АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СОБРАНИЕ ТРУДОВ АКАДЕМИКА А.Н.КРЫЛОВА

III

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА · ЛЕНИНГРАД

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СОБРАНИЕ ТРУДОВ

АКАДЕМИКА

А. Н. КРЫЛОВА

-11658-

III

МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1949 ЛЕНИНГРАД

Ответственный редактор

академик **В. И. СМИРНОВ**

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

От редакции 7
Предисловие к первому изданию 11
Предисловие ко второму изданию 15

Глава I

Обыкновенные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

§§
1. Уравнение второго порядка с последним членом. Общий интеграл его . . 17
2. Составление частного решения данного вида, применяя способ неопределенных коэффициентов 20
3, 4, 5. Случай, когда последний член выражается суммою, составленной из синусов или косинусов разных кратностей переменной независимой. Амплитуда, разность фаз, декремент 22
6. Резонанс 27
7. Биения 32
8. Действие сил малой продолжительности 35
9. Линейные уравнения высших порядков. Символический способ интегрирования их 41
10. Малые колебания системы с несколькими степенями свободы 48
11. Случай равных корней характеристического уравнения. Численный пример. 55
12. Нормальные координаты и основные колебания 60
13. Малые колебания системы в сопротивляющейся среде. Функция рассеяния. 63
14, 15. Вынужденные колебания системы. Резонанс 67
16, 17, 18, 19, 20. Приведение векового уравнения к виду, удобному для численного решения его. Пример. Особенные случаи 73
21. Колебания при постоянном трении 95
22. Общие замечания об устройстве регистрирующих приборов. Прибор для записи вибрации корабля. Индикатор Уатта. Прибор Фрама 99
23. Поперечные колебания вращающегося вала 109

Глава II

Линейные уравнения с частными производными высших порядков и с постоянными коэффициентами

24. Метода Даламберта и Эйлера интегрирования уравнений, где во всех членах порядок производных один и тот же 112

§§ Стр.
25. Общий вид линейного уравнения с постоянными коэфициентами и его самого общего решения 114
26. Пример — уравнение распространения тепла. 117
27. Случай равных корней характеристического уравнения 120
28. Обобщение формул § 25 121
29. Начальные условия и нахождение решения, им удовлетворяющего 121
30. Формулы Фурье 123
31. Доказательство теоремы Фурье 124
32. Метода Коши 129
33. Случай уравнения с последним членом 132
34, 35, 36, 37. Пример 1-й: колебания неограниченной упругой среды 133
38, 39. Пример 2-й: уравнение движения неограниченной пластинки 140

Глава III

Интегрирование линейных уравнений с частными производными при условиях для границ ограниченной среды. Первая метода Пуассона

40. Замечание об истории вопроса 146
41. Изложение методы на примере уравнения колебания струны 147
42. Свойства колебательного движения струны 158
43. Задачи 1-я и 2-я относительно интегрирования уравнения движения струны при разных граничных условиях 162
44, 45. Задача 3-я: уравнение распространения тепла в пруте 170

Глава IV

Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с частными производными при условиях на границах ограниченной среды. Вторая метода Пуассона

46. Изложение методы на примере уравнения движения струны. Сравнение полученного решения с Даламбертовым 179
47. Пример приложения методы к уравнению распространения тепла в пруте. 188
48. Поперечные колебания упругого стержня 194
49. Замечания о вычислении корней трансцендентных уравнений 204

Глава V

Приложения теории функции мнимого переменного и свойств интегральных вычетов к интегрированию линейных уравнений обыкновенных и с частными производными. Метода Коши

50. Понятие о функции мнимой переменной 210
51. Понятие об интеграле от функции мнимой переменной 214
52. Теорема Коши. Интегральный вычет 217
53. Две основные теоремы об интегральных вычетах 222
54. Приложение интегральных вычетов к нахождению определенных интегралов. Примеры 223

§§ Стр.
55, 56. Приложение интегральных вычетов к разложению функций в ряды . . . 228
57, 58. Приложение интегральных вычетов к интегрированию обыкновенных линейных уравнений 241
59. Определение постоянных произвольных по данным начальным значениям неизвестной и ее производных 246
60, 61. Интегрирование систем линейных уравнений 252
62. Теорема Hurwitz'a 258
63, 64. Приложение интегральных вычетов к интегрированию линейных уравнений с частными производными 259

Глава VI

Некоторые замечания о сходимости рядов Фурье и им подобных и о суммировании сих рядов

65. Теорема Абеля 268
66. Приложение теоремы Абеля к определению условий сходимости рядов Фурье. 269
67. Порядок коэффициентов ряда Фурье относительно $\frac{1}{n}$ при разложении разного рода функций 273
68, 69. Места разрывов и величины скачков функции и ее производной и их связь с коэффициентами ее разложения в ряд Фурье. Применение этих формул к усилению быстроты сходимости рядов Фурье 276
70. Нахождение производных функций, представленных рядами Фурье, когда почленное дифференцирование недопустимо 294
71. Ряды, подобные рядам Фурье 297

Глава VII

Решение линейных дифференциальных уравнений с частными производными и постоянными коэффициентами, имеющих последний член. Вынужденные колебания струн и стержней и другие практические приложения общей теории

72. Изложение общей методы на примере определения вынужденных колебаний струны 300
73. Случай, когда колебания происходят в сопротивляющейся среде 311
74. Вынужденные поперечные колебания стержня 313
75. Поперечные колебания стержня, вызываемые равномерно движущейся нагрузкой 319
76. Действие на балку малой массы равномерно движущейся нагрузки. Уравнение Стокса, интегрирование его 328
77. Поперечные колебания балки под действием периодически изменяющейся нагрузки 331
78, 79. Колебания тяжелого груза, подвешенного на упругой нити. Технические вопросы, приводимые к этой задаче 338
80. Приложение выводов предыдущего параграфа к теории индикатора Уатта. 347
81. Частные случаи предыдущей задачи 353

§§ Стр.
82. Действие внезапно приложенной силы 356
83, 84, 85. Анализ записи давления в цилиндре компрессора, полученной индикатором Виккерса 362
86. Крутильные колебания вала 372
87. Колебания струны, вызываемые заданным колебательным движением данной ее точки 373
88, 89, 90, 91, 92, 93, 94. Распространение тока по кабелю 378
95, 96, 97, 98, 99, 100. Продольные колебания ствола орудия при выстреле . . 404
101, 102, 103. Графическое представление полученного решения 420
104, 105, 106. Вибрация судов. Общий метод расчета 424
107, 108. Метода численного интегрирования 431
109, 110. Определение постоянных произвольных 436
111. Влияние местной жесткости на общую вибрацию 438
112, 113. Численный пример 439
114. Метода вычисления фундаментальных функций и характеристических чисел численным интегрированием 454

Глава VIII

Радиальные колебания полого цилиндра

115. Уравнения, к которым приводит вопрос о радиальных колебаниях полого цилиндра. Случай действия переменного давления на внутреннюю поверхность 460
116, 117. Определение свободных колебаний 462
118, 119. Основные свойства функций Бесселя 468
120. Трансцендентное уравнение, определяющее основные тона 475
121, 122. Определение вынужденных колебаний при действии переменного давления на внутреннюю поверхность 475
123. Численный пример — радиальные колебания 12-дюймовой пушки 478

ОТ РЕДАКЦИИ

Издаваемый труд академика А. Н. Крылова перепечатывается по последнему изданию, вышедшему в 1933 г. Текст был пересмотрен, исправлены замеченные опечатки, и в некоторых местах внесены несущественные редакционные изменения в изложение; эти места отмечены звёздочками. Кроме того, перевычислены таблицы, относящиеся к §§ 112 и 113. В подготовке настоящего тома к печати принимали участие: профессор К. В. Меликов, академик В. И. Смирнов и кандидат физико-математических наук Х. Л. Смолицкий.

6 марта 1948 г.

О НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ИМЕЮЩИХ ПРИЛОЖЕНИЕ
В ТЕХНИЧЕСКИХ ВОПРОСАХ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

По уставу 1909 г. продолжительность курса для технических отделов Морской Академии увеличена до трех лет, причем в учебный план третьего года включены необязательные для слушателей лекции по математике.

Чтение этого необязательного курса было поручено Конференцией Академии мне, и предметом его избрано изложение способов интегрирования дифференциальных уравнений математической физики, встречающихся в технических вопросах.

Прочитанный мною в продолжение осеннего полугодия 1912 г. при трех часовых лекциях в неделю курс и составляет содержание этой книги.

В главе I я напоминаю слушателям известную уже им из общего курса теорию интегрирования обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, подробно останавливаясь на уравнении второго порядка и разборе его решений в разных случаях; здесь же выясняются столь важные для всех технических приложений явления резонанса. Затем, я перехожу к уравнениям высших порядков и показываю символический способ нахождения их решений. Этот способ вошел во всеобщее употребление в английских руководствах и вообще в английскую литературу, с которою особенно часто и придется иметь дело морским инженерам. Рассмотрев общую теорию малых колебаний системы с несколькими степенями свободы, я даю, в заключение главы, несколько примеров технического характера, в которых приходится иметь дело с уравнениями разобранного в главе вида и с явлениями резонанса.

В главе II я даю изложение методы Коши интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и с частными производными высших порядков при начальных условиях, относящихся к среде неограниченной. Эта глава составлена мною по лекциям покойного проф. А. Н. Коркина, прочитанным им в 1891 г. группе своих учеников, собиравшихся на квартире проф. А. И. Садовского. Эти лекции были мною тогда же тщательно записаны и проредактированы, и в этой главе воспроизведено с возможною точностью образцовое изложение моего незабвенного учителя, столь многие годы трудившегося на пользу нашей Морской Академии.

Изложенные в этой главе вопросы находят ряд применений при исследованиях, относящихся к распространению электрических колебаний и беспроволочной телеграфии. Этих приложений я не касаюсь, так как в Академии читается специальный по этому делу курс.

В главе III я рассматриваю первую методу Пуассона для интегрирования линейных дифференциальных уравнений с частными производными и постоянными коэффициентами при условиях, относящихся к среде ограниченной. Здесь я также сперва воспроизвожу сообщенное мне А. Н. Коркиным изложение этой методы, затем проделываю ряд примеров, взятых главным образом из мемуара Пуассона, помещенного в XIX тетради журнала „École polytechnique".

В главе IV я излагаю методу Фурье, или вторую методу Пуассона, интегрирования тех же уравнений для ограниченной среды и поясняю эту методу рассмотрением классических примеров, относящихся к определению свободных колебаний струн и стержней.

В главе V я даю краткое изложение теории интегральных вычетов и показываю, следуя мемуарам Коши, приложения этой теории к интегрированию уравнений обыкновенных и в частных производных, а также к разложению функций в ряды, подобные рядам Фурье, которые встречались в главе IV и где условия их сходимости не могли быть обоснованы. Метода Коши дает как эти условия, так и общий способ для нахождения коэффициентов при разложении в ряды по функциям, зависящим от корней трансцендентных уравнений. Таким образом, эта глава составляет естественное теоретическое дополнение предыдущей.

В главе VI я рассматриваю сперва, независимо от теории Коши, условия сходимости рядов Фурье и им подобных, и показываю затем прием усиления быстроты сходимости таких рядов, приложимый во многих довольно общих случаях. Этот прием не только дает практическую возможность с удобством пользоваться такими рядами в приложениях, получая желаемую степень точности, взяв самое ограниченное число (3—5) членов преобразованного ряда, но часто приводит к представлению суммы предложенного ряда в замкнутой форме под видом разрывной функции. Этот же прием дает возможность находить производные от функций, представленных такими рядами Фурье, почленное дифференцирование которых недопустимо. Этого приема я не встречал ни в руководствах, ни в литературе, хотя, по его простоте и очевидности, я не смею утверждать, что он является новым.

В главе VII я излагаю общий способ интегрирования линейных дифференциальных уравнений с частными производными и постоянными коэффициентами с последним членом, придерживаясь той методы, которая дана мною в статье „Ueber die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben", напечатанной в „*Mathematische Annalen*" за 1905 г. Я прилагаю эту методу к рассмотрению вынужденных колебаний струн, стержней и балок, к теории индикатора, колебаний вала

и тому подобным вопросам практического характера, выясняю при этом явление резонанса и разбираю случаи действия сил „малой продолжительности“, причем решения всех этих вопросов даются как в виде рядов, так и в виде разрывных функций, представляющих суммы этих рядов.

В главе VIII я рассматриваю вынужденные радиальные колебания полого упругого цилиндра, чтобы дать пример уравнения с переменными коэффициентами и ознакомить слушателей Академии с простейшими свойствами функций Бесселя. Вопрос же этот мною избран потому, что он имеет практическое значение при проектировании орудий и был мне предложен таким знатоком этого дела, как ген.-лейт. А. Ф. Бринк.

Из этого общего обзора содержания предлагаемого курса видно, что я придерживался главным образом способов изложения „старых авторов“, Фурье, Пуассона, Коши, для которых главная цель состояла в нахождении решения, а не в безукоризненно строгом его обосновании и не в доказательстве его существования в общем случае или при установленных необходимых ограничениях. Эта часть мне представлялась имеющей лишь специально-математический интерес; вместе с тем, желающие ознакомиться с этими вопросами найдут их изложение в сочинениях акад. В. А. Стеклова, напечатанных частью на русском, частью на французском языках.

Для технических же приложений поверка полученного решения может быть сделана при помощи приемов, показанных мною в главе VI и поясненных на ряде примеров в главе VII.

Я не касался в своем курсе уравнения Лапласа ни для двух, ни для трех переменных, ибо это уравнение рассматривается в курсе электричества и в курсе теории земного магнетизма, читаемых в Академии; что же касается приложения этого уравнения к изучению струйного течения жидкостей, то мне просто пришлось бы воспроизвести труды проф. Н. Е. Жуковского, и я предпочел отослать слушателей к изучению их в подлиннике.

Наконец, в новейшее время, для решения вопросов математической физики, проф. Д. Гильберт в Геттингене развил особую методу „интегральных уравнений“. Этой методы я также не касаюсь в своем курсе, так как ее можно найти в изложении проф. Кнезера — „Die Integral-Gleichungen“, вполне приспособленном для учебных целей.

Само собою разумеется, что такой обширный предмет, как интегрирование уравнений математической физики, не может быть изложен с исчерпывающей полнотой ни в каком курсе. Но не в этом состояла моя задача: я имел целью дать слушателям, ознакомив их с трудами великих авторов, образцы решения могущих встретиться в их практике вопросов и выяснить важность и всеобщность тех явлений, которые известны под общим названием „резонанса“

Составление такого курса для высших учебных заведений вообще является настоятельно необходимым при современном развитии техники; но если не считать имеющей более элементарный характер прекрасной

книги Hort'a — „Die technische Schwingungslehre", то мне такого курса неизвестно. В виду того, что предлагаемый курс является, таким образом, первою попыткой в достижении намеченной цели, он, с разрешения начальника Академии и согласно постановлению Конференции Академии, печатается в ее „Известиях".

В заключение считаю своим долгом выразить глубочайшую благодарность Типографии Академии Наук, сделавшей из этой книги образец книгопечатного искусства, в особенности же — штатному корректору типографии Н. А. Виташевскому, который не только тщательно держал корректуру, но не раз обращал мое внимание на погрешности и неясности в самом оригинале.

А. Крылов.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание этой книги составляло 2-й выпуск „Известий Морской Академии“ и вышло в составе 500 экз. в 1913 г. Этот выпуск „Известий“ очень быстро разошелся и составил затем библиографическую редкость.

Ввиду того, что вопросы, рассматриваемые в этой книге, имеют непосредственное приложение к технике в широком смысле этого слова и соответствуют нуждам нашего строительства и многочисленных высших учебных заведений, особенно технических, Редакционно-издательский совет Академии Наук постановил выпустить второе издание, предложив мне сделать в книге надлежащие дополнения.

Эти дополнения составили около одной трети первоначального объема книги и заключают: §§ 16—20. Численное решение уравнения, которым определяются частоты малых колебаний материальной системы; §§ 83—85. Анализ одной замечательной индикаторной диаграммы; §§ 88—94. Распространение тока по кабелю; §§ 95—103. Продольные колебания орудия при выстреле; §§ 104—114. Вибрация судов. В остальном первоначальный текст оставлен без изменения, но тщательно пересмотрен и где нужно исправлен. Целый ряд необходимых исправлений был мне указан проф. В. С. Игнатовским, который, при чтении первого издания этой книги, проверил все выкладки и результаты, исправил все замеченные им опечатки и ошибки и, узнав о готовящемся новом издании книги, сообщил мне о них.

Считаю своим долгом принести проф. В. С. Игнатовскому свою особенную благодарность.

При издании этой книги Издательством и Типографией Академии Наук проявлены в полной мере их обычная заботливость и тщательность.

Чтобы сделать книгу более компактной, принят сравнительно мелкий шрифт, а чтобы иметь его четким и отчетливым, шрифт был взят вновь отлитый, не бывший еще в употреблении. Набор сложных математических формул этим мелким шрифтом представлял большие технические трудности, и надо было все необыкновенное искусство тт. наборщиков Типографии Академии Наук, чтобы эти трудности преодолеть с таким успехом, что внешность этой книги нисколько не уступает математическим изданиям знаменитой типографии Готье-Вилляра в Париже.

Корректуру правил ученый корректор Академии Наук С. А. Шабуневич, следивший с одинаковою тщательностью как за верностью текста, так и за внешностью его, испещряя поля гранок множеством чисто технических типографских указаний.

Выражая свою искреннюю признательность Издательству и Типографии Академии Наук, я прошу тт. наборщиков и С. А. Шабуневича принять выражения моей особенной благодарности за их труд, исполненный не только с величайшею заботливостью, тщательностью и искусством, но и с той истинной любовью к делу, которая служит вернейшим залогом его успеха.

А. Крылов.

Декабрь 1931 г.

ГЛАВА I

ОБЫКНОВЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Мы начнем наш курс с рассмотрения обыкновенного линейного уравнения второго порядка

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2h\frac{dy}{dt} + k^2y = f(t) \tag{1}$$

которое, обозначая производные значками, мы будем писать так:

$$y'' + 2hy' + k^2y = f(t) \tag{1'}$$

В этом уравнении коэффициенты h и k мы будем считать заданными постоянными, $f(t)$ — заданною функцией переменной независимой t.

Уравнения такого вида встречаются во множестве технических вопросов, из которых некоторые мы разберем подробнее, вместе с тем к интегрированию этого уравнения приводится интегрирование большей части и других уравнений, с которыми нам придется иметь дело.

Соответствующее уравнению (1) уравнение без последнего члена есть

$$u'' + 2hu' + k^2u = 0 \tag{2}$$

Подстановкою $u = e^{-ht}v$ это уравнение приводится к такому:

$$v'' + (k^2 - h^2)v = 0 \tag{3}$$

Уравнение же (1) такою же подстановкою

$$y = e^{-ht}z$$

приводится к виду

$$z'' + (k^2 - h^2)z = e^{ht}f(t) \tag{4}$$

В том случае, когда $k^2 - h^2 > 0$, то полагая

$$k^2 - h^2 = n_1^2$$

можем написать общий интеграл уравнения (3) под видом

$$v = C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t \tag{5}$$

следовательно, общий интеграл уравнения (2) будет

$$u = e^{-ht}[C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t] \tag{6}$$

Полагая для краткости письма

$$e^{ht} f(t) = F(t)$$

и применяя для нахождения частного решения Z уравнения

$$z'' + n_1^2 z = F(t) \tag{4}$$

способ изменения произвольных постоянных, получим, положив

$$Z = A \cos n_1 t + B \sin n_1 t \tag{7}$$

следующие два уравнения для нахождения A' и B', рассматриваемых как функций от t:

$$\begin{aligned} A' \cos n_1 t + B' \sin n_1 t &= 0 \\ -n_1 A' \sin n_1 t + n_1 B' \cos n_1 t &= F(t) \end{aligned} \tag{*}$$

откуда следует

$$A' = -\frac{1}{n_1} F(t) \sin n_1 t \quad \text{и} \quad B' = \frac{1}{n_1} F(t) \cos n_1 t$$

значит,

$$A = -\frac{1}{n_1} \int_a^t F(t) \sin n_1 t \, dt; \qquad B = \frac{1}{n_1} \int_a^t F(t) \cos n_1 t \, dt$$

где a есть какая угодно *заданная* постоянная, которой впоследствии можно будет распоряжаться так, чтобы выкладки становились проще.

Написав, во избежание неясностей, под знаком интеграла вместо буквы t букву ξ, получим

$$Z = \frac{1}{n_1} \sin n_1 t \int_a^t F(\xi) \cos n_1 \xi \, d\xi - \frac{1}{n_1} \cos n_1 t \int_a^t F(\xi) \sin n_1 \xi \, d\xi \tag{7'}$$

что можно написать иначе так:

$$Z = \frac{1}{n_1} \int_a^t F(\xi) \sin n_1 (t - \xi) \, d\xi \tag{7''}$$

и, следовательно, общий интеграл уравнения (4) будет

$$z = C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t + \frac{1}{n_1} \int_a^t F(\xi) \sin n_1 (t - \xi)\, d\xi \qquad (8)$$

откуда следует общий интеграл уравнения (1)

$$y = e^{-ht}(C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t) + \frac{1}{n_1} e^{-ht} \int_a^t e^{h\xi} f(\xi) \sin n_1 (t - \xi)\, d\xi \qquad (9)$$

причем

$$n_1^2 = k^2 - h^2$$

и

$$k^2 - h^2 > 0$$

В том случае, когда величина $k^2 - h^2 < 0$, то полагая

$$k^2 - h^2 = -n_2^2 \quad \text{или} \quad h^2 - k^2 = n_2^2$$

получим общий интеграл уравнения (3) в виде

$$v = C_1 e^{n_2 t} + C_2 e^{-n_2 t} \qquad (10)$$

и, значит, для уравнения (2) будет

$$u = e^{-ht}(C_1 e^{n_2 t} + C_2 e^{-n_2 t}) = C_1 e^{(n_2 - h)t} + C_2 e^{-(n_2 + h)t} \qquad (11)$$

Вместо уравнения (7) будет

$$Z = Ae^{n_2 t} + Be^{-n_2 t}$$

и вместо системы (*) — такая:

$$A' e^{n_2 t} + B' e^{-n_2 t} = 0$$
$$n_2 A' e^{n_2 t} - n_2 B' e^{-n_2 t} = F(t)$$

откуда следует

$$A' = \frac{1}{2n_2} e^{-n_2 t} F(t) \quad \text{и} \quad B' = -\frac{1}{2n_2} e^{n_2 t} F(t)\, dt$$

и

$$A = \frac{1}{2n_2} \int_a^t e^{-n_2 t} F(t)\, dt; \qquad B = -\frac{1}{2n_2} \int_a^t e^{n_2 t} F(t)\, dt$$

и

$$Z = \frac{1}{2n_2} \int_a^\xi e^{n_2 (t-\xi)} F(\xi)\, d\xi - \frac{1}{2n_2} \int_a^\xi e^{-n_2 (t-\xi)} F(\xi)\, d\xi \qquad (12)$$

после чего сейчас же напишется и общий интеграл уравнения (1).

Наконец, в том случае, когда

$$k^2 - h^2 = 0$$

то уравнение (3) примет вид

$$v'' = 0$$

его общий интеграл есть

$$v = C_1 t + C_2$$

значит, для уравнения (2) будет

$$u = e^{-ht}(C_1 t + C_2)$$

Затем, будет

$$Z = \int_a^t (t - \xi) F(\xi)\, d\xi \tag{13}$$

и общий интеграл уравнения (1) напишется в таком виде:

$$y = e^{-ht}(C_1 t + C_2) + e^{-ht} \int_a^t e^{h\xi}(t - \xi) f(\xi)\, d\xi \tag{14}$$

§ 2. В формулах (7'), (8), (9), (12), (14) функции $f(\xi)$ и $F(\xi)$ могут быть какие угодно, формулы эти остаются справедливыми, но во многих случаях частное решение уравнений (4) и (1) может быть получено и не пользуясь этими общими формулами, а применяя способ неопределенных коэффициентов, именно это будет во всех тех случаях, когда функции $f(t)$ или $F(t)$ имеют вид суммы, составленной из членов вида

$$e^{\mu t}(a + bt + ct^2 + \ldots + pt^l)$$

причем μ может быть как вещественною, так и мнимою постоянною, так что к рассматриваемым случаям относятся и те, когда во второй части наших уравнений находятся члены вида

$$(a + bt + \ldots + pt^l)\sin \alpha t; \qquad (a_1 + b_1 t + \ldots + p_1 t^l)\cos \alpha t$$

или

$$e^{\beta t}(a + bt + \ldots + pt^l)\sin \alpha t; \qquad e^{\beta t}(a_1 + b_1 t + \ldots + p_1 t^l)\cos \alpha t$$

или для случая $\mu = 0$ вида

$$a + bt + ct^2 + \ldots + pt^l$$

Во всех этих случаях надо искать частное решение того же вида, как и вторая часть уравнения, т. е. под видом суммы, составленной из членов

$$e^{\mu t}(A + Bt + Ct^2 + \ldots + Pt^l)$$

причем $A, B, C, \ldots P$ суть неопределенные коэффициенты, которые и найдутся, когда подставим решение написанного вида в уравнение и отождествим левую часть правой.

При этом надо иметь в виду, что в том случае, когда в каком-либо члене показатель μ есть корень „характеристического“ уравнения для данного линейного, т. е. уравнения

$$\gamma^2 + 2h\gamma + k^2 = 0$$

то вместо функции $A + Bt + \ldots + Pt^l$ надо брать такую же функцию, умноженную на t, т. е.

$$t(A + Bt + Pt^l)$$

и, значит, частное решение, соответствующее этому члену, искать по видом

$$e^{\mu t}[At + Bt^2 + \ldots + Pt^{l+1}]$$

если же характеристическое уравнение имело бы равные корни, и μ равнялось бы этому корню, то надо искать решение под видом

$$e^{\mu t}[At^2 + Bt^3 + \ldots + Pt^{l+2}]$$

В том случае, когда во второй части будет член вида

$$(a + bt + \ldots + pt^l)\sin \alpha t$$

то, помня, что по формулам Эйлера

$$\sin \alpha t = \frac{e^{\alpha t\sqrt{-1}} - e^{-\alpha t\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \quad \text{и} \quad \cos \alpha t = \frac{e^{\alpha t\sqrt{-1}} + e^{-\alpha t\sqrt{-1}}}{2}$$

т. е. присутствие члена $\sin \alpha t$ равносильно наличию обеих показательных функций $e^{\alpha t\sqrt{-1}}$ и $e^{-\alpha t\sqrt{-1}}$, значит, надо искать частное решение вида

$$(A + Bt + \ldots + Pt^l)\, e^{\alpha t\sqrt{-1}} + (A_1 + B_1 t + \ldots + P_1 t^l)\, e^{-\alpha t\sqrt{-1}}$$

или, заменив мнимые показательные функции тригонометрическими, решение вида

$$(A + Bt + \ldots + Pt^l)\sin \alpha t + (A_1 + B_1 t + \ldots + P_1 t^l)\cos \alpha t$$

хотя бы, повторяем, во второй части предложенного уравнения (1) был только член, содержащий $\sin \alpha t$, или только член, содержащий $\cos \alpha t$.

Так, например, для уравнения

$$y'' + 0.2\, y' + 5y = 0.7 \sin t$$

частное решение надо искать под видом

$$Y = A\sin t + A_1\cos t$$

и для определения коэффициентов A и A_1 получатся уравнения

$$4A - 0.2A_1 = 0.7$$

$$0.2A + 4A_1 = 0$$

так что

$$A = \frac{2.8}{16.04} = 0.175; \qquad A_1 = -\frac{0.14}{16.04} = -0.009\ldots$$

и, следовательно, искомое частное решение будет

$$Y = 0.175\sin t - 0.009\cos t$$

§ 3. В тех приложениях, которые мы будем рассматривать, вторая часть уравнения (1) будет по большей части представлять сумму членов вида

$$A\sin pt + B\cos pt$$

каждую пару таких членов, соответствующих тому же аргументу pt, можно соединить в один член, делая

$$A = H\cos\gamma; \qquad B = H\sin\gamma \tag{1}$$

так что

$$H = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{B}{A} \tag{1'}$$

и вышеупомянутый двучлен примет вид

$$H\sin(pt + \gamma)$$

Итак, в нашем случае уравнение (1) примет вид

$$y'' + 2hy' + k^2 y = \sum H\sin(pt + \gamma) \tag{2}$$

где под знаком $\sum$ надо разуметь сумму *конечного* числа членов того вида, как под этим знаком написано.

Общий интеграл этого уравнения будет вида

$$y = e^{-ht}[C_1\cos n_1 t + C_2\sin n_1 t] + Y$$

причем $n_1 = \sqrt{k^2 - h^2}$, ибо в наших приложениях будет $k^2 - h^2 > 0$.

Частное решение Y мы будем искать под видом

$$Y = \sum N\sin(pt + \gamma + \delta) \tag{3}$$

где N и δ — неизвестные постоянные; для определения этих постоянных возьмем как в сумме (2), так и (3), лишь по одному члену, и что проделаем по отношению к ним, то будет относиться и до всех остальных членов.

Подстановка величины $Y = N\sin(pt + \gamma + \delta)$ в уравнение

$$y'' + 2hy' + k^2 y = H\sin(pt + \gamma)$$

приводит к равенству

$$N(k^2 - p^2)\sin(pt + \gamma + \delta) + 2hpN\cos(pt + \gamma + \delta) = H\sin(pt + \gamma)$$

или иначе

$$[N(k^2 - p^2)\cos\delta - 2hpN\sin\delta]\sin(pt + \gamma) +$$

$$+ [N(k^2 - p^2)\sin\delta + 2hpN\cos\delta]\cos(pt + \gamma) = H\sin(pt + \gamma)$$

откуда, отожествляя, получаем для определения N и δ уравнения

$$N(k^2 - p^2)\cos\delta - 2hpN\sin\delta = H$$

$$2hpN\cos\delta + N(k^2 - p^2)\sin\delta = 0$$

Из этих уравнений получаем

$$N = \frac{H}{+\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2}} \tag{4}$$

$$N\cos\delta = \frac{(k^2 - p^2)H}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2}; \qquad N\sin\delta = \frac{-2hpH}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2}$$

или иначе

$$\cos\delta = \frac{k^2 - p^2}{+\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2}}; \qquad \sin\delta = \frac{-2hp}{+\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2}} \tag{5}$$

Формулы (4) и (5) определяют *вполне* как величину N, так и угол δ, причем для последнего знаки cos и sin укажут и надлежащую четверть.

В случае, когда $h = 0$, т. е. когда предложенное уравнение имеет вид

$$y'' + k^2 y = H\sin(pt + \gamma)$$

то частное его решение Y будет

$$Y = \frac{H}{k^2 - p^2}\sin(pt + \gamma) \tag{6}$$

Этот вид решения не имеет более места, когда $k=p$, в каковом случае надо искать решение вида

$$Y=Nt\cos(kt+\gamma) \tag{7}$$

причем окажется

$$N=-\frac{H}{2k} \tag{7'}$$

§ 4. Уравнение

$$y''+2hy'+k^2y=\sum H\sin(pt+\gamma)$$

можно рассматривать как уравнение движения маятника, совершающего малые колебания в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости, причем на этот маятник действуют возмущающие силы, изменяющиеся периодически с течением времени.

В таком случае входящие в состав общего интеграла члены

$$e^{-ht}(C_1\cos n_1 t+C_2\sin n_1 t) \tag{1}$$

в которых произвольные постоянные C_1 и C_2 определятся по начальным условиям, представляют так называемые *свободные* колебания, т. е. такие, которые происходят единственно только вследствие первоначального отклонения маятника от положения равновесия ($y=0$) под действием „восстановляющей“ силы ($-k^2y$), стремящейся возвращать маятник в положение равновесия, и под действием сопротивления среды.

Член же

$$Y=\sum N\sin(pt+\gamma+\delta) \tag{2}$$

представляет так называемые *вынужденные* колебания, происходящие от действия внешних возмущающих сил.

Полагая

$$C_1=A\sin\alpha;\qquad C_2=A\cos\alpha \tag{3}$$

мы выражение свободных колебаний напишем так:

$$Ae^{-ht}\sin(n_1 t+\alpha) \tag{4}$$

или иначе, положив

$$\frac{2\pi}{\tau_1}=n_1$$

так:

$$Ae^{-ht}\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_1}+\alpha\right) \tag{4'}$$

В таком случае τ_1 есть период свободных колебаний маятника, A — начальная их амплитуда и α — начальная фаза.

Иногда формулу (4′) пишут так:

$$Ae^{-ht}\sin\frac{2\pi}{\tau_1}(t+\beta) \qquad (4'')$$

так что $\beta=\tau_1\cdot\frac{\alpha}{2\pi}$ представляет начальную фазу, выраженную в долях периода.

Множитель e^{-ht} характеризует быстроту погашения свободных колебаний, именно, за время каждого полного размаха, или период τ_1, амплитуда убывает в отношении $e^{-h\tau_1}$ к 1, т. е. с течением времени амплитуды убывают в геометрической прогрессии с знаменателем $e^{-h\tau_1}$, тогда как время возрастает через промежутки, равные τ_1. Ясно, что если вместо амплитуд взять их логарифмы, то получится также убывающая арифметическая прогрессия с разностью $\varepsilon=-h\tau_1$, называемою „логарифмическим декрементом“, определив который из наблюдений, получим и „коэффициент сопротивления“ h.

Во многих случаях коэффициент сопротивления среды небольшой по сравнению с коэффициентом „восстановления“ k, тогда период $\tau_1=\frac{2\pi}{n_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-h^2}}$ колебаний маятника в сопротивляющейся среде разнится весьма мало от периода $\tau=\frac{2\pi}{k}$ колебаний в пустоте, т. е. если не принимать в расчет сопротивления.

В практических применениях этим обстоятельством пользуются весьма часто: обыкновенно точное определение коэффициента сопротивления h по расчету, имея лишь чертежи какого-либо механизма или составляя его проект, затруднительно, а то и просто невозможно, величина же k получается по расчету или чертежу непосредственно, тогда достаточно убедиться, что отношение $\frac{h}{k}$ вообще небольшое, и период свободных колебаний τ_1 может быть принят равным τ и рассчитан по формуле

$$\tau_1=\tau=\frac{2\pi}{k}$$

§ 5. Величина H, входящая в состав члена вида $H\sin(pt+\gamma)$, определяет напряжение той возмущающей силы, период изменяемости которой $T=\frac{2\pi}{p}$ и начальная фаза γ. Эта величина может быть охарактеризована величиною, или амплитудою, того „статического“ отклонения y_0, которое произвела бы постоянная сила той же величины H.

Это отклонение определится из уравнения (1) § 1, делая в нем $y=y_0=\text{const.}$, т. е. из уравнения

$$k^2y_0=H$$

значит,

$$y_0 = \frac{H}{k^2} \tag{1}$$

между тем формула (4) § 3 показывает, что амплитуда N колебания, производимого силою $H\sin(pt+\gamma)$, выражается так:

$$N = H \cdot \frac{1}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4h^2p^2}}$$

и, значит, отношение $N:y_0$, которое обозначим буквою λ, выражается формулою

$$\lambda = \frac{k^2}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4h^2p^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{p^2}{k^2}\right)^2+\frac{4h^2}{k^2}\cdot\frac{p^2}{k^2}}} \tag{2}$$

Из формулы видно, что это отношение есть функция только двух переменных

$$\frac{p}{k} = q \quad \text{и} \quad \frac{2h}{k} = \alpha$$

а не трех: p, h, k, ибо первые две входят в состав формулы (2) лишь в комбинациях $\frac{p}{k}$ и $\frac{h}{k}$.

Но величина $q = \frac{p}{k} = \frac{\tau}{T}$, т. е. равна отношению периода свободных колебаний системы без сопротивления к периоду возмущающей силы.

Таким образом, изучение величины возмущения, производимого данною силою, сводится к изучению величины

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-q^2)^2+\alpha^2q^2}} \tag{2}$$

где

$$q = \frac{\tau}{T} = \frac{\text{период свобод. колеб.}}{\text{период. возм. силы}} \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что при малых значениях α и при величине q, чувствительно отличающейся от 1, величина λ будет близка к $\frac{1}{|1-q^2|}$, где $|1-q^2|$ означает абсолютную величину разности $1-q^2$.

Чтобы с наглядностью судить о ходе изменения величины λ, которую можно считать как бы мерою динамической восприимчивости колебаний, составлена табл. 1 и по ней график (фиг. 1).

Кроме величины λ, необходимо еще обратить внимание на величину δ, представляющую *опаздывание в фазе*, или *разность фаз* между возмущением и силою, его производящею.

Формулу (5) § 3 также можно написать в таком виде, что будут входить только величины q и α, именно будет

$$\begin{aligned} \cos\delta &= \frac{1-q^2}{\sqrt{(1-q^2)^2+\alpha^2 q^2}} = (1-q^2)\cdot\lambda \\ \sin\delta &= -\frac{\alpha q}{\sqrt{(1-q^2)^2+\alpha^2 q^2}} = -\alpha q\cdot\lambda \end{aligned} \tag{4}$$

В той же табл. 1 показаны значения $(-\delta)$ с теми же аргументами α и q, как и для λ; на фиг. 2 представлен графически ход изменения величины $(-\delta)$.

§ 6. Резонанс. Рассмотрение табл. 1 и графика, ей соответствующего, покажет, что величина возмущения, производимого данною периодическою силою, по мере приближения периода силы и периода свободных колебаний системы к равенству весьма быстро возрастает и при равенстве обоих периодов достигает значения, равного $\frac{1}{\alpha k^2} H$, которое при малой величине α весьма велико; для системы же без сопротивления эта амплитуда даже возрастает беспредельно со временем.

Вместе с тем, в этом случае разность фаз равна $-\frac{\pi}{2}$.

Чтобы найти наибольшее значение величины λ, стоит только взять сперва $\frac{1}{\lambda^2} = (1-q^2)^2 + \alpha^2 q^2$ и заметить, что минимум этой величины имеет место при $q^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ и равен $\alpha^2 - \frac{\alpha^4}{4}$, значит, будет

$$\lambda_{max} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4}}} = \frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{\alpha^2}{8}+\ldots\right)$$

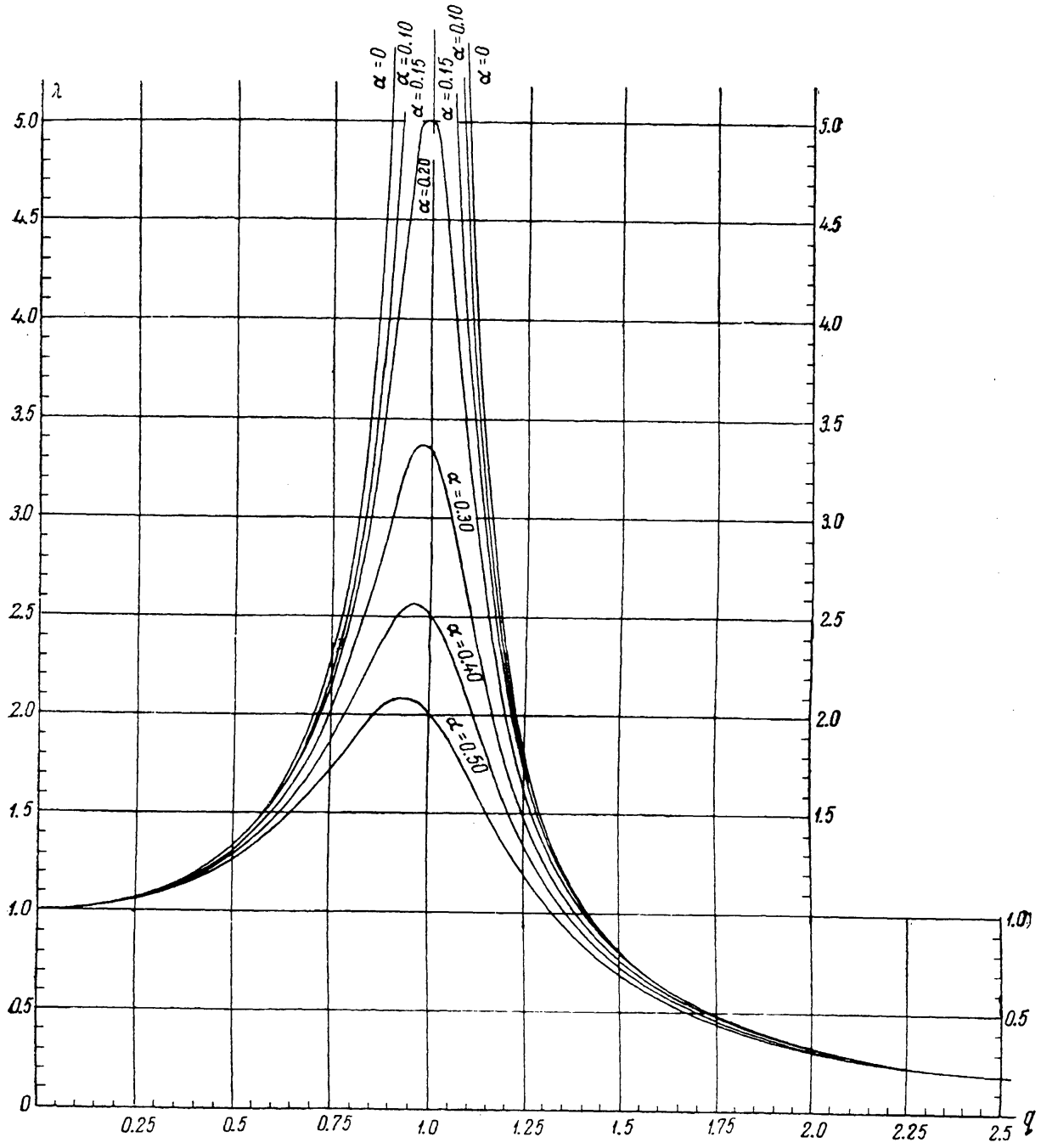
при

$$q = \sqrt{1-\frac{\alpha^2}{2}} = 1 - \frac{\alpha^2}{4} + \ldots$$

Таблица 1

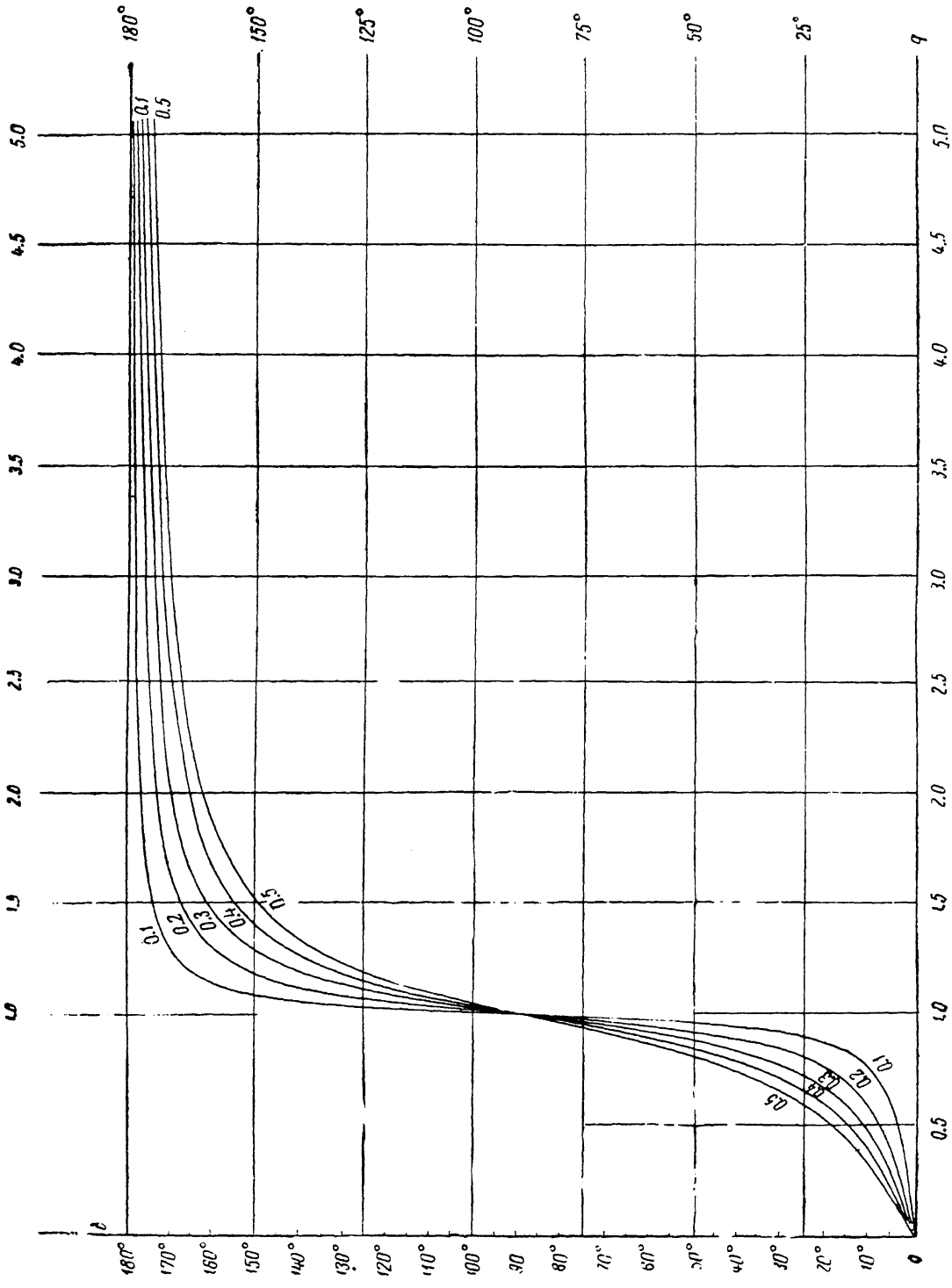
Величины $\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-q^2)^2 + \alpha^2 q^2}}$ и $-\delta = \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha q}{1-q^2}$

q	$\alpha=0.0$	$\alpha=0.1$		$\alpha=0.15$		$\alpha=0.2$		$\alpha=0.3$		$\alpha=0.4$		$\alpha=0.5$	
	λ	λ	$-\delta$	λ	$-\delta$	λ	$-\delta$	λ	$-\delta$	λ	$-\delta$	λ	$-\delta$
0.00	1.00	1.00	0.0°	1.00	0.0°	1.00	0.0°	1.00	0.0°	1.00	0.0°	1.00	0.0°
0.10	1.01	1.01	0.6	1.01	0.9	1.01	1.3	1.01	1.9	1.01	2.5	1.01	2.9
0.20	1.04	1.04	1.2	1.04	1.8	1.04	2.4	1.04	3.6	1.04	4.7	1.04	5.9
0.30	1.10	1.10	1.9	1.10	2.8	1.10	3.7	1.10	5.6	1.09	7.5	1.09	9.4
0.40	1.19	1.19	2.8	1.19	4.1	1.18	5.4	1.18	8.1	1.17	10.8	1.16	13.4
0.50	1.33	1.33	3.8	1.33	5.8	1.32	7.6	1.30	11.3	1.29	15.0	1.26	18.5
0.60	1.56	1.55	5.3	1.55	8.1	1.54	10.6	1.50	15.7	1.46	20.6	1.41	25.2
0.70	1.96	1.94	7.8	1.92	11.7	1.89	15.4	1.82	22.4	1.72	28.8	1.62	34.5
0.75	2.28	2.25	9.7	2.22	14.4	2.16	18.9	2.03	27.2	1.88	34.4	1.72	40.6
0.80	2.78	2.71	12.5	2.64	18.4	2.53	23.9	2.31	33.7	2.08	41.7	1.86	48.0
0.85	3.60	3.44	17.0	3.26	24.6	3.07	31.4	2.65	42.5	2.28	50.8	1.98	56.8
0.90	5.26	4.76	25.3	4.29	35.4	3.82	43.5	3.03	55.0	2.46	62.2	2.05	67.2
0.925	6.95	5.85	32.7	5.00	43.9	4.27	52.2	3.20	62.5	2.52	68.7	2.07	72 7
0.95	10.26	7.33	44.1	5.76	55.5	4.67	62.7	3.30	71.0	2.55	75.5	2.06	78.3
0.975	20.50	9.16	63.4	6.45	71.5	4.98	75.9	3.36	80.5	2.55	82.9	2.04	84.2
1.00	∞	10.00	90.0	6.67	90.0	5.00	90.0	3.33	90.0	2.50	90.0	2.00	90.0
1.025	19.76	8.73	116.5	6.17	108.3	4.73	104.0	3.20	99.4	2.42	97.1	1.94	95.6
1.05	9.76	6.80	134.8	5.30	123.0	4.23	116.5	3.02	108.3	2.31	103.9	1.87	101.1
1.075	6.45	5.31	145.3	4.47	134.0	3.77	125.8	2.80	115.7	2.10	109.8	1.79	106.2
1.10	4.76	4.22	152.3	3.75	141.8	3.29	133.7	2.55	122.3	2.05	115.5	1.70	110.8
1.15	3.11	2.94	160.3	2.74	151.8	2.53	144.8	2.17	133.0	1.78	125.4	1.52	119.3
1.20	2.27	2.19	164.8	2.10	157.8	1.99	151.4	1.76	140.6	1.54	132.5	0.36	126.3
1.25	1.78	1.74	167.4	1.69	161.5	1.63	156.0	1.48	146.3	1.33	138.2	1.19	132.0
1.30	1.45	1.42	169.3	1.40	164.2	1.36	159.4	1.26	150.5	1.16	143.0	1.06	136.7
1.40	1.04	1.03	171.8	1.02	167.7	1.00	163.9	0.96	156.4	0.90	149.7	0.34	143.8
1.50	0.80	0.80	173.2	0.79	168.8	0.77	166.5	0.75	160.2	0.72	154.3	0.69	149.0
1.75	0.49	0.48	175.1	0.48	172.8	0.48	171.5	0.47	166.7	0.45	161.3	0.45	157.0
2.00	0.33	0.33	176.2	0.33	174.3	0.33	172.4	0.33	168.7	0.32	165.0	0.32	161.6
2.50	0.19	0.19	177.2	0.19	175.9	0.19	174.5	0.19	171.9	0.19	169.2	0.18	166.6
3.00	0.125	0.125	177.8	0.125	176.8	0.125	175.7	0.123	173.5	0.123	171.5	0.123	169.5
4.00	0.067	0.067	178.5	0.067	177.6	0.067	177.0	0.066	175.5	0.066	174.0	0.066	172.3
5.00	0.042	0.042	178.9	0.042	178.1	0.042	177.6	0.042	176.4	0.042	175.3	0.012	174.0



Фиг. 1.

Обыкновенно величина α небольшая $\left(\text{около } \frac{1}{10} - \frac{2}{10}\right)$, и тогда видно, что как только q отклонится от 1, т. е. период свободных колебаний и период силы от равенства, на сравнительно небольшую величину, хотя бы около $10^0/_0$, то λ становится гораздо меньше своего максимума, причем по мере приближения q к 0 величина λ приближается к 1, по мере же возрастания q сверх 1 величина λ быстро убывает и, например, при $q = 3$ составляет уже всего около $\frac{1}{8}$.



Фиг. 2.

Отсюда видно, что если при действии на какую угодно систему (будь то маятник, гальванометр, корабль, локомотив и т. д.), уравнение движения которой имеет вид

$$y'' + 2hy' + k^2 y = H \sin(pt + \gamma)$$

мы будем изменять только период возмущающей силы (т. е. величину $p=\frac{2\pi}{T}$), то заметим следующее явление: при приближении периода T или частоты колебаний силы p к некоторому определенному значению, колебания системы, производимые силою, начинают бысто возрастать, достигают некоторого максимума, и затем, при дальнейшем увеличении частоты, величина производимого возмущения также быстро падает, уменьшаясь постепенно до нуля.

В этом и состоит явление так называемого „резонанса", с которым мы постоянно будем встречаться в нашем курсе.

Точно так же, когда на нашу систему действует совокупность различных периодических сил, так что уравнение движения нашей системы есть

$$y''+2ky'+k^2y=\sum_i H_i\sin(p_it_i+\gamma_i)$$

то если мы в нашей системе начнем изменять величину k^2, иными словами, период свободных колебаний нашей системы, например, постепенно уменьшая его от весьма большого значения, то обнаружится следующее явление: сперва система совершает лишь ничтожно малые колебания, затем, при приближении периода свободных колебаний к некоторому определенному значению T_1, а частоты их k_1 к значению p_1, амплитуда колебаний быстро возрастает, достигает максимума, затем быстро падает и остается сравнительно малою, пока период τ не начнет приближаться к некоторому значению T_2, по мере приближения к которому амплитуда быстро возрастает, достигает максимума, затем быстро падает и т. д.

Таким образом, если бы изобразить графически ход явления, откладывая по оси абсцисс период свободных колебаний системы τ, а по оси ординат амплитуду колебаний y_0 при этом периоде, то получилась бы кривая такого вида, как показано на фиг. 3, с несколькими весьма резкими максимумами.

Эти максимумы соответствуют тем значениям периода τ, которые равны периоду одной из слагающих возмущающей силы, и таким образом имеется возможность выделять отдельные ее составляющие, а заметив, что по формуле

$$N_j=\frac{H_j}{\sqrt{(k_j^2-p_j^2)^2+4h^2p_j^2}}=\frac{H_j}{2p_jh}$$

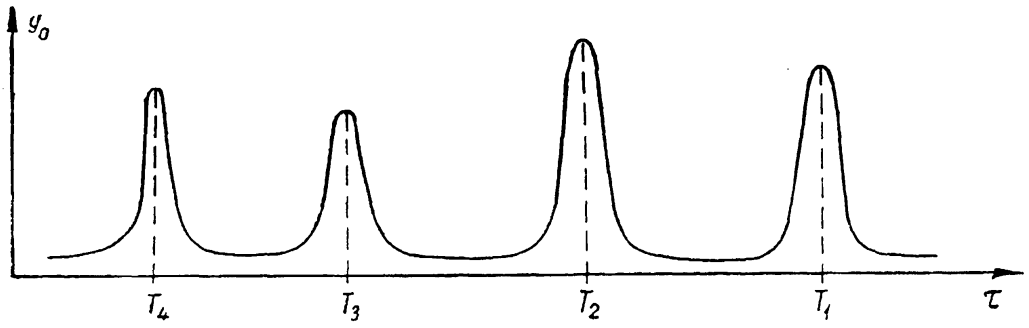
найти и напряжение силы H_j, ибо в этом случае вместо всей суммы

$$y=\sum_i N_i\sin(p_it+\gamma_i+\delta_i)$$

можно взять лишь один главный ее член, именно тот, при котором $k_j = p_j$.

На этом свойстве и основано пользование резонаторами при анализе звуков.

§ 7. Биения. Иногда, при производстве подобного рода наблюдений, замечается следующее явление: амплитуда колебаний при каком-либо из максимумов, скажем, для простоты речи, при $\tau = T_1$, не остается постоянной, а, несмотря на то, что величина τ сохраняется и в системе никаких перемен не происходит, эта амплитуда то возрастает до значи-



Фиг. 3.

тельной величины, то постепенно убывает почти до нуля, чтобы после того опять возрасти до своего наибольшего значения, и т. д., при этом возрастания и убывания идут периодически, но их период обыкновенно во много раз (50—100) более периода T_1.

Таким образом, если бы величину y изобразить графически в зависимости от времени t, то мы не получили бы правильной синусоиды с периодом $\tau = T_1$, как в прочих случаях, и которая изображена на фиг. 4, а получили бы кривую такого характера, как изображенная на фиг. 5, т. е. что самая амплитуда тех колебаний, которые представлены сплошною чертою, периодически меняется по тому закону, который представлен пунктирною кривою.

