида $l\cos pt$, придется ее делить на выражение вида n^2-p^2, и, если окажется, что n^2-p^2 будет само малою величиною, например, порядка c относительно α, тогда член общего интеграла, соответствующий члену $l\cos pt$, где l положим порядка $k-1$ относительно α, будет не $(k-1)$-го порядка, а порядка $k-1-c$.

Следующий пример с ясностью обнаружит это обстоятельство.

Положим, что требуется исследовать малые колебания сферического маятника. Взяв за начало координат точку привеса, направляя ось z вертикально вниз и обозначая через N натяжение нити и через l длину ее, имеем следующие уравнения движения маятника:

$$mx'' = -N\frac{x}{l}; \qquad my'' = -N\frac{y}{l}; \qquad mz'' = mg - N\frac{z}{l} \tag{1}$$

причем уравнение связи есть

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

или

$$z = \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)} \tag{2}$$

Начальные условия пусть будут: при $t = 0$ должно быть

$$x = a; \qquad x' = 0$$
$$y = 0; \qquad y' = c$$

Под словом малые колебания надо разуметь, что отношения $\frac{a}{l}$ и $\frac{c\tau}{l}$, где τ есть время одного полного размаха маятника, суть величины малые, по степеням коих мы и будем разлагать наше решение.

Из ур-ния (2) следует

$$z = l\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2l^2} + \cdots\right) \tag{*}$$

т. е. в первом приближении можно принять $z = l$, тогда последнее из ур-ний (1) дает

$$N = mg$$

и тогда первые два принимают вид

$$x'' + \frac{g}{l}x = 0; \qquad y'' + \frac{g}{l}y = 0$$

Откуда следует, принимая во внимание начальные условия:

$$\begin{aligned} x &= a\cos nt \\ y &= b\sin nt \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$n = \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{2\pi}{\tau}$$

так что

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

и

$$b=\frac{c}{n}$$

Таким образом представляется, что полученное решение и есть точное до членов *первого* порядка относительно a и b, ибо в ур-нии (*) откинуты члены *второго* порядка относительно a и b.

Между тем, такое заключение будет не правильно.

В самом деле, подставим в ур-ние (*) вместо x и y их величины (3), тогда будет

$$z=l\left(1-\frac{a^2\cos^2 nt}{2l^2}-\frac{b^2\sin^2 nt}{2l^2}\right)=$$

$$=l\left[1-\frac{1}{4l^2}\left(a^2+a^2\cos 2nt+b^2-b^2\cos 2nt\right)\right]=$$

$$=l\left(1-\frac{a^2+b^2}{4l^2}-\frac{a^2-b^2}{4l^2}\cos 2nt\right)$$

Обозначая для краткости письма

$$\alpha^2=\frac{a^2+b^2}{4l^2};\quad \beta^2=\frac{a^2-b^2}{4l^2}$$

получим

$$z=l(1-\alpha^2-\beta^2\cos 2nt) \qquad (**)$$

причем мы нарочно приняли обозначения α^2 и β^2, чтобы показать, что это величина *второго* порядка относительно почитаемых нами за малые, само собою разумеется, что мы предполагаем $b<a$.

Из ур-ния (**) следует

$$z''=4n^2l\beta^2\cos 2nt=4g\beta^2\cos 2nt$$

что по подстановке в уравнение

$$mz''=mg-\frac{Nz}{l}$$

дает

$$4mg\beta^2\cos 2nt=mg-N(1-\alpha^2-\beta^2\cos 2nt)$$

и, следовательно,

$$N=mg\,\frac{1-4\beta^2\cos 2nt}{1-(\alpha^2+\beta^2\cos 2nt)}=$$

$$=mg\,(1-4\beta^2\cos 2nt)\,(1+\alpha^2+\beta^2\cos 2nt+\alpha^4+2\alpha^2\beta^2\cos 2nt+\beta^4\cos^2 2nt)=$$

$$=mg\left[1+\left(\alpha^2+\alpha^4-\frac{3}{2}\beta^4\right)-(3\beta^2+2\alpha^2\beta^2)\cos 2nt-\frac{3}{2}\beta^4\cos 4nt+\ldots\right]=$$

$$=mg\,[1+f(t)]$$

при само собою понятном обозначении.

Таким образом, первые два ур-ния (1) будут

$$x'' + n^2[1 + f(t)]\,x = 0$$

и

$$y'' + n^2[1 + f(t)]\,y = 0$$

которые мы напишем, полагая

$$n_1^2 = n^2\left(1 + \alpha^2 + \alpha^4 - \frac{3}{2}\,\beta^4\right)$$

так:

$$\begin{aligned} x'' + n_1^2 x &= n^2\left[(3\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2)\cos 2nt + \frac{3}{2}\,\beta^4\cos 4nt\right]x \\ y'' + n_1^2 y &= n^2\left[(3\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2)\cos 2nt + \frac{3}{2}\,\beta^4\cos 4nt\right]y \end{aligned} \qquad (4)$$

Если подставить вместо x и y во вторые части этих уравнений их величины из первого приближения

$$x = a\cos nt$$

и

$$y = b\sin nt$$

то с первого взгляда представляется, что в виду того, что вторые части этих уравнений *третьего* порядка относительно α и β, то их можно бы, если желаем иметь только члены первого и второго порядка, отбросить, между тем это не так.

В самом деле, заметив, что

$$\cos 2nt \cdot \cos nt = \frac{1}{2}\cos nt + \frac{1}{2}\cos 3nt$$

$$\cos 2nt \cdot \sin nt = \frac{1}{2}\sin 3nt - \frac{1}{2}\sin nt$$

$$\cos 4nt \cdot \cos nt = \frac{1}{2}\cos 3nt + \frac{1}{2}\cos 5nt$$

$$\cos 4nt \cdot \sin nt = \frac{1}{2}\sin 5nt - \frac{1}{2}\sin 3nt$$

напишем предыдущие уравнения так:

$$x'' + n_1^2 x = a\left(\frac{3}{2}\,\beta^2 + \alpha^2\beta^2\right)n^2\cos nt +$$

$$+ a\left(\frac{3}{2}\,\beta^2 + \alpha^2\beta^2 + \frac{3}{4}\,\beta^4\right)n^2\cos 3nt + \frac{3}{4}\,a\beta^4 n^2\cos 5nt$$

$$y'' + n_1^2 y = -b\left(\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2\right) n^2 \sin nt +$$

$$+ b\left(\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2 - \frac{3}{4}\beta^4\right) n^2 \sin 3nt + \frac{3}{4} b\beta^4 n^2 \sin 5nt$$

и, следовательно, будет

$$x = C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t + a \frac{\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2}{n_1^2 - n^2} n^2 \cos nt +$$

$$+ a \frac{\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2 + \frac{3}{4}\beta^4}{9n^2 - n_1^2} n^2 \cos 3nt + \frac{3}{4} a \frac{\beta^4}{25n^2 - n_1^2} n^2 \cos 5nt$$

$$y = C_3 \cos n_1 t + C_4 \sin n_1 t - b \frac{\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2}{n_1^2 - n^2} n^2 \sin nt +$$

$$+ b \frac{\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2 - \frac{3}{4}\beta^4}{9n^2 - n_1^2} n^2 \sin 3nt + \frac{3}{4} b \frac{\beta^4}{25n^2 - n_1^2} n^2 \sin 5nt$$

Заметив, что

$$n_1^2 = n^2\left(1 + \alpha^2 + \alpha^4 - \frac{3}{2}\beta^4\right)$$

видим, что величина

$$n_1^2 - n^2 = n^2\alpha^2 + n^2\left(\alpha^4 - \frac{3}{2}\beta^4\right)$$

есть малая величина *второго* порядка, поэтому члены

$$\frac{\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2}{n_1^2 - n^2} a \cos nt; \qquad -\frac{\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2}{n_1^2 - n^2} b \sin nt$$

не *третьего* порядка, а *первого*, и, следовательно, даже в первом приближении их отбрасывать нельзя, а надо удержать.

Таким образом, если бы мы хотели из этих формул иметь члены *первого* порядка, то должны писать

$$x = C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t + \frac{3}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^2} a \cos nt$$

$$y = C_3 \cos n_1 t + C_4 \sin n_1 t - \frac{3}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^2} b \sin nt$$

и определить постоянные произвольные по начальным условиям, тогда получим

$$a = C_1 + \frac{3}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^2} a; \quad 0 = C_2$$

$$0 = C_3; \quad c = bn = n_1 C_4 - \frac{3}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^2} bn$$

Откуда

$$C_1 = a - \frac{3}{2}\,\frac{\beta^2}{\alpha^2}\,a = a\left(1 - \frac{3}{2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)$$

$$C_4 = b\,\frac{n}{n_1}\left(1+\frac{3}{2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right) = b\left(1+\frac{3}{2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)$$

и, следовательно, будет

$$\begin{aligned} x &= a\left(1-\frac{3}{2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\cos n_1 t + \frac{3}{2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,a\cos nt \\ y &= b\left(1+\frac{3}{2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\sin n_1 t - \frac{3}{2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,b\sin nt \end{aligned} \qquad (5)$$

не надо думать, что так как

$$n_1 = n\left(1+\frac{1}{2}\,a^2 + \cdots\right)$$

то можно бы заменить $n_1 t$ через nt; время t возрастает неопределенно, и разность между аргументами $n_1 t$ и nt скоро достигнет заметной величины.

Заметим, что характер движения, представляемый ур-ниями (5), совершенно отличный от представляемого уравнениями

$$x = a\cos nt; \qquad y = b\sin nt$$

Действительно, эти два последние уравнения дают для траектории точки *постоянный* эллипс

$$\frac{x^2}{a_2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

коего оси направлены по осям координат.

Чтобы выяснить характер кривой, представляемой ур-ниями (5), положим

$$k = \frac{3}{2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

тогда ур-ния (5) можно написать в таком виде:

$$\begin{aligned} x &= a\cos n_1 t + 2ak\sin\frac{n_1-n}{2}t\cdot\sin\frac{n_1+n}{2}t \\ y &= b\sin n_1 t + 2bk\sin\frac{n_1-n}{2}t\cdot\cos\frac{n_1+n}{2}t \end{aligned} \qquad (6)$$

Разность $\frac{n_1-n}{2}$ по предположению весьма мала по сравнению с n или с n_1, ибо она равна $\frac{1}{4}\,\alpha^2 n$. Поэтому когда аргумент $n_1 t$ изменится на 2π.

то аргумент $\frac{n_1 - n}{2} t = \frac{1}{4} \alpha^2 nt$ изменится всего на $\alpha^2 \frac{\pi}{2}$, и в течение всего этого времени кривая (6) будет весьма близка к эллипсу

$$x = a \cos n_1 t$$
$$y = b \sin n_1 t$$

ибо расстояние соответствующих точек будет меньше $\frac{\pi}{2} \alpha^2 a$, но после того как аргумент $n_1 t$ получит приращение 2π, кривая (6), в отличие от эллипса, не замкнется, и, значит, полученный ее завиток будет близок к сказанному эллипсу, но не замкнут, и, уклоняясь от этого эллипса постепенно, может быть уподоблен тому следу, который точка оставила бы, двигаясь по этому эллипсу, который в это время поворачивался бы равномерно на некоторый угол.

Чтобы определить этот угол поворота, надо составить уравнение

$$xx' + yy' = 0 \tag{7}$$

и найти ближайший к 2π корень его.

По ур-нию (5) имеем

$$x' = -(1-k)\, an_1 \sin n_1 t - nak \sin nt$$
$$y' = (1+k)\, bn_1 \cos n_1 t - bnk \cos nt$$

положим

$$nt = 2\pi + \varphi$$

тогда

$$n_1 t = 2\pi + \omega$$

причем

$$\omega = \varphi + \alpha^2 \pi$$

и будет

$$\cos n_1 t = \cos nt = 1$$
$$\sin n_1 t = \omega; \quad \sin nt = \varphi$$

и ур-ние (7) по приведении будет

$$-a^2 [\varphi + (1-k)\pi\alpha^2] + b^2 [\varphi + (1+k)\pi\alpha^2] = 0$$

из него следует

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \alpha^2 = \frac{\pi}{8} \frac{a^2 + b^2}{l^2}$$

Таким образом, прохождение через вершину завитка (перигелий в астрономии) происходит в момент, когда

$$nt = 2\pi + \frac{\pi}{2} \alpha^2$$

Соответствующие координаты этой вершины будут

$$X = a$$

$$Y = b\,[(1+k)\,\omega - k\varphi] = b\left[(1+k)\,\pi + \frac{\pi}{2}\right]\cdot\alpha^2 = \frac{3}{4}\,\pi\,\frac{a^2 b}{l^2}$$

следовательно, направление идущей в эту вершину оси завитка, т. е. угол поворота эллипса за время *полного* оборота маятника, будет

$$\psi = \frac{Y}{X} = \frac{3}{4}\,\pi\,\frac{ab}{l^2} \tag{8}$$

причем этот эллипс поворачивается в *сторону движения* по нему маятника, ибо угол ψ положительный. Таким образом, проекция траектории маятника имеет вид, показанный на фиг. 67.

Если бы мы желали иметь угловое расстояние между двумя последовательными, наинизшей и наивысшей, точками, занимаемыми маятником на сфере, то для ур-ния (7) надо бы искать корень, ближайший к $\frac{\pi}{2}$, т. е. в предыдущих формулах заменить 2π через $\frac{\pi}{2}$, т. е. π через $\frac{\pi}{4}$, и мы получим

$$\psi_1 = \frac{1}{4}\,\psi = \frac{3}{16}\,\pi\,\frac{ab}{l^2}$$

и полный угол будет

$$\Phi = \frac{\pi}{2} + \psi_1 = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{3}{8}\,\frac{ab}{l^2}\right)$$

но

$$\frac{a}{l} = \theta_1;\quad \frac{b}{l} = \theta_2$$

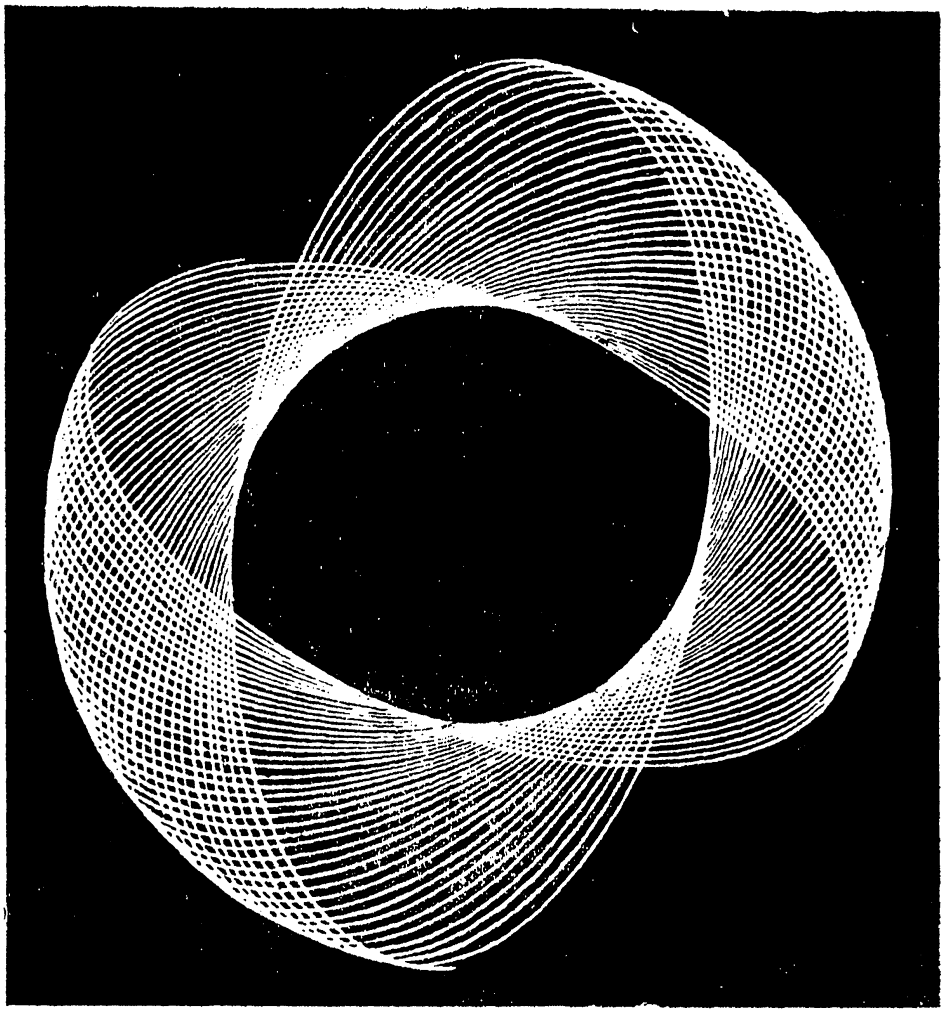
суть наибольший и наименьший углы отклонения маятника от отвесной линии, и предыдущая формула напишется

$$\Phi = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{3}{8}\,\theta_1\,\theta_2\right] \tag{8'}$$

В таком виде эта формула обыкновенно и дается на основании рассмотрения точного решения этой задачи в эллиптических интегралах.

На фигуре 67 представлена фотографическая запись горизонтальной проекции движения центра тяжести сферического маятника, длина коего $l = 3.34$ м, масштаб записи $\frac{1}{10.5}$.

Запись эта, исполненная в 1905 г. в Опытовом бассейне морского ведомства С. В. Вяхиревым, получена следующим образом: на тонкой стальной струне, длиною около 3.3 м, был подвешен свинцовый цилиндр, диаметр и высота коего равны 10 см и вес около 8 кг. По оси этого цилиндра просверлено отверстие диаметром около 15 мм, и в него вставлена маленькая электрическая лампочка от карманного электрического фонаря.



Фиг. 67.

В расстоянии около 2.5 м под цилиндром была установлена фотографическая камера объективом вверх так, чтобы пластинка была горизонтальна. При качании маятника изображение лампочки, в виде светящейся точки перемещаясь по пластинке, дает вышеприведенную кривую, представляющую горизонтальную проекцию движения центра тяжести маятника.

Ф-ла (8) весьма хорошо согласуется с опытом; для маятника, снимок движения которого показан на фиг. 67,

$$l = 3.34 \text{ м}$$

Число размахов на снимке	41
Полный угол поворота	104°
Угол поворота за один размах	$\psi = \frac{104}{41} = 2{,}^\circ54$
В начале движения	$a = 65$ мм на снимке
» »	$b = 32$ » » »
В конце движения	$a = 58$ » » »
» »	$b = 30$ » » »

Масштаб снимка $\frac{1}{10.5}$ натуры.

Отсюда имеем

В начале движения	$ab = 2\,080$
В конце движения	$ab = 1\,740$
Среднее. . .	$ab = 1\,910$

Среднее значение угла поворота

$$\psi_0 = \frac{3}{4}\pi\frac{ab}{l^2} = 135^\circ \cdot \frac{1900}{1\,000\,000} \cdot \left(\frac{10.5}{3.34}\right)^2 = 2{,}^\circ54$$

согласие получилось лучшее, чем можно было ожидать.

Мы привели эту запись, чтобы наглядно показать, в какой мере полученное решение, представляющее первое приближение, соответствует действительности.

В астрономии прямая, соединяющая центральное светило с вершиною траектории, описываемой около него другим светилом, называется осью или линией апсид, и движение, подобное вышеуказанному, имеет Луна около Земли, и, действительно, уравнение вида

$$\frac{d^2u}{dt^2} + n^2(1 + 2\alpha\cos kt)\,u = 0$$

имеет весьма важное значение в теории движения Луны, мы же привели предыдущий пример, чтобы наглядно показать, на какого рода обстоятельства надо обращать внимание при разложении решений дифференциальных уравнений в ряды.

§ 83. Изложенная выше метода последовательных приближений в применении к интегрированию уравнений возмущенного движения обладает тем недостатком, который мы встретили в примере § 78. Этот недостаток состоит в том, что переменная независимая t, входившая в невозмущенном движении лишь под знаками синуса и косинуса разных аргументов, линейно зависящих от t, появляется в возмущенном движении вне этих знаков, так что в состав решения входят члены вида

$$(at + bt^2 + ct^3 + \ldots)\cos(nt + \delta)$$

Эти члены с течением времени неопределенно возрастают, вследствие чего найденное решение пригодно лишь для весьма малых значений t.

С этим обстоятельством встретились математики XVIII столетия, когда они начали применять анализ к исследованию движения планет и их спутников в нашей солнечной системе. Лаплас и Лагранж развили довольно общие методы для устранения этого недостатка. Исследования Лапласа, изложенные первоначально в мемуарах, вышедших в томах VIII и IX полного собрания его сочинений, включены в переработанном виде в его „Mécanique céleste", в главу V 2-й книги тома I.

Исследования Лагранжа помещены в томе V полного собрания его сочинений („Oeuvres de Lagrange").

Не излагая этих общих способов, к которым при решении технических вопросов прибегать не приходится по трудности их применения, ограничимся простейшим примером, на котором выясняется сущность другого приема, являющегося обобщением и видоизменением методы, изложенной М. В. Остроградским в „Мемуарах Академии Наук", VI серия, т. III, 1838, приведенной также в работе Rayleigh'a „Theory of Sound", t. I, § 67.

Возьмем пример Остроградского, который приведен и у Rayleigh'a. Требуется найти решение уравнения

$$y'' + n^2 y + \alpha y^3 = 0 \tag{1}$$

при начальных условиях: когда $t = 0$, то должно быть

$$y' = 0; \quad y = a$$

Параметр α предполагается малым, и решение разлагается в ряд по степеням этого параметра, причем названные авторы ограничиваются первою степенью α в этом разложении.

Если поступать, как указано в § 78, то за исходное приближение пришлось бы взять уравнение

$$y'' + n^2 y = 0$$

решение которого, удовлетворяющее начальным условиям, есть

$$y = a \cos nt \tag{2}$$

Для первого приближения имели бы тогда уравнение

$$y'' + n^2 y = -\alpha a^3 \cos^3 nt \tag{3}$$

но

$$\cos^3 nt = \frac{1}{4} \cos 3nt + \frac{3}{4} \cos nt$$

так что предыдущее уравнение будет

$$y'' + n^2 y = -\frac{1}{4} \alpha a^3 \cos 3nt - \frac{3}{4} \alpha a^3 \cos nt \tag{3'}$$

общий интеграл которого есть

$$y = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt + \frac{1}{32}\frac{\alpha a^3}{n^2}\cos 3nt - \frac{3}{8}\frac{\alpha a^3}{n} t \sin nt$$

Значения постоянных произвольных, определенные по начальным условиям, суть

$$C_1 = a - \frac{1}{32}\frac{\alpha a^3}{n^2}; \qquad C_2 = 0$$

так что

$$y = \left(a - \frac{1}{32}\frac{\alpha a^3}{n^2}\right)\cos nt + \frac{1}{32}\frac{\alpha a^3}{n^2}\cos 3nt - \frac{3}{8}\frac{\alpha a^3}{n} t \sin t \tag{4}$$

В последнем члене время t вышло из-под знака синуса, и этот вид решения пригоден только для весьма малых значений t, которыми нельзя ограничиваться при изучении колебательного движения точки, определяемого координатою y.

Чтобы избавиться от сказанного недостатка, положим

$$n^2 = p^2 + c_1 \alpha \tag{5}$$

где c_1 — некоторая пока неизвестная постоянная, которой распорядимся так, как будет указано ниже.

Ур-ние (1) примет вид

$$y'' + p^2 y + \alpha y^3 + c_1 \alpha y = 0 \tag{1'}$$

исходное приближение будет

$$y = a \cos pt$$

уравнение для первого приближения будет

$$y'' + p^2 y = -\frac{1}{4}\alpha a^3 \cos 3pt - \alpha\left(ac_1 + \frac{3}{4}a^3\right)\cos pt \tag{6}$$

Чтобы решение этого уравнения не содержало времени t вне знака косинуса, надо взять c_1 так, чтобы в правой части член

$$\alpha\left(ac_1 + \frac{3}{4}a^3\right)\cos pt$$

пропал, т. е. надо положить

$$ac_1 + \frac{3}{4}a^3 = 0$$

что дает

$$c_1 = -\frac{3}{4}a^2$$

Значит, будет

$$p^2 = n^2 + \frac{3}{4}a^2\alpha$$

общий интеграл ур-ния (6) будет

$$y = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \frac{1}{32}\frac{\alpha a^3}{p^2}\cos 3pt$$

причем начальные условия дают

$$C_1 = a - \frac{1}{32}\frac{\alpha a^3}{p^2}$$

$$C_2 = 0$$

так что

$$y = a\cos pt - \frac{\alpha a^3}{32p^2}(\cos pt - \cos 3pt) \tag{7}$$

Это решение, точное до первой степени параметра α, уже не содержит времени t вне знака косинуса и показывает, что движение точки сохраняет колебательный характер с амплитудою, которая остается конечной, но частота этих колебаний

$$p = \sqrt{n^2 + \frac{3}{4}a^2\alpha}$$

зависит от амплитуды a так, что вследствие наличия в ур-нии (1) члена αy^3 изохронность колебаний утрачивается.

Если бы мы хотели иметь решение точное, скажем, до третьей степени параметра α, то проще всего поступить следующим образом.

Положить

$$y = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \alpha^3\varphi_3 \tag{8}$$

где φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 — новые неизвестные функции переменной t, вместе с тем положить

$$n^2 = p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3 \tag{9}$$

где c_1, c_2, c_3 — пока неизвестные постоянные, которыми распорядимся ниже. Подставляя значения (8) и (9) в предложенное уравнение, получаем

$$\varphi_0'' + \alpha\varphi_1'' + \alpha^2\varphi_2'' + \alpha^3\varphi_3'' + (p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3)(\varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 +$$
$$+ \alpha^3\varphi_3) + \alpha(\varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \alpha^3\varphi_3)^3 = 0$$

Разлагаем первую часть этого уравнения по степеням параметра α ограничиваясь лишь третьей степенью его, получаем

$$\varphi_0'' + p^2\varphi_0 + \alpha(\varphi_1'' + p^2\varphi_1 + c_1\varphi_0 + \varphi_0^3) + \\ + \alpha^2(\varphi_2'' + p^2\varphi_2 + c_2\varphi_0 + c_1\varphi_1 + 3\varphi_0^2\varphi_1) + \\ + \alpha^3(\varphi_3'' + p^2\varphi_3 + c_3\varphi_0 + c_2\varphi_1 + c_1\varphi_2 + 3\varphi_0^2\varphi_2 + 3\varphi_0\varphi_1^2) = 0$$

Так как это уравнение должно иметь место при всяких значениях параметра α, то оно распадается на следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &\varphi_0'' + p^2\varphi_0 = 0 \\ &\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1\varphi_0 - \varphi_0^3 \\ &\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -c_2\varphi_0 - c_1\varphi_1 - 3\varphi_0^2\varphi_1 \\ &\varphi_3'' + p^2\varphi_3 = -c_3\varphi_0 - c_2\varphi_1 - c_1\varphi_2 - 3\varphi_0^2\varphi_2 - 3\varphi_0\varphi_1^2 \end{aligned} \tag{10}$$

Начальные условия принимают вид: при $t=0$ должно быть

$$\varphi_0(0) + \alpha\varphi_1(0) + \alpha^2\varphi_2(0) + \alpha^3\varphi_3(0) = a$$
$$\varphi_0'(0) + \alpha\varphi_1'(0) + \alpha^2\varphi_2'(0) + \alpha^3\varphi_3'(0) = 0$$

при само собою понятном обозначении, и так как эти уравнения должны иметь место при всяком значении параметра α, то они распадаются на следующие:

$$\begin{aligned} &\varphi_0(0) = a; \qquad &\varphi_0'(0) = 0 \\ &\varphi_1(0) = 0; \qquad &\varphi_1'(0) = 0 \\ &\varphi_2(0) = 0; \qquad &\varphi_2'(0) = 0 \\ &\varphi_3(0) = 0; \qquad &\varphi_3'(0) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, вопрос приведен к интегрированию системы (10) при начальных условиях (11).

Первое уравнение системы (10) и первое начальное условие дают

$$\varphi_0 = a\cos pt \tag{12}$$

тогда второе уравнение будет

$$\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1 a\cos pt - a^3\cos^3 pt = \\ = -\frac{1}{4}a^3\cos 3pt - \left(c_1 a + \frac{3}{4}a^3\right)\cos pt$$

Чтобы время t оставалось под знаком косинуса, выбираем постоянную c_1 так, чтобы было

$$c_1 a + \frac{3}{4}a^3 = 0$$

т. е.

$$c_1 = -\frac{3}{4}a^2 \tag{13}$$

тогда будет

$$\varphi_1 = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \frac{1}{32} \frac{a^3}{p^2} \cos 3pt$$

второе начальное условие дает

$$C_1 + \frac{1}{32} \frac{a^3}{p^2} = 0$$

$$C_2 = 0$$

таким образом,

$$\varphi_1 = \frac{1}{32} \frac{a^3}{p^2} (\cos 3pt - \cos pt) \tag{13'}$$

Подставляя значения φ_0 и φ_1, даваемые ур-ниями (12) и (13'), и значение c_1 из ур-ния (13) в третье уравнение системы (10), имеем

$$\varphi_2'' + p^2 \varphi_2 = -c_2 a \cos pt + \frac{3}{4} a^2 \cdot \frac{1}{32} \frac{a^3}{p^2} (\cos 3pt - \cos pt) -$$

$$- 3a^2 \cdot \frac{1}{32} \frac{a^3}{p^2} \cos^2 pt (\cos 3pt - \cos pt)$$

развив правую часть и воспользовавшись формулами

$$\cos^2 pt = \frac{1}{2} (1 + \cos 2pt)$$

$$\cos 3pt \cos 2pt = \frac{1}{2} (\cos 5pt + \cos pt)$$

$$\cos 2pt \cos pt = \frac{1}{2} (\cos 3pt + \cos pt)$$

получим

$$\varphi_2'' + p^2 \varphi_2 = pt - \frac{3}{123} \frac{a^5}{p^2} \cos 5pt - a \left(c_2 - \frac{3}{128} \frac{a^4}{p^2} \right) \cos pt$$

Выбираем c_2 так, чтобы член с $\cos pt$ пропал, т. е. полагаем

$$c_2 = + \frac{3}{128} \frac{a^4}{p^2} \tag{14}$$

тогда получим

$$\varphi_2 = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \frac{1}{1024} \frac{a^5}{p^4} \cos 5pt$$

Постоянные произвольные C_1 и C_2 определяются по третьему из условий (11) и будут

$$C_1 = - \frac{1}{1024} \frac{a^5}{p^4}$$

$$C_2 = 0$$

и, значит, будет

$$\varphi_2 = \frac{1}{1024}\frac{a^5}{p^4}\cos 5pt - \frac{1}{1024}\frac{a^5}{p^4}\cos pt \tag{14'}$$

Таким образом, с точностью до вторых степеней параметра α, имеем на основании ф-л (12), (13), (14):

$$p^2 = n^2 + \frac{3}{4}a^2\alpha - \frac{3}{128}\frac{a^4}{p^2}\alpha^2 \tag{15}$$

Это уравнение нет надобности решать точно относительно p^2, а, заметив, что величину p^2 надо иметь в этом случае лишь с точностью до членов второго порядка относительно α, можно в последнем члене заменить p^2 через n^2, что вносит погрешность лишь третьего порядка относительно α, и тогда будет

$$p^2 = n^2 + \frac{3}{4}a^2\alpha - \frac{3}{128}\frac{a^4}{n^2}\alpha^2 \tag{15'}$$

величина же y будет, на основания ф-л (12'), (13'), (14'):

$$\begin{aligned} y = a\cos pt &+ \frac{1}{32}\frac{a^3}{p^2}\alpha(\cos 3pt - \cos pt) + \\ &+ \frac{1}{1024}\frac{a^5}{p^4}\alpha^2(\cos 5pt - \cos pt) \end{aligned} \tag{16}$$

Ясно, что для получения членов третьего порядка надо в четвертое уравнение системы (10) подставить найденные значения φ_0, φ_1, φ_2, c_1 и c_2, степени и произведения косинусов заменить через косинусы кратных аргументов, уравнять коэффициент при $\cos pt$ нулю, что доставит значение постоянной c_3, а дифференциальное уравнение и начальные условия дадут величину φ_3.

Подставив величины c_1, c_2, c_3 в формулу

$$n^2 = p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3$$

получим уравнение для определения p^2, решение которого разлагаем по степеням параметра α, ограничиваясь третьим порядком, и член $\alpha^3\varphi_3$ прибавляем к правой части ур-ния (16).

Эту выкладку предлагается проделать в виде задачи.

Ясно, что изложенная метода применима ко всякому уравнению вида

$$y'' + n^2 y + \alpha f(y) = 0 \tag{17}$$

где $f(y)$ есть целая функция от y, степень которой, очевидно, не ниже двух.

Разложение может быть ведено до членов любого порядка k относительно α, стоит только положить

$$n^2 = p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3 + \ldots + c_k\alpha^k \tag{18}$$
$$y = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \alpha^3\varphi_3 + \ldots + \alpha^k\varphi_k \tag{19}$$

и вести выкладку совершенно подобно тому, как это сделано для нашего частного случая.

Начальное условие: при $t=0$ должно быть

$$y = a;\quad y' = 0 \tag{20}$$

Это существенно важно, иначе во втором уравнении в правой части будут два члена с аргументом pt, один — с $\cos pt$, другой — с $\sin pt$, между тем в нашем распоряжении будет только один неопределенный коэффициент c_1, и уничтожить оба члена будет невозможно.

Мы покажем ниже, каким образом общие начальные условия всегда могут быть приведены к виду (20).

§ 84. К совершенно аналогичным выкладкам приводит задача о разложении решения уравнения

$$y'' + n^2 y + f(y) = 0 \tag{21}$$

при начальных условиях: когда $t=0$, то должно быть

$$y = \alpha;\quad y' = 0 \tag{20}$$

по степеням начальной амплитуды α, предполагаемой малой.

Поясним и эту методу на простейшем примере уравнения

$$y'' + n^2 y + hy^3 = 0 \tag{22}$$

решение которого хотим разложить до третьих степеней α.

Полагаем тогда

$$\left.\begin{aligned} y &= \alpha\varphi_0 + \alpha^2\varphi_1 + \alpha^3\varphi_2 \\ n^2 &= p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

подставляя эти величины в предложенное уравнение, имеем по сокращении на α:

$$\varphi_0'' + \alpha\varphi_1'' + \alpha^2\varphi_2'' + (p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2)(\varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2) +$$
$$+ h\alpha^2(\varphi_0 + \ldots)^3 = 0$$

Развивая по степеням α, имеем

$$\varphi_0'' + p^2\varphi_0 + \alpha(\varphi_1'' + p^2\varphi_1 + c_1\varphi_0) +$$
$$+ \alpha^2(\varphi_2'' + p^2\varphi_2 + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_0 + h\varphi_0^3) = 0$$

откуда следует система

$$\begin{aligned} &\varphi_0'' + p^2\varphi_0 = 0 \\ &\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1\varphi_0 \\ &\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -c_1\varphi_1 - c_2\varphi_0 - h\varphi_0^3 \end{aligned} \tag{24}$$

Начальные условия будут: при $t=0$ должно быть

$$\alpha = \alpha\varphi_0 + \alpha^2\varphi_1 + \alpha^3\varphi_2; \quad 0 = \alpha\varphi_0' + \alpha^2\varphi_1' + \alpha^3\varphi_3'$$

т. е. при $t=0$ должно быть

$$\begin{aligned} &\varphi_0(0) = 1; \qquad \varphi_0'(0) = 0 \\ &\varphi_1(0) = 0; \qquad \varphi_1'(0) = 0 \\ &\varphi_2(0) = 0; \qquad \varphi_2'(0) = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

т. е. получается система уравнений и начальных условий, совершенно подобная рассмотренной в § 83.

Из первого уравнения и соответствующего начального условия находим

$$\varphi_0 = \cos pt$$

Второе уравнение тогда будет

$$\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1\cos pt$$

Чтобы решение не заключало члена с $t\sin pt$, надо положить

$$c_1 = 0$$

тогда будет, на основании начальных условий,

$$\varphi_1 = 0$$

Третье уравнение будет

$$\begin{aligned} \varphi_2'' + p^2\varphi_2 &= -c_2\cos pt - h\cos^3 pt = \\ &= -\left(c_2 + \frac{3}{4}h\right)\cos pt - \frac{1}{4}h\cos 3pt \end{aligned}$$

Значит, надо взять

$$c_2 = -\frac{3}{4}h$$

тогда будет

$$\varphi_2 = C_1\cos pt + C_2\sin pt + \frac{1}{32}\frac{h}{p^2}\cos 3pt$$

и, на основании начальных условий,

$$C_1 = -\frac{1}{32}\frac{h}{p^2}; \quad C_2 = 0$$

значит,

$$\varphi_2 = \frac{1}{32}\,\frac{h}{p^2}\,(\cos 3pt - \cos pt) \tag{26}$$

причем

$$p^2 = n^2 + \frac{3}{4}\,h\alpha^2$$

и

$$y = \alpha\cos pt + \frac{1}{32}\,\frac{h}{p^2}\,\alpha^3(\cos 3pt - \cos pt) \tag{26'}$$

Совершенно так же повели бы разложение и до любой степени α.

§ **85.** Возьмем теперь уравнение вида

$$y'' + n^2 y + \alpha f(y') = 0$$

где α — малая величина и $f(y')$ — целая функция четной степени относительно y'.

Начальные условия попрежнему: когда $t=0$, то должно быть

$$y = a; \qquad y' = 0 \tag{20}$$

и начнем с простейшего, относящегося к колебаниям маятника или корабля в среде, сопротивление которой пропорционально второй степени скорости.

Это уравнение будет

$$y'' + n^2 y \mp \alpha y'^2 = 0 \tag{27}$$

причем в этом уравнении надо брать знак —, когда y' отрицательное, и знак +, когда y' положительное, поэтому, предполагая, что a положительное, для первого размаха имеем уравнение

$$y'' + n^2 y - \alpha y'^2 = 0 \tag{28}$$

Будем разлагать решение этого уравнения по степеням α и ограничимся второю степенью, тогда полагаем

$$n^2 = p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 \tag{29}$$

$$y = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 \tag{30}$$

тогда будет

$$\alpha y'^2 = \alpha(\varphi_0'^2 + 2\alpha\varphi_0'\varphi_1' + \ldots) = \alpha\varphi_0'^2 + 2\alpha^2\varphi_0'\varphi_1'$$

по подстановке будет

$$\varphi_0'' + \alpha\varphi_1'' + \alpha^2\varphi_2'' + (p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2)(\varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2) -$$
$$-(\alpha\varphi_0'^2 + 2\alpha^2\varphi_0'\varphi_1') = 0$$

развив и собирая члены, имеем

$$(\varphi_0'' + p^2\varphi_0) + \alpha(\varphi_1'' + p^2\varphi_1 + c_1\varphi_0 - \varphi_0'^2) +$$
$$+ \alpha^2(\varphi_2'' + p^2\varphi_2 + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_0 - 2\varphi_0'\varphi_1') = 0$$

таким образом получаем систему

$$\begin{aligned} &\varphi_0'' + p^2\varphi_0 = 0 \\ &\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1\varphi_0 + \varphi_0'^2 \\ &\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -c_1\varphi_1 - c_2\varphi_0 + 2\varphi_0'\varphi_1' \end{aligned} \tag{31}$$

Начальные условия будут: при $t = 0$ должно быть

$$\begin{aligned} &\varphi_0(0) = a; \qquad \varphi_0'(0) = 0 \\ &\varphi_1(0) = 0; \qquad \varphi_1'(0) = 0 \\ &\varphi_2(0) = 0; \qquad \varphi_2'(0) = 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Первое уравнение и первое начальное условие дают

$$\varphi_0 = a\cos pt \tag{33}$$

тогда второе уравнение будет

$$\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1 a\cos pt + a^2p^2\sin^2 pt = -c_1 a\cos pt + \frac{1}{2}a^2p^2(1 - \cos 2pt).$$

Чтобы решение не содержало члена $ct\sin pt$, положим

$$c_1 = 0 \tag{34}$$

Тогда решение будет

$$\varphi_1 = C_1\cos pt + C_2\sin pt + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^2\cos 2pt$$

из начальных условий следует

$$C_1 = -\frac{2}{3}a^2; \qquad C_2 = 0 \tag{35}$$

таким образом будет

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{2}{3}a^2\cos pt + \frac{1}{6}a^2\cos 2pt \tag{36}$$

Третье уравнение будет

$$\varphi_2'' + p^2 = -c_2 a\cos pt - 2p^2a^3\sin pt\left(\frac{2}{3}\sin pt - \frac{1}{3}\sin 2pt\right)$$

или

$$\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = \left(-c_2 a + \frac{1}{3}p^2a^3\right)\cos pt - \frac{2}{3}p^2a^3 +$$
$$+ \frac{2}{3}p^2a^3\cos 2pt - \frac{1}{3}p^2a^3\cos 3pt$$

Берем c_2 так, чтобы член с $\cos pt$ пропадал, тогда будет

$$c_2 = \frac{1}{3} p^2 a^2 \tag{37}$$

$$\varphi_2 = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt - \frac{2}{3} a^3 - \frac{2}{9} a^3 \cos 2pt + \frac{1}{24} a^3 \cos 3pt$$

из начальных условий следует

$$C_1 = \frac{61}{72} a^3; \qquad C_2 = 0$$

значит,

$$\varphi_2 = -\frac{2}{3} a^3 + \frac{61}{72} a^3 \cos pt - \frac{2}{9} a^3 \cos 2pt + \frac{1}{24} a^3 \cos 3pt \tag{38}$$

причем, на основании значений (34) и (37), неизвестная p^2 определяется уравнением

$$n^2 = p^2 + \frac{1}{3} p^2 a^2 \alpha^2$$

значит,

$$p = \frac{n}{\sqrt{1 + \frac{1}{3} a^2 \alpha^2}} \tag{39}$$

соответствующий период τ будет

$$\tau = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{n} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{3} a^2 \alpha^2} \approx \frac{2\pi}{n} \left(1 + \frac{1}{6} a^2 \alpha^2\right)$$

или, полагая

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{n}$$

будем иметь

$$\tau = \tau_0 \sqrt{1 + \frac{1}{3} a^2} = \tau_0 \left(1 + \frac{1}{6} a^2 \alpha^2\right) \tag{40}$$

Подставляя найденные значения φ_0, φ_1, φ_2 в равенство

$$y = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2 \varphi_2$$

имеем

$$\begin{gathered} y = a \cos pt + \frac{1}{6} \alpha a^2 (3 - 4 \cos pt + \cos 2pt) - \\ - \frac{1}{72} \alpha^2 a^3 [48 - 61 \cos pt + 16 \cos 2pt - 3 \cos 3pt] \end{gathered} \tag{41}$$

Эта формула имеет место до тех пор, пока

$$y' < 0$$

т. е. до момента

$$t = t_1 = \frac{\pi}{p} = \frac{1}{2}\tau$$

в который

$$y' = 0$$

Отклонение маятника в этот момент будет

$$y = a_1 = -\left(a - \frac{4}{3}\alpha a^2 + \frac{16}{9}\alpha^2 a^3\right) \tag{42}$$

что показывает, что маятник по другую сторону от своего положения равновесия не достигнет первоначального отклонения, а лишь меньшее на величину

$$\frac{4}{3}\alpha a^2 - \frac{16}{9}\alpha^2 a^3$$

причем продолжительность этого первого полуразмаха составит

$$\frac{1}{2}\tau = \frac{1}{2}\tau_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{3}a^2\alpha^2} \tag{43}$$

Очевидно, что начав второй полуразмах с отклонения a_1, маятник его произведет в продолжение времени

$$\frac{1}{2}\tau_1 = \frac{1}{2}\tau \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{3}a_1^2\alpha^2} \tag{44}$$

и достигнет отклонения

$$a_2 = a_1 - \frac{4}{3}\alpha a_1^2 + \frac{16}{9}\alpha^2 a_1^3 \tag{45}$$

продолжая колебаться таким образом с постепенно убывающей амплитудой.

§ **86.** Рассмотрим еще уравнения типа

$$y'' + n^2 y + F(y) + f(y') = 0 \tag{46}$$

где $F(y)$ есть целая функция от y степени не ниже второй, $f(y')$ — целая функция четной степени от y', причем коэффициент при 2-й степени y' не равен нулю. С подобным уравнением приходится иметь дело, например, при рассмотрении колебаний маятника или корабля в среде, сопротивление которой пропорционально 2-й степени скорости, делающего размахи настолько значительные, что надо брать

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 \tag{47}$$

Начальные условия, как и прежде: при $t = 0$ должны быть

$$y = \alpha; \qquad y' = 0$$

и требуется разложить решение уравнения этого движения в ряд по степеням α, ограничиваясь членами с α^3.

Уравнение движения для первого полуразмаха будет

$$y'' + n^2 y - \frac{1}{6} n^2 y^3 - k y'^2 = 0 \tag{48}$$

где k — заданная постоянная.

Полагаем

$$y = \alpha\varphi_0 + \alpha^2 \varphi_1 + \alpha^3 \varphi_2 \tag{49}$$

$$n^2 = p^2 + c_1 \alpha + c_2 \alpha^2 \tag{50}$$

и подставляем в предложенное уравнение, которое по сокращении на α будет

$$\varphi_0'' + \alpha\varphi_1'' + \alpha^2 \varphi_2'' + (p^2 + c_1 \alpha + c_2 \alpha^2)(\varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2 \varphi_2) -$$
$$- \frac{1}{6}(p^2 + \ldots)(\varphi_0^3 + \ldots)\alpha^2 - k\alpha(\varphi_0' + \alpha\varphi_1')^2 = 0$$

Развив до членов второго порядка относительно α, имеем

$$\varphi_0'' + p^2 \varphi_0 + \alpha(\varphi_1'' + p^2 \varphi_1 + c_1 \varphi_0 - k\varphi_0'^2) +$$
$$+ \alpha^2 \left(\varphi_2'' + p^2 \varphi_2 + c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_0 - \frac{1}{6} p^2 \varphi_0^3 - 2k\varphi_0'\varphi_1'\right) = 0$$

так как это уравнение должно иметь место при всяком α, то получаем систему

$$\begin{aligned} &\varphi_0'' + p^2 \varphi_0 = 0 \\ &\varphi_1'' + p^2 \varphi_1 = - c_1 \varphi_0 + k\varphi_0'^2 \\ &\varphi_1'' + p^2 \varphi_2 = - c_1 \varphi_1 - c_2 \varphi_0 + \frac{1}{6} p^2 \varphi_0^3 - 2k\varphi_0'\varphi_1' \end{aligned} \tag{51}$$

Начальные условия будут: когда $t = 0$, то должно быть

$$\begin{aligned} &\varphi_0(0) = 1; \qquad &\varphi_0'(0) = 0 \\ &\varphi_1(0) = 0; \qquad &\varphi_1'(0) = 0 \\ &\varphi_2(0) = 0; \qquad &\varphi_2'(0) = 0 \end{aligned}$$

Первое уравнение системы и первое начальное условие дают

$$\varphi_0 = \cos pt$$

тогда второе уравнение будет

$$\varphi_1'' + p^2 \varphi_1 = - c_1 \cos pt + k p^2 \sin^2 pt =$$
$$= - c_1 \cos pt + \frac{kp^2}{2}(1 - \cos 2pt)$$

Чтобы t не выходило из-под знака синуса, надо взять

$$c_1 = 0 \tag{52}$$

тогда будет

$$\varphi_1 = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \frac{k}{2} + \frac{k}{6} \cos 2pt$$

и, на основании начальных условий, будет

$$C_1 = -\frac{2}{3} k; \qquad C_2 = 0$$

Следовательно,

$$\varphi_1 = \frac{k}{2} + \frac{k}{6} (\cos 2pt - 4 \cos pt) \tag{53}$$

Третье уравнение системы (51) будет

$$\varphi_2'' + p^2 \varphi_2 = -c_2 \cos pt + \frac{1}{6} p^2 \cos^3 pt +$$

$$+ \frac{1}{3} p^2 k^2 \sin pt [4 \sin pt - 2 \sin 2pt] =$$

$$= \left(-c_2 + \frac{1}{8} p^2 - \frac{1}{3} p^2 k^2\right) \cos pt + \frac{2}{3} p^2 k^2 - \frac{2}{3} p^2 k^2 \cos 2pt +$$

$$+ \frac{1}{24} p^2 (1 + 8 k^2) \cos 3pt$$

Следовательно, надо положить

$$-c_2 + \frac{1}{8} p^2 - \frac{1}{3} p^2 k^2 = 0$$

т. е.

$$c_2 = \frac{1}{8} p^2 - \frac{1}{3} p^2 k^2 = \frac{1}{24} p^2 (3 - 8k^2) \tag{54}$$

тогда будет

$$\varphi_2 = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \frac{2}{3} k^2 + \frac{2}{9} k^2 \cos 2pt - \frac{1}{192} (1 + 8 k^2) \cos 3pt$$

На основании начального условия будет

$$0 = C_1 + \frac{2}{3} k^2 + \frac{2}{9} k^2 - \frac{1}{192} (1 + 8 k^2) \qquad C_2 = 0$$

следовательно,

$$C_1 = -\frac{61}{72} k^2 + \frac{1}{192}$$

$$\varphi_2 = \frac{k^2}{72} [48 - 61 \cos pt + 16 \cos 2pt - 3 \cos 3pt] + \frac{1}{192} \cos pt \tag{55}$$

На основании ф-лы (50) имеем

$$n^2 = p^2 + \frac{\alpha^2}{24} p^2 (3 - 8k^2)$$

следовательно,

$$p^2 = \frac{24n^2}{24 + \alpha^2 (3 - 8k^2)} \tag{56}$$

$$y = \alpha \cos pt + \frac{k\alpha}{6} (3 + \cos 2pt - 4 \cos pt) +$$

$$+ \frac{k^2 \alpha^2}{72} (48 - 61 \cos pt + 16 \cos 2pt - 3 \cos 3pt) + \frac{\alpha^2}{192} \cos pt$$

Это уравнение имеет место лишь пока

$$y' \geqslant 0$$

т. е. до момента

$$t = t_1 = \frac{\pi}{p}$$

Для следующего полуразмаха и для дальнейшего исследования движения надо поступать как в § 85. Необходимо заметить, что изложенная метода приложима в том случае, когда в каждом уравнении системы, служащей для определения $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$, будет входить лишь один член с синусом или косинусом pt, ибо в нашем распоряжении будет лишь один неопределенный коэффициент.