Объяснение этого явления, называемого *биением*, состоит в следующем: положим, что в состав возмущающих сил входят две такие, которых периоды мало разнятся между собою, например на 1—2%, пусть эти периоды будут T_1 и T_2, ясно, что соответствующие им частоты p_1 и p_2 также будут разниться между собой на ту же процентную величину, и, значит, когда система будет настроена так, что ее период свободных колебаний τ будет близок к T_1, то он окажется близок и к T_2, и в сумме

$$\sum_i N_i \sin(p_i t + \gamma_i + \delta_i)$$

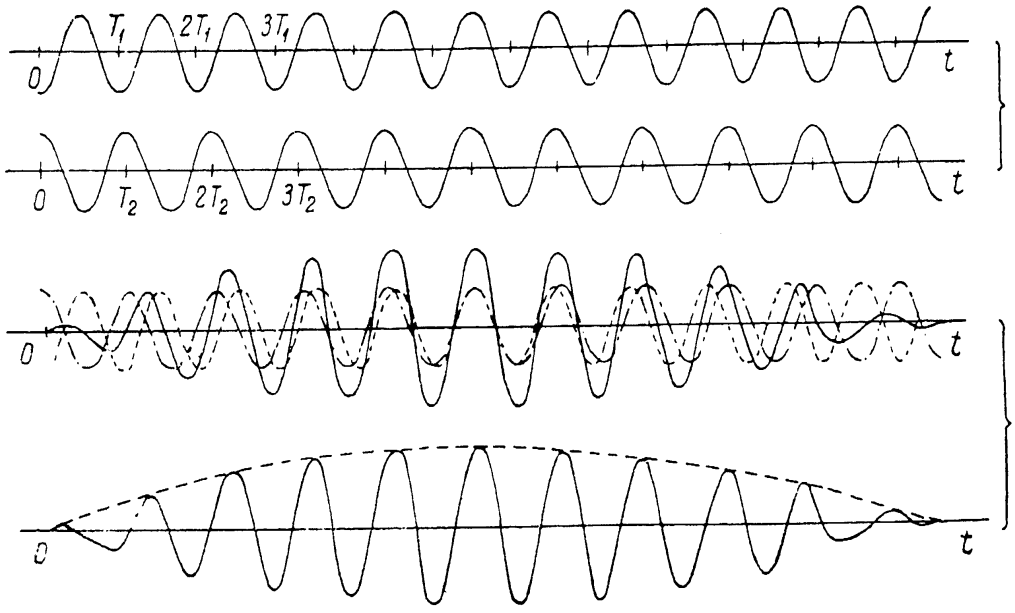
не один член будет большой и преобладающий над всеми прочими, а таких членов будет два, именно:

$$N_1 \sin(p_1 t + \gamma_1 + \delta_1) \quad \text{и} \quad N_2 \sin(p_2 t + \gamma_2 + \delta_2)$$

и когда свободные колебания погасятся, то останутся вынужденные, представляемые приблизительно формулою

$$Y = N_1 \sin(p_1 t + \gamma_1 + \delta_1) + N_2 \sin(p_2 t + \gamma_2 + \delta_2) \tag{1}$$

ибо все прочие члены нашей суммы будут малы по сравнению с этими двумя.



Фиг. 4.

Фиг. 5

Фиг. 4 и 5.

Очевидно, будет

$$N_1 = \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{N_1 - N_2}{2}$$

$$N_2 = \frac{N_1 + N_2}{2} - \frac{N_1 - N_2}{2}$$

и пусть

$$\gamma_1 + \delta_1 = \varepsilon_1 \quad \text{и} \quad \gamma_2 + \delta_2 = \varepsilon_2,$$

значит,

$$Y=\frac{N_1+N_2}{2}[\sin(p_1 t+\varepsilon_1)+\sin(p_2 t+\varepsilon_2)]+$$

$$+\frac{N_1-N_2}{2}[\sin(p_1 t+\varepsilon_1)-\sin(p_1 t+\varepsilon_2)]=$$

$$=(N_1+N_2)\cos\left(\frac{p_1-p_2}{2}t+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\right)\sin\left(\frac{p_1+p_2}{2}t+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\right)+$$

$$+(N_1-N_2)\sin\left(\frac{p_1-p_2}{2}t+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\right)\cos\left(\frac{p_1+p_2}{2}t+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\right)$$

Делая на время

$$(N_1+N_2)\cos\left(\frac{p_1-p_2}{2}t+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\right)=A$$

и

$$(N_1-N_2)\sin\left(\frac{p_1-p_2}{2}t+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\right)=B$$

мы предыдущую формулу напишем так:

$$Y=A\sin\left(\frac{p_1+p_2}{2}t+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\right)+B\cos\left(\frac{p_1+p_2}{2}t+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\right)$$

или иначе

$$Y=\sqrt{A^2+B^2}\sin\left(\frac{p_1+p_2}{2}t+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\Omega\right) \tag{2}$$

причем

$$\operatorname{tg}\Omega=\frac{B}{A}=\frac{N_1-N_2}{N_1+N_2}\operatorname{tg}\left(\frac{p_1-p_2}{2}t+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\right) \tag{3}$$

и

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{N_1^2+N_2^2+2N_1N_2\cos[(p_1-p_2)t+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)]} \tag{4}$$

Эти формулы показывают, что когда разность p_1-p_2 — величина малая по сравнению с суммою p_1+p_2, то в течение промежутка времени, равного $\frac{4\pi}{p_1+p_2}$, величина Ω изменится весьма мало, аргумент

$$\frac{p_1+p_2}{2}t+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\Omega$$

изменится на 2π, амплитуда же $\sqrt{A^2+B^2}$ также сохранит почти постоянное значение, значит, в течение каждого такого промежутка колебание (2) представится простым синусоидальным. Между тем, в течение промежутка времени $\frac{2\pi}{p_1-p_2}$ аргумент $(p_1-p_2)t+\varepsilon_1-\varepsilon_2$ изменяется на 2π, и, значит, cos этого аргумента пройдет через все свои значения от -1 до $+1$, и величина $\sqrt{A^2+B^2}$ пройдет через все значения от N_1-N_2 до N_1+N_2, и если и разность N_1-N_2 мала по сравнению с N_1+N_2, то колебания

и будут представлять *биения*, по временам совершенно затухая, по временам же достигая значительной силы.

Так как частота биений выражается формулою

$$p_1 - p_2 = 2\pi\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = 2\pi\frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} \qquad (5)$$

период же биения

$$\sigma = \frac{2\pi}{p_1 - p_2} \qquad (6)$$

благодаря его сравнительной медленности легко наблюдается, то этим явлением часто пользуются, чтобы точно определить, скажем, период T_1; тогда вводят возмущающую силу, период которой T_2 точно известен, получают биения, определяют их период σ и, зная T_2 из формул (5) и (6), находят и неизвестное T_1.

Характерные биения получаются на двухвинтовых судах при критическом числе оборотов, при котором происходит вибрация корабля. Так как числа оборотов машин всегда, хотя и незначительно, но разнятся между собою, амплитуды же вибраций, производимых каждою машиною в отдельности, между собою равны, то биения и происходят от полного затухания до наибольшей резкости.

Иногда можно получить биения, воспользовавшись свободными колебаниями системы, именно в том случае, когда сопротивление весьма мало, так что погашение совершается весьма медленно; для этого поступают так: настроив систему так, чтобы получился резонанс, т. е. чтобы вынужденные колебания достигли своего максимума, дают системе или толчок, или вообще возбуждают в ней свободные колебания, они вместе с вынужденными и дадут биения, которые, зная период свободных колебаний системы, и послужат для точного определения периода возмущающей силы или наоборот.

§ 8. Действие сил малой продолжительности. В предыдущих параграфах рассмотрен характер колебаний системы с одной степенью свободы, например маятника под действием внешних возмущающих сил, периодических или состоящих из суммы таковых. При этом оказалось, что амплитуда производимого силою возмущения лишь в том случае близка к статической и разность фаз близка к нулю, когда отношение периода свободных колебаний системы к периоду действующей силы весьма мало.

В случае равенства периодов происходит, вследствие резонанса, весьма сильное возмущение, когда же период свободных колебаний системы весьма велик по сравнению с периодом возмущающей силы, то производимое этою силою возмущение весьма мало.

Кроме сил повторных и периодических, в практике приходится часто иметь дело с силами, которые действуют в течение небольшого промежутка времени, сперва быстро нарастая, затем несколько медленнее убывая, подобно, например, тому, как действует давление пара в цилиндре

паровой машины, давление газов в двигателе внутреннего сгорания, давление пороховых газов в канале орудия, давление жидкости в компрессоре его и т. п.

Может случиться, что силы подобного рода воспринимаются системою, могущею совершать колебательное движение с одной степенью свободы, обусловленное не только действием этой силы, но и „силою восстановляющею", стремящеюся вернуть систему в положение равновесия и при том пропорциональной „отклонению" системы от этого положения.

В подобных условиях находятся, например, поршень индикатора, которым снимают диаграмму работы пара или газа, столбик крешера, сдавливаемого пороховыми газами, стрелка баллистического гальванометра, балка, стойка или иное устройство, воспринимающее на корабле действие выстрела или входящее в самое устройство орудийной установки, участок рельса между двумя шпалами при проходе поезда и т. п.

Спрашивается, что во всех таких случаях разуметь под силою „малой продолжительности" и какое такая сила будет оказывать „действие" на систему?

Мы увидим, при дальнейшем развитии нашего курса, что решение поставленного вопроса сводится к исследованию уравнения

$$y'' + 2hy' + k^2 y = f(t) \tag{1}$$

которое получается для маятника или для подвешенного на пружине груза (не принимая в расчет массы пружины), т. е. для простейших из рассматриваемых систем.

В § 1 дан общий интеграл этого уравнения:

$$y = e^{-ht}(C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t) + \frac{1}{n_1} e^{-ht} \int_0^t e^{h\xi} f(\xi) \sin n_1 (t - \xi)\, d\xi \tag{2}$$

где $n_1^2 = k^2 - h^2$ для нашего случая есть величина положительная.

Нам придется иметь дело с решением этого уравнения, удовлетворяющим следующим начальным условиям: при $t = 0$ должно быть

$$y = 0 \quad \text{и} \quad y' = 0 \tag{3}$$

т. е. сила начинает действовать на систему, находившуюся в равновесии и покое.

Если только взять $a = 0$, то постоянные произвольные C_1 и C_2, определяемые по начальным условиям (3), окажутся равными нулю, и искомое решение будет

$$y = \frac{1}{n_1} e^{-ht} \int_0^t e^{h\xi} f(\xi) \sin n_1 (t - \xi)\, d\xi \tag{4}$$

Как сказано, функция $f(t)$ имеет вид, показанный на фиг. 6, т. е. она сперва возрастает от нуля до некоторой наибольшей величины, затем убывает до нуля.

Обозначим продолжительность нарастания функции $f(t)$ через T_1, полную же продолжительность действия силы — через T и соответственные участки функции — через $f_1(t)$ и $f_2(t)$, таким образом наша функция такова:

для значений t: от 0 до T_1 функция $f(t)=f_1(t)$ и $f_1'(t)>0$
„ „ „ „ T_1 „ T „ $f(t)=f_2(t)$ „ $f_2'(t)<0$
„ „ „ „ $t > T$ „ $f(t)=0.$

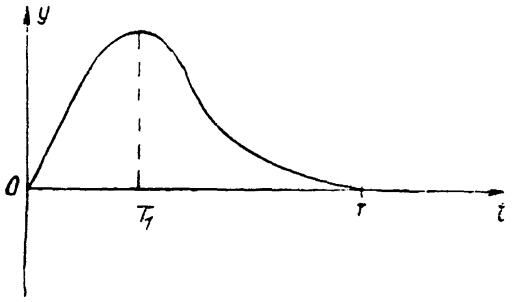
При выполнении показываемого формулою (4) интегривования надо сообразоваться с этим общим ходом функции $f(t)$.

Обозначая попрежнему $e^{ht}f(\xi)$ через $F(\xi)$, имеем

$$\int_0^t F(\xi)\sin n_1(t-\xi)\,d\xi =$$

$$=\frac{1}{n_1}\Big[F(\xi)\cos n_1(t-\xi)\Big]_0^t -$$

$$-\frac{1}{n_1}\int_0^t F'(\xi)\cos n_1(t-\xi)\,d\xi =$$



Фиг. 6.

$$=\frac{1}{n_1}e^{ht}f(t)-\frac{1}{n_1}\int_0^t F'(\xi)\cos n_1(t-\xi)\,d\xi$$

ибо $f(0)=0$.

Подставив в формулу (4), получаем

$$y=\frac{1}{n_1^2}f(t)-\frac{1}{n_1^2}e^{-ht}\int_0^t (e^{h\xi}f(\xi))'\cos n_1(t-\xi)\,d\xi \qquad (5)$$

Мы уже упоминали, что „статическое“ отклонение от положения равновесия, производимое данною силою, выражается формулою

$$y_0=\frac{1}{k^2}f(t)$$

Разность

$$\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k^2-h^2}-\frac{1}{k^2}=\frac{h^2}{k^2}\cdot\frac{1}{k^2-h^2}$$

составляет при малой величине отношения $\frac{h}{k}$ лишь весьма малую долю от $\frac{1}{k^2}$, и, значит, первый член формулы (5) представляет „статическое“ отклонение, производимое силою $f(t)$. Второй же член этой формулы есть та поправка, которую надо к „статическому“ отклонению присовокупить, чтобы получить „динамическое“.

К исследованию этой-то поправки и перейдем.

Покажем прежде всего, что эта поправка малая в том случае, когда *период свободных колебаний системы мал по сравнению с продолжительностью нарастания силы.*

В самом деле, пусть будет

$$t = t_1 = (2l+1)\frac{\tau}{4} + \sigma, \qquad \left(\tau = \frac{2\pi}{n_1}\right)$$

где l есть некоторое целое число и $0 \leqslant \sigma < \frac{\tau}{2}$; тогда, обозначая через η_1 сказанную поправку, имеем

$$n_1^2 e^{ht_1}\eta_1 = \cos n_1 t_1 \int_0^{t_1} F'(\xi)\cos n_1 \xi d\xi + \sin n_1 t_1 \int_0^{t_1} F'(\xi)\sin n_1 \xi d\xi \qquad (6)$$

Положим сперва, что $t_1 < T_1$, так что мы находимся на восходящей ветви кривой $f(t)$, и найдем наибольшее значение, которого η_1 превзойти не может.

Пусть будет

$$A_1 = \int_0^{t_1} F'(\xi)\cos n_1 \xi d\xi \qquad \text{и} \qquad B_1 = \int_0^{t_1} F'(\xi)\sin n_1 \xi d\xi$$

очевидно, что будет

$$|\eta_1| \leqslant \frac{1}{n_1^2} e^{-ht_1}\sqrt{A_1^2 + B_1^2}$$

Чтобы найти пределы для величины A_1 разобьем промежуток от 0 до t_1 на такие частные промежутки, в которых $\cos n_1 \xi$ сохраняет постоянный знак, так что будет

$$A_1 = \int_0^{\frac{\tau}{4}} F'(\xi)\cos n_1 \xi d\xi + \int_{\frac{\tau}{4}}^{\frac{3\tau}{4}} + \int_{\frac{3\tau}{4}}^{\frac{5\tau}{4}} + \ldots + \int_{\frac{2l-1}{4}\tau}^{\frac{2l+1}{4}\tau} + \int_{\frac{2l+1}{4}\tau}^{\frac{2l+1}{4}\tau+\sigma} F'(\xi)\cos n_1 \xi d\xi$$

Ясно, что в первом интеграле $\cos n_1 \xi$ все время положительный, во втором отрицательный, в третьем положительный, и т. д.; функция $F'(\xi) = he^{h\xi} f(\xi) + e^{h\xi} f'(\xi)$ знака своего не меняет и все время положительная, поэтому, применив для каждого из интегралов первую теорему о средней, получим

$$\int_0^{\frac{\tau}{4}} F'(\xi)\cos n_1 \xi d\xi = F'(\xi_1)\int_0^{\frac{\tau}{4}} \cos n_1 \xi d\xi = \frac{1}{n_1} F'(\xi_1) = \frac{\tau}{2\pi} F'(\xi_1) \ldots \qquad \left(0 < \xi_1 < \frac{\tau}{4}\right)$$

$$\int_{\frac{\tau}{4}}^{\frac{3\tau}{4}} F'(\xi)\cos n_1 \xi d\xi = F'(\xi_2)\int_{\frac{\tau}{4}}^{\frac{3\tau}{4}} \cos n_1 \xi d\xi = -\frac{2}{n_1} F'(\xi_2) = -\frac{\tau}{\pi} F'(\xi_2) \ldots \left(\frac{\tau}{4} < \xi_2 < \frac{3\tau}{4}\right)$$

$$\int_{\frac{3\tau}{4}}^{\frac{5\tau}{4}} F'(\xi)\cos n_1 \xi d\xi = F'(\xi_3)\int_{\frac{3\tau}{4}}^{\frac{5\tau}{4}} \cos n_1 \xi d\xi = \frac{2}{n_1} F'(\xi_3) = \frac{\tau}{\pi} F'(\xi_3) \ldots \qquad \left(\frac{3\tau}{4} < \xi_3 < \frac{5\tau}{4}\right)$$

и т. д.

Таким образом, будет

$$A_1 = \frac{\tau}{\pi}\left[\frac{1}{2} F'(\xi_1) - F'(\xi_2) + F'(\xi_3) - F'(\xi_4) + \ldots \pm \theta F'(\xi_{l+2})\right] \qquad (7)$$

где θ есть положительная правильная дробь, и

$$\frac{2l+1}{4}\tau < \xi_{l+2} < \frac{2l+1}{4}\tau + \sigma$$

Функция $F(\xi)$ обыкновенно такова, что на протяжении от 0 до T_1, при котором она имеет максимум, величина ее производной

$$F'(\xi) = e^{h\xi}[hf(\xi) + f'(\xi)]$$

не только остается все время положительной, но и имеет не более одного максимума; пусть этот максимум будет $F'(\xi_0)$; тогда, как легко видеть, будет

$$|A_1| < \frac{\tau}{\pi} F'(\xi_0)$$

Совершенно так же увидим, что по абсолютной величине будет и

$$|B_1| < \frac{\tau}{\pi} F'(\xi_0)$$

и значит,

$$\sqrt{A_1^2 + B_1^2} < \frac{\sqrt{2}}{\pi} F'(\xi_0) < \frac{1}{2}\tau F'(\xi_0)$$

и

$$|r_1| < \frac{1}{2}\frac{\tau}{n_1^2} e^{-hl_1} F'(\xi_0) \qquad (8)$$

Эта формула получает особенно простой вид и простое истолкование, когда $h=0$, ибо тогда $F'(\xi)=f'(\xi)$, $n_1^2=k^2$, и у нас получится

$$|r_1|<\frac{1}{k_2}\cdot\frac{\tau}{2}f'(\xi_0) \tag{9}$$

Величина $\frac{\tau}{2}\cdot f'(\xi_0)$ есть изменение усилия, действовавшего на систему, происходящее в промежуток времени, равный $\frac{\tau}{2}$, т. е. полупериоду свободных колебаний, и величина, стоящая в правой части (9), — статическое отклонение, производимое таким усилием.

Следовательно, если период свободных колебаний системы настолько мал по сравнению с продолжительностью нарастания силы, действующей на систему, что наибольшей величиной изменения действующего усилия за промежуток времени, равный полупериоду свободных колебаний системы, можно пренебречь по отношению к $\frac{f(t)}{k^2}$, то отклонение системы может быть расчисляемо „статически“, и погрешность не превосходит той величины, которая соответствует сказанному изменению давления.

В общем случае при h, неравном нулю, заключение о величине предела погрешности несколько сложнее. Формула (8) дает, конечно, и в этом случае оценку второго слагаемого формулы (5).

Другой крайний случай есть тот, когда период свободных колебаний системы весьма велик по сравнению с продолжительностью действия силы. В этом случае для $t>T$ формула (4) напишется так:

$$y=\frac{1}{n_1}e^{-ht}\int_0^T e^{h\xi}f(\xi)\sin n_1(t-\xi)\,d\xi \tag{10}$$

или иначе

$$y=\frac{1}{n_1}e^{-ht}\left[\sin n_1 t\int_0^T e^{h\xi}f(\xi)\cos n_1\xi\,d\xi-\cos n_1 t\int_0^T e^{h\xi}f(\xi)\sin n_1\xi\,d\xi\right]$$

Но $n_1=\frac{2\pi}{\tau}$, и по предположению отношение $\frac{T}{\tau}$ есть весьма малая дробь, функция $f(\xi)$ все время положительная, и по теореме средней имеем

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{h\xi}f(\xi)\cos n_1\xi\,d\xi&=e^{\theta hT}\cos n_1\theta T\int_0^T f(\xi)\,d\xi\\ \int_0^T e^{h\xi}f(\xi)\sin n_1\xi\,d\xi&=e^{\theta_1 hT}\sin n_1\theta_1 T\int_0^T f(\xi)\,d\xi\end{aligned} \tag{11}$$

где θ и θ_1 — положительные правильные дроби,

Если отношение $\frac{2\pi T}{\tau}$ настолько мало, что величиною $\sin\frac{2\pi T}{\tau}$ можно пренебречь по сравнению с единицею, то второй из этих интегралов будет весьма мал по сравнению с первым, величина hT будет также малая, ибо обыкновенно декремент $h\tau$ выражается десятыми и сотыми долями, значит, e^{hT} можно полагать равным 1, и у нас получится

$$y = \frac{1}{n_1} e^{-ht} I \sin n_1 t \qquad (12)$$

где

$$I = \int_0^T f(\xi)\, d\xi$$

есть величина пропорциональная *импульсу* силы, действовавшей на систему.

Таким образом, в этом случае, когда продолжительность действия силы „мала“ по сравнению с периодом свободных колебаний системы, то отклонение и дальнейшее колебание системы около положения равновесия определяется величиною импульса силы за полное время ее действия и не зависит от наибольшего значения силы или продолжительности ее действия. Формулы (11) показывают, в каком смысле здесь надо понимать слово „малое“.

§ 9. Линейные уравнения высших порядков. Нам понадобятся и некоторые свойства линейных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами.

Положим, что дано уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f(t) \qquad (1)$$

в котором коэффициенты $a_1, a_2, \ldots a_n$ суть заданные постоянные, $f(t)$ — данная функция переменной независимой t.

Общий интеграл этого уравнения состоит, как известно, из суммы общего интеграла u уравнения

$$u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \ldots + a_n u = 0 \qquad (2)$$

без последнего члена, соответствующего уравнению (1), и частного решения уравнения (1).

Разыскание общего интеграла уравнения (2) сводится к нахождению корней α „характеристического“ уравнения

$$\varphi(\alpha) = \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \qquad (3)$$

и после того как этот общий интеграл u найден, то частное решение Y всегда может быть найдено способом изменения постоянных произвольных.

Можно составить частное решение Y и не прибегая к этому способу, а пользуясь следующим символическим приемом.

Условимся обозначать знаком D дифференцирование (нахождение производной) по букве t, так что

$$Dy = \frac{dy}{dt}$$

Тогда действие D сочетается между собою и с постоянными по таким же правилам, как будто это был множитель, стоящий перед буквою y или вообще перед знаком той функции, которая за ним следует.

Так, например,

$$(D+5)\,y = Dy + 5y = \frac{dy}{dt} + 5y$$

$$(D+3)(D+1)\,y = (D+3)(Dy+y) = D[Dy+y] + 3(Dy+y) =$$

$$= D^2 y + 4Dy + 3y = (D^2 + 4D + 3)\,y = \frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y$$

и т. д. Понятно, что при таком условном обозначении первая часть уравнения (1) напишется так: $\varphi(D)\,y$, первая часть уравнения (2) — так: $\varphi(D)\,u$, и самые эти уравнения — так:

$$\varphi(D)\,y = f(t) \qquad (1')$$

$$\varphi(D)\,u = 0 \qquad (2')$$

и если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ суть корни характеристического уравнения, то уравнения (1′) и (2′) можно написать, в силу вышесказанного условия и свойств символа D, так:

$$(D-\alpha_1)(D-\alpha_2)\ldots(D-\alpha_n)\,y = f(t) \qquad (1'')$$

$$(D-\alpha_1)(D-\alpha_2)\ldots(D-\alpha_n)\,u = 0 \qquad (2'')$$

Условимся, кроме символа D, ввести символ D^{-1}, ему обратный т. е. такой, что

$$D[D^{-1}(y)] = y$$

Ясно, что символ D^{-1} равносилен неопределенному интегралу от функции, стоящей под его знаком, так что

$$D^{-1}[F(t)] = \int F(t)\,dt + C = \int_a^t F(\xi)\,d\xi + C$$

где C — произвольная постоянная и a — какая-нибудь заданная постоянная.

Введем и более общие символы обратных действий, как-то $(D-\alpha)^{-1}$ и $[\varphi(D)]^{-1}$.

Под действием, обозначаемым символом $(D-\alpha)^{-1}$, будем разуметь такое действие, что

$$(D-\alpha)\left[(D-\alpha)^{-1}y\right]=y$$

иными словами действие $(D-\alpha)^{-1}f(t)$ равносильно решению дифференциального уравнения

$$(D-\alpha)y=f(t)$$

или

$$Dy-\alpha y=f(t),\quad \text{т. е.}\quad y'-\alpha y=f(t)$$

В самом деле, пусть будет

$$y=(D-\alpha)^{-1}f(t) \tag{4}$$

неизвестный нам пока результат действия $(D-\alpha)^{-1}$, примененного к функции $f(t)$.

Проделаем над обеими частями равенства (4) действие $(D-\alpha)$, тогда получим равенство

$$(D-\alpha)y=(D-\alpha)\left[(D-\alpha)^{-1}f(t)\right]=f(t)$$

т. е. y есть такая величина, которая удовлетворяет равенству

$$Dy-\alpha y=f(t)$$

иначе равенству

$$y'-\alpha y=f(t)$$

Это уравнение можно писать в виде

$$(e^{-\alpha t}y)'=e^{-\alpha t}f(t)$$

иначе

$$D\left(e^{-\alpha t}y\right)=e^{-\alpha t}f(t),$$

откуда

$$e^{-\alpha t}y=D^{-1}\left[e^{-\alpha t}f(t)\right]$$

или

$$y=e^{\alpha t}D^{-1}\left[e^{-\alpha t}f(t)\right]$$

Сличая эту формулу с (4), мы видим, что

$$(D-\alpha)^{-1}f(t)=e^{\alpha t}D^{-1}\left[e^{-\alpha t}f(t)\right]=e^{\alpha t}\int_{a}^{t}e^{-\alpha\xi}f(\xi)\,d\xi+Ce^{\alpha t}$$

Так как нас интересует главным образом разыскание частных решений, то мы будем полагать постоянные произвольные, вводимые обратным действием D^{-1}, равносильным интегрированию, равными нулю и писать

$$(D-\alpha)^{-1} f(t) = e^{\alpha t} D^{-1}\left[e^{-\alpha t} f(t)\right] = e^{\alpha t} \int_a^t e^{-\alpha \xi} f(t)\, d\xi \tag{5}$$

Положим теперь, что надо найти величину

$$y = (D-\alpha)^{-1}\left[(D-\beta)^{-1} f(t)\right]$$

иными словами y удовлетворяет уравнению

$$(D-\alpha)(D-\beta)\, y = f(t)$$

т. е.

$$\left[D^2 - (\alpha+\beta) D + \alpha\beta\right] y = y'' - (\alpha+\beta) y' + \alpha\beta = f(t)$$

На основании формулы (5) имеем

$$(D-\beta)^{-1} f(t) = e^{\beta t} \int_a^t e^{-\beta \xi} f(\xi)\, d\xi = \varphi(t)$$

и затем

$$y = (D-\alpha)^{-1} \varphi(t) = e^{\alpha t} \int_a^t e^{-\alpha \eta} \varphi(\eta)\, d\eta = e^{\alpha t} \int_a^t e^{(\beta-\alpha)\eta}\, d\eta \int_a^\eta e^{-\beta \xi} f(\xi)\, d\xi$$

ибо очевидно, что

$$\varphi(\eta) = e^{\beta \eta} \int_a^\eta e^{-\beta \xi} f(\xi)\, d\xi$$

Таким образом, искомое частное решение нашего уравнения представлено в виде двухкратного интеграла

$$y = e^{\alpha t} \int_a^t e^{(\beta-\alpha)\eta}\, d\eta \int_a^\eta e^{-\beta \xi} f(\xi)\, d\xi \tag{6}$$

Стоит только выполнить одно интегрирование по частям, чтобы привести наш кратный интеграл к простым. В самом деле, имеем

$$e^{-\alpha t}y=\int_a^t e^{(\beta-\alpha)\eta}\,d\eta\int_a^{\eta} e^{-\beta\xi}f(\xi)\,d\xi=$$

$$=\left[\frac{e^{(\beta-\alpha)\eta}}{\beta-\alpha}\int_a^{\eta} e^{-\beta\xi}f(\xi)\,d\xi\right]_a^t-\frac{1}{\beta-\alpha}\int_a^t e^{-\alpha\eta}f(\eta)\,d\eta=$$

$$=\frac{e^{(\beta-\alpha)t}}{\beta-\alpha}\int_a^t e^{-\beta\xi}f(\xi)\,d\xi+\frac{1}{\alpha-\beta}\int_a^t e^{-\alpha\eta}f(\eta)\,d\eta$$

Откуда следует

$$y=\frac{1}{\beta-\alpha}e^{\beta t}\int_a^t e^{-\beta\xi}f(\xi)\,d\xi+\frac{1}{\alpha-\beta}e^{\alpha t}\int_a^t e^{-\alpha\eta}f(\eta)\,d\eta \qquad (7)$$

и мы получили частное решение нашего уравнения с последним членом, не применяя способа изменения постоянных произвольных.

Но эта выкладка может быть проделана и проще: символы $(D-\alpha)$, $(D-\beta)$, $(D-\alpha)^{-1}$, $(D-\beta)^{-1}$ комбинируются между собою совершенно подобно умножению алгебраических количеств, но величина

$$(D-\alpha)^{-1}(D-\beta)^{-1}=\frac{1}{(D-\alpha)(D-\beta)}=\frac{1}{\beta-\alpha}\cdot\frac{1}{D-\beta}+\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{D-\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}(D-\beta)^{-1}+\frac{1}{\alpha-\beta}(D-\alpha)^{-1}$$

следовательно, действие $(D-\alpha)^{-1}(D-\beta)^{-1}$, производимое над какой угодно функцией $f(t)$, можно заменить действием

$$\frac{1}{\beta-\alpha}(D-\beta)^{-1}+\frac{1}{\alpha-\beta}(D-\alpha)^{-1}$$

и, таким образом, для уравнения

$$y''-(\alpha+\beta)y'+\alpha\beta y=[D^2-(\alpha+\beta)D+\alpha\beta]y=f(t)$$

у нас будет

$$y=(D-\alpha)^{-1}(D-\beta)^{-1}f(t)=\frac{1}{\beta-\alpha}(D-\beta)^{-1}f(t)+\frac{1}{\alpha-\beta}(D-\alpha)^{-1}f(t)$$

т. е., в силу формулы (5),

$$y=\frac{1}{\beta-\alpha}e^{\beta t}\int_a^t e^{-\beta\xi}f(\xi)\,d\xi+\frac{1}{\alpha-\beta}e^{\alpha t}\int_a^t e^{-\alpha\xi}f(\xi)\,d\xi \qquad (7)$$

Вот это-то разложение сложного символического действия

$$[D^2 - (\alpha + \beta) D + \alpha\beta]^{-1}$$

на простейшие элементарные, выполняемое совершенно подобно тому, как разлагается на частные дроби алгебраическая дробь

$$\frac{1}{D^2 + (\alpha + \beta) D + \alpha\beta} = \frac{1}{(D - \alpha)(D - \beta)}$$

и вносит то обобщение и то упрощение, которое мы имели в виду достигнуть.

В самом деле, когда предложено уравнение

$$\varphi(D) y = f(t)$$

то символически его решение напишется так

$$y = \varphi^{-1}(D) f(t)$$

причем символы $\varphi(D)$ и $\varphi^{-1}(D)$ комбинируются совершенно подобно алгебраическим количествам.

Но дробь

$$[\varphi(D)]^{-1} = \frac{1}{\varphi(D)} = \frac{1}{(D - \alpha_1)(D - \alpha_2) \ldots (D - \alpha_n)}$$

разлагается на сумму следующих частных дробей:

$$\frac{1}{\varphi(D)} = \frac{A_1}{D - \alpha_1} + \frac{A_2}{D - \alpha_2} + \ldots + \frac{A_n}{D - \alpha_n}$$

и при том *тождественно* и произведение

$$\varphi(D) \left[\frac{A_1}{D - \alpha_1} + \frac{A_2}{D - \alpha_2} + \ldots + \frac{A_n}{D - \alpha_n} \right] = 1$$

поэтому будет

$$Y = \varphi^{-1}(D) f(t) = A_1 (D - \alpha_1)^{-1} f(t) +$$

$$+ A_2 (D - \alpha_2)^{-1} f(t) + \ldots + A_n (D - \alpha_n)^{-1} f(t)$$

или иначе

$$Y = A_1 e^{\alpha_1 t} \int_a^t e^{-\alpha_1 \xi} f(\xi)\, d\xi + A_2 e^{\alpha_2 t} \int_a^t e^{-\alpha_2 \xi} f(\xi)\, d\xi + \ldots$$

$$\ldots + A_n e^{\alpha_n t} \int_a^t e^{-\alpha_n \xi} f(\xi)\, d\xi \qquad (8)$$

Это и есть искомое частное решение предложенного уравнения, и все дело свелось к разложению дроби $\frac{1}{\varphi(D)}$ на частные.

Мы предполагали, написав предыдущую формулу, что все корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ между собою различны.

Случай кратных корней не представляет никаких затруднений. В самом деле, положим сперва, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, тогда в ряду частных дробей, на которые разложится дробь $\frac{1}{\varphi(D)}$, будет такая $\frac{1}{(D-\alpha)^2}$; ей будет соответствовать символическое действие

$$(D-\alpha_1)^{-2} f(t)$$

обозначим результат этого действия через z, тогда можем написать

$$(D-\alpha_1) z = (D-\alpha_1)^{-1} f(t) = e^{\alpha t} D^{-1} [e^{-\alpha t} f(t)] = \omega(t)$$

значит,

$$z = (D-\alpha_1)^{-1} \omega(t) = e^{\alpha t} D^{-1} [e^{-\alpha t} \omega(t)]$$

подставляя теперь вместо $\omega(t)$ его величину, получим

$$z = e^{\alpha t} D^{-1} [D^{-1} e^{-\alpha t} f(t)] = e^{\alpha t} D^{-2} [e^{-\alpha t} f(t)]$$

или иначе

$$z = e^{\alpha t} \int_a^t d\eta \int_a^\eta e^{-\alpha\xi} f(\xi)\, d\xi$$

Выполняя интегрирование по частям, приведем этот двойной интеграл к простому, а именно:

$$\int_a^t d\eta \int_a^\eta e^{-\alpha\xi} f(\xi)\, d\xi = \left[\eta \int_a^\eta e^{-\alpha\xi} f(\xi)\, d\xi\right]_a^t - \int_a^t \eta e^{-\alpha\eta} f(\eta)\, d\eta =$$

$$= \int_a^t e^{-\alpha\xi} f(\xi)\, d\xi - \int_a^t \xi e^{-\alpha\xi} f(\xi)\, d\xi = \int_a^t (t-\xi) e^{-\alpha\xi} f(\xi)\, d\xi$$

что можно было написать и сразу на основании известной формулы приведения повторного интегрирования к простому.

Совершенно также увидим, что

$$(D-\alpha)^{-3} f(t) = e^{\alpha t} D^{-3} [e^{-\alpha t} f(t)] = e^{\alpha t} \int_a^t d\eta \int_a^\eta d\xi \int_a^\xi e^{-\alpha\omega} f(\omega)\, d\omega =$$

$$= e^{\alpha t} \frac{1}{1\cdot 2} \int_a^t (t-\xi)^2 e^{-\alpha\xi} f(\xi)\, d\xi$$

и вообще

$$(D-\alpha)^{-n} f(t) = e^{\alpha t} D^{-n} [e^{-\alpha t} f(t)] = e^{\alpha t} \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} \int_0^t (t-\xi)^{n-1} e^{-\alpha \xi} f(\xi)\, d\xi$$

Таким образом, решение уравнения

$$\varphi(D)\, y = y^{(n)} + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n y = f(t)$$

сводится к нахождению корней характеристического уравнения

$$\varphi(\alpha) = \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \alpha + a^n = 0$$

и к разложению дроби $\frac{1}{\varphi(\alpha)}$ на простейшие; когда эти операции выполнены, то общий интеграл уравнения без последнего члена пишется сразу, нахождение же частного решения сводится к квадратурам, причем к способу изменения постоянных произвольных прибегать не придется.

В том случае, когда корни уравнения — мнимые сопряженные, следует, воспользовавшись формулами Эйлера, мнимые показательные заменить тригонометрическими функциями, и тогда мнимые знаки пропадут.

Такой символический прием интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами излагается обыкновенно в английских руководствах, и им по большей части пользуются в английских сочинениях, ввиду чего он здесь и приведен.

§ 10. Малые колебания системы с несколькими степенями свободы. К линейным уравнениям с постоянными коэффициентами приводит изучение малых колебаний системы около устойчивого положения равновесия. Вместе с тем оказывается, что с совершенно подобными же уравнениями приходится иметь дело и во множестве других вопросов, относящихся к самим разнообразным областям техники.

Итак, положим, что имеется какая-нибудь материальная система, обладающая k степенями свободы, все связи которой выражаются *конечными* уравнениями между координатами ее точек и не содержат времени явным образом. Положение и конфигурация такой системы могут быть вполне определены k независимыми координатными параметрами

$$q_1, q_2, \ldots q_k \tag{1}$$

Мы будем предполагать, что на систему действуют двоякого рода силы: 1) силы, которые мы будем называть *восстановляющими* и которые имеют потенциал и под действием которых система может занимать определенное положение равновесия, предполагаемого нами устойчивым, так что если систему из этого положения вывести, сообщив достаточно

малые отклонения и скорости ее точкам, то под действием сил восстановления система стремится вернуться к своему положению равновесия и совершает около него „малые“ колебания; 2) *силы возмущающие* — такие, которые выражаются явными функциями времени, значит, для которых определенного постоянного положения равновесия нет и под действием которых система, даже находившаяся вначале в равновесии и покое, придет в движение.

Разобрав сперва этот простейший случай, мы перейдем к более сложному, присовокупив к числу действующих на систему сил еще и 3) силы *сопротивления среды*, зависящие от скоростей точек системы.

Параметры $q_1, q_2, \ldots q_k$ можно всегда выбрать таким образом, чтобы в положении равновесия системы было

$$q_1 = q_2 = q_3 = \ldots = q_k = 0$$

тогда под словом „малые“ колебания мы будем разуметь такие, что во все время движения каждый из этих параметров q_i получает лишь „малые“ значения, выражаясь, в зависимости от времени, функцией вида $\alpha_i f_i(t)$, где α_i есть постоянный множитель, который может быть сделан сколь угодно малым, если взять начальные отклонения и начальные скорости системы достаточно малыми, функция же $f_i(t)$ при всяком значении t остается конечною, как, например, $\sin nt$ или $\cos nt$.

Таким образом, мы будем предполагать, что параметры выражаются формулами вида

$$q_1 = \alpha_1 f_1(t); \quad q_2 = \alpha_2 f_2(t); \quad \ldots \quad q_k = \alpha_k f_k(t) \tag{2}$$

и все величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ будем считать одного и того же порядка малости, скажем, первого, так что величины $\alpha_1^2, \alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3$ и т. п. будем считать величинами второго порядка и т. д. Производные по времени от функций $f_1(t), f_2(t), \ldots f_k(t)$ будем предполагать так же конечными, как и самые функции, и, следовательно, величины $q_1', q_2', \ldots q_k'$ будем считать малыми величинами первого порядка, как и самые q.

Итак, положим, что имеется какая угодно система, обладающая k степенями свободы и находящаяся под действием заданных сил, имеющих потенциал; тогда избираем какую угодно совокупность k независимых координатных параметров

$$p_1, p_2, \ldots p_k$$

при которых уравнения связей системы тожественно удовлетворяются. Составляем уравнения равновесия системы, т. е. уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial p_1} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial p_2} = 0; \quad \ldots \frac{\partial V}{\partial p_k} = 0 \tag{3}$$

где $2V(p_1, p_2, \ldots p_k)$ есть потенциальная функция, и, решив эти уравнения, находим значения $p_1^0, p_2^0, \ldots p_k^0$ параметров p для положения равновесия.

Сделав затем

$$p_1 = p_1^0 + q_1; \quad p_2 = p_2^0 + q_2; \quad \ldots p_k = p_k^0 + q_k \qquad (*)$$

получим параметры $q_1, q_2, \ldots q_k$, которые также будут между собою независимы и будут тожественно удовлетворять уравнениям связей, но их особенность будет еще та, что, при положении равновесия системы,

$$q_1 = q_2 = q_3 = \ldots = q_k = 0$$

и, значит, если система „мало" отлоняется от своего положения равновесия, то все величины q остаются малыми.

Сделав такой выбор параметров, составляем выражение живой силы $2T$ системы и потенциальной функции $2V$.

Эти выражения будут вида

$$2T = A_1 q_1'^2 + A_2 q_2'^2 + \ldots + A_k q_k'^2 + 2B_{12} q_1' q_2' + \ldots + 2B_{1k} q_1' q_k' + \ldots$$
$$\ldots + 2B_{k-1,k} q_{k-1}' q_k'$$

и

$$2V = K + D_1 q_1^2 + D_2 q_2^2 + \ldots + D_k q_k^2 + 2E_{12} q_1 q_2 + \ldots$$
$$\ldots + 2E_{k-1,k} q_{k-1} q_k$$

ибо по предположению связи не содержат времени явно, значит, $2T$ будет однородною функциею второй степени от $q_1', q_2', \ldots q_k'$. Выражение же потенциала мы разложим в ряд по степеням $q_1, q_2, \ldots q_k$, тогда, в силу равенства (3) и (*), членов, содержащих первые степени q_1, не будет, и если ограничиться членами второго порядка, то V и будет вышенаписанного вида, причем K и $D_1, D_2, \ldots D_k, E_{12}, E_{13} \ldots E_{k-1,k}$ суть величины *постоянные*.

Величины $A_1, B_2, \ldots B_{k-1,k}$ будут вообще функциями от $q_1, q_2, \ldots q_k$, их также можно разложить в ряды по степеням этих величин, и пусть, например, разложение A_1 будет

$$A_1 = a_1 + b_1 q_1 + b_2 q_2 + \ldots + b_k q_k + c_1 q_1^2 + \ldots + 2d_{12} q_1 q_2 + \ldots$$

При составлении уравнений движения системы по схеме Лагранжа, т. е. в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots k)$$

первое уравнение будет такое:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{\partial q_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1}$$

но

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'} = A_1 q_1' + B_{12} q_2' + B_{13} q_3' + \ldots + B_{1k} q_k'$$

затем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) = A_1 q_1'' + B_{12} q_2'' + \ldots + B_{1k} q_k'' + q_1' \frac{dA_1}{dt} + q_2' \frac{dB_{12}}{dt} + \ldots$$

Член

$$A_1 q_1'' = a_1 q_1'' + q_1''(b_1 q_1 + b_2 q_2 + \ldots + b_k q_k) + q_1''(c_1 q_1^2 + \ldots) + \ldots$$

будет состоять из членов разных порядков малости, именно: первого члена $a_1 q_1''$, который первого порядка, и остальных членов, коих порядки выше первого, совершенно то же можно сказать и о членах $B_{12} q_2'' \ldots$ и т. д.; как видно, члены первого порядка получатся, если ограничиться в разложениях $A_1, A_2, \ldots A_k, B_1, B_2, \ldots B_{k-1,k}$ лишь их *постоянною*, т. е. не содержащею величин $q_1, q_2, \ldots q_k$ частью, иными словами, значением их при $q_1 = q_2 = \ldots = q_k = 0$.

Точно так же все величины произведений $q_1' \frac{dA_1}{dt}$ и т. д. будут *второго* и высших порядков, если в выражениях $A_1, A_2, \ldots B_{k-1,k}$, брать какие бы то ни было члены, кроме постоянного.

Так как, при составлении уравнений движения, мы хотим ограничиваться только членами первого порядка, то надо в выражении живой силы сохранить лишь члены, не содержащие величин $q_1, q_2, \ldots q_k$, и в выражении потенциала V — только члены *второй* степени относительно тех же букв.

Таким образом, исследование малых колебаний системы около положения равновесия приводится к изучению движения такой системы, для которой живая сила T и потенциальная функция V выражаются *однородными функциями второй степени* — первая от производных $q_1', q_2' \ldots q_k'$, вторая от самих параметров $q_1, q_2 \ldots q_k$ *с постоянными* коэффициентами, т. е. будет

$$\begin{aligned} 2T &= A_1 q_1'^2 + A_2 q_2'^2 + \ldots + A_k q_k'^2 + 2B_{12} q_1' q_2' + \ldots + 2B_{k-1,k} q_{k-1}' q_k' \\ 2V &= D_1 q_1^2 + D_2 q_2^2 + \ldots + D_k q_k^2 + 2E_{12} q_1 q_2 + \ldots + 2E_{k-1,k} q_{k-1} q_k \end{aligned} \qquad (I)$$

причем все коэффициенты $A_1, \ldots E_{k-1,k}$ *постоянные.*

Если на систему никаких „возмущающих“ сил не действует, то ее колебания называются *свободными* и происходят только вследствие начального отклонения системы от положения равновесия и сообщенных ее точкам скоростей по инерции и под действием сил восстановления.

Колебания же системы, производимые „возмущающими“ силами, называются *вынужденными.*

Мы начнем с рассмотрения свободных колебаний.

Уравнения движения нашей системы будут

$$\begin{aligned}
&A_1 q_1'' - D_1 q_1 + B_{12} q_2'' - E_{12} q_2 + B_{13} q_3'' - E_{13} q_3 + \ldots + B_{1k} q_k'' - E_{1k} q_k = 0\\
&B_{12} q_1'' - E_{12} q_1 + A_2 q_2'' - D_2 q_2 + B_{23} q_3'' - E_{23} q_3 + \ldots + B_{2k} q_k'' - E_{2k} q_k = 0\\
&B_{13} q_1'' - E_{13} q_1 + B_{23} q_2'' - E_{23} q_2 + A_3 q_3'' - D_3 q_3 + \ldots + B_{3k} q_k'' - E_{3k} q_k = 0 \qquad \text{(II)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&B_{1k} q_1'' - E_{1k} q_1 + B_{2k} q_2'' - E_{2k} q_k + B_{3k} q_3'' - E_{3k} q_3 + \ldots + A_k q_k'' - D_k q_k = 0
\end{aligned}$$

т. е. это будет система k линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и без последних членов. Вместе с тем, в этой системе не содержится членов с производными первого порядка от неизвестных функций q.

Для интегрирования такой системы уравнений будем искать частные решения следующего вида:

$$q_1 = \alpha_1 \sin(\lambda t + \varepsilon); \quad q_2 = \alpha_2 \sin(\lambda t + \varepsilon); \quad \ldots \quad q_k = \alpha_k \sin(\lambda t + \varepsilon) \qquad (4)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ суть некоторые постоянные, так же, как и λ и ε.

Подставляя величины (4) в уравнения (II), получим следующую систему уравнений первой степени для определения постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$:

$$\begin{aligned}
&(A_1 \lambda^2 + D_1)\alpha_1 + (B_{12}\lambda^2 + E_{12})\alpha_2 + (B_{13}\lambda^2 + E_{13})\alpha_3 + \ldots + (B_{1k}\lambda^2 + E_{1k})\alpha_k = 0\\
&(B_{12}\lambda^2 + E_{12})\alpha_1 + (A_2\lambda^2 + D_2)\alpha_2 + (B_{23}\lambda^2 + E_{23})\alpha_3 + \ldots + (B_{2k}\lambda^2 + E_{2k})\alpha_k = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(B_{1k}\lambda^2 + E_{1k})\alpha_1 + (B_{2k}\lambda^2 + E_{2k})\alpha_2 + (B_{3k}\lambda^2 + E_{3k})\alpha_3 + \ldots + (A_k\lambda^2 + D_k)\alpha_k = 0
\end{aligned} \qquad \text{(III)}$$

Как видно, в этих уравнениях вторые части — нули, следовательно эти уравнения только тогда имеют решения, отличные от $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, когда определитель системы *равен нулю*.

Значит, величина λ должна быть взята таким образом, чтобы было

$$\Delta(\lambda^2) = \begin{vmatrix} A_1\lambda^2 + D_1, & B_{12}\lambda^2 + E_{12}, \ldots & B_{1k}\lambda^2 + E_{1k}\\ B_{12}\lambda^2 + E_{12}, & A_2\lambda^2 + D_2, \ldots & B_{2k}\lambda^2 + E_{2k}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ B_{1k}\lambda^2 + E_{1k}, & B_{2k}\lambda^2 + E_{2k}, \ldots & A_k\lambda^2 + D_k \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(IV)}$$

Если этот определитель раскрыть, то в левой части предыдущего равенства получится целая функция от λ степени $2k$, содержащая только четные степени λ, почему мы ее и обозначили через $\Delta(\lambda^2)$.

Полагая в уравнении $\Delta(\lambda^2)=0$; $\lambda^2=\mu$, мы получим уравнение степени k:

$$\Delta(\mu)=0 \qquad \text{(IV')}$$

Пусть корни этого уравнения различны и суть

$$\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$$

Каждому из этих корней соответствуют *два* равных, но противоположных по знаку значения λ, которые мы обозначим так:

$$\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \ldots \pm\lambda_k$$

Возьмем, например, корень $+\lambda_1$ и подставим его величину в систему уравнений (III), тогда эти уравнения станут совместными и допускающими решения, отличные от нуля, ибо тогда *одно* из уравнений будет следствием остальных.

Пусть это уравнение есть первое, тогда, отбросив это уравнение и разделив все остальные на α_1, мы получим систему $(k-1)$ уравнений первой степени с неизвестными

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \ldots \frac{\alpha_k}{\alpha_1}$$

Определителем этой системы будет так называемый минор, соответствующий элементу $A_1\lambda^2+D_1$ главного определителя Δ, т. е. такой определитель, который получается, если отбросить в определителе Δ первый столбец и первую строку.[1] Обозначим этот минор через Δ_1, точно так же через Δ_2, Δ_3, ... Δ_k миноры, соответствующие второму, третьему, ...k-ому элементам первой строки определителя Δ, то, когда вместо λ будет подставлено его значение λ_1, решение нашей системы будет

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\frac{\Delta_2(\lambda_1)}{\Delta_1(\lambda_1)}; \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_1}=\frac{\Delta_3(\lambda_1)}{\Delta_1(\lambda_1)}; \quad \ldots \frac{\alpha_k}{\alpha_1}=\frac{\Delta_k(\lambda_1)}{\Delta_1(\lambda_1)}$$

или иначе

$$\alpha_2=\frac{\Delta_2(\lambda_1)}{\Delta_1(\lambda_1)}\alpha_1; \quad \alpha_3=\frac{\Delta_3(\lambda_1)}{\Delta_1(\lambda_1)}\alpha_1; \quad \ldots \alpha_k=\frac{\Delta_k(\lambda_1)}{\Delta_1(\lambda_1)}\alpha_1 \qquad \text{(V)}$$

причем α_1 остается произвольным, и $\Delta_1(\lambda_1)$ мы считаем отличными от нуля.

Таким образом, корню λ_1 уравнения (IV), называемого характеристическим для данной системы, соответствует решение

$$q_1=\alpha_1\sin(\lambda_1 t+\varepsilon_1); \quad q_2=b_1\alpha_1\sin(\lambda_1 t+\varepsilon_1); \quad \ldots q_k=h_1\alpha_1\sin(\lambda_1 t+\varepsilon_1) \qquad \text{(VI)}$$

---

[1] Минором для элемента, стоящего в пересечении i-ой строки и h-го столбца, условимся называть определитель, получаемый из главного, отбрасывая этот столбец и эту строку, и умноженный на $(-1)^{i+h}$. На это последнее условие надо обращать внимание, чтобы не было ошибки в знаке.

где α_1 и ε_1 суть произвольные постоянные, величины же $b_1, c_1, \ldots h_1$ даются формулами

$$b_1 = \frac{\Delta_2(\lambda_1)}{\Delta_1(\lambda_1)}; \quad c_1 = \frac{\Delta_3(\lambda_1)}{\Delta_1(\lambda_1)}; \quad \ldots \quad h_1 = \frac{\Delta_k(\lambda_1)}{\Delta_1(\lambda_1)} \tag{VII}$$

Если мы вместо корня $+\lambda_1$ возьмем корень $-\lambda_1 = -\sqrt{\mu_1}$, то величины $b_1, c_1, \ldots h_1$ отношений

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \ldots \quad \frac{\alpha_k}{\alpha_1}$$

сохранят свои значения; поэтому, написав вместо буквы α_1 букву C_1 и вместо ε_1 букву δ_1, мы получили бы решение

$$q_1 = C_1 \sin(-\lambda_1 t + \delta_1); \; q_2 = b_1 C_1 \sin(-\lambda_1 t + \delta_1); \ldots q_k = h_1 C_1 \sin(-\lambda_1 t + \delta_1)$$

Но это решение не есть независимое, а получается из (VI), соответствующего корню λ_1, сделав $C_1 = \alpha_1$ и $\varepsilon_1 = \pi - \delta_1$. Следовательно, чтобы получать независимые решения, надо брать лишь корни

$$+\lambda_1, \; +\lambda_2, \ldots +\lambda_k$$

и для каждого из этих корней сделать ту же выкладку, которую мы проделали для λ_1.

Для каждого корня получится решение, подобное (VI), содержащее *две* произвольных постоянных.

По известному свойству линейных уравнений без последнего члена сумма решений есть также решение, следовательно, общим интегралом системы будет

$$\begin{aligned}
q_1 &= \alpha \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + \beta \sin(\lambda_2 t + \varepsilon_2) + \ldots + \sigma \sin(\lambda_k t + \varepsilon_k) \\
q_2 &= b_1 \alpha \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + b_2 \beta \sin(\lambda_2 t + \varepsilon_2) + \ldots + b_k \sigma \sin(\lambda_k t + \varepsilon_k) \\
q_3 &= c_1 \alpha \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + c_2 \beta \sin(\lambda_2 t + \varepsilon_2) + \ldots + c_k \sigma \sin(\lambda_k t + \varepsilon_k) \qquad \text{(VIII)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_k &= h_1 \alpha \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + h_2 \beta \sin(\lambda_2 t + \varepsilon_2) + \ldots + h_k \sigma \sin(\lambda_k t + \varepsilon_k)
\end{aligned}$$

причем $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \sigma, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_k$ суть произвольные постоянные, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ — корни уравнения (IV), $b_1, b_2, \ldots h_k$ — определенные постоянные, даваемые формулами

$$b_i = \frac{\Delta_2(\lambda_i)}{\Delta_1(\lambda_i)}; \quad c_i = \frac{\Delta_3(\lambda_i)}{\Delta_1(\lambda_i)}; \quad \ldots \quad h_i = \frac{\Delta_k(\lambda_i)}{\Delta_1(\lambda_i)} \tag{IX}$$

соответственно значению каждого корня.

При этом выводе сделано два предположения: во-первых, что все величины $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ вещественные, и, во-вторых, что все эти величины между собою неравные. Кроме того, мы считаем, что минор $\Delta_1(\lambda)$ отличен от нуля при $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

Допустим, что уравнение (IV) имеет и мнимые корни. Это будет в том случае, когда уравнение (IV′) имеет или отрицательные, или мнимые корни.

Отрицательному корню уравнения (IV′) будут соответствовать чисто мнимые значения λ, мнимому или комплексному значению μ будут соответствовать комплексные значения λ.

Положим, для общности, что уравнение (IV′) имеет пару комплексных сопряженных корней, тогда для λ получится две пары также сопряженных комплексных значений и притом противоположных по знакам. Пусть пара таких значений будет

$$\lambda_j = g + f\sqrt{-1}$$
$$\lambda_{j+1} = g - f\sqrt{-1}$$

соответственно этим корням в выражениях для q_1 получились бы члены вида

$$\alpha \sin[(g + f\sqrt{-1})t + \varepsilon] \quad \text{и} \quad \beta \sin[(g - f\sqrt{-1})t + \eta]$$

и тогда, заменив по формулам Эйлера тригонометрические функции мнимого аргумента через показательные и считая $\eta = \varepsilon$, а α и β — комплексными сопряженными, мы получили бы вещественное решение вида

$$Me^{ft}\sin(gt + \varepsilon) + Ne^{-ft}\sin(gt + \varepsilon) + Pe^{ft}\cos(gt + \varepsilon) + Qe^{-ft}\cos(gt + \varepsilon)$$

где M, N, P, и Q выразились бы через α, β.

Присутствие членов вида $Me^{ft}\sin(gt + \varepsilon)$ и $Pe^{ft}\cos(gt + \varepsilon)$ в выражении для q_1 дало бы подобного же вида члены и в остальных величинах $q_2, q_3, \ldots q_k$. Эти члены с течением времени t *неопределенно возрастают*, значит, величины q не оставались бы постоянно малыми, и система, будучи сколь угодно мало отклонена от положения равновесия, колебалась бы около него, так что эти колебания все более и более бы возрастали, т. е. положение равновесия было бы *неустойчивое*.

Мы же предполагали равновесие устойчивым, и значит, аналитическим критерием такой устойчивости служит условие, чтобы все корни уравнения

$$\Delta(\mu) = 0$$

были бы *положительные* и это уравнение не имело бы ни отрицательных, ни мнимых корней.

§ 11. Случай равенства двух или нескольких корней характеристического уравнения между собою требует более подробного рассмотрения. Лагранж, которому принадлежит вышеизложенная теория малых колебаний системы, в своей „Mécanique analytique“, высказался следующим

образом: „... изложенное выше решение основано на предположении, что величины $q_1, q_2, \ldots q_k$ весьма малые; чтобы это предположение имело место, необходимо, чтобы корни $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ были все вещественные, положительные и неравные, дабы время t, которое может возрастать неопределенно, содержалось бы лишь под знаками синуса или косинуса.

Когда же некоторые из этих корней становятся отрицательными или мнимыми, то при сказанных синусах появятся показательные множители (это и пояснено выше)... *когда же некоторые корни станут просто равными между собою, то появятся члены, содержащие целые степени времени t вне знаков синуса и косинуса*", т. е. в случае равенства двух корней ($\lambda_1 = \lambda_2$) будет решение вида

$$(\alpha + \beta t) \sin \lambda_1 t + (\alpha_1 + \beta_1 t) \cos \lambda_1 t$$

в случае равенства трех корней $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ будет решение вида

$$(\alpha + \beta t + \gamma t^2) \sin \lambda_1 t + (\alpha_1 + \beta_1 t + \gamma_1 t^2) \cos \lambda_1 t$$

и т. д., как видно, при возрастании t, и эти множители $(\alpha + \beta t)$, $(\alpha + \beta t + \gamma t^2)$, и т. д. могут возрастать неопределенно, и колебания, в противность предположению, не остались бы малыми.

Затем Лагранж продолжает: „... но так как развитие [подробное исследование] этого случая [равных корней] бесполезно для предмета нашего изложения, то мы не будем на нем останавливаться".

„Mécanique analytique" появилась первым изданием в 1788 г., вторым — еще при жизни ее автора в 1812 г., третьим — в 1853 г. под редакцией знаменитого Жозефа Бертрана, и вышеприведенная выписка сделана из этого третьего издания. Это утверждение Лагранжа относительно равных корней оставалось общепринятым до 1858 г., когда германский математик Вейерштрасс обратил внимание на ошибочность этого утверждения Лагранжа и разъяснил, в чем эта ошибочность состоит.

Дело вот в чем: мы видели, что уравнение (IV), коим определяются корни λ, выражает то условие, чтобы в системе (III) *одно* из уравнений было следствием остальных, и весь наш дальнейший вывод и был основан на том, что таких уравнений, действительно, *только одно*.

Так оно и есть, когда λ есть простой корень характеристического уравнения. Но если это уравнение имеет кратные корни и, например, $\lambda_1 = \lambda_2$, то если в системе (III) вместо λ подставить его величину λ_1, то в этой системе не одно, а *два* уравнения сделаются следствиями остальных, если же λ_1 есть тройной корень, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то *три* уравнения сделаются следствиями остальных, и. т. д., иными словами, в первом случае надо брать произвольно не одну величину $\alpha_1 = \alpha$, но надо взять произвольно *две* величины, например $\alpha_1 = \alpha$ и $\alpha_2 = \beta$, и, откинув

два уравнения, определить из остальных величины $\alpha_3, \alpha_4 \ldots \alpha_k$ через α и β, таким образом, в случае равенства двух корней, например $\lambda_1 = \lambda_2$, соответствующее частное решение было бы вида

$$q_1 = \alpha \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1);\ q_2 = \beta \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_2);\ q_3 = c_1 \alpha \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + c_2 \beta \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_2); \ldots$$

$$\ldots q_k = h_1 \alpha \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + h_2 \beta \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_2)$$

и, значит, общий интеграл системы был бы вида

$$q_1 = \alpha \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + \gamma \sin(\lambda_3 t + \varepsilon_3) + \ldots + \sigma \sin(\lambda_k t + \varepsilon_k)$$

$$q_2 = \beta \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_2) + b_3 \gamma \sin(\lambda_3 t + \varepsilon_3) + \ldots + b_k \sigma \sin(\lambda_k t + \varepsilon_k)$$

$$q_3 = c_1 \alpha \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + c_2 \beta \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_2) + c_3 \gamma \sin(\lambda_3 t + \varepsilon_3) + \ldots + c_k \sigma \sin(\lambda_k t + \varepsilon_k)$$

. . . . . .

$$q_k = h_1 \alpha \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + h_2 \beta \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_2) + h_3 \gamma \sin(\lambda_3 t + \varepsilon_3) + \ldots + h_k \sigma \sin(\lambda_k t + \varepsilon_k)$$

причем попрежнему: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \sigma, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_k$ суть произвольные постоянные; величины же $b_3, \ldots b_k$; $c_1, c_2, \ldots c_k, \ldots h_k$ будут вполне определенными числами, которые найдутся как показано ниже на примере.

Точно так же в случае равенства трех корней $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ можно три величины взять по произволу, например $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$ и $\alpha_3 = \gamma$, откинуть в системе (III) три уравнения и найти остальные величины $\alpha_4, \alpha_5, \ldots \alpha_k$ через α, β и γ, так что соответствующее корню λ_1 частное решение будет

$$q_1 = \alpha \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1);\quad q_2 = \beta \sin(\lambda_2 t + \varepsilon_2);\quad q_3 = \gamma \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_3)$$

$$q_4 = d_1 \alpha \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + d_2 \beta \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_2) + d_3 \gamma \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_3)$$

. . . . . .

$$q_k = h_1 \alpha \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + h_2 \beta \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_2) + h_3 \gamma \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_3)$$

сообразно чему общий интеграл примет вид

$$q_1 = \alpha \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + \delta \sin(\lambda_4 t + \varepsilon_4) + \ldots + \sigma \sin(\lambda_k t + \varepsilon_k)$$

$$q_2 = \beta \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_2) + b_4 \delta \sin(\lambda_4 t + \varepsilon_4) + \ldots + b_k \sigma \sin(\lambda_k t + \varepsilon_k)$$

$$q_3 = \gamma \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_3) + c_4 \delta \sin(\lambda_4 t + \varepsilon_4) + \ldots + c_k \sigma \sin(\lambda_k t + \varepsilon_k)$$

. . . . . .

$$q_k = h_1 \alpha \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + h_2 \beta \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_2) + h_3 \gamma \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_3) + h_4 \delta \sin(\lambda_4 t + \varepsilon_4) + \ldots + h_k \sigma \sin(\lambda_k t + \varepsilon_k)$$

Мы не будем входить в подробности вывода и общего доказательства этих результатов,[1] ибо в каждом численном примере они обнаружатся сами собою, для пояснения же выкладок проделаем такой численный пример.

Положим, что имеем систему с тремя степенями свободы, и живая сила и потенциал для этой системы выражаются так:

$$\begin{aligned} 2T &= 6q_1'^2 + 11q_2'^2 + 22q_3'^2 + 12q_1'q_2' + 22q_1'q_3' + 28q_2'q_3' \\ -2V &= 9q_1^2 + 38q_2^2 + 49q_3^2 + 30q_1q_2 + 40q_1q_3 + 82q_2q_3 \end{aligned} \qquad (*)$$

тогда уравнения движения будут

$$\begin{aligned} 6q_1'' + 9q_1 + 6q_2'' + 15q_2 + 11q_3'' + 20q_3 &= 0 \\ 6q_1'' + 15q_1 + 11q_2'' + 38q_2 + 14q_3'' + 41q_3 &= 0 \\ 11q_1'' + 20q_1 + 14q_2'' + 41q_2 + 22q_3'' + 49q_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

полагая

$$q_1 = \alpha_1 \sin(\lambda t + \varepsilon_1); \quad q_2 = \alpha_2 \sin(\lambda t + \varepsilon_1); \quad q_3 = \alpha_3 \sin(\lambda t + \varepsilon)$$

получаем для определения постоянных α_1, α_2, α_3 уравнения

$$\begin{aligned} (6\lambda^2 - 9)\alpha_1 + (6\lambda^2 - 15)\alpha_2 + (11\lambda^2 - 20)\alpha_3 &= 0 \\ (6\lambda^2 - 15)\alpha_1 + (11\lambda^2 - 38)\alpha_2 + (14\lambda^2 - 41)\alpha_3 &= 0 \\ (11\lambda^2 - 20)\alpha_1 + (14\lambda^2 - 41)\alpha_2 + (22\lambda^2 - 49)\alpha_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

Определитель этой системы есть

$$\Delta(\lambda^2) = \begin{vmatrix} 6\lambda^2 - 9, & 6\lambda^2 - 15, & 11\lambda^2 - 20 \\ 6\lambda^2 - 15, & 11\lambda^2 - 38, & 14\lambda^2 - 41 \\ 11\lambda^2 - 20, & 14\lambda^2 - 41, & 22\lambda^2 - 49 \end{vmatrix}$$

Чтобы развить этот определитель, поступаем так: сперва первую строку вычитаем из второй и удвоенную первую строку — из третьей,

---

[1] Желающих с ними ознакомиться отсылаем к т. III лекций по математической физике Гельмгольца (Vorlesungen über theoretische Physik von H. v. Helmholtz, Bd. III. Die mathematische Principien der Akustik), где эти доказательства изложены с удивительною простотою, основываясь непосредственно на свойствах определителя. При своем доказательстве Гельмгольц берет выражение живой силы в виде $2T = m_1\xi_1'^2 + m_2\xi_2'^2 + \ldots + m_k\xi_k'^2$, к каковому его весьма легко привести простою заменою переменных, представив сперва T в виде суммы квадратов линейных функций $q_1, q_2, \ldots q_k$, из коих первая содержала бы все k переменных q, вторая $k-1$ и т. д.

в полученном определителе первый столбец вычитаем из второго и удвоенный первый столбец — из третьего, тогда наш определитель примет вид

$$\Delta(\lambda^2)=\begin{vmatrix} 6\lambda^2-9, & -6, & -\lambda^2-2 \\ -6, & 5\lambda^2-17, & 3\lambda^2-9 \\ -\lambda^2-2, & 3\lambda^2-9, & 2\lambda^2-5 \end{vmatrix}$$

В этом определителе вычтем вторую строку из третьей, тогда все члены нижней строки будут иметь общего множителя $-\lambda^2+4$, взяв которого за черту, получим

$$\Delta(\lambda^2)=(-\lambda^2+4)\begin{vmatrix} 6\lambda^2-9, & -6, & -\lambda^2-2 \\ -6, & 5\lambda^2-17, & 3\lambda^2-9 \\ 1, & 2, & 1 \end{vmatrix}$$

В этом последнем определителе вычитаем удвоенный первый столбец из второго и первый столбец — из третьего; по упрощении получаем

$$\Delta(\lambda^2)=(-\lambda^2+4)\begin{vmatrix} -12\lambda^2+12, & -7\lambda^2+7 \\ 5\lambda^2-5, & 3\lambda^2-3 \end{vmatrix}=(4-\lambda^2)(1-\lambda^2)^2\begin{vmatrix} 12, & 7 \\ -5, & -3 \end{vmatrix}=(\lambda^2-4)(\lambda^2-1)^2$$

Следовательно, корни уравнения $(\Delta\lambda^2)=0$ суть

$$\lambda_1^2=\lambda_2^2=1 \quad \text{и} \quad \lambda_3^2=4$$

Таким образом,

$$\lambda_1=\lambda_2=1 \quad \text{и} \quad \lambda_3=2$$

Берем сперва $\lambda=\lambda_1=1$ и подставляем в уравнения (6), которые тогда, переменив знак, принимают вид

$$\begin{aligned} 3\alpha_1+9\alpha_2+9\alpha_3&=0 \\ 9\alpha_1+27\alpha_2+27\alpha_3&=0 \\ 9\alpha_1+27\alpha_2+27\alpha_3&=0 \end{aligned}$$

как видно эти три уравнения не суть независимые, а в них *два* суть следствия третьего, так что между тремя неизвестными α_1, α_2 и α_3 имеет место только *одно* уравнение, именно:

$$\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3=0$$

и, взяв произвольно $\alpha_1=\alpha$ и $\alpha_2=\beta$, мы должны взять

$$\alpha_3=-\frac{1}{3}\alpha_1-\alpha_2=-\frac{1}{3}\alpha-\beta$$

сообразно чему соответствующее двойному корню $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ частное решение будет

$$\begin{aligned} q_1 &= \alpha \sin(t + \varepsilon_1) \\ q_2 &= \beta \sin(t + \varepsilon_2) \\ q_3 &= -\frac{1}{3}\alpha \sin(t + \varepsilon_1) - \beta \sin(t + \varepsilon_2) \end{aligned} \tag{7}$$

причем α, β, ε_1 и ε_2 суть произвольные постоянные.

Взяв корень $\lambda = \lambda_3 = 2$ и подставив в систему уравнений (6), получаем

$$\begin{aligned} 15\alpha_1 + 9\alpha_2 + 24\alpha_3 &= 0 \\ 9\alpha_1 + 6\alpha_2 + 15\alpha_3 &= 0 \\ 24\alpha_1 + 15\alpha_2 + 39\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Здесь *одно* уравнение есть следствие двух других, поэтому берем α_1 произвольно: $\alpha_1 = \gamma$, и, отбросив первое уравнение, пишем

$$\begin{aligned} 2\alpha_2 + 5\alpha_3 &= -3\gamma \\ 5\alpha_2 + 13\alpha_3 &= -8\gamma \end{aligned}$$

Откуда

$$\alpha_2 = \gamma \quad \alpha_3 = -\gamma$$

и частное решение, соответствующее корню λ_2, есть

$$\begin{aligned} q_1 &= \gamma \sin(2t + \varepsilon_3) \\ q_2 &= \gamma \sin(2t + \varepsilon_3) \\ q_3 &= -\gamma \sin(2t + \varepsilon_3) \end{aligned} \tag{8}$$

Соединяя группу (7) и (8), получим интеграл нашей системы

$$\begin{aligned} q_1 &= \alpha \sin(t + \varepsilon_1) + \gamma \sin(2t + \varepsilon_3) \\ q_2 &= \beta \sin(t + \varepsilon_2) + \gamma \sin(2t + \varepsilon_3) \\ q_3 &= -\frac{1}{3}\alpha \sin(t + \varepsilon_1) - \beta \sin(t + \varepsilon_2) - \gamma \sin(2t + \varepsilon_3) \end{aligned}$$

причем α, β, γ, ε_1, ε_2 и ε_3 суть постоянные произвольные.

§ 12. Нормальные координаты и основные колебания. Возьмем формулы (III) § 10, дающие выражения переменных q в функции времени t, и сделаем в этих выражениях

$$\alpha \sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) = \xi_1; \quad \beta \sin(\lambda_2 t + \varepsilon_2) = \xi_2; \quad \ldots \quad \sigma \sin(\lambda_k t + \varepsilon_k) = \xi_k \tag{1}$$

тогда уравнения (VIII) напишутся так:

$$\begin{aligned} q_1 &= \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k \\ q_2 &= b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_k\xi_k \\ q_3 &= c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_k\xi_k \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_k &= h_1\xi_1 + h_2\xi_2 + \ldots + h_k\xi_k \end{aligned} \tag{2}$$

причем $b_1, b_2, \ldots h_1, \ldots h_k$ суть вполне определенные, для данной системы, числа, даваемые формулами (IX) § 10.

Из уравнений (1) следует, что переменные $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k$ удовлетворяют таким дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \xi_1'' + \lambda_1^2\xi_1 &= 0 \\ \xi_2'' + \lambda_2^2\xi_2 &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ \xi_k'' + \lambda_k^2\xi_k &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Отсюда следует, что если бы мы вместо переменных q_i ввели бы новые переменные ξ_i, связанные с ними уравнениями (2), то система совокупных уравнений (II) преобразовалась бы в систему уравнений (3), в которых *каждое уравнение заключает только одну неизвестную функцию.*

Но, вместо того, чтобы преобразовать систему (II), можно бы было преобразовать к новым переменным выражение живой силы и потенциала, и тогда, по схеме Лагранжа, мы получили бы уравнения (3).

Ясно, что при таком преобразовании живая сила T, обратилась бы в однородную функцию *второй* степени от переменных ξ_i' с *постоянными* коэффициентами, V — в таковую же функцию самих величин ξ_i. Посмотрим, каков будет вид этих функций.

Уравнения движения в новых переменных ξ_i написались бы по схеме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_i'}\right) = \frac{\partial V}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots k) \tag{4}$$

ибо величина $\frac{\partial T}{\partial \xi_i} = 0$, так как T самих переменных ξ_i не содержит, а лишь их производные ξ_i', точно так же V не содержит производных ξ_i'. Считая, что уравнения (3) суть уравнения Лагранжа, и сличая уравнения (4) с уравнениями (3), видим, что должно быть

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_i'} = a_i\xi_i' \quad \text{и} \quad \frac{\partial V}{\partial \xi_i} = -\lambda_i^2 a_i \xi_i$$

Значит, будет

$$\begin{aligned} 2T &= a_1 \xi'^2_1 + a_2 \xi'^2_2 + \ldots + a_k \xi'^2_k \\ -2V &= \lambda_1^2 a_1 \xi_1^2 + \lambda_2^2 a_2 \xi_2^2 + \ldots + \lambda_k^2 a_k \xi_k^2 \end{aligned} \tag{5}$$

т. е. что в новых переменных удвоенная живая сила выразится суммою квадратов их производных, удвоенная потенциальная функция — суммою квадратов самих переменных, умноженных на постоянные, умножители. Очевидно, что без ущерба общности можно положить $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 1$, так что будет

$$2T = \xi'^2_1 + \xi'^2_2 + \ldots + \xi'^2_k$$

и

$$-2V = \lambda_1^2 \xi_1^2 + \lambda_2^2 \xi_2^2 + \ldots + \lambda_k^2 \xi_k^2$$

т. е. живая сила равна сумме квадратов производных переменных ξ_i, потенциальная функция — сумме квадратов самих переменных, умноженных на постоянные множители.

Действительно, всегда можно такие новые координаты ξ_i, найти, и когда они найдены, то вопрос можно считать решенным, ибо решения уравнений (3) пишутся сразу в форме (1).

Отсюда видно, что координатные параметры ξ_i будут таковы, что движение системы, представляемое изменением каждого из них, есть простое *гармоническое*, независимое от прочих и совершающееся со *своим* периодом и со своею амплитудою и фазою.

Такие колебания для системы называются *основными*, координатные же параметры ξ_i — *нормальными*.

Из формулы (VIII) следует, что в каких бы координатных параметрах мы движение системы ни выражали, это движение будет состоять из *наложения* простых основных колебаний, совершающихся каждое со своим периодом, амплитудою и фазою.

Равенство корней характеристического уравнения укажет лишь на то, что некоторые из периодов основных колебаний между собою равны, но оно не имеет отношения к устойчивости или неустойчивости равновесия системы, т. е. к увеличению амплитуды с течением времени; такой случай будет только, если в выражении — V будут члены *отрицательные*.

Таким образом, вопрос об интегрировании уравнений движения (II) § 10, относящихся к малым колебаниям системы, сводится к разысканию формул преобразования (2), которыми бы *одновременно* две квадратичные формы T и V приводились к виду (5), именно, такая постановка вопроса и указала Вейерштрассу на ошибочность утверждения Лагранжа, но мы не будем входить в теорию этих „линейных преобразований“, так как все выкладки остаются те же самые, которые в нашем изложении служили бы сперва для нахождения переменных q_i по уравнениям

движения, а по ним переменных ξ_i, если бы мы желали найти и нормальные координаты.

§ 13. Случай, когда малые колебания совершаются в сопротивляющейся среде, отличается от рассмотренного выше тем, что к силам „восстановления", имеющим потенциал V, присовокупляются силы сопротивления среды, зависящие от скоростей точек или элементов системы. Эти силы мы будем считать пропорциональными первой степени скорости и, значит, выражающимися *линейными функциями* от производных q_i'.

Обыкновенно по условиям задачи весьма нетрудно составить выражения этих сил сопротивления в прямоугольных и прямолинейных координатах, пусть эти силы будут

$$R_1,\ R_2,\ldots\ R_n$$

их составляющие: $X_1,\ Y_1,\ Z_1,\ X_2,\ Y_2,\ Z_2,\ldots X_n,\ Y_n,\ Z_n$ и координаты точек приложения: $x_1,\ y_1,\ z_1;\ldots x_n,\ y_n,\ z_n$.

При составлении уравнений движения системы в параметрах q по схеме Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)-\frac{\partial T_i}{\partial q_i}=Q_i \qquad (i=1,2,\ldots k)$$

стоящая в правой части величина Q_i получается преобразованием выражения элементарной работы $\delta U=\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)$, будь оно полный дифференциал или нет, к виду

$$\delta U=Q_1\delta q_1+Q_2\delta q_2+\ldots+Q_k\delta q_k$$

Тогда те силы, которые имеют потенциал, дадут в составе выражения Q_i величину $\frac{\partial V}{\partial q_i}$, прочие же дадут выражения вида

$$\sum\left(X_h\frac{\partial x_h}{\partial q_i}+Y_h\frac{\partial y_h}{\partial q_i}+Z_h\frac{\partial z_h}{\partial q_i}\right) \qquad (1)$$

причем суммирование распространяется на все значения значка h.

Отбросив в этих выражениях члены высших порядков, мы и получим в составе величин Q_i члены, представляющие линейные функции величин q_i', и уравнения (II) будут вида

$$\begin{aligned}
&A_1q_1''-C_1q_1'+D_1q_1+B_{12}q_2''-F_{12}q_2'+E_{12}q_2+\ldots+\\
&\qquad+B_{1k}q_k''-F_{1k}q_k'+E_{1k}q_k=0\\
&B_{12}q_1''-F_{21}q_1'+E_{12}q_1+A_2q_2''-C_2q_2'+D_2q_2+\ldots+\\
&\qquad+B_{2k}q_k''-F_{2k}q_k'+E_{2k}q_k=0 \qquad (2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&B_{1k}q_1''-F_{k1}q_1'+E_{1k}q_1+B_{2k}q_2''-F_{k2}q_2'+E_{2k}q_2+\ldots+\\
&\qquad+A_kq_k''-C_kq_k'+D_kq_k=0.
\end{aligned}$$

Так как в первые части этих уравнений входят и члены с первыми производными, то решение надо искать вида

$$q_1 = \alpha_1 e^{\lambda_1 t};\ q_2 = \alpha_2 e^{\lambda_1 t};\ q_3 = \alpha_3 e^{\lambda_1 t};\ \ldots\ q_k = \alpha_k e^{\lambda_1 t}$$

и тогда, повторив то же рассуждение, как и выше, увидим что $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ определяются уравнением

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} A_1\lambda^2 - C_1\lambda + D_1, & B_{12}\lambda^2 - F_{12}\lambda + E_{12} & \ldots & B_{1k}\lambda^2 - F_{1k}\lambda + E_{1k} \\ B_{12}\lambda^2 - F_{21}\lambda + E_{12}, & A_2\lambda^2 - C_2\lambda + D_2 & \ldots & B_{2k}\lambda^2 - F_{2k}\lambda + E_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{1k}\lambda^2 - F_{k1}\lambda + E_{1k}, & B_{2k}\lambda^2 - F_{k2}\lambda + E_{2k} & \ldots & A_k\lambda^2 - C_k\lambda + D_k \end{vmatrix} = 0 \qquad (X)$$

которое доставит $2n$ значений λ; каждому из этих значений, например λ_1 будет соответствовать система решений вида

$$q_1 = \alpha e^{\lambda_1 t};\ q_2 = b_1 \alpha e^{\lambda_1 t};\ q_3 = c_1 \alpha e^{\lambda_1 t};\ \ldots\ q_k = h_1 \alpha e^{\lambda_1 t} \qquad (3)$$

и $b_1, c_1, \ldots h_1$ суть вполне определенные числа, находимые через решение уравнений первой степени, α — постоянная произвольная; так как различных корней уравнения (3) вообще $2k$, то общий интеграл системы будет вида

$$\begin{aligned} q_1 &= \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t} + \ldots + \sigma e^{\lambda_{2k} t} \\ q_2 &= b_1 \alpha e^{\lambda_1 t} + b_2 \beta e^{\lambda_2 t} + \ldots + b_{2k} \sigma e^{\lambda_{2k} t} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_k &= h_1 \alpha e^{\lambda_1 t} + h_2 \beta e^{\lambda_2 t} + \ldots + h_{2k} \sigma e^{\lambda_{2k} t} \end{aligned} \qquad (4)$$

Чтобы колебания оставались малыми, надо, чтобы все корни λ были с отрицательною вещественною частью, тогда соответствующие паре сопряженных корней члены в формуле (4), по замене мнимых показательных вещественными, примут вид

$$e^{-gt}(a \cos ft + b \sin ft)$$

и, значит, система (4) представит колебания, затухающие с течением времени.

Во многих случаях уравнения (2) имеют ту особенность, что коэффициенты при членах, представляющих силы сопротивления, не все различны между собою, а связаны соотношениями

$$F_{if} = F_{fi} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots k \\ i = 1, 2, \ldots k \end{pmatrix}$$

т. е. $F_{12}=F_{21}$, $F_{13}=F_{31}$ и т. д., тогда, составив функцию

$$2W=C_1q_1'^2+C_2q_2'^2+\ldots+C_kq_k'^2+2F_{12}q_1'q_2'+ \\ +2F_{13}q_1'q_3'+\ldots+2F_{k-1,k}q'_{k-1}q_k' \tag{5}$$

мы увидим, что члены, содержащие в уравнениях движения производные первого порядка q_1', q_2', ... q_k', представляют соответственно частные, производные от функции W, так что уравнения движения напишутся:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)+\frac{\partial W}{\partial q_i'}-\frac{\partial V}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,2,\ldots k) \tag{6}$$

Умножив первое из этих уравнений на q_1', второе — на q_2', и т. д., сложив и заметив, что по теореме Эйлера об однородных функциях будет

$$q_1'\frac{\partial W}{\partial q_1'}+q_2'\frac{\partial W}{\partial q_2'}+\cdots+q_k'\frac{\partial W}{\partial q_k'}=2W$$

получим

$$\frac{d}{dt}[T-V]=-2W$$

Величина $E=-V$ есть потенциальная энергия системы, T — кинетическая энергия, и предыдущее равенство можно писать так:

$$\frac{d}{dt}[T+E]=-2W \tag{7}$$

В том случае, когда сил сопротивления не было бы, т. е. $W=0$, имел бы место закон сохранения энергии, выражаемый равенством

$$\frac{d}{dt}[T+E]=0$$

уравнение же (7) показывает, что при сопротивлении энергия системы не остается постоянной, а все время убывает и тем быстрее, чем больше абсолютное значение функции W. Эту функцию, показывающую таким образом меру быстроты убывания энергии, лорд Рэлей и назвал „функцией рассеяния“ (dissipation function) и, представив уравнения движения в форме (7), исследовал некоторые их общие свойства, на которых мы останавливаться не будем.

В самом общем случае, кроме сил „восстановления“, происходящих от потенциала V, сил „сопротивления“, коим соответствует „функция рассеяния“, могут быть приложены внешние „возмущающие“ силы, не имеющие потенциала, а также и силы, зависящие от скорости, но не входящие в состав предыдущих.

В самом деле, если равенства

$$F_{ji}=F_{ij}\ldots$$

не имеют места, то не будет и равенства

$$Q_i = C_i q_i' + F_{i1} q_1' + F_{i2} q_2' + \ldots + F_{ik} q_k' = \frac{\partial W}{\partial q_i'}$$

Но очевидно, что можно писать, каковы бы ни были F_{ij} и F_{ji}:

$$F_{ij} = \frac{F_{ij} + F_{ji}}{2} + \frac{F_{ij} - F_{ji}}{2}$$

и

$$F_{ji} = \frac{F_{ij} + F_{ji}}{2} - \frac{F_{ij} - F_{ji}}{2}$$

Сделаем

$$\frac{F_{ij} + F_{ji}}{2} = G_{ij} \quad \text{и} \quad \frac{F_{ij} - F_{ji}}{2} = H_{ij}$$

так что будет

$$F_{ij} = G_{ij} + H_{ij}; \quad G_{ji} = G_{ij} \quad \text{и} \quad H_{ji} = -H_{ij}$$

и, следовательно,

$$Q_i = C_i q_i' + (G_{i1} + H_{i1}) q_1' + (G_{i2} + H_{i2}) q_2' + \ldots + (G_{ij} + H_{ij}) q_j' + \ldots$$

Силы, входящие в состав Q_i и Q_j с коэффициентами G_{ij} при производных, можно рассматривать как происходящие от „функции рассеяния“ и, значит, как сопротивления, силы же с коэффициентами H_{ij} называются силами „гироскопическими“, ибо подобного рода силы появляются, когда в состав системы входит быстро вращающееся с *постоянною* угловою скоростью тело — гироскоп, как, например, на корабле с успокоителем качки Шлика.

Нетрудно видеть, что присутствие таких гироскопических сил не нарушает закона сохранения энергии и формула (7) будет попрежнему иметь место, если взять за W функцию

$$2W = C_1 q_1'^2 + C_2 q_2'^2 + \ldots + C_k q_k'^2 + 2G_{12} q_1' q_2' + \ldots + 2G_{k-1,k} q_{k-1}' q_k'$$

Если на систему действуют и возмущающие силы, коих „обобщенные составляющие“, т. е. входящие в правые части второй формы Лагранжевых уравнений, мы назовем через R_1, R_2, ... R_k, то вместо уравнения (7) мы получили бы такое:

$$\frac{d}{dt}[T + E] = R_1 q_1' + R_2 q_2' + \ldots + R_k q_k' - 2W \qquad (8)$$

которое и показывало бы, как распределяется производимая возмущающими силами работа и какая ее часть идет на увеличение энергии и какая „рассеивается“, затрачиваясь на преодоление сопротивлений движению.

Этим уравнением, например, пользуются в теории корабля при изложении успокоения качки прибором Шлика, где это уравнение является основным и объясняющим сущность дела.

§ 14. Вынужденные колебания системы. Начнем с рассмотрения простейшего случая, именно, положим, что система не включает ни сопротивлений, ни гироскопических сил, тогда уравнения движения ее будут отличаться от уравненей (II) § 10, представляющих свободные колебания, тем, что в правых частях вместо нуля будут находиться величины $R_1, R_2, \ldots R_k$ обобщенных составляющих возмущающих сил.

Эти величины будут вообще заданными функциями времени; особенно прост и часто встречается тот случай, когда эти функции составлены из периодических членов, т. е. членов вида

$$L_i \sin(p_i t + \delta_i) \tag{1}$$

В этом случае надо искать частное решение того же вида, как и вторые части уравнений, т. е. для всякого члена второй части брать в выражении для $q_1, q_2, \ldots q_k$ член с тем же самым тригонометрическим множителем, но коэффициент при нем в каждом из этих выражений оставлять неопределенным. Подставив затем эти выражения в предложенные уравнения и отожествив полученные равенства, будем иметь для определения неизвестных коэффициентов столько уравнений первой степени, сколько у нас этих неизвестных, и притом для каждого $\sin(p_i t + \delta_i)$ получится своя система уравнений.

Таким образом, что мы скажем об одном члене, то будет относиться к каждому из них.

Итак, пусть вторые части наших уравнений суть

$$L_1 \sin(pt + \delta);\ L_2 \sin(pt + \delta);\ \ldots\ L_k \sin(pt + \delta)$$

тогда мы ищем частное решение вида

$$q_1 = N_1 \sin(pt + \delta);\quad q_2 = N_2 \sin(pt + \delta);\ \ldots\ q_k = N_k \sin(pt + \delta) \tag{2}$$

Подстановка этих величин в систему (II) доставит для определения неизвестных $N_1, N_2, \ldots N_k$ систему уравнений первой степени, только тем отличающихся от уравнений (III) § 10, что вместо буквы λ будет стоять буква p и вместо букв $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ — буквы $N_1, N_2, \ldots N_k$, и во вторых частях вместо нуля — буквы $L_1, L_2, \ldots L_k$.

Очевидно, что определитель этой системы есть $\Delta(p^2)$.

Если p таково, что оно *не равно* ни одному из корней характеристического уравнения $\Delta(\lambda^2) = 0$, то для $N_1, N_2, \ldots N_k$ получатся конечные и определенные значения.

Отсюда видно, что если p будет весьма близко к одному из корней характеристического уравнения, то определитель $\Delta(p^2)$ будет иметь зна-

чение, близкое к нулю, и, значит, величины коэффициентов $N_1, N_2, \ldots N_k$ при тех же значениях $L_1, L_2, \ldots L_k$ будут весьма велики, т. е. когда период возмущающей силы близок к периоду одного из основных колебаний системы, то амплитуда этого колебания становится весьма большой по сравнению с прочими, и проявляются явления резонанса.

В том случае, когда величина p окажется в точности равной одному из корней $\lambda = \lambda_i$ уравнения $\Delta(\lambda^2) = 0$, определитель системы обращается в нуль, уравнения становятся несовместными, если только величины $L_1, L_2, \ldots L_k$ не заданы так, что одно из уравнений есть следствие остальных.

В этом случае, чтобы не исследовать разных исключительных обстоятельств, а применять общую методу, следует вместо координатных параметров $q_1, q_2, \ldots q_k$ ввести *нормальные* координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k$, как о том сказано в § 12. Система (II) распадается на ряд уравнений вида

$$\begin{aligned} \xi_1'' + \lambda_1^2 \xi_1 &= \Xi_1 \\ \xi_2'' + \lambda_2^2 \xi_2 &= \Xi_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \xi_k'' + \lambda_k^2 \xi_k^2 &= \Xi_k \end{aligned} \tag{3}$$

причем $\Xi_1, \Xi_2, \ldots \Xi_k$ будут вообще вида $M_j \sin(pt + \delta)$, и по предположению $p = \lambda_i$. В частном случае, некоторые из величин M_j могут быть и равны нулю.

Решение уравнений (3) затруднений никаких не представит, и, найдя нормальные колебания $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k$, найдем и наши координатные параметры $q_1, q_2, \ldots q_k$ в функции времени.

Как видно, для того из уравнений (3), которое содержит ξ_i, решение будет

$$\xi_i = -\frac{M_i}{2\lambda_i} t \cos(\lambda_i t + \delta)$$

т. е. амплитуда соответствующего нормального колебания возрастает неопределенно с течением времени.

Поясним вышеизложенное примером. Возьмем уравнения § 11 и положим, что вторые части этих уравнений будут не нули, а следующие:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sin t + \sin 2t + \sin 3t \\ Q_2 &= 2\sin t + \sin 2t - \sin 3t \\ Q_3 &= -2\sin t - \sin 2t + 2\sin 3t \end{aligned}$$

так что наши уравнения суть

$$\begin{aligned} 6q_1'' + 9q_1 + 6q_2'' + 15q_2 + 11q_3'' + 20q_3 &= \sin t + \sin 2t + \sin 3t \\ 6q_1'' + 15q_1 + 11q_2'' + 38q_3 + 14q_3'' + 41q_2 &= 2\sin t + \sin 2t - \sin 3t \\ 11q_1'' + 20q_1 + 14q_2'' + 41q_2 + 22q_3'' + 49q_3 &= -2\sin t - \sin 2t + 2\sin 3t \end{aligned} \tag{4}$$

Мы видели, что общий интеграл соответствующей (4) системы без последних членов есть

$$\begin{aligned} q_1 &= \alpha \sin(t + \varepsilon_1) + \gamma \sin(2t + \varepsilon_3) \\ q_2 &= \beta \sin(t + \varepsilon_2) + \gamma \sin(2t + \varepsilon_3) \\ q_3 &= -\frac{1}{3}\alpha \sin(t + \varepsilon_1) - \beta \sin(t + \varepsilon_2) - \gamma \sin(2t + \varepsilon_3) \end{aligned} \tag{5}$$

поэтому, для разыскания нормальных координат, полагаем

$$\begin{aligned} q_1 &= \xi + \zeta \\ q_2 &= \eta + \zeta \\ q_3 &= -\frac{1}{3}\xi - \eta - \zeta \end{aligned} \tag{6}$$

так что

$$\xi = \alpha \sin(t + \varepsilon_1); \quad \eta = \beta \sin(t + \varepsilon_2); \quad \zeta = \gamma \sin(2t + \varepsilon_3)$$

и, следовательно, эти переменные удовлетворяют уравнениям

$$\xi'' + \xi = 0; \quad \eta'' + \eta = 0; \quad \zeta'' + 4\zeta = 0 \tag{7}$$

Подставив выражение (6) в выражение живой силы $2T$ и потенциала $-2V$, получим [см. стр. 58, формулы (*)]

$$\begin{aligned} 2T &= \frac{10}{9}\xi'^2 + 5\eta'^2 + \zeta'^2 - \frac{14}{3}\xi'\eta' \\ -2V &= \frac{10}{9}\xi^2 + 5\eta^2 + 4\zeta^2 - \frac{14}{3}\xi\eta \end{aligned} \tag{8}$$

и уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi'}\right) = \frac{\partial V}{\partial \xi}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta'}\right) = \frac{\partial V}{\partial \eta}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \zeta'}\right) = \frac{\partial V}{\partial \zeta} \tag{9}$$

будут следующие:

$$\begin{aligned} \frac{10}{9}(\xi'' + \xi) - \frac{7}{3}(\eta'' + \eta) &= 0 \\ 5(\eta'' + \eta) - \frac{7}{3}(\xi'' + \xi) &= 0 \\ \zeta'' + 4\zeta &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

очевидно, что эта система равносильна системе (7), хотя выражения T и V и содержат произведения $\eta'\xi'$ и $\eta\xi$.

Чтобы составить уравнения, соответствующие (9), для того случая, когда есть и возмущающие силы Q_1, Q_2, Q_3, надо взять выражение элементарной работы

$$\delta U = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3$$

и подставить вместо δq_1, δq_2, δq_3 их величины

$$\delta q_1 = \delta\xi + \delta\zeta; \quad \delta q_2 = \delta\eta + \delta\zeta; \quad \delta q_3 = -\frac{1}{3}\delta\xi - \delta\eta - \delta\zeta$$

следующие из уравнений (6), то будет

$$\delta U = \left(Q_1 - \frac{1}{3}Q_3\right)\delta\xi + (Q_2 - Q_3)\delta\eta + (Q_1 + Q_2 - Q_3)\delta\zeta =$$
$$= \left(\frac{5}{3}\sin t + \frac{4}{3}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t\right)\delta\xi + (4\sin t + 2\sin 2t - 3\sin 3t)\delta\eta +$$
$$+ (5\sin t + 3\sin 2t + 2\sin 3t)\delta\zeta$$

и уравнения движения будут

$$\frac{10}{9}(\xi'' + \xi) - \frac{7}{3}(\eta'' + \eta) = \frac{5}{3}\sin t + \frac{4}{3}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t$$
$$-\frac{7}{3}(\xi'' + \xi) + 5(\eta'' + \eta) = 4\sin t + 2\sin 2t - 3\sin 3t$$
$$\zeta'' + 4\zeta = 5\sin t + 3\sin 2t + 2\sin 3t$$

интегрирование которых не представляет никаких затруднений, если предварительно первые два разрешить относительно $\xi'' + \xi$ и $\eta'' + \eta$, так что они примут вид

$$\xi'' + \xi = a\sin t + b\sin 2t + c\sin 3t$$
$$\eta'' + \eta = a_1\sin t + b_1\sin 2t + c_1\sin 3t$$

После того как ξ, η, ζ будут найдены, по формуле (6) найдем и q_1, q_2, q_3.

§ 15. В том случае, когда система включает или сопротивления, или гироскопические силы, т. е. когда ее уравнения имеют вид (2) § 13, и если на нее действуют и возмущающие силы, то уравнения будут того же вида, только во второй части будут стоять не нули, а обобщенные составляющие этих сил.

Если эти возмущающие силы будут состоять из суммы периодических членов вида $L_i\sin(pt + \delta)$ или, что то же, вида $K_i\sin pt + M_i\cos pt$, то надо для каждого члена брать в составе величин $q_1, q_2, \ldots q_i, \ldots q_k$ по паре членов вида

$$N_i\sin pt + P_i\cos pt$$

Подставив и отожествив, получим, для определения $2k$ неизвестных N_i и P_i, столько же уравнений, причем определитель их нулем не будет, когда уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ имеет только комплексные корни.

Другой способ нахождения частного решения есть способ изменения постоянных произвольных, излагать который мы здесь не будем, предполагая его достаточно известным.

Наконец, третий способ состоит в применении символического приема, изложенного в § 9.

Чтобы применить его к нашему случаю, поступают так: заменив дифференцирования символом δ, рассматриваем этот символ как буквенный множитель, и тогда система (2) § 13, предполагая ее уравнения с последними членами, примет вид

$$\begin{aligned}
&(A_1\delta^2 - C_1\delta + D_1)\,q_1 + (B_{12}\delta^2 - F_{12}\delta - E_{12})\,q_2 + \ldots + (D_{1k}\delta^2 - F_{1k}\delta + E_{1k})\,q_k = Q_1\\
&(B_{12}\delta^2 - F_{21}\delta + E_{12})\,q_1 + (A_2\delta^2 - C_2\delta + D_2)\,q_2 + \ldots + (B_{2k}\delta^2 - F_{2k}\delta + E_{2k})\,q_k = Q_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(B_{1k}\delta^2 - F_{k1}\delta + E_{1k})\,q_1 + (B_{2k}\delta^2 - F_{k2}\delta + E_{2k})\,q_2 + \ldots + (A_k\delta^2 - C_k\delta + D_k)\,q_k = Q_k
\end{aligned} \tag{11}$$

Если эту систему решить относительно $q_1, q_2, \ldots q_k$, то получатся решения вида

$$\Delta(\delta)\cdot q_i = \Delta_{i1}(\delta)\,Q_1 + \Delta_{i2}(\delta)\,Q_2 + \ldots + \Delta_{ik}(\delta)\,Q_k \quad (i=1,2,3,\ldots k) \tag{12}$$

где $\Delta(\delta)$ есть определитель системы (11) и $\Delta_{i1}, \Delta_{i2}, \ldots$ — его миноры, соответствующие i-ому столбцу.

Во второй части этого равенства, развив определители по степеням буквы δ, выполняем соответствующие им дифференцирования над заданными функциями $Q_1, Q_2, \ldots Q_3$, тогда вторая часть обратится в известную функцию переменной t, обозначим ее через $\varphi_i(t)$. Тогда уравнения (12) напишутся так:

$$\Delta(\delta)\,q_i = \varphi_i(t) \qquad (i=1, 2, \ldots k) \tag{13}$$

По предположению, уравнение

$$\Delta(\lambda) = 0$$

имеет только комплексные корни с отрицательною вещественною частью, значит, величина $\Delta(\lambda)$ разлагается на произведение множителей вида

$$\lambda^2 + 2g_j\lambda + f_j,$$

причем

$$f_j - g_j^2 > 0$$

Дробь $\frac{1}{\Delta(\lambda)}$ разложится на сумму дробей вида

$$\frac{a_j\lambda + b_j}{\lambda^2 + 2g_j\lambda + f_j}$$

так что

$$\frac{1}{\Delta(\lambda)} = \sum_{j=1}^{j=k} \frac{a_j \lambda + b_j}{\lambda^2 + 2g_j \lambda + f_j}$$

причем будет *тождественно*

$$\Delta(\lambda) \cdot \sum_{j=1}^{j=k} \frac{a_j \lambda + b_j}{\lambda^2 + 2g_j \lambda + f_j} = 1$$

Из уравнения (13) следует для δ, рассматриваемого как буквенный множитель,

$$q_i = \frac{1}{\Delta(\delta)} \cdot \varphi_i(t) = \Delta^{-1}(\delta) \cdot \varphi_i(t) \tag{14}$$

или иначе

$$q_i = \sum_{j=1}^{j=k} \frac{a_j \delta + b_j}{\delta^2 + 2g_j \delta + f_j} \varphi_i(t) \tag{15}$$

будем теперь δ рассматривать как символ объясненного в § 9 действия и в каждом члене суммы (15) выполним над функцией $\varphi_i(t)$ действие $a_j \delta + b_j$, получим

$$(a_j \delta + b_j) \varphi_j(t) = a_j \frac{d}{dt} \varphi_i(t) + b_j \varphi_i(t) = \psi_i(t)$$

тогда будет

$$q_i = \sum_{j=1}^{j=k} \frac{1}{\delta^2 + 2g_j \delta + f_j} \psi_i(t)$$

обозначим результат действия $\frac{1}{\delta^2 + 2g_j \delta + f_j}$ над функцией $\psi_i(t)$ через ξ_{ji} так что

$$\xi_{ji} = (\delta^2 + 2g_j \delta + f_j)^{-1} \psi_i(t)$$

или иначе

$$(\delta^2 + 2g_j \delta + f_j) \xi_{ji} = \psi_i(t)$$

или иначе

$$\frac{d^2 \xi_{ji}}{dt^2} + 2g_j \frac{d\xi_{ji}}{dt} + f_j \xi_{ji} = \psi_i(t) \tag{16}$$

т. е. величина ξ_{ji} определится через решение дифференциального уравнения второго порядка, нами уже подробно исследованного.

Мы привели систему (II) к уравнениям для каждого q_i, причем левые части этих уравнений одинаковы для различных q_i. Дальнейшее сводится к решению уравнений (12). Если для каждого q_i написать общий интеграл, то, подставляя в систему (11), получим необходимые связи для произвольных постоянных, входящих в упомянутые общие интегралы q_i.

§ 16. В предыдущих параграфах изложена в главных чертах теория малых колебаний систем. Как видно, в том случае, когда требуется найти не только вынужденные, но и свободные колебания, то вопрос приводится к решению так называемого „векового“ уравнения (IV) для систем без сопротивления и уравнения (X) § 13 для систем с сопротивлением.

Решение этих уравнений требует сперва развития соответствующих определителей, что при написанной их форме при сколь-нибудь значительном числе строк и столбцов практически почти невыполнимо или требует громадной работы.

В моей статье: „О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем“,[1] изложены методы Лапласа, Леверрье и Якоби для этого решения, разобраны критически, и в заключение приведена метода, развитая мною, которая всего проще и с наименьшею затратою труда ведет к цели. Отсылая к указанной статье, я приведу лишь ее заключительную практическую часть.

Положим, что первоначально введенные Лагранжевы координатные параметры суть

$$s_1,\ s_2,\ \ldots\ s_k \tag{1}$$

тогда живая сила выразится квадратичною формою

$$2T = \sum M_{ik}\, s_i'\, s_k' \tag{2}$$

и элементарная работа „обобщенных сил“

$$\delta U = S_1\,\delta s_1 + S_2\,\delta s_2 + \ldots + S_k\,\delta s_k \tag{3}$$

причем M_{ik} суть заданные постоянные, S_i — заданные линейные функции переменных.

Прежде всего, для упрощения выкладок, надо привести живую силу к виду

$$\begin{aligned} 2T = (c_1 s_1' + \ldots + c_2 s_2' + c_k s_k')^2 + (d_2 s_2' + d_3 s_3' + \ldots + d_k s_k')^2 + \ldots \\ \ldots + (g_{k-1} s_{k-1}' + g_k s_k')^2 + (h_k s_k')^2 \end{aligned} \tag{4}$$

что всегда возможно, ибо живая сила есть „определенная“ квадратичная форма.

Это приведение совершается весьма просто и не требует решения каких бы то ни было уравнений. Поясним его примером. Пусть будет

$$2T = 6s_1'^2 + 11s_2'^2 + 22s_3'^2 + 12s_1' s_2' + 22s_1' s_3' + 28s_2' s_3'$$

---

[1] Изв. Акад. Наук, № 4, 1931.

Умножив, чтобы избежать иррациональностей, обе части этого равенства на 6, дополняем члены, содержащие переменную s_1', до полного квадрата суммы всех трех переменных, умноженных на постоянные множители, получаем

$$2 \cdot 6T = (6s_1' + 6s_2' + 11s_3')^2 + 30s_2'^2 + 11s_3'^2 + 36s_2' s_3'$$

Это равенство множим на 30 и дополняем до полного квадрата члены, содержащие s_2', имеем

$$2 \cdot 6 \cdot 30T = 30(6s_1' + 6s_2' + 11s_3')^2 + (30s_2' + 18s_3')^2 + 6s_3'^2$$

За новые переменные берем, чтобы избежать дробей,

$$\begin{aligned} s_3 &= 30x_3 \\ 30s_2 + 18s_3 &= 6 \cdot 30 \cdot x_2 \\ 6s_1 + 6s_2 + 11s_3 &= 6x_1 \end{aligned}$$

Таким образом, будет

$$2T = 6x_1'^2 + 180x_2'^2 + 30x_3'^2$$

положив затем

$$\sqrt{6}x_1 = q_1; \quad \sqrt{180}x_2 = q_2; \quad \sqrt{30}x_3 = q_3$$

получаем

$$2T = q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2$$

Совершенно подобно надо поступать и при любом числе переменных. Таким образом, в общем случае, положив

$$\begin{aligned} h_k s_k &= q_k \\ g_{k-1} s_{k-1} + g_k s_k &= q_{k-1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1 s_1 + c_2 s_2 + \ldots + c_k s_k &= q_1 \end{aligned} \tag{5}$$

вместо параметров s_i вводим параметры q_i. Очевидно, что из уравнения (5) непосредственно находятся выражения переменных s_i через переменные q_i. Эти выражения будут вида

$$\begin{aligned} s_k &= h_k' q_k \\ s_{k-1} &= g_{k-1}' q_{k-1} + g_k' q_k \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_1 &= c_1' q_1 + c_2' q_2 + \ldots + c_k' q_k \end{aligned} \tag{6}$$

где все коэффициенты $h_k', \ldots c_k'$ постоянные.

Очевидно, что, заменив переменные s_i при помощи выражений (6), мы получим

$$2T = q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2 + \ldots + q_k'^2 \tag{7}$$

$$\delta U = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_k \delta q_k \tag{8}$$

причем величины Q_1, Q_2, ... Q_k будут известными *линейными* функциями переменных q_1, q_2, ... q_k, мы их обозначим так:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + a_{13} q_3 + \ldots + a_{1k} q_k \\
Q_2 &= a_{21} q_1 + a_{22} q_2 + a_{23} q_3 + \ldots + a_{2k} q_k \\
Q_3 &= a_{31} q_1 + a_{32} q_2 + a_{33} q_3 + \ldots + a_{3k} q_k \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Q_k &= a_{k1} q_1 + a_{k2} q_2 + a_{k3} q_3 + \ldots + a_{kk} q_k
\end{aligned} \tag{9}$$

Заметим здесь же, что в том случае, когда интеграл живых сил имеет место, то выражение (8) будет представлять *полный дифференциал*, и между коэффициентами a_{ik} будут иметь место соотношения

$$a_{ih} = a_{hi} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots k-1, k \\ i = 1, 2, \ldots k-1, k \end{pmatrix} \tag{10}$$

пока же мы этого предполагать не будем.

На основании выражений (7), (8), (9), уравнения движения нашей системы будут

$$\begin{aligned}
q_1'' &= a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + a_{13} q_3 + \ldots + a_{1k} q_k \\
q_2'' &= a_{21} q_1 + a_{22} q_2 + a_{23} q_3 + \ldots + a_{2k} q_k \\
q_3'' &= a_{31} q_1 + a_{32} q_2 + a_{33} q_3 + \ldots + a_{3k} q_k \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_k'' &= a_{k1} q_1 + a_{k2} q_2 + a_{k3} q_3 + \ldots + a_{kk} q_k
\end{aligned} \tag{11}$$

Для системы (11) характеристическое уравнение будет

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda^2), & a_{12}, & a_{13}, & \ldots a_{1k} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda^2), & a_{23}, & \ldots a_{2k} \\ a_{31}, & a_{32}, & (a_{33} - \lambda^2), & \ldots a_{3k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ a_{k1}, & a_{k2}, & a_{k3}, & \ldots (a_{kk} - \lambda^2) \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

Хотя это уравнение проще (IV), но, в виду того, что неизвестная λ находится в диагональных элементах, развитие этого определителя

сложно; поэтому применим к интегрированию системы (11) ту методу, которою в любом курсе анализа, начиная с Лакруа, изданного 120 лет тому назад, пользуются для приведения системы совокупных уравнений к одному уравнению соответствующего порядка или, лучше сказать, для доказательства возможности такого приведения, причем будем придерживаться того своеобразного изложения, которым на своих лекциях пользовался А. Н. Коркин.

Положим

$$x = q_1 \qquad (*)$$

где x есть вспомогательная переменная (можно полагать в общем случае и

$$x = aq_1 + bq_2 + cq_3 + \ldots + fq_k$$

причем a, b, c, $\ldots f$ — любые *заданные* постоянные).

Продифференцируем равенство (*) дважды по времени t и в полученном равенстве

$$x'' = q_1''$$

заменим q_1'' его величиною

$$q_1'' = a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + \ldots + a_{1k} q_k$$

из предложенной системы (11), так что будет

$$x'' = a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + \ldots + a_{1k} q_k$$

Дифференцируем это равенство дважды по времени и в полученном равенстве

$$x^{IV} = a_{11} q_1'' + a_{12} q_2'' + \ldots + a_{11k} q_k''$$

заменяем

$$q_1'', \; q_2'', \; \ldots \; q_k''$$

их величинами из предложенной системы, получим уравнение вида

$$x^{IV} = b_{21} q_1 + b_{22} q_2 + \ldots + b_{2k} q_k$$

и продолжаем поступать таким образом при составлении производных

$$x^{VI}, \; x^{VIII}, \; \ldots \; x^{(2k)}$$

Таким образом, вместо предложенной системы получим ей эквивалентную:

$$\begin{aligned}
x &= q_1 \\
x'' &= a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + a_{13} q_3 + \ldots + a_{1k} q_k \\
x^{IV} &= b_{21} q_1 + b_{22} q_2 + b_{23} q_3 + \ldots + b_{2k} q_k \\
x^{VI} &= c_{31} q_1 + c_{32} q_2 + c_{33} q_3 + \ldots + c_{3k} q_k \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^{2k} &= f_{k1} q_1 + f_{k2} q_2 + f_{k3} q_3 + \ldots + f_{kk} q_k
\end{aligned} \tag{13}$$

исключая переменные q, мы получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $2k$:

$$\begin{vmatrix}
-x, & 1, & 0, & 0, & \ldots 0 \\
-x'', & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots a_{1k} \\
-x^{IV}, & b_{21}, & b_{22}, & b_{23}, & \ldots b_{2k} \\
-x^{VI}, & c_{31}, & c_{32}, & c_{33}, & \ldots c_{3k} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
-x^{(2k)}, & f_{k1}, & f_{k2}, & f_{k3}, & \ldots f_{kk}
\end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

Ищем его решение вида

$$x = C_1 e^{\lambda t}$$

причем C_1 — произвольная постоянная, получаем для определения λ уравнение

$$\begin{vmatrix}
-1, & 1, & 0, & 0, & \ldots 0 \\
-\lambda^2, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots a_{1k} \\
-\lambda^4, & b_{21}, & b_{22}, & b_{23}, & \ldots b_{2k} \\
-\lambda^6, & c_{31}, & c_{32}, & c_{33}, & \ldots c_{3k} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
-\lambda^{2k}, & f_{k1}, & f_{k2}, & f_{k3}, & \ldots f_{kk}
\end{vmatrix} = 0 \tag{15}$$

придав затем первый столбец ко второму, приводим это уравнение к виду

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix}
(a_{11} - \lambda^2), & a_{12}, & a_{13}, & \ldots a_{1k} \\
(b_{21} - \lambda^4), & b_{22}, & b_{23}, & \ldots b_{2k} \\
(c_{31} - \lambda^6), & c_{32}, & c_{33}, & \ldots c_{3k} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(f_{k1} - \lambda^{2k}), & f_{k2}, & f_{k3}, & \ldots f_{kk}
\end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

Это и есть „вековое“ или характеристическое уравнение для нашей системы (11), написанное в том виде, в котором оно получится, если применить общую методу интегрирования, излагаемую во всех курсах анализа, и довести ее до конца.

Пусть будет

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1k} \\ b_{21}, b_{22}, \ldots b_{2k} \\ c_{31}, c_{32}, \ldots c_{3k} \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_{k1}, f_{k2}, \ldots f_{kk} \end{vmatrix} \tag{17}$$

обозначим через

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots \Delta_k \tag{18}$$

миноры определителя Δ_0, относящиеся к первому столбцу, так что

$$\Delta_0 = a_{11}\Delta_1 + b_{21}\Delta_2 + c_{31}\Delta_3 + \ldots + f_{k1}\Delta_k$$

тогда уравнение (16) напишется, положив $\lambda^2 = \alpha$, так:

$$\Delta_k \alpha^k + \Delta_{k-1}\alpha^{k-1} + \ldots + \Delta_1 \alpha - \Delta_0 = 0$$

или, разделяя на Δ_k и полагая

$$\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k} = B_1; \quad \frac{\Delta_{k-2}}{\Delta_k} = B_2; \ldots \frac{\Delta_1}{\Delta_k} = B_{k-1}; - \frac{\Delta_0}{\Delta_k} = B_k \tag{19}$$

придаем ему вид

$$\alpha^k + B_1\alpha^{k-1} + B_2\alpha^{k-2} + \ldots + B_{k-1}\alpha + B_k = 0$$

после чего и решаем его по обычным способам.