Так, например, положим, что в разложении мы дошли до φ_{i-1}, и в правой части уравнения, определяющего φ_i, оказались два члена вида

$$(g_i + h_i c_i) \cos pt + (g_i' + h_i' c_i) \sin pt$$

следовательно, c_i должно удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} g_i + h_i c_i &= 0 \\ g_i' + g_i' c_i &= 0 \end{aligned} \tag{57}$$

а это возможно лишь в том случае, когда

$$\frac{g_i}{h_i} = \frac{g_i'}{h_i'} \tag{58}$$

если же это условие окажется не выполненным, то φ_i и все функции за этою следующие будут заключать множитель t вне знаков синуса и косинуса.

Изложенная здесь метода представляет видоизменение методы, развитой А. М. Ляпуновым в его диссертации „Общая задача об устойчивости движения“, Харьков, 1892, для гораздо более общих систем уравнений, нежели здесь рассмотренные.

§ **87.** Остается еще показать, каким образом привести начальные условия к виду

$$y = a; \qquad y' = 0$$

при $t = 0$, если они первоначально заданы в более общем виде

$$y = l; \qquad y' = h \tag{59}$$

Эти начальные условия, при дальнейшей выкладке, входят лишь при определении функции φ_0 и были бы для общего случая таковы: при $t = 0$ должно быть

$$\varphi_0(0) = l; \qquad \varphi_0'(0) = h \tag{59'}$$

и так как φ_0 определяется уравнением

$$\varphi_0'' + p^2 \varphi_0 = 0$$

то при этих начальных условиях будет

$$\varphi_0 = l \cos pt + \frac{h}{p} \sin pt$$

Положим

$$l = a \cos \delta; \qquad \frac{h}{p} = a \sin \delta \tag{60}$$

тогда возьмем

$$a = + \sqrt{l^2 + \frac{h^2}{p^2}} = + \frac{1}{p} \sqrt{l^2 p^2 + h^2} \tag{61}$$

соответственно чему будет.

$$\cos \delta = \frac{l}{a}; \qquad \sin \delta = \frac{h}{pa} \tag{62}$$

Этими равенствами угол δ определяется однозначно, т. е. как по величине, так и по четверти окружности.

Подставляя вместо l и $\frac{h}{p}$ их величины, получим

$$\varphi_0 = a \cos (pt - \delta) \tag{63}$$

следовательно, стоит только положить

$$t_1 = t - t_0 \tag{64}$$

и взять

$$t_0 = \frac{\delta}{p} \tag{65}$$

то будет

$$\varphi_0 = a\cos t_1 \tag{66}$$

так что при $t_1 = 0$ будет

$$\varphi_0 = a; \qquad \varphi_0' = 0$$

Стоит только ввести переменную t_1 вместо переменной t в предложенное уравнение, которое от этой замены своего вида не изменяет, и мы будем иметь начальные условия в требуемой форме.

Оставляя p^2 неопределенным, доводим разложение до требуемых степеней и, имея выражения коэффициентов $c_1, c_2, \ldots c_k$, составляем уравнение

$$n^2 = p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_k\alpha^k$$

определяем из него p, после чего по ф-лам (62) и (65) находим δ и t_0.

Очевидно, что эта замена переменной t через переменную t_1 представляет лишь изменение начала счета времени.

§ **88.** Показанный в § 80 процесс последовательных приближений для уравнений линейных обобщен на какие угодно обыкновенные уравнения и системы таких уравнений, и в тех случаях, когда надо знать решение уравнения лишь для тесных пределов изменяемости переменной независимой, этот способ, будучи выполняем графически или „механическими квадратурами“, является одним из наиболее общих, но практическое его применение требует значительной вычислительной работы, которую можно избежать, применяя другие приемы.

E. Picard, в своем „Traité d'analyse“, t. II, p. 301, доказывает с полною строгостью, что при соблюдении некоторых условий процесс последовательных приближений есть, действительно, процесс сходящийся, и получаемый по нему результат приближается к требуемому интегралу дифференциального уравнения или системы таких уравнений.

Для простоты рассуждений положим, что дано уравнение второго порядка

$$y'' - f(x, y, y') = 0$$

если положить

$$y' = u$$

то будет

$$y'' = u'$$

и наше уравнение заменится системою двух уравнений

$$\frac{du}{dx} = f(x, y, u); \qquad \frac{dy}{dx} = u$$

Поэтому Пикар рассматривает более общую систему уравнений

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x, y, u, \dots w)$$

$$\frac{dy}{dx}=f_2(x, y, u, \dots w)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dw}{dx}=f_n(x, y, u, \dots w)$$

и полагает, что надо эту систему интегрировать, так чтобы при $x=x_0$ было

$$y=y_0, \quad u=u_0, \dots w=w_0$$

Функции $f_1, f_2, \dots f_n$ предполагаются непрерывными и вещественными в сопредельности с вышеуказанными значениями и остаются таковыми, пока переменные заключаются между пределами

$$(x_0-a, x_0+a); \quad (y_0-b, y_0+b); \dots (w_0-b, w_0+b)$$

Наконец, предполагается, что можно определить такие положительные постоянные $A, B, \dots L$, что, пока переменным придаются любые значения $Y, U, \dots W, y, u, \dots w$, остающиеся в вышеуказанных границах, было бы по абсолютной величине

$$|f_i(x, Y, U, \dots W)-f_i(x, y, u, \dots w)|<A|Y-y|+$$
$$+B|U-u|+\dots+L|W-w|$$

Подставим сперва во вторые части уравнений вместо $y, u, \dots w$ их начальные значения, — получим систему

$$\frac{dy_1}{dx}=f_1(x, y_0, u_0, \dots w_0)$$

$$\frac{du_1}{dx}=f_2(x, y_0, u_0, \dots w_0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dw_1}{dx}=f_n(x, y_0, u_0, \dots w_0)$$

и интегрируем эту систему так, чтобы при $x=x_0$ было

$$y_1=y_0, \quad u_1=u_0, \dots w_1=w_0$$

Полученные величины $y_1, u_1, \dots w_1$ подставляем опять во вторые части данных уравнений и пишем систему

$$\frac{dy_2}{dx}=f_1(x, y_1, u_1, \dots w_1)$$

$$\frac{du_2}{dx}=f_2(x, y_1, u_1, \dots w_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dw_2}{dx}=f_n(x, y_1, u_1, \dots w_1)$$

с нею поступаем так же, и повторяем этот процесс m раз кряду, так что m-ая система будет

$$\frac{dy_m}{dx}=f_1(x, y_{m-1}, u_{m-1}, \dots w_{m-1})$$
$$\frac{du_m}{dx}=f_2(x, y_{m-1}, u_{m-1}, \dots w_{m-1})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{dw_m}{dx}=f_n(x, y_{m-1}, u_{m-1}, \dots w_{m-1})$$

и мы ее интегрируем так, чтобы при $x=x_0$ было

$$y_m=y_0;\quad u_m=u_0;\dots w_m=w_0$$

Пикар доказывает, что, при возрастании числа m, величины

$$y_m, u_m, \dots w_m$$

имеют своими пределами искомые интегралы системы, лишь бы x было достаточно близко к x_0, а именно, надо чтобы x заключалось между пределами $x_0-\delta$ и $x_0+\delta$, причем δ есть наименьшее из двух количеств

$$a,\quad \frac{b}{M}$$

где M есть наибольшее по абсолютной величине значение функций f, когда переменные остаются в вышеуказанных границах.

Спрашивается, если искать интегралы по методу Пикара, то когда же остановить процесс, выполняя механические квадратуры? Очевидно — тогда, когда два последовательные приближения не будут разниться между собою в пределах точности вычислений.

Процесс в значительной мере ускорится, если с самого начала взять не постоянные значения $y_0, u_0, \dots w_0$, а некоторые функции, более близкие к искомым, такие функции практически можно получить следующим образом.

Положим, что нам надо интегрировать предложенную систему и составить таблицу значений функций $y, u, \dots w$ для значений аргумента x, лежащих между пределами x_0 и X, ибо предполагается, что проинтегрировать системы в конечном виде нельзя, следовательно, для искомых функций только и можно составить таблицы или кривые, что одно и то же, и пусть аргументы в этой таблице должны итти через h, где h — достаточно малая величина.

Тогда, для получения исходного приближения, поступаем так: написав систему

$$\frac{dy_1}{dx}=f_1(x, y_0, u_0, \dots w_0)$$
$$\frac{du_1}{dx}=f_2(x, y_0, u_0, \dots w_0)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{dw_1}{dx}=f_n(x, y_0, u_0, \dots w_0)$$

делаем $x = x_0$ и вычисляем начальные значения производных, которые обозначим соответственно через

$$\alpha_0, \beta_0, \ldots \lambda_0$$

и составляем величины

$$y_0 + \alpha_0 h; \quad u_0 + \beta_0 h; \ldots w_0 + \lambda_0 h$$

Подставляем эти величины на место $y_0, u_0, \ldots w_0$ в систему, и вычисляем соответствующие значения производных, эти значения обозначим через

$$\alpha_0', \beta_0', \ldots \lambda_0'$$

и по ним составляем величины

$$y_0 + \alpha_0' h; \quad u_0 + \beta_0' h; \ldots w_0 + \lambda_0' h$$

и берем средние арифметические между этими значениями и предыдущими; полученные значения обозначим через

$$y_1', u_1', \ldots w_1'$$

это будут приближенные значения функций $y_1, u_1, \ldots w_1$ при $x = x_0 + h$.

Чтобы получить значения этих функций при $x = x_0 + 2h$, поступаем с

$$y_1', u_1', \ldots w_1'$$

так же, как мы поступали с $y_0, u_0, \ldots w_0$, т. е. подставляем во вторые части уравнений системы вместо x величину $x_0 + h$, а вместо $y_0, u_0, \ldots w_0$ — вышеуказанные значения $y_1', u_1', \ldots w_1'$, и вычисляем соответствующие значения производных, которые обозначим через

$$\alpha_1, \beta_1, \ldots \lambda_1$$

находим затем

$$y_1' + \alpha_1' h; \quad u_1' + \beta_1' h; \ldots w_1' + \lambda_1 h$$

подставляем эти величины в систему, вычисляем значения производных, которые обозначим через

$$\alpha_1', \beta_1', \ldots \lambda_1'$$

и по ним

$$y_1' + \alpha_1' h; \quad u_1' + \beta_1' h; \ldots w_1' + \lambda_1' h$$

и берем средние, которые обозначим через

$$y_1'', u_1'', \ldots w_1''$$

это будут приближенные значения функций $y_1, u_1, \ldots w_1$ для аргумента

$$x = x_0 + 2h$$

и продолжаем таким образом далее, пока не дойдем до аргумента $x = X$.

После этого, имея таблицу для функций $y_1, u_1, \ldots w_1$, составляющих исходное первое приближение, обращаемся к системе

$$\frac{dy_2}{dx} = f_1(x_1, y_1, u_1, \ldots w_1)$$

$$\frac{du_2}{dx} = f_2(x, y_1, u_1, \ldots w_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dw_2}{dx} = f_n(\ , y_1, u_1, \ldots w_1)$$

и составляем таблицы значений функций $f_1, f_2, \ldots f_n$ для аргументов x от $x = x_0$ до $x = X$ через промежуток h и применяем к каждой из этих функций для интегрирования ее простейший из приемов приближенного интегрирования, приведенный в § 34.

Таким образом получим исходную таблицу значений функций $y_2, u_2, \ldots w_2$. С ними поступим подобным же образом, взяв одну из формул главы V, например формулу Лапласа, и будем продолжать этот процесс, пока два последовательные приближения более не будут давать чувствительной разницы при той степени точности, с которою вычисление производится.

Этот процесс, как видно, кроме утомительного однообразия и длинноты численных вычислений, никаких затруднений не представляет; ниже мы дадим примеры его применения в несколько упрощенном виде.

§ **89.** При разработке конструкций некоторых судовых устройств и механизмов приходится иметь дело и с такими вопросами динамики и теории сопротивления материалов, которые требуют решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

При этом по большей части нет надобности непременно иметь общий интеграл уравнения с входящими в него буквенно произвольными постоянными, а достаточно найти частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, и притом для ограниченного промежутка изменяемости аргумента. Для практики нет также надобности в аналитическом представлении искомой функции, а достаточно составить таблицу ее значений или построить кривую, ее представляющую.

Приемы такого численного решения дифференциальных уравнений редко излагаются в курсах, между тем по сути дела эти приемы не сложнее вычисления определенных интегралов.

В следующих параграфах имеется в виду изложить наиболее удобные и общие способы такого численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Как в большей части вопросов интегрального исчисления, и здесь начало положено Эйлером, который уделяет главу VII тома I „Institutiones Calculi Integralis“ изложению способа приближенного численного решения дифференциального уравнения первого порядка, к которому всегда можно свести все дело.

Итак положим, что искомая функция y определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

Таблица 46

x	y	$y' = f(x, y)$
a	b	A_0
a_1	b_1	A_1
a_2	b_2	A_2
...	...	......
a_n	b_n	A_n

и начальными условиями: при $x = a$ должно быть $y = b$. Выбрав достаточно малый промежуток h, можно принять, что, пока x заключается между a и $a + h$, y мало отличается от b, и производная сохраняет постоянное значение $f(a, b)$, так что для этого промежутка будет

$$y = b + (x - a) f(a, b) = b + (x - a) A_0$$

и, следовательно, для конца промежутка, когда $x = a + h$, будет

$$y = b + A_0 h = b_1$$

Таким образом, мы получили приближенное значение $y = b_1$, соответствующее значению $x = a_1 = a + h$.

Совершенно так же, полагая

$$A_1 = f(a_1, b_1)$$

получим для $x = a_2 = a + 2h$ величину

$$y = b_2 = b_1 + A_1 h$$

и т. д., таким образом составится табл. 46 соответствующих значений: причем

$$A_k = f(a_k, b_k)$$

и

$$b_{k+1} = b_k + h A_k$$

Изложив этот прием, Эйлер говорит: „... чем меньше промежутки между последовательными значениями x, тем точнее определяются все остальные величины; тем не менее, вследствие большого числа, накопление и этих малых погрешностей может достигнуть значительной величины.“

„Погрешность при этом вычислении происходит оттого, что на протяжении каждого отдельного промежутка обе переменные x и y принимаются сохраняющими свои постоянные значения, соответствующие началу этого промежутка, так что и значение функции $f(x, y)$ остается постоянным, поэтому: чем быстрее значение этой функции изменяется при переходе от одного промежутка к следующему, тем большую можно ожидать погрешность. Это невыгодное обстоятельство имеет место обыкновенно там, где значение $f(x, y)$ или уничтожается, или же становится бесконечным“.

Чтобы устранить это „невыгодное обстоятельство“, Эйлер поступает так: положим для простоты письма, что $f(x, y)$ обращается в нуль при $x=a$, $y=b$, тогда надо положить

$$x=a+\xi; \qquad y=b+\eta$$

и наше уравнение примет вид

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f(a+\xi,\, b+\eta) \tag{2}$$

а начальное условие будет: при $\xi=0$ должно быть $\eta=0$, вместе с тем при $\xi=0$ будет

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_0=f(a,\, b)=0$$

поэтому, положив

$$\eta=\alpha_1\xi^n+\alpha_2\xi^p+\ldots \tag{3}$$

подставляем величину (3) в ур-ние (2) и определяем показатели $n, p, \ldots$ и коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ так, чтобы ур-ние (2) имело место тождественно, иными словами по известному приему разлагаем величину η в ряд по возрастающим степеням ξ.

В том случае, когда $f(a, b)=\infty$, можно ур-ние (1) писать в виде

$$\frac{d\xi}{d\eta}=\frac{1}{f(a+\xi,\, b+\eta)}=F(\xi,\, \eta)$$

функция $F(\xi, \eta)$ при $\xi=0$ и $\eta=0$ будет обращаться в нуль, и, значит, надо будет взять разложение вида

$$\xi=\beta_1\eta^k+\beta_2\eta^n+\ldots$$

и, найдя коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \ldots$ и показатели $k, n, \ldots$, этот ряд „обратить“, т. е. выразить η в виде ряда, расположенного по степеням ξ.

Эйлер берет такой пример:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a^2}{x^2-y^2}$$

и условие при $x=a$ должно быть $y=a$.

Положив

$$x = a + \xi; \qquad y = a + \eta$$

получим

$$a^2 \frac{d\xi}{d\eta} = 2a(\xi - \eta) + (\xi^2 - \eta^2) \qquad (**)$$

делая затем

$$\xi = \alpha_1 \eta^n + \alpha_2 \eta^p + \ldots$$

имеем

$$a^2[n\alpha_1 \eta^{n-1} + p\alpha_2 \eta^{p-1} + \ldots] =$$
$$= 2a[-\eta + \alpha_1 \eta^n + \alpha_2 \eta^p + \ldots] + [-\eta^2 + \alpha_1{}^2 \eta^{2n} + \ldots]$$

Отсюда следуют уравнения

$$\begin{array}{lll} n-1=1 & \text{т. е.} \quad n=2 \quad \text{и} & a^2 n\alpha_1 = -2a \\ p-1=2 & & pa^2\alpha_2 = 2a\alpha_1 - 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

которые дают $n=2$, $p=3, \ldots$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{a}; \qquad \alpha_2 = -\frac{1}{a^2} \ldots$$

и, значит,

$$\xi = -\frac{1}{a}\eta^2 - \frac{1}{a^2}\eta^3 + \ldots \qquad (3')$$

Легко видеть, что если положить $\xi = -t^2$, то η будет разлагаться в ряд вида

$$\eta = At + Bt^2 + Ct^3 + \ldots$$

и, вместо того, чтобы находить $A, B, C, \ldots$ через обращение ряда (3′), проще вернуться к самому ур-нию (**) и, подставив в него вместо ξ и η их величины, искать $A, B, C, \ldots$, что даст

$$\eta = \sqrt{a}\,t - \frac{1}{3}t^2 + \frac{5}{18}\frac{1}{\sqrt{a}}t^3 + \ldots$$

или

$$y - a = \sqrt{a(a-x)} - \frac{1}{3}(a-x) + \frac{5}{18}\frac{1}{\sqrt{a}}(a-x)^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

значит x должно быть меньше a, чтобы y оставалось вещественным, и при $x = a_1 = a - h$ будет

$$y = b_1 = a + \sqrt{ah} - \frac{1}{3}h + \frac{5}{13}\frac{1}{\sqrt{a}}h^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

Пару значений $x=a_1=a-h$; $y=b_1$ можно теперь принять за исходную и применять вышеуказанный процесс.

§ **90.** Чтобы устранить первый из указанных им недостатков, т. е. что функция $f(x, y)$ принимается для каждого промежутка за постоянную, тогда как на самом деле она претерпевает изменения, в особенности если промежутки не весьма малы, Эйлер предполагает, что в смежности с каждым из рассматриваемых значений переменной назависимой искомая функция y разлагается по Тейлорову ряду, так что будет вообще

$$y_{k+1}=y_k+\frac{x-a_k}{1}y_k'+\frac{(x-a_k)^2}{1\cdot 2}y_k''+\frac{(x-a_k)^3}{1\cdot 2\cdot 3}y_k'''+\ldots \tag{4}$$

выражения же производных составляются, пользуясь данным уравнением

$$y'=f(x, y) \tag{1}$$

дифференцируя его последовательно и заменяя y' его величиною, так что будет

$$\begin{aligned} y''&=f_x'+y'f_y'=f_x'+ff_y' \\ y'''&=f_{xx}''+2ff_{xy}''+f^2f_{yy}''+f_y'[f_x'+ff_y'] \end{aligned} \tag{5}$$

. . . .

Полагая в этих выражениях $x=a_k$, $y=b_k$, найдем значения $y_k', y_k'', y_k''', \ldots$ и, делая $x=a_{k+1}=a_k+h$, по ф-ле (4) найдем $y=b_{k+1}$, т. е. по паре (a_k, b_k) получим следующую пару (a_{k+1}, b_{k+1}).

Таким образом, все дело сводится к вычислению количества

$$b_{k+1}-b_k=A_k h+B_k\frac{h^2}{2}+C_k\frac{h^3}{6}+\ldots \tag{6}$$

иными словами „коэффициентов“ $A_k, B_k, C_k, \ldots$, которые находятся или по ф-ле (5), или, как замечает Эйлер, „и не производя дифференцирования“, а при помощи подстановки

$$y=b_k+\eta; \qquad x=a_k+\xi$$

в уравнение $y'=f(x, y)$ и разложения величины η в ряд по степеням ξ, чему Эйлер и дает затем примеры.

§ **91.** Изложенная метода Эйлера была затем развита Коши, который начинает с того, что, по заданному дифференциальному уравнению

$$y'=f(x, y) \tag{1}$$

и начальному условию: при $x = x_0$ должно быть $y = y_0$, составляет ряд равенств

$$
\begin{aligned}
y_1 - y_0 &= (x_1 - x_0) f(x_0, y_0)\\
y_2 - y_1 &= (x_2 - x_1) f(x_1, y_1)\\
y_3 - y_2 &= (x_3 - x_2) f(x_2, y_2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y - y_{n-1} &= (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1})
\end{aligned}
$$

и берет их сумму

$$
\begin{aligned}
y - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0) + (x_2 - x_1) f(x, y_1) + \\
+ \ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1})
\end{aligned}
\tag{7}
$$

т. е. делает то же самое, что и Эйлер, но затем Коши доказывает, что при соблюдении некоторых ограничительных условий относительно величины промежутка $X - x_0$ и функции $f(x, y)$ рассматриваемая сумма, при неограниченном возрастании числа n и уменьшении каждой из разностей $x_k - x_{k-1}$, имеет конечный и определенный предел, представляющий такую функцию переменной X, которая удовлетворяет уравнению

$$F'(X) = f[X, F(X)] \tag{8}$$

равносильному ур-нию (1). Кроме того, он показал, как найти предел погрешности, которую мы сделаем, если промежуток $X - x_0$ подразделить на какое-нибудь конечное число частей, иначе когда разности $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots$ будут иметь конечные значения, как это и есть в методе Эйлера.

Но вычисление этих пределов погрешности не представляет практических удобств, поэтому метода Коши имеет главным образом теоретическое значение, как первое строгое доказательство того, что всякое дифференциальное уравнение первого порядка, при соблюдении некоторых условий, имеет общий интеграл.

Как уже указано в § 88, Пикар, в томе I своего „Traité d'analyse", изложив вышеупомянутое доказательство Коши, излагает свою методу последовательных приближений как для одного уравнения первого порядка, так и для системы таких уравнений. Хотя Пикар развил свою методу не в целях практического вычисления, а как методу, дающую строгое доказательство существования общего интеграла, но эта метода приложима и для численного интегрирования, особенно если исходить не из начальных данных, т. е. первого приближения по Пикару, а из более близкого, например, получаемого по методе Эйлера; чем это приближение будет взято ближе к истинному, тем быстрее будет достигнута предельная функция $F(x)$ с избранною для вычисления степенью точности.

Если для получения первого приближения брать исправленную методу Эйлера, т. е. ту, где он берет не только первый, но и следующие члены разложения в Тейлоровом ряду, то практическое выполнение вычислений часто оказалось бы длинным, и потребовалось бы много излишней работы. Чтобы этого избежать, было предложено два способа, из коих один принадлежит профессору Геттингенского университета Runge, другой — профессору университета в Осло (Христиании) Störmer'у, хотя еще в 1855 г. была уже развита знаменитым астрономом Адамсом более общая метода, но она оставалась до последнего времени мало известной.

§ 92. Метода Рунге в применении к уравнению

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

состоит в развитии приведенных выше слов Эйлера: „так как все дело сводится к нахождению количества

$$b_{k+1} - b_k = A_k h + B_k \frac{h^2}{2} + C_k \frac{h^3}{6} + \ldots \tag{9}$$

что может быть сделано и не производя дифференцирования", после чего Эйлер применяет подстановку и разложение в ряд при помощи неопределенных коэффициентов.

В § 90 приведены общие выражения производных y'' и y''', получаемые дифференцированием предложенного уравнения; полагая в этих выражениях

$$x = a_k; \qquad y = b_k$$

получим

$$A_k = f(a_k, b_k)$$

$$B_k = f_x'(a_k, b_k) + A_k f_y'(a_k, b_k)$$

$$C_k = f_{xx}''(a_k, b_k) + 2A_k f_{xy}''(a_k, b_k) + A_k^2 f_{yy}''(a_k, b_k) + B_k f_y'(a_k, b_k)$$

или, положив для краткости

$$f_x'(a_k, b_k) = p_k; \qquad f_y'(a_k, b_k) = q_k$$

$$f_{xx}''(a_k, b_k) = r_k; \qquad f_{xy}''(a_k, b_k) = s_k; \qquad f_{yy}''(a_k, b_k) = t_k$$

и

$$f_{xx}''(a_k, b_k) + 2A_k f_{xy}''(a_k, b_k) + A_k^2 f_{yy}''(a_k, b_k) = P_k$$

$$B_k f_y'(a_k, b_k) = Q_k$$

будем иметь

$$B_k = p_k + A_k q_k$$

$$C_k = P_k + Q_k$$

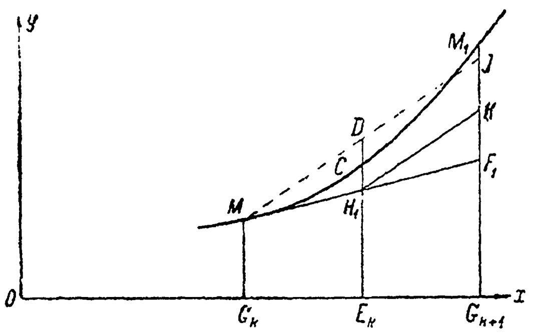
Из ф-лы (9) видно, что если при вычислении разности $b_{k+1} - b_k$ ограничиваться членами третьего порядка относительно h, то нет надобности вычислять в отдельности величины A_k, B_k, C_k, а достаточно вычислить сумму

$$A_k h + \frac{1}{2} B_k h^2 + \frac{1}{6} C_k h^3 = N_k h$$

причем

$$N_k = A_k + \frac{1}{2} B_k h + \frac{1}{6} C_k h^2$$

Прежде чем вычислять величину этой суммы или, что то же, множителя N_k, обратимся сперва к чертежу (фиг. 68).



Фиг. 63.

Положим, что координаты точки M суть

$$x = OG_k = a_k; \quad y = G_k M = b_k$$

и MM_1 есть истинная интегральная кривая, проходящая через точку M, т. е. кривая, ордината произвольной точки которой, рассматриваемая как функция абсциссы x, удовлетворяет уравнению

$$y' = f(x, y)$$

Вообразим касательную к этой кривой в точке M и отметим точки пересечения H_1 и F_1 этой касательной со среднею ординатою $E_k C$ и с крайнею $G_{k+1} M_1$.

Очевидно, что тангенс угла наклонения этой касательной есть $A_k = f(a_k, b_k)$ и ординаты точек H_1 и F_1 суть

$$E_k H_1 = \eta_k = b_k + \frac{1}{2} A_k h$$

и

$$G_{k+1} F_1 = b_k + A_k h$$

Подставляя во вторую часть ур-ния (1) вместо x величину $a_k + \frac{1}{2} h$ и вместо y величину η_k, получим уклон касательной к интегральной кривой, проходящей через точку H_1, в этой точке; обозначим тангенс этого уклона через α_k, так что будет

$$\alpha_k = f\left(a_k + \frac{1}{2} h, \quad b_k + \frac{1}{2} A_k h\right)$$

проведем прямую $H_1 K$ под этим уклоном и отметим точку ее пересечения K с ординатою $G_{k+1} M_1$. Так как точка H_1 весьма близка к точке C (расстояние $H_1 C$ второго порядка относительно h), то прямая $H_1 K$ будет приблизительно параллельна касательной в точке C к интегральной кривой, проходящей через M, значит, если провести через точку M прямую, параллельную $H_1 K$, то точка ее пересечения J будет лежать весьма близко к M_1, во всяком случае гораздо ближе точки F_1, соответствующей первому Эйлеровскому приближению. Вместе с тем очевидно, что точка C интегральной кривой будет лежать между точками H_1 и D, и притом весьма близко к середине между ними. После этого общего объяснения качественной стороны дела составим выражения ординат точек M, H_1, D и J и уклонов касательных к интегральным кривым, проходящим через эти точки.

Очевидно, что координаты наших точек будут

$$M(a_k, b_k); \qquad H_1\left(a_k + \frac{1}{2} h,\ b_k + \frac{1}{2} A_k h\right)$$

$$J(a_k + h,\ b_k + \alpha_k h); \qquad D\left(a_k + \frac{1}{2} h,\ b_k + \frac{1}{2} \alpha_k h\right)$$

Обозначая соответственно через γ_k и δ_k тангенсы уклонов касательных в точках D и J, будем иметь

$$\gamma_k = f\left(a_k + \frac{1}{2} h,\quad b_k + \frac{1}{2} \alpha_k h\right)$$

$$\delta_k = f(a_k + h,\ b_k + \alpha_k h)$$

Разовьем теперь величины α_k, γ_k, δ_k, разлагая их по степеням буквы h и удерживая в этих разложениях лишь члены до второго порядка включительно.

Имеем

$$\alpha_k = f(a_k, b_k) + \frac{1}{2} h [f'_x(a_k, b_k) + A_k f'_y(a_k, b_k)] + \frac{1}{8} h^2 [f''_{xx}(a_k, b_k) +$$
$$+ 2A_k f''_{yx}(a_k, b_k) + A_k^2 f''_{yy}(a_k, b_k)] = A_k + \frac{1}{2} B_k h + \frac{1}{8} P_k h^2$$

$$\gamma_k = f(a_k, b_k) + \frac{1}{2} h [f'_x(a_k, b_k) + \alpha_k f'_y(a_k, b_k)] + \frac{1}{8} h^2 [f''_{xx}(a_k, b_k) +$$
$$+ 2\alpha_k f''_{xy}(a_k, b_k) + \alpha_k^2 f''_{yy}(a_k, b_k)] = f(a_k, b_k) + \frac{1}{2} h [f'_x(a_k, b_k) +$$
$$+ A_k f'_y(a_k, b_k)] + \frac{1}{8} h^2 [f''_{xx}(a_k, b_k) + 2A_k f''_{xy}(a_k, b_k) + A_k^2 f''_{yy}(a_k, b_k)] +$$
$$+ \frac{1}{4} h^2 B_k f'_y(a_k, b_k) = A_k + \frac{1}{2} B_k h + \frac{1}{8} P_k h^2 + \frac{1}{4} Q_k h^2$$

и

$$\delta_k = A_k + B_k h + \frac{1}{2} P_k h^2 + \frac{1}{2} Q_k h^2$$

Нам надо составить величину

$$N_k = A_k + \frac{1}{2} B_k h + \frac{1}{6}(P_k + Q_k) h^2$$

Нетрудно убедиться, что

$$N_k = \frac{1}{6}[A_k + 2\alpha_k + 2\gamma_k + \delta_k] \tag{10}$$

и искомая ордината b_{k+1} будет

$$b_{k+1} = b_k + N_k h$$

Итак, процесс перехода от пары значений

$$x = a_k; \quad y = b_k$$

к следующей паре

$$x = a_{k+1}; \quad y = b_{k+1}$$

выполняется следующим образом:

1) вычисляется величина A_k по формуле

$$A_k = f(a_k, b_k) \tag{11}$$

2) вычисляются величины α_k, γ_k и δ_k по формулам

$$\alpha_k = f\left(a_k + \frac{1}{2} h, \quad b_k + \frac{1}{2} A_k h\right) \tag{12}$$

$$\gamma_k = f\left(a_k + \frac{1}{2} h, \quad b_k + \frac{1}{2} \alpha_k h\right)$$

$$\delta_k = f(a_k + h, \quad b_k + \alpha_k h)$$

3) составляется множитель N_k по формуле

$$N_k = \frac{1}{6}[A_k + 2\alpha_k + 2\gamma_k + \delta_k] \tag{13}$$

4) величина b_{k+1} будет

$$b_{k+1} = b_k + N_k h \tag{14}$$

Это и есть метода Рунге в простейшей ее форме.

Заметим здесь же, что полезно вычислить еще ординату и уклон касательной в промежуточной точке C кривой, чтобы иметь возможность сразу вдвое уменьшить промежуток при исправлении интегральной кривой по методе Пикара, как это можно будет видеть на численном примере, приведенном ниже.

Можно вести это вычисление также следующим образом:

1) вычислить величину A_k по формуле

$$A_k = f(a_k, b_k) \tag{11'}$$

2) вычислить величины α_k, β_k, γ_k по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_k &= f\left(a_k + \frac{h}{2}, \quad b_k + \frac{1}{2} A_k h\right) \\ \beta_k &= f\left(a_k + \frac{h}{2}, \quad b_k + \frac{1}{2} \alpha_k h\right) \\ \gamma_k &= f\left(a_k + h, \quad b_k + \beta_k h\right) \end{aligned} \tag{12'}$$

3) составить множитель M_k по формуле

$$M_k = \frac{1}{6}[A_k + 2\alpha_k + 2\beta_k + \gamma_k] \tag{13'}$$

4) величина искомой ординаты b_{k+1} будет

$$b_{k+1} = b_k + M_k h \tag{14'}$$

Это правило точнее предыдущего, ибо величина b_{k+1} верна до членов четвертого порядка относительно h включительно, уравнение же (14) — лишь до членов третьего порядка.

Предлагается в виде задачи вывести ф-лу (14').

Главный недостаток методы Рунге состоит в том, что приходится вычислять, по крайней мере, три серии значений функции $f(x, y)$, и, значит, когда предложенное уравнение сколь-нибудь сложное, то эти вычисления потребуют затраты большого труда, в значительной доле напрасного, как это будет видно по примеру, приводимому ниже, и по сопоставлению этой методы с методою Адамса.

§ **93.** Метода Адамса не вошла в собрание его сочинений, а составляет часть отдельно изданной книги под следующим обстоятельным заглавием: „An attempt to test the theories of capillary action by comparing the theoretical and measured forms of drops of fluid by *Francis Bashforth* B. D. late professor of applied mathematics to the advanced class of Royal Artillery officers, Woolwich, and formerly Fellow of S-t John's College, Cambridge, with an explanation of the method of integration employed in constructing the tables which give the theoretical forms of such drops by *J. C. Adams* M. A. F. S. Fellow of Pembroke College and Lowndean professor of Astronomy and Geometry in the University of Cambridge". (Cambridge at the University Press, 1883).

Адамс в своей методе не ограничивается первыми тремя членами выражения (9)

$$b_{k+1} - b_k = A_k h + \frac{1}{2} B_k h^2 + \frac{1}{6} C_k h^3 + \frac{1}{24} D_k h^4 + \ldots$$

Его метода позволяет взять в этом выражении сколько угодно членов, вычисляя лишь *одну серию* значений функции $f(x, y)$, т. е. значений A_k, непосредственно по данному уравнению, а не нескольких, как бы того требовала метода Рунге, и совсем не производя непосредственного вычисления производных высших порядков $B_k, C_k, D_k, \ldots$, как то делается в методе Эйлера, а воспользовавшись для их нахождения или исключения составлением для величин $A_k h$ „разностей“ первого, второго, третьего и т. д. порядков. Этот последний процесс требует лишь вычитаний, и по своей простоте, конечно, не может быть даже сравниваем с процессом непосредственного вычисления значений A_k по данному уравнению или значений $B_k, C_k, D_k, \ldots$ по уравнениям, получаемым из данного дифференцированием.

Итак положим, что составляются параллельно две таблицы (47 и 48), из которых первая содержит последовательные значения неизвестной y и их первые разности, вторая — последовательные значения величины

$$\eta_n = A_n h = f(a_n, b_n) h$$

и их разности первого, второго, третьего и т. д. порядков, причем для простоты мы ограничимся лишь третьим порядком.

Положим, что в табл. 47 и 48 мы дошли до величин, соответствующих значению $x = a_n = a + nh$, так что наши таблицы будут такого вида:

Таблица 47

n	x	y	Δy
. . .	. . .	. . .	. .
$n-3$	a_{n-3}	b_{n-3}	
			Δb_{n-3}
$n-2$	a_{n-2}	b_{n-2}	
			Δb_{n-2}
$n-1$	a_{n-1}	b_{n-1}	
			Δb_{n-1}
n	a_n	b_n	

Таблица 48

η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$
. . .	. . . .	. . . .	. . . .
η_{n-3}		$\Delta^2\eta_{n-4}$	
	$\Delta\eta_{n-3}$		$\Delta^3\eta_{n-4}$
η_{n-2}		$\Delta^2\eta_{n-3}$	
	$\Delta\eta_{n-2}$		$\Delta^3\eta_{n-}$
η_{n-1}		$\Delta^2\eta_{n-2}$	
	$\Delta\eta_{n-1}$		
η_n			

Разности вписываются в промежуточную строку между теми двумя числами, для коих они берутся так:

$$\Delta b_{n-3} = b_{n-2} - b_{n-3}; \qquad \Delta b_{n-2} = b_{n-1} - b_{n-2}$$

$$\Delta \eta_{n-3} = \eta_{n-2} - \eta_{n-3}; \qquad \Delta \eta_{n-2} = \eta_{n-1} - \eta_{n-2}$$

$$\Delta^2 \eta_{n-3} = \Delta \eta_{n-2} - \Delta \eta_{n-3}; \quad \Delta^3 \eta_{n-2} = \Delta^2 \eta_{n-1} - \Delta^2 \eta_{n-2}$$

и т. д., как объяснено в главе VI.

Весь вопрос состоит в том, каким образом добавить к табл. 47 и 48 по одной косой строке снизу, т. е. перейти от n к $n+1$.

Мы этого достигнем, если получим каким бы то ни было способом величину Δb_n, ибо, придав ее к b_n, будем иметь

$$b_{n+1} = b_n + \Delta b_n$$

и табл. 47 будет заполнена. Вместе с тем сейчас же прибавится одна косая строка и к табл. 48, — в самом деле, по данному уравнению

$$y' = f(x, y)$$

полагая в нем

$$x = a_{n+1}; \quad y = b_{n+1}$$

находим

$$y'_{n+1} = A_{n+1} = f(a_{n+1}, b_{n+1})$$

и, значит,

$$\eta_{n+1} = A_{n+1} h = f(a_{n+1}, b_{n+1}) h$$

и, написав η_{n+1} в свое место, сейчас же получаем

$$\Delta \eta_n = \eta_{n+1} - \eta_n$$

и затем

$$\Delta^2 \eta_{n-1} = \Delta \eta_n - \Delta \eta_{n-1}; \quad \Delta^3 \eta_{n-2} = \Delta^2 \eta_{n-1} - \Delta^2 \eta_{n-2}$$

и, следовательно, табл. 48 будет заполнена, и можно будет перейти к следующему значению $n+2$ и т. д.

Таким образом, надо только показать, как вычислить Δb_n по имеющимся в табл. 48 числам, т. е. по

$$\eta_n, \quad \Delta \eta_{n-1}, \quad \Delta^2 \eta_{n-2}, \quad \Delta^3 \eta_{n-3}$$

Это производится по следующей формуле:

$$\Delta b_n = \eta_n + \frac{1}{2} \Delta \eta_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 \eta_{n-3} \tag{16}$$

которую мы сейчас и выведем.

По Тейлорову ряду, согласно сделанному обозначению, имеем

$$b_{n+1}-b_n=\Delta b_n=A_n h+B_n\frac{h^2}{2}+C_n\frac{h^3}{6}+D_n\frac{h^4}{24}+E_n\frac{h^5}{120}$$

или, опуская для простоты письма значок n в правой части,

$$\Delta b_n=Ah+B\frac{h^2}{2}+C\frac{h^3}{6}+D\frac{h^4}{24}+E\frac{h^5}{120}+\ldots$$

но мы имеем

$$\eta_n=y_n'\,h=A\,h$$

следовательно, по тому же Тейлорову ряду будет

$$\eta_{n-1}=Ah-Bh^2+C\frac{h^3}{2}-D\frac{h^4}{6}+E\frac{h^5}{24}$$

$$\eta_{n-2}=Ah-2Bh^2+4C\frac{h^3}{2}-8D\frac{h^4}{6}+16E\frac{h^5}{24}$$

$$\eta_{n-3}=Ah-3Bh^2+9C\frac{h^3}{2}-27D\frac{h^4}{6}+81E\frac{h^5}{24}$$

Но по самому составлению разностей имеем

$$\Delta\eta_{n-1}=\eta_n-\eta_{n-1};\qquad \Delta^2\eta_{n-2}=\eta_n-2\eta_{n-1}+\eta_{n-2}$$

$$\Delta^3\eta_{n-3}=\eta_n-3\eta_{n-1}+3\eta_{n-2}-\eta_{n-3};\ \ldots$$

на основании этого будет

$$\Delta\eta_{n-1}=Bh^2-C\frac{h^3}{2}+D\frac{h^4}{6}+E\frac{h^5}{24}+\ldots$$

$$\Delta^2\eta_{n-2}=\qquad 2C\frac{h^3}{2}-6D\frac{h^4}{6}+14E\frac{h^5}{24}-\ldots$$

$$\Delta^3\eta_{n-3}=\qquad\qquad 6D\frac{h^4}{6}-36E\frac{h^5}{24}+\ldots$$

Нам надо составить величину

$$\Delta b_n=Ah+B\frac{h^2}{2}+C\frac{h^3}{6}+D\frac{h^4}{24}+E\frac{h^5}{120}+\ldots$$

Чтобы этого достигнуть, стоит только, умножив предыдущие уравнения на множители α, β, γ, придать их к уравнению

$$\eta_n=Ah$$

и определить неизвестные множители так, чтобы равенство

$$\eta_n+\alpha\Delta\eta_{n-1}+\beta\Delta^2\eta_{n-2}+\gamma\Delta^3\eta_{n-3}=$$

$$=Ah+B\frac{h^2}{2}+C\frac{h^3}{6}+D\frac{h^4}{24}+E\frac{h^5}{120}+\ldots$$

имело место до членов возможно высокого порядка относительно h, таким образом, для определения α, β, γ имеем уравнения

$$\alpha=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2}(2\beta-\alpha)=\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{6}(6\gamma-6\beta+\alpha)=\frac{1}{24}$$

которые дают

$$\alpha=\frac{1}{2};\quad \beta=\frac{5}{12};\quad \gamma=\frac{3}{8}$$

и, значит, будет

$$\Delta b_n=\eta_n+\frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1}+\frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2}+\frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3} \tag{16}$$

Само собою понятно, что эта формула лишь приближенная и точна только до членов четвертого порядка относительно h, ибо разность

$$\frac{1}{120}-\frac{1}{24}[\alpha+14\beta-36\gamma]=\frac{49}{144}$$

а не нулю, и, следовательно, первый из отброшенных в предыдущей формуле членов есть

$$\frac{49}{144}Eh^5$$

Нетрудно видеть, что если бы хотели иметь для Δb_n формулу, верную до членов пятого порядка, то надо было бы принять во внимание и разности четвертого порядка, т. е. $\Delta^4\eta_{n-4}$; если бы хотели иметь и члены шестого порядка, то надо бы принять во внимание и $\Delta^5\eta_{n-5}$ и т. д., и наша формула была бы вида

$$\Delta b_n=\eta_n+\frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1}+\frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2}+\frac{3}{8}\Delta^2\eta_{n-3}+ \\ +\delta\Delta^4\eta_{n-4}+\varepsilon\Delta^6\eta_{n-5} \tag{17}$$

ибо очевидно, что коэффициенты α, β, γ определялись бы прежними уравнениями и сохранили бы свои величины, и добавились бы члены с коэффициентами δ и ε, причем оказалось бы

$$\delta=\frac{251}{720};\quad \varepsilon=\frac{95}{288}$$

Дальнейшие коэффициенты, приводимые Адамсом, суть

$$\frac{19\,087}{60\,480};\quad \frac{5257}{17\,280};\quad \frac{1\,070\,017}{3\,628\,800};\quad \frac{1\,082\,753}{7\,257\,600}$$

Адамс вычислил эти коэффициенты, исходя из интерполяционной формулы

$$\eta = \eta_n + \frac{x}{1}\Delta\eta_{n-1} + \frac{x(x+1)}{1\cdot 2}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{x(x+1)(x+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3\eta_{n-3} + \ldots$$

интегрирование которой дает общее выражение этих коэффициентов под видом

$$\int_0^1 \frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+k)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k+1)}\,dx$$

Наоборот, если бы мы предпочли брать более мелкие промежутки h и довольствоваться лишь членами третьего порядка, то при вычислении можно было бы ограничиться разностями второго порядка, и наша формула была бы

$$\Delta b_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} \tag{17'}$$

и в этом случае таблицы приняли бы вид табл. 49 и 50, причем точность, ими доставляемая, одинакова с даваемою методою Рунге, простота же вычисления будет видна на приводимых ниже численных примерах.

Таблица 49

n	x	y	Δy
....	....	....	....
$n-2$	a_{n-2}	b_{n-2}	
			Δb_{n-2}
$n-1$	a_{n-1}	b_{n-1}	
			Δb_{n-1}
n	a_n	b_n	
$n+1$			

Таблица 50

η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$
....	....	....
η_{n-2}		$\Delta^2\eta_{n-3}$
	$\Delta\eta_{n-2}$	
η_{n-1}		$\Delta^2\eta_{n-2}$
	$\Delta\eta_{n-1}$	
η_n		

§ **94.** В предыдущем показано, каким образом *продолжать* таблицы, когда верхние строки их заполнены и мы имеем в нижней косой строке все разности до требуемого порядка; необходимо показать, каким образом *начать* составление этих таблиц, когда для $n=0$ будут известны лишь числа

$$x=a=a_0 \text{ и } y=b=b_0$$

и непосредственно по ним вычисляемое

$$\eta=hf(a_0, b_0)$$

Ясно, что если бы мы хотели вести вычисление до разностей третьего порядка, то нам надо бы получить числа, соответствующие значениям $n=0, 1, 2, 3$, т. е. иметь для начала табл. 51 и 52.