Как видно, миноры (18) *все численные* порядка (k—1), их вычисление совершается весьма просто, эта простота получилась потому, что неизвестная α и ее степени находятся в *одном первом* столбце, а не в диагональных элементах определителя, при каковом их расположении развитие такого определителя, как (19), при сколь-нибудь значительном k практически непосредственно не выполнимо и требует тех особенных приемов, которые и были даны Лапласом, Якоби и Леверрье.

Покажем теперь, каким образом по заданным коэффициентам

$$a_{11}, \ldots a_{kk}$$

последовательно составляются коэффициенты

$$b_{21}, b_{22}, \ldots b_{2k}$$
$$c_{31}, c_{32}, \ldots c_{3k}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$f_{k1}, f_{k2}, \ldots f_{kk}$$

Стоит только выполнить всякий раз указанную выше замену, и мы увидим, что будет

$$\begin{aligned} b_{21} &= a_{11}\,a_{11} + a_{12}\,a_{21} + \ldots + a_{1k}\,a_{k1} \\ b_{22} &= a_{11}\,a_{12} + a_{12}\,a_{22} + \ldots + a_{1k}\,a_{k2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{2k} &= a_{11}\,a_{1k} + a_{12}\,a_{2k} + \ldots + a_{1k}\,a_{kk} \end{aligned} \tag{20}$$

Затем,

$$\begin{aligned} c_{31} &= b_{21}\,a_{11} + b_{22}\,a_{21} + b_{23}\,a_{31} + \ldots + b_{2k}\,a_{k1} \\ c_{32} &= b_{21}\,a_{12} + b_{22}\,a_{22} + b_{23}\,a_{32} + \ldots + b_{2k}\,a_{k2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{3k} &= b_{21}\,a_{1k} + b_{22}\,a_{2k} + b_{23}\,a_{3k} + \ldots + b_{2k}\,a_{kk} \end{aligned} \tag{21}$$

коэффициенты d_{4i} получатся, заменив в схеме для вычисления c_{3i} величины b_{2i} через c_{3i} и т. д., как то показано на численном примере ниже.

§ 17. Положим теперь, что нам дана система уравнений, соответствующая колебаниям с гироскопическими членами и сопротивлением, так что уравнения движения будут вида

$$\begin{aligned} q_1'' &= a_{11}\,q_1 + a_{12}\,q_2 + \ldots + a_{1k}\,q_k + h_{11}\,q_1' + h_{12}\,q_2' + \ldots + h_{1k}\,q_k' \\ q_2'' &= a_{21}\,q_1 + a_{22}\,q_2 + \ldots + a_{2k}\,q_k + h_{21}\,q_1' + h_{22}\,q_2' + \ldots + h_{2k}\,q_k' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_k'' &= a_{k1}\,q_1 + a_{k2}\,q_2 + \ldots + a_{kk}\,q_k + h_{k1}\,q_1' + h_{k2}\,q_2' + \ldots + h_{kk}\,q_k' \end{aligned} \tag{22}$$

причем равенств

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{и} \quad h_{ij} = h_{ji}$$

может в общем случае и не быть.

В таком случае, если бы положить

$$q_1 = C_1 e^{\lambda t};\ q_2 = C_2 e^{\lambda t};\ \ldots\ q_k = C_k e^{\lambda t}$$

то для определения λ получилось бы уравнение

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (a_{11} + h_{11}\lambda - \lambda^2), & a_{12} + h_{12}\lambda, \ldots & a_{1k} + h_{1k}\lambda \\ a_{21} + h_{21}\lambda, & (a_{22} + h_{21}\lambda - \lambda^2), \ldots & a_{2k} + h_{2k}\lambda \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{k1} + h_{k1}\lambda, & a_{k2} + h_{k2}\lambda, \ldots & (a_{kk} + h_{kk}\lambda - \lambda^2) \end{vmatrix} = 0$$

развитие которого, даже для случая $k = 4$, потребовало бы весьма длинных и громоздких выкладок.

Для такой системы надо поступать следующим образом:

1) Прежде всего привести введением добавочных неизвестных все уравнения системы к первому порядку, для этого положить

$$q_1' = q_{k+1};\ q_2' = q_{k+2};\ \ldots\ q_k' = q_{2k}$$

тогда предложенная система примет вид

$$\begin{aligned}
q_1' &= 0 + 0 + \ldots + 0 + q_{k+1} + 0 + \ldots + 0\\
q_2' &= 0 + 0 + \ldots + 0 + 0 + q_{k+2} + 0 \ldots + 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
q_k' &= 0 + 0 + \ldots + 0 + 0 + 0 + \ldots + q_{2k}\\
q_{k+1}' &= a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + \ldots + a_{1k} q_k + h_{11} q_{k+1} + h_{12} q_{k+2} + \ldots + h_{1k} q_{2k}\\
q_{k+2}' &= a_{21} q_1 + a_{22} q_2 + \ldots + a_{2k} q_k + h_{21} q_{k+1} + h_{22} q_{k+2} + \ldots + h_{2k} q_{2k}\\
q_{k+3}' &= a_{31} q_1 + a_{32} q_2 + \ldots + a_{3k} q_k + h_{31} q_{k+1} + h_{32} q_{k+2} + \ldots + h_{3k} q_{2k}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
q_{2k}' &= a_{k1} q_1 + a_{k2} q_2 + \ldots + a_{kk} q_k + h_{k1} q_{k+1} + h_{k2} q_{k+2} + \ldots + h_{kk} q_{2k}
\end{aligned} \tag{23}$$

2) Положить

$$x = q_1$$

и последовательно дифференцировать это равенство $2k$ раз, заменяя после всякого дифференцирования производные переменных $q_1, q_2, \ldots q_{2k}$ их выражениями (23), тогда предложенная система заменится следующей ей эквивалентной:

$$\begin{aligned}
x &= q_1\\
x' &= 0 + 0 + \ldots + q_{k+1} + \ldots + 0\\
x'' &= a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + \ldots + a_{1k} q_k + h_{11} q_{k+1} + h_{12} q_{k+2} + \ldots + h_{1k} q_{2k}\\
x''' &= b_1 q_1 + b_2 q_2 + \ldots + b_k q_k + b_{k+1} q_{k+1} + \ldots + b_{2k} q_{2k}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x^{(2k)} &= f_1 q_1 + f_2 q_2 + \ldots + f_k q_k + q_{k+1} q_{k+1} + \ldots + f_{2k} q_{2k}
\end{aligned} \tag{24}$$

при понятном обозначении и понятном последовательном составлении коэффициентов, которые, очевидно, все будут постоянные.

Исключая из этой системы все величины

$$q_1, q_2, \ldots q_{2k}$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\begin{vmatrix} -x, & 1, & 0, & \dots 0, & 0, & 0, & \dots 0 \\ -x', & 0, & 0, & \dots 0, & 1, & 0, & \dots 0 \\ -x'', & a_{11}, & a_{12}, & \dots a_{1k}, & h_{11}, & h_{12}, & \dots h_{1k} \\ -x''', & b_1, & b_2, & \dots b_k, & b_{k+1}, & b_{k+2}, & \dots b_{2k} \\ -x^{IV}, & c_1, & c_2, & \dots c_k, & c_{k+1}, & c_{k+2}, & \dots c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x^{(2k)}, & f_1, & f_2, & \dots f_k, & f_{k+1}, & f_{k+2}, & \dots f_{2k} \end{vmatrix} = 0 \qquad (25)$$

Ищем решение вида $x = e^{\lambda t}$, тогда для определения λ получим уравнение

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -1, & 1, & 0, & \dots 0, & 0, & 0, & \dots 0 \\ -\lambda, & 0, & 0, & \dots 0, & 1, & 0, & \dots 0 \\ -\lambda^2, & a_{11}, & a_{12}, & \dots a_{1k}, & h_{11}, & h_{12}, & \dots h_{1k} \\ -\lambda^3, & b_1, & b_2, & \dots b_k, & b_{k+1}, & b_{k+2}, & \dots b_{2k} \\ -\lambda^4, & c_1, & c_2, & \dots c_k, & c_{k+1}, & c_{k+2}, & \dots c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda^{2k}, & f_1, & f_2, & \dots f_k, & f_{k+1}, & f_{k+2}, & \dots f_{2k} \end{vmatrix} = 0 \qquad (26)$$

Приложив первый столбец ко второму, получаем

$$\begin{vmatrix} -\lambda, & 0, & 0, & \dots 0, & 1, & 0 & \dots 0 \\ (a_{11} - \lambda^2), & a_{12}, & a_{13}, & \dots a_{1k}, & h_{11}, & h_{12} & \dots h_{1k} \\ (b_1 - \lambda^3), & b_2, & b_3, & \dots b_k, & b_{k+1}, & b_{k+2} & \dots b_{2k} \\ (c_1 - \lambda^4), & c_2, & c_3, & \dots c_k, & c_{k+1}, & c_{k+2} & \dots c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_1 - \lambda^{2k}), & f_2, & f_3, & \dots f_k, & f_{k+1}, & f_{k+2} & \dots f_{2k} \end{vmatrix} = 0$$

Это уравнение может быть написано и в другом виде, который получится, если умножить столбец $k+1$ на λ, придать его к первому, и вычеркнуть затем верхнюю строку и столбец $k+1$. Тогда будет

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (a_{11} + h_{11} & \lambda - \lambda^2), & a_{12}, & a_{13}, & \dots a_{1k} & h_{12} & \dots h_{1k} \\ (b_1 + b_{k+1} & \lambda - \lambda^3), & b_2, & b_3, & \dots b_k & b_{k+2} & \dots b_{2k} \\ (c_1 + c_{k+1} & \lambda - \lambda^4), & c_2, & c_3, & \dots c_k & c_{k+2} & \dots c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_1 + f_{k+1} & \lambda - \lambda^{2k}), & f_2, & f_3, & \dots f_k & f_{k+2} & \dots f_{2k} \end{vmatrix} = 0 \qquad (27)$$

Определитель этот будет порядка $(2k-1)$, развитие его по элементам первого столбца затруднений не представляет, и, обозначая соответствующие этим элементам миноры через

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_{2k-1} \qquad (27')$$

приведем „вековое“ уравнение в этом случае сперва к виду

$$(a_{11}+h_{11}\lambda-\lambda^2)\Delta_1+(b_1+b_{k+1}\lambda-\lambda^3)\Delta_2+\ldots+(f_1+f_{k+1}\lambda-\lambda^{2k})\Delta_{2k-1}=0$$

а затем к окончательному виду

$$\lambda^{2k}+B_1\lambda^{2k-1}+B_2\lambda^{2k-2}+\ldots+B_{2k-1}\lambda+B_{2k}=0$$

причем нам потребуется лишь вычислять *численные* определители (27'), каждый из которых будет порядка $(2k-2)$.

§ 18. Чтобы пояснить нашу методу примером, возьмем этот пример из „Recherches astronomiques“ Леверрье (Ann. de l'Observ. de Paris, t. II, p. 128), а именно — систему в наших обозначениях:

$$\begin{aligned}
q_1'' &= -5.509882\,q_1+1.870086\,q_2+0.422908\,q_3+0.008814\,q_4\\
q_2'' &= 0.287865\,q_1-11.811654\,q_2+5.711900\,q_3+0.058717\,q_4\\
q_3'' &= 0.049099\,q_1+4.308033\,q_2-12.970687\,q_3+0.229326\,q_4\\
q_4'' &= 0.006235\,q_1+0.269851\,q_2+1.397369\,q_3-17.596207\,q_4
\end{aligned}$$

Округляя коэффициенты на пять знаков и приискав соответствующие им пятизначные логарифмы, пишем эту систему с логарифмическими коэффициентами, после чего вычисляем по приведенным схемам числа

$$b_{2i},\ c_{3i},\ d_{4i} \qquad (i=1,2,3,4)$$

и по ним коэффициенты

$$B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4$$

„векового“ уравнения, вычисление корней которого, как не представляющее никаких трудностей и не требующее пояснений, опускаем.

Вычисление коэффициентов приведено в табл. 2 со всею подробностью в том именно виде, как оно на самом деле произведено, чтобы дать полный пример и образец подобный работы.

Таблица 2

Численное решение векового уравнения

Схемы вычисления

Заданная система

q_i''	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1''	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
q_2''	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
q_3''	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
q_4''	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

Схемы вычисления b_{2i}

i	$a_{11} =$	$a_{12} =$	$a_{13} =$	$a_{14} =$	b_{2i}
1	$a_{11}a_{11}$	$a_{12}a_{21}$	$a_{13}a_{31}$	$a_{14}a_{41}$	b_{21}
2	$a_{11}a_{12}$	$a_{12}a_{22}$	$a_{13}a_{32}$	$a_{14}a_{42}$	b_{22}
3	$a_{11}a_{13}$	$a_{12}a_{23}$	$a_{13}a_{33}$	$a_{14}a_{43}$	b_{23}
4	$a_{11}a_{14}$	$a_{12}a_{24}$	$a_{13}a_{34}$	$a_{14}a_{44}$	b_{24}

Схемы вычисления c_{3i}

i	$b_{21} =$	$b_{22} =$	$b_{23} =$	$b_{24} =$	c_{3i}
1	$b_{21}a_{11}$	$b_{22}a_{21}$	$b_{23}a_{31}$	$b_{24}a_{41}$	c_{31}
2	$b_{21}a_{12}$	$b_{22}a_{22}$	$b_{23}a_{32}$	$b_{24}a_{42}$	c_{32}
3	$b_{21}a_{13}$	$b_{22}a_{23}$	$b_{23}a_{33}$	$b_{24}a_{43}$	c_{33}
4	$b_{21}a_{14}$	$b_{22}a_{24}$	$b_{23}a_{34}$	$b_{24}a_{44}$	c_{34}

Заданная система (коэфф. логар.)

q_i''	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1''	0.74114_n	0.27186	$\bar{1}.62625$	$\bar{3}.94517$
q_2''	$\bar{1}.45919$	1.07231_n	0.75678	$\bar{2}.76876$
q_3''	$\bar{2}.69107$	0.63428	1.11296_n	$\bar{1}.36045$
q_4''	$\bar{3}.79484$	1.43112	0.14531	1.24542_n

Вычисление b_{2i}

i					b_{2i}	$\log b_{2i}$
1	1.48228 +30.358	$\bar{1}.73105$ 0.53833	$\bar{2}.31732$ 0.020764	$\bar{5}.74001$ 0.00006	30.8985	1.48994
2	1.01300_n —10.304	1.34417_n —22.089	0.26053 1.8219	$\bar{3}.37269$ 0.00238	—30.569	1.48528_n
3	0.36739_n —2.3303	1.10264 10.6817	0.73921_n —5.4854	$\bar{2}.09048$ 0.012316	2.8783	0.45914
4	$\bar{2}.68631$ —0.048563	$\bar{1}.04062$ 0.109805	$\bar{2}.98670$ 0.096984	$\bar{1}.19059_n$ —0.15509	0.003139	$\bar{3}.49679$

Вычисление c_{3i}

i					c_{3i}	log c_{3i}
1	2.23108_n —170.25	0.94447_n —8.7998	$\bar{1}.15021$ 0.1413	$\bar{5}.29163$ 0.0000	—178.91	2.25264_n
2	1.76180 57.783	2.55759 361.07	1.09342 12.400	$\bar{4}.92791$ 0.0008	431.25	2.63473
3	1.11619 13.0675	2.24206_n —174.61	1.57210_n —37.334	$\bar{3}.64210$ 0.004	—198.87	2.29857
4	$\bar{1}.43511$ 0.27234	0.25404_n —1.7949	$\bar{1}.81959$ 0.66007	$\bar{2}.74221_n$ —0.055235	—0.9177	$\bar{1}.96270_n$

Вычисление d_{4i}

i					d_{4i}	log d_{4i}
1	2.99383 985.90	2.09392 124.14	0.98964_n —9.764	$\bar{3}.75754_n$ —0.006	1100.27	3.04150
2	2.52450_n —334.58	3.70704_n —5093.8	2.93285_n —856.74	$\bar{1}.39332_n$ —0.25	—6285.37	3.79833_n
3	1.87889_n —75.664	3.39151 2463.3	3.41153 2579.5	0.10801_n —1.28	4965.86	3.69599
4	0.19781_n —1.5769	1.40349 25.322	1.65902_n —45.606	1.20812 16.148	—5.713	0.75686_n

Определитель Δ (0)

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} 0.74114_n & 0.27186 & 1.62625 & \bar{3}.94517 \\ 1.48994 & 1.48528_n & 0.45914 & \bar{3}.49679 \\ 2.25265_n & 2.63473 & 2.29857_n & \bar{1}.96270_n \\ 3.04158 & 3.79833_n & 3.69599 & 0.75686_n \end{vmatrix}$$

Вычисление миноров Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, относящихся к элементам 1 столбца Δ (0)

1.48528_n	2.63473	3.79833_n	3.79833_n	1.48528_n	2.63473
2.29357_n	3.69599	0.45914	2.29857_n	3.69599	0.45914
0.75686_n	$\bar{3}.49679$	$\bar{1}.96270_n$	$\bar{3}.49679$	1.96270_n	0.75686_n
4.54071_n —34 730	3.82751 6722.2	4.22017 16602.5	3.59369 3923.6	5.14397 139.305	3.85083_n —7093.0

$\Delta_1 = -147.541$

0.27186	2.63473	3.79838_n	3.79833_n	0.27186	2.63473
2.29857_n	3.69599	$\bar{1}.62625$	2.29857_n	3.69599	$\bar{1}.62625$
0.75686_n	$\bar{3}.94517$	$\bar{1}.96270_n$	$\bar{3}.94517$	$\bar{1}.96270_n$	0.75686_n
3.32729	4.27589	3.38733	4.04207	3.93055_n	3.01784_n
2124.7	18.875	2439.7	11017.2	—8522.2	—1041.9

$\Delta_2 = -21.986$

0.27186	1.48528_n	3.79833_n	0.79833_n	0.27186	1.48528_n
0.45914	3.69599	$\bar{1}.62625$	0.45914	3.69599	$\bar{1}.62625$
0.75686_n	$\bar{3}.94517$	$\bar{3}.49679$	$\bar{3}.94517$	$\bar{3}.49679$	0.75686_n
1.48786_n	3.12644_n	0.92137_n	2.20264_n	1.46464	1.86839
—30.751	—1337.95	—8.34	—159.455	29.150	73.857

$\Delta_3 = -1320.59$

0.27186	1.48528_n	2.63473	2.63473	0.27186	1.48528_n
0.45914	2.29857_n	$\bar{1}.62625$	0.45914	2.29857_n	1.62625
$\bar{1}.96270_n$	$\bar{3}.94517$	$\bar{3}.49679$	$\bar{3}.94517$	$\bar{3}.49679$	$\bar{1}.96270_n$
0.69370_n	1.79202	$\bar{1}.75777$	1.03904	0.06722_n	1.07423
—4.9397	53.582	0.5725	10.9405	—1.1674	11.8640

$\Delta_4 = -27.578$

Примечание. Миноры вычислены по этому более длинному приему, чтобы избежать малых разностей больших чисел и происходящей от этого утраты точности.

Вычисление коэффициентов B_i

i	$\log \Delta_i$	$\log B_i$	B_i	$\log \Delta_i \cdot a_{11}$	
0	5.53085_n	4.09029	**12.311**		
1	5.16891_n	3.72835	5350.0	5.91005	812 930
2	4.34215_n	2.90159	797.24	5.83209_n	—679 350
3	3.12077_n	1.68021	**47.886**	5.37341	236 270
4	1.44056_n			4.48206_n	— 30 343
				$-\Delta_0 =$	339 507

Контроль

$\Delta(0) =$

2.79597_n	2.32669	1.68108	$\bar{3}.94517$	$\log a_{ii}$	$-a_{ii}$
-625.13	212.17	47.982		0.74114_n	5.5099
0.69043	2.30355_n	1.93802	$\bar{2}.76876$	1.07231_n	11.8115
4.9026	-201.165	97.279		1.11296_n	12.9705
$\bar{1}.33062$	1.27383	1.75251_n	$\bar{1}.36045$	1.24542_n	17.5965
0.21410	18.786	-56.560			
4.54942_n	2.18570_n	$\bar{2}.89989_n$	1.24542_n	$B_1 =$	**47.8884**
-0.00035434	-0.015336	-0.079413	3.31980_n		

-625.13	212.185	48.061
2.79597_n	2.32671	1.68179
4.9030	-201.150	97.358
0.69046	2.30352_n	1.98837
0.21445	18.801	-56.481
$\bar{1}.33133$	1.27418	1.75190_n

$\log 5\,888\,258 = 6.76999_n$
3.31980_n
4.08979
$B_4 = \Delta(0) =$ **12 297**

2.79597_n	0.69046	1.33133	$\bar{1}.38133$	2.79597_n	0.69046
2.30352_n	1.27418	2.32671	2.30352_n	1.27418_n	2.32671
1.75190_n	1.68179	1.98837	1.68179	1.98837	1.75190_n
6.85139_n	3.64643	3.64641	3.31664_n	6.05852_n	4.76907_n
$-7\,102\,200$	4430.3	4430.1	-2073.2	$-1\,144\,250$	$-58\,759$

— 5 888 258

Контрольное вычисление обнаруживает вполне удовлетворительное при вычислении по пятизначным логарифмам согласие, а именно:

$$B_1 = 47.886 \quad \text{и} \quad 47.8884$$
$$B_4 = 12\,311 \quad \text{и} \quad 12\,297$$

Так как контрольные числа получены по непосредственному вычислению, то им надо отдать предпочтение, таким образом при наших обозначениях „вековое“ уравнение для написанной системы есть

$$\alpha^4 + 47.8884\,\alpha^3 + 797.24\,\alpha^2 + 5350.0\,\alpha + 12\,297 = 0 \qquad (*)$$

По вычислениям Леверрье, произведенным по семизначным, а может быть и десятизначным, логарифмам, это уравнение есть

$$\alpha^4 + 47.888430\,\alpha^3 + 797.2789\,\alpha^2 + 5349.457\,\alpha + 12296.555 = 0$$

Все корни этого уравнения вещественные и отрицательные. Вычисление по логарифмической линейке покажет, что один корень лежит между —5 и —6, второй — между —7 и —8. Вычисление этих двух корней выполняется весьма просто, после чего остальные два найдутся решением квадратного уравнения. Корни нашего уравнения будут отличаться лишь в 5-м знаке от корней, вычисленных Леверрье, которые суть

$$\alpha_1 = -5.29870 \qquad \alpha_3 = -17.15266$$
$$\alpha_2 = -7.57404 \qquad \alpha_4 = -17.86303$$

§ 19. В предыдущем примере все миноры вычислены независимо и отдельно, ибо они третьего порядка, а вычисление такого определителя производится весьма просто, но если бы порядок был не 4, а, скажем, 8, то такое раздельное вычисление потребовало бы много излишней работы, которой можно избежать, поступая следующим образом.

Обозначим двучлены или трехчлены первого столбца через

$$A,\ B,\ C,\ D,\ \ldots\ F$$

и поставим этот столбец на последнее место, так что наш определитель будет вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & \ldots & a_{k-1}, & A \\ b_1, & b_2, & \ldots & b_{k-1}, & B \\ c_1, & c_2, & \ldots & c_{k-1}, & C \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1, & f_2, & \ldots & f_{k-1}, & F \end{vmatrix}$$

разделяем каждую строку соответственно на первый член ее и затем вычитаем первую строку из всех остальных, тогда, отбросив первый столбец и верхнюю строку, приводим наш определитель к виду

$$\Delta = a_1\, b_1 \ldots f_1 \begin{vmatrix} b_2', & b_3', & \ldots & b'_{k-1}, & (b_1^{-1}\ B - a_1^{-1}\ A) \\ c_2', & c_3', & \ldots & c'_{k-1}, & (c_1^{-1}\ C - a_1^{-1}\ A) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_2', & f_3', & \ldots & f'_{k-1}, & (f_1^{-1}\ F - a_1^{-1}\ A) \end{vmatrix}$$

С этим определителем поступаем так же и, по упрощении, получим определитель порядка $(k-2)$ такого вида:

$$\Delta = a_1\, b_1 \ldots f_1\, b_2'\, c_2' \ldots f_2' \begin{vmatrix} c_3'', & c_4'', & \ldots & c''_{k-1}, & (\gamma C + \beta B + \alpha A) \\ a_3'', & a_4'', & \ldots & a''_{k-1}, & (\delta D + \beta B + \alpha A) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_3'', & f_4'', & \ldots & f''_k, & (\eta F + \beta B + \alpha A) \end{vmatrix}$$

и продолжаем таким образом, пока не дойдем до определителя четвертого порядка, миноры которого будут третьего порядка и вычисляются непосредственно, как показано выше, после чего определитель Δ развивается по элементам своего последнего столбца и представляется в виде

$$\Delta = nA + mB + pC + \ldots + rF$$

Очевидно, что n, m, $p \ldots r$ и будут искомые миноры, относящиеся к числам первого столбца первоначально предложенного определителя, а так как достаточно знать лишь числа, им пропорциональные, то нет надобности производить умножение на величину

$$a_1 b_1 \ldots f_1 b_2' c_2' \ldots f_2' \ldots$$

Особенно просто это вычисление производится, пользуясь логарифмической линейкой, что для технических вопросов вполне достаточно, так же просто выполняется оно и по логарифмам, на подробностях чего останавливаться не будем.

§ 20. В предыдущих параграфах мы рассмотрели тот случай, когда все корни характеристического уравнения, соответствующего данной системе, не равны между собой.

Первоначально я имел в виду ограничиться этим общим случаем, как наиболее часто встречающимся в технических вопросах, но акад. Л. И. Мандельштам, ознакомясь с этою статьею в рукописи, любезно обратил мое внимание на то, что случай равных корней представляет такие особенности, что с первого взгляда может показаться, что изложенная метода к этому случаю не применима, поэтому для практиков представляющееся затруднение желательно разъяснить.

Здесь приходится особенно вспомнить слова Ньютона: *„при изучении наук примеры не менее поучительны, нежели правила“*, а также Эйлера, который, излагая какой-либо вопрос, всегда начинал с разбора простейших частных случаев, на которых наглядно выясняется сущность дела. Лагранж как раз в данном случае, следуя своему обычаю рассматривать всякий вопрос в самом общем виде, впал в свою знаменитую ошибку, вовлек в нее Лапласа, и эта ошибка удержалась в науке в течение 70 лет, пока почти одновременно ее не разъяснили К. Вейерштрасс (в 1858 г.) и наш академик О. И. Сомов (в 1859 г.).

Начнем с того примера, который мне сообщил акад. Л. И. Мандельштам:

$$\begin{aligned} q_1'' &= 2q_1 + q_2 + q_3 \\ q_2'' &= q_1 + 2q_2 + q_3 \\ q_3'' &= q_1 + q_2 + 2q_3 \end{aligned} \qquad (28)$$

Характеристическое уравнение для этой системы, написанное в виде

$$\Delta(\lambda^2)=\begin{vmatrix}2-\lambda^2, & 1, & 1\\ 1, & 2-\lambda^2, & 1\\ 1, & 1, & 2-\lambda^2\end{vmatrix}=0 \tag{29}$$

очевидно, имеет корень

$$\lambda_1^2=1$$

а так как при этом значении не только

$$\Delta(1)=\begin{vmatrix}1, & 1, & 1\\ 1, & 1, & 1\\ 1, & 1, & 1\end{vmatrix}=0 \tag{30}$$

но и все миноры первого порядка этого определителя равны нулю, то корень $\lambda^2=1$ есть двойной. Второй корень, как легко проверить, есть $\lambda_2^2=4$, таким образом:

$$\Delta(\lambda^2)=(\lambda^2-1)^2(\lambda^2-4)$$

Обращаясь к системе (28) и применяя методу § 16, получим последовательно

$$\begin{aligned} x &= q_1\\ x'' &= 2q_1+q_2+q_3\\ x^{IV} &= 6q_1+5q_2+5q_3\\ x^{VI} &= 22q_1+21q_2+21q_3 \end{aligned} \tag{31}$$

По исключении, следуя буквально правилу § 16, переменных q_1, q_2, q_3, мы написали бы уравнение

$$\begin{vmatrix}-x, & 1, & 0, & 0\\ -x'', & 2, & 1, & 1\\ -x^{IV}, & 6, & 5, & 5\\ -x^{VI}, & 22, & 21, & 21\end{vmatrix}=0 \tag{32}$$

соответствующее ему характеристическое

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}-1, & 1, & 0, & 0\\ -\lambda^2, & 2, & 1, & 1\\ -\lambda^4, & 6, & 5, & 5\\ -\lambda^6, & 22, & 21, & 21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda^2, & 1, & 1\\ 6-\lambda^4, & 5, & 5\\ 22-\lambda^6, & 21, & 21\end{vmatrix}=0 \tag{33}$$

Развивая этот определитель по элементам первого столбца, получим

$$(2-\lambda^2)\begin{vmatrix}5, & 5\\ 21, & 21\end{vmatrix}-(6-\lambda^4)\begin{vmatrix}1, & 1\\ 21, & 21\end{vmatrix}+(22-\lambda^6)\begin{vmatrix}1, & 1\\ 5, & 1\end{vmatrix}=0 \qquad (34)$$

Очевидно, что все написанные миноры равны нулю, и вместо уравнения мы получим тожество

$$0=0$$

Очевидно также, что если бы мы стали развивать уравнение (32), то получили бы то же самое тожество.

В чем же дело и в чем причина этого кажущегося противоречия?

Дело в том, что когда мы составляем систему (31), чтобы затем исключить переменные q_1, q_2, q_3, в этом частном случае нет надобности составлять *четвертое* уравнение, а достаточно только *первых трех* уравнений, ибо переменные q_2 и q_3 входят лишь в виде суммы q_2+q_3 и исключаются *обе сразу*, а не каждая порознь; в самом деле, положив на время в уравнении (31):

$$q_2+q_3=\xi$$

мы напишем систему (31) так:

$$\begin{aligned} x &= q_1\\ x'' &= 2q_1+\xi \\ x^{IV} &= 6q_2+5\xi \end{aligned} \qquad (35)$$

и результат исключения будет

$$\begin{vmatrix}-x, & 1, & 0\\ -x'', & 2, & 1\\ -x^{IV}, & 6, & 5\end{vmatrix}=0$$

или в развитом виде

$$x^{IV}-5x''+4x=0 \qquad (36)$$

и характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}-1, & 1, & 0\\ -\lambda^2, & 2, & 1\\ -\lambda^4, & 6, & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda^2-2, & 1\\ \lambda^4-6, & 5\end{vmatrix}=\lambda^4-5\lambda^2+4=0 \qquad (37)$$

Откуда корни

$$\lambda_1^2=1;\quad \lambda_2^2=4$$

соответственно чему

$$q_1=A_1e^t+B_1e^{-t}+C_1e^{2t}+D_1e^{-2t} \tag{38}$$

причем A_1, B_1, C_1 и D_1 — произвольные постоянные.

Совершенно так же, если бы положив

$$y=q_2$$

мы исключили бы затем переменные q_1 и q_3, то получили бы уравнение

$$y^{IV}-5y''+5=0$$

и из него имели бы общее решение

$$q_2=A_2e^t+B_2e^{-t}+C_2e^{2t}+D_2e^{-2t} \tag{39}$$

а если бы, положив

$$q_3=z$$

исключили q_1 и q_2, то имели бы

$$q_3=A_3e^t+B_3e^{-t}+C_2e^{2t}+D_3e^{-2t} \tag{40}$$

Но постоянные произвольные A_1, B_1, ... D_3 не суть независимые между собою, а связаны теми соотношениями, которые следуют из уравнений системы.

Так, возьмем частное решение

$$q_1=A_1e^t;\quad q_2=A_2e^t;\quad q_3=A_3e^t$$

подставляя, получим

$$\begin{aligned} A_1&=2A_1+A_2+A_3\\ A_2&=A_1+2A_2+A_3\\ A_3&=A_1+A_2+2A_3 \end{aligned} \tag{41}$$

очевидно, эти три уравнения заменяются одним

$$A_1+A_2+A_3=0$$

Откуда

$$A_3=-(A_1+A_2) \tag{42}$$

Совершенно так же, рассматривая частное решение

$$q_1 = B_1 e^{-t}; \quad q_2 = B_2 e^{-t}; \quad q_3 = B_3 e^{-t}$$

соответствующее второй паре равных корней, получим

$$B_3 = -(B_1 + B_2) \tag{43}$$

Наконец, для частного решения

$$q_1 = C_1 e^{2t}; \quad q_2 = C_2 e^{2t}; \quad q_3 = C_3 e^{2t}$$

получим

$$\begin{aligned} 4C_1 &= 2C_1 + C_2 + C_3 \\ 4C_2 &= C_1 + 2C_2 + C_3 \\ 4C_3 &= C_1 + C_2 + 2C_3 \end{aligned} \tag{44}$$

или иначе

$$\begin{aligned} -2C_1 + C_2 + C_3 &= 0 \\ C_1 - 2C_2 + C_3 &= 0 \\ C_1 + C_2 - 2C_3 &= 0 \end{aligned} \tag{45}$$

Очевидно, что сумма первых частей этих уравнений тождественно равна нулю, значит, одно из этих уравнений (скажем третье) есть следствие первых двух, и, отбросив его, мы получим

$$\begin{aligned} -2C_1 + C_2 + C_3 &= 0 \\ C_1 - 2C_2 + C_3 &= 0 \end{aligned} \tag{46}$$

принимая C_1 произвольным, имеем

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 \\ C_3 &= C_1 \end{aligned} \tag{47}$$

Совершенно так же будет

$$\begin{aligned} D_2 &= D_1 \\ D_3 &= D_1 \end{aligned} \tag{48}$$

Таким образом, общий интеграл системы будет

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 e^t + B_1 e^{-t} + C_1 e^{2t} + D_1 e^{-2t} \\ q_2 &= A_2 e^t + B_2 e^{-t} + C_1 e^{2t} + D_1 e^{-2t} \\ q_3 &= -(A_1 + A_2) e^t - (B_1 + B_2) e^{-t} + C_1 e^{2t} + D_1 e^{-2t} \end{aligned} \tag{49}$$

причем A_1, B_1, A_2, B_2, C_1, D_1 — *произвольные* постоянные.

Возьмем еще пример:

$$\begin{aligned} q''_1 &= 5q_1 + 30q_2 - 48q_3 \\ q''_2 &= 3q_1 + 14q_2 - 24q_3 \\ q''_3 &= 3q_1 + 15q_2 - 25q_3 \end{aligned} \tag{50}$$

Отсюда следует

$$q_1^{IV} = -29q_1 - 150q_3 + 240q_3$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} x &= q_1 \\ x'' &= 5q_1 + 30q_2 - 48q_3 \\ x^{IV} &= -29q_1 - 5(30q_2 - 48q_3) \end{aligned}$$

Ясно, что переменные q_2 и q_3 исключатся одновременно, и мы получим

$$\begin{vmatrix} -x, & 1, & 0 \\ -x'', & 5, & 1 \\ -x^{IV}, & -29, & -5 \end{vmatrix} = 0 \tag{51}$$

соответствующее характеристическое уравнение будет

$$\begin{vmatrix} -1, & 1, & 0 \\ -\lambda^2, & 5, & 1 \\ -\lambda^4, & -29, & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda^2, & 1 \\ -29-\lambda^4, & -5 \end{vmatrix} = \lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 = (\lambda^2+1)(\lambda^2+4) = 0$$

Взяв определитель

$$\Delta(\lambda^2) = \begin{vmatrix} 5-\lambda^2, & 30, & -48 \\ 3, & 14-\lambda^2, & -24 \\ 3, & 15, & -25-\lambda^2 \end{vmatrix} \tag{52}$$

положив в нем $\lambda^2 = -1$, имеем

$$\Delta(-1) = \begin{vmatrix} 6, & 30, & -48 \\ 3, & 15, & -24 \\ 3, & 15, & -24 \end{vmatrix} = -6 \cdot 15 \cdot 24 \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

и так как все три строки одинаковы, то и все миноры равны нулю, т. е. $\lambda^2 = -1$ есть *двойной* корень уравнения $\Delta(\lambda^2) = 0$; зная это, доканчиваем интегрирование как обыкновенно.

Возьмем в заключение систему

$$\begin{aligned} q''_1 &= 12q_1 + 27q_2 + 135q_3 - 231q_4 \\ q''_2 &= 10q_1 + 15q_2 + 90q_3 - 154q_4 \\ q''_3 &= 5q_1 + 9q_2 + 42q_3 - 77q_4 \\ q''_4 &= 5q_1 + 9q_2 + 45q_3 - 80q_4 \end{aligned} \tag{53}$$

и, положив

$$x = q_1$$

составляем по схеме § 16 коэффициенты b_{2i}, получаем табл. 3:

Таблица 3

i	$a_{11}=12$	$a_{12}=27$	$a_{13}=135$	$a_{14}=-231$	b_{2i}
1	144	270	675	— 1155	— 66
2	324	405	1215	— 2079	— 135
3	1620	2430	5670	—10 395	— 675
4	—2772	—4158	—10 395	18 480	1155

Значит, будет

$$\begin{aligned} x &= q_1 \\ x'' &= 12q_1 + 27q_2 + 135q_3 - 231q_4 \\ x^{IV} &= -66q_1 - 135q_2 - 675q_3 + 1155q_4 \end{aligned}$$

Очевидно, что, положив

$$27q_1 + 135q_2 - 231q_4 = \xi$$

напишем эту систему так:

$$\begin{aligned} x &= q_1 \\ x'' &= 12q_1 + \xi \\ x^{IV} &= -66q_1 - 5\xi \end{aligned}$$

Откуда следует

$$\begin{vmatrix} -x, & 1, & 0 \\ -x'', & 12, & 1 \\ -x^{IV}, & -66, & -5 \end{vmatrix} = 0 \tag{54}$$

Значит, характеристическое уравнение будет

$$\Delta(\lambda^2)=\begin{vmatrix}-1, & 1, & 0\\ -\lambda^2, & 12, & 1\\ -\lambda_4, & -66, & -5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}12-\lambda^2, & 1\\ -66-\lambda^4, & -5\end{vmatrix}=\lambda^4+5\lambda^2+6=0$$

т. е.

$$(\lambda^2+2)(\lambda^2+3)=0$$

Обращаясь к основному определителю для нашей системы, находим, что при $\lambda^2=-3$ все миноры равны нулю, так что этот корень тройной, корень же $\lambda^2=-2$ есть простой, после чего интегрирование заканчивается как обыкновенно.

Эти примеры с ясностью показывают, что если по вычислению по изложенным правилам окажется, что уравнение

$$\Delta(\lambda^2)=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda^2, & a_{12}, & a_{13}, & \dots & a_{1k}\\ b_{21}-\lambda^4, & b_{22}, & b_{23}, & \dots & b_{2k}\\ c_{31}-\lambda^6, & c_{32}, & c_{33}, & \dots & c_{3k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ (f_{k1}-\lambda^{2k}), & f_{k2}, & f_{k3}, & \dots & f_{kk}\end{vmatrix}=0 \qquad (55)$$

обращается в тождество

$$0=0$$

т. е. все миноры, соответствующие первому столбцу, равны нулю, то это будет указывать, что исключение неизвестных

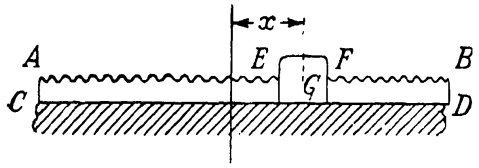
$$q_1, q_2, \dots q_k \qquad (56)$$

может быть выполнено не из полного числа $(k+1)$ уравнений (13) стр. 77, а из меньшего их числа, тогда вычеркиваем в этой системе уравнения, последовательно начиная с нижнего, и определяем то наименьшее их число, при котором все переменные (56) исключаются; пишем соответствующее обыкновенное уравнение с неизвестной x и для него характеристическое, — степень его будет ниже $2k$, находим его корни и, обратившись к основному определителю (55), находим кратность корней, после чего и заканчиваем интегрирование, как показано выше.

§ 21. Колебания при постоянном трении. Во многих случаях в число сил, действующих на элементы системы, входит и сила трения, которая, находясь лишь в зависимости от величины нормального давления, а не от скорости движения, сохраняет постоянную величину. Но необходи-

иметь в виду, что направление силы трения изменяется одновременно с изменением скорости, и эта сила всегда направлена в сторону, противоположную движению. Это обстоятельство заставляет, при рассмотрении колебательного движения с трением, поступать подобно тому, как в следующем примере.

Пусть тело, масса коего m, скользит по горизонтальной плоскости CD и находится под действием пружин AE и FB, концы коих A и B укреплены неподвижно (фиг. 7). Положение равновесия тела есть то, когда центр тяжести G тела находится посредине между A и B. Пусть мера жесткости пружин есть k, коэффициент трения f, требуется найти движение тела, предполагая, что в начальный момент точка G находилась в расстоянии $x_0 = a$ справа от среднего положения и скорости телу сообщено не было.



Фиг. 7.

Пусть в рассматриваемый момент центр тяжести тела находится в расстоянии x от середины и движется в сторону *отрицательных* x, тогда на него действуют следующие силы: 1) натяжение пружины $Q = kx$, направленное в сторону отрицательных x; 2) трение $F = fmg$, направленное обратно скорости движения, т. е. для первого размаха в сторону положительных x. Таким образом, уравнение движения будет

$$mx'' = -kx + fmg \tag{1}$$

или, полагая

$$\frac{k}{m} = n^2$$

$$x'' + n^2 x = fg$$

откуда

$$x = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt + \frac{fg}{n^2}$$

В начальный момент $t = 0$ должно быть $x = a$ и $x' = 0$, что дает

$$a = C_1 + \frac{fg}{n^2}; \quad 0 = nC_2$$

и, следовательно, будет

$$x = \left(a - \frac{fg}{n^2}\right) \cos nt + \frac{fg}{n^2} \tag{2}$$

Уравнение (1), а значит, и его интеграл (2), имеет место, лишь пока проекция на ось x скорости движения отрицательная, а так как

$$x' = -n\left(a - \frac{fg}{n^2}\right) \sin nt$$

то предполагается, что $a > \frac{fg}{n^2}$ (если бы это условие не было выполнено, то начальное натяжение пружины было бы меньше силы трения, и тело не сдвинулось бы с места, а осталось бы в покое), и будет $x' < 0$, пока $\sin nt > 0$, т. е. пока $0 < nt < \pi$.

Когда nt сделается равным π, то скорость x' обратится в нуль, и тело достигнет своего крайнего размаха влево, именно будет

$$x_1 = -a + \frac{fg}{n^2} + \frac{fg}{n^2} = -\left(a - \frac{2fg}{n^2}\right) = -a_1$$

Если величина a_1 удовлетворяет неравенству

$$a_1 > \frac{fg}{n^2}$$

т. е.

$$a > 3\frac{fg}{n^2}$$

то натяжение пружины будет больше силы трения, и тело пойдет в сторону положительных x. Уравнение его движения будет

$$mx'' = -kx - fgm \tag{3}$$

или

$$x'' + n^2 x = -fg$$

при начальном условии: при $t = t_1 = \frac{\pi}{n}$ должно быть $x = -a_1$, $x' = 0$.

Общий интеграл

$$x = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt - \frac{fg}{n^2}$$

Начальные условия дают

$$-a_1 = -C_1 - \frac{fg}{n^2}$$

$$0 = C_2$$

значит,

$$x = \left(a_1 - \frac{fg}{n^2}\right)\cos nt - \frac{fg}{n^2} \tag{4}$$

Уравнения (3) и (4) имеют место с момента $t = t_1 = \frac{\pi}{n}$ все время, пока скорость положительная, т. е. до момента $t = \frac{2\pi}{n}$, когда

$$x = x_2 = a_1 - \frac{2fg}{n^2} = a - \frac{4fg}{n^2} = a_2$$

Если окажется, что $a_2 > \frac{fg}{n^2}$, то натяжение пружины превысит трение, и тело не останется в покое, а начнет размах влево и дойдет до амплитуды $x_3 = -a_3 = -\left(a_2 - \frac{2fg}{n^2}\right) = -\left(a - \frac{6fg}{n^2}\right)$ и т. д., и тело остановится после i-го размаха, когда по абсолютной величине будет

$$\left| a - 2i\frac{fg}{n^2} \right| < \frac{fg}{n^2}$$

Представим это движение графически. Сделаем для сокращения $\frac{fg}{n^2} = b$, тогда для первого размаха

$$x = (a - b)\cos nt + b$$

или

$$x - b = (a - b)\cos nt,$$

т. е. величина $(x - b)$ представляется простою синусоидой, симметрично расположенной относительно прямой $x = b$.

Точно так же для второго размаха

$$x = (a - 3b)\cos nt - b$$

или иначе

$$x + b = (a - 3b)\cos nt,$$

видно, что $(x + b)$ представляется простою синусоидой, симметричной относительно прямой $x = -b$, и т. д.

Проведем параллельно оси Ot прямые $x = b$ и $x = -b$, отложим $OA = a$ и строим, приняв длину $OK = \frac{\pi}{n}$ синусоиду ACB так, что $AH = BC_1 = a - b$ (фиг. 8).

Затем, начиная с B, строим синусоиду BDE с тем же периодом, но амплитудою $BH_1 = a - 3b$.

Затем, начав от точки E, строим синусоиду EFG с амплитудою $EH_2 = a - 5b$, и так как точка G упадет между прямыми $x = b$ и $x = -b$, то, после третьего размаха при $x = NG$, тело остановится, и движение прекратится.

Подобные колебания совершает, например, картушка компаса при трении его топки о шпильку. Величина b представляет „застой“ компаса. Как видно, эта величина обратно пропорциональна величине k, которая для компаса пропорциональна направляющей силе. Вот почему при определении застоя и надо уменьшать направляющую силу в 3—5 раз, чтобы получить во столько же раз увеличенную величину застоя для более точного его определения.

Обратим еще внимание на связь между периодом колебания тела, его массою и жесткостью пружины.

Период

$$\tau = \frac{2\pi}{n} \quad \text{и} \quad n^2 = \frac{k}{m}$$

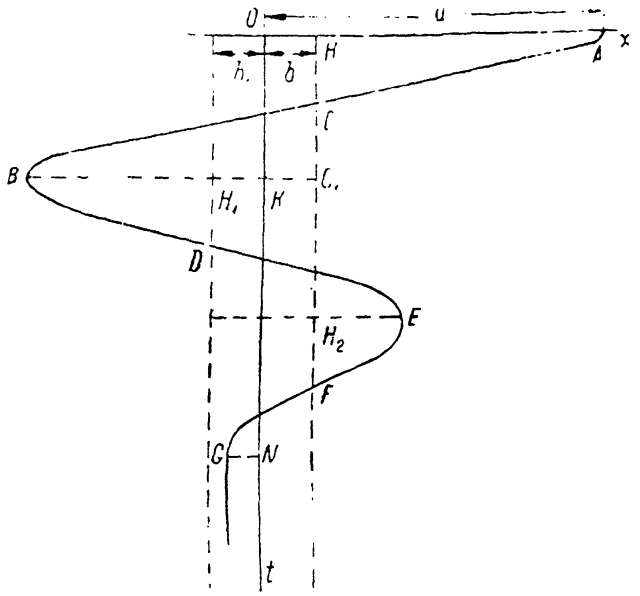
значит

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Пусть вес тела есть $p = mg$, тогда под действием нагрузки, равной весу тела, удлинение пружины составит $\lambda = \frac{p}{k}$, и, значит, предыдущая формула может быть написана так:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \qquad (5)$$

т. е. период колебания тела находящегося под действием пружины, равен периоду такого простого маятника, коего длина равна удлинению пружины под действием нагрузки, равной весу тела.



Фиг. 8.

Это свойство дает возможность весьма просто подсчитать вперед период колебания тела, что бывает нужно при построении разного рода приборов, служащих для записи различных явлений.

§ 22. Общие замечания об устройстве регистрирующих приборов. Свойствами колебательного движения тела, подвешенного на пружине или вообще так, что оно имеет определенное положение устойчивого равновесия и при выводе из него подвергается действию „восстановляющих“ сил, пользуются для устройства разного рода самопишущих приборов.

Здесь приходится встречаться с тремя главными типами приборов, сообразно их назначению:

1) приборами, которые не должны отзываться на действие возмущающих сил, как, например, кренометры, сейсмографы (приборы для записи землетрясений), палографы (приборы для записи вибраций судов, мостов и т. п.), мареграфы (приборы для записи приливов) и т. п;

2) приборами, которые предназначены именно для записи „возмущающей“ силы, как-то: индикаторы, гальванометры, крешеры и т. п.;

3) приборами, предназначенными для записи импульса силы, как, например, баллистический гальванометр.

Из изложенного в предыдущих параграфах видны те общие соображения, коими при устройстве таких приборов надо руководствоваться, а именно:

1) Надо прежде всего, хотя бы приближенно, дать себе отчет о характере действия возмущающих сил, периодические они или нет, если периодические, — каков период, если не периодические, — то как нарастают.

2) Если прибор не должен отзываться на действии возмущающей силы, то период его свободных колебаний, а если прибор имеет несколько степеней свободы, то наименьший из периодов его основных колебаний, должен быть *велик* по сравнению с периодом возмущающей силы.

3) Если прибор предназначен для записи силы, и, значит, желательно, чтобы он как бы следил за нею статически, то период свободных колебаний прибора должен быть *мал* по сравнению с периодом силы или с продолжительностью ее нарастания.

4) Если прибор должен показывать импульс силы, то его период должен быть велик по сравнению с продолжительностью действия силы.

Значение слов „велик“ и „мал“ видно из изложенного в предыдущих параграфах, где даны выражения возмущений, производимых силою, приложенной к данной системе. Для всякой величины отношения периодов эти возмущения можно учесть и, сообразуясь с требуемою от показаний прибора степенью точности, избрать такую величину этого отношения, осуществление которого на практике не вызывает слишком больших затруднений.

Пример 1. *Прибор для записи вибраций корабля.* Поясним эти общие соображения примером: положим, что надо записать вибрацию корабля, которая появляется, когда машина этого корабля делает 120 оборотов в минуту.

Здесь, как видно, надо устроить такой прибор, в котором подвешенная часть не колебалась бы при вибрации корабля, а так как период этой вибрации есть $\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$ сек., то подвес должен быть таков, чтобы собственный период был велик по сравнению с $\frac{1}{2}$ сек. Пусть при записи мы довольствуемся точностью в 10%, значит, возмущение не должно превосходить $\frac{1}{10}$ статического, а это отношение выражается формулою (2) § 5, и при $a=0$ будет

$$m=\left|\frac{1}{1-q^2}\right|$$

где

$$q=\frac{\tau}{T}=\frac{\text{период свободных колебаний}}{\text{период возмущающей силы}}$$

Значит, должно быть

$$\left|\frac{1}{1-q^2}\right| \leqslant \frac{1}{10}$$

$$q^2 - 1 \geqslant 10$$

или

$$q \geqslant \sqrt{11} = 3.3$$

Следовательно, $\tau = 3.3T = 1.7$ сек.

Таким образом, период свободных колебаний подвешенного на пружине тела должен быть не менее 1.7 сек.

Чтобы выбрать пружину, имеем соотношение

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$$

откуда

$$\lambda = \frac{\tau^2}{4\pi^2}\, g = 0.7 \text{ м}$$

т. е. удлинение пружины под действием груза, на ней висящего, должно составлять не менее 0.7 м.

Таким образом, получаем следующую простейшую схему прибора: в точке A палубы закреплен конец пружины, на другом конце которой висит груз P. Пружина подобрана так, что ее удлинение λ под действием груза P составляет не менее 0.7 м. Штифт, укрепленный на грузе P, чертит его колебания на барабане B (фиг. 9).

Барабан B, точка подвеса A и все прочие части корабля совершают периодические вертикальные колебания, период коих $\frac{1}{2}$ сек., грузу же P эти колебания точки его подвеса A передаются пружиною уменьшенными в $\frac{1}{q^2-1}$, т. е. приблизительно в 10 раз, и, значит, груз P можно считать неподвижным в пространстве.

Чтобы получить более компактный переносный прибор, Шлик поступил таким образом: он закрепил пружину не непосредственно за груз P, а за точку B рычага, вращающегося около точки O (фиг. 10), и этим увеличил период колебаний груза при той же жесткости пружины.

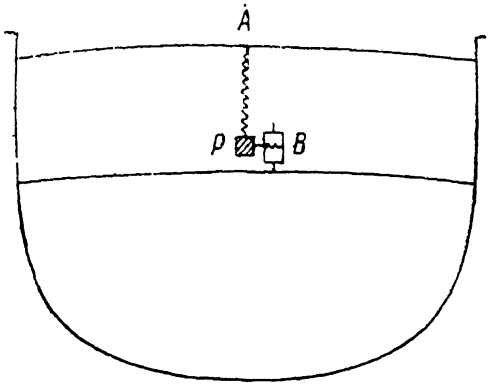
В самом деле, пусть $OB = a$, $OP = l$, положим, что рычаг наклонен на малый угол φ от прямого своего положения равновесия, тогда по-

явится добавочная сила $F=ka\varphi$, приложенная в точке B и направленная вверх, и уравнение движения груза, пренебрегая массою рычага, будет

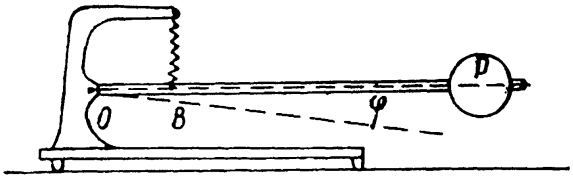
$$I\varphi''=-ka^2\varphi$$

где I есть момент инерции груза относительно точки O. Приближенно можно принять $I=\frac{P}{g}b^2$, и наше уравнение движения есть

$$\frac{P}{g}b^2\varphi''+ka^2\varphi=0$$



Фиг. 9.



Фиг. 10.

или

$$\varphi''+n^2\varphi=0$$

причем

$$n^2=\frac{a^2}{b^2}\frac{kg}{P}\quad\text{и}\quad\tau=\frac{2\pi}{n}=2\pi\frac{b}{a}\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$$

где $\lambda=\frac{P}{k}$, т. е. период увеличивается в отношении $\frac{b}{a}$ сравнительно с тем, что было бы при непосредственной подвеске груза на пружине.

Пример 2. *Индикатор Уатта.* Как другой пример, возьмем индикатор паровой машины. В идеально простом виде он сводится к цилиндру C, в котором ходит притертый поршень P, опирающийся на пружину, этот поршень воспринимает давление пара и сжимает пружину; смещения поршня относительно цилиндра автоматически записываются, величина их пропорциональна сжатию пружины и должна служить мерою действовавшего *в каждый момент* на поршень давления (фиг. 11).

Пусть площадь поршня есть s, действующее на него в момент t давление $p=f(t)$, значит, усилие, действующее на поршень, есть

$$F=sp=sf(t)$$

Смещение поршня пусть есть x, жесткость пружины k, тогда со стороны пружины действует усилие

$$T = -kx$$

обозначая через m массу поршня и *пренебрегая массою прочих движущихся частей прибора и массою самой пружины*, получим уравнение движения

$$mx'' = -kx + sf(t)$$

или

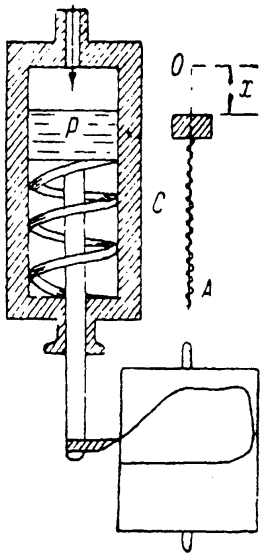
$$x'' + n^2 x = \frac{s}{m} f(t)$$

где

$$n^2 = \frac{k}{m}$$

а так как $\frac{s}{m} = \frac{sn^2}{k}$, то наше уравнение будет

$$x'' + n^2 x = \frac{sn^2}{k} f(t)$$



Фиг. 11.

Статическое сжатие было бы $x_0 = \frac{s}{k} f(t) = a f(t)$, и, значит, наше уравнение можно писать так:

$$x'' + n^2 x = n^2 a f(t) \qquad (1)$$

На основании сказанного в § 8, формула (5), общий интеграл этого уравнения есть

$$x = af(t) - a \int_0^t f'(\xi) \cos n(t - \xi)\, d\xi \qquad (2)$$

и желательно, чтобы x было как можно ближе к $af(t)$, т. е. чтобы второй член формулы (2) представляющий погрешность прибора, был возможно меньше.

Из сказанного в § 8 видно, что для этого надо, чтобы период свободных колебаний поршня на пружине его был мал по сравнению с продолжительностью нарастания силы.

Так, например, положим, что машина делает 240 оборотов в минуту и что давление нарастает на протяжении $\frac{1}{20}$ доли хода поршня ее.

Если длина хода поршня машины есть L, то смещению его на $\frac{1}{20}\ L$ соответствует угол поворота мотыля α, определяемый приближенным равенством

$$\frac{L}{2}(1-\cos\alpha)=\frac{1}{20}L$$

или

$$\sin^2\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{10}$$

откуда

$$\alpha=36^\circ$$

и, значит, продолжительность нарастания давления составляет

$$\frac{60}{480}\cdot\frac{36}{180}=\frac{1}{40}\text{ сек.}$$

и, следовательно, период свободных колебаний поршня индикатора на пружине его должен быть *мал* по сравнению с $\frac{1}{40}$ сек.

Положим, что желательно, чтобы погрешность не превышала 2%, тогда τ определится из неравенства

$$\frac{1}{2}\tau f'(\xi)\leqslant\frac{1}{50}f(\xi)$$

[см. формулу (9) § 8]. За величину $f'(\xi)$ можно принять среднюю быстроту нарастания давления, т. е.

$$\frac{f(\xi)}{\frac{1}{40}}=40f(\xi)$$

таким образом будет

$$\frac{1}{2}\tau 40f(\xi)\leqslant\frac{1}{50}f(\xi)$$

откуда

$$\tau\leqslant\frac{1}{1000}\text{ сек.}$$

Сообразно этому периоду можно найти жесткость пружины, задавшись весом поршня.

Пусть, например, вес поршня $P=50$ г $=0.05$ кг; из равенства

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$$

имеем

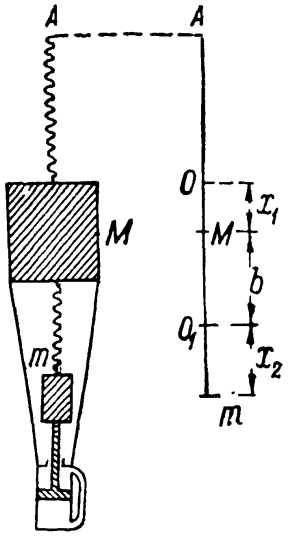
$$\lambda=\frac{\tau^2}{4\pi^2}g=\frac{1}{1000\cdot1000}\cdot\frac{1}{4\pi^2}9800\text{ мм}=\frac{1}{4000}\text{ мм}$$

Положим, что площадь поршня $s=3$ кв. см; тогда при давлении в 1 кг на квадратный сантиметр, полное давление на поршень было бы 3000 г, и, значит, сжатие пружины

$$\frac{3000}{50}\cdot\frac{1}{4000}=\frac{1}{66}\text{ мм}$$

Ясно, что с такою жесткою пружиною индикатор был бы не применим, и, чтобы иметь практически применимый прибор, надо иметь более мягкую пружину, а такой пружине соответствует больший период τ, а большему периоду — и большая погрешность, которую и найдем по приведенным в § 8 общим формулам.

В этом очерке мы пренебрегали массою пружины, но, как видно, она сравнима с массою поршня, почему мы еще вернемся к вопросу о колебаниях индикатора, принимая в расчет массу пружины.



Фиг. 12.

Пример 3. *Прибор Фрама.* Как третий пример, возьмем схему приспособления Фрама для уменьшения вибраций корабля, применимую и во многих других случаях.

Положим, что имеем массу M, подвешенную к неподвижной точке A на упругой связи. К массе M подвешена на пружине масса m, малая по сравнению с M, и прикреплен цилиндр катаракта, поршень которого прикреплен к массе m (фиг. 12).

Предполагая катаракт устроенным так, что сопротивление его на поршень пропорционально первой степени относительной скорости цилиндра и поршня, требуется исследовать вынужденные колебания системы, когда возмущающая сила действует на массу M и выражается формулою $H\sin pt$.

Пусть O есть положение массы M при равновесии и покое всей системы, O_1 — положение массы m относительно M, когда натяжение пружины, поддерживающей m, равно весу ее, так что тогда длина этой пружины есть b.

Положим, что в момент t: $OM=x_1$, $O_1m=x_2$; тогда на массу M действуют следующие силы:

1) вес ее $Mg=P$ — вниз;

2) натяжение нижней пружины T_2 — вниз;

3) натяжение верхней пружины T_1 — вверх;

4) реакция жидкости, действующая на дно цилиндра катаракта R_1;

5) возмущающая сила $F=H\sin pt$;

6) сопротивление среды, пропорциональное скорости x_1' и равное $-Nx_1'$.

На массу m действует:
1) ее вес p, направленный вниз;
2) натяжение пружины T_2, направленное вверх;
3) реакция на поршень катаракта R_1.
Значит, уравнения движения будут:
для массы M:

$$Mx_1'' = Mg - T_1 + T_2 + R_1 + H\sin pt - Nx_1'$$

для массы m ускорение есть $(x_1 + x_2 + b)'' = x_1'' + x_2''$ и, значит, уравнение движения:

$$m(x_1'' + x_2'') = mg - T_2 - R_1$$

Надо теперь выразить силы T_1, T_2, R_1 в функции x_1 и x_2.
Сила T_1 равнялась $P + p$, когда точка M была в O; следовательно, если жесткость верхней пружины есть k_1, то

$$T_1 = P + p + k_1 x_1$$

Сила T_2 равнялась p, когда $Mm = b$, в рассматриваемом же положении будет $T_2 = p + k_2 x_2$, где k_2 есть жесткость нижней пружины.
Сила R_1 по условию пропорциональна скорости поршня в отношении цилиндра, т. е. x_2', причем если x_2' возрастает, то поршень испытывает давление снизу вверх, дно же цилиндра — сверху вниз. Итак,

$$R_1 = -hx_2'$$

Таким образом, уравнения движения будут

$$\begin{gathered} Mx_1'' + Nx_1' + k_1 x_1 - k_2 x_2 - hx_2' = H\sin pt \\ m(x_1'' + x_2'') + k_2 x_2 + hx_2' = 0 \end{gathered}$$

или, разделив первое уравнение на M, второе на m и полагая

$$\frac{N}{M} = 2g_1; \quad \frac{k_1}{M} = n_1^2; \quad \frac{m}{M} = \alpha; \quad \frac{k_2}{m} = n_2^2; \quad \frac{h}{m} = 2g_2 \text{ и } \frac{H}{M} = n_1^2 a$$

мы получим уравнения движения в таком виде:

$$\begin{gathered} x_1'' + 2g_1 x_1' + n_1^2 x_1 - 2\alpha g_2 x_2' - \alpha n_2^2 x_2 = a n_1^2 \sin pt \\ x_1'' + x_2'' + 2g_2 x_2' + n_2^2 x_2 = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

Если бы массы m не было, то масса M совершала бы колебания, определяемые уравнением

$$\xi'' + 2g_1 \xi' + n_1^2 \xi = a n_1^2 \sin pt$$

и тогда амплитуда вынужденных колебаний установилась бы, согласно формуле 4 § 3, такая:

$$\xi_0 = a \frac{n_1^2}{\sqrt{(n_1^2 - p^2)^2 + 4g_1^2 p^2}}$$

и при p близком к n_1 эта амплитуда стала бы наибольшей, достигая величины

$$\frac{an_1}{2g_1} = A$$

Величина g_1 мала по сравнению с n_1, и амплитуда A при синхронизме велика по сравнению со статическою амплитудою a.

Посмотрим теперь, каковы же будут вынужденные колебания, когда к массе M присоединен „успокоитель“, т. е. масса m с катарактом.

Ищем частное решение уравнений (3) под видом

$$x_1 = B \sin pt + C \cos pt$$
$$x_2 = D \sin pt + E \cos pt$$

тогда получим, для определения неизвестных B, C, D и E, уравнения

$$\begin{array}{llll} (n_1^2 - p^2)B & -2g_1 pC & +2\alpha g_2 pE & -\alpha n_2^2 D = an_1^2 \\ 2g_1 pB + (n_1^2 - p^2)C & & -\alpha n_2^2 E & -2\alpha g_2 pD = 0 \\ -p^2 B & & -2g_2 pE + (n_2^2 - p^2)D & = 0 \\ & -p^2 C + (n_2^2 - p^2)E & +2g_2 pD & = 0 \end{array}$$

Чтобы выяснить без длинных выкладок сущность дела, возьмем тот случай, когда возмущающая сила синхронна с колебанием массы M, т. е. $n_1 = p$, и положим, что мы настроили и успокоитель так, что $n_2 = n_1' = p$, тогда наши уравнения будут

$$\begin{array}{llll} & -2g_1 C + 2\alpha g_2 E & -\alpha pD = ap \\ 2g_1 B & -\alpha pE - 2g_2 \alpha D = 0 \\ pB & +2g_2 E & = 0 \\ -pC & & +2g_2 D = 0 \end{array} \qquad (*)$$

Определив из последних двух уравнений D и E и подставляя их величины в первые два, получаем

$$\alpha pB + \left(2g_1 + \frac{\alpha p^2}{2g_2}\right) C = -ap$$

$$\left(2g_1 + \frac{\alpha p^2}{2g_2}\right) B - \alpha pC = 0$$

откуда находим, что амплитуда вынужденных колебаний массы M в этом случае будет

$$\sqrt{B^2+C^2}=\frac{ap}{\sqrt{\left(2g_1+\frac{\alpha p^2}{2g_2}\right)^2+\alpha^2 p^2}}=\frac{ap}{2g_1}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{ap^2}{4g_1 g_2}\right)^2+\frac{\alpha^2 p^2}{4g_1{}^2}}}$$

и, значит,

$$\frac{\sqrt{B^2+C^2}}{A}=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{\alpha p^2}{4g_1 g_2}\right)^2+\frac{\alpha^2 p^2}{4g_1{}^2}}}$$

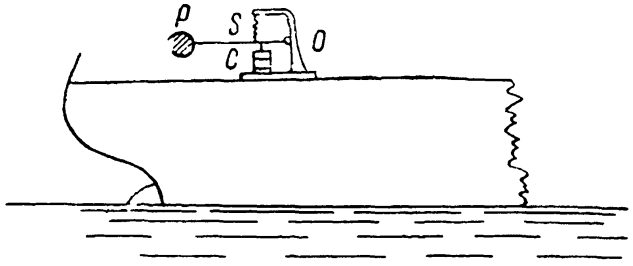
Успокоителю можно дозволять гораздо большие амплитуды колебаний, нежели главной массе M. Так, из последних двух уравнений (*) видно, что

$$\frac{\sqrt{D^2+E^2}}{\sqrt{B^2+C^2}}=\frac{p}{2g_2}$$

и, например, если взять $\alpha=\frac{1}{1000}$; $\frac{p}{2g_2}=50$ и $\frac{p}{2g_1}=100$, то будет

$$\sqrt{B^2+C^2}=\frac{1}{6}A$$

т. е. успокоитель уменьшит амплитуду колебаний массы M в 6 раз, хотя его собственная масса составит всего $\frac{1}{1000}$ от массы M, но зато амплитуда его колебаний будет в 50 раз больше амплитуды колебаний массы M.



Фиг. 13.

Подобного рода приспособление было применено Фрамом для успокоения вибрации судов: на корме парохода, где колебания наибольшие, был поставлен прибор, подобный большому палографу, т. е. состоящий из рычага OP (фиг. 13), вращающегося около точки O, с тяжелым грузом P на конце, рычаг удерживается пружиною S и снабжен катарактом C.

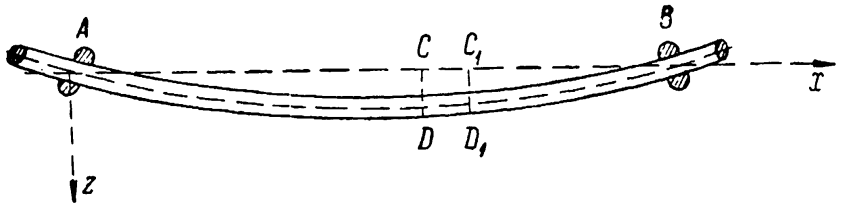
В данном случае упругие колебания (вибрации) корабля аналогичны колебаниям массы M на ее подвесе, прибор и успокаивает их, энергия же, происходящая от возмущающей силы (для корабля силы инерции неуравновешенных частей машины), поглощается катарактом и „рассеивается“, превращаясь в теплоту.

§ 23. Поперечные колебания вращающегося вала. Рассмотрим еще, как пример особого вида резонанса, поперечные колебания упругого вала.

Опыт показывает, что на сравнительно тонких, длинных и быстро вращающихся валах, как, например, передаточные валики от электромоторов к водоотливным турбинам на некоторых судах, замечается такое явление: если постепенно увеличивать скорость вращения вала ω, то при некотором значения $\omega = \omega_1$ вал не сохраняет прямолинейной формы и начинает бить; если скорость ω еще увеличить, то биение прекращается, но при некоторой скорости $\omega = \omega_2$ начинается вновь, и т. д.

Требуется объяснить это явление и рассчитать по заданным размерам вала „критические“ скорости вращения ω_1, ω_2, и т. д.

Мы ограничимся простейшим случаем, чтобы показать сущность дела. Положим, что имеется цилиндрический вал AB, вращающийся в шаровых



Фиг. 14.

подшипниках, так что концы его A и B можно считать подпертыми (фиг. 14), и рассмотрим, при каких условиях вал может вращаться равномерно, приняв и сохраняя не прямолинейную, а изогнутую форму своего динамического равновесия.

Предполагая эту форму плоской, обозначим через z ординату CD, соответствующую абсциссе x точки D той кривой, в которую первоначально прямая ось вала AB изогнулась; пусть p есть вес одной погонной единицы длины вала, тогда, при угловой скорости вращения ω, на элемент $DD_1 = CC_1 = dx$ действует, вследствие центробежной силы, нагрузка, равная $\frac{p}{g}\omega^2 z\,dx$, следовательно вал может принять и сохранять такую форму динамического равновесия, которая соответствует этой нагрузке, т. е. по $\frac{p}{g}\omega^2 z$ на погонную единицу длины в каждой точке вала.

Отсюда следует, что форма равновесия определится из уравнения

$$EI\frac{d^4z}{dx^4} = \frac{p\omega^2}{g}z \qquad (1)$$

где E — модуль упругости материала вала и I — момент инерции площади его сечения относительно диаметра ее.

Это уравнение вытекает из известного дифференциального уравнения, выражающего условие равновесия изогнутого однородного стержня при действии заданной нагрузки $F(x)$, именно:

$$EI\frac{d^4z}{dx^4}=F(x)$$

в нашем же случае

$$F(x)=\frac{p\omega^2}{g}z$$

Для полного определения z надо к уравнению (1) присовокупить граничные условия, выражающие условия закрепления концов вала, которые в нашем случае будут:

Для конца A, соответствующего абсциссе $x=0$, должно быть

$$(z)_{x=0}=0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_{x=0}=0 \tag{2}$$

Точно так же для конца B, соответствующего абсциссе $x=l$, должно быть

$$(z)_{x=l}=0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_{x=l}=0 \tag{2'}$$

ибо оба конца предположены подпертыми.

Сделаем

$$\frac{p\omega^2}{gEI}=\alpha^4$$

тогда уравнение (1) напишется так:

$$\frac{d^4z}{dx^4}-\alpha^4z=0 \tag{1'}$$

Его общий интеграл есть

$$z=Ae^{\alpha x}+Be^{-\alpha x}+C\cos\alpha x+D\sin\alpha x$$

причем постоянные произвольные A, B, C, D определяются по условиям (2) и (2'), именно:

$$\begin{gathered}A+B+C=0\\A+B-C=0\\Ae^{\alpha l}+Be^{-\alpha l}+C\cos\alpha l+D\sin\alpha l=0\\Ae^{\alpha l}+Be^{-\alpha l}-C\cos\alpha l-D\sin\alpha l=0\end{gathered}$$

Из этих уравнений следует, что если определитель системы не равен нулю, то $A=B=C=D=0$, т. е. тогда $z=0$, и вал будет сохранять прямолинейную форму. Если же величина угловой скорости ω такова,

что при соответствующем ему значении α сказанный определитель есть нуль, то вышеприведенной системе могут удовлетворять и значения постоянных, отличные от нуля, а тогда z не будет равно нулю, и вал будет бить.

В нашем случае вышеприведенные уравнения дают

$$A=0; \qquad B=0; \qquad C=0;$$
$$D\sin\alpha l=0$$

т. е. определитель системы есть $\sin\alpha l$, и, значит, „критические“ значения доставляются равенством

$$\sin\alpha l=0$$

откуда

$$\alpha_1=\frac{\pi}{l}; \quad \alpha_2=\frac{2\pi}{l};\ldots$$

чему соответствует

$$\omega_1=\frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{p}}; \quad \omega_2=\frac{4\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{p}}\ldots$$

Это и суть значения „критических“ скоростей вращения, при коих вал теряет „устойчивость“ своей прямолинейной формы.

Мы не будем разбирать более сложных случаев, например, когда на вал насажены один или несколько шкивов, отсылая к статье проф. Dunkerley, напечатанной в „Philosophical Transactions“ за 1894 г., сер. A, а также к статье Dr. Chree в „Philosophical Magazine“ (Май 1904 г.), где этот вопрос разобран подробно и где даются приближенные способы его решения, когда точное решение чрезмерно сложно.

ГЛАВА II

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Эта глава составлена без всяких перемен по лекциям, которые прочел покойный А. Н. Коркин некоторым из своих учеников в 1891 г. совершенно частным образом на квартире проф. Садовского.

Эти лекции были мною тогда же тщательно записаны и редактированы, и я думаю, что в этих страницах ученики Александра Николаевича узнают ясность и сжатость изложения своего незабвенного учителя.

§ 24. Многие вопросы математической физики приводят к линейным уравнениям с частными производными и с постоянными коэффициентами; поэтому, изложение способов их интегрирования составляет как бы введение к курсу математической физики.

Даламберт в 1747 г. дал общий интеграл уравнения колебания струн

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

Если взять переменные

$$\xi = x - at$$
$$\eta = x + at$$

то уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

откуда заключаем, в силу того, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)}{\partial \xi} = 0$$

что $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ есть функция только переменной η. Полагая

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \varphi'(\eta)$$

имеем

$$u = \varphi(\eta) + \psi(\xi)$$

так что

$$u = \varphi(x + at) + \psi(x - at) \tag{2}$$

где φ и ψ — произвольные функции.

Эйлер обобщил соображения Даламберта на уравнения высших порядков. Возьмем уравнение линейное с постоянными коэффициентами, во всех членах которого производные одного и того же порядка n. Общий вид такого уравнения будет, при переменных независимых x и y,

$$a\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + b\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\partial y} + c\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-2}\partial y^2} + \ldots + l\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = 0 \tag{3}$$

Эйлер поступает так: он ищет u под видом

$$u = \varphi(x + \lambda y)$$

где λ не зависит ни от x, ни от y.

Взяв $\frac{\partial^n u}{\partial x^g \partial y^{n-g}}$, получим

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^g \partial y^{n-g}} = \lambda^{n-g}\varphi^{(n)}(x + \lambda y)$$

Сделав $g = n;\ n-1,\ n-2,\ \ldots\ 1,\ 0$, выведем все входящие в уравнение (3) производные; будем иметь

$$(a + b\lambda + c\lambda^2 + \ldots + l\lambda^n)\varphi^{(n)}(x + \lambda y) = 0 \tag{4}$$

Чтобы удовлетворить этому уравнению, делаем

$$a + b\lambda + c\lambda^2 + \ldots + l\lambda^n = 0$$

и решаем это алгебраическое уравнение относительно λ. Пусть корни его суть

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n$$

обыкновенно они бывают неравные. Подставив их в нашу формулу, имеем

$$u = \varphi_1(x + a_1 y)$$
$$u = \varphi_2(x + a_2 y)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$u = \varphi_n(x + a_n y)$$

все это будут *решения* уравнения (3).

Сумма решений всякого линейного однородного уравнения есть также решение этого уравнения, и мы можем написать решение нашего уравнения с n произвольными функциями:

$$u = \varphi_1(x + a_1 y) + \varphi_2(x + a_2 y) + \ldots + \varphi_n(x + a_n y) \tag{5}$$

Это и есть общий интеграл уравнения (3).

Если бы два корня были равны, например $a_1 = a_2$, то первые два члена соединились бы в один. В этом случае вместо первых двух членов можно взять такие:

$$\varphi_1(x + a_1 y) + y\varphi_2(x + a_1 y)$$

при трех равных корнях

$$\varphi_1(x + a_1 y) + y\varphi_2(x + a_1 y) + y^2\varphi_3(x + a_1 y)$$

и т. д.

После Даламберта и Эйлера над этим вопросом работал Лаплас. Его исследования помещены[1] в „Mémoires de l'Académie" за 1773 г. и последующие; так, в 1779 г. он интегрирует линейные уравнения второго порядка при помощи определенных интегралов, но не в самом общем виде.

Фурье дал теорему, доставляющую возможность решать вопрос о линейных уравнениях в самом общем виде. Первая его работа была напечатана в 1811 г. в томах IV и V „Annales de Physique et de Chimie", затем появился ряд других его работ, которые все сведены в одно целое— „Théorie analytique de la chaleur", изданное в 1822 г.

Пуассон занимался также этим вопросом; его работы помещены в „Journal de l'École polytechnique" в 1823 г. В его же „Théorie mathématique de la chaleur", изданной в 1835 г., встречаются уравнения не только с постоянными, но и с переменными коэффициентами.

§ 25. Самый общий вид уравнения линейного с частными производными высших порядков и с постоянными коэффициентами есть такой:

$$\sum a \frac{\partial^{\lambda+\mu+\nu+\ldots+\tau} u}{\partial x^\lambda \partial y^\mu \partial z^\nu \ldots \partial t^\tau} = f(x, y, z, \ldots t) \qquad (6)$$

Относительно этого уравнения можно высказать такие теоремы:

1) *Если известно некоторое частное решение, например* w, *уравнения* (6), *так что*

$$\sum a \frac{\partial^{\lambda+\mu+\nu+\ldots+\tau} w}{\partial x^\lambda \partial y^\mu \partial z^\nu \ldots \partial t^\tau} = f(x, y, z, \ldots t)$$

то, сделав $u = v + w$, *получим для* v *такое же уравнение, как и* (6), *только без последнего члена.*

Будем, поэтому, говорить пока об уравнениях без последнего члена, чтобы показать, почему тут приходится прибегать к теореме Фурье. Но сперва припомним еще две теоремы относительно линейных уравнений без последнего члена.

---

[1] Эти исследования вошли в тт. IX и X полного собрания сочинений Лапласа, изданные в 1890 и 1893 гг.

2) *Всякое решение линейного уравнения без последнего члена можно умножить на постоянное произвольное, — произведение будет также решением.*

3) *Сумма нескольких решений уравнения без последнего члена есть также решение его.*

Возьмем уравнение без последнего члена:

$$\sum a \frac{\partial^{\lambda+\mu+\nu+\ldots+\tau} u}{\partial x^{\lambda}\, \partial y^{\mu}\, \partial z^{\nu} \ldots \partial t^{\tau}} = 0 \qquad (7)$$

Припомним способ интегрирования обыкновенных линейных уравнений с постоянными коэффициентами, будем поступать и для уравнения (7) подобным же образом.

Для обыкновенного уравнения, например

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0$$

мы ищем какое-нибудь решение, полагая $y = e^{\alpha x}$; тогда имеем

$$e^{\alpha x}(\alpha^n + p_1 \alpha^{n-1} + \ldots + p_n) = 0$$

и выбираем α так, чтобы было

$$\alpha^n + p_1 \alpha^{n-1} + \ldots + p_n = 0$$

Подобным же образом для уравнения (7) полагаем

$$u = e^{\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots+\omega t} \qquad (8)$$

где под α, β, γ, $\ldots$ ω разумеем произвольные постоянные. Заметив, что каждое дифференцирование по букве x вводит множитель α, так что дифференцирование λ раз по x введет множитель α^{λ}, дифференцирование по y вводит множитель β и т. д., таким образом будет

$$\frac{\partial^{\lambda+\mu+\nu+\ldots+\tau} u}{\partial x^{\lambda}\, \partial y^{\mu}\, \partial z^{\nu} \ldots \partial t^{\tau}} = \alpha^{\lambda} \beta^{\mu} \gamma^{\nu} \ldots \omega^{\tau} e^{\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots+\omega t}$$

Подставив в уравнение (7) и взяв показательную за знак суммы получим

$$e^{\alpha x+\beta y+\ldots+\omega t} \sum a \alpha^{\lambda} \beta^{\mu} \gamma^{\nu} \ldots \omega^{\tau} = 0$$

Сократив на показательную, получим между α, β, $\ldots$ ω такое алгебраическое уравнение:

$$\sum a \alpha^{\lambda} \beta^{\mu} \gamma^{\nu} \ldots \omega^{\tau} = 0 \qquad (9)$$

Понятно, что одна зависимость между переменными α, β, γ, $\ldots$ ω дозволяет принять одну из них, например ω, за неизвестную, а остал-

ные оставить произвольными. Если высшая степень ω есть p, то это уравнение дает p корней:

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\ \omega_p$$

все эти корни будут функции от α, β, γ, ... Предполагая в выражении (8) ω равным ω_1, затем ω_2, ... ω_p, мы получим p решений; умножив каждое из них на постоянное произвольное и сложив все решения, будем иметь

$$u = Ae^{\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots+\omega_1 t} + Be^{\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots+\omega_2 t} + \ldots$$
$$\ldots + Ke^{\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots+\omega_p t} \qquad (10)$$

В этом решении величины α, β, γ, ... A, B, ... K суть совершенно произвольные, но независимые от x, y, z, ... t; для каждой из них мы можем вообразить ряд значений, который она проходит; все эти значения можно комбинировать между собой, причем для каждой комбинации получится член такого же вида, как написанный в формуле (10), с тою только разницей, что α, β, γ, ... A, B, ... K будут иметь определенные частные значения, им приписанные.

Сложив все таким образом полученные члены, мы найдем решение уравнения (7) в таком виде:

$$u = \sum Ae^{\alpha x+\beta y+\ldots+\omega_1 t} + \sum Be^{\alpha x+\beta y+\ldots+\omega_2 t} + \ldots$$
$$\ldots + \sum Ke^{\alpha x+\beta y+\ldots+\omega_p t} \qquad (11)$$

Если число членов в каждой сумме конечное, то формула (11) дает совершенно определенную величину для u, удовлетворяющую уравнению (7).

То же самое будет, если каждая из сумм состоит из бесконечного числа членов, но остается конечною и определенною.

Можно предположить, что α, β, ... γ ... A, B, ... K изменяются непрерывно и что ряд значений для каждой из этих переменных составляют все величины, заключенные между какими-нибудь определенными границами. В этом случае α, β, γ, ... надо принять за переменные, независимые друг от друга; что касается A, B, ... K, то их можно считать произвольными функциями от α, β, γ, ... и еще от некоторых величин ξ, η, ζ, ..., не зависящих от x, y, z, ... t и, следовательно, таких же как α, β, γ, ...

При этом суммы (11) заменяются интегралами по переменным α, β, γ, ..., ξ, η, ζ, ...

Таким образом, в предположении, что наши произвольные постоянные

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots\ \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \ldots$$

изменяются непрерывно, формулу (11) можно заменить такою:

$$u = \int\int\int \ldots \int e^{\alpha x+\beta y+\ldots+\omega_1 t}\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \xi, \eta, \zeta, \ldots)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots d\xi\, d\eta\, d\zeta \ldots + \ldots$$

$$\ldots + \int\int\int \ldots \int e^{\alpha x+\beta y+\ldots+\omega t}\psi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \xi, \eta, \zeta, \ldots)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots d\xi\, d\eta\, d\zeta \ldots \quad (12)$$

Кратность интегралов равна числу переменных

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots\ \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \ldots$$

т. е. удвоенному числу переменных, входящих в уравнение (7), кроме переменной t; что же касается их пределов, которые считаются, конечно, не зависящими от x, y, ..., t, то они обусловлены только тем, чтобы кратные интегралы оставались конечными и определенными; тогда формула (12) дает решение уравнения (7) с p произвольными функциями.

Изложенное в этих параграфах и заключает самое общее решение линейных уравнений с частными производными и с постоянными коэффициентами.

Подстановка $u = e^{\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots+\omega t}$ принадлежит Эйлеру.

§ 26. Прежде чем войти в дальнейшие подробности поясним изложенную теорию примером.

Возьмем уравнение распространения тепла в неограниченной среде, где предполагаются теплопроводность и теплоемкость постоянными.

Это уравнение такое:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (1)$$

коэффициент a зависит от теплопроводности и теплоемкости и предполагается постоянным; u есть тогда температура в точке (x, y, z) в момент t.

Подставив вместо u величину

$$u = Ae^{\alpha x+\beta y+\gamma z+\omega t}$$

получим

$$A\omega e^{\alpha x+\beta y+\gamma z+\omega t} = Aa^2 e^{\alpha x+\beta y+\gamma z+\omega t}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

по сокращении будет

$$\omega = a^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

что дает такое решение:

$$u = Ae^{\alpha x+\beta y+\gamma z+a^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)t}$$

Заметим, что пока α, β, γ действительные, до тех пор наше решение не годится, ибо тогда при возрастании t неопределенно возрастает и u, что не соответствует действительности.

Поэтому делаем

$$\alpha = \lambda\sqrt{-1}; \qquad \beta = \mu\sqrt{-1}; \qquad \gamma = \nu\sqrt{-1}$$

тогда будет

$$u = Ae^{(\lambda x+\mu y+\nu z)\sqrt{-1}}\, e^{-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t}$$

Величину A возьмем таким образом:

$$A = \frac{1}{(2\pi)^3}\, e^{-\lambda\xi\sqrt{-1}}\, e^{-\mu\eta\sqrt{-1}}\, e^{-\nu\zeta\sqrt{-1}}\, \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

и, подставив в формулу (12), берем *шестикратный* интеграл.

Получим

$$u = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int e^{-a^2\rho^2 t}\, e^{\lambda(x-\xi)\sqrt{-1}}\, e^{\mu(y-\eta)\sqrt{-1}}\, e^{\nu(z-\zeta)\sqrt{-1}} \times$$

$$\times \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \qquad (2)$$

где

$$\rho^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$$

Интегралы по переменным λ, μ, ν можно взять на самом деле, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2v^2}\cos lv\, dv = \frac{\sqrt{\pi}}{k}e^{-\frac{4k^2}{l^2}} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

и уравнение (2) можно написать так:

$$u = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda(x-\xi)\sqrt{-1}}e^{-a^2\lambda^2 t}\, d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mu(y-\eta)\sqrt{-1}}e^{-a^2\mu^2 t}\, d\mu \times\right.$$

$$\left.\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\nu(z-\zeta)\sqrt{-1}}e^{-a^2\nu^2 t}\, d\nu\right] \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \qquad (3)$$

Замечая, что в первом интеграле

$$e^{\lambda(x-\xi)\sqrt{-1}} = \cos\lambda(x-\xi) + \sqrt{-1}\sin\lambda(x-\xi)$$

и при интегрировании по λ величина $x-\xi$ есть постоянная, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 t\lambda^2} e^{\lambda(x-\xi)\sqrt{-1}}\, d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 t\lambda^2} \cos\lambda(x-\xi)\, d\lambda +$$

$$+\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 t\lambda^2} \sin\lambda(x-\xi)\, d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}$$

ибо второй интеграл равен нулю, как интеграл от нечетной функции.

В втором интеграле, входящем в выражение u, вместо разности $x-\xi$ будет стоять $y-\eta$, в третьем $z-\zeta$. Произведение этих трех интегралов будет

$$\frac{(\sqrt{\pi})^3}{a^3(\sqrt{t})^3} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} e^{-\frac{(\eta-y)^2}{4a^2 t}} e^{-\frac{(\zeta-z)^2}{4a^2 t}}$$

Подставив в формулу (3), получим

$$u = \frac{1}{8(\sqrt{\pi})^3 a^3 (\sqrt{t})^3} \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} e^{-\frac{(\eta-y)^2}{4a^2 t}} e^{-\frac{(\zeta-z)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

Это и есть решение уравнения (1). Его легко преобразовать в Лапласовское, для чего надо положить

$$\xi - x = 2a\sqrt{t}\, x_1$$
$$\eta - y = 2a\sqrt{t}\, y_1$$
$$\zeta - z = 2a\sqrt{t}\, z_1$$

пределы будут попрежнему $+\infty$ и $-\infty$, ибо $\sqrt{t} > 0$. Тогда будет

$$u = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^3} \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int e^{-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)} \varphi(x+2a\sqrt{t}\, x_1, y+2a\sqrt{t}\, y_1, z+2a\sqrt{t}\, z_1)\, dx_1 dy_1 dz_1 \quad (4)$$

Это и есть Лапласов интеграл уравнения (1).

Если бы u не содержало переменной z, то уравнение (1) было бы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (1')$$

и тогда

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int e^{-(x_1^2+y_1^2)} \varphi(x+2a\sqrt{t}\, x_1, y+2a\sqrt{t}\, y_1)\, dx_1\, dy_1 \quad (4')$$

Наконец, если бы уравнение было

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2} \varphi (x + 2a \sqrt{t}\, x_1)\, dx_1 \qquad (4'')$$

При $t = 0$ формула (4) дает такую величину:

$$u_0 = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^3} \varphi (x, y, z) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y_1^2} dy_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1^2} dz_1$$

и будет

$$u_0 = \varphi (x, y, z)$$

Таким образом, формула (4) дает решение, обращающееся при $t = 0$ в произвольную функцию $\varphi (x, y, z)$.

Это есть начальное тепловое состояние пространства.

§ 27. Мы предполагали корни уравнения (9) неравными между собою. Это уравнение есть следующее:

$$\sum a \alpha^{\lambda} \beta^{\mu} \ldots \omega^{\tau} = 0, \qquad (9)$$

где $\lambda, \mu, \ldots \tau$ — целые и положительные числа.

Величина $e^{\alpha x + \beta y + \cdots + \omega_i t}$ или, что то же, $e^{\alpha x + \beta y + \cdots} e^{\omega_i t}$ служит решением обыкновенного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$\sum a \alpha^{\lambda} \beta^{\mu} \ldots \frac{d^{\tau} T}{dt^{\tau}} = 0, \qquad (*)$$

где T есть неизвестная функция. Поэтому, не исследуя равных корней уравнения (9), мы можем сказать, что когда ω_1 есть k-кратный корень уравнения (9), то показательная $e^{\omega_1 t}$, ему соответствующая, может множиться на величины

$$t, t^2, \ldots t^{k-1},$$

и произведения будут также решениями уравнения (*).

Таким образом, для k-кратного корня можем написать такие k решений:

$$e^{\alpha x + \beta y + \cdots} e^{\omega_1 t};\quad e^{\alpha x + \beta y + \cdots} t e^{\omega_1 t};\quad \ldots e^{\alpha x + \beta y + \cdots} t^{k-1} e^{\omega_1 t}$$

тогда в формуле (11) первые k сумм будут

$$\sum A e^{\alpha x + \beta y + \cdots} e^{\omega_1 t};\quad \sum A_1 e^{\alpha x + \beta y + \cdots} t e^{\omega_1 t}; \ldots$$

Подобным образом в формуле (12) первые k интегралов заменятся другими, где под интегральными знаками будут множители

$$e^{\omega_1 t};\ te^{\omega_1 t};\ t^2 e^{\omega_1 t};\ \ldots t^{k-1} e^{\omega_1 t}$$

и в каждом интеграле произвольная функция будет особенная.

§ 28. Формулы (11) и (12) можно написать в более общем виде: обозначим через

$$T_1,\ T_2,\ \ldots\ T_{p-1},\ T_p$$

какие угодно p частных решений уравнения (*), независимых между собою, т. е. таких, между которыми нет линейных связей; тогда мы можем их подставить в формулах (11) и (12) вместо решений

$$e^{\omega_1 t},\ e^{\omega_2 t},\ \ldots\ e^{\omega_p t}$$

Что касается величин $T_1, T_2, \ldots T_p$, то все они выводятся из общей величины

$$T = C_1 e^{\omega_1 t} + C_2 e^{\omega_2 t} + \ldots + C_p e^{\omega_p t} \qquad (**)$$

где $C_1, C_2, \ldots C_p$ — постоянные произвольные. Величины $T_1, T_2, \ldots T_p$ получаются при частных значениях этих постоянных.

Понятно, что формула (**) относится к случаю неравных корней; нетрудно ее распространить и на случай равных. Тогда формулы (11) и (12) можно написать так:

$$\begin{gathered} u = \sum A_1 e^{\alpha x+\beta y+\cdots} T_1 + \sum A_2 e^{\alpha x+\beta y+\cdots} T_2 + \ldots . \\ \ldots + \sum A_p e^{\alpha x+\beta y+\cdots} T_p \end{gathered} \qquad (13)$$

и

$$\begin{gathered} u = \int\int \ldots \int e^{\alpha x+\beta y+\cdots} T_1 \varphi_1(\alpha, \beta, \ldots \xi, \eta, \ldots)\, d\alpha\, d\beta \ldots d\xi\, d\eta \ldots + \ldots \\ \ldots + \int\int \ldots \int e^{\alpha x+\beta y+\cdots} T_p \varphi_p(\alpha, \beta, \ldots \xi, \eta, \ldots)\, d\alpha\, d\beta \ldots d\xi\, d\eta \ldots \end{gathered} \qquad (14)$$

§ 29. До сих пор мы решили задачу только о том, чтобы u удовлетворяло заданному уравнению (7). Но при интегрировании уравнений существуют две задачи:

1) удовлетворить заданному уравнению,

2) найти произвольные величины, входящие в общее выражение неизвестной по заданным наперед условиям.

Для уравнения (7) можно поставить p условий по наибольшему числу дифференцирований относительно t, а именно, можно требовать чтобы при $t=0$

$$\begin{aligned}
&u \quad \text{обращалось в } f_1(x,y,z,\ldots)\\
&\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{„} \quad \text{„ } f_2(x,y,z,\ldots)\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{„} \quad \text{„ } f_3(x,y,z,\ldots)\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\frac{\partial^{p-1} u}{\partial t^{p-1}} \quad \text{„} \quad \text{„ } f_p(x,y,z,\ldots)
\end{aligned}$$

где $f_1, f_2, \ldots f_p$ — заданные функции от переменных $x, y, z, \ldots$, не содержащие буквы t. Решение этого вопроса выполняется при помощи так называемой теоремы Фурье.

Но сначала мы видоизменим формулу (14), полагая в ней

$$\varphi_1(\alpha, \beta, \ldots \xi, \eta, \zeta, \ldots) = e^{-\alpha\xi\sqrt{-1}} \cdot e^{-\beta\eta\sqrt{-1}} \cdot e^{-\gamma\zeta\sqrt{-1}} \ldots \psi_1(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_p(\alpha, \beta, \ldots \xi, \eta, \zeta) = e^{-\alpha\xi\sqrt{-1}} \cdot e^{-\beta\eta\sqrt{-1}} \cdot e^{-\gamma\zeta\sqrt{-1}} \ldots \psi_p(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$$

и, кроме того, переменные $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ в показательных $e^{\alpha x}, e^{\beta y}, \ldots$ изменим на $\alpha\sqrt{-1}; \beta\sqrt{-1}; \ldots$ Затем интегрирование по всем переменным возьмем от $-\infty$ до $+\infty$, число же переменных $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ возьмем равным n — числу переменных $x, y, z, \ldots$, а также и $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$
Таким образом, получим

$$\begin{aligned}
u = &\overbrace{\int\int\ldots\int}^{+\infty}_{-\infty} T_1 e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\eta)\sqrt{-1}} \times\\
&\times e^{\gamma(z-\zeta)\sqrt{-1}} \ldots \psi_1(\xi, \eta, \zeta, \ldots)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots d\xi\, d\eta\, d\zeta \ldots + \ldots\\
&\ldots + \overbrace{\int\int\int\ldots\int}^{+\infty}_{-\infty} T_p e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\eta)\sqrt{-1}} \times\\
&\times e^{\gamma(z-\zeta)\sqrt{-1}} \ldots \psi_p(\xi, \eta, \zeta, \ldots)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots d\xi\, d\eta\, d\zeta
\end{aligned} \tag{15}$$

Теперь уравнение (9) примет вид

$$\sum a\,(\alpha\sqrt{-1})^\lambda (\beta\sqrt{-1})^\mu (\gamma\sqrt{-1})^\nu \ldots \omega^\tau = 0 \tag{9'}$$

а уравнение (*) — вид

$$\sum a(\alpha\sqrt{-1})^\lambda (\beta\sqrt{-1})^\mu (\gamma\sqrt{-1})^\nu \ldots \frac{d^\tau T}{dt^\tau} = 0 \tag{*'}$$

Теорему Фурье можно было бы вывести, проводя аналогию между уравнениями с частными производными и уравнениями обыкновенными линейными и с постоянными коэффициентами. В самом деле, Лагранж в „Mécanique analytique“ рассматривает движение n точек, связанных негибкими и нерастяжимыми стержнями, и приходит к системе n совокупных уравнений с постоянными коэффициентами. Удовлетворить этим уравнениям оказалось весьма нетрудно, но определить постоянные произвольные по начальным условиям составляло некоторую трудность. Лагранж дал особенную формулу интерполирования, от которой, при бесконечно большом n, после перехода к пределу получается один из рядов Фурье, именно — ряд по синусам кратных дуг. От рядов Фурье можно перейти и к интегралу Фурье.

Таким образом, ясно, что и второй вопрос может также быть выведен из аналогии с обыкновенными уравнениями.

Короче будет, однако, оставив аналогию, привести прямо теорему Фурье.

§ 30. В томе III „Annales de Physique et de Chimie“ Фурье дал две формулы, из которых следует его теорема и которые заключаются в последней.

Пусть будет $\varphi(x)$ четная функция x и $\psi(x)$ — нечетная функция, определенные на промежутке $(-\infty, +\infty)$; тогда формулы Фурье следующие:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha x \cos\alpha\xi \varphi(\xi)\, d\xi$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\alpha x \sin\alpha\xi \psi(\xi)\, d\xi$$

Вместе с этими возьмем очевидные формулы

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha x \cos\alpha\xi \psi(\xi)\, d\xi = 0$$

и

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\alpha x \sin\alpha\xi \varphi(\xi)\, d\xi = 0$$

Сложив две формулы Фурье с этими двумя уравнениями и между собою, получим

$$\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha(x-\xi)[\varphi(\xi) + \psi(\xi)]\, d\xi$$

Если функция $f(x)$ состоит из суммы четной функции с нечетною, то, полагая

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$$

получим *теорему Фурье* в таком виде:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha(x-\xi) f(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha(x-\xi) f(\xi)\, d\xi$$

* **§ 31.** Доказательство теоремы Фурье дал Лежен-Дирихле в томе IV журнала „Crelle", но потом он это доказательство переделал и дал другое в „Doves Repertorium der Physik". В томе XVII журнала „Crelle" Дирихле прилагает тот же принцип к доказательству сходимости рядов, расположенных по функциям Лапласа, т. е. рядов, встречающихся в теории приливов и отливов и почти во всех задачах математической физики, относящихся к случаю сферы.

В виду важности теоремы Фурье для всего дальнейшего изложения приводим здесь доказательство ее, которое А. Н. Коркин предполагал известным своим слушателям.

Введем предварительно некоторые новые понятия. Положим, что функция $f(x)$ терпит разрыв непрерывности при $x=c$, но обладает тем свойством, что $f(c+h)$ и $f(c-h)$ при стремлении положительного переменного h к нулю имеют определенные конечные пределы. Мы будем обозначать эти пределы следующим образом:

$$f(c+0)=\lim_{h=0} f(c+h);\quad f(c-0)=\lim_{h=0} f(c-h) \qquad (h>0)$$

При этом говорят, что $f(x)$ имеет при $x=c$ *разрыв непрерывности первого рода*. Если бы $f(c+0)$ и $f(c-0)$ совпадали, то никакого разрыва непрерывности при $x=c$ не было бы. Далее говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет на конечном промежутке от a до b *условиям Дирихле*, если она или непрерывна в этом промежутке или имеет конечное число разрывов первого рода и если, кроме того, она имеет конечное число максимумов и минимумов в этом промежутке. На концах промежутка предполагается существование конечных предельных значений $f(a+0)$ и $f(b-0)$. В силу сказанного выше относительно максимумов и минимумов, весь промежуток от a до b можно разбить на конечное число таких частичных промежутков, в каждом из которых $f(x)$ меняется монотонно.

Для доказательства теоремы Фурье предположим, что функция $f(x)$, определенная внутри промежутка $(-\infty, +\infty)$, подчиняется следующим требованиям: 1) в любом конечном промежутке она удовлетворяет усло-

виям Дирихле; 2) она абсолютно интегрируема по всему бесконечному промежутку, т. е. интегралы

$$\int_{-\infty}^{0} |f(x)|\,dx \quad \text{и} \quad \int_{0}^{\infty} |f(x)|\,dx$$

имеют конечные значения. Мы будем доказывать теорему Фурье при указанных выше условиях. При этом в местах разрыва надо брать полусумму соответствующих пределов слева и справа, т. е. теорема Фурье выражается следующей формулой:

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)] = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\alpha(\xi-x)\,d\xi$$

Если x есть точка непрерывности $f(x)$, то

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)] = f(x)$$

и предыдущая формула будет:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\alpha(\xi-x)\,d\xi$$

В основе лежит следующая формула Дирихле, доказанная им при рассмотрении предела суммы членов тригонометрического ряда:

$$\lim_{\mu=\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{b} F(z)\,\frac{\sin\mu z}{z}\,dz = \frac{1}{2}F(+0)$$

причем считается, что $F(z)$ удовлетворяет условиям Дирихле на конечном промежутке от 0 до b и

$$F(+0) = \lim_{h=0} F(h). \qquad (h>0)$$

Для доказательства теоремы Фурье надо показать, что

$$\lim_{\mu=\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\mu} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\alpha(\xi-x)\,d\xi = \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)] \qquad (*)$$

В силу абсолютной интегрируемости $f(x)$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\alpha(\xi-x)\,d\xi$$

сходится равномерно при всех вещественных α. Действительно, интегралы

$$\int_{N}^{N'} f(\xi)\cos\alpha(\xi-x)\,d\xi \quad \text{и} \quad \int_{-N'}^{-N} f(\xi)\cos\alpha(\xi-x)\,d\xi \quad (0<N<N') \qquad (*)$$

по абсолютной величине не превосходят интегралов

$$\int_{N}^{N'} |f(\xi)|\,d\xi \quad \text{и} \quad \int_{-N}^{-N'} |f(\xi)|\,d\xi$$

которые не зависят от α, и для любого заданного положительного ε существует такое N_0, что при всех N и $N'>0$ интегралы (**) будут $<\varepsilon$. Равномерная сходимость указанного интеграла позволяет менять порядок интегрирования в повторном интеграле основной формулы (*), и мы можем написать, вводя специальное обозначение $V(\mu, x)$ для этого интеграла:

$$V(\mu, x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\mu} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\alpha(\xi-x)\,d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\int_{0}^{\mu}\cos\alpha(\xi-x)\,d\alpha$$

Выполняя интегрирование по α во внутреннем интеграле правой части получим:

$$V(\mu, x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\frac{\sin\mu(\xi-x)}{\xi-x}\,d\xi$$

Разбив промежуток интегрирования $(-\infty, +\infty)$ на два промежутка, $(-\infty, x)$ и $(x, +\infty)$ и вводя вместо $\xi-x$ переменную $(-z)$ в первом и z во втором промежутке, получим:

$$V(\mu, x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x-z)\frac{\sin\mu z}{z}\,dz+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x+z)\frac{\sin\mu z}{z}\,dz$$

Оба написанные интегралы суть интегралы того же вида, что интеграл, входящий в формулу Дирихле, причем для первого из них $F_1(z)=f(x-z)$ и для второго $F_2(z)=f(x+z)$. Осложнением является тот факт, что промежуток интегрирования для них бесконечен. Пользуясь указанными выше условиями, которым удовлетворяет $f(x)$, нетрудно показать, что несмотря на бесконечность промежутка интегрирования, для обоих интегралов имеет место обычная формула Дирихле, при чем $F_1(+0)=f(x-0)$ и $F_2(+0)=f(x+0)$, т. е.

$$\lim_{\mu=\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x-z)\frac{\sin\mu z}{z}\,dz=\frac{1}{2}f(x-0)$$

$$\lim_{\mu=\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x+z)\frac{\sin\mu z}{z}\,dz=\frac{1}{2}f(x+0) \qquad (***)$$

Из этих формул и написанного выше выражения $(V\mu, x)$ и следует непосредственно основная формула (*). При $z>1$ функция $\frac{\sin \mu z}{z}$ при любом вещественном z по абсолютной величине <1, а функция $f(x-z)$ по условию абсолютно интегрируема, по промежутку от 0 до ∞. Поэтому при любом заданном положительном ε существует такое число, N большее единицы, что при всяком μ:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_N^\infty f(x-z)\frac{\sin \mu z}{z}\,dz\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_N^\infty |f(x-z)|\,dz < \varepsilon$$

Интеграл Дирихле

$$\frac{1}{\pi}\int_0^N f(x-z)\frac{\sin \mu z}{z}\,dz$$

на конечном промежутке стремится к $\frac{1}{2}f(x-0)$ при беспредельном возрастании μ, и, следовательно, при всех достаточно больших μ мы будем иметь:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^N f(x-z)\frac{\sin \mu z}{z}\,dz - \frac{1}{2}f(x-0)\right| < \varepsilon$$

Далее мы можем, очевидно, написать:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x-z)\frac{\sin \mu z}{z}\,dz - \frac{1}{2}f(x-0) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_N^\infty f(x-z)\frac{\sin \mu z}{z}\,dz + \left[\frac{1}{\pi}\int_0^N f(x-z)\frac{\sin \mu z}{z}\,dz - \frac{1}{2}f(x-0)\right]$$

Принимая во внимание предыдущие неравенства, получим при всех достаточно больших μ:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x-z)\frac{\sin \mu z}{z}\,dz - \frac{1}{2}f(x-0)\right| \leqslant \left|\frac{1}{\pi}\int_N^\infty f(x-z)\frac{\sin \mu z}{z}\,dz\right| +$$

$$+ \left|\frac{1}{\pi}\int_0^N f(x-z)\frac{\sin \mu z}{z}\,dz - \frac{1}{2}f(x-0)\right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

откуда, в силу произвольности ε, и следует первая из формул (***). Вторая доказывается совершенно так же *.

Напишем теорему Фурье в более удобной форме, которую получим, присоединив уравнение

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{-1}\sin\alpha(x-\xi)f(\xi)\,d\xi\,d\alpha$$

которое следует из того, что подинтегральная функция есть нечетная функция α, и предполагается, что написанный интеграл имеет смысл.

Складывая последнее равенство с формулой, выражающей теорему Фурье, и считая $f(x)$ непрерывной, получим

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}}f(\xi)\,d\xi\,d\alpha$$

Теорему Фурье можно распространить на функции со сколькими угодно переменными. Например, пусть задана функция $f(x,y)$; тогда, считая в ней y за постоянную произвольную, получим

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}}f(\xi,y)\,d\xi\,d\alpha$$

С другой стороны, по той же теореме Фурье, считая ξ за постоянную произвольную, пишем

$$f(\xi,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\beta(y-\eta)\sqrt{-1}}f(\xi,\eta)\,d\eta\,d\beta$$

подставив в предыдущую формулу, получим

$$f(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}}e^{\beta(y-\eta)\sqrt{-1}}f(\xi,\eta)\,d\alpha\,d\beta\,d\xi\,d\eta$$

Совершенно так же для функции с n переменными имеем

$$f(x,y,z,\ldots)=\frac{1}{(2\pi)^n}\overline{\int\int\int\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}}e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}}e^{\beta(y-\eta)\sqrt{-1}}\times$$
$$\times e^{\gamma(z-\zeta)\sqrt{-1}}\ldots f(\xi,\eta,\zeta,\ldots)\,d\alpha\,d\beta\ldots d\xi\,d\eta\,d\zeta\ldots$$

причем кратность интеграла есть $2n$ и переменные ξ, η, ζ,... должны переходить от $-\infty$ до $+\infty$ через действительные, а не мнимые значения.

§ 32. Обращаясь теперь к формуле (15) для величины u, удовлетворяющей уравнению (7), мы в ней положим

$$\psi_1(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = \frac{1}{(2\pi)^n} f_1(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$$
$$\psi_2(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = \frac{1}{(2\pi)^n} f_2(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi_p(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = \frac{1}{(2\pi)^n} f_p(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$$

тогда формула (15) примет вид

$$u = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\int \cdots \int\int_{-\infty}^{+\infty} T_1 e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\eta)\sqrt{-1}} \times$$
$$\times e^{\gamma(z-\zeta)\sqrt{-1}} \ldots f_1(\xi, \eta, \zeta, \ldots)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots d\xi\, d\eta\, d\zeta \ldots + \ldots \qquad (16)$$
$$\ldots + \frac{1}{(2\pi)^n} \int\int \cdots \int\int_{-\infty}^{+\infty} T_p e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\eta)\sqrt{-1}} e^{\gamma(z-\zeta)\sqrt{-1}} \ldots$$
$$\ldots f_p(\xi, \eta, \zeta, \ldots)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots d\xi\, d\eta\, d\zeta \ldots$$

Каковы бы ни были функции $f_1, f_2, \ldots f_p$, эта формула удовлетворяет уравнению (7), лишь бы интегралы оставались конечными и определенными. Заметим еще раз, что n означает число переменных $x, y, z, \ldots$, а значит и $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ и $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Остается выполнить так называемые *начальные условия*, т. е. чтобы при $t = 0$ само u обращалось в $f_1(x, y, z, \ldots)$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ — в $f_2(x, y, z, \ldots)$ и т. д. и $\frac{\partial^{p-1}}{\partial t^{p-1}}$ — в $f_p(x, y, z, \ldots)$.

Этого мы достигнем немедленно, если подберем решения $T_1, T_2, \ldots T_p$ так, чтобы при $t = 0$ величина T_1 обращалась в 1, остальные — в 0, чтобы при $t = 0$ величина $\frac{\partial T_2}{\partial t}$ обращалась в 1, остальные первые производные — в 0, вообще, чтобы при $t = 0$ производная $\frac{d^{k-1} T_k}{dt^{k-1}}$ обращалась в 1, производные же того же порядка от остальных функций T обращались в нуль.

В самом деле, если, сделав $t = 0$, мы получим $T_1 = 1$, а остальные T равные 0, то формула (16) будет состоять из одного первого члена, и в нем T_1 заменено 1; и тогда этот член по теореме Фурье равен $f_1(x, y, z, \ldots)$.

Так как производная порядка k от u есть

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \ldots + \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\ldots}} \int \frac{d^k T_{k+1}}{dt^k} e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} \times$$

$$\times e^{\beta(y-\eta)\sqrt{-1}} \ldots f_{k+1}(\xi, \eta, \ldots)\, d\alpha\, d\beta \ldots d\xi\, d\eta \ldots + \ldots$$

и в силу условий относительно T при $t=0$ все производные порядка k равны нулю, кроме $\frac{d^k T_{k+1}}{dt^k}$, то в выражении $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}$ останется только член $f_{k+1}(\xi, \eta \ldots)$, и в нем будет $\frac{d^k T_{k+1}}{dt^k} = 1$, и, значит, при $t=0$ будет

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = f_{k+1}(x, y, z, \ldots)$$

Итак, остается подобрать наши решения $T_1, T_2, \ldots T_p$ сообразно высказанным условиям.

Решение уравнения

$$\sum \alpha(\alpha\sqrt{-1})^\lambda \cdot (\beta\sqrt{-1})^\mu \cdot (\gamma\sqrt{-1})^\nu \ldots \frac{d^\tau T}{dt^\tau} = 0 \qquad (9')$$

есть

$$T = C_1 e^{\omega_1 t} + C_2 e^{\omega_2 t} + \ldots + C_p e^{\omega_p t}$$

следовательно, будет

$$\frac{d^k T}{dt^k} = \omega_1^{\,k} C_1 e^{\omega_1 t} + \omega_2^{\,k} C_2 e^{\omega_2 t} + \ldots + \omega_p^{\,k} C_p e^{\omega_p t}$$

и, значит, при $t=0$ будет

$$\left(\frac{d^k T}{dt^k}\right)_0 = \omega_1^{\,k} C_1 + \omega_2^{\,k} C_2 + \ldots + \omega_p^{\,k} C_p$$

Таким образом, для функции T_k, для определения постоянных $C_1, C_2, \ldots C_p$, получим уравнение

$$\begin{aligned}
C_1 + C_2 + \ldots + C_k &= 0 \\
\omega_1 C + \omega_2 C_2 + \ldots + \omega_p C_p &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots

Как известно, если $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p$ не равны между собою, то эти уравнения допускают одно определенное решение относительно неизвестных $C_1, C_2, \ldots C_p$, следовательно, мы для T_k получим величину в виде совершенно определенной функции от $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, которые заключаются в выражениях $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p$.