Таблица 51

n	x	y	Δy
0	a_0	b_0	
			Δb_0
1	a_1	b_1	
			Δb_1
2	a_2	b_2	
			Δb_2
3	a_3	b_3	

Таблица 52

η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$
η_0			
	$\Delta\eta_0$		
η_1		$\Delta^2\eta_0$	
	$\Delta\eta_1$		$\Delta^3\eta_0$
η_2		$\Delta^2\eta_1$	
	$\Delta\eta_2$		
η_3			

Этого можно достигнуть двояким путем:

1) Положив в предложенном уравнении

$$x=a_0+t; \quad y=b_0+z$$

разложить по известным правилам z в ряд по степеням t и, положив затем $t=h, 2h, 3h$, вычислить соответствующие значения y, которые и будут представлять b_1, b_2, b_3. Понятно, что здесь само вычисление покажет, какой величины надо брать промежуток h, чтобы отбрасываемые в ряду члены не влияли на результат при избранной степени точности. По получённым таким образом парам значений (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) вычисляются η_1, η_2, η_3, по ним — их разности, и табл. 51 будет подготовлена для продолжения.

2) Последовательным приближением, пользуясь разностями не нижней, а *верхней* косой строки.

Мы имели общую формулу (16)

$$\Delta b_n=\eta_n+\frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1}+\frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2}+\frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3}$$

Считаем, что третьи разности постоянные, т. е.

$$\Delta^3\eta_{n-3}=\Delta^3\eta_{n-2}=\Delta^3\eta_{n-1}=\Delta^3\eta_n$$

будем иметь

$$\Delta^2 \eta_{n-2} = \Delta^2 \eta_{n-1} - \Delta^3 \eta_{n-2} = \Delta^2 \eta_n - 2\Delta^3 \eta_n$$

$$\Delta\eta_{n-1} = \Delta\eta_n - \Delta^2 \eta_{n-1} = \Delta\eta_n - \Delta^2 \eta_n + \Delta^3 \eta_n$$

и, значит, будет

$$\Delta b_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_n - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_n + \frac{1}{24}\Delta^3\eta_n \tag{*}$$

$$\Delta b_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-1} - \frac{1}{24}\Delta^3\eta_{n-1} \tag{**}$$

$$\Delta b_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-2} \tag{***}$$

Полагая в ф-ле (*) $n=0$; в ф-ле (**) $n=1$ и в ф-ле (***) $n=2$, получим

$$\Delta b_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_0 + \frac{1}{24}\Delta^3\eta_0 \tag{18}$$

$$\Delta b_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_0 - \frac{1}{24}\Delta^3\eta_0 \tag{19}$$

$$\Delta b_2 = \eta_2 + \frac{1}{2}\Delta\eta_1 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_0 + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_0 \tag{20}$$

Если же ограничиться членами второго порядка, то будет

$$\Delta b_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_0 \tag{21}$$

$$\Delta b_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_0 \tag{22}$$

Последовательность приближений ведем следующим образом: по данным a_0 и b_0 вычисляем η_0, затем берем

$$\Delta b_0 = \eta_0$$

и

$$b_1 = b_0 + \Delta b_0 = b_0 + \eta_0$$

по полученной паре (a_1, b_1) вычисляем η_1 и берем разность

$$\Delta\eta_0 = \eta_1 - \eta_0$$

вновь вычисляем Δb_0 по формуле

$$\Delta b_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0$$

и новое исправленное значение $b_1 = b_0 + \Delta b_0$, по этому значению b_1 вычисляем η_1 и затем

$$\Delta b_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0$$

и находим $b_2 = b_1 + \Delta b_1$, и по полученной паре (a_2, b_2) вычисляем η_2, найдя которое, составляем разности и находим $\Delta\eta_0$ и $\Delta^2\eta_0$.

Пользуясь этими разностями, вновь вычисляем Δb_0 и Δb_1 по формулам

$$\Delta b_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_0$$

$$b_1 = b_0 + \Delta b_0$$

$$\eta_1 = f(a_1, b_1)$$

$$\Delta b_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_0$$

$$b_2 = b_1 + \Delta b_1$$

Получив эти исправленные величины, если хотим итти до разностей третьего порядка, то вычисляем сперва Δb_2 и b_3 по формулам

$$\Delta b_2 = \eta_2 + \frac{1}{2}\Delta\eta_1 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_0$$

$$b_3 = b_2 + \Delta b_2$$

и, вновь перевычислив b_0, b_1, b_2 по ф-лам (18) — (20), повторяем это вычисление, пока два последовательные приближения не совпадут в пределах избранной точности. Здесь выгоднее, чем итти до разностей третьего порядка, взять сперва более мелкие промежутки h, так чтобы разностями третьего порядка можно было пренебречь и ограничиваться формулами (21) — (22).

Когда по ходу вычисления будет видно, что разности второго порядка становятся настолько изменяющимися, что третьи разности уже оказывают влияние на результат, то надо или принимать их в расчет, пользуясь соответствующей формулой, или уменьшить промежуток; наоборот, когда разности второго порядка окажутся настолько малыми, что не влияют на результат, то можно увеличить промежуток.

§ 95. Само собою понятно, что изложенная метода применима к системе нескольких совокупных уравнений первого порядка.

Например, пусть дана система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y, z) \\ \frac{dz}{dx} &= \varphi(x, y, z) \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

и начальные условия: при $x = a$ должно быть $y = b$, $z = c$; тогда, положив

$$\eta = f(x, y, z)\, h \quad \text{и} \quad \zeta = \varphi(x, y, z)\, h \qquad (**)$$

составляем не одну пару, а две пары параллельных таблиц таких, как показанные выше, причем одна пара заключает значения

$$x,\ y,\ \Delta y;\ \eta,\ \Delta\eta,\ \Delta^2\eta,\ \Delta^3\eta$$

другая:

$$x,\ z,\ \Delta z;\quad \xi,\ \Delta\xi,\ \Delta^2\xi,\ \Delta^3\xi$$

причем для вычисления величин η и ξ служат ур-ния (**), а для вычисления Δb_n и Δc_n — формулы

$$\begin{aligned}\Delta b_n &= \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3}\\ \Delta c_n &= \xi_n + \frac{1}{2}\Delta\xi_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\xi_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\xi_{n-3}\end{aligned}\qquad (16)$$

Совершенно так же надо поступать для системы трех и большого числа уравнений.

Как известно, всякое обыкновенное дифференциальное уравнение любого порядка и всякая система таких уравнений, если только они разрешимы относительно наивысшей производной, в них входящей, могут быть приведены к системе уравнений первого порядка вида

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, x_2, \ldots x_n, t) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots n)$$

Так, например, если бы вопрос шел о движении точки в плоскости xoy, то мы имели бы систему

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= f\left(x, y, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \varphi\left(x, y, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)\end{aligned}$$

Вводя неизвестные функции u и v, приводим эту систему к виду

$$\frac{dx}{dt} = u; \qquad \frac{dy}{dt} = v$$

$$\frac{du}{dt} = f(x, y, t, u, v); \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi(x, y, t, u, v)$$

к которой уже непосредственно приложима изложенная выше метода.

§ **96.** Штёрмер развил свою методу в применении к системе уравнений второго порядка вида

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= f(x, y, z, t)\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \varphi(x, y, z, t)\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \psi(x, y, z, t)\end{aligned}\qquad (A)$$

относящейся к движению материальной точки в среде, не оказывающей сопротивления.

Рассмотрим сперва одно уравнение вида

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(x, t)$$

не содержащее первой производной неизвестной функции x; положим, что это уравнение требуется интегрировать при начальных условиях: при $t = t_0$ должно быть $x = x_0$ и $\frac{dx}{dt} = x' = x_0'$. Положив $\xi = h^2 x''$, составляем табл. 53 и 54.

Таблица 53

n	t	x	Δx	$\Delta^2 x$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .
$n-3$	t_{n-3}	x_{n-3}		$\Delta^2 x_{n-4}$
			Δx_{n-3}	
$n-2$	t_{n-2}	x_{n-2}		$\Delta^2 x_{n-3}$
			Δx_{n-2}	
$n-1$	t_{n-1}	x_{n-1}		$\Delta^2 x_{n-2}$
			Δx_{n-1}	
n	t_n	x_n		
$n+1$	t_{n+1}			

Таблица 54

ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	$\Delta^3\xi$	$\Delta^4\xi$
. . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .
ξ_{n-3}		$\Delta^2\xi_{n-4}$		
	$\Delta\xi_{n-3}$		$\Delta^3\xi_{n-4}$	
ξ_{n-2}		$\Delta^2\xi_{n-3}$		$\Delta^4\xi_{n-4}$
	$\Delta\xi_{n-2}$		$\Delta^3\xi_{n-3}$	
ξ_{n-1}		$\Delta^2\xi_{n-2}$		
	$\Delta\xi_{n-1}$			
ξ_n				

Эти таблицы будут заканчиваться косыми строками, содержащими числа

$$x_n, \ \Delta x_{n-1}, \ \Delta^2 x_{n-2}$$

$$\xi_n, \ \Delta\xi_{n-1}, \ \Delta^2\xi_{n-2}, \ \Delta^3\xi_{n-3}, \ \Delta^4\xi_{n-4}$$

Чтобы иметь возможность продолжать табл. 53 и 54, пренебрегая разностями пятого порядка, т. е. прибавлять к ним по одной косой строке, Штёрмер применяет формулу

$$\Delta^2 x_{n-1} = \xi_n + \frac{1}{12}\left[\Delta^2\xi_{n-2} + \Delta^3\xi_{n-3} + \Delta^4\xi_{n-4} - \frac{1}{20}\Delta^4\xi_{n-4}\right] \tag{23}$$

вычислив по которой $\Delta^2 x_{n-1}$, вписываем его в свое место, затем имеем

$$\Delta x_n = \Delta x_{n-1} + \Delta^2 x_{n-1}$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$$

получив величину x_{n+1}, вычисляем по данному уравнению, сделав в нем $t = t_{n+1}$, $x = x_{n+1}$, величину

$$\xi_{n+1} = h^2 f(t_{n+1}, x_{n+1})$$

и, вписав ее в свое место, берем разности, и таким образом нижние косые строки табл. 54 будут заполнены, и, пользуясь ф-лой (23), можно продолжать процесс дальше.

Ф-ла (23) выводится совершенно подобно тому, как ф-ла (16). Сохраняя прежнее обозначение производных неизвестной функции, в данном случае x, по переменной независимой t и принимая за исходное значение x_n, соответствующее $t=t_0+nh$, получим по Тейлорову ряду для x_{n-1} и x_{n+1} разложения

$$x_{n+1}=x_n+Ah+B\frac{h^2}{2}+C\frac{h^3}{6}+D\frac{h^4}{24}+E\frac{h^5}{120}+F\frac{h^6}{720}+\ldots$$

$$x_{n-1}=x_n-Ah+B\frac{h^2}{2}-C\frac{h^3}{6}+D\frac{h^4}{24}-E\frac{h^5}{120}+F\frac{h^6}{720}-\ldots$$

Вместе с тем $\xi_n=x_n''h^2=Bh^2$.

Отсюда следует

$$\Delta^2 x_{n-1}=x_{n+1}-2x_n+x_{n-1}=\xi_n+D\frac{h^4}{12}+F\frac{h^6}{360} \qquad (*)$$

Написав затем разложения величин ξ_{n-1}, ξ_{n-2}, ξ_{n-3}, ξ_{n-4}, а именно:

$$\xi_{n-1}=\xi_n-Ch^3+D\frac{h^4}{2}-E\frac{h^5}{6}+E\frac{h^6}{24}-\ldots$$

$$\xi_{n-2}=\xi_n-2Ch^3+4D\frac{h^4}{2}-8E\frac{h^5}{6}+16F\frac{h^6}{24}-\ldots$$

и т. д., составляем разности

$$\begin{aligned}
\Delta^2\xi_{n-2}&=\xi_n-2\xi_{n-1}+\xi_{n-2}=2D\frac{h^4}{2}-6E\frac{h^5}{6}+14F\frac{h^6}{24}\\
\Delta^3\xi_{n-3}&=\xi_n-3\xi_{n-1}+3\xi_{n-2}-\xi_{n-3}=6E\frac{h^5}{6}-36F\frac{h^6}{24}\\
\Delta^4\xi_{n-4}&=\xi_n-4\xi_{n-1}+6\xi_{n-2}-4\xi_{n-3}+\xi_{n-4}=24F\frac{h^6}{24}
\end{aligned} \qquad (**)$$

исключаем (проще всего по методе множителей) из ур-ний (*) и (**) величины D, E, F и получаем формулу

$$\Delta^2 x_{n-1}=\xi_n+\frac{1}{12}\left[\Delta^2\xi_{n-2}+\Delta^3\xi_{n-3}+\frac{19}{20}\Delta^4\xi_{n-4}\right] \qquad (24)$$

которую для удобства вычисления лучше писать в виде

$$\Delta^2 x_{n-1}=\xi_n+\frac{1}{12}\left[\Delta^2\xi_{n-2}+\Delta^3\xi_{n-3}+\Delta^4\xi_{n-4}-\frac{1}{20}\Delta^4\xi_{n-4}\right] \qquad (23)$$

Чтобы по начальным условиям начать вычисление, можно применять также два способа: разложения в ряд, который не требует пояснений, и последовательных приближений, для которого, подобно предыдущему, из ф-лы (24) составим следующие:

$$\Delta x_0 = x_0' h + \frac{1}{2}\xi_0 + \frac{1}{6}\Delta\xi_0 - \frac{1}{24}\Delta^2\xi_0 + \frac{1}{45}\Delta^3\xi_0 - \frac{7}{480}\Delta^4\xi_0$$

$$\Delta^2 x_0 = \xi_0 + \Delta\xi_0 + \frac{1}{12}\Delta^2\xi_0 - \frac{1}{240}\Delta^4\xi_0$$

$$\Delta^2 x_1 = \xi_1 + \Delta\xi_1 + \frac{1}{12}\Delta^2\xi_0 + \frac{1}{12}\Delta^3\xi_0 - \frac{1}{240}\Delta^4\xi_0 =$$

$$= \xi_2 + \frac{1}{12}\Delta^2\xi_1 + \frac{1}{240}\Delta^4\xi_0$$

$$\Delta^2 x_2 = \xi_2 + \Delta\xi_2 + \frac{1}{12}\Delta^2\xi_1 + \frac{1}{12}\Delta^3\xi_0 + \frac{19}{240}\Delta^4\xi_0$$

и ведем по ним вычисление, как показано в § 88, т. е. сперва берем один член, со следующим приближением — два и т. д.

Понятно само собою, что когда дано не одно уравнение, а система уравнений вида (A), не содержащих первых производных неизвестных функций, то метода применяется совершенно подобно тому, как для уравнений первого порядка, причем составляется столько пар таблиц, сколько неизвестных функций имеется.

§ **97.** Если брать промежутки настолько малыми, что разности третьего порядка уже не влияют на результат, то основная формула будет

$$\Delta^2 x_{n-1} = \xi_n + \frac{1}{12}\Delta^2\xi_{n-2} \qquad (25)$$

$$\xi_n = h^2 f(x_n, t_n)$$

и будем иметь табл. 55 и 56.

Таблица 55

t	x	Δx	$\Delta^2 x$
. . .	. . .	. . . .	. . . .
t_{n-2}	x_{n-2}		$\Delta^2 x_{n-3}$
		Δx_{n-2}	
t_{n-1}	x_{n-1}		$\Delta^2 x_{n-2}$
		Δx_{n-1}	
t_n	x_n		
t_{n+1}			

Таблица 56

ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$
. . .	. . . .	. . .
ξ_{n-2}		$\Delta^2\xi_{n-3}$
	$\Delta\xi_{n-2}$	
ξ_{n-1}		$\Delta^2\xi_{n-2}$
	$\Delta\xi_{n-1}$	
ξ_n		

В этом случае процесс вычисления сводится к весьма простому.

§ **98.** Если в методах Адамса и Штёрмера следить за тем, чтобы промежуток h (меняя, когда нужно, его величину) оставался настолько малым, чтобы последняя из удержанных разностей могла быть принимаема за постоянную с тою точностью, с которою вычисление производится, то результат получится сразу с требуемою степенью точности, поправок требоваться не будет.

Но если бы мы применили другую методу Эйлера или Рунге и желали бы полученный результат исправить, то, как уже сказано, его можно было бы принять за исходное приближение в методе Пикара.

Для простоты рассуждений предположим, что нам предложено одно уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

и начальное условие: при $x = a$ должно быть $y = b$, и что для этого уравнения получено приближенное решение

$$y = F_1(x)$$

Если бы эта функция была точным решением ур-ния (1), то имело бы место равенство

$$F_1'(x) = f[x, F_1(x)]$$

из которого, интегрируя, получили бы

$$F_1(x) = \int_a^x f[x, F_1(x)]\,dx + b \tag{*}$$

Если же значения первой части не будут равны значениям той функции $F_1(x)$, которая входит в состав подинтегральной, то это будет показывать, что принятое приближение недостаточно, и надо положить

$$F_2(x) = \int_a^x f[x, F_1(x)]\,dx + b \tag{**}$$

и, приняв за новое приближение

$$y = F_2(x)$$

повторить этот процесс, который и продолжать, пока с принятою при вычислении степенью точности не будет достигнуто равенство

$$F_k(x) = \int_a^x f[x, F_k(x)]\,dx + b \tag{26}$$

Здесь необходимо иметь в виду следующее обстоятельство: функции $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... будут нам известны не аналитическими своими выражениями, а будут задаваться или определяться лишь в табличной форме, и, значит, интегралы в правых частях равенств (*) придется вычислять по приближенным формулам. Ясно, что эти формулы должны обладать тою степенью точности, которая соответствует принятой в исполняемом вычислении, иначе вычисление интегралов будет вносить свои погрешности в значения функций $F_2(x)$, $F_3(x)$, ..., и мы вместо приближения можем даже удаляться от истинных значений искомой функции.

Приемы такого вычисления определенных интегралов разработаны с большою обстоятельностью в приложении к вычислению планетных возмущений; главные из относящихся сюда формул приведены выше, в главе VI. Подробно же их можно найти в сочинении Th. Oppolzer „Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten", t. II. К сожалению, это сочинение составляет теперь библиографическую редкость.

Мы будем пользоваться формулою Лапласа, достаточной для нашей цели:

$$\frac{1}{h}\int\limits_{a}^{a+nh} y\,dx=\left[\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right]-\frac{1}{12}\left[\Delta y_{n-1}-\Delta y_0\right]-$$
$$-\frac{1}{24}\left[\Delta^2 y_{n-2}+\Delta^2 y_0\right]-\frac{19}{720}\left[\Delta^3 y_{n-3}-\Delta^3 y_0\right]-$$
$$-\frac{3}{160}\left[\Delta^4 y_{n-4}+\Delta^4 y_0\right]-\frac{863}{60\,840}\left[\Delta^5 y_{n-5}-\Delta^5 y_0\right]$$

которую напишем для краткости так:

$$Y_n=\int\limits_{a}^{a+nh} y\,dx=hS_n+hQ_n=T_n+P_n$$

где

$$T_n=h\left[\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right]$$

есть главный член формулы, представляющий результат вычисления нашего интеграла по правилу „трапеций", P_n есть „поправка" этого результата.

Понятно, что выгоднее и самое вычисление разбивать на две части, т. е. отдельно по известной схеме („суммы попарно", „суммы сверху") вычислять T_n и отдельно P_n.

§ **99.** Для пояснения изложенных выше способов проделаем некоторые примеры, выбрав их так, чтобы самое вычисление частных значений функции $f(x, y)$, стоящей в правой части уравнения

$$y'=f(x, y)$$

было возможно проще, ибо эта часть работы пояснений не требует.

Как первый пример возьмем уравнение

$$y'=y$$

и начальное условие: при $x=0$ должно быть $y=1$, и составим таблицу значений y для x через 0.1.

Эта таблица, если применять методу Эйлера, будет иметь вид таблицы 57.

Процесс составления табл. 57 ясен из формулы

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

Примем полученные значения за исходное приближение, т. е. полагая

Таблица 57

n	x	$y = y'$	hy'
0	0.0	1.0000	0.1000
1	0.1	1.1000	0.1100
2	0.2	1.2100	0.1210
3	0.3	1.3310	0.1331
4	0.4	1.4641	0 1464
5	0.5	1.6105	0.1611
6	0.6	1.7716	0.1772
7	0.7	1.9488	0.1949
8	0.8	2.1437	0.2144
9	0.9	2.3581	0.2358
10	1.0	2.5939	

$$y' = F_1(x) = y$$

вычислим следующее приближение:

$$F_2(x) = \int_0^x F_1(x)\,dx + 1$$

причем значения функции $F_1(x)$ будем брать из предыдущей таблицы.

Вычисление расположится следующим образом (табл. 58).

Сличая величину $F_1(x)$ и $F_2(x)$, видим, что равенство

$$F_2(x) = F_1(x)$$

еще не достигнуто в пределах точности вычисления, поэтому, приняв $y = F_2(x)$, а значит и $y' = F_2(x)$, составляем выражение

$$F_3(x) = \int_0^x F_2(x)\,dx + 1$$

и продолжаем этот процесс, пока два последовательных приближения не будут совпадать в пределах точности вычисления.

Полученные результаты приведены в табл. 59.

Так как решение нашего уравнения есть

$$y = e^x$$

то в последнем столбце таблицы приведены и эти значения, чтобы иметь сличение приближенных результатов с точными.

Сличая $F_5(x)$ и $F_6(x)$, видим, что в пределах точности вычисления можно считать, что предельная функция достигнута, и, действительно, $F_6(x)$ отличается от истинной функции e^x не более, как в четвертом знаке после запятой, за который вообще при нашем вычислении ручаться нельзя.

Таблица 58

		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
n	x	$y'=y=$ $=F_1(x)$	Суммы (I) попарно	Суммы (II) сверху	$T_n=$ $=(\mathrm{III})\cdot\frac{1}{2}h$	$h\Delta y'$	$h\Delta^2 y'$	P_n	$F_2(x)=$ (IV) + + (VII)
0	0.0	1.0000		0.0000	0.0000	0.0100	0.0010	—0.0000	1.0000
			2.1000						
1	0.1	1.1000		2.1000	0.1050	0.0110	0.0011	—0.0001	1.1049
			2.3100						
2	0.2	1.2100		4.4100	0.2205	0.0121	0.0012	—0.0002	1.2203
			2.5410						
3	0.3	1.3310		6.9510	0.3476	0.0133	0.0013	—0.0003	1.3473
			2.7951						
4	0.4	1.4641		9.7461	0.4873	0.0146	0.0015	—0.0004	1.4869
			3.0746						
5	0.5	1.6105		12.8207	0.6410	0.0161	0.0016	—0.0005	1.6405
			3.3821						
6	0.6	1.7716		16.2028	0.8101	0.0177	0.0018	—0.0006	1.8095
			3.7204						
7	0.7	1.9488		19.9232	0.9962	0.0195	0.0019	—0.0008	1.9954
			4.0925						
8	0.8	2.1437		24.0157	1.2008	0.0214	0.0022	—0.0010	2.1998
			4.5018						
9	0.9	2.3581		28.5175	1.4259	0.0236		—0.0012	2.4247
			4.9520						
10	1.0	2.5939		33.4695	1.6735			—0.0014	2.6721

Таблица 59

n	x	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$	$F_5(x)$	$F_6(x)$	e^x
0	0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.00000
1	0.1	1.1000	1.1049	1.1051	1.1051	1.1051	1.1051	1.10517
2	0.2	1.2100	1.2203	1.2213	1.2214	1.2214	1.2214	1.22140
3	0.3	1.3310	1.3473	1.3496	1.3498	1.3499	1.3499	1.34986
4	0.4	1.4641	1.4870	1.4912	1.4918	1.4921	1.4918	1.49183
5	0.5	1.6105	1.6406	1.6475	1.6486	1.6488	1.6483	1.64872
6	0.6	1.7716	1.8096	1.8299	1.8219	1.8222	1.8222	1.82212
7	0.7	1.9488	1.9955	2.0099	2.0137	2.0138	2.0138	2.01375
8	0.8	2.1437	2.1999	2.2195	2.2249	2.2255	2.2256	2.22554
9	0.9	2.3581	2.4248	2.4501	2.4582	2.4594	2.4597	2.45960
10	1.0	2.5939	2.6711	2.7046	2.7158	2.7179	2.7183	2.71828

Этот пример показывает, что при избранной величине промежутка первое Эйлеровское приближение, если его принять за исходное для процесса Пикара, потребовало бы повторения интегрирования пять раз для получения той ограниченной степени точности, с которою наше вычисление производилось. Ясно, что было бы выгоднее или уменьшить промежуток h, или применить другой прием для получения более точного исходного приближения. Понятно, что по количеству работы уменьшение промежутка вдвое равносильно с вычислением по упрощенной схеме Рунге, т. е. для уравнения

$$y' = f(x, y)$$

по формулам

$$\alpha_n = f(x_n, y_n)$$

$$\xi_n = x_n + \frac{1}{2} h; \quad \eta_n = y_n + \frac{1}{2} \alpha_n h$$

$$\beta_n = f(\xi_n, \eta_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \beta_n h$$

ибо в обоих процессах потребуется вычисление одинакового числа частных значений функции $f(x, y)$, а обыкновенно это-то вычисление и требует наибольшей затраты работы.

Вычисление для нашего примера по предыдущим формулам исполнено в табл. 60.

Таблица 60

n	x	$y_n = y_{n-1} + h\beta_n$	$\alpha_n = f(x_n, y_n)$	$\frac{1}{2} h\alpha_n$	$\eta_n = y_n + \frac{1}{2} h\alpha_n$	$\beta_n = f(\xi_n, \eta_n)$	$h\beta_n$
0	0.0	1.0000	1.0000	0.0500	1.0500	1.0500	0.1050
1	0.1	1.1050	1.1050	0.0552	1.1602	1.1602	0.1160
2	0.2	1.2210	1.2210	0.0611	1.2821	1.2321	0.1282
3	0.3	1.3492	1.3492	0.0675	1.4167	1.4167	0.1417
4	0.4	1.4909	1.4909	0.0745	1.5654	1.5654	0.1565
5	0.5	1.6474	1.6474	0.0824	1.7293	1.7298	0.1730
6	0.6	1.8204	1.8204	0.0910	1.9114	1.9114	0.1911
7	0.7	2.0115	2.0115	0.1006	2.1121	2.1121	0.2112
8	0.8	2.2227	2.2227	0.1111	2.3338	2.3338	0.2334
9	0.9	2.4561	2.4561	0.1238	2.5789	2.5789	0.2579
10	1.00	2.7140	2.7140				

По этим числам видно, что полученный результат по своей точности соответствует приблизительно $F_4(x)$ и, значит, потребовал бы, для получения окончательного, еще интегрирования два раза. Таким образом, исходя от первого Эйлеровского приближения, нам пришлось бы вычислить $6n$ значений функции $f(x, y)$, здесь же их всего надо $4n$.

Обращаясь теперь к методе Адамса, получим табл. 61.

Таблица 61

n	x	y	Δy	$\eta = hy'$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$
0	0.0	1.0000		0.1000		
			0.1051		0.0105	
1	0.1	1.1051		0.1105		0.0011
			0.1160		116	
2	0.2	1.2211		0.1221		13
			0.1284		129	
3	0.3	1.3495		0.1350		13
			0.1420		142	
4	0.4	1.4915		0.1492		14
			0.1569		156	
5	0.5	1.6484		0.1648		18
			0.1732		174	
6	0.6	1.8216		0.1822		17
			0.1916		191	
7	0.7	2.0132		0.2013		21
			0.2114		212	
8	0.8	2.2246		0.2225		23
			0.2350		235	
9	0.9	2.4596		0.2460		
			0.2587			
10	1.0	2.7183				

Кроме того, для начала по схеме § 94 имеем в дополнение к табл. 61 еще табл. 62.

При сличении с табл. 59 видно, что приближение, получаемое по методе Штёрмера, есть окончательное, о чем можно было заключить и a priori по величине вторых разностей, ибо ясно, что член $\frac{3}{8}\Delta^2\eta_n$ не превышает $\frac{1}{2}$ единицы четвертого знака и, значит, не оказывает влияния на результат. Таким образом, здесь потребовалось всего вычислить n значений функции $f(x, y)$, т. е. приблизительно в 4—6 раз меньше работы, нежели по предыдущим способам. В этом и состоит главное достоинство методы Адамса.

$$\begin{aligned}
\Delta y_0 &= 0.1000 + 0.0050 - \\
&- 0.0001 = 0.1049 \\
\Delta y_1 &= 0.1100 + 0,0050 + \\
&+ 0.0008 = 9.1158 \\
\Delta y_0 &= 0.1000 + 0.0052 - \\
&- 0.0001 = 0.1051 \\
\Delta y_1 &= 0.1000 + 0.0052 + \\
&+ 0.0008 = 0.1160
\end{aligned} \qquad \text{(к табл. 62)}$$

Таблица 62

n	y	Δy	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$
0	1.0000		0.1000		
		0.1000		0.0100	
1	1.1000		0.1100		
		0.1100			
2	1.2100				
0	1.0000		0.1000		
		0.1049		0.0105	
1	1.1049		0.1105		0.0011
		0.1158		0.0116	
2	1.2207		0.1221		
0	1.0000				
		0.1051			
1	1.1051				
		0.1160			
2	1.2211				

§ **100.** Чтобы пояснить еще методы Рунге и Адамса, возьмем пример, приводимый в сочинении аббата Moigno „Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral", составленном по лекциям Коши.

Этот пример следующий:

$$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

начальное условие: при $x = 0$ должно быть $y = 0$, требуется составить таблицу значений функции y от $x = 0$ до $x = 1$.

По методе Коши в указанном сочинении составлена табл. 63 значений, между которыми заключается величина y.

В рассматриваемом промежутке имеет место двойное неравенство

$$f(x) < y < F(x)$$

Как видно, пределы еще весьма широкие.

Для этого уравнения, при $x = 0$, как раз имеет место то невыгодное обстоятельство, на которое обращал внимание еще Эйлер — производная y обращается в нуль, производные высших порядков обращаются в бесконечность,

Таблица 63

x	$f(x)$	$F(x)$
0.0	0.00000	0.00000
0.1	0.02108	0.04143
0.2	0.07413	0.17368
0.3	0.15127	0.20935
0.4	0.14297	0.32551
0.5	0.36624	0.46041
0.6	0.50089	0.61275
0.7	0.65225	0.78176
0.8	0.80951	0.96667
0.9	0.99175	0.16688
1.00	1.18879	1.37687

поэтому для значений, близких к $x=0$, изложенные выше методы неприменимы, и проще всего разложить y в ряд по степеням переменной x (эти степени не будут целыми) и, вычислив по этому ряду значение y для какого-либо значения x, отличного от нуля, для получения дальнейших значений, применять изложенные выше способы. Чтобы проще выполнять это разложение, положим сперва $x=t^4$, тогда будет

$$\frac{dy}{dt}=4t^5+4t^3\sqrt{y}$$

Делая затем

$$y=t^6\left(\frac{2}{3}+\eta\right)$$

и обозначая производную по t штрихом, имеем

$$t\eta'+6\eta=4t\sqrt{\frac{2}{3}+\eta}$$

Положив

$$\eta=\alpha t+\beta t^2+\gamma t^3+\delta t^4+\ldots$$

имеем

$$t\eta'+6\eta=t\,[7\alpha+8\beta t+9\gamma t^2+10\delta t^3+\ldots]$$

для определения коэффициентов α, β, γ, $\delta, \ldots$ получим

$$[7\alpha+8\beta t+9\gamma t^2+10\delta t^3+\ldots]^2=16\left[\frac{2}{3}+\alpha t+\beta t^2+\gamma t^3+\ldots\right]$$

Откуда следуют уравнения

$$49\alpha^2=\frac{32}{3}$$

$$\begin{gathered}112\alpha\beta=16\alpha\\ 64\beta^2+126\alpha\beta=16\beta\\ 144\beta\gamma+140\alpha\delta=16\gamma\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered}$$

значит, будет

$$\alpha=\frac{4}{7}\sqrt{\frac{2}{3}};\quad \beta=\frac{1}{7};\quad \gamma=\frac{1}{49}\sqrt{\frac{2}{3}};\quad \delta=-\frac{2}{1715}\cdots$$

Таким образом получим

$$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{7}\sqrt{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{4}}+\frac{1}{7}x^2+\frac{1}{49}\sqrt{\frac{2}{3}}x^{\frac{9}{4}}-\frac{2}{1715}x^{\frac{5}{2}}+\ldots$$

При малых значениях x (около 0.1), полученных членов достаточно, чтобы найти y с точностью до пятого десятичного знака, в чем убедимся, вычисляя y' как по предложенному уравнению

$$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

так и по ряду

$$y' = x^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{3}{4}} + \frac{2}{7} x + \frac{9}{196}\sqrt{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{5}{4}} - \frac{1}{343} x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

что видно из табл. 64.

Следовательно, если производить вычисление на пять знаков, то можно принять, что y должно удовлетворять уравнению

$$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

и что при $x = 0.1$ должно быть $y = 0.030898$, соответственно чему $y' = 0.49201$.

Таблица 64

x	y	$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y}$	y' по ряду
0	0	0	0
0.1	0.030898	0.49201	0.49202
0.2	0.093677	0.75328	0.75331
0.3	0.18020	0.97222	0.97228
0.4	0.28738	1.16857	1.16860
0.5	0.41337	1.35004	1.35004
0.6	0.55706	1.52096	1.52108
0.7	0.71738	1.68364	1.68386
0.8	0.89359	1.83973	1.83991
0.9	1.08519	1.99040	1.99067
1.00	1.29158	2.13648	2.13678

Для значений x меньших 0.1 величина y определяется приведенным выше рядом, для значений же больших 0.1 мы применим методу Рунге и методу Адамса, чтобы иметь наглядное сравнение между этими методами.

Для применения методы Рунге с тем добавлением к ней, которое указано в § 92, подразделяем промежуток между $x = 0.1$ и $x = 1.0$ на два участка: от $x = 0.1$ до $x = 0.3$ и от $x = 0.3$ до $x = 1$.

На первом участке берем $h = \frac{1}{40} = 0.025$, на втором $h = 0.05$, тогда вычисление расположится, как показывает табл. 65 (на отдельном листе).

Для проверки принимаем найденные таким образом величины y за первое приближение $F_1(x)$, составляем по ним функцию

$$y' = \varphi(x) = \sqrt{x} + \sqrt{y} = f[x, F_1(x)]$$

и по формуле

$$F_2(x) = \int_a^x f[x, F_1(x)] \cdot dx + b$$

IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
$\frac{1}{2}h\gamma$	$z=y+\frac{1}{2}h\gamma$	$\sqrt{z}$	$\delta=f(\xi, z)$	$u=y+h\gamma$	$\sqrt{u}$	$\sqrt{x}$	$\varepsilon=f(x, u)$	$\frac{1}{2}(\beta+\delta)$	$\frac{1}{2}(\beta+\varepsilon)$	$\sigma=\gamma-\frac{1}{2}(\gamma+\varepsilon)$	$\frac{1}{6}\zeta$
				0.03090		0.31623					
0.00660	0.03750	0.19365	0.52906					0.51053	0.52778	0.00011	0.00002
				0.04410	0.21000	0.35355	0.56355				
0.00746	0.05156	0.22707	0.59788					0.58072	0.59690	0.00005	0.00001
				0.05902	0.24294	0.38730	0.63024				
0.00827	0.06729	0.25940	0.66251					0.64638	0.66172	0.00001	0.00001
				0.07556	0.27438	0.41833	0.69321				
0.00904	0.03460	0.29086	0.72387					0.70354	0.72321	0.00000	0.00000
				0.09364	0.30600	0.44721	0.75321				
0.00977	0.10341	0.32157	0.78255					0.76788	0.78199	0.00000	0.00000
				0.11318	0.33642	0.47434	0.81046				
0.01048	0.12367	0.35157	0.83901					0.82488	0.83351	0.00000	0.00000
				0.13415	0.36627	0.50000	0.86627				
0.01116	0.14531	0.38119	0.89354					0.87990	0.89311	0.00000	0.00000
				0.15647	0.39556	0.52440	0.91996				
0.01183	0.16830	0.41024	0.94643					0.93320	0.94605	0.00000	0.00000
				9.18013	0.42441	0.54772	0.97213				
				0.18012		0.54772					
0.02555	0.20517	0.45350	1.02356					0.99786	1.02230	0.00008	—0.00001
				0.23122	0.48085	0.59161	1.07246				
0.02801	0.25916	0.50918	1.12155					1.09702	1.12046	—0.00010	—0.00002
				0.28727	0.53397	0.63246	1.16343				
0.03036	0.31763	0.56358	1.21550					1.19196	1.21453	—0.00009	—0.00001
				0.34799	0.58990	0.67082	1.26072				
0.03263	0.38063	0.61695	1.30613					1.28344	1.30534	—0.00009	—0.00001
				0.41326	0.64285	0.70711	1.34996				
0.03483	0.44809	0.66939	1.39396					1.37196	1.39325	—0.00009	—0.00001
				0.48292	0.69492	0.74162	1.43654				
0.03696	0.51983	0.72102	1.47931					1.45792	1.47868	—0.00009	—0.00001
				0.55684	0.74621	0.77460	1.52081				
0.03905	0.59590	0.77195	1.56252					1.54167	1.56195	—0.00011	—0.00002
				0.63495	0.79684	0.80623	1.60307				
0.04108	0.67602	0.82220	1.64378					1.62342	1.64323	—0.00010	—0.00002
				0.71710	0.84682	0.83666	1.68348				
0.04307	0.76017	0.87187	1.72334					1.70341	1.72287	—0.00009	—0.00001
				0.80324	0.89623	0.86603	1.76226				
0.04502	0.84826	0.92101	1.80135					1.78180	1.80091	—0.00008	—0.00001
				0.89328	0.94518	0.89443	1.83956				
0.04693	0.94021	0.96965	1.87795					1.85876	1.87753	—0.00007	—0.00001
				0.98714	0.99355	0.92195	1.91550				
0.04882	1.03597	1.01784	1.95325					1.93438	1.95285	—0.00007	—0.00001
				1.08479	1.04153	0.94868	1.99021				
0.05067	1.13546	1.06558	2.02735					2.00879	2.02699	—0.00007	—0.00001
				1.18613	1.08909	0.97468	2.06377				
0.05250	1.23864	1.11294	2.10036					2.03207	2.10002	—0.00006	—0.00001
				1.29114	1.13628	1.00000	2.13628				

при $a = 0.1$, $b = 0.030898$ находим второе приближение, как это показано в табл. 66.

Для сравнения, произведя то же вычисление по методе Адамса, получим табл. 67.

Сличение полученных результатов показывает, что метода Адамса, при затрате работы в пять или шесть раз меньшей, даст результат, одинаковый с предыдущим.

§ **101.** Дадим еще пример интегрирования системы уравнений, причем приведем его со всею подробностью вычислений, чтобы дать образец их расположения и производства, ибо, по словам Ньютона: „exempla non minus doceunt quam precaepta“.

Таблица 66

2-е приближение

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
x	Неиспр. значение y	$y' = \beta$	Сумма (III) попарно	Суммы (IV) сверху S	$T = \frac{1}{2} hS$	$y_0 + T$	$\Delta\beta$	Поправки $\frac{1}{12}h(\Delta\beta_0 - \Delta\beta_1)$	Исправ. y
0.100	0.03090	0.49201			0.00000	0.03090			0.03090
			1.02050				0.03648		
	0.03723	0.52849		1.02050	0.00638	0.03728		0.00000	0.03728
			1.09205				0.03506		
0.125	0.04410	0.56355		2.11259	0.01320	0.04410		0.00000	0.04410
			1.16099				0.03389		
	0.05136	0.59744		3.27358	0.02046	0.05136		0.00000	0.05136
			1.22768				0.03280		
0.150	0.05902	0.63024		4.50126	0.02813	0.05903		0.00000	0.05903
			1.29239				0.03141		
	0.06710	0.66215		5.79365	0.03621	0.06711		0.00001	0.06712
			1.35536				0.03106		
0.175	0.07556	0.69321		7.14901	0.04468	0.07558		0.00001	0.07559
			1.41678				0.03036		
	0.08442	0.72357		8.56579	0.05354	0.08444		0.00001	0.08445
			1.47678				0.02964		
0.200	0.09364	0.75321		10.04257	0.06276	0.09366		0.00001	0.09367
			1.53549				0.02927		
	0.10324	0.78228		11.57806	0.07236	0.10326		0.00001	0.10327
			1.59304				0.02848		
0.225	0.11319	0.81076		13.17110	0.08232	0.11322		0.00001	0.11323
			1.64343				0.02801		
	0.12350	0.83877		14.82053	0.09263	0.12353		0.00001	0.12354
			1.70504				0.02750		
0.250	0.13415	0.86627		16.52557	0.10328	0.13418		0.00001	0.13419
			1.75961				0.02707		
	0.14515	0.89334		18.28518	0.11428	0.14518		0.00001	0.14519
			1.81330				0.02662		
0.275	0.15647	0.91996		20.09848	0.12561	0.15651		0.00001	0.15652
			1.86619				0.02627		
	0.16813	0.94623		21.46467	0.13728	0.16818		0.00001	0.16819
			1.91836				0.02590		
0.300	0.18012	0.97213		23.88303	0.14927	0.18018		0.00001	0.18019

Таблица 66 *(продолжение)*

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
x	Неиспр. значение y	$y' = \beta$	Сумма (III) попарно	Суммы (IV) сверху S	$T = \frac{1}{2}hS$	$y_0 + T$	$\Delta\beta$	Поправки $\frac{1}{12}h(\Delta\beta_0 - \Delta\beta_1)$	Исправ. y
0.300	0.18012	0.97213				0.18018			0.18019
			1.99507				0.05031		
	0.20507	1.02294		1.99507	0.02494	0.20512		0.00000	0.20512
			2.09543				0.04955		
0.350	0.23125	1.07249		4.09050	0.05113	0.23121		0.00000	0.23134
			2.19346				0.04848		
	0.25867	1.12097		6.28396	0.01855	0.25873		0.00000	0.25873
			2.28980				0.04746		
0.400	0.28727	1.16843		8.57336	0.10717	0.28735		0.00001	0.28738
			2.38344				0.04658		
	0.31707	1.21501		10.95680	0.13696	0.31714		0.00001	0.31715
			2.47574				0.04572		
0.450	0.34800	1.26073		13.43254	0.16791	0.34809		0.00001	0.34810
			2.56643				0.04497		
	0.38008	1.30570		15.99897	6.19999	0.38017		0.00001	0.38018
			2.65567				0.04426		
0.500	0.41326	1.34995		18.65463	0.23318	0.41336		0.00001	0.41337
			2.74352				0.04360		
	0.44756	1.39356		21.39815	0.26748	0.44766		0.00001	0.44767
			2.83010				0.04318		
0.550	0.48292	1.43654		24.22825	0.30285	0.48303		0.00002	0.48315
			2.91550				0.04238		
	0.51937	1.47896		27.14375	0.33930	0.51948		0.00002	0.51950
			2.99978				0.04186		
0.600	0.55685	1.52082		30.14353	0.37679	0.55697		0.00002	0.55699
			3.08302				0.04138		
	0.59539	1.56220		33.22655	0.41533	0.59451		0.00002	0.59553
			3.16526				0.04086		
0.650	0.63494	1.60306		36.39181	0.45490	0.63508		0.00002	0.63210
			3.24654				0.04044		
	0.67551	1.64348		39.63834	0.49548	0.67566		0.00002	0.67568
			3.32696				0.04090		
0.700	0.71710	1.68348		42.96530	0.53707	0.71725		0.00002	0.71727
			3.40655				0.03959		
	0.75969	1.72307		46.37185	0.57965	0.75983		0.00002	0.75985
			3.48533				0.03919		
0.750	0.80324	1.76226		49.85718	0.62321	0.80339		0.00002	0.80341
			3.56335				0.03883		
	0.84778	1.80109		53.42053	0.66776	0.84794		0.00002	0.84796
			3.64065				0.03847		
0.800	0.89328	1.83956		57.06118	0.71326	0.89344		0.00003	0.89347
			3.71727				0.03815		
	0.93975	1.87771		60.77845	0.75973	0.93991		0.00003	0.93994
			3.79321				0.03779		
0.850	0.98715	1.91550		64.57166	0.80715	0.98733		0.00003	0.98736
			3.86851				0.03751		
	1.03551	1.95301		68.44017	0.85550	1.03568		0.00003	1.03571
			3.94322				0.03720		
0.900	1.08479	1.99021		72.38339	0.90479	1.08497		0.00003	1.08500
			4.01735				0.03693		
	1.13501	2.02714		76.40074	0.95501	1.13519		0.00003	1.13522
			4.09094				0.03663		
0.950	1.18614	2.06377		80.49165	1.00615	1.18633		0.00003	1.18636
			4.16393				0.03639		
	1.23890	2.10016		84.65558	1.05819	1.23837		0.00003	1.26840
			4.23644				0.03612		
1.000	1.29114	1.13628		83.89202	1.11125	1.29133		0.00003	1.29136

Из всех движений свободного тела, после тел небесных, движение артиллерийских снарядов обладает наибольшею мощностью. Может быть, это является одною из тех причин, которая привлекала к исследованию этого вопроса математиков, не бывших ни военными, ни артиллеристами. Помимо Эйлера, всеобъемлющий гений которого творил во всех областях, доступных приложениям математики, достаточно упомянуть Ив. Бернулли, Лагранжа, Пуассона, Якоби и М. В. Остроградского, ограничиваясь наиболее знаменитыми именами из тех, кем даны общие способы исследования указанного явления.

Таблица 67

Метода Адамса

I	II	III	IV	V	VI	I	II	III
x	y	$\Delta y_n=\eta_n+\frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1}+\frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2}$	$\eta=y'h$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$y'=\sqrt{x}+\sqrt{y}$
0.100	0.03090		0.00615			0.31623		
		0.00638		0.00045				
	0.03728		0.00560		—0.00001	0.33541		
		0.00682		0.00044				
0.125	0.04410		0.00704		—0.00001	0.35355		
		0.00726		0.00043				
	0.05136		0.00747		—0.00002	0.37081	0.22661	0.59742
		0.00768		0.00041				
0.150	0.05904		0.00788		—0.00001	0.38730	0.24298	0.63028
		0.00803		0.00040				
	0.06712		0.00828		—0.00002	0.40311	0.25908	0.66219
		0.00848		0.00033				
0.175	0.07560		0.00866		—0.00000	9.41833	0.27495	0.69310
		0.00884		0.00038				
	0.08444		0.00904		—0.00000	0.43301	0.29059	0.72360
		0.00923		0.00038				
0.200	0.09367		0.00942		—0.00002	0.44721	0.30605	0.75326
		0.00961		0.00036				
	0.10328		0.00978		—0.00000	0.46098	0.32138	0.78236
		0.00995		0.00036				
0.225	0.11323		0.01014		—0.00001	0.47434	0.33650	0.81084
		0.01032		0.00035				
	0.12355		0.01049		—0.00001	0.48734	0.35150	0.83884
		0.01066		0.00034				
0.250	0.13421		0.01083		—0.00000	0.50000	0.36634	0.86634
		0.01099		0.00034				
	0.14520		0.01117		—0.00001	0.51235	0.33105	0.89340
		0.01134		0.00033				
0.275	0.15654		0.01150		—0.00000	0.52440	6.39565	0.92005
		0.01166		0.00033				
	0.16820		0.01183		—0.00001	0.53619	0.41012	0.94631
		0.01199		0.00032				
0.300	0.18019		0.01215			0.54772	0.42449	0.97221

Продолжение табл. 67 см. на след. странице.