Итак, получаем следующую теорему, данную Коши в его статье, помещенной в 19-й тетради „Journal de l'École Polytechnique".

Теорема. *Чтобы удовлетворить уравнению*

$$\sum a \frac{\partial^{\lambda+\mu+\nu+\ldots+\tau} u}{\partial x^\lambda \partial y^\mu \ldots \partial t^\tau} = 0 \qquad \text{(I)}$$

и начальным условиям, что при $t = 0$ *должно быть*

$$u = f_1(x, y, z, \ldots); \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f_2(x, y, z, \ldots) \ldots \frac{\partial^{p-1} u}{\partial t^{p-1}} = f_p(x, y, z, \ldots) \qquad \text{(II)},$$

следует поступать так:

1) *В каждом члене предложенного дифференциального уравнения заменить число* λ *дифференцирований по* x *множителем* $(\alpha\sqrt{-1})^\lambda$, *число* μ *дифференцирований по* y *множителем* $(\beta\sqrt{-1})^\mu, \ldots$ *и т. д., но этого не делать относительно главной переменной* t *и число дифференцирований по* t *заменить множителем* $\frac{d^\tau T}{dt^\tau}$. *Таким образом, составится обыкновенное дифференциальное уравнение с переменною независимою* t *и неизвестною функцией* T, *порядка* p, *где* p *есть наивысшее число дифференцирований по* t. *Это уравнение будет*

$$\sum a (\alpha\sqrt{-1})^\lambda (\beta\sqrt{-1})^\mu \ldots \frac{d^\tau T}{dt^\tau} = 0 \qquad \text{(III)}$$

2) *Найти его общий интеграл по известным правилам.*

3) *Взять* p *частных решений этого уравнения*

$$T_1, T_2, \ldots T_p$$

— таких, что производная порядка $(k-1)$ *от решения* T_k *при* $t = 0$ *есть* 1, *производные же остальных порядков от нулевого до* $(p-1)$*-го суть нули.*

4) *Подставить эти величины* $T_1, T_2, \ldots T_p$ *в формулу*

$$\begin{aligned} u = {} & \frac{1}{(2\pi)^n} \int\int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \int\int T_1 e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\eta)\sqrt{-1}} \ldots \\ & \ldots f_1(\xi, \eta, \zeta, \ldots)\, d\alpha\, d\beta \ldots d\xi\, d\eta \ldots + \ldots \\ & \ldots + \frac{1}{(2\pi)^n} \int\int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \int\int T_p e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} e^{\beta(y-\eta)\sqrt{-1}} \ldots \\ & \ldots f_p(\xi, \eta, \zeta, \ldots)\, d\alpha\, d\beta \ldots d\xi\, d\eta \end{aligned} \qquad \text{(IV)}$$

тогда получится величина u, *удовлетворяющая как предложенному уравнению, так и начальным условиям.*

В том случае, когда корни уравнения (9) $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p$ не равны между собою, общая величина T определяется формулою

$$T = C_1 e^{\omega_1 t} + C_2 e^{\omega_2 t} + \ldots + C_p e^{\omega_p t}$$

а величины постоянных для решения T_k — системою уравнений (17).

Заметим еще раз, что предыдущая формула выражает искомую величину u только в том случае, если определенные интегралы, в нее входящие, конечны и определенны, функции же $f_1, f_2, \ldots f_p$ удовлетворяют ограничениям, вытекающим из „условий Дирихле", при которых теорема Фурье имеет место.

§ 33. Обратимся теперь к уравнениям с последним членом.

Возьмем уравнение

$$\sum a \frac{\partial^{\lambda+\mu+\ldots+\tau} u}{\partial x^{\lambda} \partial y^{\mu} \ldots \partial t^{\tau}} = f(x, y, z, \ldots t) \qquad (A)$$

Относительно него можно повторить замечания, относящиеся к обыкновенным линейным уравнениям; так, мы видели, что для того, чтобы освободиться от последнего члена, достаточно знать какое-нибудь частное решение уравнения (A). Оно весьма легко находится, если функция f будет вида

$$f(x, y, z, \ldots t) = e^{kx+ly+\ldots+mt} \varphi(x, y, z, \ldots t)$$

где φ есть заданная целая функция от букв, в нее входящих, некоторой степени q, а $k, l, \ldots m$ — заданные постоянные; тогда мы можем искать частное решение V такого же вида, как функция f, и положить

$$V = e^{kx+ly+\ldots+mt} \Phi(x, y, z, \ldots t)$$

где Φ есть общая целая функция с $(n+1)$ переменными и с неопределенными коэффициентами, той же степени q.

Подставив эту величину V в уравнение (A) и сократив общего множителя $e^{kx+ly+\ldots+mt}$, получим в левой части целую функцию степени q, коэффициенты которой составлены линейно из коэффициентов функции Φ, в правой же части будет вполне определенная функция φ той же степени q. Сравнивая коэффициенты подобных членов, мы получим столько уравнений первой степени, сколько неизвестных коэффициентов в функции Φ.

Понятно, что и тут будут исключения, когда величины

$$\alpha = k; \quad \beta = l; \quad \ldots \quad \omega = m$$

удовлетворяют уравнению (9). В этом случае, смотря по кратности корней этого уравнения, надо модифицировать форму функции V.

Понятно также, что если $f(x, y, z, \ldots t)$ есть сумма таких величин, как рассмотрено выше, то и V надо положить равным таковой же сумме.

§ 34. Приложим теперь общую теорию, изложенную в предыдущих параграфах, к классическим примерам.

Пример 1. *Колебания неограниченной упругой среды.*

Уравнение этих колебаний есть следующее:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \tag{1}$$

Оно исследовано Пуассоном в 1823 г. в статье, напечатанной в „Mémoires de l'Académie".

Применяя к этому уравнению общую теорему, приходим к уравнению такого вида:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = a^2 [(\alpha \sqrt{-1})^2 + (\beta \sqrt{-1})^2 + (\gamma \sqrt{-1})^2] T$$

т. е.

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + a^2 \rho^2 T = 0 \tag{2}$$

где

$$\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

Общий интеграл этого уравнения:

$$T = C_1 \cos a\rho t + C_2 \sin a\rho t \tag{3}$$

Найдем теперь T_1 и T_2.

Чтобы найти T_1, надо, чтобы при $t = 0$ было $T_1 = 1$ и $\frac{dT_1}{dt} = 0$, т. е.

$$C_1 = 1 \quad \text{и} \quad C_2 = 0$$

Для T_2 надо, чтобы при $t = 0$ было $T_2 = 0$ и $\frac{dT_2}{dt} = 1$, т. е.

$$C_1 = 0 \quad \text{и} \quad a\rho\, C_2 = 1$$

откуда $C_2 = \frac{1}{a\rho}$; следовательно,

$$T_1 = \cos a\rho t \quad \text{и} \quad T_2 = \frac{1}{a\rho} \sin a\rho t$$

Подставляя в формулу (IV) общей теоремы, имеем интеграл уравнения (1) в таком виде:

$$u = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int \cos a\rho t\, e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}}\, e^{\beta(y-\eta)\sqrt{-1}}\, e^{\gamma(z-\zeta)\sqrt{-1}} \times \\ \times f_1(\xi, \eta, \zeta)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \\ + \frac{1}{(2\pi)^3} \int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int \frac{\sin a\rho t}{a\rho}\, e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}}\, e^{\beta(y-\eta)\sqrt{-1}}\, e^{\gamma(z-\zeta)\sqrt{-1}} \times \\ \times f_2(\xi, \eta, \zeta)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \qquad (4)$$

Пуассон показал, что эти шестерные интегралы могут быть приведены к двойным. Для этой цели он доказал одну весьма важную теорему о приведении некоторых двойных интегралов к простым.

Положим, что дан интеграл

$$W = \int_0^{\pi} du \int_0^{2\pi} f(\alpha \sin u \cos v + \beta \sin u \sin v + \gamma \cos u) \sin u\, dv$$

где α, β, γ — постоянные. Пусть

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

и

$$\alpha = \rho \sin\theta \cos\varphi; \quad \beta = \rho \sin\theta \sin\varphi \quad \text{и} \quad \gamma = \rho \cos\theta$$

где θ и φ — также постоянные, легко получаемые через α, β, γ, тогда

$$\alpha \sin u \cos v + \beta \sin u \sin v + \gamma \cos u = \\ = \rho [\sin u \cos v \sin\theta \cos\varphi + \sin u \sin v \sin\theta \sin\varphi + \cos u \cos\theta] = \\ = \rho [\cos u \cos\theta + \sin u \sin\theta (\cos v \cos\varphi + \sin v \sin\varphi)] = \\ = \rho [\cos u \cos\theta + \sin u \sin\theta \cos(v - \varphi)]$$

Эта формула имеет простой геометрический смысл. Возьмем на сфере радиуса 1 две точки M и N, коих полярные координаты соответственно φ и θ и u и v; тогда

$$\cos MN = \cos\sigma = \cos u \cos\theta + \sin u \sin\theta \cos(v - \varphi)$$

Значит,

$$\alpha \sin u \cos v + \beta \sin u \sin v + \gamma \cos u = \rho \cos\sigma$$

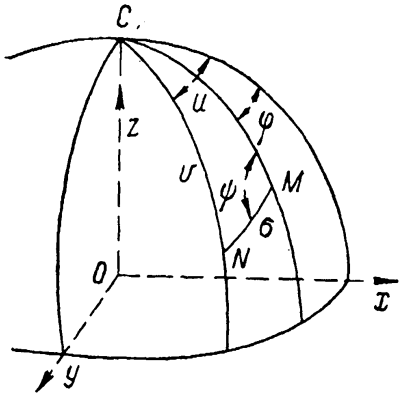
Следовательно,

$$W=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\sigma)\sin u\,du\,dv=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\sigma)\,ds \tag{5}$$

где ds есть элемент поверхности сферы радиуса, равного 1.

Так как полюс C на шаре совершенно произвольный, то можно взять полюс в точке M (фиг. 15) и от него определять положение точки N; тогда будет: $MN=\sigma$ — дополнение широты, $CMN=\psi$ — долгота от меридиана CM и, значит, $ds=\sin\sigma\,d\sigma\,d\psi$, и можно написать

$$W=\int_0^{\pi} d\sigma\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\sigma)\sin\sigma\,d\psi$$



Фиг. 15.

Долгота ψ не входит под знак функции f, а потому, интегрируя по ψ, получим

$$W=2\pi\int_0^{\pi} f(\rho\cos\sigma)\sin\sigma\,d\sigma$$

Таким образом, мы имеем следующую формулу Пуассона:

$$\int_0^{\pi} du\int_0^{2\pi} f(\alpha\sin u\cos v+\beta\sin u\sin v+\gamma\cos u)\sin u\,dv=$$

$$=2\pi\int_0^{\pi} f(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cos\sigma)\sin\sigma\,d\sigma$$

или, взяв $\cos\sigma$ за переменную, т. е. полагая $\cos\sigma=z$, получим

$$\int_0^{\pi} du\int_0^{2\pi} f(\alpha\sin u\cos v+\beta\sin u\sin v+\gamma\cos u)\sin u\,dv=$$

$$=2\pi\int_{-1}^{+1} f(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,z)\,dz \tag{6}$$

Чтобы обратить шестерные интегралы формулы (4) в двойные, воспользуемся формулой Пуассона. Если обозначить через ω в формуле Пуассона величину

$$\omega=\alpha\sin u\cos v+\beta\sin u\sin v+\gamma\cos u$$

и за функцию f взять $f(\omega) = e^{at\omega\sqrt{-1}}$, то получим

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{at\omega\sqrt{-1}} \sin u\, du\, dv = 2\pi \int_{-1}^{+1} e^{at\rho z\sqrt{-1}}\, dz =$$

$$= \frac{2\pi}{at\rho\sqrt{-1}}\left(e^{at\rho\sqrt{-1}} - e^{-at\rho\sqrt{-1}}\right) = \frac{4\pi}{t}\cdot\frac{\sin at\rho}{a\rho}$$

Отсюда можно вывести $\frac{\sin at\rho}{a\rho}$ в виде двойного интеграла, именно

$$\frac{\sin at\rho}{a\rho} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} du \int_0^{2\pi} te^{at\omega\sqrt{-1}} \sin u\, dv \qquad (*)$$

Дифференцируя по t, получим

$$\cos at\rho = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{at\omega\sqrt{-1}}\, t \sin u\, du\, dv \qquad (**)$$

Заменяя $\cos a\rho t$ и $\frac{\sin a\rho t}{a\rho}$ этими величинами под знаками интеграла в формуле (4), мы получим, вместо шестерных, восьмерные интегралы, и у нас будет

$$\text{2-й член формулы (4)} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int e^{\alpha(x+at\sin u\cos v-\xi)\sqrt{-1}} \times\right.$$

$$\times e^{\beta(y+at\sin u\sin v-\eta)\sqrt{-1}}\, e^{\gamma(z+at\cos u-\zeta)\sqrt{-1}} \times$$

$$\left.\times f_2(\xi,\eta,\zeta)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\right] t\sin u\, du\, dv$$

Но по теореме Фурье величина, стоящая в [ ], как раз равна функции f_2, где вместо ξ, η, ζ подставлено

$$x + at\sin u\cos v; \quad y + at\sin u\sin v; \quad z + at\cos u$$

Таким образом, эта формула напишется проще:

$$\text{2-й член формулы (4)} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(x+at\sin u\cos v, y+at\sin u\sin v, z+$$

$$+at\cos u)\,t\sin u\,du\,dv$$

Чтобы получить первый член той же формулы, заменим $\cos a\varphi t$ его величиною (**); тогда получим

$$\text{1-й член формулы (4)} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha(x+at\sin u\cos v-\xi)\sqrt{-1}}\times\right.$$

$$\times e^{\beta(y+at\sin u\sin v-\eta)\sqrt{-1}}\, e^{\gamma(z+at\cos u-\zeta)\sqrt{-1}}\times$$

$$\left.\times f_1(\xi\eta\zeta)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\right]t\sin u\,du\,dv =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x+at\sin u\cos v, y+at\sin u\sin v, z+at\cos u)\,t\sin u\,du\,dv$$

Складывая эти два выражения, мы получим величину u:

$$u = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(x+at\sin u\cos v, y+at\sin u\sin v, z+at\cos u)\,t\sin u\,du\,dv+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x+at\sin u\cos v, y+at\sin u\sin v, z+at\cos u)\,t\sin u\,du\,dv \qquad (7)$$

причем интегрирование по u от 0 до π и по v от 0 до 2π.

Это и есть знаменитый Пуассонов интеграл уравнения (1).

Очевидно, что u при $t=0$ обращается в $f_1(x,y,z)$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ в $f_2(x,y,z)$.

Предлагается в виде задачи проверить, что величина (7) удовлетворяет уравнению (1).

§ 35. Если величина u, удовлетворяющая уравнению (1), не зависела бы от x, то она удовлетворяла бы уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (1)$$

Мы эту величину получим, предположив, что функции f_1 и f_2 не содержат величины $x+at\sin u\cos v$ под своим знаком.

Переменив в последнем уравнении буквы y на x и z на y, мы получим уравнение (1′)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1′}$$

Формула же (7) дает для этого уравнения следующий интеграл:

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(x + at\sin u\sin v, y + at\cos u)\, t\sin u\, du\, dv + \\ + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x + at\sin u\sin v, y + at\cos u)\, t\sin u\, du\, dv \end{aligned} \tag{8}$$

§ 36. Наконец, предположим в уравнении (1′), что u не зависит от x; тогда оно обратится в такое:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1″}$$

а если мы переменим здесь y на x, то получим уравнение движения струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1‴}$$

Следовательно, сделав указанные замены в формуле (8), мы получим интеграл уравнения (1‴) в таком виде:

$$u = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(x + at\cos u)\, t\sin u\, du\, dv + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x + at\cos u)\, t\sin u\, du\, dv$$

Интегрирование по v можно выполнить, и получим

$$u = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f_2(x + at\cos u)\, t\sin u\, du + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi} f_1(x + at\cos u)\, t\sin u\, du \tag{9}$$

Нетрудно отсюда получить известный Даламбертов интеграл.

В самом деле, пусть будет

$$\int f_2(\xi)\, d\xi = F_2(\xi) \quad \text{и} \quad \int f_1(\xi)\, d\xi = F_1(\xi)$$

тогда, делая в формуле (9)

$$x + at\cos u = \xi$$

мы получим

$$-t\sin u\,du=\frac{1}{a}\,d\xi$$

кроме того,

$$\text{при}\quad u=0\quad \xi=x+at$$
$$\text{при}\quad u=\pi\quad \xi=x-at$$

и уравнение (9) дает

$$u=-\frac{1}{2a}\int_{x+at}^{x-at} f_2(\xi)\,d\xi-\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{x+at}^{x-at} f_1(\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2a}[F_2(x+at)-F_2(x-at)]+\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial t}[F_1(x+at)-F_1(x-at)]=$$

$$=\frac{1}{2a}[F_2(x+at)-F_2(x-at)]+\frac{1}{2}[f_1(x+at)+f_1(x-at)]$$

Ясно, что u при $t=0$ обращается в $f_1(x)$, а его производная

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}[f_2(x+at)+f_2(x-at)]+\frac{a}{2}[f_1'(x+at)-f_1'(x-at)]$$

обращается в $f_2(x)$.

Если бы мы сделали, для сокращения письма,

$$\frac{1}{2a}F_2(x+at)+\frac{1}{2}f_1(x+at)=\varphi(x+at)$$

и

$$-\frac{1}{2a}F_2(x-at)+\frac{1}{2}f_1(x-at)=\psi(x-at)$$

то наша величина u приняла бы вид

$$u=\varphi(x+at)+\psi(x-at)$$

в котором Даламберт и дал общий интеграл уравнения колебания струны.

§ 37. Если бы, вместо того, чтобы в уравнении (1) предполагать, что u не зависит от x, а только от y и z, мы предположили бы прямо, что оно не зависит от z, то функции f_1 и f_2 не зависели бы от последней величины, стоящей под их знаком, вместо того, чтобы не зависеть от первой; тогда в интеграле (8) уравнения (1′) к x было бы прибавлено $at\sin u\cos v$, к y — величина $at\sin u\sin v$. Вообще, сделаем, для сокращения письма,

$$p_1=at\sin u\cos v;\qquad p_2=at\sin u\sin v;\qquad p_3=at\cos u$$

тогда формулу (7) можно написать в более общем виде следующим образом:

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(x + p_h, y + p_k, z + p_l)\, t \sin u \, du \, d\upsilon +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(x + p_i, y + p_j, z + p_m)\, t \sin u \, du \, d\upsilon$$

где h, k, l представляют значки 1, 2, 3 в каком угодно порядке, точно так же i, j, m — те же значки в каком угодно порядке.

Мемуар Пуассона, заключающий эти результаты, читан в Академии в 1819 г. и озаглавлен: „Sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques".

§ 38. Пример 2. *Уравнение движения неограниченной пластинки.* Уравнение это следующее:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) = 0 \qquad (1)$$

Применяя общую методу, составляем сперва обыкновенное уравнение с неизвестною T. Оно будет

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + b^2 \left[(\alpha \sqrt{-1})^4 + 2 (\alpha \sqrt{-1})^2 (\beta \sqrt{-1})^2 + (\beta \sqrt{-1})^4 \right] T = 0$$

иначе

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + b^2 (\alpha^4 + 2\alpha^2 \beta^2 + \beta^4) T = 0$$

или

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + b^2 (\alpha^2 + \beta^2)^2 T = 0$$

Общий интеграл его есть

$$T = C_1 \cos b (\alpha^2 + \beta^2) t + C_2 \sin b (\alpha^2 + \beta^2) t$$

отсюда получим T_1 и T_2. Замечая, что при $t = 0$ должно быть

$$T_1 = 1 \quad \text{и} \quad \frac{dT_1}{dt} = 0; \quad T_2 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dT_2}{dt} = 1$$

окажется

$$T_1 = \cos b (\alpha^2 + \beta^2) t; \qquad T_2 = \frac{\sin b (\alpha^2 + \beta^2) t}{b (\alpha^2 + \beta^2)} = \int_0^t \cos b (\alpha^2 + \beta^2) t \, dt$$

Зная T_1 и T_2, пишем общий интеграл нашего уравнения с двумя произвольными функциями в таком виде:

$$u = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int \cos b(\alpha^2+\beta^2)\, t e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}}\, e^{\beta(y-\eta)\sqrt{-1}} \times \\ \times f_1(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta\, d\alpha\, d\beta + \\ + \int_0^t \frac{1}{(2\pi)^2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int \cos b(\alpha^2+\beta^2)\, t e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}}\, e^{\beta(y-\eta)\sqrt{-1}} \times \right. \\ \left. \times f_2(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta\, d\alpha\, d\beta\right] dt \qquad (2)$$

Здесь четверные интегралы по переменным α, β, ξ, η могут быть сведены к двойным. Для этой цели удобнее показательные функции заменить косинусами и синусами и написать формулу (2) в таком виде:

$$u = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int \cos b(\alpha^2+\beta^2)\, t \cos\alpha(x-\xi)\cos\beta(y-\eta) f_1(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta\, d\alpha\, d\beta \\ + \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^t dt\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int \cos b(\alpha^2+\beta^2)\, t \cos\alpha(x-\xi)\cos\beta(y-\eta) f_2(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta\, d\alpha\, d\beta\right] \qquad (2')$$

Займемся сперва первым членом, ибо после его преобразования прямо напишем второй, заменив f_1 на f_2.

Для этого преобразования нам нужны следующие интегралы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos hx^2 \cos lx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{h}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{l^2}{4h}\right) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \sin hx^2 \cos lx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{h}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{l^2}{4h}\right) \qquad (*)$$

причем предполагается $h > 0$.

Для вывода этих интегралов можно поступать различно.

Во-первых, можно взять известный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kz^2} \cos lz\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}} e^{-\frac{l^2}{4k}}$$

в котором k или действительная и положительная величина, или мнимая, у которой действительная часть положительная.

Сделав поэтому $k = g + h\sqrt{-1}$, где g и h — положительные действительные величины, подставив в предыдущие интегралы и отделив в правой и левой частях действительные от мнимых и уравняв действительные и мнимые, получим два определенных интеграла, более общих, нежели (*). Из них найдем (*), предполагая g бесконечно малым и переходя к пределу.

Другой способ следующий.

Известны интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Подставим здесь $x = y - l$, так что

$$x^2 = y^2 - 2ly + l^2$$

тогда

$$\cos x^2 = \cos(y^2 + l^2)\cos 2ly + \sin(y^2 + l^2)\sin 2ly$$

$$\sin x^2 = \sin(y^2 + l^2)\cos 2ly - \cos(y^2 + l^2)\sin 2ly$$

Но cos и sin дуг $y^2 + l^2$ сведутся на cos и sin дуг y^2 и l^2. Сделав это и подставив в выражения $\cos x^2$ и $\sin x^2$ их величины под знаками интеграла, мы получим два уравнения, из которых найдем, как неизвестные, интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos y^2 \cos 2ly\, dy \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin y^2 \cos 2ly\, dy \qquad (*')$$

ибо очевидно, что интегралы, содержащие $\sin 2ly$, как интегралы нечетной функции, равны нулю. От интегралов (*') переходим к интегралам (*), полагая $y^2 = hx^2$ или $y = x\sqrt{h}$ и заменяя постоянную $2l\sqrt{h}$ через l.

Приняв, следовательно, уравнения (*), разберем первый член формулы (2').

Так как

$$\cos bt(\alpha^2 + \beta^2) = \cos bt\alpha^2 \cos bt\beta^2 - \sin bt\alpha^2 \sin bt\beta^2$$

то, подставив эту величину в первой член формулы (2'), мы его можем написать в таком виде:

$$\text{1-й член формулы } (2') = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int \left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int (\cos bt\alpha^2 \cos bt\beta^2 - \right.$$

$$\left. - \sin bt\alpha^2 \sin bt\beta^2)\cos\alpha(x-\xi)\cos(y-\eta)\beta\, d\alpha\, d\beta\right] f_1(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

Интеграл в [ ] распадается на произведение интеграла, взятого по α, на интеграл, взятый по β, и будет

$$\text{1-й член формулы } (2') =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \cos bt\,\alpha^2 \cos(x-\xi)\,\alpha\, d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos bt\,\beta^2 \cos(y-\eta)\,\beta\, d\beta - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \sin bt\,\alpha^2 \cos(x-\xi)\,\alpha\, d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \sin bt\,\beta^2 \cos(y-\eta)\,\beta\, d\beta \right] f_1(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

Сделав в формуле (*) $h = bt$, а затем последовательно $l = x - \xi$, потом $y - \eta$, получим

$$\text{1-й член формулы } (2') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{\pi}{bt} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{(x-\xi)^2}{4bt}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{(y-\eta)^2}{4bt}\right) - \right.$$

$$\left. - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{(x-\xi)^2}{4bt}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{(y-\eta)^2}{4bt}\right) \right] f_1(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{4\pi b} \int_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{1}{t} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4bt}\right) f_1(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{4\pi b} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} \sin\left(\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4bt}\right) f_1(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

Положим

$$\frac{\xi - x}{2\sqrt{bt}} = x_1 \quad \text{и} \quad \frac{\eta - y}{2\sqrt{bt}} = y_1$$

тогда будет

$$\xi = x + 2\sqrt{bt}\, x_1; \quad \eta = y + 2\sqrt{bt}\, y_1; \quad d\xi\, d\eta = 4bt\, dx_1\, dy_1$$

и, по подстановке и сокращении,

$$\text{1-й член формулы } (2') =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x_1^2 + y_1^2) f_1(x + 2\sqrt{bt}\, x_1, y + 2\sqrt{bt}\, y_1)\, dx_1\, dy_1$$

На основании этой формулы пишем интеграл нашего уравнения в таком преобразованном виде:

$$u=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int \sin(x_1^2+y_1^2) f_1(x+2\sqrt{bt}\,x_1, y+2\sqrt{bt}\,y_1)\,dx_1\,dy_1 + \\ +\frac{1}{\pi}\int_0^t dt\int_{-\infty}^{+\infty}\int \sin(x_1^2+y_1^2) f_2(x+2\sqrt{bt}\,x_1, y+2\sqrt{bt}\,y_1)\,dx_1\,dy_1 \tag{3}$$

§ 39. Пуассон приходит к интегралу этого уравнения иначе. Мы видели (§ 26), что интеграл уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) \tag{A}$$

выражается формулою

$$\varphi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int e^{-(x_1^2+y_1^2)} f(x+2\sqrt{at}\,x_1, y+2\sqrt{at}\,y_1)\,dx_1\,dy_1 \tag{B}$$

Из уравнения (A) находим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=a\left[\frac{\partial^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}{\partial y^2}\right]$$

подставляя снова во вторую часть вместо $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ его величину из уравнения (A), получим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=a^2\left[\frac{\partial^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)}{\partial y^2}\right]=a^2\left[\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}\right]$$

Сравнивая это уравнение с (1), видим, что φ обратится в u, если $a^2=-b^2$, т. е. когда $a=+b\sqrt{-1}$ или $-b\sqrt{-1}$. Мы получим, следовательно, u в виде суммы двух двойных интегралов, из которых первый получится из формулы (B), подставляя туда вместо a величину $+b\sqrt{-1}$, а другой — из той же формулы (B), подставив в нее $-b\sqrt{-1}$ вместо a и переменив функцию f на другую F от тех же величин. Таким образом, получается общий интеграл уравнения (1) с двумя произвольными функциями f и F, но не отвечающими начальным условиям.

Из них Пуассон выводит наши формулы, выражающие эти условия, но не строго.

Задачи. Интегрировать следующие уравнения:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + b^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = b^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) \tag{2}$$

Примечание: Можно применить показанный в предыдущем параграфе метод Пуассона, ибо мы знаем интеграл уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) \tag{c}$$

Дифференцируя два раза по t, получим после замены:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} = a^2\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right)$$

Следует также применить и общую методу и, для преобразования интегралов, воспользоваться формулою Пуассона, показанной в § 34.

Проф. А. Н. Коркин ограничился лишь этою чисто математическою стороною дела, причем все приведенное в этой главе было им изложено со всеми выкладками в течение трех вечеров!

ГЛАВА III

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПРИ УСЛОВИЯХ ДЛЯ ГРАНИЦ ОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЫ

ПЕРВАЯ МЕТОДА ПУАССОНА

Большая часть заключающегося в этой главе составляет также изложение этого предмета А. Н. Коркиным. Дело было так.

В 1901 г. я попросил Александра Николаевича объяснить мне непонятое мною место в одном из мемуаров Пуассона, помещенных в 19-й тетради журнала Политехнической школы. Александр Николаевич не только в нескольких словах разъяснил то, что мне представлялось непонятным, но еще и прочел мне целую лекцию, в которой дал свое изложение методы Пуассона. В какой мере он владел этим предметом, — читатель может судить по тому, что эта лекция, составляющая §§ 40, 41 и 43 этой главы, была им прочитана в ответ на мой вопрос, для Александра Николаевича неожиданный, немедленно, без всякой подготовки, причем Александр Николаевич почти не пользовался карандашом, который держал в руке, а, лишь следя глазами за моею записью, продиктовал мне все изложенное ниже со всеми выкладками и формулами.

§ 40. Первоначально Лагранж, рассматривая движение многоугольника, стороны которого суть негибкие и нерастяжимые стержни, соединенные в углах бесконечно малым шарнирами, концы же многоугольника закреплены, дал решение этого вопроса при помощи особенной формулы интерполирования, зависящей от синусов различных дуг.[1]

Если мы предположим стороны многоугольника бесконечно малыми, — следовательно, число их бесконечно большим, — то из Лагранжевых формул получим новую, относящуюся к движению струны, когда перейдем к пределу.

Для движения многоугольника приходится интегрировать некоторую систему линейных совокупных уравнений; если же поставить вопрос о струне прямо и решать его непосредственно, то придется интегрировать

---

[1] Mécanique analytique, t. I, sixième section, § 30 и след.

уравнение с частными производными второго порядка, которое было дано еще Даламбертом.

Из этого примера видно, что система бесконечно большого числа совокупных уравнений заменяется уравнением с частными производными.

Нужно заметить, что Даламберт дал общий интеграл для уравнения движения струны, но Даниил Бернулли заметил, что это решение, по крайней мере непосредственно, не показывает обстоятельств движения и что нужно рассматривать ряды, расположенные по синусам кратных дуг, чтобы эти обстоятельства обнаружить, тогда и будет видно, что звучащая струна издает бесчисленное множество звуков, из коих каждый соответствует одному члену ряда.

Вопросы об удовлетворении условиям на границах движущихся тел, а также те условия, которые дает для этих границ теория тепла, оставались совершенно неисследованными до появления мемуара Фурье в начале 1812 г. Затем, в 1815 г., Пуассон, зная уже работы Фурье, представил в Институт мемуар о распространении тепла в твердых телах, а затем напечатал два мемуара об этом предмете в 19-й тетради журнала Политехнической школы.

Метода, которую он здесь дает, относится только к уравнениям, содержащим, кроме времени, *одну* переменную независимую.

Затем появились сначала „Théorie analytique de la chaleur“ Фурье, затем „Théorie mathématique de la chaleur“ Пуассона.

В последнем сочинении Пуассон уже не употребляет той методы, которую он изложил в 19-й тетради журнала Политехнической школы, но применяет другую методу, при которой вычисление несколько проще, но у которой зато есть и свои недостатки.[1]

При изучении метод, относящихся к интегрированию при заданных условиях на границах, приходится ограничиться поэтому теми частными случаями, которые до сих пор рассмотрены, и самые эти методы рассматривать как средство для нахождения требуемого решения, которое в каждом случае следует строго доказать.

Мы начнем изложение этих метод с классического примера, именно с уравнения колебания струны или продольных колебаний прута.

§ 41. Колебания струны. Уравнение колебания струны следующее:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

При этом условия для концов струны будут различны, смотря по тому, концы эти ($x = 0$ и $x = l$) свободны или нет.

---

[1] Эта метода изложена в гл. IV этого курса.

Рассмотрим сначала случай, когда перемещение u равно нулю при концах во все время движения, т. е. когда должно быть

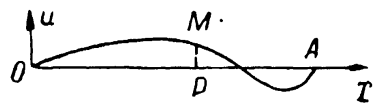
$$\left.\begin{array}{l} u=0 \quad \text{при } x=0 \\ u=0 \quad \text{при } x=l \end{array}\right\} \text{ при всяком значении } t \qquad (*)$$

Общий интеграл уравнения (1) был дан Даламбертом и, как известно, следующий:

$$u=\varphi(x+at)+\psi(x-at)$$

где φ и ψ — совершенно произвольные функции.

Предположим, что в начале движения каждую точку струны OA поместили произвольно, но достаточно близко к прямой OA, так что кривая OMA — произвольная; нужно только, чтобы она проходила через точки O и A. Ордината ее $PM=u$, соответствующая абсциссе $x=OP$, будет, следовательно, произвольно заданная функция от x (фиг. 16). Затем, каждой точке струны сообщается произвольная скорость или толчок, вследствие чего $\frac{\partial u}{\partial t}$ при начале движения будет также другая произвольно заданная функция от x.



Фиг. 16.

Пусть при $t=0$ будет

$$u=f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=F(x)$$

тогда эти функции заданы для всех x от $x=0$ до $x=l$.

Таким образом, необходимо, чтобы:

1) при $t=0$ было

$$u=f(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}=F(x)$$

где $f(x)$ и $F(x)$ должны быть заданы так, чтобы при $x=0$ и $x=l$ они были равны нулю;

2) при $x=0$ было $u=0$ при всяком t;

3) при $x=l$ было $u=0$ при всяком t.

По этим условиям можно определить функции $\varphi(x+at)$ и $\psi(x-at)$ для всех величин аргументов $x+at$ и $x-at$ от $-\infty$ до $+\infty$.

Мы применим для решения этого вопроса методу Пуассона, изложенную им в 19-й тетради журнала Политехнической школы, и будем намечать те главные операции, из коих она состоит.

Положим, что надо интегрировать какое ни есть линейное уравнение $L=0$ с частными производными между x и t, какого угодно, например второго, порядка, с постоянными коэффициентами и без последнего члена. Мы будем предполагать, называя через u неизвестную функцию, что $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ входит в уравнение $L=0$; тогда мы знаем из главы II, что при помощи теоремы Фурье мы всегда можем найти такое решение u, что оно удовлетворит уравнению $L=0$ и при $t=0$ само u обратится в $f(x)$, а $\frac{\partial u}{\partial t}$ — в $F(x)$, причем предполагается, что определенные интегралы, которые вводит теорема Фурье, имеют смысл и будут величинами конечными и что функции $f(x)$ и $F(x)$ известны для всех величин x от $-\infty$ до $+\infty$.

Первая операция в методе Пуассона и состоит в том, что по правилам главы II составляется общее выражение u, удовлетворяющее предложенному уравнению и такое, что при $t=0$ само u обратится в $f(x)$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ — в $F(x)$, когда эти функции будут заданы от $x=-\infty$ до $x=+\infty$.

Применим это к нашему уравнению (1).

По правилу § 32 мы должны написать

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} T_1 e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} f(\xi)\,d\xi\,d\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} T_2 e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} F(\xi)\,d\xi\,d\alpha$$

при этом как T_1, так и T_2 будут частными решениями уравнения

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -a^2\alpha^2 T$$

Общая величина T будет

$$T = C_1 \cos a\alpha t + C_2 \sin a\alpha t$$

и надо, чтобы при $t=0$ было

$$T_1 = 1; \qquad \frac{dT_1}{dt} = 0$$

$$T_2 = 0; \qquad \frac{dT_2}{dt} = 1$$

так что мы получаем

$$T_1 = \cos a\alpha t; \qquad T_2 = \frac{1}{a\alpha}\sin a\alpha t$$

и, значит, у нас будет

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos a\alpha t\, e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} f(\xi)\,d\xi\,d\alpha +$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a\alpha t}{\alpha} e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} F(\xi)\,d\xi\,d\alpha$$

Но мы не знаем величин $f(\xi)$ и $F(\xi)$ вне пределов $\xi=0$ и $\xi=l$, ибо эти функции заданы лишь между этими пределами.

Вторая операция состоит в том, что, пользуясь условиями, относящимися к значениям u при $x=0$ и $x=l$, и заданными значениями функции $f(x)$ и $F(x)$ для промежутка от $x=0$ до $x=l$, составляются условия, дающие возможность найти эти функции для любого значения аргумента.

Чтобы вывести эти условия для функций $f(\xi)$ и $F(\xi)$, сделаем

$$\xi - x = z; \qquad d\xi = dz$$

пределы по z будут те же, что и по ξ, т. е. $-\infty$ и $+\infty$.

Мы делаем эту подстановку для того, чтобы величина x, для которой поставлены условия на границах, вошла в наши функции f и F.

Мы получим

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos a\alpha t\, e^{-\alpha z\sqrt{-1}} f(x+z)\, dz\, d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a\alpha t}{\alpha} e^{-\alpha z\sqrt{-1}} F(x+z)\, dz\, d\alpha$$

Соединим теперь элементы интеграла по z, относящиеся к величинам z и $-z$; тогда u напишется так:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} \cos a\alpha t \cos \alpha z\,[f(x+z)+f(x-z)]\, dz\, d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{\sin a\alpha t}{\alpha} \cos \alpha z\,[F(x+z)+F(x-z)]\, dz\, d\alpha$$

ибо члены, содержащие под знаком интеграла $\sin \alpha z$, пропадут, так как интегрирование по α производится от $-\infty$ до $+\infty$ и подинтегральная функция относительно α будет нечетная.

Совершенно подобным же образом мы трактовали бы и уравнение $L=0$, если бы для границ $x=0$ и $x=l$ были заданы какие-нибудь дифференциальные уравнения линейные с постоянными коэффициентами без последнего члена. Понятно, что под интегралы входили бы, кроме функции f и F от аргументов $(x+z)$ и $(x-z)$, еще и их производные по z. Затем интегрированием по частям (по переменной z) можно дифференцирования, сделанные по этой переменной, перевести на другие множители, после этого выражение u под знаком интеграла будет содержать только функции f и F.

В нашем случае, для того, чтобы при $x=0$ было $u=0$, *нужно, чтобы каждый элемент того и другого интеграла в отдельности уничтожался особо;* значит, должно быть

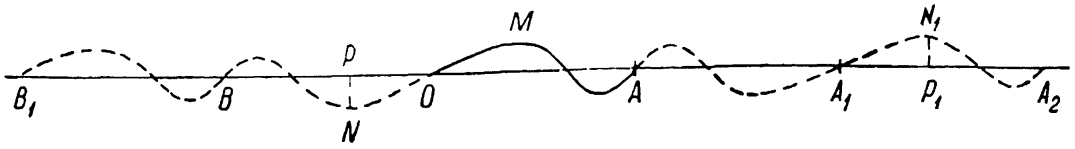
$$\begin{aligned} f(z)+f(-z)&=0 \\ F(z)+F(-z)&=0 \end{aligned} \qquad (*)$$

Зададим функцию $f(z)$ для всех значений z от 0 до l совершенно произвольно.

Пусть длины (фиг. 17)

$$AO=AA_1=A_1A_2\ldots=OB=BB_1=\ldots=l$$

тогда у нас будет известен кусок OMA.



Фиг. 17.

В силу условия $f(z)+f(-z)=0$, нам сделается известен кусок ONB от O до B.

Сделаем теперь $x=l$. Тогда должно быть $u=0$, и будут

$$\begin{aligned} f(l+z)+f(l-z)&=0 \\ F(l+z)+F(l-z)&=0 \end{aligned}$$

Если мы теперь возьмем нашу функцию, уже известную от A до B, то для всякой абсциссы $AP=l-z$ будем знать ординату $PN=u$; но и по условию $f(l+z)=-f(l-z)$ мы будем знать ординату $P_1N_1=PN$, соответствующую абсциссе A_1P_1. Таким образом, это условие дает нам величины нашей функции до точки A_2, а тогда, вследствие условия $f(z)+f(-z)=0$, будем знать нашу функцию и до точки B_2 и т. д.

Легко видеть, что эти два условия определяют наши функции $f(\xi)$ и $F(\xi)$ для всех величин ξ от $-\infty$ до $+\infty$.

Теперь мы могли бы довольствоваться величиною u, полученной по правилу главы II, так как под знаком определенных интегралов функции вполне известны.

Но собственно метода Пуассона состоит в преобразовании интегралов, заключающихся в u, в ряды так, что в этих последних остаются только значения $f(\xi)$ и $F(\xi)$, заданные от 0 до l, и не будут совсем входить в формулы те величины этих функций, которые мы показали как вывести из заданных.

Третья операция состоит в нахождении интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\xi\sqrt{-1}} f(\xi)\, d\xi \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\xi\sqrt{-1}} F(\xi)\, d\xi$$

которые, будучи потом умножены на

$$e^{\alpha x\sqrt{-1}} \cos a\alpha t\, d\alpha$$

и

$$e^{\alpha x\sqrt{-1}} \frac{\sin a\alpha t}{\alpha} d\alpha$$

и проинтегрированы от $-\infty$ до $+\infty$ по α, и доставят величину u.

Величина этих интегралов вообще неопределенная, и их надо рассматривать как предел, к которому стремятся другие интегралы, имеющие определенную величину. С этой целью Пуассон вводит интегралы

$$p(h) = \int_0^{\infty} e^{-hz} f(z)\, dz; \qquad q(h) = \int_0^{-\infty} e^{hz} f(z)\, dz$$

и

$$P(h) = \int_0^{\infty} e^{-hz} F(z)\, dz; \qquad Q(h) = \int_0^{-\infty} e^{hz} F(z)\, dz$$

где h есть некоторая величина, не зависящая от z и положительная, если она действительная, и с положительной действительной частью, если она мнимая.

Возьмем $h = \varepsilon + \alpha\sqrt{-1}$ в интеграле $p(h)$ и $h = \varepsilon - \alpha\sqrt{-1}$ в интеграле $q(h)$, причем ε есть бесконечно малая положительная величина; тогда предел разности этих двух интегралов, т. е.

$$\lim[p(\varepsilon + \alpha\sqrt{-1}) - q(\varepsilon - \alpha\sqrt{-1})] =$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-\alpha z\sqrt{-1}} f(z)\, dz - \int_0^{-\infty} e^{-\alpha z\sqrt{-1}} f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha z\sqrt{-1}} f(z)\, dz$$

и есть первый из тех двух интегралов, которые надо найти; очевидно, что второй выразится совершенно подобным же образом через $P(h)$ и $Q(h)$.

Чтобы найти величины $p(h)$ и $q(h)$, возьмем наши условия, относящиеся к функции $f(z)$, так как относительно функции $F(z)$ будет то же самое, что и для первой.

Итак, имеем

$$f(z) + f(-z) = 0$$
$$f(l + z) + f(l - z) = 0$$

Умножим оба эти уравнения на $e^{-hz}dz$ и интегрируем от 0 до ∞; получим

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-hz}f(z)\,dz+\int_0^\infty e^{-hz}f(-z)\,dz=0\\ \int_0^\infty e^{-hz}f(l+z)\,dz+\int_0^\infty e^{-hz}f(l-z)\,dz=0\end{aligned}\qquad(2)$$

Мы имеем непосредственно

$$\int_0^\infty e^{-hz}f(z)\,dz=p(h)$$

Затем

$$\int_0^\infty e^{-hz}f(-z)\,dz=-\int_0^{-\infty} e^{hz}f(z)\,dz=-q(h)$$

Следовательно, первое уравнение (2) дает

$$p(h)-q(h)=0\qquad(3)$$

Делаем $l+z=y$, $dz=dy$; пределы по y будут: l и $+\infty$.
Тогда

$$\int_0^{+\infty} e^{-hz}f(l+z)\,dz=\int_l^\infty e^{-h(y-l)}f(y)\,dy=e^{hl}\int_l^\infty e^{-hy}f(y)\,dy=$$

$$=e^{hl}\left[\int_0^\infty e^{-hz}f(z)\,dz-\int_0^l e^{-hz}f(z)\,dz\right]=e^{hl}\left[p(h)-\int_0^l e^{-hz}f(z)\,dz\right]$$

Подобным же образом, положив $l-z=y$, $dz=-dy$, пределы для y будут: $y=l$ и $y=\infty$; получим

$$\int_0^\infty e^{-hz}f(l-z)\,dz=-\int_l^{-\infty} e^{-h(l-y)}f(y)\,dy=-e^{-hl}\int_l^{-\infty} e^{hy}f(y)\,dy=$$

$$=-e^{-hl}\left[\int_0^{-\infty} e^{hy}f(y)\,dy-\int_0^l e^{hy}f(y)\,dy\right]=-e^{-hl}\left[q(h)-\int_0^l e^{hy}f(y)\,dy\right]$$

Таким образом, уравнения (2′) будут

$$p(h)-q(h)=0$$

$$e^{hl}p(h)-e^{-hl}q(h)=e^{hl}\int_0^l e^{-hz}f(z)\,dz-e^{-hl}\int_0^l e^{hz}f(z)\,dz$$

Отсюда найдем

$$p(h)=q(h)=\frac{e^{hl}\int_0^l e^{-hz}f(z)\,dz-e^{-hl}\int_0^l e^{hz}f(z)\,dz}{e^{hl}-e^{-hl}}$$

Сделаем для сокращения

$$\lambda(h)=e^{hl}\int_0^l e^{-hz}f(z)\,dz-e^{-hl}\int_0^l e^{hz}f(z)\,dz$$

и

$$\mu(h)=e^{hl}-e^{-hl}$$

тогда

$$p(h)=q(h)=\frac{\lambda(h)}{\mu(h)} \tag{4}$$

Остается выполнить переход к пределу. Пусть ε есть бесконечно малая положительная величина; тогда, как мы видели, интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha z\sqrt{-1}}f(z)\,dz=\lim\left[p(\varepsilon+\alpha\sqrt{-1})-q(\varepsilon-\alpha\sqrt{-1})\right]=$$

$$=\lim\left[\frac{\lambda(\varepsilon+\alpha\sqrt{-1})}{\mu(\varepsilon+\alpha\sqrt{-1})}-\frac{\lambda(\varepsilon-\alpha\sqrt{-1})}{\mu(\varepsilon-\alpha\sqrt{-1})}\right]$$

Но функции λ и μ нечетные; следовательно, $p(h)$ и $q(h)$ будут четные, и, следовательно, при $\varepsilon=0$ *упомянутый предел равен нулю, исключая те величины* α, *для которых* $\mu(\alpha\sqrt{-1})=0$.

Но $\mu(\alpha\sqrt{-1})=2\sqrt{-1}\sin\alpha l$; значит, наш предел может быть неравен нулю только для тех величин α, для которых

$$\sin\alpha l=0 \tag{5}$$

значит, для которых

$$l\alpha=k\pi$$

где k — какое угодно целое число: положительное, отрицательное или нуль.

Сделаем $\beta_k=\frac{k\pi}{l}$ и, кроме того, положим

$$\alpha=\beta_k+\alpha'$$

Тогда, при интегрировании по α от $-\infty$ до $+\infty$, надо брать величины α, только бесконечно мало разнящиеся от всякого корня, т. е. брать α' от $-\gamma_k$ до $+\delta_k$, где γ_k и δ_k — положительные бесконечно малые величины.

Заметим теперь, что

$$\lambda(\varepsilon+\alpha\sqrt{-1})=\lambda[\varepsilon+(\beta_k+\alpha')\sqrt{-1}]=\lambda(\beta_k\sqrt{-1})+\text{беск. мал. величина}$$

$$\mu(\varepsilon+\alpha\sqrt{-1})=\mu[\varepsilon+\beta_k\sqrt{-1}+\alpha'\sqrt{-1}]=$$

$$=(\varepsilon+\alpha'\sqrt{-1})\mu'(\beta_k\sqrt{-1})+\text{беск. мал. вел. выс. пор.}$$

Значит,

$$\frac{\lambda(\varepsilon+\alpha\sqrt{-1})}{\mu(\varepsilon+\alpha\sqrt{-1})}=\frac{\lambda(\beta_k\sqrt{-1})}{(\varepsilon+\alpha'\sqrt{-1})\mu'(\beta_k\sqrt{-1})}$$

Переменив знак при $\sqrt{-1}$, получим

$$\frac{\lambda(\varepsilon-\alpha\sqrt{-1})}{\mu(\varepsilon-\alpha\sqrt{-1})}=\frac{-\lambda(\beta_k\sqrt{-1})}{(\varepsilon-\alpha'\sqrt{-1})\mu'(\beta_k\sqrt{-1})}$$

Подставляя эти величины в предельное уравнение, мы получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x\sqrt{-1}}f(z)\,dz=\lim\frac{\lambda(\beta_k\sqrt{-1})}{\mu'(\beta_k\sqrt{-1})}\left[\frac{1}{\varepsilon+\alpha'\sqrt{-1}}+\frac{1}{\varepsilon-\alpha'\sqrt{-1}}\right]=$$

$$=\lim\frac{\lambda(\beta_k\sqrt{-1})}{\mu'(\beta_k\sqrt{-1})}\cdot\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+\alpha'^2}$$

Умножим теперь это уравнение на $e^{\alpha x\sqrt{-1}}\cos a\,\alpha t\,d\alpha$ и интегрируем по α от $-\infty$ до $+\infty$; причем не забудем, что надо брать величины α, бесконечно близкие к корням β_k; следовательно, в множителе $\cos a\,\alpha t e^{\alpha x\sqrt{-1}}$ можно положить $\alpha=\beta_k$, так как мы этим изменим элемент интеграла бесконечно мало. Переходим к пределу и получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos a\alpha t\,e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}}f(\xi)\,d\xi\,d\alpha=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\lim\cos a\,\beta_k t\,e^{\beta_k x\sqrt{-1}}\cdot\frac{\lambda(\beta_k\sqrt{-1})}{\mu'(\beta_k\sqrt{-1})}\int_{-\gamma_k}^{\delta_k}\frac{2\varepsilon\,d\alpha'}{\varepsilon^2+\alpha'^2}$$

ибо $d\alpha=d\alpha'$.

Ясно теперь, что

$$2\int_{-\gamma_k}^{\delta_k}\frac{\varepsilon d\alpha'}{\varepsilon^2+\alpha'^2}=2\int_{-\gamma_k}^{+\delta_k}\frac{d\left(\frac{\alpha'}{\varepsilon}\right)}{1+\left(\frac{\alpha'}{\varepsilon}\right)^2}=\left[2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\alpha'}{\varepsilon}\right)\right]_{-\gamma_k}^{+\delta_k}=$$

$$=2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\delta_k}{\varepsilon}+\operatorname{arc\,tg}\frac{\gamma_k}{\varepsilon}\right)$$

и следовательно,

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{-\gamma_k}^{\delta_k}\frac{2\varepsilon\,da'}{\varepsilon^2+\alpha'^2}=2\pi$$

Значит,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos a\alpha t\, e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} f(\xi)\, d\xi\, d\alpha =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \cos a\beta_k t\, e^{\beta_k x\sqrt{-1}} \cdot \frac{\lambda(\beta_k\sqrt{-1})}{\mu'(\beta_k\sqrt{-1})}$$

Но мы имеем

$$e^{\beta_k x\sqrt{-1}} = \cos\beta_k x + \sqrt{-1}\sin\beta_k x = \cos\frac{k\pi x}{l} + \sqrt{-1}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$\lambda(\beta_k\sqrt{-1}) = \lambda\left(\frac{k\pi}{l}\sqrt{-1}\right) =$$

$$= e^{k\pi\sqrt{-1}}\int_0^l e^{-\beta_k z\sqrt{-1}} f(z)\, dz - e^{-k\pi\sqrt{-1}}\int_0^l e^{\beta_k z\sqrt{-1}} f(z)\, dz$$

а так как

$$e^{k\pi\sqrt{-1}} = (-1)^k$$

то

$$\lambda(\beta_k\sqrt{-1}) = (-1)^k\int_0^l f(z)\left[e^{-\beta_k z\sqrt{-1}} - e^{\beta_k z\sqrt{-1}}\right] dz =$$

$$= -(-1)^k 2\sqrt{-1}\int_0^l \sin\frac{k\pi z}{l} f(z)\, dz$$

Вместе с тем,

$$\mu'(h) = l(e^{hl} + e^{-hl})$$

Значит,

$$\mu'(\beta_k\sqrt{-1}) = l(e^{l\beta_k\sqrt{-1}} + e^{-l\beta_k\sqrt{-1}}) = 2l\cos\beta_k l = 2l\cos k\pi = 2l(-1)^k$$

Следовательно,

$$\frac{\lambda(\beta_k\sqrt{-1})}{\mu'(\beta_k\sqrt{-1})} = -\frac{\sqrt{-1}}{l}\int_0^l \sin\frac{k\pi z}{l} f(z)\, dz$$

и будет

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos a\,\alpha t\, e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} f(\xi)\, d\xi\, d\alpha =$$

$$= -\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\cos a\beta_k t(\cos\beta_k x + \sqrt{-1}\sin\beta_k x)\frac{\sqrt{-1}}{l}\int_0^l f(z)\sin\frac{k\pi z}{l}\, dz$$

Соединяя соответствующие члены для $+k$ и $-k$ вместе, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos a\alpha t\, e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} f(\xi)\, d\xi\, d\alpha =$$

$$=\frac{2}{l}\sum_{k=0}^{k=\infty}\cos\frac{ak\pi t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\int_0^l \sin\frac{k\pi z}{l} f(z)\, dz$$

Совершенно так же мы найдем

$$\frac{1}{2a\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin a\alpha t}{\alpha} e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} F(\xi)\, d\xi\, d\alpha =$$

$$=\frac{2}{al}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{\sin\frac{k\pi at}{l}}{\frac{k\pi}{l}}\sin\frac{k\pi x}{l}\int_0^l \sin\frac{k\pi z}{l} F(z)\, dz =$$

$$=\frac{2}{a\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\int_0^l F(z)\sin\frac{k\pi z}{l}\, dz$$

Отсюда будет

$$u=\frac{2}{l}\sum_{k=0}^{k=\infty}\cos\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\int_0^l f(z)\sin\frac{k\pi z}{l}\, dz +$$

$$+\frac{2}{a\pi}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\int_0^l F(z)\sin\frac{k\pi z}{l}\, dz$$

Эта величина u удовлетворяет всем условиям:

во-первых — уравнению (1);

во-вторых, при $t=0$ величина u обращается в $f(x)$, ибо она так составлена по теореме Фурье, и функция $f(x)$ остается совершенно произвольной от $x=0$ до $x=l$;

в третьих, производная $\frac{\partial u}{\partial t}$ при $t=0$ обращается подобным же образом в $F(x)$, которое также задано от $x=0$ до $x=l$;

в четвертых, при $x=0$ и при $x=l$ будет $u=0$ при всяком t.

Мы видим отсюда следующее представление произвольной функции $f(x)$ между $x=0$ и $x=l$:

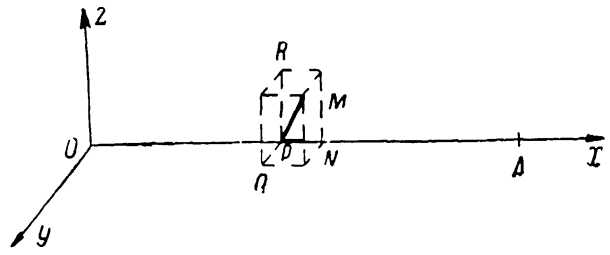
$$f(x)=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{k=\infty}\sin\frac{k\pi x}{l}\int_0^l f(z)\sin\frac{k\pi z}{l}\, dz$$

т. е. известный ряд Фурье.

§ 42. Скажем несколько слов о различных свойствах колеблющейся струны.

Во-первых, предположим, что первоначальное положение струны есть прямая OA (фиг. 18) и что концы ее O и A закреплены.

В начале каждая точка M струны OA выводится из первоначального положения произвольно, так что ее перемещение как по величине, так и по направлению задается совершенно произвольным образом. Возьмем $OP=x$; тогда можно перемещение MP разложить на три: $PR=v$, $PQ=w$, $PN=u$; понятно, что u, v, w будут наперед заданы как функции $OP=x$, если только PM задано по величине и направлению. Каждое из трех составляющих перемещений удовлетворяет дифференциальному уравнению того же вида, именно:



Фиг. 18.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=b^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

где

$$a^2=\frac{gl\omega}{p}$$

причем l — длина струны OA, p — вес ее, ω — натяжение в прямом состоянии OA, и $b^2=\frac{glq}{p}$, где $q=sE$, причем s есть площадь сечения струны и E — модуль упругости ее материала.

Мы рассматривали только первое из этих уравнений, предполагая, что точке M сообщена также произвольная по величине и направлению скорость, которую мы разлагаем по тем же осям, так что движение точки M определяется совокупным движением точек N, Q и R.