I	II	III	IV	V	VI	I	II	III
x	y	$\Delta y = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2}$	$\eta = y'h$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
0.250	0.13421		0.02166					
				0.00134				
0.275	0.15634		0.02300		—0.00004			
				0.00130				
0.300	0.18019		0.02430		—0.00003	0.54772	0.42449	0.97221
		0.02493		0.00127				
	0.20512		0.02557		—0.00003	0.57009	0.45290	1.02299
		0.02619		0.00124				
0.350	0.23131		0.02681		—0.00002	0.59161	0.48095	1.07256
		0.02742		0.00122				
	0.25873		0.02803		—0.00004	0.61237	0.50865	1.12102
		0.02863		0.00118				
0.400	0.28736		0.02921		—0.00001	0.63246	0.53606	1.16352
		0.02979		0.00117				
	0.31715		0.03038		—0.00003	0.65192	0.56316	1.21508
		0.03096		0.00114				
0.450	0.34811		0.03152		—0.00002	0.67082	0.59001	1.26083
		0.03207		0.00112				
	0.38018		0.03264		—0.00001	0.68920	0.61659	1.30579
		0.03319		0.00111				
0.500	0.41337		0.03375		—0.00002	0.70711	0.64294	1.35005
		0.03430		0.00109				
	0.44767		0.03484		—0.00001	0.72457	0.66908	1.39365
		0.03538		0.00108				
0.550	0.48305		0.03592		—0.00002	0.74162	0.69509	1.43671
		0.03646		0.00106				
	0.51951		0.03698		—0.00002	0.75829	0.72077	1.47906
		0.03749		0.00104				
0.600	0.55700		0.03802		—0.00000	0.77460	0.74632	1.52092
		0.03851		0.00104				
	0.59551		0.03906		—0.00002	0.79057	0.77169	1.56226
		0.03958		0.00102				
0.650	0.63509		0.04008		—0.00001	0.80623	0.79057	1.60315
		0.04059		0.00101				
	0.67568		0.04109		—0.00001	0.82158	0.82199	1.64357
		0.04159		0.00100				
0.700	0.71727		0.04209		—0.00001	0.83666	0.84692	1.68358
		0.04258		0.00099				
	0.75985		0.04308		—0.00001	0.85147	0.87169	1.72316
		0.04357		0.00098				
0.750	0.80342		0.04406		—0.00001	0.86603	0.89634	1.76237
		0.04454		0.00097				
	0.84796		0.04503		—0.00001	0.88034	0.92084	1.80116
		0.04551		0.00096				
0.800	0.89347		0.04599		—0.00000	0.89443	0.94523	1.83966
		0.04647		0.00096				
	0.93994		0.04695		—0.00002	0.90830	0.96950	1.87780
		0.04743		0.00094				
0.850	0.98737		0.04789		—0.00000	0.92195	0.99366	1.91561
		0.04835		0.00094				
	1.03572		0.04883		—0.00001	0.93541	1.01770	1.95311
		0.04930		0.00093				
0.900	1.08502		0.04976		—0.00001	0.94868	1.04164	1.99032
		0.05022		0.00092				
	1.13524		0.05068		—0.00000	0.96177	1.06548	2.02725
		0.05113		0.00092				
0.950	1.18637		0.05160		—0.00002	0.97468	1.08920	2.06388
		0.05206		0.00090				
	1.23843		0.05250			0.98742	1.11285	2.10027
		0.05294						
1.000	1.29137					1.00000	1.13638	2.13638

Математики-артиллеристы развили эти общие методы, произвели множество опытов для установления закона сопротивления воздуха, составили вспомогательные таблицы и поставили дело вычисления траектории снаряда в соответствие с требованиями практики.

Минувшая мировая война показала, что в боевых условиях могут быть используемы в более полной мере, нежели предполагалось ранее, мощность и меткость современных орудий, и явилась надобность вычислять траектории для таких углов бросания и таких начальных скоростей, для которых применение существующих таблиц требует ряда допущений, оценить влияние которых на точность окончательного результата a priori не представляется возможным.

Возник вопрос о проверке a posteriori этих упрощенных способов вычисления траекторий, сличая результаты, полученные при делаемых для пользования таблицами допущениях, с результатами, полученными помощью вычислений, этих допущений не заключающих и в этом смысле являющихся точными.

Такое точное вычисление траекторий может быть произведено проще всего, если воспользоваться методою Адамса — Штёрмера для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, и является хорошим примером как применения этой методы, так и некоторых вычислительных приемов, приложимых ко многим вопросам инженерного дела.

§ **102.** Примем точку вылета за начало координат, плоскость стрельбы за плоскость xoy, направив ось y вертикально вверх, и примем за переменную независимую угол наклонения траектории, считаемый от оси oy. Основные уравнения баллистики для „плоской“ траектории суть:

$$\frac{P}{g}\frac{du}{dt}=-\rho\sin\varphi \tag{1}$$

$$\frac{P}{g}\frac{v^2}{r}=P\sin\varphi \tag{2}$$

$$v=\frac{rd\varphi}{dt} \tag{3}$$

$$dx=r\sin\varphi\, d\varphi \tag{4}$$

$$dy=r\cos\varphi\, d\varphi \tag{5}$$

где P есть вес снаряда, g — ускорение силы тяжести, v — скорость в момент времени t, r — радиус кривизны траектории в точке (x, y), ρ — сопротивление воздуха, $u=v\sin\varphi$ — горизонтальная проекция скорости.

Приняв угол φ за переменную независимую и обозначая производные штрихами, мы имеем

$$u'=-\frac{\rho}{P}\frac{u}{\sin\varphi} \tag{6}$$

$$x' = \frac{1}{g}\left(\frac{u}{\sin\varphi}\right)^2 \tag{7}$$

$$y' = \frac{1}{g}\left(\frac{u}{\sin\varphi}\right)^2 \operatorname{cotg}\varphi \tag{8}$$

$$t' = \frac{1}{g}\,\frac{u}{\sin\varphi}\operatorname{cosec}\varphi \tag{9}$$

Величина ρ выражается формулой

$$\rho = AK(v)\,v^2 f(y) \tag{10}$$

причем

$$A = \lambda\pi R^2$$

есть постоянная для данного снаряда величина, R — полукалибр, λ — коэффициент формы, $f(y)$ — относительная плотность воздуха; $K(v)$ и $f(y)$ даются таблицами, выдержка из которых приведена ниже.

Начальные условия таковы: при $\varphi = \varphi_0$ должно быть

$$\left(\frac{u}{\sin\varphi}\right)_0 = v_0;\ (x)_0 = 0;\ (y)_0 = 0;\ (t)_0 = 0 \tag{11}$$

Для упрощения последующих вычислений напишем ур-ние (6) так:

$$\frac{u'}{u} = -\frac{\rho}{P}\operatorname{cosec}\varphi$$

и, обозначая через

$$M = 0.43429$$

модуль обыкновенных логарифмов, положим

$$q = M \lg\frac{u_0}{u} = \lg_{10}\frac{u_0}{u} \tag{12}$$

тогда

$$q' = -M\frac{u'}{u}$$

и предыдущее уравнение будет

$$q' = \frac{M\rho}{P}\operatorname{cosec}\varphi \tag{6'}$$

Таким образом, система ур-ний (6)—(9) будет

$$q' = C\,K(v)\,v^2 f(y)\operatorname{cosec}\varphi \tag{13}$$

$$y' = \frac{1}{g}\,v^2 \operatorname{cotg}\varphi \tag{14}$$

$$x' = \frac{1}{g}\left(\frac{u}{\sin\varphi}\right)^2 \tag{15}$$

$$t' = \frac{1}{g}\,\frac{u}{\sin\varphi}\operatorname{cosec}\varphi \tag{16}$$

Эта система сама собою распадается на две: 1) ур-ния (13) и (14), содержащие переменную независимую φ и неизвестные функции y и v, причем

$$v = u \operatorname{cosec}\varphi$$

$$q = \lg\frac{u_0}{u}$$

так что

$$\lg u = \lg u_0 - q$$

и 2) ур-ния (15) и (16), которые интегрируются сразу в квадратурах после того, как u найдено.

Таким образом, по методе Адамса — Штёрмера, нам придется интегрировать систему (13) и (14), квадратуры же найдем по более простому приему.

Таблица 68

Значение $\lg K(v)$ (скорость v в метрах в секунду, сопротивление ρ — в килограммах)

v	$\lg K(v)$	v	$\lg K(v)$	v	$\lg K(v)$	v	$\lg K(v)$	v	$\lg K(v)$
1100	$\bar{2}.4843$	720	$\bar{2}.5605$	580	$\bar{2}.5889$	440	$\bar{2}.5955$	365	$\bar{2}.5169$
1050	$\bar{2}.4952$	710	$\bar{2}.5623$	570	$\bar{2}.5905$	430	$\bar{2}.5955$	360	$\bar{2}.4996$
1000	$\bar{2}.5062$	700	$\bar{2}.5642$	560	$\bar{2}.5919$	425	$\bar{2}.5955$	355	$\bar{2}.4806$
950	$\bar{2}.5169$	690	$\bar{2}.5661$	550	$\bar{2}.5930$	420	$\bar{2}.5937$	350	$\bar{2},4609$
900	$\bar{2}.5273$	680	$\bar{2}.5680$	540	$\bar{2}.5938$	415	$\bar{2},5900$	345	$\bar{2}.4410$
850	$\bar{2}.5372$	670	$\bar{2}.5700$	530	$\bar{2}.5944$	410	$\bar{2}.5353$	340	$\bar{2}.4210$
800	$\bar{2}.5465$	660	$\bar{2}.5720$	520	$\bar{2}.5849$	405	$\bar{2}.5802$	335	$\bar{2}.4010$
790	$\bar{2}.5482$	650	$\bar{2}.5740$	510	$\bar{2}.5953$	400	$\bar{2}.5749$	330	$\bar{2}.3810$
780	$\bar{2}.5499$	640	$\bar{2}.5761$	500	$\bar{2}.5955$	395	$\bar{2}.5696$	325	$\bar{2}.3610$
770	$\bar{2}.5516$	630	$\bar{2}.5782$	490	$\bar{2}.5955$	390	$\bar{2}.5643$	320	$\bar{2}.3410$
760	$\bar{2}.5\ 33$	620	$\bar{2}.5803$	480	$\bar{2}.5955$	385	$\bar{2}.5583$	315	$\bar{2}.3210$
750	$\bar{2}.5551$	610	$\bar{2}.5824$	470	$\bar{2}.5955$	330	$\bar{2}.5511$	310	$\bar{2}.3010$
740	$\bar{2}.5569$	600	$\bar{2}.5846$	460	$\bar{2}.5955$	375	$\bar{2}.5421$		
730	$\bar{2}.5587$	590	$\bar{2}.5869$	450	$\bar{2}.5955$	370	$\bar{2}.5306$		

§ **103.** Прежде чем приступить к этому интегрированию, приведем таблицы значений логарифмов функций $K(v)$ и $f(y)$ (табл. 68, стр. 401 и 69),

Таблица 69

Значение $\lg f(y)$ (y в километрах)

y	$\lg f(y)$	y	$\lg f(y)$	y	$\lg f(y)$	y	$\lg f(y)$	g	$\lg f(y)$
0	0.0000	5	$\bar{1}$.7551	10	$\bar{1}$.4771	15	$\bar{1}$.1430	20	$\bar{2}$.7993
1	$\bar{1}$.9533	6	$\bar{1}$.7024	11	$\bar{1}$.4150	16	$\bar{1}$.0719	21	$\bar{2}$.7324
2	$\bar{1}$.9053	7	$\bar{1}$.6484	12	$\bar{1}$.3502	17	$\bar{1}$.0000	22	$\bar{2}$.6744
3	$\bar{1}$.8561	8	$\bar{1}$.5933	13	$\bar{1}$.2833	18	$\bar{2}$.9294	23	$\bar{2}$.5964
4	$\bar{1}$.8062	9	$\bar{1}$.5366	14	$\bar{1}$.2148	19	$\bar{2}$.8633	24	$\bar{2}$.5[illegible]84

основываясь на данных „Внешней баллистики“ Забудского и труда В. М. Трофимова, сгладив в первой несколько неправильный ход разностей, чтобы облегчить контроль вычислений. Для этого сглаживания мы пользовались частью графической интерполяцией, составив чертеж в крупном масштабе, частью таблицами Круппа и таблицею Башфорта.

§ **104.** Для примера мы возьмем вычисление траектории английского 12-дюймового (304.8 мм) снаряда для пушек Армстронга, брошенного под углом возвышения 55° ($\varphi_0 = 55°$), с начальною скоростью $v_0 = 800$ м/сек. Мы примем, что снаряд — легкий (вес $P = 360$ кг) и с тупой головной частью ($\lambda = 1$), чтобы влияние сопротивления воздуха было возможно большее и все особенности вычисления обнаружились бы с большею ясностью.

Итак для нашего расчета имеем:

1) Данные:

$$P = 360;\ v_0 = 800;\ g = 9.81;\ R = 0.1524$$

2) Формулы:

$$\rho = \lambda\pi R^2 K(v)\, v^2 f(y)$$

$$v = u \operatorname{cosec} \varphi$$

$$q = \lg \frac{u_0}{u}$$

$$\omega = q'h = \frac{M\rho h}{P} \operatorname{cosec} \varphi = AK(v)\, v^2 f(y) \operatorname{cosec} \varphi,$$

где $A = \dfrac{\pi R^2 hM}{P}$;

$$\eta = hy' = \frac{h}{g} v^2 \operatorname{cotg} \varphi$$

$$\Delta q_n = \omega_n + \frac{1}{2}\Delta\omega_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\omega_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\omega_{n-3}$$

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3}$$

Табличный промежуток h берется настолько малым, что член

$$\frac{3}{8}\Delta^3\omega_{n-3}$$

не превосходит десяти единиц пятого знака $\lg u$, величина же

$$\frac{3}{8}\Delta^3\omega_{n-3}$$

не превосходит 1 м; точность при таком выборе получается более чем достаточная для практики.

Чтобы начать составление таблиц, мы применим способ последовательных приближений.

Имеем начальные значения

$$\varphi_0 = 55^\circ 00'; \; v_0 = 800; \; R = 0.1524$$
$$\lg u_0 = \lg v_0 \sin\varphi_0 = 2.81645$$

Берем вначале

$$h = 0^\circ 15' = 0.0043633$$

тогда имеем для постоянных

$$A = \frac{\pi R^2 h}{P} M \qquad B = \frac{h}{g}$$

$$\begin{array}{rl} \lg\pi = 0.49715 & \lg h = \bar{3}.63982 \\ 2\lg R = \bar{2}.36596 & \operatorname{colg} g = \bar{1}.00833 \\ \hline \lg M = \bar{1}.63772 & \lg B = \bar{4}.64815 \\ \lg h = \bar{3}.63982 & \\ \operatorname{colg} P = \bar{3}.44370 & \\ \hline \lg A = \bar{7}.58435 & \end{array}$$

или, округляя,

$$\lg A = \bar{7}.5844; \quad \lg B = \bar{4}.6481$$

Затем заготовляем табл. 70 значений $\lg A \operatorname{cosec}\varphi$ и $\lg B \operatorname{cotg}\varphi$

Таблица 70

n	φ	$\lg\operatorname{cosec}\varphi$	$\lg\operatorname{cotg}\varphi$	$\lg A\operatorname{cosec}\varphi$	$\lg B\operatorname{cotg}\varphi$
0	55°00′	0.08664	$\bar{1}.8452$	$\bar{7}.6710$	$\bar{4}.4933$
1	55 15	0.08531	$\bar{1}.8412$	$\bar{7}.6697$	$\bar{4}.4893$
2	55 30	0.08401	$\bar{1}.8371$	$\bar{7}.6684$	$\bar{4}.4852$
3	55 45	0.08271	$\bar{1}.8331$	$\bar{7}.6671$	$\bar{4}.4812$

и вычисляем ω_0 и η_0:

$$\begin{aligned} \lg A \operatorname{cosec} \varphi_0 &= \bar{7}.6710 \\ \lg K(v_0) &= \bar{2}.5465 \\ 2 \lg v_0 &= 5.8062 \\ \hline \lg f(y) &= 0.0000 \\ \lg \omega_0 &= \bar{2}.0237 \\ \omega_0 &= 0.01056 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lg B \operatorname{cotg} \varphi_0 &= \bar{4}.4933 \\ 2 \lg v_0 &= 5.8062 \\ \hline \lg \eta_0 &= 2.2995 \\ \eta_0 &= 199.3 \end{aligned}$$

1-е приближение

$$\begin{aligned} \Delta q^0 &= \omega_0 \\ \Delta q_0 &= \omega_0 = 0.01056 \\ q_0 &= 0.00000 \\ \hline q_1 = q_0 + \Delta q_0 &= 0.01056 \\ \lg u_0 &= 2.81645 \\ \lg u_1 = \lg u_0 - q_1 &= 2.80589 \\ \lg \operatorname{cosec} \varphi_1 &= 0.08531 \\ \hline \lg v_1 &= 2.89120 \\ v_1 &= 778.4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Delta y_0 &= \eta_0 \\ \Delta y_0 &= \eta_0 = 199.3 \\ y_0 &= 0.0 \\ \hline y_1 = y_0 + \Delta y_0 &= 199.3 \end{aligned}$$

2-е приближение

Пользуясь значениями v_1 и y_1, вычисляем ω_1 и η_1, а именно:

$$\begin{aligned} \lg A \operatorname{cosec} \varphi_1 &= \bar{7}.6597 \\ \lg K(v_1) &= \bar{2}.5502 \\ 2 \lg v_1 &= 5.7824 \\ \lg f(y_1) &= \bar{1}.9906 \\ \hline \lg \omega_1 &= \bar{3}.9929 \\ \omega_1 &= 0.00984 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lg B \operatorname{cotg} \varphi_1 &= \bar{4}.4893 \\ 2 \lg v_1 &= 5.7824 \\ \hline \lg \eta_1 &= 2.2717 \\ \eta_1 &= 187.0 \end{aligned}$$

по этим значениям составляем разности

$$\Delta\omega_0 = \omega_1 - \omega_0 = -0.00072; \quad \Delta\eta_0 = \eta_1 - \eta_0 = -12.3$$

и берем затем

$$\Delta q_0 = \omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega_0 = 0.01056 - 0.00036 = 0.01020$$

$$\Delta q_1 = \omega_1 + \frac{1}{2}\Delta\omega_0 = 0.00984 - 0.00036 = 0.00948$$

$$\Delta y_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 = 199.3 - 6.2 = 193.1$$

$$\Delta y_1 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega_0 = 187.0 - 6.2 = 180.8$$

после чего имеем

$$q_1 = q_0 + \Delta q_0 = 0.01020$$

$$\lg u_1 = \lg u_0 - q_1 = 2.80625; \ \lg v_1 = 2.89156; \ v_1 = 779.0$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 193.1$$

Значения

$$v_1 = 779.0 \text{ и } y_1 = 193.1$$

представляют *второе* приближение для v_1 и y_1.

Затем имеем

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 193.1 + 180.8 = 373.9$$

$$q_2 = q_1 + \Delta q_1 = 0.01020 + 0.00948 = 0.01968$$

$$\lg y_2 = \lg y_0 - q_2 = 2.79677; \ \lg v_2 = 2.88078; \ v_2 = 760.0$$

Полученные значения

$$v_1 = 779.0 \text{ и } y_1 = 193.1$$

представляют второе приближение для v_1 и y_1, значения

$$v_2 = 760.0 \text{ и } y_2 = 373.9$$

составляют первое приближение для v_2 и y_2.

3-е приближение

По полученным значениям v_1 и y_1 перевычисляем ω_1 и η_1, и по значениям v_2 и y_2 вычисляем вновь ω_2 и η_2:

$$\begin{array}{r}
\lg A \operatorname{cosec} \varphi_1 = \bar{1}.6697 \\
\lg K(v_1) = \bar{2}.5502 \\
2\lg v_1 = 5.7831 \\
\lg f(y_1) = \bar{1}.9910 \\
\hline
\lg \omega_1 = \bar{3}.9940 \\
\omega_1 = 0.00986
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\lg B \operatorname{cotg} \varphi_1 = \bar{4}.4893 \\
2\lg v_1 = 5.7831 \\
\hline
\lg \eta_1 = 2.2724 \\
\eta_1 = 187.2
\end{array}$$

$$\lg A \operatorname{cosec} \varphi_2 = \bar{7}.6684 \qquad \lg B \operatorname{cotg} \varphi_2 = \bar{4}.4852$$
$$\lg K(v_2) = \bar{2}.5533 \qquad 2 \lg v_2 = 5.7616$$
$$2 \lg v_2 = 5.7616 \qquad \lg \eta_2 = 2.2468$$
$$\lg f(y_2) = \bar{1}.9826 \qquad \eta_2 = 176.5$$
$$\lg \omega_2 = \bar{3}.9659$$
$$\omega_2 = 0.00925$$

Таким образом получается табл. 71.

Таблица 71

n	ω	$\Delta\omega$	$\Delta^2\omega$	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$
0	0.01056			199.3		
		—70			—12.1	
1	0.00936		9	187.2		1.4
		—61			—10.7	
2	0.00925			176.5		

Для вычисления исправленных значений Δq_0 и Δy_0 служат формулы

$$\Delta q_0 = \omega_0 + \frac{1}{2} \Delta\omega_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 \omega_0$$
$$\Delta y_0 = \eta_0 + \frac{1}{2} \Delta\eta_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_0$$

следовательно, будет

$$\Delta q_0 = 1056 - \frac{1}{2} \cdot 70 - \frac{1}{12} \cdot 9 = 1020$$
$$\Delta y_0 = 199.3 - \frac{1}{2} \cdot 12.1 - \frac{1}{12} \cdot 1.4 = 193.1$$
$$q_1 = q_0 + \Delta q_0 = 0.01020$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 193.1$$
$$\lg u_1 = \lg u_0 - q_1 = 2.80625$$

Эти величины не отличаются практически от предыдущих, следовательно, в дальнейших поправках для них нет надобности.

Чтобы получить следующее приближение для v_2 и y_2, следует принять, что вторые разности постоянны, и применить формулы

$$\Delta q_1 = \omega_1 + \frac{1}{2} \Delta\omega_1 - \frac{1}{12} \Delta^2 \omega_0$$
$$\Delta y_1 = \eta_1 + \frac{1}{2} \Delta\eta_1 - \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_0$$

таким образом будет

$$\Delta q_1 = 986 - \frac{1}{2}\cdot 61 - \frac{1}{12}\cdot 9 = 955$$

$$\Delta y_1 = 187.2 - \frac{1}{2}\cdot 10.7 - \frac{1}{12}\cdot 1.4 = 181.7$$

$$q_2 = q_1 + \Delta q_1 = 0.01975$$

$$\lg u_2 = \lg u_0 - q_2 = 2.79670$$

$$\lg v_2 = 2.88071; \quad v_2 = 759.8$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 374.8$$

Затем, при том же предположении постоянства вторых разностей, имеем формулы

$$\Delta q_2 = \omega_2 + \frac{1}{2}\Delta\omega_1 + \frac{5}{12}\Delta^2\omega_0$$

$$\Delta y_2 = \eta_2 + \frac{1}{2}\Delta\eta_1 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_0$$

по которым получаем

$$\Delta q_2 = 925 - \frac{1}{2}\cdot 61 + \frac{5}{12}\cdot 9 = 898$$

$$\Delta y_2 = 176.5 - \frac{1}{2}\cdot 107 + \frac{5}{12}\cdot 1.4 = 171.7$$

$$q_3 = q_2 + \Delta q_2 = 0.01975 + 0\ 00898 = 0.02873$$

$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = 374.8 + 171.7 = 546.5$$

$$\lg u_3 = \lg u_0 - q_3 = 2.78772$$

$$\lg v_3 = 2.87043; \quad v_3 = 742.1$$

пользуясь найденными значениями v_3 и y_3, вычисляем ω_3 и η_3:

$$\begin{array}{rl}
\lg A \operatorname{cosec}\varphi_3 = & \bar{7}.6671 \\
\lg K(v_3) = & \bar{2}.5565 \\
2\lg v_3 = & 5.7410 \\
\lg f(z_3) = & \bar{1}.9745 \\
\hline
\lg\omega_3 = & \bar{3}.9391 \\
\omega_3 = & 0.00869
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\lg B \operatorname{cotg}\varphi_3 = & \bar{4}.4812 \\
2\lg v_3 = & 5.7420 \\
\hline
\lg\eta_3 = & 2.2222 \\
\eta_3 = & 166.8
\end{array}$$

таким образом, начальная часть таблиц для вычисления будет (табл. 72):

Примечание. Разности Δq и Δz вычислены так:

$$\Delta q_0 = 1056 - \frac{1}{2}\cdot 70 - \frac{1}{12}\cdot 9 = 1020 \qquad \Delta y_0 = 199.3 - \frac{1}{2}\cdot 12.1 - \frac{1}{12}\cdot 1.4 = 193.1$$

$$\Delta q_1 = 986 - \frac{1}{2}\cdot 61 - \frac{1}{12}\cdot 5 = 955 \qquad \Delta y_1 = 187.2 - \frac{1}{2}\cdot 10.7 - \frac{1}{12}\cdot 1.0 = 181.6$$

$$\Delta q_2 = 925 - \frac{1}{2}\cdot 61 + \frac{1}{12}\cdot 9 = 898 \qquad \Delta y_2 = 176.5 - \frac{1}{2}\cdot 10.7 + \frac{5}{12}\cdot 1.4 = 171.7$$

Таблица 72

n	ω	$\Delta\omega$	$\Delta^2\omega$	Δq	$\lg u$	$\lg v$	v	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	Δy	y
0	0.01056				2.81645	2.90309	800.0	199.3				0.0
		—70		1020					—12.1		193.1	
1	0.00986		9		2.80625	2.89156	779.0	187.2		1.4		193.1
		—61		955					—10.7		181.7	
2	0.00925		5		2.79570	2.88071	759.8	176.5		1.0		374.8
		—56		898					— 9.7		171.7	
3	0.00859				2.78772	2.87043	742.1	166.8				546.5

После этого вычисление может быть продолжено, как показано в таблицах ниже.

§ **105.** Выше объяснено, каким образом начинать вычисление, применяя методу последовательных приближений; можно достигнуть той же цели иначе, воспользовавшись разложением в ряды.

В применении к нашему примеру эту методу можно представить так: при скоростях v от 800 до 700 м/сек. величина K_v, со всею точностью таблиц Забудского, может быть выражена формулою

$$K(v) = 0.0352 + 0.000014\,v$$

и величина $f(y)$ — формулою

$$f(y) = 1 - 0.102y \text{ км} = 1 - 0.000102y \text{ м}$$

Мы будем писать эти формулы, для сокращения и общности, так:

$$K_v = a + bv; \quad f(y) = 1 - \alpha y$$

следовательно, будет

$$q' = C(a + bv)\,v^2\,(1 - \alpha y)\,\frac{1}{\sin\varphi}$$

где $C = \frac{A}{h}$

$$y' = \frac{1}{g}\,v^2 \operatorname{cotg}\varphi$$

откуда следует, взяв логарифмическую производную

$$\frac{q''}{q'} = \left(\frac{b}{a + bv} + \frac{2}{v}\right) v' - \frac{\alpha y'}{1 - \alpha y} - \operatorname{cotg}\varphi \tag{1}$$

$$\frac{y''}{y'} = \frac{2}{v}\,v' - \operatorname{tg}\varphi - \operatorname{cotg}\varphi$$

но

$$v = \frac{u}{\sin\varphi}$$

значит,

$$\frac{v'}{v}=\frac{u'}{u}-\operatorname{cotg}\varphi=-\frac{1}{M}q'-\operatorname{cotg}\varphi=-2.3026\,q'-\operatorname{cotg}\varphi$$

и, следовательно,

$$\frac{y''}{y'}=-\left[\frac{2}{M}q'+\operatorname{tg}\varphi+3\operatorname{cotg}\varphi\right]=$$

$$=-[4.605q'+\operatorname{tg}\varphi+3\operatorname{cotg}\varphi] \qquad (2)$$

Взяв величину h настолько малой, чтобы можно было принимать с требуемой степенью точности

$$q_1=q_0+q_0'h+\frac{1}{2}q_0''h^2$$
$$y_1=y_0+y_0'h+\frac{1}{2}y_0''h^2$$

и

$$q_2=q_1+q_1'h+\frac{1}{2}q_1''h^2$$
$$y_2=y_1+y_1'h+\frac{1}{2}y_1''h^2$$

располагаем это вычисление так, как это показано в табл. 73.

§ 106. Приведем некоторые необходимые пояснения к табл., в которых показано вычисление траектории.

1) После того как по приведенным в §§ 104 и 105 способам (следует для контроля применять оба) заполнены первые четыре строки табл. 74 ($n=0$, 1, 2, 3), дальнейшее вычисление ведется как объяснено в § 103 и как показывает схема.

2) Это вычисление сейчас же обнаруживает, что при значении промежутка $h=0°15'$ вторые разности настолько малы, что без ущерба для точности результата промежуток h можно увеличить. Это увеличение делается *удвоением* промежутка, как показано в дополнительной таблице.

Такое удвоение произведено и в дальнейшем так, что значения промежутка h суть

от $n=0$ до $n=6$	$h=0°15'=0.0043633$
„ $n=6$ „ $n=13$	$h=0°30'=0.0087266$
„ $n=13$ „ $n=19$	$h=1°00'=0.017453$
„ $n=19$ „ $n=57$	$h=2°00'=0.034907$

Соответственно этим значениям h, постоянные множители

$$A=\frac{\pi R^2 M}{P}h;\qquad B=\frac{h}{g}$$

Вычисление началь

Формулы:

$$q' = CK(v)\,v^2 f(y)\ \operatorname{cosec}\varphi;$$

$$\frac{v'}{v} = -2.30q' - \operatorname{cotg}\varphi;$$

$$\frac{y''}{y} = \frac{2v'}{v} - \operatorname{tg}\varphi - \operatorname{cotg}\varphi;$$

$$y_{n+1} = y_n + hy_n' + \frac{h^2}{2}y_n'';$$

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$\lg C \operatorname{cosec}\varphi$	$\bar{4}.0312$	$\bar{4}.0299$	4.0285	$\bar{4}.0273$
$2\lg v$	5.8062	5.7833	5.7613	5.7414
$\lg K(v)$	$\bar{2}.5455$	$\bar{2}.5502$	$\bar{2}.5534$	$\bar{2}.5565$
$\lg f(y)$	0.0000	$\bar{1}.9910$	1.9325	$\bar{1}.9745$
$\lg q'_n$	0.3839	0.3544	0.3263	0.2997
q'_n	2.420	2.260	2.119	1.993
$q'_n h$	0.01056	0.00985	0.00923	0.00870
$-2.30q'_n$	—5.70	—5.20	—4.87	—4.58
$-\operatorname{cotg}\varphi_n$	—0.70	—0.69	—0.69	—0.68
$v'_n : v_n$	— 6.27	— 5.39	— 5.56	— 5.26
v'_n	—5020	— 4590	— 4230	— 3905
$bv'_n : (a + bv_n)$	— 1.52	— 1.40	— 1.30	— 1.23
$2v'_n : v_n$	—12.54	—11.78	—11.12	—10.52
$-\alpha y' : (1-\alpha y)$	— 4.65	— 4.40	— 4.29	— 4.12
$-\operatorname{cotg}\varphi_n$	— 0.70	— 0.69	— 0.69	— 0.68
$q''_n : q'_n$	—19.14	—18.27	—17.40	—16.55
q''_n	—47.0	—41.3	—36.8	—32.9
$\frac{1}{2}q''_n h^2$	— 0.00045	— 0.00039	0.00033	— 0.00030
$q_{n+1} - q_n$	— 0.0101	0.0095	0.0089	0.0084
$\lg u_n$	2.8165	2.8064	2.7969	2.7835
$\lg \operatorname{cosec}\varphi$	0.0366	0.0853	0.0840	0.0827
$\lg v$	2.9031	2.8917	2.8809	2.1872
v	800.0	779.3	760.1	742.7

Примечание. Сличая эти величины v и y_n с предыдущими, видим, что согласие вполне

Таблица 73

ных значений p_n, y_n, v_n

$$y' = \frac{1}{g} v^2 \operatorname{cotg} \varphi; \ \lg C = 5.9446$$

$$\frac{q''}{q'} = \frac{bv'}{a+bv} + \frac{2v'}{v} - \frac{ay'}{1-ay} - \operatorname{cotg} \varphi$$

$$q_{n+1} = q_n + hq_n' + \frac{h^2}{2} \cdot q_n''$$

$$h = 0.004363; \ \frac{h^2}{2} = 0.0000095$$

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$\lg \frac{1}{g} \operatorname{cotg} \varphi$	$\bar{2}.3535$	$\bar{2}.8195$	$\bar{2}.8454$	$\bar{2}.8414$
$2 \lg v$	5.8062	5.7833	5.7618	5.7414
$\lg y'_n$	4.6597	4.6328	4.6072	4.5828
y'_n	45630	42930	40460	33250
$\lg y'_n h$	2.2995	2.2726	2.2470	2.2226
$y'_n h$	199.3	187.3	176.6	166.9
$-\operatorname{cotg} \varphi$	— 0.70	— 0.69	— 0.69	— 0.68
$2v'_n : v_n$	—12.54	—11.73	—11.12	—10.52
$-\operatorname{tg} \varphi$	— 1.43	— 1.44	— 1.45	— 1.47
$y''_n : y_n'$	—14.67	—13.91	—13.[illegible]6	—12.67
y''_n	—671000	—593000	—537000	—434900
$\frac{1}{2} y''_n h^2$	— 6.4	— 5.6	—5.1	— 4.6
$y_{n+1} - y_n$	192.9	181.7	171.5	162.3
y_n	0.0	192.9	374.6	546.1

удовлетворительно.

Вычисление

Интегрирование ура

$dq = C \cdot K(v)\, v^2 f(y)$ cosec $\varphi\; d\varphi$;

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
n	φ	$2\lg v$	$\lg K(v)$	$\lg f(y)$	lg cosec φ	lg cotg φ	$\lg\omega$=(III)+(IV)+(V)+(VI)+A	$\lg \eta$	η
0	55°00′	5.8062	$\bar{2}$.5465	0.0000	0.0866	$\bar{1}$.8452	$\bar{2}$.0237	2.2395	199.3
1	55 15	5.7832	$\bar{2}$.5502	$\bar{1}$.9910	0.0853	$\bar{1}$.8412	$\bar{3}$.9941	2.2725	187.2
2	55 30	5.7616	$\bar{2}$.5533	$\bar{1}$.9826	0.0840	$\bar{1}$.8371	$\bar{3}$.9659	2.2468	176.5
3	55 45	5.7410	$\bar{2}$.5565	$\bar{1}$.9745	0.0827	$\bar{1}$.8331	$\bar{3}$.9391	2.2222	166.8
4	56 00	5.7216	$\bar{2}$.5595	$\bar{1}$.9669	0.0814	$\bar{1}$.8290	$\bar{3}$.9138	2.1987	158.0
5	56 15	5.7032	$\bar{2}$.5622	$\bar{1}$.9593	0.0802	$\bar{1}$.8249	$\bar{3}$.8898	2.1762	150.0
6	56 30	5.6854	$\bar{2}$.5649	$\bar{1}$.9529	0.0789	$\bar{1}$.8208	$\bar{2}$.1675	2.4553	285.3
7	57 00	5.6524	$\bar{2}$.5700	$\bar{1}$.9400	0.0764	$\bar{1}$.8125	$\bar{2}$.1242	2.4140	259.4
8	57 30	5.6222	$\bar{2}$.5746	$\bar{1}$.9282	0.0740	$\bar{1}$.8042	2.0844	2.3755	237.4
9	58 00	5.5940	$\bar{2}$.5788	$\bar{1}$.9173	0.0716	$\bar{1}$.7958	$\bar{2}$.0471	2.3389	218.2
10	58 30	5.5678	$\bar{2}$.5828	$\bar{1}$.9071	0.0692	$\bar{1}$.7873	$\bar{2}$.0121	2.3042	201.5
11	50 00	5.5436	$\bar{2}$.5866	$\bar{1}$.8978	0.0569	$\bar{1}$.7783	$\bar{3}$.9803	2.2715	186.9
12	59 30	5.5206	$\bar{2}$.5898	$\bar{1}$.8891	0.0647	$\bar{1}$.7701	$\bar{3}$.9496	2.2398	173.7
13	60 00	5.4990	$\bar{2}$.5916	$\bar{1}$.8810	0.06[illegible]5	$\bar{1}$.7614	$\bar{2}$.2205	2.5105	324.0
14	61 00	5.4594	$\bar{2}$.5940	$\bar{1}$.8661	0.0582	$\bar{1}$.7438	$\bar{2}$.1641	2.4533	234.0
15	62 00	5.4238	$\bar{2}$.5951	$\bar{1}$.8530	0.0541	$\bar{1}$.7257	$\bar{2}$.1124	2.3996	251.0
16	63 00	5.3912	$\bar{2}$.5955	$\bar{1}$.8412	0.0501	$\bar{1}$.7072	$\bar{2}$.0644	2.3496	223.1
17	64 00	5.3614	$\bar{2}$.5955	$\bar{1}$.8303	0.0463	$\bar{1}$.6882	$\bar{2}$.0203	2.2997	199.4
18	65 00	5.3338	$\bar{2}$.5955	$\bar{1}$.8213	0.0427	$\bar{1}$.6687	$\bar{3}$.9797	2.2526	178.9
19	66 00	5.3086	$\bar{2}$.5955	$\bar{1}$.8127	0.0393	$\bar{1}$.6486	$\bar{3}$.9425	2.2073	161.2
20	68 00	5.2634	$\bar{2}$.5955	$\bar{1}$.7931	0.0328	$\bar{1}$.6064	$\bar{2}$.1762	2.4209	263.6
21	70 00	5.2238	$\bar{2}$.5849	$\bar{1}$.7859	0.0270	$\bar{1}$.5611	$\bar{2}$.1090	3.3360	216.8
22	72 00	5.1900	$\bar{2}$.5631	$\bar{1}$.7757	0.0218	$\bar{1}$.5118	$\bar{2}$.0430	2.2529	179.0
23	74 00	5.1606	$\bar{2}$.5518	$\bar{1}$.7674	0.0172	$\bar{1}$.4575	$\bar{3}$.9844	2.1692	147.6
24	76 00	5.1340	$\bar{2}$.5278	$\bar{1}$.7598	0.0131	$\bar{1}$.3968	$\bar{3}$.9221	2.0319	120.8
25	78 00	5.1114	$\bar{2}$.4977	$\bar{1}$.7544	0.0096	$\bar{1}$.3275	$\bar{3}$.8605	1.9900	97.7

Таблица 74

траектории

вневий годографа

$$dy = \frac{1}{g} v^2 \operatorname{cotg} \varphi \, d\varphi$$

XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII
$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$	Δy	y	ω	$\Delta\omega$	$\Delta^2\omega$	Δq	$\lg u$	$\lg v = (XX) + (VI)$	v
					0.0			0.0			
—12.1			193.1	0.0	1056			102	2.8165	2.9031	800.0
	1.4					— 70					
—10.7		—0.4	181.7	193.1	936		9	95	2.8063	2.8916	779.1
	1.0					— 61					
— 9.7		—0.1	171.7	374.8	925		5	90	2.7968	2.8808	760.0
	0.9					— 56					
— 8.8		—0.1	162.4	546.5	869		7	84	2.7378	2.8705	742.2
	0.8					— 49					
— 8.0		»	154.0	703.9	820		5	80	2.7794	2.8608	725.8
	»					— 44					
»		»	146.3	862.9	776		»	76	2.7714	2.8516	710.5
	»					»					
—25.9		»	271.6	1009.2	1471		»	140	2.7638	2.8427	696.1
	3.9					—140					
—2[illegible].0		—1.1	248.1	1230.8	1331		24	127	2.7498	2.8262	670.2
	2.8					—116					
—19.2		—0.3	227.3	1528.9	1215		16	117	2.7371	2.8111	6[illegible]7.3
	2.5					—100					
—16.7		—0.4	209.4	1756.2	1115		13	107	2.7254	2.7970	626.6
	2.1					— 87					
—14.6		—0.7	194.1	1965.6	1023		15	93	2.7147	2.7839	603.0
	1.4					— 72					
—13.2		0	180.5	2159.7	956		7	93	2.7049	2.7718	591.3
	»					— 65					
»		»	167.5	2340.2	891		»	86	2.6956	2.7603	575.9
	»					»					
—40.0		»	302.7	2507.7	1662		»	155	2.6870	2.7495	561.7
	7.0					—203					
—33.0		—1.9	266.9	2810.4	1459		39	137	2.6715	2.7297	536.7
	5.1					—164					
—27.9		—0.9	236.5	3077.3	1295		29	123	2.6578	2.7119	515.1
	4.2					—135					
—23.7		—1.0	210.4	3313.8	1160		23	111	2.6455	1.6956	496.2
	3.2					—112					
—20.5		—0.4	188.3	3524.2	1048		18	102	2.6344	2.6807	479.4
	2.8					— 94					
—17.7		»	169.7	3712.5	954		16	92	2.6242	2.6669	464.4
	»					— 78					
»		»	292.0	3832.2	876		»	161	2.6150	2.6543	451.1
	»					»					
—46.8		»	239.3	4174.2	1500		»	140	2.5989	2.6317	428.3
	9.0					—215					
—37.3		—2.6	196.3	4413.5	1285		34	117	2.5349	2.6119	409.2
	6.4					—181					
—31.4		—1.8	162.7	4609.8	1104		42	101	2.5732	2.5950	393.6
	4.6					—139					
—26.8		—0.9	143.5	4772.5	965		10	92	2.5631	2.5803	380.5
	3.7					—129					
—23.1		—0.8	108.2	4916.0	836		18	78	2.5539	2.5670	369.0
	2.9					—111					
—20.2		—0.8	87.3	5024.6	725		21	68	2.5461	2.5557	359.5
						— 90					

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
n	φ	$2\lg v$	$\lg K(v)$	$\lg f(y)$	lg cosec φ	lg cotg φ	$\lg\omega=(III)+$ $+(IV)+(V)+$ $+(VI)+A$	$\lg\eta$	η
26	80°00′	5.0918	$\bar{2}.4668$	$\bar{1}.7498$	0.0066	$\bar{1}.2468$	$\bar{3}.8024$	1.8892	77.5
27	82 00	5.0750	$\bar{2}.4402$	$\bar{1}.7463$	0.0042	$\bar{1}.1478$	$\bar{3}.7531$	1.7735	59.4
28	84 00	5.0606	$\bar{2}$.[illegible]174	$\bar{1}.7436$	0.0024	$\bar{1}.0216$	$\bar{3}.7114$	1.6333	43.0
29	86 00	5.0480	$\bar{2}.3978$	$\bar{1}.7417$	0.0011	$\bar{2}.8446$	$\bar{3}.6760$	1.4437	27.8
30	88 00	5.0370	$\bar{2}.3810$	$\bar{1}.7404$	0.0003	$\bar{2}.5431$	$\bar{3}.6461$.	1.1312	13.5
31	90 00	5.0278	$\bar{2}.3670$	$\bar{1}.7400$	0.0000	$-\infty$	$\bar{3}.6222$	$-\infty$	0.0
32	92 00	5.0202	$\bar{2}.3553$	$\bar{1}.7403$	0.0003	2.5431	$\bar{3}.6040$	1.1144	13.0
33	94 00	5.0138	$\bar{2}.3462$	$\bar{1}.7418$	0.0011	$\bar{2}.8446$	$\bar{3}.5903$	1.4095	25.7
34	96 00	5.0083	$\bar{2}.3386$	$\bar{1}.7432$	0.0024	$\bar{1}.0216$	$\bar{3}.5802$	1.5813	38.1
35	98 00	5.0050	$\bar{2}.3334$	$\bar{1}.7456$	0.0042	$\bar{1}.1478$	$\bar{3}.5756$	1.7039	50.6
36	100 00	5.0022	$\bar{2}.3290$	$\bar{1}.7485$	0.0066	$\bar{1}.2468$	$\bar{3}.5737$	1.8001	63.1
37	102 00	5.0006	$\bar{2}.3266$	$\bar{1}.7522$	0.0096	$\bar{1}.3275$	$\bar{3}.5764$	1.8792	75.7
38	104 00	5.0000	$\bar{2}.3258$	$\bar{1}.7565$	0.0131	$\bar{1}.3968$	$\bar{3}.5828$	1.9479	88.8
39	106 00	5.0006	$\bar{2}.3266$	$\bar{1}.7614$	0.0172	$\bar{1}.4575$	$\bar{3}.5932$	2.0092	102.1
40	108 00	5.0020	$\bar{2}.3290$	$\bar{1}.7670$	0.0218	$\bar{1}.5118$	$\bar{3}.6072$	2.0649	116.1
41	110 00	5.0042	$\bar{2}.3322$	$\bar{1}.7733$	0.0270	$\bar{2}.5611$	3.6241	2.1164	130.7
42	112 00	5.0072	$\bar{2}.3366$	$\bar{1}.7805$	0.03[illegible]8	$\bar{1}.6064$	$\bar{3}.6445$	2.1647	146.1
43	114 00	5.0112	$\bar{2}.3422$	$\bar{1}.7884$	0.0393	$\bar{1}.6486$	$\bar{3}.6685$	2.2109	162.5
44	116 00	5.0156	$\bar{2}.3490$	$\bar{1}.7971$	0.0463	$\bar{1}.6832$	$\bar{3}.6954$	2.2549	178.8
45	118 00	5.0210	$\bar{2}.3570$	$\bar{1}.8067$	0.0541	$\bar{1}.7257$	$\bar{3}.7262$	2.2978	198.5
46	120 00	5.0268	$\bar{2}.3654$	$\bar{1}.8172$	0.0625	$\bar{1}.7614$	$\bar{3}.7593$	2.3393	218.4
47	122 00	5.0330	$\bar{2}.3750$	$\bar{1}.8288$	0.0716	$\bar{1}.7953$	$\bar{3}.7958$	2.3799	239.8
48	124 00	5.0396	$\bar{2}.3850$	$\bar{1}.8415$	0.0814	$\bar{1}.8290$	$\bar{3}.8349$	2.4197	262.9
49	126 00	5.0464	$\bar{2}.3954$	$\bar{1}.8550$	0.0920	$\bar{1}.8613$	$\bar{3}.8762$	2.4588	287.6
50	128 00	5.0534	$\bar{2}.4062$	$\bar{1}.8697$	0.1035	$\bar{1}.8928$	$\bar{3}.9202$	2.4973	314.3
51	130 00	5.0606	$\bar{2}.4174$	$\bar{1}.8858$	0.1158	$\bar{1}.9238$	$\bar{3}.9670$	2.5355	343.2
52	132 00	5.0672	$\bar{2}.4278$	$\bar{1}.9032$	0.1289	$\bar{1}.9544$	$\bar{2}.0145$	2.5727	373.6
53	134 00	5.0738	$\bar{2}.4382$	$\bar{1}.9219$	0.1431	$\bar{1}.9848$	$\bar{2}.0644$	2.6097	407.1
54	136 00	5.0794	$\bar{2}.4470$	$\bar{1}.9$[illegible]26	0.1482	0.0152	$\bar{2}.1146$	2.6457	442.3
55	138 00	5.0844	$\bar{2}.4549$	$\bar{1}.9644$	0.1745	0.0456	$\bar{2}.1656$	2.6811	479.8
56	140 00	5.0866	$\bar{2}.4617$	$\bar{1}.9876$	0.1919	0.0762	$\bar{2}.2172$	2.7159	519.9
57	142 00	„	„	„	„	„	„	„	„

Таблица 74 (*продолжение*)

XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII
$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$	Δy	y	ω	$\Delta\omega$	$\Delta^2\omega$	Δq	$\lg u$	$\lg v$=(XX)+(VI)	v
	2.1			5111.9	635		21		2.5393	2.5459	351.5
—18.1		—0.4	68.2			—69		60			
	1.7			5180.1	566		18		2.5333	2.5375	344.8
—16.4		—0.5	51.9			—51		54			
	1.2			5232.0	515		10		2.5279	2.5303	339.1
—15.2		—0.3	35.4			—41		50			
	0.9			5267.4	474		10		2.5229	2.5240	334.2
—14.3		—0.1	20.6			—31		47			
	0.8			5288.0	443		7		2.5182	2.5185	330.0
—13.5		—0.3	6.6			—24		43			
	0.5			5294.3	419		7		2.5139	2.5139	326.5
—13.0		—0.2	— 6.4			—17		41			
	0.3			5287.9	402		4		2.5098	2.5101	323.7
—12.7		„	— 19.4			—13		40			
	0.3			5268.5	389		4		2.5053	2.5069	321.3
—12.4		„	— 32.0			— 9		33			
	—0.1			5236.5	380		5		2.5020	2.5044	319.4
—12.5		„	— 44.2			— 4		37			
	—0.0			5192.3	376		3		2.4983	2.5025	318.1
—12.5		„	— 56.8			— 1		38			
	—0.1			5135.5	375		3		2.4945	2.5011	317.0
—12.6		„	— 69.4			2		33			
	—0.4			5066.1	377		3		2.4907	2.5003	316.4
—13.0		„	— 82.0			5		38			
	—0.4			4984.1	382		5		2.4869	2.5000	316.2
—13.4		„	— 95.3			10		38			
	—0.6			4888.8	392		3		2.4831	2.5003	316.4
—14.0		„	—108.8			13		39			
	—0.6			4780.0	405		3		2.4792	2.5010	317.0
—14.6		„	—123.4			16		41			
	—0.8			4656.6	421		4		2.4751	2.5021	317.8
—15.4		„	—138.3			20		43			
	—1.0			4513.3	441		5		2.4708	2.5036	318.9
—16.4		„	—154.1			25		45			
	—0.9			4364.2	466		5		2.4663	2.5056	320.3
—17.3		„	—171.1			30		48			
	—1.4			4193.1	496		6		2.4615	2.5078	322.0
—18.7		„	—188.9			35		51			
	—1.2			4004.2	532		7		2.4564	2.5105	324.0
—19.9		„	—208.5			43		55			
	—1.5			3795.7	575		7		2.4509	2.5134	326.1
—21.4		„	—228.9					60			
	—1.7			3566.8	625		9		2.4449	2.5165	328.5
—23.1		„	—251.1			59		65			
	—1.6			3315.7	684		9		2.4384	2.5198	331.0
—24.7		„	—275.2			68		72			
	—2.0			3040.5	752		12		2.4312	2.5232	333.6
—26.7		„	—300.6			80		79			
	—2.2			2739.9	832		15		2.4233	2.5267	336.3
—28.9		„	—328.5			95		88			
	—1.7			2411.4	927		12		2.4145	2.5303	339.1
—30.6		„	—358.7			107		98			
	—2.7			2052.7	1034		19		2.4047	2.5336	341.7
—33.3		„	—389.8			126		109			
	—1.9			1662.9	1160		16		2.3938	2.5369	344.3
—35.2		„	—424.9			142		123			
	—2.3			1238.9	1302		20		2.3815	2.5397	346.5
—37.5		„	—460.7			162		138			
	—2.6			777.3	1464		23		2.3677	2.5422	348.5
—40.1		„	—499.5			185		153			
	„			277.8	1649		„		2.3524	2.5443	350.2
„		„	—541.1			„		175			
	„			—263.3			„		2.3349	2.5456	351.2

Прибавление к таблице 74

Удвоение промежутков

n	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$	$\Delta\gamma$	ω	$\Delta\omega$	$\Delta^2\omega$	$\Delta^3\omega$	Δq
0	398.6					0.02112				
		—45.6					—262			
2	353.0		8.6			1850		52	—11	
		—37.0		—2.3			—210			
4	316.0		6.3			1640		41	—12	
		—30.7		—2.5			—169			
6	285.3		4.8			1471		29		
		—25.9			271.6		—140			0.0140
7	259.4					1331				
					248.1					127
7	518.8					2662				
		—82.4					—432			
9	436.4		19.8			2230		114		
		—62.6		—7.0			—318		—46	
11	373.8		12.8			1912		68		
		—49.8		—3.0			—250		—21	
13	324.0		9.8			1662		47		
		—40.0		—2.8	302.7		—203		— 8	155
14	284.0		7.0			1459		39		
		—33.0		—1.9	266.9		—164		—10	137
15	251.0		5.1			1295		29		
		—27.9			236.5		—135			123
16	223.1					1120				
					210.4					111
13	648					3324				
		—146					—734			
15	502		42.8			2590		240	—90	
		—103.2		—16.0			—494			
17	398.8		26.4			2096		150	—58	
		— 76.4		— 9.2			—344			
19	322.4		17.6			1752		92	—55	
		— 58.8		— 5.6	292.0		—252			161
20	263.6		12.0			1500		37	— 3	
		— 46.8		— 3.0	239.3		—215			140
21	216.8		9.0			1285		34	8	
		— 37.8		— 2.6	196.3		—181			117
22	179.0		6.4			1104		42		
		— 31.4			162.7		—139			101
23	147.6					965				
					143.5					92

имеют следующие значения:

	$\lg A$	$\lg B$
от $n = 0$ до 6	$\bar{7}.58435$	$\bar{4}.64815$
„ $n = 6$ „ 13	$\bar{7}.88538$	$\bar{4}.94918$
„ $n = 13$ „ 19	$\bar{6}.18641$	$\bar{3}.25021$
„ $n = 19$ „ 57	$\bar{6}.48744$	$\bar{3}.55124$

3) Для проверки результатов величина y вычислена в табл. 75, пользуясь формулою

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_n - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_n$$
$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$$

аналогичною формулам

$$\Delta x_n = \xi_n + \frac{1}{2}\Delta\xi_n - \frac{1}{12}\Delta^2\xi_n$$
$$\Delta t_n = \tau_n + \frac{1}{2}\Delta\tau_n - \frac{1}{12}\Delta^2\tau_n$$

служащим для вычисления x и τ.