Мы, следовательно, будем иметь заданными наперед

$$PN=u=f(x)$$

и скорость точки N, которая пусть будет $F(x)$.

Возьмем простейший случай, когда $F(x)=0$ для всех x от $x=0$ до $x=l$, иначе говоря, что точка N движется, не получив вначале никакого толчка.

Тогда, делая в нашем решении $F(z)=0$ для всякого z, мы получим для u такую формулу:

$$u=\sum_{k=1}^{k=\infty}A_k\cos\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

где

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(z)\sin\frac{k\pi z}{l}\,dz$$

Возьмем один член этого ряда

$$u_k = A_k \cos \frac{k\pi at}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

так что

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k + \ldots$$

Член u_k дает свой звук, выражающийся известным тоном, которому соответствует определенное число колебаний в единицу времени.

Заметим, что все аргументы синусов и косинусов в наших формулах выражены отвлеченными числами. За единицу времени можно принять 1 сек., при перемене же единицы времени t умножилось бы на некоторый постоянный множитель, который отнесем к a.

Пусть τ_k есть время полного колебания, т. е. такое, что, придав его к t, мы получим ту же самую величину u_k и ее производной, какие имели до этой прибавки. Очевидно, что для этого должно быть

$$\frac{k\pi a}{l} \tau_k = 2\pi \quad \text{или} \quad \tau_k = \frac{2l}{ka}$$

Обозначим через n_k число колебаний в 1 сек., так что

$$n_k = \frac{1}{\tau_k}$$

Это число и определяет *тон* (высоту звука).

Заметим теперь, что если бы мы взяли длину струны

$$l' = \frac{l}{k}$$

то для нее получили бы член

$$v_1 = B_1 \cos \frac{\pi at}{l'} \sin \frac{\pi x}{l'}$$

где

$$B_1 = \frac{2}{l} \int_0^{l'} f(z) \sin \frac{\pi z}{l'} dz$$

Понятно, что v_1 можно представить так:

$$v_1 = B_1 \cos \frac{k\pi at}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

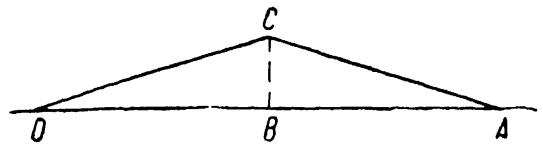
и, следовательно, число колебаний, которое дает звук v_1, будет одинаково с тем, которое дает звук u_k для струны l.

Таким образом, тон u_k и тон v_1 — один и тот же.

Тон

$$u_{2k} = A_{2k} \cos \frac{2k\pi at}{l} \sin \frac{2k\pi x}{l}$$

называют *октавою* тона, соответствующего члену u_k, причем струна делает вдвое больше колебаний, нежели n_k.



Фиг. 19.

Тон, число колебаний которого *вчетверо* больше против n_k называют *двойною октавою*. Также звук, которому соответствует число колебаний в 8 раз больше соответствующего u_k, называется *тройною октавою*.

Звук, число колебаний которого будет $\frac{5}{4} n_k$, называют *терцией* тона u_k. Тон, число колебаний которого есть $\frac{3}{2} n_k$, называется *квинтою* тона u_k. Этот последний со своей терцией, квинтой и октавой составляет так называемый *мажорный аккорд*.

Возьмем пример, который иллюстрировал бы наш вопрос о сотрясении струны.

Пусть первоначальное отклонение нашей струны составляет ломанную OCA (фиг. 19), где CB есть произвольное перемещение середины B нашей струны $OA = l$, и она не получила никаких толчков.

Составим $f(x)$ и сделаем $CB = \beta$; тогда

$$f(x) = \frac{2\beta}{l} x \quad \text{от} \quad x = 0 \quad \text{до} \quad x = \frac{l}{2}$$

и напротив

$$f(x) = 2\beta - \frac{2\beta}{l} x \quad \text{от} \quad x = \frac{l}{2} \quad \text{до} \quad x = l$$

Чтобы вычислить A_k, составляем сперва интегралы

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{z}{l} \sin \frac{k\pi z}{l} dz = -\left[\frac{1}{k\pi} z \cos \frac{k\pi z}{l}\right]_0^{\frac{l}{2}} + \frac{1}{k\pi} \int_0^{\frac{l}{2}} \cos \frac{k\pi z}{l} dz =$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left[\frac{l}{k\pi} \sin \frac{k\pi z}{l} - z \cos \frac{k\pi z}{l}\right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{l}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} - \frac{l}{2k\pi} \cos \frac{k\pi}{2},$$

$$- \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{z}{l} \sin \frac{k\pi z}{l} dz = \frac{l}{k\pi} \cos k\pi + \frac{l}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} - \frac{l}{2k\pi} \cos \frac{k\pi}{2}$$

и

$$\int_{\frac{l}{2}}^{l} \sin\frac{k\pi z}{l}\,dz = -\frac{l}{k\pi}\left[\cos\frac{k\pi z}{l}\right]_{\frac{l}{2}}^{l} = -\frac{l}{k\pi}\cos k\pi + \frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}$$

Умножив эти величины на $\frac{4\beta}{l}$ и сложив, получим

$$A_k = \frac{8\beta}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}$$

Сделаем $k=2j$ (т. е. k — число четное); тогда

$$A_{2j} = 0$$

Если же $k=2j+1$ (т. е. k — нечетное), то

$$A_{2j+1} = \frac{8\beta}{(2j+1)^2\pi^2}(-1)^j$$

Таким образом, будет

$$u = \frac{8\beta}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi at}{l}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi at}{l}\sin\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi at}{l}\sin\frac{5\pi x}{l} - \ldots\right]$$

Тон, соответствующий первому члену, называется *основным*, тогда соответствующий второму будет *октава квинты*, третьему — *двойная октава* терции и т. д.

Можно выбрать функцию $f(x)$ так, что в ряде u останется только один член, например u_k. Для этого достаточно положить

$$f(x) = A\sin\frac{k\pi x}{l}$$

тогда ясно, что

$$A_k = \frac{2A}{l}\int_0^l \sin\frac{k\pi z}{l}\,dz = A$$

все же члены A_i, где i не равно k, будут 0.

Дав вышеприведенное изложение первой методы Пуассона интегрирования линейных дифференциальных уравнений с частными производными при граничных условиях, А. Н. Коркин рекомендовал применить эту методу к ряду примеров, решенных Пуассоном частью этою методою и относящихся к теории распространения тепла в пруте, частью — его второю методою, которую мы изложим в главе V нашего курса и относящихся к колебанию струны.

Мы дадим здесь некоторые из этих примеров, чтобы на них еще подробнее выяснилась первая метода Пуассона.

§ 43. Задача 1. Интегрировать уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

при условиях: 1) чтобы при $t = 0$

u обращалось в $f(x)$,

$\frac{\partial u}{\partial t}$ „ в $F(x)$

и 2) чтобы $\frac{\partial u}{\partial x}$ обращалось в 0 при $x = 0$ и при $x = l$ при всяком t.

Функции $f(x)$ и $F(x)$ заданы на протяжении от $x = 0$ до $x = l$.

Решение. Будем следовать вполне изложенной методе Пуассона:

1) Составляем решение u, удовлетворяющее уравнению (1) и начальным ($t = 0$) условиям; оно, попрежнему, будет

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos a\alpha t \, e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} f(\xi) \, d\xi \, da + \\ + \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a\alpha t}{\alpha} e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} F(\xi) \, d\xi \, da \tag{2}$$

2) Полагаем $x - \xi = z$ и соединяем члены, относящиеся к $+z$ и $-z$, попрежнему имеем

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{0}^{\infty} \cos a\alpha t \cos \alpha z \, [f(x+z) + f(x-z)] \, dz + \\ + \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{0}^{\infty} \frac{\sin a\alpha t}{\alpha} \cos \alpha z \, [F(x+z) + F(x-z)] \, dz$$

3) Составляем граничные условия ($x = 0$ и $x = l$).

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty}\cos a\alpha t\cos\alpha z\left[\frac{\partial f(x+z)}{\partial x}+\frac{\partial f(x-z)}{\partial x}\right]dz\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin a\alpha t}{\alpha}\cos az\left[\frac{\partial F(x+z)}{\partial x}+\frac{\partial F(x-z)}{\partial x}\right]dz\,d\alpha$$

и, заметив, что

$$\frac{\partial f(x+z)}{\partial x}=\frac{\partial f(x+z)}{\partial z}\qquad\frac{\partial f(x-z)}{\partial z}=-\frac{\partial f(x-z)}{dz}$$

$$\frac{\partial F(x+z)}{\partial x}=\frac{\partial F(x+z)}{\partial z}\qquad\frac{\partial F(x-z)}{\partial x}=-\frac{\partial F(x-z)}{\partial z}$$

имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty}\cos a\alpha t\cos\alpha z\left[\frac{\partial f(x+z)}{\partial z}-\frac{\partial f(x-z)}{\partial z}\right]dz\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin a\alpha t}{\alpha}\cos\alpha z\left[\frac{\partial F(x+z)}{\partial z}-\frac{\partial F(x-z)}{\partial z}\right]dz\,d\alpha$$

полагаем $x=0$; получаем условие

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z}-\frac{\partial f(-z)}{\partial z}=0$$

и

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z}-\frac{\partial F(-z)}{\partial z}=0$$

откуда следует

$$f(z)-f(-z)=C_1\quad\text{и}\quad F(z)-F(-z)=C_2$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Эти постоянные могут быть только 0, ибо, переменив z на $-z$, имеем

$$-C_1=C_1\quad\text{и}\quad-C_2=C_2$$

Итак,

$$f(z)-f(-z)=0 \tag{3}$$

Совершенно так же получим

$$f(l+z)-f(l-z)=0 \tag{4}$$

4) Вычисляем функции $p(h)$ и $q(h)$:

$$p(h)=\int_0^{\infty} e^{-hz} f(z)\,dz$$

и

$$q(h)=\int_0^{-\infty} e^{hz} f(z)\,dz$$

Из уравнения (3), совершенно так же, как и в § 41, имеем

$$p(h)-\int_0^{\infty} e^{-hz} f(-z)\,dz=0$$

или иначе

$$p(h)+q(h)=0 \tag{3'}$$

Затем из уравнения (4) выводим

$$\int_0^{\infty} e^{-hz} f(l+z)\,dz-\int_0^{\infty} e^{-hz} f(l-z)\,dz=0$$

или

$$e^{hl} p(h)+e^{-hl} q(h)=e^{hl}\int_0^{l} e^{-hz} f(z)\,dz+e^{-hl}\int_0^{l} e^{hz} f(z)\,dz \tag{4'}$$

отсюда следует

$$p(h)=-q(h)=\frac{e^{hl}\int_0^{l} e^{-hz} f(z)\,dz+e^{-hl}\int_0^{l} e^{hz} f(z)\,dz}{e^{hl}-e^{-hl}}=\frac{\lambda(h)}{\mu(h)} \tag{5}$$

при само собою понятном обозначении.

Таким образом

$$p(h)=\frac{\lambda(h)}{\mu(h)} \tag{6}$$

$$q(h)=-\frac{\lambda(h)}{\mu(h)}.$$

5) Чтобы найти интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\xi\sqrt{-1}} f(\xi)\,d\xi$$

ищем предел разности

$$\lim_{\varepsilon=0}[p(\varepsilon+\alpha\sqrt{-1})-q(\varepsilon-\alpha\sqrt{-1})]=$$
$$=\int_0^{\infty} e^{-\alpha\varepsilon\sqrt{-1}}f(z)\,dz-\int_0^{-\infty} e^{-\alpha\varepsilon\sqrt{-1}}f(z)\,dz=$$
$$=\lim_{\varepsilon=0}\left[\frac{\lambda(\varepsilon+\alpha\sqrt{-1})}{\mu(\varepsilon+\alpha\sqrt{-1})}+\frac{\lambda(\varepsilon-\alpha\sqrt{-1})}{\mu(\varepsilon-\alpha\sqrt{-1})}\right]$$

причем замечаем, что $\lambda(h)$ есть функция четная, $\mu(h)$ — нечетная; следовательно, разыскиваемый предел равен нулю для всех тех значений α, при которых $\mu(\alpha\sqrt{-1})$ не равно нулю.

Таким образом, получаем уравнение

$$\mu.(\alpha\sqrt{-1})=0$$

но

$$\mu(\alpha\sqrt{-1})=e^{l\alpha\sqrt{-1}}-e^{-l\alpha\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}\sin l\alpha$$

значит,

$$\sin l\alpha=0 \quad \text{или} \quad l\alpha=k\pi$$

причем k — любое целое, положительное или отрицательное число или нуль.

Полагаем, попрежнему, $\beta_k=\frac{k\pi}{l}$ и, поступая совершенно так же, как в § 41, и заметив, что $\mu'(h)$ — функция нечетная, найдем, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\xi\sqrt{-1}}f(\xi)\,d\xi$$

вообще равен нулю, и лишь в сопредельности с β_k будет

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\xi\sqrt{-1}}f(\xi)\,d\xi=\lim_{\varepsilon=0}\frac{\lambda(\beta_k\sqrt{-1})}{\mu'(\beta_k\sqrt{-1})}\left[\frac{1}{\varepsilon+\alpha'\sqrt{-1}}+\frac{1}{\varepsilon-\alpha'\sqrt{-1}}\right]=$$
$$=\lim_{\varepsilon=0}\frac{\lambda(\beta_k\sqrt{-1})}{\mu'(\beta_k\sqrt{-1})}\cdot\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+\alpha'^2}$$

Умножаем на $\cos a\alpha t\cdot e^{\alpha x\sqrt{-1}}d\alpha$ и интегрируем от $-\infty$ до $+\infty$; получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos a\alpha t\,e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}}f(\xi)\,d\xi\,d\alpha=$$
$$=\lim_{\varepsilon=0}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\cos\alpha\beta_k t\,e^{\beta_k x\sqrt{-1}}\cdot\frac{\lambda(\beta_k\sqrt{-1})}{\mu'(\beta_k\sqrt{-1})}\int_{-\delta_k}^{+\gamma_k}\frac{2\varepsilon\,d\alpha'}{\varepsilon^2+\alpha'^2}$$

и, заметив, что

$$\lim \int_{-\delta_k}^{+\gamma_k} \frac{2\varepsilon\, d\alpha'}{\varepsilon^2 + \alpha'^2} = 2\pi$$

получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos a\alpha t\, e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} f(\xi)\, d\xi = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \cos a\, \beta_k\, t e^{\beta_k x \sqrt{-1}} \cdot \frac{\lambda(\beta_k \sqrt{-1})}{\mu'(\beta_k \sqrt{-1})}$$

Но мы имеем

$$\lambda(\beta_k \sqrt{-1}) = e^{l\beta_k \sqrt{-1}} \int_0^l e^{-s\beta_k \sqrt{-1}} f(z)\, dz + e^{-l\beta_k \sqrt{-1}} \int_0^l e^{s\beta_k \sqrt{-1}} f(z)\, dz =$$

$$= (\cos l\beta_k + \sqrt{-1} \sin l\beta_k) \int_0^l (\cos z\beta_k - \sqrt{-1} \sin z\beta_k) f(z)\, dz +$$

$$+ (\cos l\beta_k - \sqrt{-1} \sin l\beta_k) \int_0^l (\cos z\beta_k + \sqrt{-1} \sin z\beta_k) f(z)\, dz$$

но

$$l\beta_k = k\pi$$

так что

$$\cos l\beta_k = (-1)^k; \quad \sin l\beta_k = 0$$

и мы получим

$$\lambda(\beta_k \sqrt{-1}) = (-1)^k 2 \int_0^l \cos z\beta_k f(z)\, dz = (-1)^k 2 \int_0^l f(z) \cos \frac{k\pi z}{l}\, dz$$

Вместе с тем,

$$\mu'(h) = l(e^{hl} + e^{-hl})$$

значит

$$\mu'(\beta_k \sqrt{-1}) = l(e^{l\beta_k \sqrt{-1}} + e^{-l\beta_k \sqrt{-1}}) = 2l \cos l\beta_k = (-1)^k 2l$$

и следовательно, будет

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos a\alpha t\, e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} f(\xi)\, d\xi\, d\alpha =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \cos \frac{k\pi a t}{l} e^{\frac{k\pi x \sqrt{-1}}{l}} \frac{1}{l} \int_0^l \cos \frac{k\pi z}{l} f(z)\, dz =$$

$$= \frac{1}{l} \int_0^l f(z)\, dz + \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{k=\infty} \cos \frac{k\pi a t}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} \int_0^l \cos \frac{k\pi z}{l} f(z)\, dz$$

Точно так же будет

$$\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin a\alpha t}{\alpha}e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}}F(\xi)\,d\xi\,d\alpha =$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\frac{\sin\frac{k\pi at}{l}}{\frac{k\pi}{l}}e^{\frac{k\pi x\sqrt{-1}}{l}}\frac{1}{l}\int_0^l\cos\frac{k\pi z}{l}F(z)\,dz=$$

$$=\frac{t}{l}\int_0^l F(z)\,dz+\frac{2}{a\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin\frac{k\pi at}{t}}{k}\cos\frac{k\pi x}{l}\int_0^l F(z)\cos\frac{k\pi z}{l}\,dz$$

Таким, образом, окончательно имеем

$$u=\frac{1}{l}\int_0^l[f(z)+tF(z)]\,dz+\sum_{k=1}^{k=\infty}A_k\cos\frac{k\pi at}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}+$$

$$+\frac{2}{a\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}B_k\sin\frac{ak\pi t}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}$$

причем

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(z)\cos\frac{k\pi z}{l}\,dz$$

$$B_k=\frac{2}{l}\int_0^l F(z)\cos\frac{k\pi z}{l}\,dz$$

Так как при $t=0$ величина u обращается в $f(x)$, то полученная формула дает такое представление произвольной функции:

$$f(x)=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx+\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{k=\infty}\cos\frac{k\pi x}{l}\int_0^l f(z)\cos\frac{k\pi z}{l}\,dz$$

Это есть известный тригонометрический ряд косинусов.

Задача 2. В § 495 своей „Механики“ Пуассон приводит еще одно решение того же уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при следующих условиях:

при	$t=0$	u	должно обращаться в	$f(x)$		
„	$t=0$	$\frac{\partial u}{\partial t}$	„	„	„ $F(x)$	
„	$x=0$	u	должно быть	равно	0	при всяком t
„	$x=l$	$\frac{\partial u}{\partial x}$	„	„	„ 0	

Трёбуется интегрировать предложенное уравнение.

Взяв u, как и раньше, положив $x-\zeta=z$, имеем

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\pi}\cos a\alpha t\cos\alpha z\,[f(x+z)+f(x-z)]\,dz\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin a\alpha t}{a\alpha}\cos\alpha z\,[F(x+z)+F(x-z)]\,dz\,d\alpha;$$

полагаем $x=0$ и получаем первые условия

$$f(z)+f(-z)=0 \quad \text{и} \quad F(z)+F(-z)=0 \tag{1}$$

Взяв производную по x, т. е. $\frac{\partial u}{\partial x}$, и заменив дифференцирование по x дифференцированием по z, получим

$$\frac{\partial f(l+z)}{\partial z}-\frac{\partial f(l-z)}{\partial z}=0$$

и

$$\frac{\partial F(l+z)}{\partial z}-\frac{\partial F(l-z)}{\partial z}=0$$

или

$$f(l+z)-f(l-z)=C_1 \quad \text{и} \quad F(l+z)-F(l-z)=C_2$$

Заменив z на $-z$, видим что $C_1=C_2=0$, и вторые условия будут

$$f(l+z)-f(l-z)=0 \quad \text{и} \quad F(l+z)-F(l-z)=0 \tag{2}$$

Берем сперва условия, относящиеся к $f(z)$, и составляем функции $p(h)$ и $q(h)$:

$$p(h)=\int_{0}^{\infty}e^{-hz}f(z)\,dz$$

$$q(h)=\int_{0}^{-\infty}e^{hz}f(z)\,dz$$

На основании условий (1) и (2), получаем, подобно предыдущему, уравнения

$$p(h)-q(h)=0$$

$$e^{hl}p(h)+e^{-hl}q(h)=e^{-hl}\int_{0}^{l}e^{-hz}f(z)\,dz+e^{-hl}\int_{0}^{l}e^{hz}f(z)\,dz$$

Откуда

$$p(h)=q(h)=\frac{e^{hl}\int_0^l e^{-hz}f(z)\,dz+e^{-hl}\int_0^l e^{hz}f(z)\,dz}{e^{hl}+e^{-hl}}=\frac{\lambda(h)}{\mu(h)}$$

Как видно, обе функции $\lambda(h)$ и $\mu(h)$ четные.

Уравнение $\mu(\alpha\sqrt{-1})=0$ будет

$$e^{l\alpha\sqrt{-1}}+e^{-l\alpha\sqrt{-1}}=2\cos l\alpha=0$$

откуда

$$\alpha=\frac{(2k+1)\pi}{2l}=\beta_k \tag{3}$$

Далее, совершенно подобно предыдущему, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int\cos a\alpha t\,e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}}f(\xi)\,d\xi\,d\alpha=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\cos a\beta_k t\,e^{\beta_k x\sqrt{-1}}\cdot\frac{\lambda(\beta_k\sqrt{-1})}{\mu'(\beta_k\sqrt{-1})}$$

и, подставляя в выражения $\lambda(h)$ и $\mu'(h)$ вместо h его величину

$$\beta_k\sqrt{-1}=\frac{(2k+1)\pi}{2l}\sqrt{-1}$$

получим

$$\lambda(\beta_k\sqrt{-1})=e^{l\beta_k\sqrt{-1}}\int_0^l e^{-\beta_k\sqrt{-1}z}f(z)\,dz+e^{-l\beta_k\sqrt{-1}}\int_0^l e^{\beta_k\sqrt{-1}z}f(z)\,dz=$$

$$=-\sqrt{-1}(-1)^k\int_0^l(e^{\beta_k z\sqrt{-1}}-e^{-\beta_k z\sqrt{-1}})f(z)\,dz=$$

$$=(-1)^k 2\int_0^l\sin\frac{(2k+1)\pi z}{l}f(z)\,dz$$

$$\mu'(h)=l(e^{hl}-e^{-hl});\quad \mu'(\beta_k\sqrt{-1})=2l\sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}=2l\sqrt{-1}(-1)^k$$

и следовательно

$$\frac{\lambda(\beta_k\sqrt{-1})}{\mu'(\beta_k\sqrt{-1})}=\frac{1}{l\sqrt{-1}}\int_0^l\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2l}f(z)\,dz$$

и значит, интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int\cos a\alpha t\,e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}}f(\xi)\,d\xi\,d\alpha=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\cos\frac{(2k+1)\,a\,\pi t}{2l}\,e^{\frac{(2k+1)\pi x\sqrt{-1}}{2l}}\,\frac{1}{l\sqrt{-1}}\int_0^l f(z)\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2l}\,dz$$

Соединяя члены, которые соответствуют значениям k, равным

$$\begin{array}{c} 0 \text{ и } -1 \\ 1 \text{ и } -2 \\ 2 \text{ и } -3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ i-1 \text{ и } -i \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int \cos a\alpha t\, e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} f(\xi)\, d\xi\, d\alpha =$$

$$= \frac{2}{l}\sum_{i=1}^{i=\infty} \cos\frac{(2i-1)\pi at}{2l} \sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l} \int_0^l f(z)\sin\frac{(2i-1)\pi z}{2l}\, dz$$

Совершенно так же найдем

$$\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{\sin a\,\alpha t}{\alpha} e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} F(\xi)\, d\xi\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{a}\sum \frac{\sin\dfrac{(2i-1)\pi at}{2l}}{\dfrac{(2i-1)\pi}{2l}} \cdot \frac{2}{l}\sin\frac{2i-1}{2l}\pi x \int_0^l F(z)\sin\frac{2i-1}{2l}\pi z\, dz$$

и, следовательно, окончательно будет

$$u = \frac{2}{l}\sum_{i=1}^{i=\infty} \cos\frac{2i-1}{2l}\pi at \sin\frac{2i-1}{2l}\pi x \int_0^l f(z)\sin\frac{(2i-1)}{2l}\pi z dz +$$

$$+ \frac{4}{a\pi}\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{2i-1} \quad \frac{2i-1}{2l}\pi at \sin\frac{2i-1}{2l}\pi x \int_0^l F(z)\sin\frac{2i-1}{2l}\pi z\, dz$$

Это есть формула Пуассона, приведенная в его „Механике“.

§ 44. Задача 3. Уравнение, представляющее распространение тепла в пруте, есть следующее:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu \tag{1}$$

где a и b — некоторые постоянные.

Начальное условие такое: при $t=0$ должно быть

$$u = f(x) \tag{2}$$

Граничные же условия суть

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_1 u=0 \qquad \text{при } x=+l \\ &\frac{\partial u}{\partial x}-\beta_2 u=0 \qquad \text{при } x=-l \end{aligned}\right\} \text{ при всяком } t \tag{3}$$

где β_1 и β_2 — также некоторые постоянные.

Требуется интегрировать это уравнение при вышеприведенных начальном и граничных условиях.

Мы приводим это уравнение не столько ради тех приложений, которые оно имеет, сколько в виду замечательной формулы для представления произвольной функции в виде ряда, к которой оно приводит и которая имеет важное значение и понадобится нам в вопросах, имеющих чисто прикладное значение.

Поступая по общему правилу, составляем сперва обыкновенное уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(a^2\alpha^2+b)\,T=0 \tag{4}$$

и найдя его общий интеграл

$$T=C_1 e^{-(a^2\alpha^2+b)t}$$

определяем постоянную произвольную C_1 так, чтобы T при $t=0$ обращалось в 1, что дает $C_1=1$, так что

$$T_1=e^{-(a^2\alpha^2+b)t}=e^{-bt}\,e^{-a^2\alpha^2 t} \tag{5}$$

и, таким образом, будет

$$u=\frac{1}{\pi}e^{-bt}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(x-\xi)\,f(\xi)\,d\xi\,d\alpha \tag{6}$$

Полагаем, попрежнему, $(\xi-x)=z$; тогда

$$u=\frac{1}{\pi}e^{-bt}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha z\,f(x+z)\,dz\,d\alpha \tag{6'}$$

Составляем теперь количества

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_1 u$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\beta_2 u$$

чтобы воспользоваться граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_1 u=\frac{e^{-bt}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha z\left[\frac{\partial f(x+z)}{\partial x}+\beta_1 f(x+z)\right]dz\,d\alpha$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\beta_2 u=\frac{e^{-bt}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha z\left[\frac{\partial f(x+z)}{\partial x}-\beta_2 f(x+z)\right]dz\,d\alpha$$

Соединив элементы, относящиеся к $+z$ и $-z$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_1 u=\frac{e^{-bt}}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha z\left[\frac{\partial f(x+z)}{\partial x}+\frac{\partial f(x-z)}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\beta_1 f(x+z)+\beta_1 f(x-z)\right]dz\,d\alpha \qquad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\beta_2 u=\frac{e^{-bt}}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha z\left[\frac{\partial f(x+z)}{\partial x}+\frac{\partial f(x-z)}{\partial x}-\right.$$

$$\left.-\beta_2 f(x+z)-\beta_2 f(x-z)\right]dz\,d\alpha \qquad (8)$$

Полагая в уравнении (7) $x=+l$ и в уравнении (8) $x=-l$ на основании граничных условий, заменив предварительно дифференцирование по x дифференцированием по z, получим

$$\frac{\partial f(l+z)}{\partial z}-\frac{\partial f(l-z)}{\partial z}+\beta_1 f(l+z)+\beta_1 f(l-z)=0 \qquad (9)$$

$$\frac{\partial f(-l+z)}{\partial z}-\frac{\partial f(-l-z)}{\partial z}-\beta_2 f(-l+z)-\beta_2 f(-l-z)=0 \qquad (10)$$

Множим первое уравнение на $e^{-hz}\,dz$, интегрируем от $z=0$ до $z=\infty$ и вводим обозначения

$$p(h)=\int_0^{\infty} e^{-hz} f(z)\,dz; \qquad q(h)=\int_0^{-\infty} e^{hz} f(z)\,dz$$

Тогда замечаем, что

$$\int_0^{\infty} e^{-hz}\frac{\partial f(l+z)}{\partial z}\,dz=\left[f(l+z)\,e^{-hz}\right]_0^{\infty}+h\int_0^{\infty} e^{-hz} f(l+z)\,dz=$$

$$=-f(l)+h\int_l^{\infty} e^{hl}e^{-hy} f(y)\,dy=-f(l)+he^{hl}p(h)-he^{hl}\int_0^{l} e^{-hz} f(z)\,dz$$

$$\int_0^\infty e^{-hz}\frac{\partial f(l-z)}{\partial z}\,dz=[f(l-z)e^{-hz}]_0^\infty+h\int_0^\infty e^{-hz}f(l-z)\,dz=$$

$$=-f(l)-he^{-hl}\int_l^\infty e^{hy}f(y)\,dy=-f(l)-he^{-hl}q(h)+he^{-hl}\int_0^l e^{hz}f(z)\,dz$$

$$\int_0^\infty e^{-hz}f(l+z)\,dz=\int_l^\infty e^{-h(y-l)}f(y)\,dy=e^{hl}p(h)-e^{hl}\int_0^l e^{-hz}f(z)\,dz$$

$$\int_0^\infty e^{-hz}f(l-z)\,dz=-\int_l^{-\infty} e^{-h(l-y)}f(y)\,dy=-e^{-hl}\int_l^{-\infty} e^{hz}f(z)\,dz=$$

$$=-e^{-hl}q(h)+e^{-hl}\int_0^l e^{hz}f(z)\,dz$$

Таким образом, из уравнения (9) получаем

$$(h+\beta_1)e^{hl}p(h)+(h-\beta_1)e^{-hl}q(h)=(h+\beta_1)e^{hl}\int_0^l e^{-hz}f(z)\,dz+$$

$$+(h-\beta_1)e^{-hl}\int_0^l e^{hz}f(z)\,dz$$

Уравнение (10) дает подобное же уравнение, которое получится при перемене l на $-l$ и β_1 на $-\beta_2$, и будет

$$(h-\beta_2)e^{-hl}p(h)+(h+\beta_2)e^{hl}q(h)=(h-\beta_2)e^{-hl}\int_0^{-l} e^{-hz}f(z)\,dz+$$

$$+(h+\beta_2)e^{hl}\int_0^{-l} e^{hz}f(z)\,dz$$

Решая эти уравнения относительно $p(h)$ и $q(h)$, получим

$$\begin{aligned} p(h)&=\frac{\lambda(h)}{\mu(h)}\\ q(h)&=\frac{\lambda(-h)}{\mu(-h)}\end{aligned}\qquad(11)$$

причем

$$\lambda(h)=(h+\beta_1)(h+\beta_2)e^{2hl}\int_0^l e^{-hz}f(z)\,dz-(h-\beta_1)(h-\beta_2)e^{-2hl}\int_0^{-l} e^{hz}f(z)\,dz+$$
$$+(h+\beta_2)(h-\beta_1)\int_{-l}^{+l} e^{hz}f(z)\,dz$$

$$\mu(h)=(h+\beta_1)(h+\beta_2)e^{2hl}-(h-\beta_1)(h-\beta_2)e^{-2hl}$$

Таким образом, будет

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha z\sqrt{-1}}f(z)\,dz=\lim_{\varepsilon=0}\left[\frac{\lambda(\alpha\sqrt{-1}+\varepsilon)}{\mu(\alpha\sqrt{-1}+\varepsilon)}-\frac{\lambda(\alpha\sqrt{-1}-\varepsilon)}{\mu(\alpha\sqrt{-1}-\varepsilon)}\right]$$

ибо этот интеграл равен

$$\lim_{\varepsilon=0}[p(\varepsilon+\alpha\sqrt{-1})-q(\varepsilon-\alpha\sqrt{-1})]$$

Составляем уравнение

$$\mu(\alpha\sqrt{-1})=0$$

оно будет

$$\begin{aligned}\mu(\alpha\sqrt{-1})&=(\alpha\sqrt{-1}+\beta_1)(\alpha\sqrt{-1}-\beta_2)e^{2\alpha l\sqrt{-1}}-\\&-(\alpha\sqrt{-1}-\beta_1)(\alpha\sqrt{-1}-\beta_2)e^{-2\alpha l\sqrt{-1}}=\\&=(\beta_1\beta_2-\alpha^2+(\alpha\beta_1+\beta_2\alpha)\sqrt{-1})(\cos 2\alpha l+\sqrt{-1}\sin 2\alpha l)-\\&-(\beta_1\beta_2-\alpha_2-(\alpha\beta_1+\alpha\beta_2)\sqrt{-1})(\cos 2al-\sqrt{-1}\sin 2al)=\\&=2\sqrt{-1}\,[\alpha(\beta_1+\beta_2)\cos 2\alpha l+(\beta_1\beta_2-\alpha^2)\sin 2\alpha l]\end{aligned}$$

следовательно, уравнение

$$\mu(\alpha\sqrt{-1})=0$$

будет

$$(\beta_1+\beta_2)\alpha\cos 2\alpha l+(\beta_1\beta_2-\alpha^2)\sin 2\alpha l=0 \qquad (12)$$

Это уравнение имеет очевидный корень $\alpha=0$, который мы обозначим через ω_0. Обозначим его положительные корни через

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\ \omega_k,\ \ldots$$

тогда легко видеть что и

$$-\omega_1,\ -\omega_2,\ \ldots\ -\omega_k,\ \ldots$$

будут также корни уравнения (12). Обозначим их через

$$\omega_{-1},\ \omega_{-2},\ \ldots\ \omega_{-k},\ \ldots$$

Мы видели, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha z\sqrt{-1}} f(z)\,dz$$

вообще равен нулю и лишь в сопредельности с ω_k будет

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha z\sqrt{-1}} f(z)\,dz = \frac{\lambda(\omega_k\sqrt{-1})}{\mu'(\omega_k\sqrt{-1})} \lim_{\varepsilon=0} \left[\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+\alpha'^2}\right]$$

где α' — бесконечно малая величина, и при интегрировании по α надо брать лишь элементы интеграла, смежные с каждым из корней ω_k, и считать $d\alpha = d\alpha'$; таким образом будет

$$u = \frac{1}{2\pi} e^{-bt} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\alpha^2 t} e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}} f(\xi)\,d\xi\,d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-bt} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{-a^2\omega_k^2 t} e^{\omega_k x\sqrt{-1}} \cdot \frac{\lambda(\omega_k\sqrt{-1})}{\mu'(\omega_k\sqrt{-1})} \lim \int_{-\gamma_k}^{-\delta_k} \frac{2\varepsilon\,d\alpha'}{\varepsilon^2+\alpha'^2}$$

Но мы видели, что

$$\lim \int_{-\gamma_k}^{-\delta_k} \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+\alpha'^2}\,d\alpha' = 2\pi$$

Следовательно, будет

$$u = e^{-bt} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{-a^2\omega_k^2 t} \cdot \frac{\lambda(\omega_k\sqrt{-1})}{\mu'(\omega_k\sqrt{-1})} e^{\omega_k x\sqrt{-1}} \tag{13}$$

При этом

$$\lambda(\omega_k\sqrt{-1}) = [(\beta_1\beta_2 - \omega_k^2)\cos 2\omega_k l - (\beta_1+\beta_2)\omega_k \sin 2\omega_k l] \int_{-l}^{+l} e^{-\omega_k z\sqrt{-1}} f(z)\,dz -$$

$$- [(\beta_1\beta_2 + \omega_k^2) + (\beta_1 - \beta_2)\omega_k\sqrt{-1}] \int_{-l}^{+l} e^{-\omega_k z\sqrt{-1}} f(z)\,dz$$

$$\mu'(\omega_k\sqrt{-1}) = 2(\beta_1+\beta_2+2l\beta_1\beta_2 - 2l\omega_k^2)\cos 2\omega_k l - \tag{14}$$

$$- 4\omega_k(1 + l\beta_1 + l\beta_2)\sin 2\omega_k l = 2R_k$$

Выражение u может быть представлено в ином виде, для чего надо заметить, что

$$\omega_{-k} = -\omega_k; \quad \omega_0 = 0; \qquad \mu'(-\omega_k\sqrt{-1}) = \mu'(\omega_k\sqrt{-1})$$

и соединить члены, соответствующие $+k$ и $-k$; тогда будет

$$u = e^{-bt}\sum_{k=0}^{k=\infty} e^{-a^2\omega_k^2 t}\cdot\frac{1}{\mu'(\omega_k\sqrt{-1})}\times \\ \times\left[\lambda(\omega_k\sqrt{-1})\,e^{\omega_k x\sqrt{-1}} + \lambda(-\omega_k\sqrt{-1})\,e^{-\omega_k x\sqrt{-1}}\right] \tag{15}$$

Выражение

$$\mu'(\omega_k\sqrt{-1})$$

вещественное; преобразовав выражение в [ ], увидим, что оно также вещественное и равно следующей величине:

$$[\ldots] = 2\left\{\left[(\beta_1\beta_2 - \omega_k^2)\cos 2\omega_k l - (\beta_1 + \beta_2)\,\omega_k \sin 2\omega_k l - \beta_1\beta_2 - \omega_k^2\right]\times\right. \\ \left.\times\int_{-l}^{+l} f(z)\cos\omega_k z\,dz + (\beta_1 - \beta_2)\,\omega_k\int_{-l}^{+l} f(z)\sin\omega_k z\,dz\right\}\cos\omega_k x + \\ + 2\left\{\left[(\beta_1\beta_2 - \omega_k^2)\cos 2\omega_k l - (\beta_1 + \beta_2)\,\omega_k\sin 2\omega_k l + \beta_1\beta_2 + \omega_k^2\right]\times\right. \\ \left.\times\int_{-l}^{+l} f(z)\sin\omega_k z\,dz + (\beta_1 - \beta_2)\,\omega_k\int_{-l}^{+l} f(z)\cos\omega_k z\,dz\right\}\sin\omega_k x = \\ = 2P_k\cos\omega_k x + 2Q_k\sin\omega_k x \tag{16}$$

Подставляя в формулу (15), получим тот результат, который дает Пуассон в своем мемуаре „Sur la distribution de la chaleur dans les corps solides“, а именно:

$$u = e^{-bt}\sum_{k=0}^{k=\infty} e^{-a^2\omega_k^2 t}\left(\frac{P_k}{R_k}\cos\omega_k x + \frac{Q_k}{R_k}\sin\omega_k x\right) \tag{17}$$

причем P_k, Q_k и R_k имеют вышеприведенные значения.

Предлагается в виде задачи проверить, что найденная величина u удовлетворяет как уравнению (1), так и условиям (3). Что же касается условия (2), т. е. что при $t=0$ имеет место равенство

$$u = f(x)$$

иначе

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty}\left(\frac{P_k}{R_k}\cos\omega_k x + \frac{Q_k}{R_k}\sin\omega_k x\right) \tag{18}$$

причем ω_k есть положительный корень уравнения

$$(\beta_1 + \beta_2)\,\omega \cos 2l\omega + (\beta_1\,\beta_2 - \omega^2) \sin 2l\omega = 0$$

и

$$P_k = [(\beta_1\,\beta_2 - \omega_k^2) \cos 2l\omega_k - (\beta_1 + \beta_2)\,\omega_k \sin 2l\omega_k - \beta_1\,\beta_2 - \omega_k^2] \times \\ \times \int_{-l}^{+l} f(y) \cos \omega_k y\, dy + (\beta_1 - \beta_2)\,\omega_k \int_{-l}^{+l} f(y) \sin \omega_k y\, dy$$

$$Q_k = [(\beta_1\,\beta_2 - \omega_k^2) \cos 2l\omega_k - (\beta_1 + \beta_2)\,\omega_k \sin 2l\omega_k + \beta_1\,\beta_2 + \omega_k^2] \times \\ \times \int_{-l}^{+l} f(y) \sin \omega_k y\, dy + (\beta_1 - \beta_2)\,\omega_k \int_{-l}^{+l} f(y) \cos \omega_k y\, dy$$

и

$$R_k = [(\beta_1 + \beta_2) + 2l(\beta_1\,\beta_2 - \omega_k^2)] \cos 2l\omega_k - [2 + 2l(\beta_1 + \beta_2)]\,\omega_k \sin 2l\omega_k$$

то по поводу этого равенства Пуассон говорит: „... так как формула (18) есть необходимое следствие нашего анализа, то не может быть сомнения в ее справедливости, но было бы затруднительно получить эту формулу непосредственно или проверить ее во всей ее общности".

Необходимо при этом заметить, что функция $f(x)$ представляется этою формулою лишь между пределами $x = -l$ до $x = +l$. Чтобы формула имела место и при пределах, необходимо, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла уравнениям

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \beta_1 f(x) = 0 \quad \text{при } x = +l$$
$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} - \beta_2 f(x) = 0 \quad \text{при } x = -l$$

§ 45. Мы остановимся на замечательнейшем случае предыдущей задачи.

Именно, положим что $\beta_2 = \infty$. Тогда второе из уравнений (3) будет

$$u = 0 \quad \text{при } x = -l$$

Уравнение, определяющее корни ω, по разделении на β_2 и положении $\beta_2 = \infty$, будет

$$\beta_1 \sin 2l\omega + \omega \cos 2l\omega = 0 \tag{19}$$

и затем будет

$$\frac{P_k}{R_k} = \frac{(\beta_1 \cos l\omega_k - \omega_k \sin l\omega_k - \beta_1) \int_{-l}^{+l} f(y) \cos \omega_k y\, dy - \omega_k \int_{-l}^{+l} f(y) \sin \omega_k y\, dy}{(1 + 2l\beta_1) \cos 2l\omega_k - 2l\omega_k \sin 2l\omega_k} \tag{20}$$

$$\frac{Q_k}{R_k} = \frac{(\beta_1 \cos 2l\omega_k - \omega_k \sin 2l\omega_k + \beta_1) \int_{-l}^{+l} f(y) \sin \omega_k y\, dy - \omega_k \int_{-l}^{+l} f(y) \cos \omega_k y\, dy}{(1 + 2l\beta_1) \cos 2l\omega_k - 2l\omega_k \sin 2l\omega_k} \qquad (21)$$

Эти величины и надо бы подставить как в выражение для u, так и в формулу (18). Но результат примет более простой вид, если перенести начало в ту точку, где $u = 0$, т. е. надо написать $x_1 - l$ вместо x и $y_1 - l$ вместо y, вместо же функции $f(y) = f(y_1 - l)$ будем просто писать $f(y_1)$. Тогда выражение

$$\frac{P_k \cos \omega_k x + Q_k \sin \omega_k x}{R_k} =$$

$$= \frac{(P_k \cos \omega_k l - Q_k \sin \omega_k l) \cos \omega_k x_1 + (P_k \sin \omega_k l + Q_k \cos \omega_k l) \sin \omega_k x_1}{R_k}$$

на основании уравнения (19) может быть упрощено, именно, будет

$$P_k \cos l\omega_k - Q_k \sin l\omega_k = 0$$

и после простых преобразований получим

$$\frac{P_k \sin \omega_k l + Q_k \cos \omega_k l}{R_k} = \frac{2(\beta_1^2 + \omega_k^2)}{\beta_1 + 2l(\beta_1^2 + \omega_k^2)} \int_0^l f(y) \sin \omega_k y\, dy$$

так что величина u будет

$$u = 2e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(\beta_1^2 + \omega_k^2)\, e^{-a^2\omega_k^2 t}}{\beta_1 + 2l(\beta_1^2 + \omega_k^2)} \sin \omega_k x \int_0^{2l} f(y) \sin \omega_k y\, dy \qquad (22)$$

а, соответственно ей, формула (18) примет вид

$$f(x) = 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(\beta_1^2 + \omega_k^2)}{\beta_1 + 2l(\beta_1^2 + \omega_k^2)} \sin \omega_k x \int_0^{2l} f(y) \sin \omega_k y\, dy \qquad (23)$$

Формулы (18) и (23), представляющие произвольную функцию в виде ряда, расположенного по синусам и косинусам дуг, зависящих от корней трансцендентного уравнения, составляют как бы обобщения тригонометрических рядов Фурье, и с подобными рядами нам не раз еще придется иметь дело.

ГЛАВА IV

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПРИ УСЛОВИЯХ НА ГРАНИЦАХ ОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЫ

ВТОРАЯ МЕТОДА ПУАССОНА

§ 46. В своей „Механике“ Пуассон применяет другую методу интегрирования уравнений с частными производными. Этою же методою пользовался Фурье в своей „Théorie analytique de la chaleur“ и даже Эйлер, и единственно для краткости речи будем эту методу называть „второю методою Пуассона“.

Мы изложим эту методу на ряде примеров; начав с простейшего, за каковой возьмем уравнение движения струны.

Итак, положим, что надо интегрировать уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

при начальных условиях: при $t = 0$ должно быть

$$u = f(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = F(x) \tag{2}$$

и при граничных условиях:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{при} & x = 0 & \text{должно быть} & u = 0 \\ \text{„} & x = l & \text{„} \quad \text{„} & u = 0 \end{array}\right\} \text{при всяком } t \tag{3}$$

функции же $f(x)$ и $F(x)$ заданы от $x = 0$ до $x = l$.

В главе II было указано, что для всякого линейного уравнения без последнего члена всякое решение, будучи умножено на постоянную произвольную, дает также решение этого уравнения, и сумма нескольких решений есть также его решение.

Будем искать решение уравнения (1) под видом суммы, составленной из частных решений этого уравнения и притом таких: 1) что каждое из них в отдельности удовлетворяет граничным условиям и 2) что каждое

из них имеет вид $T \cdot X$, где T есть функция только буквы t и X — функция только буквы x.

Итак, полагаем

$$u = \sum TX \tag{4}$$

причем каждый член этой суммы, как уже сказано, удовлетворяет уравнению (1).

Но

$$\frac{\partial^2 (TX)}{\partial t^2} = T'' X$$

и

$$\frac{\partial^2 (TX)}{\partial x^2} = TX''$$

где значками обозначено дифференцирование каждой из функций T и X по той переменной, от которой она зависит, подставляем эти величины в уравнение (1), тогда получим равенство

$$T'' X = a^2 TX''$$

Это равенство не иначе может иметь место, как только при условии

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = \text{const.}$$

Эту постоянную для удобства дальнейших выкладок обозначим через $-k^2$; тогда имеем уравнения

$$T'' + a^2 k^2 T = 0$$

и

$$X'' + k^2 X = 0$$

откуда

$$T = A \cos akt + B \sin akt \tag{5}$$

и

$$X = C \cos kx + D \sin kx \tag{6}$$

Если подставить величины (5) и (6) в формулу (4), то, какие бы ни взять значения постоянных произвольных A, B, C, D и k, сумма (4) будет удовлетворять уравнению (1), ибо каждый ее член в отдельности этому уравнению удовлетворяет.

Но второе наше требование состоит в том, чтобы каждый член в отдельности удовлетворял граничным условиям, т. е. чтобы при *всяком* значении t было

$$T(t) X(0) = 0 \quad \text{и} \quad T(t) X(l) = 0$$

т. е.

$$X(0) = 0 \quad \text{и} \quad X(l) = 0$$

Делая $x=0$ и $x=l$ в выражении X, получаем

$$C=0$$

$$D\sin kl=0$$

Так как мы ищем решения, отличные от 0, то D не равно нулю; значит, величина k не может быть взята произвольно, а лишь в ряду корней уравнения

$$\sin kl=0 \tag{7}$$

иначе

$$kl=n\pi$$

где n — любое целое число. Итак, будет

$$k=\frac{n\pi}{l} \qquad (n=1, 2, 3,\ldots)$$

Отрицательных значений k брать нет надобности, ибо решения, им соответствующие, не суть независимые от уже найденных; и, значит,

$$X_n=D_n\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{8}$$

$$T_n=A_n\cos\frac{an\pi t}{l}+B_n\sin\frac{an\pi t}{l} \tag{9}$$

и наша сумма будет

$$u=\sum_{n=1}^{n=\infty}A_nD_n\cos\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}+\sum_{n=1}^{n=\infty}B_nD_n\sin\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

где A_n, B_n, D_n — какие угодно постоянные. Так как произведения A_nD_n и B_nD_n суть такие же постоянные произвольные, как и A_n и B_n то, не нарушая общности, можно брать $D_n=1$ и писать

$$u=\sum_{n=1}^{n=\infty}A_n\cos\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{a\pi x}{l}+\sum_{n=1}^{n=\infty}B_n\sin\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{10}$$

Эта величина u удовлетворяет уравнению (1) и условиям (3).

Остается удовлетворить начальным условиям.

Делая в уравнении (10) $t=0$, мы должны в левой части получить $f(x)$ [ибо u при $t=0$ должно обратиться в $f(x)$], в правой же будет сумма

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

Итак, получим равенство

$$f(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{11}$$

из которого и надо определить коэффициент A_n.

Чтобы этого достигнуть, поступаем так: пишем равенство

$$f(x)=A_1\sin\frac{\pi x}{l}+A_2\sin\frac{2\pi x}{l}+\ldots+A_k\sin\frac{k\pi x}{l}+\ldots \tag{12}$$

и для определения коэффициента A_n множим обе части на $\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ и интегрируем в пределах от 0 до l. Тогда, в силу того, что

$$\int_0^l \sin\frac{j\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}=0, \quad \text{если } j\neq n$$

и

$$\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_0^l\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx=\frac{l}{2}$$

получим

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \tag{13}$$

Совершенно так же, взяв производную $\frac{\partial u}{\partial t}$, положив $t=0$ и уравняв полученный результат $F(x)$, будем иметь равенство

$$F(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{an\pi}{l}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

из которого, подобно предыдущему, найдем

$$B_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \tag{14}$$

Переменив, во избежание путаницы, под знаками интегралов (13) и (14) букву x на другую, например ξ, получим:

$$u=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{n=\infty}\cos\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi+$$

$$+\frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^l F(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$$

формулу, которую мы уже имели.

Как видно этот прием решения быстро и без сложных выкладок привел к цели.

Но необходимо обратить внимание на следующие обстоятельства: 1) сумма ΣTX удовлетворяет уравнению (1) без всяких оговорок, когда каждый ее член этому уравнению удовлетворяет, если она состоит из *конечного* числа членов; когда же число этих членов бесконечно, то дифференцирование ряда почленно допустимо лишь с известными ограничениями: надо, чтобы полученный после дифференцирования ряд был равномерно сходящийся; 2) определение постоянных A_n и B_n в рассматриваемом примере оказалось возможным произвести весьма просто, — опять-таки предполагая, что написанное разложение возможно, что оно единственное и что интегрирование ряда почленно допустимо.

В самом деле, если бы мы взяли, например, вместо $n=1, 2, 3, \ldots$, только четные значения $n=2, 4, 6, \ldots$, то полученная сумма удовлетворяла бы уравнению (1), удовлетворяла бы и граничным условиям; равенство (11) написалось бы так:

$$f(x)=A_2\sin\frac{2\pi x}{l}+A_4\sin\frac{4\pi x}{l}+\ldots$$

и из него мы получили бы те же самые значения коэффициентов; между тем равенство

$$f(x)=\sum_{i=1}^{i=\infty}A_{2i}\sin\frac{2i\pi x}{l}=\frac{2}{l}\sum_{i=1}^{i=\infty}\sin\frac{2i\pi x}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{2i\pi\xi}{l}d\xi$$

было бы *неверное*, как то известно из теории тригонометрических рядов. Необходимо брать члены, соответствующие *всем* положительным корням уравнения $\sin kl=0$.

Необходимо заметить, что как та, так и другая метода Пуассона приводят к суммам, зависящим от корней того же самого трансцендентного уравнения, и из первой методы было ясно видно, что непременно надо брать члены, соответствующие *всем* корням, а не некоторым из них. Это замечание необходимо иметь в виду, применяя вторую методу Пуассона к какой бы то ни было задаче, и по функциям, зависящим от корней какого бы трансцендентного уравнения разлагать заданную функцию ни пришлось, — надо брать *все* корни подряд.

В практических вопросах, где требуется лишь ограниченная точность, бóльшая часть этих затруднений теоретического характера отпадает, ибо вместо бесконечных сумм придется брать лишь небольшое число их первых членов, и главное затруднение будет в определении коэффициентов A_n и B_n, если только оно не выполнится подобно вышеизложенному.

Полученное решение оказалось совершенно того же вида, как то, которое дается первою методою Пуассона; между тем в главе II показан найденный Даламбертом общий интеграл предложенного уравнения, в виде

$$n = \omega(x + at) + \varphi(x - at)$$

Покажем связь между обоими решениями.

Так как

$$2\cos\frac{n\pi}{l}at\sin\frac{n\pi}{l}x = \sin\frac{n\pi}{l}(x + at) + \sin\frac{n\pi}{l}(x - at)$$

то первая сумма, входящая в состав величины u, может быть написана так:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n\cos\frac{n\pi}{l}at\sin\frac{n\pi}{l}x = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n\sin\frac{n\pi}{l}(x + at) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n\sin\frac{n\pi}{l}(x - at)$$

причем

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi;$$

а так как формула

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

представляет функцию $f(x)$ в промежутке от $x = 0$ до $x = l$ и функцию $-f(x)$ в промежутке от $x = 0$ до $x = -l$, для остальных же значений аргументов x значения функции следуют из того, что ее период есть $2l$ (фиг. 20), то, обозначив эту функцию вообще через $g(x)$, видим, что

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n\sin\frac{n\pi}{l}(x + at) = g(x + at)$$

Совершенно так же

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n\sin\frac{n\pi}{l}(x - at) = g(x - at)$$

и, значит, первый член в выражении u есть

$$\frac{1}{2}g(x+at)+\frac{1}{2}g(x-at)$$

Второй член в выражении u обозначим на время через v, так что

$$v=\frac{2}{a\pi}\cdot\frac{l}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{B_n}{n}\sin\frac{an\pi}{l}t\sin\frac{n\pi x}{l}$$

причем

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l F(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$$

Тогда, очевидно, будет

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\sum_{n=1}^{n=\infty}B_n\cos\frac{n\pi}{l}at\sin\frac{n\pi}{l}x$$

В силу показанного выше, стоящая в правой части этого равенства сумма может быть преобразована совершенно подобным же образом.

А так как сумма

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

представляет заданную функцию $F(x)$ на протяжении от $x=0$ до $x=l$, на протяжении же от $x=0$ до $x=-l$ функцию $-F(x)$, для дальнейших же значений аргументов величины представляемой этою суммою функции следуют из того, что ее период есть $2l$, то, обозначая эту функцию вообще через $G(x)$, видим, что

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}G(x+at)+\frac{1}{2}G(x-at)$$

следовательно, если обозначить вообще

$$\Phi(\xi)=\frac{1}{a}\int_0^\xi G(\xi)d\xi$$

то будет

$$v=\frac{1}{2}\Phi(x+at)-\frac{1}{2}\Phi(x-at)+C$$

где C есть производная постоянная или даже произвольная функция буквы x, а так как при $t=0$ величина $v=0$, то $C=0$ и, следовательно,

$$v=\frac{1}{2}\Phi(x+at)-\frac{1}{2}\Phi(x-at)$$

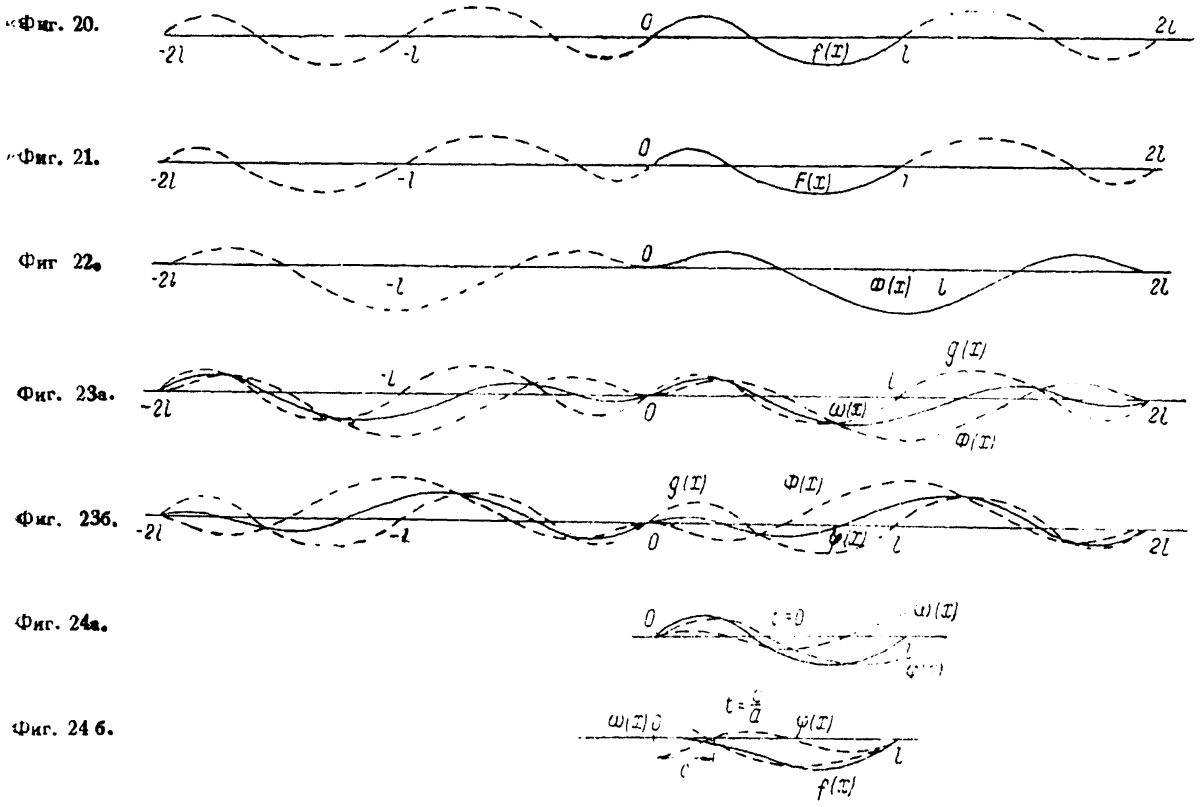
Таким образом, имеем

$$u=\frac{1}{2}[g(x+at)+\Phi(x+at)]+\frac{1}{2}[g(x-at)-\Phi(x-at)] \qquad (15)$$

что с очевидностью показывает, что полученное решение заключается в общем, данном Даламбертом.