Формулы

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2}$$
$$\Delta x_n = \xi_n + \frac{1}{2}\Delta\xi_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\xi_{n-2}$$
$$\Delta t_n = \tau_n + \frac{1}{2}\Delta\tau_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\tau_{n-2}$$

применялись лишь в конце каждого частного интервала.

4) Чтобы получить значения φ, x, V, t для точки падения ($y = 0$), произведена интерполяция для угла φ, пользуясь вторыми разностями, а для остальных величин, пользуясь найденным значением φ.

5) Суммирование величин ξ_n и τ_n дает величины x_n и t_n, при этом поправки $\frac{1}{2}\Delta^2\xi_n$ оказываются настолько малыми, что для большей части таблиц они не превышают 1 м в значениях x и 0.001 сек. в значениях τ, т. е. их не было надобности вычислять, тем не менее следует вычислять разности

$$\Delta\xi_n,\ \Delta^2\xi_n,\ \Delta\tau_n \text{ и } \Delta^2\tau_n$$

чтобы по правильности их хода убедиться, что в вычисление не вкралась ошибка.

6) Когда вычислитель производит этот расчет в первый раз, то величины Δy, Δq следует составлять не в уме, а на отдельном черновом листке.

7) В нашем примере величина q выражается четырьмя или тремя значащими цифрами, относящимися к *пятому* знаку логарифма величины u

Вычислениє

Вычисление координат x, y

$$dx = \frac{v^2}{g} d\varphi;\ dy = \frac{v^2}{g} \operatorname{cotg} \varphi\, d\varphi;$$

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
n	φ	v	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	Δy	y	$\lg \xi$	ξ
0	55°00′	800.0	199.3	—12.1		193.1	0.0	2.4543	284.7
1	55 15	779.1	187.2	—10.7	1.4	181.7	193.1	2.4313	270.0
2	55 30	760.0	176.5	— 9.7	1.0	171.6	374.8	2.4097	255.9
3	55 45	742.2	166.8	— 8.8	0.9	162.3	546.4	2.3891	245.0
4	56 00	725.8	158.0	— 8.0	0.8	154.0	708.7	2.3697	234.3
5	56 15	710.5	150.0	„	„	146.3	862.7	2.3513	224.5
6	56 30	695.1	285.3	—25.9	„	272.0	1009.0	2.6345	431.0
7	57 00	670.2	259.4	—22.0	3.9	248.2	1281.0	2.6015	399.5
8	57 30	647.3	237.4	—19.2	2.8	223.0	1529.2	2.5713	372.7
9	58 00	625.6	218.2	—16.7	2.5	209.7	1757.0	2.5431	349.2
10	58 30	608.0	201.5	—14.6	2.1	194.1	1966.7	2.5169	328.8
11	59 00	591.3	186.9	—13.2	1.4	180.5	2160.8	2.4927	311.0
12	59 30	575.9	173.7	„	„	167.7	2341.3	2.4697	294.9
13	60 00	561.7	324.0	—40.0	„	303.4	2509.0	2.7491	561.4
14	61 00	536.7	284.0	—33.0	7.0	267.1	2812.3	2.7095	512.3
15	62 00	515.1	251.0	—27.9	5.1	236.7	3079.5	2.6739	472.0
16	63 00	496.2	223.1	—23.7	4.2	211.0	3316.2	2.6413	437.8
17	64 00	479.4	199.4	—20.5	3.2	188.9	3527.0	2.6115	408.8
18	65 00	464.4	178.9	„	„	170.0	3715.9	2.5839	383.6
19	66 00	451.1	322.4	— 8.0	„	292.0	3885.9	2.8597	724.0
20	68 00	428.3	263.6	—46.8	12.0	239.4	4177.9	2.8145	652.4
21	70 00	409.2	216.8	—37.8	9.0	197.4	4417.3	2.7749	595.5
22	72 00	393.6	179.0	—31.4	6.4	162.9	4614.7	2.7411	551.0
23	74 00	380.5	147.6	—26.8	4.6	143.9	4777.6	2.7117	514.9
24	76 00	369.0	120.8	—23.1	3.7	109.0	4921.5	2.6851	484.3
25	78 00	359.5	97.7	—20.2	2.9	87.4	5030.5	2.6625	459.7
26	80 00	351.5	77.5	—18.1	2.1	68.4	5117.9	2.6429	439.4
27	82 00	344.8	59.4	—16.4	1.7	51.1	5186.3	2.6261	422.8
28	84 00	339.1	43.0	—15.2	1.2	35.3	5237.4	2.6117	409.0

Таблица 75

траектории
и времени полета t

$$dt = \frac{v}{g} \operatorname{cosec} \varphi \cdot d\varphi$$

XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	Δx	x	$\lg \tau$	τ	$\Delta\tau$	$\Delta^2\tau$	Δt	t
—14.7		277.3	0.0	$\bar{1}.6378$	0.434	— 12		0.428	0.000
—13.1	1.6	263.4	277.3	$\bar{1}.6250$	0.422	— 12	0	0.416	0.428
—11.9	1.2	250.9	540.7	$\bar{1}.6129$	0.410	— 11	1	0.404	0.844
—10.7	1.2	239.6	791.6	$\bar{1}.6013$	0.399	— 10	1	0.394	1.248
— 9.8	0.9	229.4	1031.2	$\bar{1}.5903$	0.389	— 9	1	0.384	1.642
„	„	220.0	1260.6	$\bar{1}.5799$	0.380	„	„	0.375	2.026
—31.5	„	415.0	1480.6	$\bar{1}.8707$	0.743	— 32	„	0.727	2.401
—26.8	4.7	385.8	1895.6	$\bar{1}.8517$	0.711	— 28	4	0.697	3.128
—23.5	3.3	360.7	2281.4	$\bar{1}.8342$	0.633	— 26	2	0.670	3.825
—20.4	3.1	338.6	2642.1	$\bar{1}.8177$	0.657	— 23	3	0.645	4.495
—17.8	2.6	319.8	2980.7	$\bar{1}.8022$	0.634	— 20	3	0.624	5.140
—16.1	1.7	303.2	3300.2	$\bar{1}.7878$	0.614	— 20	0	0.604	5.764
„	„	287.5	3603.7	$\bar{1}.7741$	0.594	„	„	0.584	6.368
—48.9	„	536.0	3891.2	0.0621	1.154	— 62	„	1.122	6.952
—40.3	8.6	591.7	4427.2	0.0380	1.092	— 5	8	1.065	8.074
—34.2	6.1	454.5	5018.9	0.0161	1.038	— 48	6	1.013	9.139
—29.0	5.2	423.0	5473.4	$\bar{1}.9958$	0.990	— 41	7	0.969	10.152
—25.2	3.8	396.4	5896.4	0.9771	0.949	— 38	3	0.932	11.121
„	„	372.6	6292.8	$\bar{1}.9597$	0.911	„	„	0.893	12.053
—71.6	„	687.0	6665.4	0.2447	1.757	—114	„	1.698	12.946
—56.9	14.5	622.9	7352.4	0.2156	1.643	— 94	20	1.595	14.644
—44.5	12.4	572.5	7975.3	0.1900	1.549	— 77	17	1.510	16.239
—36.1	8.4	532.5	8547.8	0.1679	1.472	— 64	13	1.439	17.749
—30.6	5.5	499.1	9080.3	0.1486	1.408	— 55	9	1.380	19.188
—24.6	6.0	471.7	9579.4	0.1312	1.353	— 46	9	1.329	20.568
—20.3	4.3	449.3	10051	0.1164	1.307	— 38	8	1.287	21.897
—16.6	3.7	430.9	10500	0.1036	1.269	— 31	7	1.254	23.184
—13.8	2.8	415.8	10931	0.0928	1.238	— 25	6	1.225	24.438
—11.7	2.1	403.1	11347	0.0838	1.213	— 21	4	1.202	25.663

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
n	φ	v	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	Δy	y	$\lg\xi$	ξ
29	86°00′	334.2	27.8	—14.3	0.9	20.6	5272.7	2.5991	397.3
30	88 00	330.0	13.5	—13.5	0.8	6.7	5293.3	2.5881	387.4
31	90 00	326.5	»	—13.0	0.5	— 6.5	5300.0	2.5789	379.2
32	92 00	323.7	— 13.0	—12.7	0.3	— 19.4	5293.5	2.5713	372.7
33	94 00	321.3	— 25.7	—12.4	0.3	— 31.9	5274.1	2.5649	367.2
34	96 00	319.4	— 38.1	—12.5	0.1	— 44.3	5242.2	2.5599	363.0
35	98 00	318.1	— 50.6	—12.5	0.0	— 56.8	5197.9	2.5561	359.8
36	100 00	317.0	— 63.1	—12.6	0.1	— 69.4	5141.1	2.5533	357.5
37	102 00	316.4	— 75.7	—13.0	0.4	— 82.2	5071.7	2.5517	356.2
38	104 00	316.2	— 88.7	—13.4	0.4	— 95.4	4989.5	2.5511	355.7
39	106 00	316.4	—102.1	—14.0	0.6	—109.1	4894.1	2.5517	356.2
40	108 00	317.0	—116.1	—14.6	0.6	—123.3	4785.0	2.5531	357.4
41	110 00	317.8	—130.7	—15.4	0.8	—138.3	4661.7	2.5553	359.2
42	112 00	318.9	—146.1	—16.4	1.0	—154.2	4523.4	2.5583	361.7
43	114 00	320.3	—162.5	—17.3	0.9	—171.0	4369.2	2.5623	365.0
44	116 00	322.0	—179.8	—18.7	1.4	—189.0	4198.2	2.5667	368.7
45	118 00	324.0	—198.5	—19.9	1.2	—208.4	4009.2	2.5721	373.3
46	120 00	326.1	—218.4	—21.4	1 5	—229.0	3800.8	2.5779	378.4
47	122 00	328.5	—239.8	—23.1	1.7	—251.3	3571.8	2.5841	383.8
48	124 00	331.0	—262.9	—24.7	1.6	—275.0	3320.5	2.5907	389.7
49	126 00	333.6	—287.6	—26.7	2.0	—300.7	3045.5	2.5975	395.8
50	128 00	336.3	—314.3	—28.9	2.2	—328.7	2744.8	2.6045	402.3
51	130 00	339.1	—343.2	—30.6	1.7	—358.3	2416.7	2.6117	409.0
52	132 00	341.7	—373.8	—33.3	2.7	—390.3	2058.4	2.6183	415.2
53	134 00	344.3	—407.1	—35.2	1.9	—424.5	1668.1	2.6249	421.6
54	136 00	346.5	—442.3	—37.5	2.3	—460.9	1243.6	2.6305	427.1
55	138 00	348.5	—479.8	—40.1	2.6	—499.5	782.7	2.6355	432.0
56	140 00	350.2	—519.9	»	»	—541.1	283.2	2.6397	436.2
57	142 00	351.2	»				257.9	»	»

Точка падения.

Наклонность $\Phi = 140^\circ + \alpha\cdot 120' = 141^\circ 3'.9$

Скорость $V = 350.5$ м/сек.

Дальность $X = 21956 + 436\alpha = 22188$ м

Время полета $T = 63.075 + 1{,}940\alpha = 64.108$ сек.

Таблица 75 (*продолжение*)

XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	Δx	x	$\lg \tau$	τ	$\Delta\tau$	$\Delta^2\tau$	Δt	t
—9.9	1.8	392.3	11750	0.0762	1.192	—17	4	1.183	26.865
—8.2	1.7	383.1	12142	0.0699	1.175	—14	3	1.168	28.043
—6.5	1.7	375.9	12525	0.0650	1.161	— 9	5	1.156	29.216
—5.5	1.0	369.9	12901	0.0615	1.152	— 6	3	1.149	30.372
—4.2	1.3	365.2	13271	0.0591	1.146	— 3	3	1.1 4	31.521
—3.2	1.0	361.5	13636	0.0579	1.143	— 1	2	1.143	32.665
—2.3	0.9	358.7	13997	0.0578	1.142	3	4	1.143	33.808
—1.3	1.0	356.9	14356	0.0588	1.145	6	3	1.148	34.951
—0.5	0.8	356.0	14713	0.0610	1.151	8	2	1.155	36.099
0.5	1.0	355.9	15069	0.0642	1.159	12	4	1.165	37.254
1.2	0.7	356.8	15325	0.0636	1.171	14	2	1.178	38.419
1.8	0.6	358.3	15632	0.0739	1.185	18	4	1.194	39.597
2.5	0.7	360.5	16040	0.0802	1.203	20	2	1.213	40.791
3.3	0.8	364.4	16400	0.0875	1.223	24	4	1.235	42.004
3.7	0.4	366.9	16764	0.0960	1.247	27	3	1.260	43.239
4.6	0.9	371.0	17121	0.1052	1.274	31	4	1.290	44.499
5.1	0.5	375.9	17492	0.1157	1.305	35	4	1.323	45.789
5.4	0.3	381.1	17868	0.1270	1.340	38	3	1.359	47.112
5.9	0.5	386.7	18249	0.1392	1.378	42	4	1.399	48.471
6.1	0.2	397.8	18636	0.1523	1.420	47	5	1.443	49.870
6.5	0.4	399.1	19034	0.1663	1.467	51	4	1.493	51.313
6.7	0.2	405.6	19433	0.1813	1.518	57	6	1.546	52.806
6.2	—0.5	412.1	19839	0.1972	1.575	60	3	1.605	54.352
6.4	0.2	418.4	20251	0.2136	1.635	68	8	1.669	55.957
5.5	—0.9	424.3	20669	0.2311	1.703	71	3	1.739	57.626
4.9	—0.6	429.5	21093	0.2490	1.774	79	8	1.814	59.365
4.2	—0.7	434.1	21552	0.2678	1.853	85	6	1.896	61.179
»	»	438.0	21956	0.2873	1.938	»	»	1.984	63.075
									65.159

$$0 = 283.2 - 541.1\alpha - 41.6\,\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$$

$$\alpha = 0.5326$$

Таблица 76

Общая сводка

n	θ	v	x	y	t	n	θ	v	x	y	t
0	35°00′	800.0	0.0	0.0	0.000	29	4°00′	334.2	11750	5267.4	26.865
1	34 45	779.1	277.3	193.1	0.428	30	2 00	330.0	12142	5288.0	28.048
2	34 30	760.0	540.7	374.8	0.844	31	0 00	326.5	12525	5294.3	29.216
3	34 15	742.2	791.6	546.5	1.248	32	— 2 00	323.7	12901	5287.9	30.372
4	34 00	725.8	1031.2	708.9	1.642	33	— 4 00	321.3	13271	5268.5	31.521
5	33 45	710.5	1260.6	862.9	2.026	34	— 6 00	319.4	13636	5236.3	32.665
6	33 30	696.1	1480.6	1009.2	2.401	35	— 8 00	318.1	13997	5192.3	33.808
7	33 00	670.2	1895.6	1280.8	3.128	36	—10 00	317.0	14356	5135.5	34.951
8	32 30	647.3	2281.4	1528.9	3.825	37	—12 00	316.4	14713	5066.1	36.099
9	32 00	626.6	2642.1	1756.2	4.495	38	—14 00	316.2	15069	4984.1	37.254
10	31 30	608.0	2980.7	1965.6	5.140	39	—16 00	316.4	15325	4888.8	38.419
11	31 00	591.3	3300.5	2159.7	5.764	40	—18 00	317.0	15682	4780.0	39.527
12	30 30	575.9	3603.7	2340.2	6.358	41	—20 00	317.8	16040	4656.6	40.791
13	30 00	561.7	3891.2	2507.7	6.952	42	—22 00	318.9	16400	4518.3	42.004
14	29 00	536.7	4427.2	2810.4	8.074	43	—24 00	320.3	16764	4364.2	43.239
15	28 00	515.1	5018.9	3077.3	9.139	44	—26 00	322.0	17121	4193.1	44.449
16	27 00	496.2	5473.4	3313.8	10.152	45	—28 00	324.0	17492	4004.2	5.789
17	26 00	479.4	5896.4	3524.2	11.121	46	—30 00	326.1	17868	3795.7	47.112
18	25 00	464.4	6292.8	3712.5	12.053	47	—32 00	328.5	18249	3566.8	48.471
19	24 00	451.1	6665.4	3882.2	12.946	48	—34 00	331.0	18636	3315.7	49.870
20	22 00	428.3	7352.4	4174.2	14.644	49	—36 00	333.6	19034	3040.5	51.313
21	20 00	409.2	7975.3	4413.5	16.239	50	—38 00	336.3	19433	2739.9	52.806
22	18 00	393.6	8547.8	4609.8	17.749	51	—40 00	339.1	19839	2411.4	54.352
23	16 00	380.5	9080.3	4772.5	19.188	52	—42 00	341.7	20251	2052.7	55.957
24	14 00	369.0	9579.4	4916.0	20.568	53	—44 00	344.3	20669	1662.9	57.626
25	12 00	359.5	10051	5024.6	21.897	54	—46 00	346.5	21093	1238.0	59.365
26	10 00	351.5	10500	5111.9	23.184	55	—48 00	348.5	21552	777.3	61.179
27	8 00	344.8	10931	5180.1	24.438	56	—50 00	350.2	21956	277.8	63.075
28	6 00	339.1	11347	5232.0	25.663	57	—52 00	351.2		—263.3	65.159

Дальность 22 188 м
Угол падения 51°3′.9

Скорость 350.7 м/сек.
Время полета 64.108 сек.

или v, которые нам только и нужны, таким образом при вычислении выигрывается один знак, иными словами точность его удесятеряется; благодаря этому, в тех случаях, когда особой точности не требуется, величины q и ω можно вычислять пользуясь логарифмической линейкой и затем u и v — по четырехзначной таблице логарифмов.

Вычисление здесь приведено со всею подробностью, т. е. в том именно виде, как оно произведено, чтобы по нему можно было с ясностью судить, как следует располагать действия, сколько требуется работы и какие можно делать сокращения, если довольствоваться результатами меньшей точности.

§ **107.** Мы уже упоминали, что метода Адамса была им развита для определения формы меридионального сечения капли тяжелой жидкости, лежащей на горизонтальной плоскости.

Общее уравнение граничащей капиллярной поверхности есть

$$z = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) \tag{1}$$

где z есть вертикальная ордината точки поверхности, ρ_1 и ρ_2 — главные радиусы кривизны в этой точке, a^2 — некоторая постоянная для данной жидкости, имеющая размерность длины.

В нашем случае граничащая поверхность есть поверхность вращения около вертикальной оси, т. е. оси z, направленной вниз.

Для каждой точки такой поверхности один из главных радиусов кривизны есть радиус кривизны меридиана в этой точке, примем его за ρ_1; второй радиус кривизны ρ_2 равен отрезку нормали в рассматриваемой точке, заключенному между этою точкой и осью вращения. Обозначая через r радиус параллели, проходящей через рассматриваемую точку, и через φ — угол между нормалью и осью z, будем иметь

$$\rho_2 = \frac{r}{\sin\varphi}$$

и, следовательно, наше уравнение будет

$$z = \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{\rho_1} + \frac{\sin\varphi}{r}\right] \tag{2}$$

иначе

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{2z}{a^2} - \frac{\sin\varphi}{r} \tag{2'}$$

Но, так как вообще

$$dz = ds \cdot \sin\varphi$$
$$dr = ds \cdot \cos\varphi$$

где ds есть дифференциал дуги меридиана и

$$\rho_1 = \frac{ds}{d\varphi}$$

то будет

$$\begin{aligned} dz &= \rho_1 \sin\varphi\, d\varphi \\ dr &= \rho_1 \cos\varphi\, d\varphi \end{aligned} \tag{3}$$

Приняв φ за переменную независимую и обозначая производные значками, мы видим, что наш вопрос приведен к интегрированию следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} z' &= \rho_1 \sin\varphi \\ r' &= \rho_1 \cos\varphi \end{aligned}$$

где

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{2z}{a^2} - \frac{\sin\varphi}{r} \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что эти уравнения однородны относительно величин z, ρ, r и a, и их можно написать в таком виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{z}{a}\right)' &= \left(\frac{\rho_1}{a}\right) \sin\varphi \\ \left(\frac{r}{a}\right)' &= \left(\frac{\rho_1}{a}\right) \cos\varphi \\ \frac{1}{\left(\frac{\rho_1}{a}\right)} &= 2\left(\frac{z}{a}\right) - \frac{\sin\varphi}{\left(\frac{r}{a}\right)} \end{aligned}$$

следовательно, z, r и ρ_1 можно выражать в долях a, иными словами можно без ущерба общности полагать $a = 1$ и рассматривать систему

$$\begin{aligned} z' &= \rho_1 \sin\varphi \\ r' &= \rho_1 \cos\varphi \\ \frac{1}{\rho_1} &= 2z - \frac{\sin\varphi}{r} \end{aligned} \tag{5}$$

В верхней точке капли, которая, очевидно, лежит на оси вращения, будет $\varphi = 0$, значит, начальные условия будут: при $\varphi = 0$ должно быть $r = 0$ и $z = b$, где b — некоторая постоянная.

Так как при бесконечно малом φ будет и r бесконечно малое, то

$$\lim\left(\frac{\sin\varphi}{r}\right) = \lim\left(\frac{d\varphi}{dr}\right) = \lim\left(\frac{d\varphi}{ds}\right) = \left(\frac{1}{\rho_1}\right)_{\varphi=0}$$

следовательно, при $\varphi = 0$ будет

$$\frac{1}{\rho_1} = b$$

Для численного примера возьмем тот случай, когда $b = 1$, и, положив

$$\zeta = z'h; \quad \lambda = r'h$$

где h есть избранный промежуток между смежными значениями φ, который принимаем за $5° = 0.087266$, располагаем наше вычисление как приведено ниже, выполняя его логарифмической линейкой (50 см длины).

Для получения исходных значений z и r проще всего разложить z и r по степеням φ, что выполним так: легко видеть что ρ_1 есть четная функция угла φ, поэтому полагаем

$$\rho_1 = 1 + \alpha\varphi^2 + \beta\varphi^4 + \ldots$$

тогда

$$\rho_1 \sin\varphi = \varphi + \left(\alpha - \frac{1}{6}\right)\varphi^3 + \left(\beta - \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{120}\right)\varphi^5 + \ldots$$

$$\rho_1 \cos\varphi = 1 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\varphi^2 + \left(\beta - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{24}\right)\varphi^4 + \ldots$$

Следовательно, в виду условий, что при $\varphi = 0$ должно быть $z = 1$ и $r = 0$, на основании ур-ния (5), имеем

$$z = 1 + \frac{1}{2}\varphi^2 + \left(\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{24}\right)\varphi^4 + \left(\frac{\beta}{6} - \frac{\alpha}{36} + \frac{1}{720}\right)\varphi^6 + \ldots$$

$$r = \varphi + \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{1}{6}\right)\varphi^3 + \left(\frac{\beta}{5} - \frac{\alpha}{10} + \frac{1}{120}\right)\varphi^5 + \ldots$$

Затем имеем

$$2rz - \sin\varphi = \varphi + \left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{5}{6}\right)\varphi^3 + \left(\frac{19}{30}\alpha + \frac{2}{5}\beta - \frac{29}{120}\right)\varphi^5 + \ldots$$

и

$$(2rz - \sin\varphi)\rho_1 = \varphi + \left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{5}{6} + \alpha\right)\varphi^3 + \left[\frac{22}{15}\alpha + \frac{2}{3}\alpha^2 + \frac{7}{5}\beta - \frac{29}{120}\right]\varphi^5 + \ldots$$

Приравнивая эту последнюю величину величине r, получаем для определения неизвестных коэффициентов α и β уравнения

$$\frac{5}{3}\alpha + \frac{5}{6} = \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{6}$$

$$\frac{7}{5}\beta + \frac{22}{15}\alpha + \frac{2}{3} \qquad - \frac{29}{120} = \frac{1}{5}\beta - \frac{1}{10}\alpha + \frac{1}{120}$$

которые дают

$$\alpha = -\frac{3}{4}; \quad \beta = \frac{7}{8}$$

Подставляя, имеем

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1 - \frac{3}{4}\varphi^2 + \frac{7}{8}\varphi^4 + \ldots \\ z &= 1 + \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{11}{48}\varphi^4 + \frac{121}{720}\varphi^6 \ldots \\ r &= \varphi - \frac{5}{12}\varphi^3 + \frac{31}{120}\varphi^5 + \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

Полагая в этих выражениях последовательно $\varphi=0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$, т. е. делая φ равным 0; 0.087266; 0.17453; 0.26180, получаем табл. 77 исходных значений:

Таблица 77

φ	z	r	ρ_1
0°	1.0000	0.0000	1.0000
5	1.0038	0.0870	0.9943
10	1.0150	0.1723	0.9780
15	1.0332	0.2546	0.9527

имея которые и продолжаем вычисление по общей схеме, приведенной ниже, в табл. 78.

Формы капель вычислены с большою точностью, и для них составлены обширные таблицы в сочинении Bashforth'a „Anattempt to test the theories of capillary action“ (Cambridge, 1883), в котором и разработана знаменитым астрономом Адамсом метода численного интегрирования уравнений, и на стр. 18 указанного сочинения приведена формула, отличающаяся лишь обозначениями от нашей основной ф-лы (16), а именно:

$$y_1-y_0=\omega\left(q_0+\frac{1}{2}\Delta q_0+\frac{5}{12}\Delta^2 q_0+\frac{3}{8}\Delta^3 q_0+\frac{251}{720}\Delta^4 q_0+\frac{95}{288}\Delta^5 q_0+\right.$$
$$\left.+\frac{19\,087}{60\,480}\Delta^6 q_0+\frac{5257}{17\,280}\Delta^7 q_0+\frac{1\,070\,017}{3\,628\,800}\Delta^8 q_0+\frac{2\,082\,753}{7\,257\,600}\Delta^9 q_0+\ldots\right)$$

где ω есть промежуток между последовательными значениями переменной независимой t; уравнение, предложенное для интегрирования, Адамс пишет

$$\frac{dy}{dt}=f(t,y)=q$$

и через q_0, $\Delta q_0, \ldots \Delta^9 q_0$, обозначены частные значения величины q и ее разностей до девятого порядка.

Но Адамс, для вычисления, вместо этой формулы, берет другую, представляющую разность y_0-y_{-1}; в этой формуле коэффициенты при $\Delta^2 y_0, \ldots \Delta^9 q_0$ значительно меньше, нежели в предыдущей, вследствие чего вычисление может быть произведено с большою точностью, но самый процесс сложнее.

Уравнение, определяющее форму поверхности, Адамс пишет в таком виде:

$$\frac{b}{\rho}+\frac{\sin\varphi}{\left(\frac{x}{b}\right)}=2+\beta\left(\frac{z}{b}\right)$$

т. е. выражает величины ρ, z и x или, при нашем обозначении, r в долях радиуса кривизны в вершине, т. е. b, и за начало координат принимает вершину.

Таким образом, в таблицах Bashforth'a наш случай соответствует значению $\beta=2$, и наше z получится придавая 1 к показанному в таблице. Сличение покажет, что разница не превышает двух или трех единиц четвертого знака (таблицы Bashforth'a вычислены на пять знаков), так что полученный нами результат даже лучше, чем можно было ожидать при вычислении на четыре знака и притом линейкой.

§ **108.** Скажем еще несколько слов по поводу тех многих уравнений математической физики, интегрирование которых приводится к нахождению так называемых *фундаментальных* функций. Эти функции определяются в каждом вопросе обыкновенным линейным дифференциальным уравнением, заключающим неизвестный параметр, значения которого даются некоторым трансцендентным уравнением, получаемым на основании граничных условий.

Так, например, исследование колебаний упругого стержня переменной площади поперечного сечения приводится к розысканию функций X, определяемых уравнением.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[p(x)\frac{d^2X}{dx^2}\right]-\lambda q(x)X=0 \qquad (*)$$

и граничными условиями

Здесь λ есть некоторый параметр, значение которого также требуется найти, $p(x)$ и $q(x)$ — заданные функции.

Граничные условия выражаются различно, смотря по тому, закреплен, подперт или свободен рассматриваемый конец стержня, для которого абсцисса $x=0$ или $x=l$.

Пусть этот конец есть тот, для которого $x=0$, тогда граничные условия выразятся так:

а) если конец *закреплен*, при $x=0$, должно быть $X=0$ и $\frac{dX}{dx}=0$

б) „ „ *подперт* „ „ „ „ $X=0$ „ $\frac{d^2X}{dx^2}=0$

в) „ „ *свободен* „ „ „ „ $\frac{d^2X}{dx^2}=0$ „ $\frac{d^3X}{dx^3}=0$

Совершенно подобно выражаются эти условия и для другого конца, для которого $x=l$.

Положим, например, что оба конца стержня свободны (корабль, плавающий на воде), тогда граничные условия будут:

при $x=0$ должно быть

$$\frac{d^2X}{dx^2}=0 \text{ и } \frac{d^3X}{dx^3}=0 \qquad (**)$$

Вычисление формы капли
Интегрирование системы:

$$dz = \rho_1 \sin\varphi \cdot d\varphi;\quad dr = \rho_1 \cos\varphi \cdot d\varphi;\quad \frac{1}{\rho_1} = 2z - \frac{\sin\varphi}{r}$$

Начальные условия: при $\varphi = 0$, должно быть: $r = 0$, $z = 1$

φ	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	r	$2z$	$\frac{\sin\varphi}{r}$	$\frac{1}{\rho_1} = 2z - \frac{\sin\varphi}{r}$	z	Δz	ζ	$\Delta\zeta$	$\Delta^2\zeta$	r	Δr	λ	$\Delta\lambda$	$\Delta^2\lambda$	По табл. Башфорда r	По табл. Башфорда z
0°	0.0000	1.0000	0.0000	2.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.000	0.0000	0.00	0.00	0.0000	0.000	0.0873	0.00	0.00	0.00000	1.00000
								0.038		0.76			0.870		—0.09			
5	0.0872	0.9962	0.0870	2.0076	1.0023	1.0053	1.0038		0.0076		—0.04	0.0870		0.0364		—0.15	0.08599	1.003 9
								0.112		0.72			0.853		—0.24			
10	0.1736	0.9848	0.1723	2.0300	1.0075	1.0225	1.0150		0.0148		—0.05	0.1723		0.0840		—0.13	0.17236	1.01502
								.132		0.67			0.823		—0.37			
15	0.2588	0.9659	0.2546	2.0664	1.0165	1.0499	1.0332		0.0215		—0.08	0.2546		0.0803		—0.12	0.25462	1.03324
								0.246		0.59			0.781		—0.49			
20	0.3420	0.9397	0.3327	2.1156	1.0279	1.0877	1.0578		0.0274		—0.08	0.3327		0.0754		—0.07	0.33255	1.05779
								0.301		0.51			0.724		—0.56			
25	0.4226	0.9063	0.4051	2.1758	1.0432	1.1326	1.0379		0.0325		—0.08	0.4051		0.0698		—0.04	0.40523	1.08787
								0.317		0.43			0.661		—0.60			
30	0.5000	0.8660	0.4718	2.2452	1.0597	1.1855	1.1226		0.0368		—0.09	0.4718		0.0638		—0.05	0.47.03	1.11262
								0.385		0.34			0.605		—0.65			
35	0.5736	0.8192	0.5324	2.3222	1.0764	1.2 53	1.1611		0.0402		—0.06	0.5324		0.0571		0.03	0.53260	1.16117
								0.415		0.28			0.540		—0.62			
40	0.6428	0.7660	0.5864	2.4050	1.0963	1.3087	1.2026		0.0430		—0.10	0.5864		0.051.		—0.02	0.53681	1.20274
								0.4 2		0.18			0.482		—0.64			
45	0.7071	0.7071	0.6346	2.4931	1.1142	1.3792	1.2467		0.0448		—0.06	0.6346		0.0448		0.01	0.63469	1.24.58
								0.453		0.12			0.415		—0.50			
50	0.7660	0.6428	0.6761	2.5840	1.1330	1.4510	1.2920		0.0460		—0.04	0.6751		0.0388		0.00	0.67636	1.29203
								0.461		0.08			0.359		—0.60			
55	0.8192	0.5736	0.7120	2.6762	1.1507	1.5255	1.3381		0.0468		—0.0.	0.7120		0.0328		0.06	0.71206	1.33851
								0.470		0.0			0.298		—0.54			
60	0.8660	0.5000	0.7418	2.7702	1.1678	1.6024	1.3851		0.0472		—0.07	0.7413		0.0274		—0.01	0.74203	1.33552
								0.472		—0.03			0.250		—0.55			
65	0.9063	0. 226	0.7668	2.8646	1.1321	1.6824	1.4323		0.0459		—0.01	0.7668		0.0219		0.05	0.76655	1.43261
								0.470		—0.04			0.192		—0.50			

70	0.9397	0.3420	0.7360	2.958[illegible]	1.1956	1.7630	1.4793	0.463	0.0465	—0.08	—0.04	0.7860	0.146	0.0169	—0.47	0.03	0.73595	1.47939
75	0.9659	0.2588	0.8006	3.0512	1.2068	1.8444	1.5256	0.451	0.0457	—0.10	—0.02	0.8006	0.098	0.0122	—0.43	0.04	0.80052	1.52552
80	0.9848	0.1736	0.8104	3.1414	1.2149	1.9265	1.5707	0.441	0.0447	—0.14	—0.04	0.8104	0.050	0.0079	—0.41	0.02	0.81055	1.57070
85	0.9962	0.0872	0.8164	3.2296	1.2204	2.0092	1.6148	0.426	0.0433	—0.16	—0.02	0.3164	0.018	0.0038	—0.38	0.03	0.81635	1.61466
90	1.0000	0.0000	0.8182	3.3148	1.2225	2.0923	1.6574	0.410	0.0417	—0.17	—0.01	0.8182	—0.019	0.0000	—0.35	0.03	0.81822	1.65717
95	0.9962	—0.0872	0.8164	3.3968	1.2204	2.1754	1.6934	0.390	0.0400	—0.20	—0.03	0.3164	—0.052	—0.00[illegible]5	—0.32	0.0[illegible]	0.81645	1.69302
100	0.9848	—0.1736	0.8112	3.3748	1.2142	2.2606	1.7374	0.369	0.0380	—0.21	—0.01	0.8112	—0.032	—0.0067	—0.30	0.02	0.81133	1.73702
105	0.9659	—0.2583	0.8030	3.5486	1.2027	2.3459	1.7743	0.348	0.0359	—0.22	—0.01	0.3030	—0.111	—0.0097	—0.26	0.01	0.80314	1.77401
110	0.9397	—0.3420	0.7919	3.6182	1.1858	2.4314	1.8091	0.324	0.0337	—0.24	—0.02	0.7919	—0.134	—0.0123	—0.24	0.02	0.79216	1.80886
115	1.9063	—0.4226	0.7786	3.6830	1.1663	2.5167	1.8415	0.301	0.0313	—0.24	—0.00	0.7786	—0.158	—0.0147	—0.20	0.04	0.77868	1.84143
120	0.8660	—0.5000	0.7623	3.7432	1.1372	2.6060	1.8716	0.277	0.0289	—0.25	—0.01	0.7628	—0.175	—0.0167	—0.18	0.02	0.76297	1.87162
125	0.8192	—0.5736	0.7453	3.7986	1.0992	2.6994	1.8993	0.251	0.0264	—0.25	0.00	0.7453	—0.193	—0.0185	—0.16	0.02	0.74531	1.89935
130	0.7660	—0.6428	0.7260	3.8488	1.0554	2.7934	1.9244	0.227	0.0239	—0.25	0.00	0.7260	—0.208	—0.0201	—0.13	0.03	0.72598	1.92456
135	0.7071	—0.7071	0.7052	3.8942	1.0030	2.8912	1.9471	0.201	0.0214	—0.25	—0.01	0.7052	—0.219	—0.0214	—0.09	0.04	0.70525	1.94720
140	0.6428	—0.7660	0.6833	3.9342	0.9407	2.9935	1.9672	0.175	0.0188	—0.26	0.00	0.6833	—0.227	—0.0223	—0.07	0.02	0.68339	1.957[illegible]3
145	0.5736	—0.8192	0.6606	3.9694	0.8727	3.0967	1.9847	0.149	0.0162	—0.26	0.00	0.6606	—0.223	—0.0230	—0.05	0.02	0.66068	1.98467
150	0.5000	—0.8660	0.6373	3.9992	0.7847	3.2145	1.9996	0.123	0.0136	—0.25	—0.01	0.6373	—0.236	—0.0235	—0.02	0.03	0.63738	1.99952
155	0.4226	—0.9063	0.6137	4.0238	0.6900	3.3338	2.0119	0.099	0.0111	—0.24	0.01	0.6137	—0.237	—0.0237	0.01	0.03	0.61375	2.01183
160	0.3420	—0.9397	0.5900	4.0436	0.5822	3.4614	2.0218	0.075	0.0087	—0.25	0.00	0.5900	—0.236	—0.0236	0.03	0.02	0.59003	2.02166
165	0.2588	—0.9659	0.5664	4.0586	0.4535	3.6001	2.0293	0.050	0.0062	—0.22	0.03	0.5664	—0.231	—0.0233	0.03	0.00	0.56647	2.02910
170	0.1736	—0.9848	0.5433	4.0686	0.3197	3.7488	2.0343	0.030	0.0041	—0.22	—0.00	0.5433	—0.227	—0.0230	0.08	0.05	0.54329	2.03425
175	0.0872	—0.9962	0.5206	4.0746	0.1682	3.9064	2.0373	0.008	0.0019	—0.19	0.03	0.5206	—0.217	—0.0222			0.52069	2.03713
180	0.0000	—1.0000	0.4989	4.0762	0.0000	4.0762	2.0381		0.0000			0.4989					0.49885	2.038[illegible]9

при $x=l$ должно быть

$$\frac{d^2X}{dx^2}=0 \text{ и } \frac{d^3X}{dx^3}=0 \qquad (***)$$

Так как уравнение, служащее для определения X, линейное, то общий его интеграл есть линейная функция произвольных постоянных, т. е.

$$X=AY+BZ+CU+DV$$

где Y, Z, U, V — частные решения ур-ния (*), A, B, C, D — произвольные постоянные. Очевидно, что Y, Z, U, V суть функции как переменной x, так и параметра λ.

Граничные условия будут, обозначая значками производные по x:

$$\begin{aligned}
&AY''(0,\lambda)+BZ''(0,\lambda)+CU''(0,\lambda)+DV''(0,\lambda)=0\\
&AY'''(0,\lambda)+BZ'''(0,\lambda)+CU'''(0,\lambda)+DV'''(0,\lambda)=0\\
&AY''(l,\lambda)+BZ''(l,\lambda)+CU''(l,\lambda)+DV''(l,\lambda)=0\\
&AY'''(l,\lambda)+BZ'''(l,\lambda)+CU'''(l,\lambda)+DV'''(l,\lambda)=0
\end{aligned}$$

Чтобы эти уравнения для A, B, C, D допускали решения, отличные от нуля, необходимо, чтобы определитель системы $F(\lambda)$ был равен нулю, т. е. чтобы было

$$F(\lambda)=|\,Y''(0,\lambda),\ Z'''(0,\lambda),\ U''(l,\lambda),\ V'''(l,\lambda)\,|=0 \qquad (1)$$

Это и есть то трансцендентное уравнение, о котором сказано выше и которым определяются значения параметра λ.

Но ясно, что лишь для весьма немногих частных видов функций $p(x)$ и $q(x)$ вопрос может быть проведен аналитически до конца, в остальных же случаях, особенно когда функции $p(x)$ и $q(x)$ заданы графически или таблично, не только решить, но и составить в развернутом виде ур-ние (I) невозможно, и, следовательно, надо прибегать к приближенным способам.

Для того, чтобы найти значения λ, удовлетворяющие ур-нию (I), нет надобности иметь аналитическое выражение функции $F(\lambda)$, достаточно иметь возможность вычислить частное ее значение, соответствующее любому избранному частному значению параметра $\lambda=n$.

В самом деле, если на основании каких-либо соображений, изложение которых здесь опускаем, было бы известно, что приближенно значение λ есть n, то вычислив $F(n)$, полагаем затем $\lambda=n+k$ и вычисляем $F(n+k)$; если эти величины окажутся разных знаков, то искомое значение λ лежит между n и $n+k$, после чего обычным приемом λ найдется с любой степенью точности. Нетрудно видеть, как поступать, если бы $F(n)$ и $F(n+k)$ оказались одного знака.

Ход этого вычисления численного значения $F(n)$ и надо показать.

Постоянные произвольные можно воображать выбранными так, чтобы они представляли частные значения функции X и первых трех ее производных при $x=0$.

Для этого стоит только вообразить, что Y, Z, U, V суть такие частные решения уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[p(x)\frac{d^2X}{dx^2}\right]-nq(x)X=0$$

что при $x=0$ значения этих функций и их производных таковы:

$$\begin{array}{llll} Y=1; & Y'=0; & Y''=0; & Y'''=0 \\ Z=0; & Z'=1; & Z''=0 & Z'''=0 \\ U=0; & U'=0; & U''=1; & U'''=0 \\ V=0; & V'=0; & V''=0; & V'''=1 \end{array}$$

Так как X должно удовлетворять условиям (**), то при таком выборе функций Y, Z, U, V будет

$$C=0 \text{ и } D=0$$

и останется только найти функции Y и Z.

Чтобы найти функцию Y, положим

$$\frac{1}{p(x)}=f(x) \tag{2}$$

и заменим уравнение, коим определяется Y, системою

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2Y}{dx^2}&=f(x)y \\ \frac{d^2y}{dx^2}&=nq(x)Y \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Начальные значения при $x=0$ должны быть

$$\begin{array}{ll} y=0; & y'=0 \\ Y=1; & Y'=0 \end{array} \tag{4}$$

К системе (3) при условиях (4) непосредственно применима метода Штёрмера, по которой и составим таблицу значений функций Y и y на протяжении от $x=0$ до $x=l$, причем попутно получится и таблица значений Y''.

Совершенно так же составим и таблицу значений функции Z и попутно с нею Z''.

Искомая функция X будет

$$X=AY+BZ.$$

Пользуясь составленными таблицами значений функций Y'' и Z'', находим величины их, соответствующие $x=l$, пусть эти величины будут P и Q.

Пользуясь значениями Y'' и Z'' и известными формулами, выражающими зависимость между разностями и производными, составляем значения Y'' и Z''' при $x = l$ [если функции $p(x)$ и $q(x)$ заданы аналитически, а не таблично, то эти значения найдем и из предложенного уравнения, продифференцировав его], пусть они будут M и N, тогда, на основании условий (**) и (***), должно быть

$$AP + BQ = 0$$

$$AM + BN = 0$$

и частное значение определителя $F(n)$ есть

$$F(n) = PN - QM$$

Если оно окажется равно нулю, то $\lambda = n$ есть одно из истинных значений параметра λ, если же нет, то надо повторить процесс, положив $\lambda = n + k$ и т. д., применяя известную методу розыскания значения корня, близкого к данному числу n.

Таким образом, изложенная метода дает практическую возможность — при решении физических вопросов на самом деле составлять таблицы и вычислять значения фундаментальных функций, существование и свойства которых устанавливаются другими способами. Примера численного вычисления мы не приводим, так как оно ничем не отличается от показанных выше и не может представить никаких затруднений, кроме некоторой утомительности по своему однообразию.

§ **109.** Приведем одно замечание исторического характера по поводу изложенных метод.

В 1826 г. вышло в двух больших томах in 4° сочинение А. Лежандра „Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Euleriennes“, в котором этот знаменитый математик дает сводку своих сорокалетних изысканий по теории эллиптических и Эйлеровых интегралов.

Во втором томе содержатся таблицы значений интегралов первого и второго рода, т. е. функций

$$F(c, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}; \quad E(c, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

В этих таблицах значения функций F и E даны для всех значений амплитуды φ через 1° от 0° до 90° при всех значениях модульного угла θ (определяемого равенством $\sin\theta = c$) также через 1°, т. е. таблицы заключают $2 \cdot 90 \cdot 90 = 16\,200$ результатов.

Все эти числа даны с десятью знаками для θ от 0° до 45° и с девятью знаками от 45° до 90°. Самое же вычисление производилось с 14 и 12 знаками.

Кроме этих таблиц, Лежандр дает ряд других весьма обширных таблиц, вычисленных также с 12 и 14 знаками, причем все вычисления произведены им *самим*.

Отсюда ясно, каким огромным навыком и какою огромною опытностью обладал Лежандр в производстве численных вычислений.

Объясняя способ составления своих таблиц, он развивает методу разностей для вычисления интегралов простых и повторных. Между прочим, он рассматривает и двукратный интеграл, т. е. нахождение функции y, определяемой уравнением

$$y'' = f(x)$$

и начальными значениями y_0 и y_0'.

Формула, которую он для этого дает, напишется при наших обозначениях так:

$$\Delta^2 y_{n-1} = \eta_n + \frac{1}{12}\Delta^2\eta_{n-1} - \frac{1}{240}\Delta^4\eta_{n-2} + \frac{31}{60\,480}\Delta^6\eta_{n-3} \qquad (*)$$

где

$$\eta_n = h^2 f(x_n)$$

и промежуток h он рекомендует брать настолько малым, чтобы в этой формуле достаточно было удерживать только первые три члена.

Чтобы пользоваться этою формулою, он составляет две параллельные таблицы, совершенно подобные показанным в § 96 табл. 53 и 54, из коих одна содержит величину y и ее первые и вторые разности, вторая содержит «вспомогательную», как Лежандр ее называет, величину η и ее разности до четвертого порядка. Предполагая, что в первой части таблицы дошли до значения y_n, соответствующего значению $x = x_n$, он вычисляет для второй части величины η_{n+1} и η_{n+2}, пользуясь которыми находит нужные ему разности $\Delta^2\eta_{n-1}$ и $\Delta^4\eta_{n-2}$, стоящие в той же прямой строке, как и η_n, по ним он составляет по ф-ле (*) величину $\Delta^2 y_{n-1}$, затем

$$\Delta y_n = \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-1} \quad \text{и} \quad y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$$

Изложив эту методу, он говорит: „Было бы желательно подобными же способами и при помощи столь же быстро сходящихся родов иметь возможность вычислять последовательные значения функции u, определяемой дифференциальным уравнением

$$\frac{du}{d\varphi} = F(u, \varphi)$$

или уравнением более высокого порядка. Эта задача того же рода, как и задачи, относящиеся к вычислению простых и повторных интегралов, *но ее решение представляет гораздо большие трудности, и до сих пор мы не видим другого способа к его достижению, как применение формулы Тейлора*", после чего он излагает методу Эйлера.

Но стоило бы Лежандру выразить величины $\Delta^2\eta_{n-1}$ и $\Delta^4\eta_{n-2}$ через имеющиеся в его таблице разности, стоящие в последней *косой* строке, идущей от η_n наискосок вверх, и заметить, что отбрасывание всех разностей, коих порядок выше четвертого, равносильно предположению, что разности четвертого порядка постоянны, он получил бы

$$\Delta^4\eta_{n-2}=\Delta^4\eta_{n-3}=\Delta^4\eta_{n-4}\dots$$

$$\Delta^2\eta_{n-1}=\Delta^2\eta_{n-2}+\Delta^3\eta_{n-2}=\Delta^2\eta_{n-2}+\Delta^3\eta_{n-3}+\Delta^4\eta_{n-3}=$$

$$=\Delta^2\eta_{n-2}+\Delta^3\eta_{n-3}+\Delta^4\eta_{n-4}$$

и, по подстановке, его формула приняла бы вид

$$\Delta^2 y_{n-1}=\eta_n+\frac{1}{12}\left[\Delta^2\eta_{n-1}+\Delta^3\eta_{n-3}+\Delta^4\eta_{n-4}-\frac{1}{20}\Delta^4\eta_{n-4}\right]$$

Это и есть формула Штёрмера, которая как раз решает намеченную Лежандром задачу именно так, как Лежандр имел это в виду.

Это замечание может служить примером того, как решение, которое представляется, после того как оно дано, весьма простым и очевидным, ускользало от внимания даже таких математиков, как Лежандр.

§ 110. В вопросах инженерного дела встречаются уравнения вида

$$y^{\text{IV}}=f(x,y)$$

(изгиб балки на упругом основании). Для уравнений такого вида можно воспользоваться тем приемом, который Лежандр применяет для вычисления четырехкратного интеграла, т. е. исходить из формулы

$$\Delta^4 y_{n-3}=\eta_{n-1}+\frac{1}{6}\Delta^2\eta_{n-2}-\frac{1}{720}\Delta^4\eta_{n-3}+\frac{421}{4755\cdot 1024}\Delta^6\eta_{n-4}-\dots$$

где

$$\eta_n=h^4y_n^{\text{IV}}=h^4f(x_n,y_n)$$

Ограничиваясь разностями четвертого порядка, можем положить

$$\Delta^4 y_{n-3}=\Delta^4\eta_{n-4}$$

и наша формула будет

$$\Delta^4 y_{n-3}=\eta_{n-1}+\frac{1}{6}\Delta^2\eta_{n-2}-\frac{1}{720}\Delta^4\eta_{n-4}$$

При достаточно малом промежутке h последний член может быть сделан также настолько малым, что он не будет оказывать влияния на результат, и мы получим формулу

$$\Delta^4 y_{n-3} = \eta_{n-1} + \frac{1}{6}\Delta^2 \eta_{n-2}$$

вычислéние по которой настолько очевидно, что дальнейших пояснений не требует.

Замéтим еще, что при численном решении дифференциальных уравнений по методе Штёрмера в том виде, как она здесь изложена, не приходится дифференцировать функции $f(x, y)$, стоящей в правой части уравнения, а приходится иметь дело лишь с частными значениями этой функции, следовательно, эта функция может заключать и такие элементы, которые задаются графически, что особенно важно для вопросов прикладной математики.

§ **111.** Мы привели целый ряд способов приближенного численного интегрирования дифференциальных уравнений; спрашивается, какой же способ применять в каком-либо конкретном случае, в особенности если затем требуется произвести не отдельное единичное вычисление, а целую серию однообразных расчетов.

В этом случае надо сперва обстоятельно обследовать подробно проделанными примерами степень точности, достижимую тем или иным способом, требуемую затрату труда и времени и остановиться на том способе, где требуемая практическими потребностями точность достигается наименьшею затратою работы. Для примера такого изучения дадим применение изложенных способов к численному интегрированию уравнения движения поезда для того случая, когда он, выйдя со стоянки на станции, проходит сперва площадку, а затем входит на подъем.

Все данные и обозначения заимствуем из сочинения проф. Ю. В. Ломоносова „Тяговые расчеты“.

При движении поезда по площадке имеем уравнение

$$\frac{dv}{dt} = \zeta[f - w_0] \qquad (1)$$

причем

$$\zeta = 120; \quad f = \frac{F}{P+Q}; \quad w_0 = 1.5 + 0.05\,v$$

где F — сила тяги паровоза, $P+Q$ — вес поезда, w_0 — удельное сопротивление, v — скорость. За единицы приняты: километр, час, тонна для веса поезда, килограмм для силы тяги.

При переходе поезда с площадки на подъем уравнение движения его есть

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \zeta[f - w_0 - ks]$$

где s есть длина той части поезда, которая уже вошла на подъем,

$$k=\frac{i_2}{L}$$

причем i_2 есть уклон в тысячных, L — длина поезда.

Наконец, движение поезда по подъему дается уравнением

$$\frac{dv}{dt}=\zeta[f-w_0-i_2] \tag{3}$$

Все эти три уравнения можно соединить в одну систему

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt}&=\zeta[f-w_0-k(x-l)]\\ \frac{dx}{dt}&=v\end{aligned} \tag{4}$$

условившись считать

$$\begin{aligned}&k(x-l)=0 && \text{пока } x\leqslant l\\ &k(x-l)=\frac{i_2}{L}s && \text{„} \quad l\leqslant x\leqslant L+l\\ &k(x-l)=i_2 && \text{„} \quad x>L+l\end{aligned} \tag{5}$$

здесь x есть расстояние головы поезда от станции (пройденный путь), l — длина площадки. Начальные условия суть: при $t=0$ должно быть

$$x=0;\ v=0 \tag{4}$$

§ **112.** Для нашего частного примера численные задания таковы:

$$\begin{aligned}\zeta&=120\\ P+Q&=1830 \text{ т}\\ i_2&=6\\ l&=0.640 \text{ км}\\ L&=0.560 \text{ км}\\ \zeta k&=1280\end{aligned}$$

Положим для сокращения письма

$$p=\zeta(f-w_0)=\zeta\left[\frac{F}{P+Q}-w_0\right] \tag{6}$$

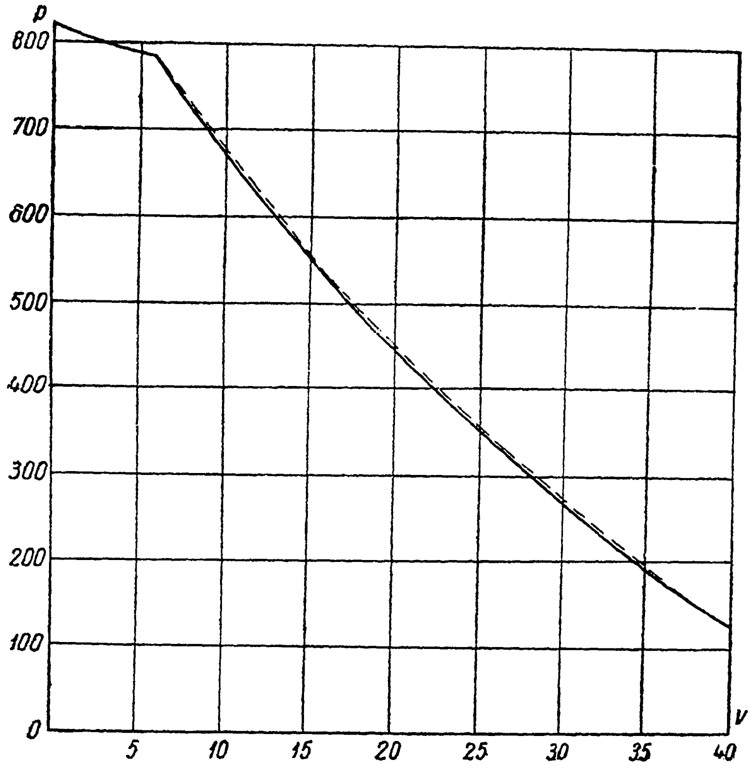
тогда, взяв величины силы тяги F товарного паровоза серии Э при езде с вполне открытым регулятором и наполнением 0.4, имеем следующую табл. 79 значений функции p:

Таблица 79

Значения функции $p = \zeta(f - w_0)$

v	p	v	p	v	p	v	p
0	820	10	676	20	446	30	266
2	808	12	625	22	403	32	235
4	796	14	575	24	370	34	205
6	784	16	523	26	334	36	188
8	735	18	486	28	299	38	148
10	676	20	446	30	266	40	122

Эти значения сняты с кривой, построенной в крупном масштабе, уменьшенный снимок которой дан на фиг. 69, а именно: для v 1 см за единицу, для p 1 см за двадцать единиц. Участок от $v = 0$ до $v = 6$ представляет прямую линию.



Фиг. 69.

Приняв время t за переменную независимую, берем его через равные промежутки $\tau = 0.005$, значения p снимаем по аргументу v с упомянутой кривой или выбираем из вышеприведенной таблицы и располагаем вычисление, как показано в табл. 80.

Таблица 80

Движение поезда

Уравнения:

$$\frac{dv}{dt} = p - \zeta k\,(x - l);\quad \frac{dx}{dt} = v$$

Формулы:

$$\eta_n = [p_n - \zeta k\,(x - l)];\quad \tau = q_n \tau$$

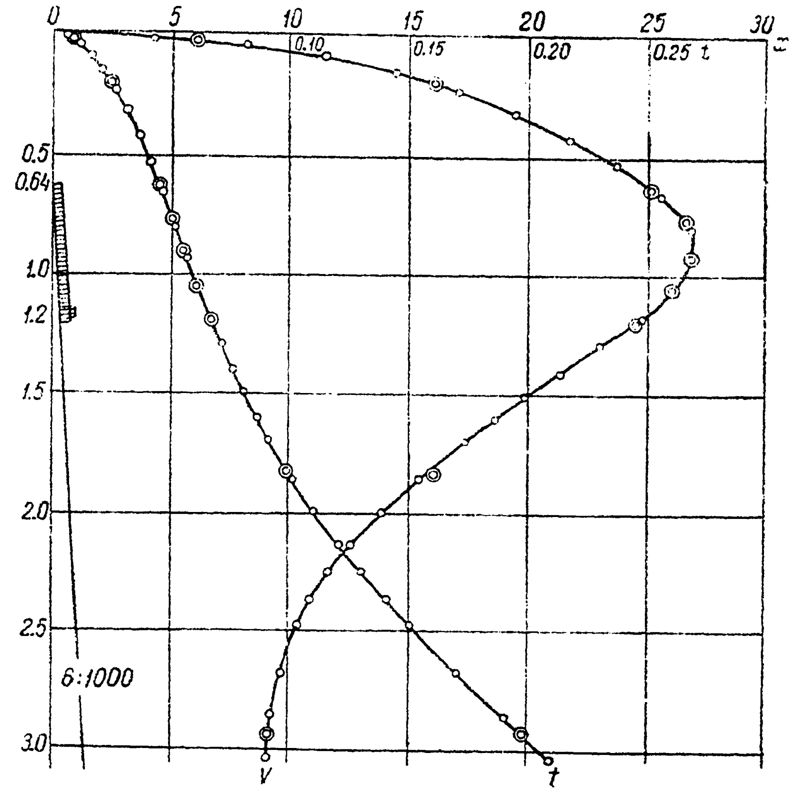
$$\Delta v_n = \eta_n + \frac{1}{2}\,\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\,\Delta^2 \eta_{n-2};\quad \Delta x_n = \frac{1}{2}\,(v_n + v_{n+1})\tau$$

$$v_{n+1} = v_n + \Delta v_n;\quad x_{n+1} = x_n + \Delta x_n;$$

n	v_n	Δv_n	q_n	η_n	$\Delta \eta_n$	$\Delta^2 \eta_n$		x_n	Δx_n	$\zeta k(x_n - l)$	t_n
0	0	4.10	820	4.10	—0.12			0	0.010		0
1	4.10	3.92	795	3.93	—0.31	—0.19		0.010	0.031		0.005
2	8.02	3.41	735	3.67	—0.48	—0.17		0.041	0.048		0.010
3	11.43	2.88	633	3.19	—0.36	0.12		0.089	0.065		0.015
4	14.31	2.70	567	2.83	—0.30	0.06		0.154	0.079		0.020
5	17.01	2.41	507	2.53	—0.24	0.06		0.233	0.092		0.025
6	19.42	2.20	458	2.29	—0.21	0.03		0.325	0.103		0.030
7	21.62	1.98	415	2.03	—0.19	0.02		0.428	0.113		0.035
8	23.60	1.80	378	1.89	—0.33	—0.14		0.541	0.123		0.040
9	25.40	1.32	311	1.56	—0.96	—0.63		0.664	0.133	34	0.045
10	26.72	—0.13	120	0.60	—0.84	0.12		0.797	0.134	201	0.050
11	26.59	—0.61	— 49	—0.24	—0.79	0.05		0.931	0.133	373	0.055
12	25.98	—0.40	—207	—1.03	—0.72	0.07		1.064	0.129	541	0.060
13	24.53	—1.71	—350	—1.75	0.10	—		1.193	0.116	710	0.065
14	22.87	—1.61	—329	—1.65	0.16	—		1.299	0.103	720	0.070
15	21.26	—1.42	—298	—1.49	0.10	—		1.407	0.103	720	0.075
16	19.84	—1.35	—277	—1.39	0.12	—		1.510	0.096	720	0.080
17	18.49	—1.17	—214	—1.22		—		6.606	0.090	720	0.085
18	17.32							1.696		720	0.090
16	19.84			—2.77	0.57						
18	17.32	—1.92	—220	—2.20	0.42	—0.15		1.696	0.167	720	0.090
20	15.40	—1.63	—178	—1.78	0.38	—0.04		1.863	0.146	720	0.100
22	13.77	—1.20	—140	—1.40	0.31	—0.07		2.009	0.132	720	0.110
24	12.57	—0.96	—109	—1.09	0.22	—0.09		2.141	0.121	720	0.120
26	11.61	—0.80	— 87	—0.87	0.21	—0.01		2.262	0.112	720	0.130
23	10.81	—0.56	— 66	—0.66				2.374	0.105	720	0.140
30	10.25							2.479		720	0.150
26				—1.74	0.70						
30	10.25	—0.69	— 52	—1.04	0.40	—		2.479	0.198	720	0.150
34	9.56	—0.44	— 32	—0.64	0.36	—		2.677	0.186	7 0	0.170
38	9.12	—0.10	— 14	—0.23				2.863	0.181	720	0.190
42	9.02							3.044		720	0.210

Это вычисление произведено при помощи логарифмической линейки длиною 50 см.

Задаваясь показанными в таблице значениями x и беря соответствующие им значения v и t, строим кривые (фиг. 70), представляющие движение поезда графически, причем v и t будут выражены в функции расстояния x



Фиг. 70.

§ **113.** Показанное в табл. 80 вычисление произведено с точностью, далеко превышающей не только достижимую на практике, но и самую практическую потребность, — смысл такого вычисления может состоять лишь в том, чтобы сличать результаты, получаемые другими упрощенными приемами, с этими излишне точными и таким образом судить о точности этих приемов и способов.

Дадим в пояснение этого некоторые численные примеры.

Возьмем способ Чечетта („Тяговые расчеты", стр. 135), сущность которого состоит в том, что кривая

$$p = f - w_0$$

заменяется ломаной, в нее вписанной (фиг. 69) или около нее описанной, для каждого такого прямолинейного участка уравнение движения интегрируется в конечном виде, и, следовательно, в результате получается таблица, подобная табл. 81.

Понятно, что замена кривой p ломаною может быть выполнена на бесчисленное множество манеров и что, взяв звенья ломаной достаточно малыми, можно достигнуть какой угодно точности, но задача состоит не столько в достижении этой точности, сколько простоты расчета, с тою ограниченной степенью точности, которая требуется для практики. Этой части касаться здесь не будем.

На каждом звене ломаной будет

$$p = a - bv \tag{7}$$

причем a и b для каждого отдельного звена постоянные, от звена же к звену меняются. Обозначим через a_n, b_n значения a и b для n-го участка кривой, т. е. для участка, заключенного между точками

$$v = v_n, \; p = p_n \quad \text{и} \quad v = v_{n+1} \quad \text{и} \quad p = p_{n+1}$$

тогда будет

$$\begin{gathered} b_n = \frac{p_n - p_{n+1}}{v_{n+1} - v_n} \\ a_n = p_n + b_n v_n = p_{n+1} + b_n v_{n+1} = \frac{p_n v_{n+1} - p_{n+1} v_n}{v_{n+1} - v_n} \end{gathered} \tag{8}$$

Уравнение движения поезда будет

$$\begin{gathered} \frac{dv}{dt} = a_n - b_n v \\ \frac{dx}{dt} = v \end{gathered} \tag{9}$$

и начальные условия: при $t = t_n$ должно быть

$$x = x_n \text{ и } v = v_n \tag{10}$$

Отсюда следует

$$t - t_n = \frac{1}{b_n} \lg \frac{a_n - b_n v_n}{a_n - b_n v} = \frac{1}{b_n} \lg \frac{p_n}{p} \tag{11}$$

Затем

$$a_n - b_n v = (a_n - b_n v_n) e^{-b_n (t - t_n)}$$

$$v - v_n = \frac{1}{b_n} (a_n - b_n v_n) \left[1 - e^{-b_n (t - t_n)}\right] \tag{11'}$$

$$x - x_n = v_n (t - t_n) + \frac{1}{b_n} (a_n - b_n v_n) \left[(t - t_n) - \frac{1}{b_n} \left(1 - e^{-b_n (t - t_n)}\right)\right]$$

т. е.

$$x - x_n = \frac{1}{b_n} [a_n (t - t_n) - (v - v_n)] \tag{12}$$

Из ф-л (11) и (12) видно, что для пользования ими удобнее задаваться значениями v, но тогда не получится сразу то значение $x = l$, при котором поезд вступает на подъем, и соответствующие этому значению x величины v и t придется определять или методою последовательных приближений, или интерполированием, как будет показано на примере, где показан порядок и схемы вычисления по ф-лам (11) и (12) (табл. 81).

§ 114. После того как вычислены значения

$$v = v_0 \quad \text{и} \quad t = t_0$$

соответствующие значению $x = l$ или $s = 0$, т. е. выступлению поезда на подъем, уравнение движения его будет

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + b\frac{ds}{dt} + ks = a \tag{13}$$

и начальные условия: при $t = t_0$ должно быть

$$s = 0$$

$$v = v_0 = \left(\frac{ds}{dt}\right)_0$$

предполагая, что для соответствующего промежутка скоростей

$$p = a - bv$$

Интеграл ур-ния (13) при указанных условиях есть

$$s = e^{h(t - t_0)}\left\{C_1 \cos\frac{2\pi(t - t_0)}{\tau} + C_2 \sin\frac{2\pi(t - t_0)}{\tau}\right\} + \frac{a}{k} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} h &= \frac{b}{2}; \qquad \tau = \frac{2\pi}{\sqrt{k - h^2}} \\ C_1 &= -\frac{a}{k}; \qquad C_2 = \left(v_0 - \frac{ha}{k}\right)\frac{1}{\sqrt{k - h^2}} \end{aligned} \tag{15}$$

Ф-лы (14) и (15) не могут быть признаны удобными для вычислений, когда требуется лишь небольшое число значений s.

Ур-нием (13) приходится пользоваться лишь в течение того промежутка времени, пока поезд не войдет целиком на подъем, т. е. для значений s от $s = 0$ до $s = L$, причем L не превышает 0.6, поэтому выгоднее заменить ур-ние (13) системою

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= a - bv - ks \\ \frac{ds}{dt} &= v \end{aligned} \tag{13'}$$

и принять s за переменное независимое, т. е. писать эту систему так:

$$\begin{aligned}\frac{vdv}{ds} &= a - bv - ks \\ dt &= \frac{1}{v}\,ds\end{aligned} \tag{13''}$$

Вообразим, что промежуток L подразделен на несколько частей равных или неравных, обозначим через s_0, s_1, s_2, ... s_n, ... соответствующие началу каждой части значения s, тогда для промежутка $s_{n+1} - s_n$ имеем уравнение

$$\frac{vdv}{ds} = a - bv_n - ks_n - b(v - v_n) - k(s - s_n)$$

или

$$\frac{vdv}{ds} = p_n - ks_n - b(v - v_n) - k(s - s_n) \tag{16}$$

С другой стороны, при достаточно малом значении $s - s_n$, в разложении $v - v_n$ по Тейлорову ряду можно ограничиться одним первым членом и писать

$$v - v_n = (s - s_n)\,v_n'$$

Но из ур-ния (16) следует

$$v_n' = \frac{p_n - ks_n}{v_n} = \frac{q_n}{v_n}$$

поэтому ур-ние (16) напишется так

$$\frac{vdv}{ds} = q_n\left[1 - \frac{b}{v_n}(s - s_n)\right] - k(s - s_n)$$

которое по интегрировании дает

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_n^2) = q_n(s - s_n) - \frac{1}{2}\left(q_n\frac{b}{v_n} + k\right)(s - s_n)^2 \tag{17}$$

полученная ф-ла (17) и послужит для последовательного вычисления скоростей; после того как скорости

$$v_0,\ v_1,\ v_2, \ldots v_n,\ v_{n+1}, \ldots$$

вычислены, вычисляем время по формуле

$$t_{n+1} - t_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{v_{n+1}} + \frac{1}{v_n}\right]\cdot\left[s_{n+1} - s_n\right] \tag{18}$$

и суммируем эти промежутки.

Чтобы судить о степени точности ф-лы (17), достаточно вычислить наибольшее значение первого из отброшенных членов, который будет

$$-b\frac{(s-s_n)^3}{6}v_n''$$

Из ур-ния (16) следует

$$vv''+v'^2=-bv'-k$$

откуда

$$v_n''=-\frac{1}{v_n}[bv_n'+k+v_n'^2]$$

В нашем случае наибольшее значение q_n есть 360, v_n около 26, $k=1280$, $b=19.3$, значит,

$$v_n'=\frac{q_n}{v_n}=14$$

$$v_n''=-\frac{1}{36}[270+1280+196]=-67$$

Если брать

$$s-s_n\leqslant 0.2$$

то будет

$$\frac{1}{6}bv_n''(s-s_n)^3\leqslant\frac{1}{6}19.3\cdot 67\cdot 0.008\leqslant 1.7<2$$

Такая точность может почитаться более чем достаточной, следовательно, длину L можно подразделить на три части, ибо погрешности, равной 2 в значении v^2, соответствует при $v=25$ погрешность в самом значении v, равная $\frac{1}{25}=0.04$. Если довольствоваться в значении v погрешностью в 0.1, то v^2 при $v=25$ погрешность будет 5

(в самом деле, $\sqrt{625}=25$; $\sqrt{630}=25.0998$),

следовательно, можно было бы брать

$$\frac{1}{6}b\cdot v_n''(s-s_n)^3\leqslant 5$$

т. е. при значениях, приведенных выше,

$$s-s_n\leqslant\sqrt[3]{\frac{30}{19.3\cdot 67}}\leqslant 0.28$$

т. е. длину L достаточно подразделять пополам.

Так, в нашем случае, заменим кривую p ломаной, составленной из следующих звеньев:

$$
\begin{array}{llll}
0 < v \leqslant 6; & a = 820; & b = 6.00 \\
6 \leqslant v \leqslant 16; & a = 937; & b = 25.6 \\
16 \leqslant v \leqslant 26; & a = 837; & b = 19.3 \\
26 \leqslant v \leqslant 36; & a = 746; & b = 15.8
\end{array}
$$

Тогда вычисление расположится, как показано в следующих таблицах.

Таблица 81

Движение на площадке

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
v	p	$\lg p$	$\lg \frac{p_n}{p_{n+1}}$	$t_{n+1} - t_n = \frac{2.302}{b_n}(\mathrm{IV})$	$a_n(\mathrm{V})$	$x_{n+1} - x_n$	t	x
0	820	2.9138					0.0000	0.000
			0.0195	0.0075	6.15	0.025		
6	784	2.8913					0.0075	0.025
			0.1717	0.0154	14.50	0.176		
16	528	2.7226					0.0229	0.201
			0.1976	0.0237	19.80	0.507		
26	335	2.5250					0.0466	0.708

Таблица 82

Вход поезда на подъем

Вычисление скоростей ф-лы (17)

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
s_n	p_n	ks_n	$q_n = (\mathrm{II}) - (\mathrm{III})$	$(\mathrm{IV}) \cdot h$ $(h = 0.140)$	$q_n \cdot \frac{h}{v_n}$	$(\mathrm{VI} + k)$	$-(\mathrm{VII}) \cdot \frac{h^2}{2}$	$2\left[(\mathrm{V}) + (\mathrm{VIII})\right]$	v_n^2	v_n
0	350	0	350	49.0	257	1547	—15.1		632	25.13
								69.8		
0.140	325	130	145	20.3	106	1386	—13.6		702	25.50
								13.4		
0.280	321	360	— 39	— 5.6	—23.2	1252	—12.5		715	26.74
								—36.2		
0.420	334	540	—206	—28.1	—152	1128	—11.2		679	25.05
								—78.6		
0.560		720							600	24.52

Интерполирование: $0.708 - 0.640 = 0.068$

$$\tau = \frac{0.068}{26} = 0.0026$$

$$v = 26 - 335 \cdot 0.0026 = 26 - 0.87 = 25.13$$

Таблица 83

Вход поезда на подъем

Вычисление времени (ф-ла 18)

s	$\frac{1}{v}$	$\frac{h}{2}\left[\frac{1}{v_n}+\frac{1}{v_{n+1}}\right]$	t
0	0.0389	0.0054	0.0440
0.140	0.0378	0.0053	0.0493
0.280	0.0374	0.0053	0.0546
0.420	0.0384	0.0055	0.0599
0.560	0.0408		0.0654

Таблица 84

Ход по подъему

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
v	p—720	lg II	$\lg \frac{p_n}{p_{n+1}}$	$t_{n+1}-t_n=$ $=(\mathrm{IV})\cdot\frac{2.302}{b}$	$(\mathrm{V})\cdot(a-720)$	$x_{n+1}-x_n$	t	x
24.52	—361	2.5575	0.2742	0.0248	3.86	0.642	0.0654	1.200
16.0	—192	2.2333	1.1372	0.0985	21.70	1.100	0.0982	1.842
9.0	— 14	2.1451					0.1967	2.942
8.15	0	—	—	—	—	—	∞	∞

$$\tau_1=\frac{0.063}{25.26}=0.00266$$

$$v_1=26-325\cdot0.00266=26-0.87=25.13.$$

Итак, при

$$x=0.640$$

будет

$$v=25.13;\quad t=0.0440$$

Предельная скорость $V=\frac{a-720}{b}=\frac{217}{25.6}=8.15$

Согласие результатов, вычисленных по этому приему, с результатами, полученными по первому приему, видно, например, из сопоставления следующих чисел:

x	t по I пр.	t по II пр.
0.640	0.0437	0.0440
1.200	0.0653	0.0654
2.900	0.194	0.193

Для большей наглядности, по результатам вычислений по первому приему построена кривая (фиг. 70), на которой соответствующие точки отмечены маленькими кружочками. Результаты вычисления по второму приему нанесены на ту же кривую и отмечены двойными кружочками.

Мы видели, что при вычислении по ф-лам (17) и (18) времени и скорости по выходе поезда на подъем возможно брать промежутки $\leqslant 0.28$, т. е. подразделять длину L пополам, в таком случае расчет сведется к следующему:

Таблица 85

Вход поезда на подъем

Вычисление скоростей

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
s_n	p_n	ks_n	q_n=(II)—(III)	$(IV)\cdot h$ $(h=0.280)$	$\frac{q_n b}{v_n}$	(VI)+k	$(VII)\cdot\frac{h^2}{2}$	2 [(V)+(VIII)]	v_n^3	v_n
0	350	0	350	98	264	1544	—60	76	632	25.13
0.280	323	360	— 37	—10	— 27	1253	—49	—118	708	26.61
0.560									504	24.29

Таблица 86

Вход поезда на подъем

Вычисление времени

s_n	$\frac{1}{v_n}$	$\frac{h}{2}\left(\frac{1}{v_n}+\frac{1}{v_{n+1}}\right)$	t
0	0.0398	0.0108	0.0440
0.230	0.0376	0.0110	0.0548
0.560	0.0412		0.0658

Этот поверочный расчет с ясностью показывает, что при пользовании ф-лами (17) и (18) длину поезда достаточно подразделять пополам при расчете его входа на подъем.

§ **115.** Заметим по поводу формул (17) и (18), что практически ими решается вопрос об интегрировании уравнения

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = [f - w_0 - ks] \tag{2}$$

движения поезда при выходе на подъем с требуемой для практики степенью точности для всякого вида функции f, ибо входящая в эти формулы величина b в том случае, когда функция f задана аналитически, есть не что иное, как

$$b = f'(v_n)$$

когда же функция f задана графически, то величина b получится по формуле

$$b = \frac{f(v_n - \alpha) - f(v_n + \alpha)}{2\alpha}$$

где α — достаточно малая величина, при этом величину b достаточно знать с грубым приближением, ибо член $\frac{bq_n}{v_n}$, в который она входит, мал по сравнению с k и имеет малый множитель $\frac{h^2}{2}$.

Так, в нашем случае, скорость v_n близка к 25, из таблицы значений функции p видно, что

$$b = \frac{370 - 334}{2} = 18$$

Таблица 87

Вход поезда на подъем

Вычисление скоростей ($b = 18$)

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
s_n	p_n	ks_n	q_n=(II)—(III)	(IV)$\cdot h$	$\frac{b}{v_n}q_n$	(IV)+k	—(VII)$\frac{h^2}{2}$	(V)+(VIII)	v_n^2	v_n
0	350	0	350	98	249	1529	—60	76	632	25.13
0.280	323	360	— 37	—10	— 27	1253	—49	—118	708	26.61
0.560									590	24.29

повторяя расчет с этим значением b, имеем, выбирая все числа из табл. 85' т. е. совершенно тот же результат, как и выше при $b = 19.3$, которое взято для промежутка от $v = 16$ до $v = 26$, вместе с тем ясно, что значение b, взятое для более тесного промежутка, более соответствует действительности.

§ 116. Рассмотрим теперь, какова будет погрешность, если ф-лы (17) и (18) применить совсем не делая подразделения, т. е. взяв $h = L$; в таком случае наши формулы будут

$$\begin{aligned} v_1^2 &= v_0^2 + 2p_0 L - \left(p_0 \frac{b}{v_0} + k\right) L^2 \\ t_1 &= t_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1}\right) L \end{aligned} \tag{19}$$

при само собою понятном обозначении.

В нашем случае будет

$$v_0 = 25.13;\ p_0 = 350;\ b = 18;\ k = 1280;\ t_0 = 0.0440$$

и мы получим

$$\begin{aligned} v_0^2 &= 633 \\ 2p_0 L &= 392 \\ -\left(\frac{p_0 b}{v_0} + k\right) L^2 &= -480 \\ \hline v_1^2 &= 545;\ v_1 = 23.32. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_0} &= 0.0398 \\ \frac{1}{v_1} &= 0.0429 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1}\right) L &= 0.0231 \\ t_0 &= 0.0440 \\ \hline t_1 &= 0.0671 \end{aligned}$$

Иначе

$$\begin{aligned} \frac{2L}{v_0 + v_1} &= 0.0231 \\ t_0 &= 0.0440 \\ \hline t_1 &= 0.0671 \end{aligned}$$

Тогда как при подразделении получались истинные значения

$$v_1 = 24.52 \quad \text{и} \quad t_1 = 0.0654$$

Такая точность едва ли достаточна, и в ф-ле (17) надо брать и следующий член, тогда ф-ла (17) заменится такой:

$$v_1^2 = v_0^2 + 2p_0 L - \left(\frac{b}{v_0} p_0 + k\right) L^2 + \frac{1}{3} b \left[\frac{b}{v_0} p_0 + k + \frac{p_0^2}{v_0^2}\right] L^3 \tag{20}$$

которую удобнее для вычисления писать так:

$$v_1^2 = v_0^2 + 2p_0 L - \left(\frac{b}{v_0} p_0 + k\right) L^2 + \frac{1}{3} \frac{bL}{v_0} \left[\frac{b}{v_0} p_0 + k\right] L^2 + \frac{1}{3} b \frac{p_0^2}{v_0^3} L^3 \tag{20'}$$

Таким образом, при наших данных будет

$$
\begin{array}{rr}
v_0 = 25.13 \qquad v_0^2 = & 632 \\
2p_0 L = & 392 \\
-\left(\frac{b}{v_0}p_0 + k\right)L^2 = & -480 \\
\frac{1}{3}\frac{bL}{v_0}\left[\frac{b}{v_0}p_0 + k\right]L^2 = & +\ 64 \\
\frac{1}{3}\frac{bp_0^2}{v_0^3}\cdot L^3 = & +\ 8 \\
\hline
v_1^2 = & 616 \qquad v_1 = 24.84
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
t_1 - t_0 = \frac{2L}{v_0 + v_1} = 0.0224 \\
t_0 = 0.0440 \\
\hline
t_1 = 0.0664
\end{array}
$$

Эти значения, как видно, гораздо ближе к истинным $v_1 = 24.52$ и $t_1 = 0.0654$, и ф-ла (20), несмотря на кажущуюся сложность при вычислении, пользуясь логарифмической линейкой, решает вопрос с достаточной простотой.

§ **117.** Табл. 80—84 (§§ 112—114) и кривая фиг. 70 показывают, насколько согласуются результаты расчетов, производимых по различным способам. Для целей практики вообще нет надобности в такой точности, которая является чисто расчетною и представляет лишь поверку вычислений, убеждая в отсутствии в них грубых ошибок.

Лаплас, в предисловии к громадному тому своего „Исчисления вероятностей“, говорит: „...la théorie des probabilités n'est que le bon sens confirmé par le calcul“. Техник, применяя математику к практическим вопросам, сам должен заботиться, чтобы она служила подспорьем здравому смыслу; он должен помнить, что вычисление можно произвести сколь угодно точно, но результат вычисления не может быть точнее тех данных и тех предположений, на коих оно основано, поэтому точность вычисления должна соответствовать точности данных и той практической потребности, для которой оно производится.

ГЛАВА VIII

СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

§ **118.** В древнейшей и точнейшей из наук, основанных на измерениях и наблюдениях — астрономии, уже более ста лет, для обработки наблюдений и получения из них наиболее достоверных результатов, применяются определенные правила, составляющие так называемый „способ наименьших квадратов".

Способ этот изобретен Гауссом в 1794 г., когда Гауссу было 17 лет, но опубликован им лишь в его знаменитом сочинении „Теория движения небесных тел по коническим сечениям вокруг солнца", изданном в 1808 г.

Здесь надо заметить, что еще в 1806 г. Лежандр, в своем сочинении „Новый способ определения орбит комет", предложил эту методу, но далеко не так полно, как это сделано Гауссом в его „Теории движения".

Гаусс затем в течение своей долгой жизни (он умер в 1855 г.) неоднократно возвращался к изложению своей методы с разных точек зрения и довел ее до высшей степени законченности и совершенства.

Мы дадим здесь краткое изложение этой методы, имея в виду обработку тех весьма простых наблюдений или измерений, которые приходится делать в простейших технических вопросах.

§ **119.** Всякое измерение чего бы то ни было и чем бы измерение ни производилось всегда заключает некоторую погрешность. Понятно, что чем эта погрешность меньше, тем измерение *точнее*, но практика всех измерений показывает, что избежать погрешностей *невозможно*. Это обнаруживается тем, что при повторении несколько раз тем же самым прибором того же измерения получаются результаты, разнящиеся между собою. По величине этих разностей можно уже иметь общее суждение о точности измерения и о точности результата, но чтобы сделать это суждение объективным, надо, чтобы оно производилось по определенным правилам и выражалось числами.

Наша задача и состоит в изложении этих правил.

Прежде всего необходимо условиться, какие погрешности составляют предмет нашего рассмотрения.

Погрешности при измерениях могут происходить от разных причин, как, например:

1) Неправильно произведенного отсчета (скажем, вместо 17 записано 12), — такого рода погрешности составляют просчет или описку и не относятся к предмету нашего рассмотрения. При обработке наблюдений такие просчеты обыкновенно сами собою обнаруживаются и могут быть исправлены.

2) Может оказаться, что самое измерение производилось неточным прибором — скажем, с чертежа, составленного пользуясь „верною" миллиметровой линейкой, снимались ординаты другою линейкой, 500 делений которой, хотя и названных миллиметрами, составляют всего 498 делений первой. Ясно, что все измеренные ординаты будут заключать погрешность, пропорциональную величине самой ординаты, так что эта погрешность следует *определенному закону*, на основании которого ее можно учесть и исключить. Такая погрешность называется *систематической*, определение ее, учет и исключение относятся в каждом частном случае к изучению и выверке того прибора, которым измерение производилось, и также не входят в нашу задачу.

3) Погрешности могут происходить от какой-либо постоянно действующей причины, вследствие которой в ходе этих погрешностей является возможность заметить ясно выраженную закономерность, по которой затем можно обнаружить и самую причину погрешностей.

Приведем два примера погрешностей этого рода из курса астрономии, читанного в Парижской политехнической школе известным астрономом Файем.

1) При определении широты Парижской обсерватории, по наблюдениям прохождения через меридиан различных звезд, обнаружено, что широта получается различная, смотря по зенитному расстоянию, как показано в следующей таблице:

Зенитное расстояние	Широта
0°........	48°50′10″.9
10	48 50 11.8
22	48 50 11.9
31	43 50 12.1
40	48 50 13.2
53	48 50 13.3
63	48 50 13.5
74	48 50 14″.3

Здесь закономерность ясно видна — определяемая широта тем больше, чем больше зенитное расстояние, послужившее для ее определения.

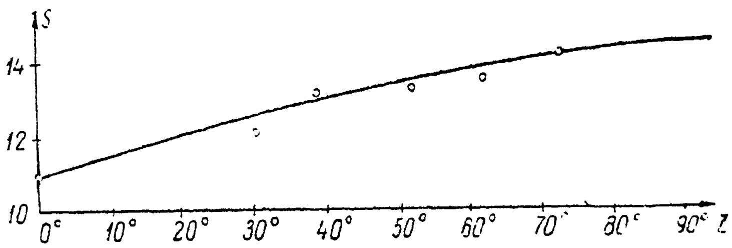
Эта закономерность станет еще нагляднее, если представить эту таблицу графически (фиг. 71). Из этого чертежа видно, что „согласная" кривая, проведенная возможно близко к нанесенным точкам, имеет ясно выраженный синусоидальный характер. В самом деле, положив

$$\delta = 3''.5 \cdot \sin Z$$

$$\varphi_1 = \varphi - \delta$$

получим „исправленную таблицу“ результатов:

Z	φ	δ	$\varphi_1 = \varphi - \delta$
0°	48°50′10″.9	0.″0	48°50′10″.9
10	48 50 11 .8	0. 6	48 50 11 .2
22	48 50 11 .9	1. 3	48 50 10 .6
31	48 50 12 .1	1. 8	48 50 10 .3
40	48 50 13 .2	2. 2	48 54 11 .0
53	48 50 13 ,3	2. 8	48 50 10 .5
63	48 50 13 .5	3. 1	48 50 10 .4
74	48 50 14 .3	3. 4	48 50 10 .3



Фиг. 71.

В ходе величины φ_1 уже нет явно выраженной закономерности, вместе с тем все значения этой величины гораздо ближе друг к другу, нежели неисправленные значения.

Дальнейшее исследование показало, что причина погрешности δ лежит в изгибании трубы меридианного круга под действием ее собственного веса и веса объектива ее.

2) Другой пример, приведенный в том же курсе, относится к наблюдениям Брадлея склонения звезды γ Draconis, произведенным в 1736 г., приведшим к открытию им аберрации.

Эти наблюдения сведены в табл. 88.

Здесь систематический ход отклонений от среднего также ясно виден, причем можно заметить и годичный его период, поэтому, положив

$$\varepsilon = a \sin \frac{2\pi}{365}(t + \alpha)$$

легко находим

$$a = 20''; \ \alpha = 17 \text{ дней}$$

и, придав „поправку“, увидим, что остающиеся „отклонения“ станут гораздо меньше и не будут иметь закономерного характера.

Погрешности или отклонения, имеющие закономерный характер, также относятся к систематическим и не составляют предмета нашего изучения,

Таблица 88

Месяц и число	Наблюденное полярное расстояние δ	Отклонение от среднего $\varepsilon = \delta - \delta_0$	Число дней от начала наблюдений t
Декабрь 31	38°39′54.″1	5.″4	0
Январь 30	38 39 63.5	13.8	30
Февраль 29	38 39 69.2	20.5	60
Март 30	38 39 69.2	20.5	90
Апрель 29	38 39 64.0	15.3	120
Май 29	38 39 54.9	6.2	150
Июнь 28	38 39 44.1	— 4.6	180
Июль 28	38 39 36.8	—11.9	210
Август 27	38 39 30.3	—18.4	240
Сентябрь 26	38 39 28.8	—19.9	270
Октябрь 26	38 39 31.4	—17.3	300
Ноябрь 25	38 39 39.1	— 9.6	330
Среднее δ_0=38°39′48.″7		—	—
Январь 4	38°39′52.″2	3.5	370

относящегося лишь к погрешностям, которые остаются после исключения систематических и которые называются *случайными.*

Случайные погрешности не следуют какой-либо определенной закономерности, выражающей *величину* погрешности в зависимости от времени или какой-либо иной переменной независимой: они следуют тем законам, которые выводятся в теории вероятностей по отношению к *повторению* так называемых *случайных* явлений.

§ 120. В теории вероятностей рассматриваются явления или, как их вообще называют, „события“, для наступления которых мы не можем точно указать определенной причины и сказать, наверное будет событие иметь место или нет, а можем лишь указать число случаев, благоприятных появлению данного события в общем числе всех равновозможных случаев, представляемых испытанием.

Так, например, пусть имеется колода из 52 карт, хорошо смешанных, и из этой колоды вынимают одну карту на удачу, тогда число случаев, благоприятных тому, что эта карта будет данной, например бубновой, масти, есть 13, общее число всех равновозможных случаев есть 52.

Делают такое определение: ***вероятностью события называется отношение числа случаев, благоприятных его появлению, к числу всех равновозможных случаев.*** Так, в нашем примере вероятность, что вынутая карта будет бубновой масти, есть $\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$; вероятность, что это будет туз бубен, есть $\frac{1}{52}$, вероятность появления девятки любой масти есть $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$, и т. д.

Из этого определения следует, что вероятность всегда выражается правильною дробью, т. е. дробью, заключенной между 0 и 1.

На понятие о вероятности распространяют и эти пределы, именно, если вероятность события равна нулю, то, значит, нет случаев, ему благоприятных, следовательно, оно и случиться не может; если вероятность события равна 1, то это значит, что *все* случаи ему благоприятны, следовательно, оно наверное при испытании произойдет, т. е. оно достоверно.

На теории вероятностей основаны весьма многие практические приложения, например: страховое дело, лотереи, разного рода игры, пристрелка и оценка меткости стрельбы и пр. Наука эта весьма обширна; так, теория вероятностей Лапласа представляет громадный том в 980 страниц in 4°; ясно, что нечего и пытаться дать хотя бы беглый очерк этой науки в нашем курсе, а необходимо ограничиться теми начальными понятиями, которые будут необходимы.

Два события называются *независимыми*, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого.

Докажем следующую теорему: ***вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей появления каждого из них в отдельности.***

Пусть $p_1=\frac{m_1}{n_1}$ есть вероятность первого события и $p_2=\frac{m_2}{n_2}$ вероятность второго. Приведем эти дроби к одному знаменателю и напишем их так:

$$p_1=\frac{m_1 n_2}{n_1 n_2};\quad p_2=\frac{m_2 n_1}{n_1 n_2}$$

Совместное появление обоих событий можно рассматривать как новое событие; чтобы определить его вероятность, надо сосчитать число всех равновозможных случаев и число случаев ему благоприятных.

Каждый из $n_1 n_2$ случаев, при котором может появиться первое событие, можно сопоставить с каждым из $n_1 n_2$ равновозможных случаев, при которых может появиться второе событие, поэтому число *всех* равновозможных случаев есть $n_1 n_2 \cdot n_1 n_2=(n_1 n_2)^2$.

Совершенно так же увидим, что число случаев, благоприятных совместному появлению обоих событий, есть $m_1 n_2 \cdot m_2 n_1$, значит, вероятность p их совместного появления есть

$$p = \frac{m_1 n_2 \cdot m_2 n_1}{(n_1 n_2)^2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = p_1 \cdot p_2$$

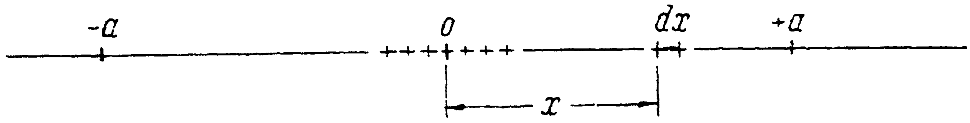
что и доказывает высказанную теорему.

Само собою понятно, что эта теорема обобщается на любое число независимых событий: вероятность совместного их появления будет

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_k$$

причем p_1, p_2, $\cdots p_k$ суть вероятности каждого из этих событий в отдельности.

§ **121.** Перейдем теперь к одному из простейших выводов знаменитой формулы Гаусса, называемой „Законом вероятности случайных погрешностей“.



Фиг. 72.

В соответствии с приведенными выше объяснениями разницы между погрешностями или ошибками случайными и систематическими, — первым, т. е. случайным, приписывают следующие свойства:

1) При большом числе испытаний число погрешностей положительных и отрицательных одинаково, точнее говоря, одинаково часто происходят равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку погрешности.

2) Частота появления малых погрешностей больше, нежели частота появлений больших в той же серии испытаний.

Положим, что произведено весьма большое число N испытаний и что наибольшая по абсолютной величине погрешность есть a, вообразим, что промежуток от $-a$ до $+a$ подразделен на весьма большое число n равных частей, и будем это число n увеличивать беспредельно. (Фиг. 72).

Ясно, что из общего числа N погрешностей некоторое число будет заключаться между x и $x + dx$. Число это будет:

1) пропорционально dx;

2) пропорционально N;

3) будет зависеть от величины x.

Таким образом, обозначая это число через ds, будем иметь

$$ds = N \cdot f(x)\, dx \tag{1}$$

значит, вероятность dp того, что погрешность лежит между x и $x + dx$, будет

$$dp = f(x)\, dx \tag{2}$$

По свойству 1-му такова же вероятность и того, что погрешность лежит между $-x$ и $(-x-dx)$, поэтому функция $f(x)$ есть функция *четная* переменной x. Примем, что это будет функция от x^2, т. е. положим

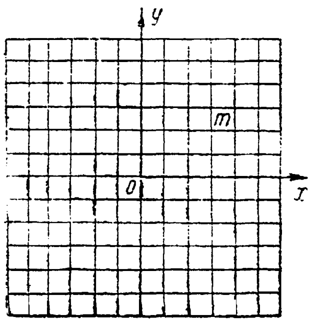
$$f(x)=\varphi(x^2) \tag{3}$$

так что будет

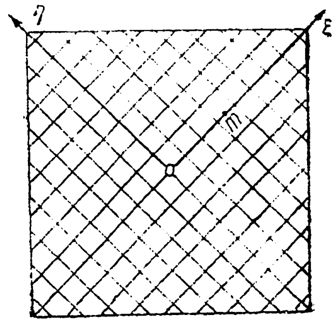
$$dp=\varphi(x^2)\,dx \tag{4}$$

Все дело теперь свелось к определению вида функции $\varphi(x^2)$.

Положим, что наши испытания можно уподобить стрельбе в цель, причем начало координат служит точкою прицеливания, отклонение же от начала



Фиг. 73а.



Фиг. 73б.

координат точки попадания составляет погрешность, появившуюся при испытании.

Положим, что на щит наложена мишень, разграфленная на элементарные прямоугольники $dx\,dy$, как показано на фиг. 73а.

Вероятность того, что точка попадания будет лежать в прямоугольнике, коего ближайшая к началу вершина имеет координаты (x, y), равна произведению вероятностей того, что погрешность лежит между x и $x+dx$, т. е. $\varphi(x^2)\,dx$, на вероятность отклонения равного y по оси oy, т. е. $\varphi(y^2)\,dy$, так что эта вероятность будет

$$dp=\varphi(x^2)\,\varphi(y^2)\,dx\,dy \tag{5}$$

Вообразим также, что положена еще вторая мишень, разграфленная, как показано на фиг. 73б, на элементарные прямоугольники $d\xi\,d\eta$, причем и ось $O\xi$ проведена через точку m, тогда будет

$$\xi^2=x^2+y^2$$

и также вероятность dp выразится произведением вероятности $\varphi(0)\,d\eta$, что попадание лежит в полосе, прилегающей к оси $O\xi$ (для которой $\eta=0$), на вероятность, что оно лежит в полосе $\xi=\sqrt{x^2+y^2}$; эта вероятность равна

$$\varphi(\xi^2)\,d\xi=\varphi(x^2+y^2)\,d\xi$$

Таким образом, имеем

$$dp = \varphi(0)\,\varphi(x^2 + y^2)\,d\xi\,d\eta \tag{6}$$

но $d\xi\,d\eta = dx\,dy$, следовательно, на основании (5) и (6), будет

$$\varphi(x^2)\,\varphi(y^2) = \varphi(0)\,\varphi(x^2 + y^2) \tag{7}$$

Это есть так называемое функциональное уравнение, которым определяется функция $\varphi(x^2)$.

Сделаем на время

$$x^2 = u, \quad y^2 = v, \quad \varphi(0) = c \tag{8}$$

тогда ур-ние (7) напишется так:

$$\varphi(u)\,\varphi(v) = c\varphi(u + v) \tag{9}$$

Придадим букве v какое-либо произвольное постоянное, независимое от u, значение k, тогда будет

$$\varphi(u)\,\varphi(k) = c\varphi(u + k) \tag{10}$$

дифференцируя это равенство, имеем

$$\varphi'(u)\,\varphi(k) = c\varphi'(u + k) \tag{11}$$

из (10) и (11) следует

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \frac{\varphi'(u + k)}{\varphi(u + k)} \tag{12}$$

положив

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \Omega(u)$$

напишем предыдущее равенство так:

$$\Omega(u) = \Omega(u + k)$$

которое должно иметь место при *всяком* значении букв u и k; положив $u = 0$, получаем

$$\Omega(0) = \Omega(k)$$

т. е. при *любом* значении аргумента k функция Ω сохраняет свою величину $\Omega(0)$, значит, это есть величина *постоянная*; обозначив ее через b, имеем

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = b$$

откуда, по интегрировании, имеем

$$\lg \varphi(u) = bu + \lg C \tag{13}$$

где C — произвольная постоянная, так же как и b.

Итак,

$$\varphi(u) = Ce^{bu} \tag{13'}$$

т. е.

$$\varphi(x^2) = Ce^{bx^2}$$

По свойству 2-му случайных ошибок, функция $\varphi(x^2)$ должна быть убывающая, значит постоянная b должна быть отрицательная. Положим

$$b = -\frac{1}{h^2}$$

тогда будет

$$\varphi(x^2) = Ce^{-\frac{x^2}{h^2}}$$

Очевидно, что каково бы число испытаний N ни было, *все* погрешности, число которых также N, заключаются между $-\infty$ и $+\infty$, поэтому, на основании ф-л (1) и (3), будет

$$s_\infty = N = N \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x^2)\, dx$$

т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x^2)\, dx = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{h^2}} = 1$$

Но интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{h^2}} dx = h \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = h\sqrt{\pi}$$

следовательно,

$$C = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

и мы имеем окончательно

$$f(x) = \varphi(x^2) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{h^2}} \tag{14}$$

Это и есть знаменитая формула Гаусса.

§ **122.** Приведенный вывод формулы Гаусса заключает ряд более или менее произвольных допущений, другие выводы этой формулы также не свободны от этого недостатка, поэтому формула Гаусса подвергалась многократно проверке опытным путем.

Все такого рода проверки основаны на сличении действительного распределения погрешностей при большом числе испытаний с распределением их, рассчитанным по формуле Гаусса.

Пусть полное число испытаний есть N, тогда число погрешностей, лежащих между $-l$ и $+l$, будет на основании ф-л (1) и (3):

$$s_l = N\int_{-l}^{+l} f(x)\,dx = \frac{N}{h\sqrt{\pi}}\int_{-l}^{+l} e^{-\frac{x^2}{h^2}}\,dx = \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{l}{h}} e^{-z^2}\,dz \tag{15}$$

Заметим здесь же, что это есть вместе с тем и число погрешностей, абсолютная величина которых лежит между 0 и l.

Для функции

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-z^2}\,dz = \Theta(t)$$

составлены таблицы, выдержка из которых приведена ниже.

Таким образом, будет

$$s_l = N\cdot\Theta\left(\frac{l}{h}\right) \tag{16}$$

Очевидно, что число погрешностей, абсолютная величина которых лежит между 0 и m, будет

$$s_m = N\Theta\left(\frac{m}{h}\right) \tag{17}$$

следовательно, число погрешностей, лежащих между l и m (по абсолютной величине), будет

$$s_l - s_m = N\left[\Theta\left(\frac{l}{h}\right) - \Theta\left(\frac{m}{h}\right)\right] \tag{18}$$

поэтому, зная для данной серии наблюдений величину h и задаваясь значениями l и m, распределим число погрешностей по величине их.

§ **123.** Как видно, чтобы пользоваться предыдущими формулами, надо определить величину h для рассматриваемой серии наблюдений.

Эта величина находится лучше всего по сумме квадратов погрешностей, происшедших при данной серии испытаний, принимая, что эта сумма равна тому ее значению, которое рассчитывается по формуле Гаусса.

В самом деле, *число погрешностей*, заключенных между x и $(x+dx)$, есть

$$ds = Nf(x)\,dx = N\frac{1}{h\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{h^2}}\,dx$$

величина же этой погрешности есть x, значит в состав суммы квадратов войдет от нее величина

$$x^2\,ds = N\frac{1}{h\sqrt{\pi}}x^2 e^{-\frac{x^2}{h^2}}\,dx$$

и, значит, теоретическая величина суммы квадратов погрешностей будет

$$S = \frac{N}{h\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{h^2}}\,dx = \frac{2N}{h\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{h^2}}\,dx$$

но интеграл

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{h^2}}\,dx = h^2\int\limits_0^{\infty} z^2 e^{-z^2}\,dz = -\frac{h^2}{2}\left[ze^{-z^2}\right]_0^{\infty} + \frac{h^2}{2}\int\limits_0^{\infty} e^{-z^2}\,dz = \frac{h^2}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Отсюда следует

$$\frac{h^2}{2} = \frac{S}{N} \tag{19}$$

Как уже сказано, величину S *полагают* равной действительно полученной при испытаниях сумме квадратов погрешностей, т. е. полагают

$$S = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots + \varepsilon_N^2$$

где

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots\ \varepsilon_N$$

сказанные погрешности.

Таким образом будет

$$\frac{h^2}{2} = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots\ \varepsilon_N^2}{N} \tag{20}$$

Величина

$$\mu = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots + \varepsilon_N^2}{N}} \tag{21}$$

называется ***среднею квадратичною*** или просто среднею ошибкою данного ряда наблюдений, и ф-лу (19) пишут часто так:

$$h = \sqrt{2}\cdot\mu = 1.414\ \mu \tag{22}$$

и вместо h задают μ.

§ 124. Чтобы ознакомиться с общим ходом функции

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-z^2}\, dz$$

приводим краткую таблицу значений ее (табл. 89).

Таблица 89

Значения функции $\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-z^2}\, dz$

t	$\Theta(t)$	t	$\Theta(t)$	t	$\Theta(t)$	t	$\Theta(t)$	t	$\Theta(t)$
0.00	0.0000	0.50	0.5205	1.00	0.8427	1.50	0.9661	2.00	0.9953
0.05	0.0564	0.55	0.5633	1.05	0.8624	1.55	0.9716	2.05	0.9963
0.10	0.1125	0.60	0.6039	1.10	0.8802	1.60	0.9763	2.10	0.9970
0.15	0.1680	0.65	0.6420	1.15	0.8961	1.65	0.9804	2.15	0.9976
0.20	0.2227	0.70	0.6778	1.20	0.9103	1.70	0.9838	2.20	0.9981
0.25	0.2763	0.75	0.7112	1.25	0.9229	1.75	0.9857	2.25	0.9985
0.30	0.3286	0.80	0.7421	1.30	0.9340	1.80	0.9891	2.30	0.9989
0.35	0.3794	0.85	0.7707	1.35	0.9438	1.85	0.9911	2.35	0.9991
0.40	0.4284	0.90	0.7969	1.40	0.9523	1.90	0.9928	2.40	0.9993
0.45	0.4755	0.95	0.8209	1.45	0.9597	1.95	0.9942	2.45	0.9995
0.50	0.5205	1.00	0.8427	1.50	0.9661	2.00	0.9953	2.50	0.9996
2.60	0.99976	2.90	0.999959	3.20	0.9999940	3.50	0.99999926	3.80	0.999999922
2.70	0.99987	3.00	0.999978	3.30	0.9999969	3.60	0.99999963	3.90	0.999999965
2.80	0.999925	3.10	0.999988	3.40	0.9999985	3.70	0.99999982	4.00	0.999999985

Из табл. 89 видно, насколько быстро функция $\Theta(t)$ приближается к 1. Заметим здесь же, что положив в (16) $l = \mu$, получим, так как $\frac{\mu}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$s_\mu = N\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

и мы, интерполируя, получим

$$\Theta(0.707) = 0.6827$$

т. е. приблизительно 68% общего числа погрешностей *меньше* средней ошибки.

Взяв $t = \frac{2}{\sqrt{2}} = 1.414$, т. е. $l = 2\mu$, то будет

$$\Theta(1.41) = 0.953$$

т. е. 95% числа погрешностей не больше 2μ.

Взяв $t = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2.12$ увидим, что 99.70% всех погрешностей не превышают 3μ, и, наконец, взяв $t = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2.83$, видим, что из 100 000 погрешностей, следующих закону Гаусса, лишь семь будут превышать 4μ, т. е. четырехкратную величину средней погрешности.

§ 125. Приведем теперь некоторые результаты проверки формулы Гаусса.

Первая такая проверка была произведена в 1818 г. знаменитым астрономом Бесселем, при обработке им наблюдений Брадлея и своих собственных. Числа третьего столбца табл. 90 рассчитаны по ф-лам (16) — (18).

Таблица 90

Наблюдения склонений
Число наблюдений $N = 300$; $\mu = 1''6239$

Пределы погрешностей	Число погрешностей		Разность
	действит.	теоретич.	теор.—действит.
0''0—0''4	66	58.5	— 7.5
0.4—0.8	58	54.9	— 3.1
0.8—1.2	55	48.6	— 6.4
1.2—1.6	28	40.8	12.8
1.6—2.0	27	31.8	4.8
2.0—2.4	23	22.7	— 0.3
2.4—2.8	10	16.5	6.5
2.8—3.2	15	10.8	— 4.2
3.2—3.6	8	6.6	— 1.2
3.6—4.0	4	3.9	— 0.1
4.0 и более	6	4.2	— 2.8

Так, например, первое из них:

$$h = 1.414\mu = 2.295;\quad l = 0.4;\quad \frac{l}{h} = 0.174;\quad N = 300$$

$$\Theta(0.174) = 0.195;\quad N \cdot \Theta\left(\frac{l}{h}\right) = 300 \cdot 0.195 = 58.5$$

Таблица 91

Наблюдения прямого восхождения

Число наблюдений $N = 300$; $\mu = 0^s.2283$

Пределы погрешностей	Число погрешностей		Разность теор.—действит.
	действит.	теоретич.	
$0^s.0—0^s.1$	114	100.5	—13.5
0.1—0.2	84	84.0	0.0
0.2—0.3	53	57.6	4.6
0.3—0.4	24	32.7	8.7
0.4—0.5	14	15.3	1.3
0.5—0.6	6	6.0	0.0
0.6—0.7	3	2.1	— 0.9
0.7—0.8	1	0.6	— 0.4
0.8—0.9	1	0.0	— 1.0

Таблица 92

Наблюдения прямого восхождения

Число наблюдений $N = 470$; $\mu = 0^s.4033$

Пределы погрешностей	Число погрешностей		Разность теор.—действит.
	действит.	теоретич.	
$0^s.0—0^s.1$	94	92.3	—1.7
0.1—0.2	88	86.5	—1.5
0.2—0.3	78	76.7	—1.3
0.3—0.4	58	64.0	6.0
0.4—0.5	51	49.8	—1.2
0.5—0.6	36	36.7	0.7
0.6—0.7	26	25.4	—0.6
0.7—0.8	14	16.9	2.9
0.8—0.9	9	9.0	0.0
0.9—1.0	7	6.1	—0.9
1.0 и более	9	6.1	—2.9

Приведем еще два примера: при сводке землемерных работ северной Италии определены погрешности суммы трех углов треугольника в двух сериях наблюдений, из которых в первой был 661 треугольник, во второй 1577.

Результаты таковы (табл. 93 и 94):

Таблица 93

Наблюдения углов
Число наблюдений $N = 661$; $\mu = 14''08$

Пределы погрешностей	Число погрешностей		Разность
	действительное	теоретическое	теор. — действит.
От 0 до 1″768	68	$N \cdot 0.1000 = 66$	—2
0 „ 3.566	139	$N \cdot 0.2000 = 132$	—7
0 „ 5.424	200	$N \cdot 0.3000 = 198$	—2
0 „ 7.383	265	$N \cdot 0.4000 = 264$	—1
0 „ 9.500	333	$N \cdot 0.5000 = 331$	—2
0 „ 14.08	457	$N \cdot 0.6827 = 451$	—6
0 „ 23.16	586	$N \cdot 0.9000 = 595$	9
0 „ 36.27	653	$N \cdot 0.9900 = 654$	1
0 „ 46.35	661	$N \cdot 0.9990 = 660$	—1
0 „ 54.79	661	$N \cdot 0.9999 = 661$	0

Эти примеры с достаточною ясностью показывают степень согласия формулы Гаусса с действительностью. Формула эта проверена множество раз на самых разнообразных наблюдениях, и согласие всегда получалось примерно такое же, как в примерах, приведенных выше, поэтому формулу Гаусса можно считать отвечающей действительности и применять выводы, из нее следующие, к обработке наблюдений всякого рода.

§ **126.** Прежде чем показать упомянутые применения, поясним некоторые термины, принятые при этом.

Уже было сказано, что среднею ошибкою для данного ряда наблюдений называется величина, определяемая равенством

$$\mu = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots + \varepsilon_N^2}{N}}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_N$ — полученные при наблюдениях погрешности, N — число наблюдений.

Таблица 94

Наблюдения углов
Число наблюдений $N = 1577$
Средняя ошибка $\mu = 17\overset{''}{.}13$

Пределы погрешностей	Число погрешностей		Разность теор. — действит.
	действительное	теоретическое	
От 0 до $2\overset{''}{.}141$	133	$N \cdot 0.1000 = 158$	25
0 „ 4.334	303	$N \cdot 0.1000 = 315$	12
0 „ 6.595	473	$N \cdot 0.3000 = 472$	— 1
0 „ 8.976	672	$N \cdot 0.4000 = 631$	— 1
0 „ 11.564	760	$N \cdot 0.5000 = 788$	28
0 „ 17.13	1044	$N \cdot 0.6827 = 1077$	33
0 „ 23.08	1408	$N \cdot 0.9000 = 1419$	11
0 „ 44.12	1570	$N \cdot 0.9900 = 1561$	— 9
0 „ 56.39	1577	$N \cdot 0.9990 = 1575$	— 2
0 „ 66.65	1577	$N \cdot 0.9999 = 1577$	0

Из таблицы значений функции $\Theta(t)$ (табл. 89), и ф-лы (16) следует, что из общего числа N погрешностей

$$0.843\,N$$

будут заключаться между пределами $-h$ и $+h$.

Из той же таблицы видно, что аргументу

$$t = 0.477$$

соответствует значение $\Theta(t) = 0.500$, следовательно $0.50\,N$, т. е. половина всех погрешностей, будет заключаться между

$$-0.477h \text{ и } +0.477h$$

а так как $h = \sqrt{2}\mu = 1.414\mu$, то предыдущая величина составит

$$-0.674\mu \text{ и } +0.674\mu$$

т. е. половина всех погрешностей заключается между этими пределами, а вторая половина — вне их.

Величина

$$r = 0.674\mu$$

называется *вероятною ошибкою* или *вероятною погрешностью*.

Любая из величин h, r, μ, которые связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} h &= 1.414\mu = 2.097\,r \\ r &= 0.674\mu = 0.477\,h \\ \mu &= 0.707h = 1.483\,r \end{aligned} \tag{23}$$

может служить характеристикою точности данного ряда наблюдений, ибо, зная любую из них и имея таблицу значений функции $\Theta(t)$, легко рассчитать, как показано выше, распределение погрешностей при большом числе наблюдений.

Обыкновенно такого расчета не делают, а приводят для характеристики ряда наблюдений или величину вероятной ошибки r, или же величину средней ошибки.

§ **127.** Итак, примем закон Гаусса и посмотрим, какие следствия из него вытекают в применении к обработке наблюдений.

Положим, что при измерении, произведенном k раз при одинаковых условиях и тем же самым прибором, получены такие результаты:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_k$$

спрашивается, чему равно наиболее вероятное значение этой величины.

Пусть это значение есть x, тогда погрешности измерений суть

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= x - a_1 \\ \varepsilon_2 &= x - a_2 \\ &\ldots\ldots \\ \varepsilon_k &= x - a_k \end{aligned} \tag{*}$$

Вероятность совместного появления этих k погрешностей, предполагаемых попарно независимыми, будет пропорциональна величине

$$\left(\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\right)^k e^{-\frac{1}{h^2}(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots\varepsilon_k^2)} \tag{**}$$

следовательно, то значение x будет вероятнейшим, при котором величина (**) будет наибольшею, т. е. сумма

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\ldots\varepsilon_k^2$$

квадратов погрешностей будет *наименьшею.*

Заменяя величины ε_1, ε_2, $\ldots\ \varepsilon_k$ их выражениями (*), видим, что определение x свелось к нахождению такого его значения, при котором величина

$$V = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \ldots + (x-a_k)^2$$

становится наименьшею.

Отсюда следует, для определения x, уравнение

$$0=\frac{dV}{dx}=2[(x-a_1)+(x-a_2)+\ldots+(x-a_k)]$$

которое даст

$$x=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k}{k}$$

что показывает, *что вероятнейшее значение есть среднее арифметическое из наблюденных значений.*

Таким образом, закон Гаусса привел к тому правилу, которое как бы инстинктивно применялось без всякой теории.

Заметим, что и наоборот, если принять за постулат или основное допущение, что из ряда наблюдений той же самой величины наивероятнейшее значение есть среднее арифметическое из наблюденных значений, то из этого допущения следует закон Гаусса (так его вывел и сам Гаусс). Более того, Чебышев показал, что если вероятнейшее значение из *трех* наблюденных есть их среднее арифметическое, то выводится закон Гаусса для вероятности погрешностей.[1]

§ **128.** Во многих случаях искомый результат находится не непосредственными измерениями, а измеренная величина вводится в какую-нибудь формулу, по которой искомая затем вычисляется, — ясно, что всякой ошибке в данных будет соответствовать и ошибка в искомой. Пусть искомая величина есть z, величина, непосредственно измеренная, есть x, зависимость между z и x:

$$z=f(x) \tag{24}$$

Пусть истинная величина x есть

$$x=a$$

значит, истинная величина z есть

$$z=f(a)=b$$

Положим, что при измерении величины x получены значения

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_k$$

и, значит, сделаны погрешности

$$\varepsilon_1=a-a_1;\ \varepsilon_2=a-a_2;\ \ldots\ \varepsilon_k=a-a_k \tag{25}$$

---

[1] П. Л. Чебышев. Теория вероятностей. Изд. АН СССР, 1936, стр. 233.

так что средняя ошибка величины x есть

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_k^2}{k}} \tag{26}$$

спрашивается, чему равна средняя ошибка величины z.

Очевидно, что значения z, рассчитанные по ф-ле (24), будут

$$\begin{aligned} b_1 &= f(a_1) = f(a - \varepsilon_1) \\ b_2 &= f(a_2) = f(a - \varepsilon_2) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ b_k &= f(a_k) = f(a - \varepsilon_k) \end{aligned}$$

соответственно чему будут ошибки

$$\begin{aligned} \eta_1 &= b - b_1 = f(a) - f(a - \varepsilon_1) = \varepsilon_1 f'(a) \\ \eta_2 &= b - b_2 = f(a) - f(a - \varepsilon_2) = \varepsilon_2 f'(a) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_k &= b - b_k = f(a) - f(a - \varepsilon_k) = \varepsilon_k f'(a) \end{aligned}$$

ибо величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_k$ предполагаются столь малыми, что в разложении функций

$$f(a - \varepsilon_1),\ f(a - \varepsilon_2),\ \ldots f(a - \varepsilon_k)$$

по Тейлорову ряду можно ограничиваться лишь первым членом.

Средняя ошибка величины z будет

$$\eta = \sqrt{\frac{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_k^2}{k}} = f'(a) \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_k^2}{k}}$$

т. е. на основании ф-лы (26),

$$\eta = \varepsilon f'(a) \tag{27}$$

Заметим простейший случай этой формулы, именно когда

$$z = Ax \tag{28}$$

причем A есть постоянная, то будет

$$\eta = A\varepsilon \tag{29}$$

§ 129. Положим теперь, что искомая величина z получается как функция двух переменных x и y, каждая из которых определяется в отдельности по самостоятельным наблюдениям *независимо* одна от другой. Эти величины могут быть и различных наименований, например x может представлять длину, а y — угол.

Если в величине x средняя ошибка есть α, а в величине y средняя ошибка β, — спрашивается, чему равна средняя ошибка γ величины z, определяемой уравнением

$$z = f(x, y)$$

Начнем с простейшего случая

$$z = x + y$$

и пусть истинная величина x есть a, а измеренные

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$$

и, значит, ошибки измерений

$$\alpha_1 = a - a_1; \ \alpha_2 = a - a_2; \ \ldots \ \alpha_k = a - a_k$$

тогда средняя ошибка переменной x:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_k^2}{k}} \tag{30}$$

точно так же пусть истинная величина y есть b, измеренные

$$b_1, b_2, \ldots b_n$$

ошибки измерений

$$\beta_1 = b - b_1; \ \beta_2 = b - b_2; \ \ldots \ \beta_n = b - b_n$$

и средняя ошибка

$$\beta = \sqrt{\frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_n^2}{n}} \tag{31}$$

Чтобы вычислить равновозможные ошибки для величины z, необходимо иметь в виду, что измерения x и y между собою *независимы*, поэтому было бы неправильно комбинировать только

$$a_1 + b_1; \quad a_2 + b_2$$

и т. д. и соответствующие ошибки

$$\alpha_1 + \beta_1; \quad \alpha_2 + \beta_2$$

и т. д., а, при независимости наблюдений, *каждая* из ошибок ряда α может с одинаковою вероятностью произойти совместно с *каждою* из ошибок ряда β, так что возможные значения величины γ суть

$$\begin{array}{l}
\alpha_1 + \beta_2; \ \alpha_1 + \beta_1; \ \alpha_1 + \beta_3; \ \ldots \ \alpha_1 + \beta_n \\
\alpha_2 + \beta_1; \ \alpha_2 + \beta_2; \ \alpha_2 + \beta_3; \ \ldots \ \alpha_2 + \beta_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_k + \beta_1; \ \alpha_k + \beta_2; \ \alpha_k + \beta_3; \ \ldots \ \alpha_k + \beta_n
\end{array}$$

т. е. γ принимает kn возможных значений. Сумма квадратов этих значений будет

$$\Sigma\gamma_i^2 = n\Sigma\alpha_i^2 + k\Sigma\beta_i^2 + 2\Sigma\alpha_i \cdot \Sigma\beta_i$$

но по основному свойству случайных ошибок (ошибки с + и с — одинаково вероятны) будут иметь место равенства

$$\Sigma\alpha_i = 0;\quad \Sigma\beta_j = 0$$

Значит, будет

$$\gamma = \sqrt{\frac{\Sigma\gamma_i^2}{nk}} = \sqrt{\frac{n\Sigma\alpha_i^2 + k\Sigma\beta_i^2}{nk}} = \sqrt{\frac{\Sigma\alpha_i^2}{k} + \frac{\Sigma\beta_i^2}{n}}$$

но

$$\frac{\Sigma\alpha_i^2}{k} = \alpha^2;\qquad \frac{\Sigma\beta_i^2}{n} = \beta^2$$

следовательно, будет

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \tag{32}$$

т. е. *средняя ошибка суммы двух независимых величин равна корню квадратному из суммы квадратов их средних ошибок.*

Из этой теоремы, по сопоставлении с предыдущею, следует, что для величины

$$z = Ax + By \tag{33}$$

средняя ошибка γ будет

$$\gamma = \sqrt{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2} \tag{34}$$

стоит только положить на время

$$u = Ax;\quad v = By$$

так что

$$z = u + v$$

и применить ф-лы (29) и (32).

Отсюда ясно, что для величины

$$z = Ax + By + Ct \tag{35}$$

будет

$$\gamma = \sqrt{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + C^2\delta^2} \tag{36}$$

где α, β, γ суть средние ошибки величин x, y и t, стоит только, положив на время

$$v = By + Ct$$

применить предыдущие формулы к сумме

$$z = u + v$$

Отсюда заключаем, что вообще для величины

$$z = Ax + By + Ct + \ldots + Fw$$

средняя ошибка будет

$$\gamma = \sqrt{A^2 \alpha^2 + B^2 \beta^2 + C^2 \delta^2 + \ldots + F^2 \omega^2} \tag{37}$$

при само собою понятном обозначении.

Если положим теперь, что вообще

$$z = f(x, y, t, \ldots w)$$

то ошибка γ_i в величине z, соответствующая ошибкам

$$\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \ldots \omega_i$$

будет на основании Тейлорова ряда:

$$\gamma_i = f(a, b, \ldots h) - f(a - \alpha_i, b - \beta_i, \ldots h - \omega_i) = \alpha_i \cdot f_x'(a, b, \ldots h) + \\ + \beta_i f_y'(a, b, \ldots h) + \ldots + \omega_i \cdot f_w'(a, b, \ldots h)$$

или, полагая

$$A = f_x'(a, b, \ldots h), \quad B = f_y'(a, b, \ldots h), \ldots F = f_w'(a, b, \ldots h)$$

будет

$$\gamma_i = A\alpha_i + B\beta_i + \ldots + F\omega_i$$

т. е. γ_i выражается совершенно так же, как каждая отдельная ошибка линейной функции

$$z = Ax + By + \ldots + Fw$$

следовательно, будет

$$\gamma = \sqrt{A^2 \alpha^2 + B^2 \beta^2 + \ldots + F^2 \omega^2} \tag{38}$$

Если бы величина z определялась, как неявная функция, уравнением

$$G(z, x, y, t, \ldots w) = 0 \tag{39}$$

то ее частные производные будут

$$A = -\frac{G_x'(c, a, b, \ldots h)}{G_z'(c, a, b, \ldots h)}; \quad B = -\frac{G_y'(c, a, b, \ldots h)}{G_z'(c, a, b, \ldots h)}; \quad \ldots F = -\frac{G_w'(c, a, b, \ldots h)}{G_z'(c, a, b, \ldots h)}$$

причем c есть истинная величина z, определяемая из уравнения

$$G(c, a, b, \ldots h) = 0 \tag{40}$$

Само собою разумеется, что ф-ла (38), как общая, заключает в себе ф-лы (36), (37) как частные случаи.

§ **130.** Мы видели, что если величина x определяется непосредственно из наблюдений, то ее вероятнейшее значение есть среднее арифметическое

$$x=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}$$

из наблюденных значений, которые все предполагаются одинаковой точности и имеющими среднюю ошибку ε; спрашивается, какова средняя ошибка величины x.

Можно вообразить, что x есть линейная функция переменных

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_k$$

$$x=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}=\frac{1}{k}x_1+\frac{1}{k}x_2+\ldots+\frac{1}{k}x_k$$

причем каждая из переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_k$ имеет среднюю ошибку ε, тогда по ф-ле (38) средняя ошибка x будет

$$\eta=\sqrt{\frac{1}{k^2}\varepsilon^2+\frac{1}{k^2}\varepsilon^2+\ldots+\frac{1}{k^2}\varepsilon^2}=\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{k}}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} \tag{41}$$

В этом же отношении $1:\sqrt{k}$ будет и вероятная ошибка величины x и величин a_i.

Заметим здесь же, что ф-ла (41) получена в предположении, что средняя ошибка величин a_i известна, для этого же надо, чтобы было известно и *истинное* значение a величины x, тогда ошибки $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots\ \varepsilon_k$ отдельных наблюдений будут

$$\varepsilon_1=a-a_1;\ \varepsilon_2=a-a_2;\ \ldots\ \varepsilon_k=a-a_k \tag{42}$$

и средняя ошибка

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_k^2}{k}}; \tag{43}$$

но большею частью истинное значение x не известно, тогда вместо него берут вероятнейшее, т. е. полагают

$$a=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}$$

и, рассчитав по ф-лам (42) величины

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots\ \varepsilon_k$$

рассчитывают величину ε не по ф-ле (43), а по формуле

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_k^2}{k-1}} \tag{44}$$

так что будет

$$\eta = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_k^2}{k(k-1)}} \tag{45}$$

Ф-лу (44) выводить не будем.

§ 131. Мы рассмотрели тот случай, когда искомая величина одна и когда она определяется из непосредственных наблюдений; более общий и часто встречающийся случай такой: имеется несколько, скажем n, неизвестных величин

$$x, y, z, \ldots w \tag{46}$$

для определения которых каждое наблюдение доставляет уравнение вида

$$F(x, y, z, \ldots w) = A + \alpha \tag{47}$$

так что если произведено k наблюдений, то получается k уравнений

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x, y, z, \ldots w) = N_1 = A_1 + \alpha_1 \\ F_2(x, y, z, \ldots w) = N_2 = A_2 + \alpha_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F_k(x, y, z, \ldots w) = N_k = A_k + \alpha_k \end{array}\right\} \tag{48}$$

причем $F_1, F_2, \ldots F_k$ будут вполне определенные функции, $N_1, N_2, \ldots N_k$ — величины, даваемые наблюдениями, $A_1, A_2, \ldots A_k$ — некоторые постоянные, о которых будет сказано ниже, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ — малые поправки к ним.

Если число наблюдений k равно числу неизвестных n, то из ур-ний (48) получаются значения этих неизвестных, в точности этим уравнениям удовлетворяющие, но тогда судить о величине ошибок наблюдений нельзя, поэтому распоряжаются так, чтобы число k наблюдений, а значит, и число ур-ний (48) было значительно *больше* числа n неизвестных.

Взяв в системе (48) n уравнений, определяем из них значения неизвестных $x, y, z, \ldots w$, которые для простоты дальнейших вычислений округляем, так что они будут представлять приближенные значения этих неизвестных; обозначаем эти значения через

$$x_0, y_0, z_0, \ldots w_0 \tag{49}$$

Подставляем эти величины в первые части ур-ний (48) и вычисляем значения

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_0, y_0, z_0, \ldots w_0) = A_1 \\ F_2(x_0, y_0, z_0, \ldots w_0) = A_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F_k(x_0, y_0, z_0, \ldots w_0) = A_k \end{array}\right\} \tag{50}$$

тогда будет

$$\alpha_1 = N_1 - A_1,\ \alpha_2 = N_2 - A_2, \ldots \alpha_k = N_k - A_k$$

причем *единственно только величины α подвержены погрешностям наблюдений*, вместе с тем эти величины будут *малые*.

Так как величины $x_0, y_0, z_0, \ldots w_0$ ур-ниям (48) удовлетворяют лишь приближенно, то, чтобы получить более точные значения, полагаем

$$x = x_0 + \xi;\quad y = y_0 + \eta;\quad z = z_0 + \zeta; \ldots w = w_0 + \omega$$

причем $\xi, \eta, \zeta, \ldots \omega$ суть те поправки, которые надо присовокупить к значениям $x_0, y_0, z_0, \ldots w_0$. Эти поправки предполагаются настолько малыми, что, при разложении функций

$$F_i(x_0 + \xi;\ y_0 + \eta; \ldots w_0 + \omega) \qquad (i = 1, 2, \ldots k)$$

по Тейлорову ряду, можно ограничиться лишь *первыми* степенями величин

$$\xi, \eta, \ldots \omega,$$

так что будет

$$F_i[x_0 + \xi;\ y_0 + \eta; \ldots w_0 + \omega] =$$
$$= (F_i)_0 + \xi\left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right)_0 + \eta\left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right)_0 + \ldots + \omega\left(\frac{\partial F_i}{\partial w}\right)_0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots k)$$

при само собою понятном обозначении, тогда, на основании равенств (50), ур-ния (48) заменяются следующими:

$$\xi\left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right)_0 + \eta\left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right)_0 + \ldots + \omega\left(\frac{\partial F_i}{\partial w}\right)_0 = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots k) \quad (51)$$

причем величины коэффициентов

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right)_0;\quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right)_0; \ldots \left(\frac{\partial F_i}{\partial w}\right)_0$$

будут известные постоянные, происходящим при наблюдениях погрешностям не подверженные. Обозначая их соответственно через

$$a_i, b_i, \ldots g_i$$

будем для определения неизвестных

$$\xi, \eta, \ldots \omega$$

иметь *k линейных* уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + \ldots + g_1\omega &= \alpha_1 \\ a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + \ldots + g_2\omega &= \alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ a_k\xi + b_k\eta + c_k\zeta + \ldots + g_k\omega &= \alpha_k \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

число которых k значительно больше числа неизвестных, и величины

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$$

доставляются непосредственными наблюдениями.

Является вопрос, каким образом сочетать эти уравнения для получения *вероятнейших* значений наших неизвестных.

Примем сперва, что средние ошибки всех величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ одинаковы, т. е. что все наблюдения имеют одинаковую степень точности.

§ 132. Итак, мы пришли к такому *общему* вопросу: дана система k уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + \ldots + g_1 \omega &= \alpha_1 \\ a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + \ldots + g_2 \omega &= \alpha_2 \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_k \xi + b_k \eta + c_k \zeta + \ldots + g_k \omega &= \alpha_k \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

с n неизвестными

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots \omega$$

число которых значительно меньше числа уравнений; известные члены

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$$

этих уравнений доставляются непосредственными наблюдениями, требуется найти *вероятнейшие* значения неизвестных.

Положим, что мы взяли какую-нибудь систему значений

$$\xi = \xi_0; \ \eta = \eta_0; \ldots \omega = \omega_0 \qquad (54)$$

и подставили в ур-ния (53) и составили разности

$$\left.\begin{aligned} a_1 \xi_0 + b_1 \eta_0 + \ldots + g_1 \omega_0 - \alpha_1 &= \varepsilon_1 \\ a_2 \xi_0 + b_2 \eta_0 + \ldots + g_2 \omega_0 - \alpha_2 &= \varepsilon_2 \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_k \xi_0 + b_k \eta_0 + \ldots + g_k \omega_0 - \alpha_k &= \varepsilon_k \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

то эти разности будут представлять те случайные ошибки, которые должны бы иметь место в наблюденных величинах $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ при системе значений (54).

Вероятность такого совместного появления этих ошибок, по закону Гаусса, пропорциональна величине

$$\left(\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\right)^k e^{-\frac{1}{h^2}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_k^2)}$$

ибо по предположению средняя ошибка всех величин α_i одинакова, значит величина h везде одна и та же.

Сказанная вероятность будет наибольшею, когда сумма

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_k^2$$

будет *наименьшею.*

Отсюда следует, что для розыскания вероятнейших значений наших неизвестных надо составить выражение

$$V = (a_1\xi + b_1\eta + \ldots + g_1\omega - \alpha_1)^2 + (a_2\xi + b_2\eta + \ldots + g_2\omega - \alpha_2)^2 + \\ + \ldots + (\alpha_k\xi + b_k\eta + \ldots + g_k\omega - \alpha_k)^2 \tag{56}$$

и определить неизвестные

$$\xi,\ \eta,\ \ldots\ \omega$$

так, чтобы величина V была наименьшею.

По известному правилу эти значения определяются уравнениями

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0;\quad \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0;\quad \ldots\ \frac{\partial V}{\partial \omega} = 0 \tag{57}$$

которые в развитой форме будут

$$\begin{aligned} &a_1(a_1\xi + b_1\eta + \ldots + g_1\omega) + a_2(a_2\xi + b_2\eta + \ldots + g_2\omega) + \ldots \\ &\quad \ldots + a_k(a_k\xi + b_k\eta + \ldots + g_k\omega) = \sum_i a_i\alpha_i \\ &b_1(a_1\xi + b_1\eta + \ldots + g_1\omega) + b_2(a_2\xi + b_2\eta + \ldots + g_2\omega) + \ldots \\ &\quad \ldots + b_k(a_k\xi + b_k\eta + \ldots + g_k\omega) = \sum_i b_i\alpha_i \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &g_1(a_1\xi + b_1\eta + \ldots + g_1\omega) + g_2(a_2\xi + b_2\eta + \ldots + g_2\omega) + \ldots \\ &\quad \ldots + g_k(a_k\xi + b_k\eta + \ldots + g_k\omega) = \sum_i g_i\alpha_i \end{aligned} \tag{58}$$

Ур-ния (53) называются *условными* или основными, ур-ния (58) — *нормальными*. Очевидно, что число нормальных уравнений *равно* числу неизвестных, каково бы число условных ни было.

Ф-лы (58) выражают следующее правило составления нормальных уравнений по данным условиям.

Основное правило: *для составления первого нормального уравнения по данным условным, надо каждое из условных уравнений умножить на коэффициент при первой неизвестной, в этом уравнении стоящий, и все полученные таким образом уравнения сложить.*

Для составления второго нормального уравнения надо каждое из условных уравнений умножить на коэффициент при второй неизве-

стной, в этом уравнении стоящий, и все полученные таким образом уравнения сложить.

Совершенно так же поступать и для составления прочих нормальных уравнений.

Таким образом, нормальная система уравнений будет, опуская для простоты письма значки под знаками сумм:

$$\begin{array}{l} \Sigma a^2 \cdot \xi + \Sigma ab \cdot \eta + \Sigma ac \cdot \zeta + \ldots + \Sigma ag \cdot \omega = \Sigma a\alpha \\ \Sigma ba \cdot \xi + \Sigma b^2 \cdot \eta + \Sigma bc \cdot \zeta + \ldots + \Sigma bg \cdot \omega = \Sigma b\alpha \\ \Sigma ca \cdot \xi + \Sigma cb \cdot \eta + \Sigma c^2 \cdot \zeta + \ldots + \Sigma cg \cdot \omega = \Sigma c\alpha \\ \cdot\;\cdot \\ \Sigma ga \cdot \xi + \Sigma gb \cdot \eta + \Sigma gc \cdot \zeta + \ldots + \Sigma g^2 \cdot \omega = \Sigma g\alpha \end{array} \tag{59}$$

Очевидно, что суммы

$$\Sigma ab = \Sigma ba; \quad \Sigma ac = \Sigma ca; \ldots \tag{60}$$

т. е. все суммы, симметричные относительно главной диагонали, между собою равны, таким образом составление нормальных уравнений сводится к вычислению следующих сумм:

$$\begin{array}{r} \Sigma a^2,\ \Sigma ab,\ \Sigma ac, \ldots \Sigma ag,\ \Sigma a\alpha \\ \Sigma b^2,\ \Sigma bc, \ldots \Sigma ag,\ \Sigma b\alpha \\ \Sigma c^2, \ldots \Sigma cg,\ \Sigma c\alpha \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\quad\cdot \\ \Sigma g^2,\ \Sigma g\alpha \end{array}$$

каждая сумма состоит из k членов, вычисление которых по логарифмической линейке совершается весьма просто по схеме, которая будет указана ниже.

Ввиду множества умножений, необходимо при самом вычислении иметь постоянный контроль, чтобы убеждаться, что не сделано ошибок. Для этого, для каждого условного уравнения надо составить сумму всех коэффициентов и известного члена, т. е. надо составить суммы

$$\begin{array}{l} s_1 = a_1 + b_1 + c_1 + \ldots + g_1 + \alpha_1 \\ s_2 = a_2 + b_2 + c_2 + \ldots + g_2 + \alpha_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ s_k = a_k + b_k + c_k + \ldots + g_k + \alpha_k \end{array} \tag{61}$$

тогда, очевидно, будет

$$\begin{array}{l} \Sigma as = \Sigma a^2 + \Sigma ab + \Sigma ac + \ldots + \Sigma ag + \Sigma a\alpha \\ \Sigma bs = \Sigma ab + \Sigma b^2 + \Sigma bc + \ldots + \Sigma bg + \Sigma b\alpha \\ \cdot\;\cdot \\ \Sigma gs = \Sigma ga + \Sigma gb + \Sigma gc + \ldots + \Sigma g^2 + \Sigma g\alpha \end{array} \tag{62}$$

эти равенства и служат контролем вычисления.

§ **133.** Прежде чем объяснить составление схемы для вычислений, покажем, каким образом вычислить средние ошибки неизвестных

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots \omega$$

Положим, что найденные решением нормальных уравнений величины ξ, η, ... ω подставлены в заданные основные уравнения, и вычислены отклонения

$$a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta + \ldots + g_i \omega - \alpha_i = v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots k)$$

Эти отклонения будут представлять величины погрешностей в наблюденных значениях α_1, α_2, ... α_k, *если определенные из нормальных уравнений вероятнейшие значения величин* ξ, η, ... ω *принять за истинные их значения*, что мы на время и сделаем, и положим

$$a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta + \ldots + g_i \omega - \alpha_1 = \varepsilon_i \qquad (i = 1\ 2, \ldots k)$$

тогда средняя ошибка наблюденных величин α_1, α_2, ... α_k будет

$$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_k^2}{k}} \tag{63}$$

Но так как ξ, η, ... ω не суть истинные, а лишь вероятные значения, то, подобно тому как для одного уравнения, полагают

$$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_k^2}{k - n}} \tag{63'}$$

Очевидно, что суммы

$$\Sigma a\alpha, \quad \Sigma b\alpha, \quad \Sigma c\alpha, \quad \ldots \Sigma g\alpha \tag{64}$$

суть линейные функции величин

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k \tag{65}$$

коэффициенты a_1, b_1 ... g_k *не подвержены ошибкам наблюдений* и суть постоянные, то ясно что и искомые величины ξ, η, ... ω будут линейными функциями сумм (64), а значит, и линейными функциями величин

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k \tag{66}$$

Пусть будет

$$\xi = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_k \alpha_k \tag{67}$$

причем множители

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$$

зависят только от коэффициентов

$$a_1, b_1, \ldots g_k$$

основных уравнений

Если бы мы эти множители нашли, то по ф-ле (38) нашли бы и среднюю ошибку β величины ξ, именно было бы

$$\beta^2 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_k^2)\,\varepsilon^2$$

ибо средняя ошибка всех наблюденных величин (66) одна и та же и равна ε.

Все дело, таким образом, свелось к определению величины

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_k^2$$

Представим себе, что мы систему нормальных уравнений решали бы по способу множителей, т. е. первое уравнение умножили бы на множитель M_1, второе — на множитель M_2 и т. д., последнее — на множитель M_n и, сложив полученные уравнения, определили бы множители $M_1, M_2, \ldots M_n$ так, чтобы было

$$\begin{aligned}
&M_1\,\Sigma a^2 + M_2\,\Sigma ab + M_3\,\Sigma ac + \ldots + M_n\,\Sigma ag = 1\\
&M_1\,\Sigma ab + M_2\,\Sigma b^2 + M_3\,\Sigma bc + \ldots + M_n\,\Sigma bg = 0\\
&M_1\,\Sigma ac + M_2\,\Sigma bc + M_3\,\Sigma c^2 + \ldots + M_n\,\Sigma cg = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&M_1\,\Sigma ag + M_2\,\Sigma bg + M_3\,\Sigma cg + \ldots + M_n\,\Sigma g^2 = 0
\end{aligned} \tag{68}$$

то мы получили бы

$$\xi = M_1\,\Sigma a\alpha + M_2\,\Sigma b\alpha + \ldots + M_n\,\Sigma g\alpha \tag{69}$$

или, собирая члены иначе,

$$\begin{aligned}
\xi = {}&\alpha_1\,[M_1\,a_1 + M_2\,b_1 + \ldots + M_n\,g_1] +\\
&+ \alpha_2\,[M_1\,a_2 + M_2\,b_2 + \ldots + M_n\,g_2] +\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \alpha_k\,[M_1\,a_k + M_2\,b_k + \ldots + M_n\,g_k]
\end{aligned} \tag{69'}$$

Это выражение ξ должно *тождественно* равняться выражению (67), ибо равенство этих двух выражений должно иметь место при *всяких* значениях букв

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots \alpha_k$$

следовательно, будет

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= M_1\,a_1 + M_2\,b_1 + \ldots + M_n\,g_1\\
\lambda_2 &= M_1\,a_2 + M_2\,b_2 + \ldots + M_n\,g_2\\
\lambda_3 &= M_1\,a_3 + M_2\,b_3 + \ldots + M_n\,g_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\lambda_k &= M_1\,a_k + M_2\,b_k + \ldots + M_n\,g_k
\end{aligned} \tag{70}$$

Отсюда следует

$$
\begin{aligned}
\lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_k^2 = (a_1 M_1 + b_1 M_2 + \ldots + g_1 M_n)^2 + \\
+ (a_2 M_1 + b_2 M_2 + \ldots + g_2 M_n)^2 + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ (a_k M_1 + b_k M_2 + \ldots + g_k M_n)^2
\end{aligned}
\tag{71}
$$

Очевидно, что в правой части этого равенства находится однородная функция второй степени букв

$$M_1, M_2, \ldots M_n$$

Обозначим эту функцию через

$$\Phi(M_1, M_2, \ldots M_n);$$

по теореме об однородных функциях будет

$$2\Phi(M_1, \ldots M_n) = M_1 \frac{\partial\Phi}{\partial M_1} + M_2 \frac{\partial\Phi}{\partial M_2} + M_3 \frac{\partial\Phi}{\partial M_3} + \ldots + M_n \frac{\partial\Phi}{\partial M_n}$$

Но стоит только сличить функцию (71) с функцией V [ф-лы (56)], чтобы видеть, что между ними разница лишь в том, что вместо букв

$$\xi, \eta, \zeta \ldots \omega$$

написаны

$$M_1, M_2, \ldots M_n$$

и все величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ взяты равными нулю; поэтому первые части у-ний (68) будут как раз

$$\frac{\partial\Phi}{\partial M_1}; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial M_2}; \ldots \frac{\partial\Phi}{\partial M_n}$$

следовательно, на основании этих уравнений, будет

$$\frac{\partial\Phi}{\partial M_1} = 1; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial M_2} = 0; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial M_3} = 0; \quad \ldots \frac{\partial\Phi}{\partial M_n} = 0 \tag{72}$$

и, значит, будет

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_k^2 = M_1 \tag{73}$$

и средняя ошибка β неизвестной ξ будет

$$\beta = \varepsilon\sqrt{M_1}$$

Совершенно так же увидим, что, определяя множители

$$N_1, N_2, \ldots N_n$$

так, чтобы было

$$
\begin{aligned}
&N_1\Sigma a^2+N_2\Sigma ab+N_3\Sigma ac+\ldots+N_n\Sigma ag=0\\
&N_1\Sigma ab+N_2\Sigma b^2+N_3\Sigma bc+\ldots+N_n\Sigma bg=1\\
&N_1\Sigma ac+N_2\Sigma bc+N_3\Sigma c^2+\ldots+N_n\Sigma cg=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&N_1\Sigma ag+N_2\Sigma bg+N_3\Sigma cg+\ldots+N_n\Sigma g^2=0
\end{aligned}
\tag{74}
$$

мы получим среднюю ошибку λ неизвестной η по формуле

$$\gamma=\varepsilon\sqrt{N_2} \tag{75}$$

Для определения средней ошибки δ неизвестной ζ, надо составить систему

$$
\begin{aligned}
&P_1\Sigma a^2+P_2\Sigma ab+P_3\Sigma ac+\ldots+P_n\Sigma ag=0\\
&P_1\Sigma ab+P_2\Sigma b^2+P_3\Sigma bc+\ldots+P_n\Sigma bg=0\\
&P_1\Sigma ac+P_2\Sigma bc+P_3\Sigma c^2+\ldots+P_n\Sigma cg=1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_1\Sigma ag+P_2\Sigma bg+P_3\Sigma cg+\ldots+P_n\Sigma g^2=0
\end{aligned}
\tag{76}
$$

тогда будет

$$\delta=\varepsilon\sqrt{P_3} \tag{77}$$

Имея средние ошибки, найдем и вероятные ошибки, умножив средние на 0.764, как указано в § 126, ф-лы (23).

§ 134. Мы предполагали, что все наблюдения, служащие для составления основных уравнений, обладают одинаковой точностью, т. е. что средние ошибки всех величин

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots\alpha_k$$

одинаковы.

В том случае, когда почему-либо точность определения этих величин не одинакова и средние их ошибки различны и заданы или известны, то надо сперва все условные уравнения привести к одинаковой средней ошибке или, как говорят, к одинаковому весу“. Это делается следующим образом.

Пусть заданные средние ошибки наших наблюденных величин

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots\alpha_k$$

суть

$$\mu_1,\ \mu_2,\ldots\mu_k$$

то, вычислив величину

$$\mu=\sqrt{\frac{\mu_1^2+\mu_2^2+\ldots+\mu_k^2}{k}} \tag{78}$$

составляем величины

$$p_1 = \frac{\mu}{\mu_1}; \quad p_2 = \frac{\mu}{\mu_2}; \quad \ldots p_k = \frac{\mu}{\mu_k} \tag{79}$$

и каждое из основных ур-ний (53) умножаем на соответствующего ему множителя p_i; очевидно, что мы получим систему уравнений эквивалентную (53), в которой вторые части будут

$$\alpha_1 \frac{\mu}{\mu_1}; \quad \alpha_2 \frac{\mu}{\mu_2}; \quad \ldots \alpha_k \frac{\mu}{\mu_k} \tag{80}$$

т. е. все будут иметь одну и ту же среднюю ошибку μ.

Из ф-лы (79) очевидно, что вместо самих средних ошибок можно брать любые величины, им пропорциональные, чтобы сделать вычисление проще, например, если $\mu = 0.02$, то если мы все величины умножим на 50, то у всех дробей (79) числитель будет 1. Ясно также, что для всех тех уравнений, для которых

$$\mu_i = \mu$$

будет

$$p_i = 1$$

Сделав приведение всех основных уравнений к одинаковой средней ошибке или весу,[1] поступаем с приведенными уравнениями, для составления нормальных уравнений, как указано в § 127.

Необходимость и способ приведения всех уравнений к одному весу или к одинаковой средней ошибке можно обосновать и несколько иначе, исходя из формулы Гаусса.

Положим, что в ур-ниях (53) § 127 известные члены $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ подвержены средним ошибкам $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ различной величины, соответственно которым значения h в формуле Гаусса будут также различные, а именно:

$$h_1 = \mu_1\sqrt{2}; \quad h_2 = \mu_2\sqrt{2}; \quad \ldots h_k = \mu_k\sqrt{2}$$

так что вероятность совместного появления погрешностей

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_k$$

будет пропорциональна величине

$$\frac{1}{h_1 h_2 \ldots h_k (\sqrt{\pi})^k} e^{-(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_k^2)}$$

---

[1] „Весом“ называются величины p_i^2.

причем

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon_1}{h_1}; \quad \delta_2 = \frac{\varepsilon_2}{h_2}; \quad \ldots \delta_k = \frac{\varepsilon_k}{h_k}$$

следовательно, наименьшею должна быть не величина

$$V = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_k^2$$

а величина

$$V_1 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_k^2$$

Очевидно, что одновременно с V_1 будет минимумом и величина

$$V_2 = q^2 V_1 = (q\delta_1)^2 + (q\delta_2)^2 + \ldots + (q\delta_k)^2$$

причем q есть *любое* постоянное число.

Положив

$$q\delta_1 = \sigma, \; q\delta_2 = \sigma_2, \; \ldots q\delta_k = \sigma_k$$

будем иметь

$$V_2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_k^2$$

которое и должно быть минимумом.

Возьмем

$$q = \mu\sqrt{2}$$

тогда будет

$$\sigma_1 = \frac{\mu}{\mu_1}\varepsilon_1; \quad \sigma_2 = \frac{\mu}{\mu_2}\varepsilon_2; \quad \ldots \sigma_k = \frac{\mu}{\mu_k}\varepsilon_k$$

т. е., на основании ур-ния (55),

$$\begin{gathered}
\sigma_1 = \frac{\mu}{\mu_1}(a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + \ldots + g_1 w - \alpha_1) \\
\sigma_2 = \frac{\mu}{\mu_2}(a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + \ldots + q_2 w - \alpha_2) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sigma_k = \frac{\mu}{\mu_k}(a_k\xi + b_k\eta + c_k\zeta + \ldots + g_k w - \alpha_k)
\end{gathered}$$

что показывает, что в этом случае, для составления нормальных уравнений, надо сперва все условные уравнения привести к одинаковой средней ошибке, умножив их соответственно на

$$\frac{\mu}{\mu_1}; \quad \frac{\mu}{\mu_2}; \quad \ldots \frac{\mu}{\mu_k}$$

причем μ может быть какое угодно.

Мы взяли выше

$$\mu = \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_k^2}{k}}$$

можно было бы вместо этого брать, например,

$$\mu = 1$$

или

$$\mu = \mu_i$$

или всякое другое значение, которое почему-либо упрощало бы вычисление — результат от этого не изменится.

Таблица 95

i	t_i	N_i	p_i^2	p_i
1	+1.5	6.20	1/2	0.707
2	+1.1	3.45	1	1
3	+0.7	2.00	1	1
4	+0.3	1.80	1	1
5	—0.1	2.40	1	1
6	—0.5	4.55	1	1
7	—1.0	8.85	1	1
8	—1.5	15.70	1/2	0.707
9	—2.0	24.40	1/4	0.500

Величина μ есть та средняя ошибка, которой приписывается „вес", равный **1**, и которую можно брать произвольно, ибо в окончательные результаты значение ее не входит.

§ **135.** Составим теперь схемы для вычисления, поясняя их одновременно примером.

Пример этот мы возьмем из курса астрономии, читанного в Морской академии Н. Я. Цингером, который был профессором в Морской академии более 40 лет.

Пусть величина N есть функция переменной t, определенная равенством

$$N = X + Yt + Zt^2$$

и требуется определить вероятнейшие значения коэффициентов X, Y, Z и их средние ошибки: β, γ, δ, по следующим девяти данным N, полученным из наблюдений с различными „весами".

Значения аргумента t ошибкам наблюдений не подвержены (табл. 95).

Таким образом, составленные по непосредственным наблюдениям ур-ния (47) будут

$$\begin{aligned}
X + 1.5\,Y + 2.25\,Z &= +\ 6.20\\
X + 1.1\,Y + 1.21\,Z &= +\ 3.45\\
X + 0.7\,Y + 0.49\,Z &= +\ 2.00\\
X + 0.3\,Y + 0.09\,Z &= +\ 1.80\\
X - 0.1\,Y + 0.01\,Z &= +\ 2.40\\
X - 0.5\,Y + 0.25\,Z &= +\ 4.55\\
X - 1.0\,Y + 1.00\,Z &= +\ 8.85\\
X - 1.5\,Y + 2.25\,Z &= +15.70\\
X - 2.0\,Y + 4.00\,Z &= +24.40
\end{aligned} \qquad (*)$$

Прежде всего находим приближенные значения величин X, Y, Z; для этого берем уравнения первое, пятое и восьмое, и из них находим, округлив,

$$X_0 = 2.4; \quad Y_0 = -3.2; \quad Z_0 = +3.8$$

Подставляя эти величины в левые части ур-ний (*), находим те значения, которые обозначены через $A_1, A_2, \ldots$, именно будет

$$\begin{aligned}
2.4 - 1.5 \cdot 3.2 + 2.25 \cdot 3.8 &= 6.15 \\
2.4 - 1.1 \cdot 3.2 + 1.21 \cdot 3.8 &= 3.48 \\
2.4 - 0.7 \cdot 3.2 + 0.49 \cdot 3.8 &= 2.02 \\
2.4 - 0.3 \cdot 3.2 + 0.09 \cdot 3.8 &= 1.78 \\
2.4 + 0.1 \cdot 3.2 + 0.01 \cdot 3.8 &= 2.76 \\
2.4 + 0.5 \cdot 3.2 + 0.25 \cdot 3.8 &= 4.95 \\
2.4 + 1.0 \cdot 3.2 + 1.00 \cdot 3.8 &= 9.40 \\
2.4 + 1.5 \cdot 3.2 + 2.25 \cdot 3.8 &= 15.75 \\
2.4 + 2.0 \cdot 3.2 + 4.00 \cdot 3.8 &= 24.00
\end{aligned}$$

Вычитая эти значения из величин N, получаем следующие величины чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_9$:

$$+0.05, \; -0.03, \; -0.02$$
$$+0.02, \; -0.36, \; -0.40, \; -0.55, \; -0.05, \; +0.40$$

таким образом, положив

$$\begin{aligned}
X &= 2.4 + \xi \\
Y &= -3.2 + \eta \\
Z &= 3.8 + \zeta
\end{aligned}$$

получаем следующие условные уравнения, написанные нами в табл. 99, само собой понятной.

Умножив все показанные в этой таблице коэффициенты при неизвестных и величины α_i на p_i, приведем все эти уравнения к таким, у которых средняя ошибка известных членов $\alpha_i p_i$ будет одна и та же.

Эти приведенные уравнения и вписываем в столбцы II, III, IV, V табл. 96, в первом столбце которой вписаны нумера уравнений.

В столбец VI вписаны суммы

$$s = a + b + c + \alpha$$

В столбцы VII — XVIII вписаны произведения a^2, ab, ac, $\ldots$ cs, как показано в заголовках этих столбцов.

Вычисление начинается с заполнения столбца VI, после того для проверки составляются суммы чисел, стоящие в столбцах II, III, IV, V, VI. Число, стоящее в строке „суммы“ и в столбце VI, должно быть равно сумме чисел, стоящих с ним в одной строке; так:

$$14.506 = 7.914 - 0.50 + 8.232 - 1.140$$

Это служит поверкою.

Схема и пример составления и

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
№№ условных уравнений i	ξ a_i	η b_i	ζ c_i	α_i	s_i	a_i^2	$a_i b_i$	$a_i c_i$
1	0.707	1.06	1.591	0.035	3.393	0.5	0.75	1.125
2	1	1.10	1.21	—0.03	3.28	1	1.10	1.21
3	1	0.70	0.49	—0.02	2.17	1	0.70	0.49
4	1	0.30	0.09	0.02	1.41	1	0.30	0.09
5	1	—0.10	0.01	—0.35	0.55	1	—0.10	0.01
6	1	—0.50	0.25	—0.40	0.35	1	—0.50	0.25
7	1	—1.00	1.00	—0.55	0.45	1	—1.00	1.00
8	0.707	—1.06	1.591	—0.035	1.203	0.5	—0.75	1.125
9	0.500	—1.00	2.000	0.200	1.70	0.25	—0.50	1.00
Суммы . .	7.914	—0.50	8.232	—1.140	14.506	7.250	0	6.300

Поверка: 7.914 —0.500 +8.232 —1.140=14.506 7.250 +0.000 +6.300

Нормальные уравнения:

После этого, поставив на логарифмической линейке ползун на число a_1, заполняем первую строку столбцов VII, VIII, IX, X, XI. Затем ставим ползун на число a_2 и заполняем вторую строку тех же столбцов и т. д. до последней их строки, после чего берем суммы чисел, стоящих в этих столбцах, и проверяем вычисление по равенству

$$12.310 = 7.250 + 0.0 + 6.300 - 1.240$$

Затем в таком же порядке заполняем столбцы XII, XIII, XIV, XV и проверяем по равенству

$$6.300 + 0.0 - 1.425 + 0.620 = 5.495$$

После этого в таком же порядке заполняем столбцы XVI, XVII, XVIII и проверяем вычисление по равенству

$$11.837 + 6.300 - 1.425 - 0.298 = 16.414$$

Таблица 96

решения нормальных уравнений

X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII
$a_i\alpha_i$	$a_i s_i$	b_i^2	$b_i c_i$	$b_i\alpha_i$	$b_i s_i$	c_i^2	$c_i\alpha_i$	$c_i s_i$
0.025	2.398	1.125	1.687	0.033	3.600	2.531	0.056	5.402
—0.03	3.28	1.21	1.331	—0.033	3.608	1.464	—0.036	3.972
—0.02	2.17	0.49	0.343	—0.014	1.519	0.240	—0.010	1.054
0.02	1.41	0.09	0.027	0.006	0.423	0.003	0.002	0.127
—0.36	0.55	0.01	—0.001	0.036	—0.055	0	—0.004	0.006
—0.40	0.35	0.25	—0.125	0.200	—0.175	0.063	—0.100	0.088
—0.55	0.45	1.00	—1.000	0.550	—0.450	1.000	—0.550	0.450
—0.025	0.852	1.125	—1.687	0.037	—1.275	2.531	—0.056	1.915
0.10	0.85	1.00	2.000	—0.200	—1.700	4.000	0.400	3.400
—1.240	12.310	6.300	—1.425	+0.620	+5.495	11.837	—0.298	16.414

—1.240=12.310 6.300 +0.000 —1.425 +0.620=5.495 11.837 +6.300 —1.425 —0.298=16.414

$$
\begin{aligned}
6.300\xi - 1.425\eta + 11.837\zeta &= -0.289\\
6.300\eta - 1.425\zeta &= +0.620\\
7.250\xi + 6.300\zeta &= -1.240
\end{aligned}
$$

На этом заканчивается вычисление коэффициентов и известных членов нормальных уравнений. Решение нормальных уравнений и вычисление отклонений приведены в табл. 97 и 98 (на отдельном листе).

Когда вычисление производится логарифмической линейкой, и надо иметь не только вероятнейшие значения неизвестных, но и средние или вероятные их погрешности, то выгоднее всего заменить известные члены буквами, например A, B и C, и писать нормальные уравнения для нашего примера в таком виде:

$$
\begin{aligned}
7.250\xi \qquad\qquad + 6.300\zeta &= A\\
6.300\eta - 1.425\zeta &= B\\
6.300\xi - 1.425\eta + 11.837\zeta &= C
\end{aligned}
\qquad (81)
$$

Таблица 99

i	a_i	b_i	c_i	α_i	p_i
1	1.00	1.5	2.25	0.05	0.707
2	1.00	1.1	1.21	—0.03	1
3	1.00	0.7	0.49	—0.02	1
4	1.00	0.3	0.09	0.02	1
5	1.00	—0.1	0.01	—0.36	1
6	1.00	—0.5	0.25	—0.40	1
7	1.00	—1.0	1.00	—0.55	1
8	1.00	—1.5	2.25	—0.05	0.707
9	1.00	—2.0	4.00	0.40	0.5

Исключение неизвестных для решения этих уравнений выгодно производить так: разделив каждое уравнение на коэффициент при первой неизвестной (в нашем частном случае только первое и третье уравнение), имеем

$$\begin{aligned} \xi \qquad\qquad\; &+ 0.869\zeta = 0.1377A \\ 6.300\eta \;&- 1.425\zeta = B \\ \xi - 0.2263\eta &+ 1.880\zeta = 0.1588C \end{aligned}$$

исключая ξ, имеем

$$\begin{aligned} 6.300\eta \;&- 1.425\zeta = B \\ -0.2263\eta &+ 1.011\zeta = -0.1377A + 0.1588C \end{aligned}$$

Поступив с этими уравнениями так же, имеем

$$\begin{aligned} \eta - 0.2263\zeta &= 0.1588B \\ \eta - 4.469\zeta &= +0.609A - 0.702C \end{aligned}$$

Исключая η, имеем

$$-4.243\zeta = +0.609A - 0.1588B - 0.702C$$

откуда следует

$$\zeta = -0.1435A + 0.0374B + 0.1654C$$

Затем, подставляя, имеем

$$\begin{aligned} 0.2263\zeta &= -0.0323A + 0.0084B + 0.0373C \\ \eta &= -0.0323A + 0.1672B + 0.0373C \end{aligned}$$

Таблица 97

ьных уравнений

A	B	C
.377	0	0
	0	0.1588
	1.000	0
.1377	0	+0.1588
	0.1588	0
.609	0	—0.702
.609	—0.1588	—0.702

-0.0374B +0.1654C

+0.0084 +0.0373

+0.1672B +0.373C

l, —0.0325B —4.1437C

0.0325B —0.1437C

Вычисление отклон

№№ урав-нений i	I $a_i\xi$	II $b_i\eta$	III $c_i\zeta$	IV Сумма (I)+(II)+
1	—0.214	0.141	0.242	0.16
2	—0.303	0.146	0.183	0.0
3	—0.303	0.093	0.066	—0.14
4	—0.303	0.039	0.014	—0.2
5	—0.303	—0.013	0.002	—0.31
6	—0.303	—0.066	0.038	—0.33
7	—0.303	—0.132	0.152	—0.28
8	—0.214	—0.141	0.242	—0.1
9	—0.152	—0.132	0.303	+0.0

$$\varepsilon^2 = \frac{0.225}{9-3} = 0.0375$$

$$\varepsilon = 0.19$$

Значение неизв.

5·0.620—0.1437·(—0.298)= —0.3256—0.0201+0.0434= **—0.3027**

2·0.620+0.373 ·(—0.298)= +0.0401+0.1036—0.0112= **+0.1325**

4·0.620+0.1654·(—0.298)= +0.1780+0.0232—0.0496= **+0.1516**

Средние ошибки

±

$\beta = \varepsilon \cdot \sqrt{0.2624} = 0.19 \cdot 0.51 = 0.1$

$\gamma = \varepsilon \cdot \sqrt{0.1672} = 0.19 \cdot 0.41 = 0.0$

$\delta = \varepsilon \cdot \sqrt{0.1654} = 0.19 \cdot 0.41 = 0.0$

и после того

$$-0.869\zeta = +0.1247A - 0.0325B - 0.1437C$$

и, по подстановке,

$$\xi = 0.2624A - 0.0325B - 0.1437C$$

Таким образом, находим, что *общее* решение есть

$$\begin{aligned} \xi &= 0.2624A - 0.0325B - 0.1437C \\ \eta &= 0.0323A + 0.1672B + 0.0373C \\ \zeta &= -0.1435A + 0.374B + 0.1654C \end{aligned} \tag{82}$$

Чтобы получить значения неизвестных, полагаем

$$A = -1.240;\ B = 0.620;\ C = -0.298$$

тогда будет

$$\xi = -0.3027;\ \eta = 0.1325;\ \zeta = 0.1516$$

Затем положив

$$A = 1;\ B = 0;\ C = 0$$

имеем

$$M_1 = 0.2624$$

Положив

$$A = 0;\ B = 1;\ C = 0$$

получим

$$N_2 = 0.1672$$

и, наконец, при

$$A = 0;\ B = 0;\ C = 1$$

будет

$$P_3 = 0.1654$$

Очевидно, что эти величины можно было бы написать сразу, они суть стоящие по главной диагонали коэффициенты в ф-ле (82).

Остается найти величину средней ошибки наблюдений ε.

Для этого вычисляем сперва „отклонения“ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_9$, и затем по ф-ле (64) будет

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 + \ldots + \varepsilon_9{}^2}{k - n}} = \sqrt{\frac{0.225}{9-3}} = 0.19$$

Следовательно, средние ошибки неизвестных будут

$$
\begin{array}{ll}
\text{для неизвестной } \xi \ldots\ldots & \beta = 0.2624 \cdot \varepsilon = 0.10 \\
\quad \text{"} \qquad\quad \eta \ldots\ldots & \gamma = 0.1672 \cdot \varepsilon = 0.08 \\
\quad \text{"} \qquad\quad \zeta \ldots\ldots & \delta = 0.1654 \cdot \varepsilon = 0.08
\end{array}
$$

и вероятные ошибки их

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &= 0.67\,\beta = 0.067 \\
\rho_2 &= 0.67\,\gamma = 0.054 \\
\rho_3 &= 0.67\,\delta = 0.054
\end{aligned}
$$

Таким образом, величины ξ, η, ζ будут

$$
\begin{aligned}
\xi &= -0.303 \pm 0.067 \\
\eta &= +0.133 \pm 0.054 \\
\zeta &= +0.152 \pm 0.054
\end{aligned}
$$

а значит,

$$
\begin{aligned}
X &= 2.400 + \xi = +2.097 \pm 0.067 \\
Y &= -3.200 + \eta = -3.067 \pm 0.054 \\
Z &= +3.800 + \zeta = +3.948 \pm 0.054
\end{aligned}
$$

§ 136. В § 132 показано, что нахождение вероятнейших значений неизвестных

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots \omega$$

число которых n из системы условных уравнений

$$
\begin{array}{c}
a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + \ldots + g_1 \omega = \alpha_1 \\
a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + \ldots + g_2 \omega = \alpha_2 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
a_k \xi + b_k \eta + c_k \zeta + \ldots + g_k \omega = \alpha_k
\end{array}
\tag{53}
$$

по методе наименьших квадратов равносильно задаче о нахождении минимума функции

$$
\begin{aligned}
V = (a_1 \xi + b_1 \eta + \ldots + g_1 \omega - \alpha_1)^2 + \ldots \\
\ldots + (a_k \xi + b_k \eta + \ldots + g_k \omega - \alpha_k)^2
\end{aligned}
\tag{56}
$$

принимая величины

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots \omega$$

за переменные *независимые*, т. е. такие, что величина ни одной из них не определяется через прочие.

В таком случае искомые значения $\xi, \eta, \dots \omega$ определяются n уравнениями

$$\frac{\partial V}{\partial \xi}=0; \quad \frac{\partial V}{\partial \eta}=0; \quad \dots \frac{\partial V}{\partial \omega}=0 \tag{83}$$

которые в развитом виде и представляют собою систему нормальных уравнений, соответствующих заданным условным.

Но в некоторых вопросах величины

$$x, y, z, \dots w$$

к которым $\xi, \eta, \zeta, \dots \omega$ представляют малые поправки, связаны между собою некоторыми соотношениями, *независимыми от наблюдений*. Так, например, если x, y, z суть углы того же самого треугольника, то должно быть

$$x+y+z=180^\circ$$

и, значит, поправки ξ, η, ζ должны быть таковы, что их сумма

$$\xi+\eta+\zeta=0$$

как то следует из дифференцирования предыдущей формулы.

Итак, положим, что между переменными

$$\xi, \eta, \zeta, \dots \omega$$

имеют место i *линейных* уравнений вида

$$\begin{array}{c} A_1\xi+B_1\eta+\dots+G_1\omega=L_1 \\ A_2\xi+B_2\eta+\dots+G_2\omega=L_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_i\xi+B_i\eta+\dots+G_i\omega=L_i \end{array} \tag{84}$$

число которых i меньше n и которые имеют место независимо от наблюдений, так что наблюденные величины $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$ в эти соотношения не входят.

В таком случае нахождение таких значений переменных $\xi, \eta, \zeta, \dots \omega$, которые обращают величину и V в минимум, уже не определяются уравнениями (83), ибо теперь задача привелась к нахождению так называемого относительного минимума функции V.

Для решения этой задачи можно применять различные способы, из которых мы рассмотрим два.

Первый способ состоит в следующем: из ур-ний (84) мы можем определить i переменных, например:

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots \rho$$

в функции остальных $n-i$:

$$\sigma, \tau, \varphi, \ldots \omega$$

ясно, что получаются выражения вида

$$\begin{aligned} \xi &= h_1\sigma + k_1\tau + \ldots + q_1\omega - r_1 \\ \eta &= h_2\sigma + k_2\tau + \ldots + q_2\omega - r_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho &= h_i\sigma + k_i\tau + \ldots + q_i\omega - r_i \end{aligned} \tag{85}$$

где $h_1, k_1, \ldots q_i, r_1$ будут известные постоянные числа.

Подставив величины (85) в выражение V, мы получим сперва формулы вида

$$\begin{aligned} a_1\xi + b_1\eta + \ldots + g_1\omega - \alpha_1 &= h_1'\sigma + f_1'\tau + \ldots + g_1'\omega - r_1' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k\xi + b_k\eta + \ldots + g_k\omega - \alpha_k &= h_k'\sigma + f_k'\tau + \ldots + q_k'\omega - r_k' \end{aligned} \tag{86}$$

где $h_1', f_1', \ldots q_k', r_k'$ будут также известными постоянными, значит, выражение V, после этой подстановки, обратится в такое:

$$W = (h_1'\sigma + f_1'\tau + \ldots + q_1'\omega - r_1')^2 + \ldots + (h_k'\sigma + f_k'\tau + \ldots + q_k'\omega - r_k')^2$$

Здесь уже переменные $\sigma, \tau, \ldots \omega$ ничем между собою не связаны и являются независимыми, следовательно, значения их, обращающие V в минимум, будут определяться уравнениями

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial \tau} = 0; \quad \ldots \frac{\partial W}{\partial \omega} = 0 \tag{87}$$

т. е. уравнениями

$$\begin{aligned} \Sigma h'^2\sigma + \Sigma h'f'\tau + \ldots + \Sigma h'q'\omega &= \Sigma h'r' \\ \Sigma f'h'\sigma + \Sigma f'^2\tau + \ldots + \Sigma f'q'\omega &= \Sigma f'r' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma q'h'\sigma + \Sigma q'f'\tau + \ldots + \Sigma q'^2\omega &= \Sigma q'r' \end{aligned} \tag{88}$$

Ясно, что эти уравнения представляют „нормальные" уравнения для системы следующих „условных" уравнений:

$$\begin{aligned} h_1'\sigma + f_1'\tau + \ldots + q_1'\omega &= r_1' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ h_k'\sigma + f_k'\tau + \ldots + q_k'\omega &= r_k \end{aligned} \tag{89}$$

Отсюда следует такое правило: выразив из ур-ний (84) i переменных

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots \rho$$

в функции остальных $n - i$:

$$\sigma, \tau, \ldots \omega$$

подставить найденные выражения в заданные условные уравнения и привести их к виду

$$\begin{aligned} h_1'\sigma + f_1'\tau + \ldots + q_1'\omega &= r_1' \\ h_2'\sigma + f_1'\tau + \ldots + q_2'\omega &= r_2' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ h_k'\sigma + f_k'\tau + \ldots + q_k'\omega &= r_k' \end{aligned} \tag{90}$$

Для этих преобразованных условных уравнений составить по правилу § 132 соответствующие нормальные.

Составленные таким образом нормальные уравнения надо решить относительно величин

$$\sigma, \tau, \ldots \omega$$

принимаемых за неизвестные, и подставить найденные значения в выражения (85) остальных неизвестных, чем эти последние также определятся.

Второй способ состоит в применении к определению относительного минимума функции V Лагранжевой методы множителей, состоящей, как известно, в следующем.

Написав ур-ния (84), связывающие переменные

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots \omega$$

в форме

$$\begin{aligned} A_1\xi + B_1\eta + \ldots + G_1\omega - L_1 &= 0 \\ A_2\xi + B_2\eta + \ldots + G_2\omega - L_2 &= 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_i\xi + B_i\eta + \ldots + G_i\omega - L_i &= 0 \end{aligned} \tag{84'}$$

умножаем первые части этих уравнений соответственно на неопределенные постоянные множители

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_i$$

и составляем выражение

$$\begin{aligned} W = V &+ \lambda_1 (A_1 \xi + B_1 \eta + \ldots + G_1 \omega - L_1) \\ &+ \lambda_2 (A_2 \xi + B_2 \eta + \ldots + G_2 \omega - L_2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \lambda_i (A_i \xi + B_i \eta + \ldots + G_i \omega - L_i) \end{aligned} \tag{91}$$

в котором попрежнему

$$\begin{aligned} V = &(a_1 \xi + b_1 \eta + \ldots - \alpha_1)^2 + \\ &+ (a_2 \xi + b_2 \eta + \ldots - \alpha_2)^2 + \ldots + (a_k \xi + b_k \eta + \ldots - \alpha_k)^2 \end{aligned}$$

затем имеем уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0; \quad \ldots \frac{\partial W}{\partial \omega} = 0 \tag{92}$$

число которых есть n.

Эти n уравнения вместе с i ур-ниями (84) и служат для определения $n+i$ неизвестных

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots \omega; \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_i$$

Мы не останавливаемся на доказательстве этого способа нахождения относительных максимумов и минимумов, ибо его можно найти в любом курсе анализа и мы предполагаем этот способ читателю известным.

Развив ур-ния (92), мы получим систему

$$\begin{aligned} &\Sigma a_1^2 \xi + \Sigma ab\eta + \ldots + \Sigma ag\omega + A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 + \ldots + A_i \lambda_i = \Sigma a\alpha \\ &\Sigma ab\xi + \Sigma b^2 \eta + \ldots + \Sigma bg\omega + B_1 \lambda_1 + B_2 \lambda_2 + \ldots + B_i \lambda_i = \Sigma b\alpha \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Sigma ga\xi + \Sigma gb\eta + \ldots + \Sigma g^2 \omega + G_1 \lambda_1 + G_2 \lambda_2 + \ldots + G_i \lambda_i = \Sigma g\alpha \end{aligned} \tag{93}$$

Обратив внимание, что совокупность членов, заключающих знак Σ, представляет как раз систему нормальных уравнений для первоначально заданной системы (53) условных уравнений, получаем такое правило.

По заданной системе условных ур-ний (53) вычисляем по схеме § 135 коэффициенты

$$\begin{array}{llllll} \Sigma a^2, & \Sigma ab, & \Sigma ac, & \ldots & \Sigma ag, & \Sigma a\alpha \\ & \Sigma b^2, & \Sigma bc, & \ldots & \Sigma bg, & \Sigma b\alpha \\ & & \Sigma c^2, & \ldots & \Sigma cg, & \Sigma c\alpha \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & \Sigma g^2, & \Sigma g\alpha \end{array}$$

и для контроля суммы

$$\Sigma as,\ \Sigma bs, \ldots \Sigma ds$$

Тогда система нормальных уравнений будет

$$\left.\begin{array}{l}
\Sigma a^2\xi + \Sigma ab\eta + \ldots + \Sigma ag\omega + A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 + \ldots + A_i\lambda_i = \Sigma a\alpha \\
\Sigma ab\xi + \Sigma b^2\eta + \ldots + \Sigma bg\omega + B_1\lambda_1 + B_2\lambda_2 + \ldots + B_i\lambda_i = \Sigma b\alpha \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Sigma ga\xi + \Sigma gb\eta + \ldots + \Sigma g^2\omega + G_1\lambda_1 + G_2\lambda_2 + \ldots + G_i\lambda_i = \Sigma g\alpha
\end{array}\right\} \quad (94)$$

Из этих уравнений и ур-ний (84) и найдем величины

$$\xi,\ \eta, \ldots \omega,\ \lambda_1,\ \lambda_2, \ldots \lambda_i$$

найденные величины

$$\xi,\ \eta, \ldots \omega$$

и будут искомые вероятнейшие значения, нам нужные.

Сравнив эти два способа, видим, что в первом способе вычисление коэффициентов

$$h_1',\ f_1', \ldots q_i',\ r_i'$$

и затем по ним коэффициентов соответствующей системы нормальных уравнений требует приблизительно столько же работы, как и во втором способе; что же касается решения уравнений, то в первом способе придется сперва решить систему i ур-ний (84) и затем систему $n-i$ ур-ний (88).

Во втором способе придется решать систему $n+i$ уравнений, что может потребовать гораздо больше работы, но зато во втором способе вычисления гораздо симметричнее и более удобно контролируются.

При большом числе неизвестных и относящихся к ним условных уравнений, составление нормальных уравнений, их решение и вычисление вероятных ошибок представляет весьма большую работу, о которой могут дать суждение следующие числа. В 1822 г. Гаусс производил съемку Ганновера; в одном из своих писем к астроному Ольберсу он пишет: „Я на днях, после трех месяцев упорной работы, закончил по методе наименьших квадратов уравнительные вычисления, заключавшие около 300 условных уравнений с 55 неизвестными“.

Кажется наибольшее число неизвестных, с которыми в методе наименьших квадратов имели дело, было в Индийской съемке — около 2500 условных уравнений и 88 неизвестных; работа вычислительного бюро продолжалась два года.

Интерполяционная формула Стирлинга, см. стр. 282, ф-ла (IX):

$$y_{n+k} = y_n + k \cdot \frac{\Delta y_{n-1} + \Delta y_n}{2} + \frac{k^2}{2} \Delta^2 y_{n-1} +$$

$$+ \frac{(k+1)k(k-1)}{6} \cdot \frac{\Delta^3 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-1}}{2} + \frac{(k+1)k \cdot k(k-1)}{24} \cdot \Delta^4 y_{n-2} + \dots$$

Таблица 100

Значения коэффициентов для интерполяционной формулы Стирлинга

$$A = \frac{k^2}{2}; \quad B = \frac{(k+1)\ k(k-1)}{6}; \quad C = \frac{(k+1)kk(k-1)}{24}$$

k	A	B	C	k	A	B	C
0.00	+0.00000	−0.0000	−0.0000	0.25	+0.03125	−0.0391	−0.0024
.01	.00005	.0017	.0000	.26	.03380	.0404	.0026
.02	.00020	.0033	.0000	.27	.03645	.0417	.0028
.03	.00045	.0050	.0000	.28	.03920	.0430	.0030
.04	.00080	.0067	.0001	.29	.04205	.0443	.0032
0.05	+0.00125	−0.0083	−0.0001	0.30	+0.04500	−0.0455	−0.0034
.06	.00180	.0100	.0001	.31	.04805	.0467	.0036
.07	.00245	.0116	.0002	.32	.05120	.0479	.0038
.08	.00320	.0133	.0003	.33	.05445	.0490	.0040
.09	.00405	.0149	.0003	.34	.05780	.0501	.0043
0.10	+0.00500	−0.0165	−0.0004	0.35	+0.06125	−0.0512	−0.0045
.11	.00605	.0181	.0005	.36	.06480	.0522	.0047
.12	.00720	.0197	.0006	.37	.06845	.0532	.0049
.13	.00845	.0213	.0007	.38	.07220	.0542	.0051
.14	.00980	.0229	.0008	.39	.07605	.0551	.0054
0.15	+0.01125	−0.0244	−0.0009	0.40	+0.08000	−0.0560	−0.0056
.16	.01280	.0260	.0010	.41	.08405	.0568	.0058
.17	.01445	.0275	.0012	.42	.08820	.0576	.0060
.18	.01620	.0290	.0013	.43	.09245	.0584	.0063
.19	.01805	.0305	.0014	.44	.09680	.0591	.0065
0.20	+0.02000	−0.0320	−0.0016	0.45	+0.10125	−0.0598	−0.0067
.21	.02205	.0335	.0018	.46	.10580	.0604	.0069
.22	.02420	.0349	.0019	.47	.11045	.0610	.0072
.23	.02645	.0363	.0021	.48	.11520	.0616	.0074
.24	.02880	.0377	.0023	.49	.12005	.0621	.0076
0.25	+0.03125	−0.0391	−0.0024	0.50	+0.12500	−0.0625	−0.0078

Интерполяционная формула Ньютона, см. стр. 265, ф-ла (II'):

$$y_{n+k} = y_n + k\Delta y_n + \frac{k(k-1)}{2}\Delta^2 y_n + \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\Delta^3 y_n + \ldots$$

Таблица 101

Значения коэффициентов для интерполяционной формулы Ньютона

$$A = \frac{k(k-1)}{2};\ B = \frac{k(k-1)(k-2)}{6};\ C = \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{24}$$

k	A	B	C	k	A	B	C
0.00	—0.00000	+0.0000	—0.0000	0.50	—0.12500	+0.0625	—0.0391
.01	.00495	.0033	.0024	.51	.12495	.0621	.0386
.02	.00980	.0065	.0048	.52	.12480	.0616	.0382
.03	.01455	.0095	.0071	.53	.12455	.0610	.0377
.04	.01920	.0125	.0093	.54	.12420	.0604	.0372
0.05	—0.02375	+0.0154	—0.0114	0.55	—0.12375	+0.0598	—0.0366
.06	.02820	.0182	.0134	.56	.12320	.0591	.0361
.07	.03255	.0209	.0153	.57	.12255	.0584	.0355
.08	.03680	.0235	.0172	.53	.12180	.0576	.0346
.09	.04095	.0261	.0190	.59	.12095	.0568	.0342
0.10	—0.04500	+0.0285	—0.0207	0.60	—0.12000	+0.0560	—0.0336
.11	.04895	.0308	.0223	.61	.11895	.0551	.0329
.12	.05280	.0331	.0238	.62	.11780	.0542	.0322
.13	.05655	.0352	.0253	.63	.11655	.0532	.0315
.14	.06020	.0373	.0267	.64	.11520	.0522	.0308
0.15	—0.06375	+0.0393	—0.0280	0.65	—0.11375	+0.0512	—0.0301
.16	.06720	.0412	.0293	.66	.11220	.0501	.0293
.17	.07055	.0430	.0304	.67	.11055	.0490	.0285
.18	.07380	.0448	.0316	.68	.10880	.0479	.0278
.19	.07695	.0464	.0326	.69	.10695	.0467	.0270
0.20	—0.08000	+0.0480	—0.0336	0.70	—0.10500	+0.0455	—0.0262
.21	.08295	.0495	.0345	.71	.10295	.0443	.0253
.22	.08580	.0509	.0354	.72	.10080	.0430	.0245
.23	.08855	.0522	.0362	.73	.09855	.0417	.0237
.24	.09120	.0535	.0369	.74	.09620	.0404	.0228
0.25	—0.09375	+0.0547	—0.0376	0.75	—0.09375	+0.0391	—0.0220
.26	.09620	.0558	.0332	.76	.09120	.0377	.0211
.27	.09855	.0568	.0388	.77	.08855	.0363	.0202
.28	.10080	.0578	.0393	.78	.08580	.0349	.0194
.29	.10295	.0587	.0398	.79	.08295	.0335	.0185

Продолжение табл. 101

k	A	B	C	k	A	B	C
0.30	—0.10500	+0.0595	—0.0402	0.80	—0.08000	+0.0320	—0.0176
.31	.10695	.0602	.0405	.81	.07695	.0305	.0167
.32	.10808	.0609	.0408	.82	.07380	.0290	.0158
.33	.11055	.0615	.0411	.83	.07055	.0275	.0149
.34	.11220	.0621	.0413	.84	.06720	.0260	.0140
0.35	—0.11375	+0.0626	—0.0415	0.85	—0.06375	+0.0244	—0.0131
.36	.11520	.0630	.0416	.86	.06020	.0229	.0122
.37	.11655	.0633	.0416	.87	.05655	.0213	.0113
.38	.11780	.0636	.0417	.88	.05280	.0197	.0104
.39	.11895	.0638	.0416	.89	.04895	.0181	.0095
0.40	—0.12000	—0.0640	—0.0416	0.90	—0.04500	+0.0165	—0.0037
.41	.12095	.0641	.0415	.91	.04095	.0149	.0078
.42	.12180	.0641	.0414	.92	.03680	.0132	.0069
.43	.12255	.0641	.0412	.93	.03255	.0116	.0060
.44	.12320	.0641	.0410	.94	.02820	.0100	.0051
0.45	—0.12375	+0.0639	—0.0408	0.95	—0.02375	+0.0083	—0.0043
.46	.12420	.0638	.0405	.96	.01920	.0067	.0034
.47	.12455	.0635	.0402	.97	.01455	.0050	.0025
.48	.12480	.0632	.0398	.98	.00980	.0033	.0017
.49	.12495	.0629	.0395	.99	.00495	.0017	.0008
0.50	—0.12500	+0.0625	—0.0391	1.00	—0.00000	+0.0000	—0.0000

ЗАМЕЧЕННЫЕ СУЩЕСТВЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	*Строка*	*Напечатано*	*Должно быть*
61	8 св.	(фиг. 4)	(фиг. 5)
61	9 сн.	(фиг. 5)	(фиг. 4)
109	11 св.	$\lg A_3$	$\lg A_2$
146	8 „	$Q = rl(\theta_1 - \theta_2)$	$Q = rl(\theta_1 - \theta_0)$
152	4 сн.	на чертежах фиг. 37а, 37б	на чертеже фиг. 37
159	6—7 св.	$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2l}$	$\int\limits_{a}^{a+2l}$
189	10—9 сн.	$=\left(1-\frac{m^2-1}{6}\varphi+\ldots\right)^s= =1-\frac{(m^2-1)s}{6}\varphi+\ldots$	$=\left(1-\frac{m^2-1}{6}\varphi^2+\ldots\right)^s= =1-\frac{(m^2-1)s}{6}\varphi^2+\ldots$
196	5 св.	$f(\theta, y)\, e^{\beta(\varphi-y)\sqrt{-1}}$	$f(\theta, \varphi)\, e^{\beta(\varphi-y)\sqrt{-1}}$
203	1 сн.	$=\frac{1}{2}(1+2x\sin\varphi+x^2)$	$=\frac{1}{2}\lg(1+2x\sin\varphi+x^2)$
210		Опущен номер (2) к формулам строк 20—27	
249	5 сн.	$A_0+\frac{1}{2l}\int\limits_{a}^{a+2l} f(\xi)\,d\xi$	$A_0=\frac{1}{2l}\int\limits_{a}^{a+2l} f(\xi)\,d\xi$
250	3 св.	$\cos\frac{n\pi(\xi-a)}{h}$	$\cos\frac{n\pi(\xi-a)}{l}$
250	5 „	$\cos\frac{2n\pi(\xi-a)}{l}$	$\cos\frac{2n\pi(\xi-a)}{h}$
274	5 „	$\delta^2 y_0-(a_2+a_1+a_0)$	$\delta^2 y_0-(a_2+a_1+a_0)\,\delta^3 y_0$
307	Табл. 36, графа 5, стр. 1 св.	$\frac{(t^2-1)}{6}f^3(a)$	$\frac{t(t^2-1)}{6}f^3(a)$
344	7 св.	$-\frac{3}{8}\frac{\alpha a^3}{n}t\sin t$	$-\frac{3}{8}\frac{\alpha a^3}{n}t\sin nt$
392	Табл. 63, графа 3, стр. 2 сн.	0.16688	1.16688
392	Табл. 63, графа 2, стр. 7 сн.	0.14297	0.24297
446	1 сн.	$\frac{d^2 s}{dt^2}=[f-w_0-ks]$	$\frac{d^2 s}{dt^2}=\zeta[f-w_0-ks]$
481	17 „	0.764	0.674
482	9 „	§ 127	§ 132

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Академии Наук СССР

*

Технический редактор *А. В. Смирнова.*
Корректор *Ю. М. Северинова*

*

РИСО АН СССР № 2918. Подп. к печ. 31/I 1949 г. М-01363. Печ. л. $31^{1}/_{4}+2$ вклейки. Уч.-изд. л. 40. Тираж 3000. Зак. № 1287.

1-я тип. АН СССР. Ленинград, В. О., 9 линия 12.