Эта формула решения может быть с большею наглядностью представлена графически.

В самом деле, на чертеже (фиг. 20) показано графическое представление функции $g(x)$, когда задана на протяжении от $x=0$ до $x=l$ функция $f(x)$ — начальная форма струны. Ясно, что стоит только построить



Фиг. 20—24б.

по данной $F(x)$ соответствующую ей функцию $G(x)$ (фиг. 21) и затем по этой последней функцию $\Phi(x)$, которая пусть представится чертежом на фиг. 22, то функции

$$\omega(x)=\frac{1}{2}[g(x)+\Phi(x)]$$

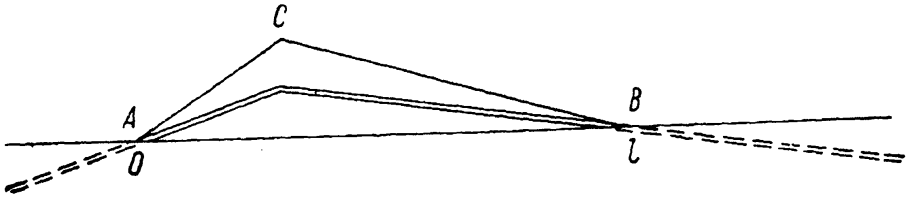
$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[g(x)-\Phi(x)]$$

сейчас же строятся, как полусумма и полуразность ординат предыдущих кривых при той же абсциссе x.

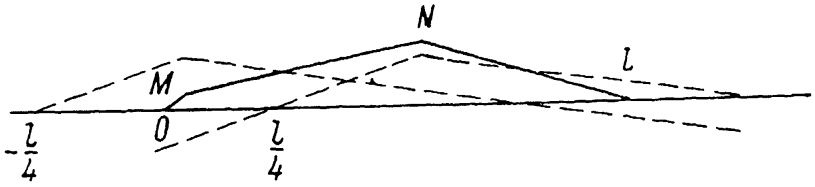
Пусть $\omega(x)$ и $\varphi(x)$ представляются чертежами на фиг. 23; тогда если $c = at$ для рассматриваемого значения t, то, чтобы получить функцию

$$\omega(x + at) = \omega(x + c)$$

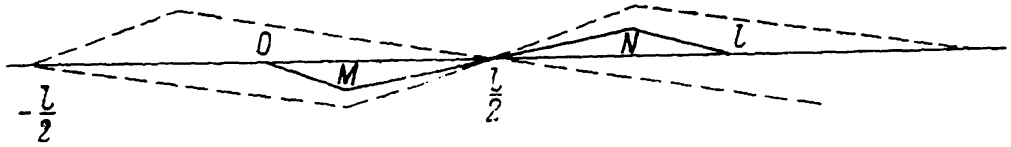
стоит только всю кривую $\omega(x)$ продвинуть влево (в сторону отрицательных x) на величину c, как показано пунктиром на чертеже (фиг. 24);



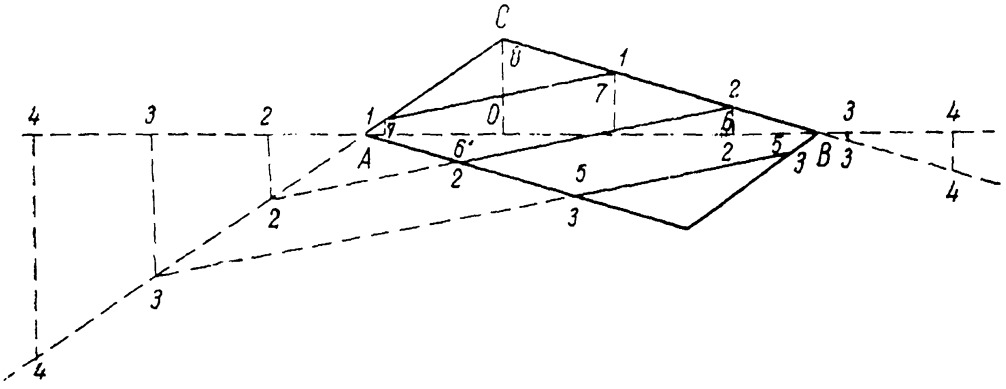
Фиг. 25.



Фиг. 25а.



Фиг. 25б.



Фиг. 26.

Фиг. 5—26.

точно так же, чтобы получить $\varphi(x - at) = \varphi(x - c)$, стоит только продвинуть кривую $\varphi(x)$ на величину c вправо, как показано пунктиром.

Величина u, определяющая форму струны в момент $t = \frac{c}{a}$, получится, если возьмем сумму соответствующих ординат обеих пунктирных кривых на протяжении от $x = 0$ до $x = l$, как изображено толстой сплошною кривой.

Предлагается в виде задачи вычертить u для моментов

$$t=0;\quad t=\frac{\tau}{8};\quad t=\frac{2\tau}{8};\ldots\quad t=\frac{7\tau}{8}$$

где $\tau=\frac{2l}{a}$.

Вышеуказанное построение принимает особенно простой вид, когда функция $F(x)=0$ и функция $f(x)$ состоят из прямолинейных участков; так, например, если взять случай, рассмотренный в § 37, то функция $g(x)$ представиться чертежом фиг. 25, и у нас будет

$$u=\frac{1}{2}[g(x+at)+g(x-at)];$$

полагая последовательно $at=0$, $\frac{l}{4}$, $\frac{l}{2}$ и т. д., будем получать серию чертежей (фиг. 25а, 25б).

Все эти чертежи можно свести к одной весьма простой диаграмме, которая указана в лекциях Гельмгольца. Именно: строится параллелограмм, коего стороны параллельны и равны соответствующим частям струны в начальном ее положении, проводим диагональ AB этого параллелограмма — она будет параллельна оси x, откладываем по ней в обе стороны от точки O, оси x, величины $\frac{l}{4}$, $2\cdot\frac{l}{4}$, $3\cdot\frac{l}{4}$ и т. д. и через полученные точки $1, 2, 3, \ldots$ проводим прямые, параллельные участку MN на чертеже (фиг. 26), до их пересечения со стороны параллелограмма, и эти точки помечаем теми же нумерами 1.1, 2.2, 3.3 и т. д.; тогда последовательные формы струны будут ACB, $A11B$, $A22B$, $A33C$ и т. д.

Предлагается в виде задачи построить диаграмму скоростей точек струны в те же моменты.

§ 47. Как второй пример для пояснения изложенной методы, возьмем последний частный случай задачи о распространении тепла в пруте, т. е. где надо интегрировать уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-bu \tag{1}$$

при граничных условиях: должно быть при всяком t

$$u=0\quad\text{при}\quad x=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_1 u=0\quad\text{при}\quad x=2l \tag{2}$$

и при начальном условии: при $t=0$ должно быть при всяком t

$$u=f(x) \tag{3}$$

Ищем u в виде суммы

$$u = \sum TX \tag{4}$$

Каждый член этой суммы должен удовлетворять как предложенному уравнению (1), так и граничным условиям (2).

Подстановка величины TX вместо u в уравнение (1) дает равенство

$$T'X = a^2 TX'' - bTX$$

или

$$(T' + bT)X = a^2 TX''$$

что не иначе возможно, как взяв

$$\frac{T' + bT}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = \text{const.} = -k^2$$

откуда следует

$$T' + (a^2 k^2 + b)T = 0 \tag{5}$$

$$X'' + k^2 X = 0 \tag{6}$$

Отсюда получаем

$$T = Ae^{-(b + a^2 k^2)t} = Ae^{-bt} e^{-a^2 k^2 t}$$

$$X = C\cos kx + D\sin kx$$

Обращаясь к граничным условиям, которым должен удовлетворять, по предположению, каждый член нашей суммы, по сокращении на T получаем

$$X(0) = 0$$

$$\left(\frac{dX}{dx} + \beta_1 X\right)_{x=2l} = 0$$

или

$$C = 0$$

$$D(k\cos 2kl + \beta_1 \sin 2kl) = 0;$$

значит, величина k должна удовлетворять уравнению

$$k\cos 2kl + \beta_1 \sin 2kl = 0 \tag{7}$$

Пусть корни этого уравнения суть

$$\ldots -\omega_n, \ldots -\omega_2, -\omega_1, 0, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n, \ldots$$

Каждому из этих корней ω_i соответствует своя функция X_i и своя функция T_i, а именно:

$$X_i = D_i \sin \omega_i x$$
$$T_i = A_i e^{-bt} e^{-a^2 \omega_i^2 t}$$

а так как произведение постоянных произвольных $D_i A_i$ есть тоже постоянная произвольная, то, не нарушая общности, можно положить $D_i = 1$, и тогда, в силу того, что величины $T_i = T_{-i}$ и $X_i = -X_i$, члены, соответствующие корням ω_i и $-\omega_i$, соединятся в один; обозначая сумму постоянных произвольных $A_i - A_{-i} = B_i$, получим равенство

$$u = e^{-bt} \sum_{i=1}^{i=\infty} B_i e^{-a^2 \omega_i^2 t} \sin \omega_i x \tag{8}$$

Остается удовлетворить начальному условию. Делая в формуле (8) $t = 0$ и $u = f(x)$, получаем равенство

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} B_i \sin \omega_i x \tag{9}$$

из которого и надо найти коэффициенты B_i. Обозначая, попрежнему, $\sin \omega_i x$ через X_i, напишем предыдущее равенство так:

$$f(x) = B_1 X_1 + B_2 X_2 + \ldots + B_i X_i + \ldots \tag{10}$$

причем мы, в силу граничных условий и уравнения (7), знаем, что каждая из функций X_i удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} X_i(0) &= 0 \\ X_i'(2l) + \beta_1 X_i(2l) &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

и уравнению

$$X_i'' + \omega_i^2 X_i = 0 \tag{12}$$

Покажем, что для этих функций интеграл

$$\int_0^{2l} X_i X_k \, dx = 0, \quad \text{если} \quad i \neq k \tag{13}$$

В самом деле, заменим под знаком интеграла X_i его величиною из уравнения (12); тогда наш интеграл будет

$$-\omega_i^2 \int_0^{2l} X_k X_i \, dx = \int_0^{2l} X_k X_i'' \, dx = \left[X_k X_i' \right]_0^{2l} - \int_0^{2l} X_k' X_i' \, dx$$

Совершенно так же будет

$$-\omega_k^2 \int_0^{2l} X_k X_i \, dx = \int_0^{2l} X_i X_k'' \, dx = \left[X_i X_k' \right]_0^{2l} - \int_0^{2l} X_i' X_k' \, dx$$

откуда следует

$$(\omega_i^2 - \omega_k^2) \int_0^{2l} X_k X_i \, dx = \left[X_k X_i' - X_i X_k' \right]_0^{2l} =$$

$$= X_k(2l) X_i'(2l) - X_i(2l) X_k'(2l)$$

Но из уравнения (11), второе из коих можно писать так:

$$-\beta_1 = \frac{X_i'(2l)}{X_i(2l)} = \frac{X_k'(2l)}{X_k(2l)} = \ldots$$

следует, что

$$X_i'(2l) X_k(2l) - X_i(2l) X_k'(2l) = 0$$

значит, и

$$(\omega_i^2 - \omega_k^2) \int_0^{2l} X_i X_k \, dx = 0$$

А так как ω_i не равно ω_k, то и будет

$$\int_0^{2l} X_i X_k \, dx = 0, \quad \text{если} \quad i \neq k$$

иначе

$$\int_0^{2l} \sin \omega_i x \sin \omega_k x \, dx = 0, \quad \text{если} \quad i \neq k$$

На основании этого свойства, для определения коэффициента B_i стоит только умножить обе части равенства (10) на X_i и проинтегрировать от 0 до $2l$.

Получим при замене под знаком интеграла буквы x буквою ξ:

$$B_i = \frac{\int_0^{2l} f(\xi) \sin \omega_i \xi \, d\xi}{\int_0^{2l} \sin^2 \omega_i \xi \, d\xi}$$

Величина интеграла, входящего в знаменатель этой формулы, в данном случае легко находится непосредственно; а именно, будет

$$\int_0^{2l} \sin^2 \omega_i \xi d\xi = \frac{1}{2} \int_0^{2l} (1 - \cos 2\omega_i \xi) d\xi = \frac{1}{2} \left[\xi - \frac{\sin 2\omega_i \xi}{2\omega_i} \right]_0^{2l} = l - \frac{1}{4} \frac{\sin 4\omega_i l}{\omega_i}$$

Но так как, в силу равенства (7)

$$\operatorname{cotg} 2\omega_i l = -\frac{\beta_i}{\omega_i}$$

следовательно,

$$\sin 2\omega_i l = \frac{\omega_i}{\sqrt{\omega_i^2 + \beta_1^2}}; \qquad \cos 2\omega_i l = -\frac{\beta_1}{\sqrt{\omega_i^2 + \beta_1}}$$

и

$$\sin 4\omega_i l = -\frac{2\beta_1 \omega_i}{(\omega_i^2 + \beta_1^2)}$$

то будет

$$\int_0^{2l} \sin^2 \omega_i \xi d\xi = \frac{\beta_1 + 2l(\omega_i^2 + \beta_1^2)}{2(\omega_i^2 + \beta_1^2)}$$

и

$$B_i = \frac{2(\omega_i^2 + \beta_1^2)}{\beta_1 + 2l(\omega_i^2 + \beta_1^2)} \int_0^{2l} f(\xi) \sin \omega_i \xi \, d\xi$$

и получится

$$u = 2e^{-bt} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\omega_i^2 + \beta_1^2}{\beta_1 + 2l(\omega_i^2 + \beta_1^2)} e^{-a^2 \omega_i^2 t} \sin \omega_i x \int_0^{2l} f(\xi) \sin \omega_i \xi \, d\xi$$

Можно было бы для нахождения интеграла

$$\int_0^{2l} X_i^2\,dx$$

применить и другой прием, к которому приходится прибегать, когда непосредственное вычисление этого интеграла требовало бы слишком длинных выкладок.

Мы имели равенство

$$(\omega_k^2 - \omega_i^2)\int_0^{2l} X_i X_k\,dx = X_k(2l)\,X_i'(2l) - X_i(2l)\,X_k'(2l)$$

Составим функцию $X(\omega, x)$ совершенно так же, как X_k составлено из ω_k и x; тогда можно написать равенство

$$\int_0^{2l} X_i X\,dx = \frac{X_i'(2l)\,X(\omega, 2l) - X_i(2l)\,X'(\omega, (2l))}{\omega^2 - \omega_i^2}$$

вторая часть этого равенства при $\omega = \omega_i$ принимает неопределенный вид $\frac{0}{0}$; обозначая числитель этой дроби через $F(\omega)$ и переходя к пределу по известному правилу, получим

$$\lim_{\omega=\omega_i}\int_0^{2l} X_i X\,dx = \int_0^{2l} X_i^2\,dx = \lim_{\omega=\omega_i}\frac{F(\omega)}{\omega^2 - \omega_i^2} = \frac{\frac{\partial}{\partial\omega}(F(\omega_i))}{2\omega_i} \qquad (*)$$

так, в нашем случае

$$F(\omega) = \omega_i \cos 2l\omega_i \sin 2l\omega - \sin 2l\omega_i\,\omega \cos 2l\omega$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega}[F(\omega)] = 2l\omega_i \cos 2l\omega_i \cos 2l\omega - \sin 2l\omega_i \cos 2l\omega + 2l\omega \sin 2l\omega_i \sin 2l\omega$$

$$-\frac{\partial}{\partial\omega}[F(\omega_i)] = 2l\omega_i - \frac{1}{2}\sin 4l\omega_i$$

и формула (*) дает

$$\int_0^{2l} X_i^2\,dx = l - \frac{1}{4}\frac{\sin 4l\omega_i}{\omega_i}$$

как и раньше.

Этот прием, как видно, сводит нахождение интеграла

$$\int_0^{2l} X_i^2\,dx$$

к дифференцированиям.

Как видно, и в этом примере определение коэффициентов B_i оказалось возможно произвести весьма просто благодаря свойству функции X, выражаемому равенством

$$\int_0^{2l} X_i X_k \, dx = 0, \quad \text{если} \quad i \neq k$$

В остальном остаются в силе сделанные в § 46 замечания.

§ 48. Чтобы дать еще пример на приложение второй методы Пуассона, рассмотрим задачу о поперечных колебаниях упругого стержня или прута постоянного поперечного сечения и однородного материала.

Мы увидим, что эта задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

при начальных условиях: при $t = 0$ должно быть

$$u = f(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = F(x)$$

и граничных условиях, относящихся к концам стержня $x = 0$ и $x = l$, выражающихся различным образом, а именно:

1) для конца *закрепленного* должно быть при всяком t

$$u = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

2) для конца *подпертого* должно быть при всяком t

$$u = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

3) для конца *свободного* должно быть при всяком t

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Ясно, что возможных комбинаций этих граничных условий может быть *шесть*, а именно: 1) оба конца закреплены, 2) оба конца подперты, 3) оба конца свободные, 4) один конец закреплен, другой подперт, 5) один конец закреплен, другой свободен и 6) один конец подперт, другой свободен.

Возьмем сперва простейший случай и употребительнейший в строительном деле — оба конца стержня или балки *подперты*.

В этом случае граничные условия будут

$$\left.\begin{aligned} u = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \\ u = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = l \end{aligned}\right\} \text{при всяком } t \qquad (3)$$

Согласно общему правилу, ищем решение вида

$$u = \sum TX$$

причем каждый член суммы удовлетворяет уравнению (1) и граничным условиям, или, как их называют для балки, условиям закрепления концов.

Имеем

$$T'' X + b^2 . TX^{IV} = 0 \tag{4}$$

или иначе

$$\frac{T''}{-b^2 T} = \frac{X^{IV}}{X} = \text{постоянной} = k^4$$

и, значит, уравнение (4) равносильно следующим двум:

$$T'' + b^2 k^4 T = 0$$
$$X^{IV} - k^4 X = 0$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} T &= A \cos bk^2 t + B \sin bk^2 t \\ X &= C \operatorname{ch} kx + D \operatorname{sh} kx + E \cos kx + F \sin kx \end{aligned} \tag{5}$$

где A, B, C, D, E, F суть произвольные постоянные так же, как и k,

$$\operatorname{ch} kx = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2}$$

и

$$\operatorname{sh} kx = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}$$

суть так называемые гиперболические косинус и синус.

Составляем теперь граничные условия, которым величина X должна удовлетворять, а именно:

при $x = 0$ должно быть $X = 0$ и $X'' = 0$
„ $x = l$ „ „ $X = 0$ и $X'' = 0$;

таким образом, получаем

$$\begin{aligned} &C + E = 0 \\ &C - E = 0 \\ &C \operatorname{ch} kl + D \operatorname{sh} kl + E \cos kl + F \sin kl = 0 \\ &C \operatorname{ch} kl + D \operatorname{sh} kl - E \cos kl - F \sin kl = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Отсюда следует

$$C = 0; \quad E = 0$$

после чего последние два уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} D\,\mathrm{sh}\,kl + F\sin kl &= 0 \\ D\,\mathrm{sh}\,kl - F\sin kl &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Эти два уравнения будут совместны, только когда

$$\mathrm{sh}\,kl\sin kl = 0$$

т. е. или $\mathrm{sh}\,kl = 0$ или $\sin kl = 0$.

Первое уравнение имеет, кроме $k = 0$, только мнимые корни; поэтому, чтобы иметь дело с вещественными величинами, берем

$$\sin kl = 0 \tag{8}$$

т. е.

$$kl = n\pi \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

тогда

$$D = 0$$

причем мы ограничиваемся лишь положительными значениями k, так как решения, соответствующие отрицательным k, не будут независимы от первых. Корень $k = 0$ не представляет интереса, так как дает $X = 0$.

Точно так же, если бы мы взяли уравнение $\mathrm{sh}\,kl = 0$ и затем освободились от мнимых знаков, то пришли бы к тем же результатам.

Итак, функция X_n будет

$$X_n = F_n \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{9}$$

$$u = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n F_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos b\frac{n^2\pi^2}{l^2}t + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n F_n \sin\frac{n\pi x}{l}\sin b\frac{n^2\pi^2}{l^2}t$$

причем, в виду произвольности A_n и B_n, можно брать $F_n = 1$, так что будет

$$u = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n^2\pi^2 b}{l^2}t + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n^2\pi^2 b}{l^2}t \tag{10}$$

Начальные условия дают

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l} \\ F(x) &= \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^2\pi^2 b}{l^2} B_n \sin\frac{n\pi x}{l} \end{aligned} \tag{11}$$

откуда находим, как уже не раз делали,

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi$$
$$B_n = \frac{2l}{\pi^2 b}\cdot\frac{1}{n^2}\int_0^l F(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi \qquad (12)$$

Возьмем теперь какое-нибудь другое сочетание условий закрепления, например то, которое имеет место при изучении вибраций корабля, т. е. что оба конца свободны.

В этом случае функция X должна удовлетворять таким условиям:

$$\begin{aligned} X''=0 \quad &\text{и} \quad X'''=0 \quad \text{при} \quad x=0 \\ X''=0 \quad &\text{и} \quad X'''=0 \quad \text{„} \quad x=l \end{aligned} \qquad (13)$$

Составив эти производные, имеем

$$X''=k^2[C\operatorname{ch}kx+D\operatorname{sh}kx-E\cos kx-F\sin kx]$$
$$X'''=k^3[C\operatorname{sh}kx+D\operatorname{ch}kx+E\sin kx-F\cos kx]$$

и, значит, наши условия будут

$$\begin{aligned} C-E&=0 \\ D-F&=0 \\ C\operatorname{ch}kl+D\operatorname{sh}kl-E\cos kl-F\sin kl&=0 \\ C\operatorname{sh}kl+D\operatorname{ch}kl+E\sin kl-F\cos kl&=0 \end{aligned} \qquad (14)$$

причем предполагается пока, что k не равно нулю.

Из первых двух уравнений следует

$$E=C; \qquad F=D$$

после чего последние два уравнения напишутся так:

$$\begin{aligned} C(\operatorname{ch}kl-\cos kl)+D(\operatorname{sh}kl-\sin kl)&=0 \\ C(\operatorname{sh}kl+\sin kl)+D(\operatorname{ch}kl-\cos kl)&=0 \end{aligned} \qquad (15)$$

Эти два уравнения, однородные относительно C и D, только тогда допускают решения, отличные от нуля, когда определитель равен нулю, т. е. когда

$$(\operatorname{ch}kl-\cos kl)^2-(\operatorname{sh}^2kl-\sin^2kl)=0$$

или

$$\operatorname{ch}^2kl-2\operatorname{ch}kl\cos kl+\cos^2kl-\operatorname{sh}^2kl+\sin^2kl=0$$

Замечая, что

$$\mathrm{ch}^2 kl - \mathrm{sh}^2 kl = 1$$

получим

$$2 - 2\,\mathrm{ch}\, kl \cos kl = 0$$

или окончательно

$$\Phi(k) = \mathrm{ch}\, kl \cos kl - 1 = 0 \qquad (15)$$

Это трансцендентное уравнение определяет значения k, при которых функции X удовлетворяют условиям закрепления концов стержня.

Пусть положительные корни этого уравнения будут

$$k_1,\ k_2,\ k_3, \ldots k_n \qquad (*)$$

тогда это уравнение будет иметь и отрицательные корни

$$-k_1 = k_{-1};\ -k_2 = k_{-2};\ \ldots\ -k_n = k_{-n} \qquad (**)$$

каждому корню соответствует своя функция X, которую обозначим тем же значком, как и соответствующий корень.

Когда мы возьмем k равным одному из значений (*) или (**), то из уравнений (15) одно станет следствием другого, и, обозначая через H произвольную постоянную, можно брать

$$\frac{-C}{\mathrm{sh}\, kl} \quad \frac{}{\sin kl} = \frac{D}{\mathrm{ch}\, kl - \cos kl} = H$$

и значит, будет

$$X_i = H_i [(\mathrm{ch}\, k_i x + \cos k_i x)(\sin k_i l - \mathrm{sh}\, k_i l) +$$
$$+ (\mathrm{sh}\, k_i x + \sin k_i x)(\mathrm{ch}\, k_i l - \cos k_i l)] \qquad (17)$$

Причем, как уже не раз замечено, без ущерба для общности можно полагать $H_i = 1$.

Нетрудно видеть, что

$$X_{-i} = -X_i$$

и, значит, нет надобности рассматривать функции X с отрицательными значками, ибо члены, им соответствующие, сложатся с членами с положительными значками.

Итак, получим

$$u = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n X_n \cos k_n^2 bt + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n X_n \sin k_n^2 bt$$

ибо соответствующая корню k_n функция T есть

$$T_n = A_n \cos k_n^2 bt + B_n \sin k_n^2 bt$$

где A_n и B_n суть произвольные постоянные.

* Указанная выше формула для u не является, строго говоря, общей, ибо мы не рассмотрели случай $k=0$. При этом уравнения для X и T принимают вид: $X^{IV}=0$ и $T''=0$. Первое из них допускает решение $X(x)=c+dx$, удовлетворяющее предельным условиям (13), где c и d — произвольные постоянные. Мы имеем таким образом два линейно независимые решения для X. Выберем их следующим образом: $X_{-1}=1$ и $X_0=x-l$. При таком выборе они удовлетворяют условию:

$$\int_0^{2l} X_{-1} X_0 \, dx = 0$$

Решения X_{-1} и X_0 надо умножить еще на общий интеграл уравнения $T''=0$, т. е. на полином первой степени от t с произвольными постоянными коэффициентами. Таким образом, к приведенному выше выражению для u мы должны добавить выражение вида:

$$(a_{-1}+b_{-1}t)+(a_0+b_0 t)\left(x-\frac{l}{2}\right)$$

где a_{-1}, b_{-1}, a_0, b_0 — произвольные постоянные. Эти члены в выражении u будут отсутствовать, если функции $f(x)$ и $F(x)$ удовлетворяют условиям:

$$\int_0^{2l} f(x) X_{-1} \, dx = \int_0^{2l} f(x) X_0 \, dx = \int_0^{2l} F(x) X_{-1} \, dx = \int_0^{2l} F(x) X_0 \, dx = 0$$

что равносильно условиям:

$$\int_0^{2l} f(x) \, dx = \int_0^{2l} f(x) \, x dx = \int_0^{2l} F(x) \, dx = \int_0^{2l} F(x) \, x dx = 0$$

Все дальнейшие вычисления мы будем проводить, считая, что дополнительные слагаемые, соответствующие $k=0$, отсутствуют.*

Прежде чем итти дальше, уже можем сделать общее замечание, а именно: мы видим, что вид функций X определяется *условиями закрепления*. Во всех случаях эти условия приведут к четырем уравнениям *первой* степени между четырьмя постоянными произвольными, входящими в функцию X, и вторые части этих уравнений будут *нули*, а чтобы эти уравнения допускали решения, отличные от нуля, необходимо, чтобы определитель их был равен нулю.

Равенство нулю этого определителя доставит *трансцендентное* уравнение относительно буквы k и послужит для определения тех значений, которые эта величина может принимать. Значений этих будет бесчисленное множество, и каждому корню будет соответствовать своя функция X, зависящая от этого корня и содержащая произвольный постоянный множитель, который, без ущерба общности, может быть взят равным 1.

Начальные условия приводят к равенствам

$$f(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n X_n$$
$$F(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty} k_n^2\, b\, B_n X_n \tag{18}$$

из которых и надо будет определить коэффициенты A_n и B_n.

Это определение производится на основании следующего общего свойства функции X для всякой комбинации условий закрепления концов:

$$\int_0^l X_i X_j\, dx=0, \quad \text{если} \quad i\neq j \tag{19}$$

Чтобы доказать это свойство, припомним, что функции X_i и X_j определяются уравнениями

$$X_i^{\mathrm{IV}}-k_i^4 X=0 \quad \text{и} \quad X_j^{\mathrm{IV}}-k_j^4 X=0 \tag{20}$$

и сочетанием граничных условий:

а) для заделанного конца ($x=0$ или $x=l$)

$$X_i=0 \quad \text{и} \quad X_i'=0$$

а также

$$X_j=0 \quad \text{и} \quad X_j'=0$$

б) для подпертого конца

$$X_i=0 \quad \text{и} \quad X_i''=0$$

а также

$$X_j=0 \quad \text{и} \quad X_j''=0$$

в) для свободного конца

$$X_i''=0 \quad \text{и} \quad X_i'''=0$$

а также

$$X_j''=0 \quad \text{и} \quad X_j'''=0$$

Очевидно будет, в силу уравнений (20) и интегрирования по частям

$$k_i^4\int_0^l X_i X_j\, dx=\int_0^l X_i^{\mathrm{IV}} X_j\, dx=$$

$$=\left[X_i''' X_j-X_i'' X_j'+X_i' X_j''-X_i X_j'''\right]_0^l+\int_0^l X_i X_j^{\mathrm{IV}}\, dx$$

заменяя в последнем интеграле X_j^{IV} его величиною $k_j^4 X_j$, получим

$$(k_i^4 - k_j^4) \int_0^l X_i X_j \, dx = \left[X_i''' X_j - X_i'' X_j' + X_i' X_j'' - X_i X_j''' \right]_0^l \qquad (21)$$

в силу же условий закрепления, величина, стоящая в [ ], обращается в *нуль* как при $x = l$, так и при $x = 0$, *каковы бы эти условия закрепления ни были*; значит, будет

$$(k_i^4 - k_j^4) \int_0^l X_i X_j \, dx = 0$$

а так как, по предположению, k_i и k_j между собою не равны, то будет

$$\int_0^l X_i X_j \, dx = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j$$

На основании этого свойства получаем, как уже не раз показано:

$$A_n = \frac{\int_0^l f(\xi) X_n(\xi) \, d\xi}{\int_0^l X_n^2(\xi) \, d\xi}$$

$$B_n = \frac{1}{bk_n^2} \cdot \frac{\int_0^l F(\xi) X_n(\xi) \, d\xi}{\int_0^l X_n^2(\xi) \, d\xi} \qquad (22)$$

Непосредственное вычисление интеграла

$$\int_0^l X_n^2(\xi) \, d\xi$$

входящего в знаменатель этих формул, может потребовать длинных выкладок; поэтому здесь удобнее воспользоваться тем приемом, который был показан в § 47, именно, составить функцию $X(kx)$ совершенно так же, как функция X_j составлена из $k_j x$, и рассматривать интеграл

$$\int_0^l X_j^2 \, dx$$

как предел, к которому приближается интеграл

$$\int_0^l X_j(kx)\, X_j\, dx$$

когда k приближается к пределу k_j; тогда, обозначая через $\Omega(k)$ функцию

$$\Omega(k) = \left[X''' X_j - X'' X_j' + X' X_j'' - X X_j''' \right]_0^l \tag{23}$$

будем иметь

$$\int_0^l X_j^2\, dx = \frac{\partial \Omega(k_j)}{\partial k} \Big/ 4k_j^3 \tag{23'}$$

Это вычисление может быть произведено в общем виде.

Заметим, во-первых, что в выражении Ω значками обозначены *дифференцирования, произведенные по букве* x; но надо помнить, что аргументом функции X служит kx, так что, если положить $kx = y$, то будет

$$X' = \frac{dX(kx)}{dx} = kX'(y); \quad X'' = \frac{d^2 X(kx)}{dx^2} = k^2 X''(y); \quad X'''(kx) = k^3 X'''(y)$$

причем в правых частях этих равенств значком обозначено дифференцирование по букве y.

Точно так же, если обозначить $k_j x = z$, то будет

$$X_j' = k_j X_j'(z); \quad X_j'' = k_j^2 X_j''(z); \quad X_j''' = k_j^3 X_j'''(z)$$

Отсюда ясно, что при таком обозначении

$$X^{IV}(y) = X(y)$$

и

$$X_j^{IV}(z) = X_j(z)$$

в силу того уравнения, которому функции X удовлетворяют.

Таким образом, будет

$$\Omega(k) =$$

$$= \left[k^3 X''(y) X_j(z) - k^2 k_j X''(y) X_j'(z) + k k_j^2 X'(y) X_j''(z) - k_j^3 X(y) X_j'''(z) \right]_0^l$$

Дифференцируя по k, надо помнить, что $y = kx$, и, значит, $\frac{dy}{dk} = x$, величина же z от k не зависит.

Выполнив дифференцирование и полагая затем $k = k_j$, откуда $X(y) = X_j(z)$, получим

$$\frac{d\Omega(k_j)}{dk} =$$

$$= \left[3 k_j^2 X_j''' X_j + k_j^3 x X_j^2 - k_j^2 X_j'' X_j' - 2 k_j^3 x X_j''' X_j' + k_j^3 x (X_j'')^2 \right]_0^l \quad (24)$$

причем у всех функций аргумент есть z.

Заметим теперь, что условия закрепления суть:
конец заделан

$$X_j = 0; \qquad X_j' = 0$$

конец подперт

$$X_j = 0; \qquad X_j'' = 0$$

конец свободен

$$X_j'' = 0; \qquad X_j''' = 0$$

Отсюда видно, что при *всяком* условии закрепления конца величины $X_j X_j'''$ и $X_j' X_j''$ равны нулю при подстановке соответствующего значения x, значит, эти члены можно из предыдущей формулы опустить. Остальные члены содержат множитель x, и, значит, равны нулю при нижнем пределе, и у нас останется

$$\frac{d\Omega(k_j)}{dk} = l k_j^3 \left[X_j^2(k_j l) - 2 X_j'''(k_j l) X_j'(k_j l) + (X_j''(k_j l))^2 \right]$$

и, значит, будет

$$\int_0^l X_j^2 \, dx = \frac{1}{4} l \left[X_j^2 - 2 X_j''' X_j' + (X_j'')^2 \right]_{x=l} \quad (25)$$

Отсюда составляем следующую табл. 4 значений нашего интеграла:

Таблица 4

Род закрепления конца $x=l$	Род закрепления конца $x=0$	Значение интеграла $\int_0^l X_i^2 dx$
Заделан	заделан / подперт / свободен	$\frac{1}{4} l(X''(k_i l)^2$
Подперт	заделан / подперт / свободен	$-\frac{1}{2} lX'''(k_i l) X'(k_i l)$
Свободен . . .	заделан / подперт / свободен	$\frac{1}{4} l(X(k_i l))^2$

При этом значками обозначена производная функция X; так, например, для случая, когда оба конца подперты, будет

$$X=\sin kx=\sin z \qquad X'=\cos z \qquad X'''=-\cos z, k=\frac{n\pi}{l}$$

$$X'X'''=-\cos^2 z=-\cos^2 kx$$

и

$$-\frac{1}{2} lX'''(kl) X'(kl)=\frac{1}{2} l\cos^2 k\pi=\frac{1}{2} l$$

Подобным же образом надо пользоваться этою таблицею и в остальных случаях, беря самое функцию X сообразно условиям закрепления *обоих* концов.

§ 49. Эти примеры в достаточной степени поясняют методу и показывают, насколько просто она ведет к цели, когда особые свойства функций X, входящих в решение задачи, позволяют находить коэффициенты в разложении произвольной функции по ним.

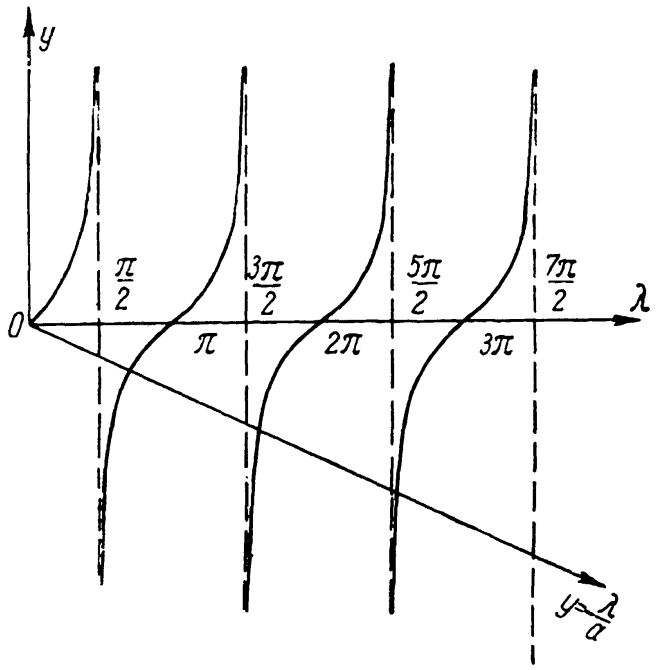
Если такого свойства, подобного, например,

$$\int_0^l X_i X_j dx=0, \quad \text{если} \quad i\neq j$$

подметить не удается, то следует прибегнуть к первой методе Пуассона, хотя по выкладкам она оказывается гораздо сложнее.

Вместе с тем, первая метода, вытекающая непосредственно из теоремы Фурье, укажет и те ограничения, которым должна быть подчинена разлагаемая функция (условие Дирихле), а также и то, что в местах разрыва получается полусумма значений функций, соответствующих месту разрыва.

Необходимо сделать еще одно замечание. Как первая, так и вторая метода приводят к необходимости решать некоторое трансцендентное уравнение. Вычисление и исследование корней этого уравнения может также представить затруднения; работа облегчается, если при решении таких уравнений руководствоваться теми приемами, которые мы также поясним на примерах.



Фиг. 27.

Пример 1. Положим, например, что надо решать уравнение

$$k\cos 2kl+\beta_1\sin 2kl=0$$

относительно неизвестной k при заданных β_1 и l.

Тогда, для краткости, полагаем

$$2kl=\lambda$$

и, делая $2\beta_1 l=a$, напишем наше уравнение так:

$$\operatorname{tg}\lambda=-\frac{\lambda}{a} \qquad (1)$$

Прежде всего надо „отделить“ корни этого уравнения, что делается с большою наглядностью путем построения кривой

$$y=\operatorname{tg}\lambda$$

и прямой

$$y=-\frac{\lambda}{a}$$

абсциссы λ точек пересечения которых и дают требуемые корни, из коих нам нужны только положительные.

Этот чертеж (фиг. 27) сейчас же покажет, что искомые корни будут, при $a>0$, вида

$$\lambda_1=\frac{\pi}{2}+\mu_1;\quad \lambda_2=\frac{3\pi}{2}+\mu_2;\quad \lambda_3=\frac{5\pi}{2}+\mu_3;\quad \ldots\ \lambda_i=\frac{2i-1}{2}\pi+\mu_i$$

причем μ_1, μ_2, ... μ_i, ... суть *положительные* величины, *меньшие* $\frac{\pi}{2}$ и быстро убывающие по мере возрастания значка i.

* Вычислить $\mu_1, \mu_2, \ldots$ с любой степенью точности уже не представляет никаких затруднений, когда численная величина a задана.

Пусть, например, $a=2$, так что наше уравнение будет

$$\operatorname{tg}\lambda = -\frac{1}{2}\lambda$$

чтобы найти μ_1 делаем $\lambda = \frac{\pi}{2} + \mu_1$, после чего предыдущее уравнение примет вид

$$\operatorname{cotg}\mu_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\mu_1$$

само собой разумеется, что здесь μ_1 выражено отвлеченным числом; умножив обе части этого уравнения на 57.3, получим равенство

$$57.3\operatorname{cotg}\mu_1^\circ = 45 + \frac{1}{2}\mu_1^\circ$$

где μ_1° означает угол μ_1, выраженный в градусах.

Тогда обозначим через $\varphi(\mu_1^\circ)$ величину

$$\varphi(\mu_1^\circ) = 57.3\operatorname{cotg}\mu_1^\circ - 45 - \frac{1}{2}\mu_1^\circ$$

и, пользуясь логарифмической линейкой, вычисляем значения $\varphi(\mu_1^\circ)$; получим

$$\begin{aligned}
\varphi(40^\circ) &= 68.2 - 45 - 20 = 3.2\\
\varphi(41^\circ) &= 65.9 - 45 - 20.5 = 0.4\\
\varphi(41^\circ 15') &= 65.3 - 45 - 20.6 = -0.3
\end{aligned}$$

если требуется бо́льшая точность, то надо обратиться к таблицам тригонометрических величин (натуральных) и вычислить значения функции

$$\operatorname{cotg}\mu_1 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\mu_1$$

в смежности с значением

$$\mu_1 = 41^\circ 15' = 0.71995$$

Когда корень найден с приближением до 1′, но почему-либо требовалась бóльшая точность (в технических вопросах этого потребоваться не может), то стоит только прибегнуть к известной методе Ньютона, применяемой совершенно подобно тому, как для уравнений алгебраических, — и корень получится с желаемой степенью точности.

Для больших значений значка i можно воспользоваться разложением корня нашего уравнения в ряд.

В самом деле, сделаем $\frac{2i-1}{2a}\pi = n$; тогда наше уравнение будет:

$$\operatorname{cotg}\mu_i = n + \frac{\mu_i}{a}$$

но

$$\operatorname{cotg}\mu_i = \frac{1}{\mu_i} - \frac{1}{3}\mu_i - \frac{1}{45}\mu_i^3$$

и предыдущее уравнение напишется так:

$$n\mu_i = 1 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{3}\right)\mu_i^2 - \frac{1}{45}\mu_i^4 + \ldots$$

откуда

$$\mu_i = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{3}\right)\frac{1}{n^3} + \cdots = \frac{2a}{2i-1}\cdot\frac{1}{\pi} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{3}\right)\cdot\frac{8a^3}{(2i-1)^3}\cdot\frac{1}{\pi^3} + \ldots \;*$$

Пример 2. Как другой пример, возьмем уравнение

$$\operatorname{ch} kl \cos kl = 1$$

или, делая опять $kl = \lambda$, уравнение

$$\operatorname{ch}\lambda \cos\lambda = 1$$

Написав это уравнение так:

$$\operatorname{ch}\lambda = \sec\lambda$$

построим кривые

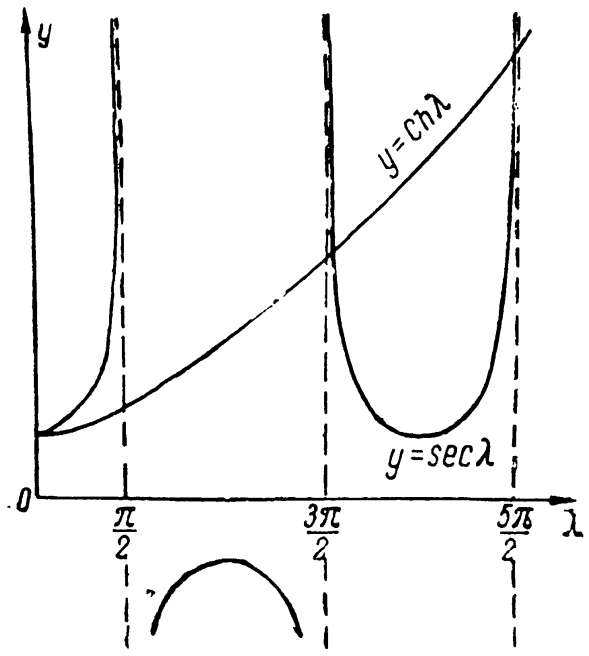
$$y = \operatorname{ch}\lambda = \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}$$

и

$$y = \sec\lambda$$

Нетрудно показать, что в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ корня нашего уравнения нет, остальные же корни, как показывает чертеж (фиг. 28), выражаются так:

$$\lambda_1 = \frac{3\pi}{2} + \mu_1;\quad \lambda_2 = \frac{5\pi}{2} - \mu_2;\quad \lambda_3 = 7\frac{\pi}{2} + \mu_3;\ \ldots\ \lambda_i = \frac{2i+1}{2}\cdot\pi + (-1)^{i+1}\cdot\mu_i$$



Фиг. 28.

причем $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_i$ положительные и меньше $\frac{\pi}{2}$ и по мере возрастания значка быстро убывают.

В самом деле, напишем наше уравнение так:

$$\cos\lambda = \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda} = \frac{2}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}$$

Делая $\lambda_1 = \frac{3\pi}{2} + \mu_1$, имеем

$$\sin\mu_1 = \frac{2}{e^{\frac{3\pi}{2}}\left[e^{\mu_1} + e^{-3\pi}e^{-\mu_1}\right]}$$

Значит, μ_1 приблизительно равно

$$\frac{2}{e^{\frac{3\pi}{2}}} = \frac{1}{55}$$

т. е. около 1°, и, значит, приближенное значение λ_1 есть

$$\frac{3\pi}{2} + 0.0176 = 4.73\ldots$$

Точно так же будет

$$\sin\mu_2 = \frac{2}{e^{\frac{5\pi}{2}}\left(e^{\mu_2} + e^{-5\pi}e^{-\mu_2}\right)} = 0\,00077$$

и, значит,

$$\mu_2 = 0.00077 = 0°2'40''$$

и

$$\lambda_2 = \frac{5\pi}{2} - 0.00077 = 7.8542$$

и т. д.; как видно, корень λ_3 уже разнится на весьма малую величину от $\frac{7\pi}{2}$, и, следовательно, можно принимать $\lambda_i = \frac{2i+1}{2}\pi$ для всякого $i > 3$.

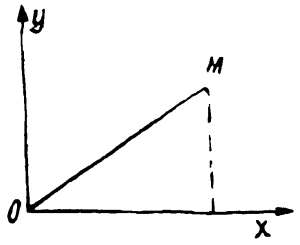
Не входя в бóльшие подробности по этому поводу, обратим внимание на статью Cauchy „Sur la nature des racines de quelques équations transcendantes“ в томе II 2-й серии полного собрания его сочинений, где можно найти исследование корней многих уравнений, встречающихся при решении вопросов математической физики.

ГЛАВА V

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ МНИМОГО ПЕРЕМЕННОГО И СВОЙСТВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВЫЧЕТОВ К ИНТЕГРИРОВАНИЮ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ И С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

МЕТОДА КОШИ

§ 50. Исследования Коши, которыми он как установил основания теории функции мнимого переменного, так и указал важнейшие ее применения, считаются одним из главнейших вкладов, сделанных в науку этим знаменитейшим автором. В этой главе мы постараемся дать очерк той части этих работ, которая имеет непосредственное отношение к излагаемому нами предмету.



Фиг. 29.

Как известно, комплексное количество

$$z = x + y\sqrt{-1}$$

условно изображается вектором OM, соединяющим начало координат O с точкою M, прямоугольные и прямолинейные координаты которой суть x и y (фиг. 29).

Длина

$$OM = +\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$$

называется *модулем* количества z, угол xOM, считаемый по направлению от положительной оси Ox в сторону к положительной оси Oy, называется *аргументом* z.

Величина z может быть написана

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho \cdot e^{i\theta}$$

где через i обозначено для краткости письма $\sqrt{-1}$, и равенства

$$x = \rho\cos\theta; \quad y = \rho\sin\theta$$

определяют вполне угол θ_0, заключенный в пределах

$$0 \leqslant \theta_0 < 2\pi$$

для которого

$$\cos\theta_0 = \frac{x}{\rho} \quad \text{и} \quad \sin\theta_0 = \frac{y}{\rho}$$

тогда общая величина θ есть

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi$$

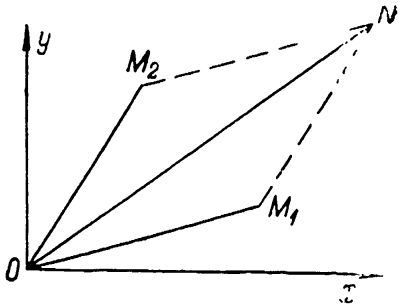
где k есть любое целое, положительное или отрицательное, число или нуль.

Известно также из элементарного курса, что сумма величин

$$z_1 = x_1 + y_1\sqrt{-1}$$

и

$$z_2 = x_2 + y_2\sqrt{-1}$$



Фиг. 30.

т. е.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{-1}$$

представляется диагональю ON параллелограмма, построенного на величинах $OM_1 = z_1$ и $OM_2 = z_2$, как сторонах, или, как говорят, „геометрическою суммою“ векторов OM_1 и OM_2 (фиг. 30).

Точно так же разность

$$z_1 - z_2$$

этих вели ин изображается вектором OP, который представит вторую сторону такого параллелограмма, у коего OM_1 есть диагональ и OM_2 — сторона.

Перейдем теперь к установлению понятия о функции от мнимого перем нного.

С первого взгляда может показаться, что стоит взять любое выражение вида

$$\varphi(x, y) + \psi(x, y)\sqrt{-1}$$

в котором $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — две какие угодно заданные функции от переменных x и y, то это выражение можно рассматривать как функцию от $x + y\sqrt{-1}$, ибо когда величине $x + y\sqrt{-1}$ будет приписано какое либо частное значение $a + b\sqrt{-1}$, то найдется и соответствующее ему частное значение $\varphi(a, b) + \psi(a, b)\sqrt{-1}$ выражения $\varphi(x, y) + \psi(x, y)\sqrt{-1}$.

Но если бы такое определение сделать, то оно не удовлетворяло бы тому понятию о функции от $x+y\sqrt{-1}$, которое мы составляем в дифференциальном исчислении. Положим, что мы имеем комплексную функцию

$$V=\varphi(x,\ y)+\psi(x,\ y)\sqrt{-1} \tag{1}$$

мнимого независимого переменного $z=x+y\sqrt{-1}$. Придадим z некоторое приращение $\Delta z=\Delta x+\Delta y\sqrt{-1}$; при этом функция V получит приращение

$$\Delta V=[\varphi(x+\Delta x,\ y+\Delta y)+\psi(x+\Delta x,\ y+\Delta y)\sqrt{-1}]-[\varphi(x,\ y)+$$

$$+\psi(x,\ y)\sqrt{-1}]$$

Составим отношение $\Delta v:\Delta z$ приращений:

$$\frac{\Delta v}{\Delta z}=\frac{[\varphi(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-\varphi(x,\ y)]+[\psi(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-\psi(x,\ y)]\sqrt{-1}}{\Delta x+\Delta y\sqrt{-1}} \tag{2}$$

и потребуем, чтобы оно имело определенный конечный предел, когда Δx и Δy произвольным образом, независимо друг от друга, стремятся к нулю. Упомянутый предел мы обозначим через V' и назовем производной от V по z. Будем сначала считать, что в формуле (2) $\Delta y=0$, а Δx отлично от нуля и стремится к нулю. При этом в пределе получим

$$V'=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\sqrt{-1} \tag{3}$$

Если мы теперь будем считать, что $\Delta x=0$, а Δy отлично от нуля и стремится к нулю, то в пределе получим

$$V'=\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{1}{\sqrt{-1}}$$

или

$$V'=\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\sqrt{-1} \tag{4}$$

Сравнивая выражения (3) и (4) для V', мы приходим к следующим двум равенствам, связывающим $\varphi(x,\ y)$ и $\psi(x,\ y)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=\frac{\partial\psi}{\partial y}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}&=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом эти равенства являются необходимым условием существования производной от V по z. Нетрудно показать, что наоборот, если φ и ψ имеют непрерывные частные производные первого порядка, которые удовлетворяют равенствам (5), то существует определенная производная от V по z. Действительно,

$$dV = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) \sqrt{-1}$$

и

$$\frac{dV}{dx + dy\sqrt{-1}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \sqrt{-1} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \sqrt{-1} \right) \sqrt{-1}}{dx + dy\sqrt{-1}}$$

Пользуясь (5), получим

$$\frac{dV}{dz} = \frac{dV}{dx + dy\sqrt{-1}} = \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \sqrt{-1} \right) (dx + dy\sqrt{-1})}{dx + dy\sqrt{-1}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \sqrt{-1}$$

На основании изложенного Коши и сделал такое определение:

Выражение:

$$V = \varphi(x, y) + \psi(x, y)\sqrt{-1} \tag{6}$$

называется моногенной функцией или просто функцией мнимого переменного $z = x + y\sqrt{-1}$, *если входящие в его состав функции* $\varphi(x, y)$ *и* $\psi(x, y)$ *удовлетворяют условиям (5).*

В этом случае пишут обычно

$$V = F(z) = F(x + y\sqrt{-1}) \tag{7}$$

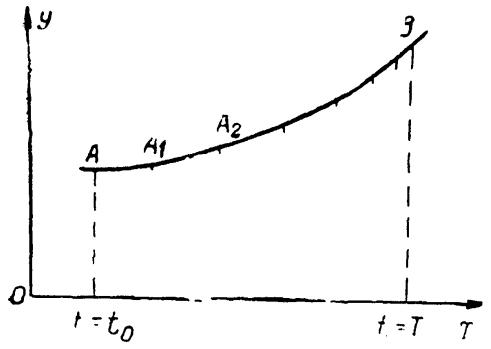
и

$$\frac{dV}{dz} = F'(z) \tag{8}$$

Отметим, что из уравнений (5) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0* \end{aligned} \tag{9}$$

§ 51. Понятие об интеграле обобщено в применении к функции многого переменного следующим образом.



Фиг. 31.

Положим, что на плоскости xOy дана какая-нибудь кривая AB, уравнения которой суть (фиг. 31)

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t)$$

и пусть точка A соответствует значению $t = t_0$ и точка B — значению $t = T$. Разделим промежуток $T - t_0$ на n частей, — для простоты рассуждения, скажем, равных между собою, — и отметим точки кривой: $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$, соответствующие значения t

$$t_1, t_2, \ldots t_{n-1},$$

где

$$t_k = t_0 + k \cdot \frac{T - t_0}{n}$$

Каждой из этих точек соответствует свое значение переменной z, равной $x + y\sqrt{-1}$; так, например, для точки A_k будет

$$z = z_k = x_k + y_k\sqrt{-1} = f_1(t_k) + \sqrt{-1} f_2(t_k)$$

Пусть будет задана какая-нибудь непрерывная функция $F(z)$; составим сумму

$$F(z_0)(z_1 - z_0) + F(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots + F(z_{n-1})(Z - z_{n-1})$$

и положим, что число делений n возрастает неопределенно; *тогда эта сумма будет приближаться к определенному пределу, который и называют интегралом от функции* $F(z)\,dz$, *взятым по пути* AB *от точки* A *до точки* B. Условившись его обозначать знаком

$$\int_{AB} F(z)\,dz$$

получим по *определению* равенство

$$\int_{AB} F(z)\,dz = \lim_{n=\infty} [F(z_0)(z_1 - z_0) + F(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots$$
$$\ldots + F(z_{n-1})(Z - z_{n-1})] \tag{10}$$

Нетрудно видеть, каким образом величина этого интеграла может быть вычислена. В самом деле, пусть

$$F(z) = \varphi(x, y) + \sqrt{-1}\,\psi(x, y) = \varphi[f_1(t), f_2(t)] + \sqrt{-1}\,\psi[f_1(t), f_2(t)] =$$
$$= F_1(t) + F_2(t)\sqrt{-1}$$

тогда, очевидно, будет

$$\int_{AB} F(z)\,dz = \int_{t_0}^{T} [F_1(t) + F_2(t)\sqrt{-1}]\,[f_1'(t) + f_2'(t)\sqrt{-1}]\,dt =$$
$$= \int_{t_0}^{T} [F_1(t) f_1'(t) - F_2(t) f_2'(t)]\,dt + \sqrt{-1}\int_{t_0}^{T} [F_1(t) f_2'(t) + F_2(t) f_1'(t)]\,dt \tag{11}$$

Если положить

$$\int_{t_0}^{T} [F_1(t) f_1'(t) - F_2(t) f_2'(t)]\,dt = \Omega(T) - \Omega(t_0)$$

и

$$\int_{t_0}^{T} [F_1(t) f_2'(t) + F_2(t) f_1'(t)]\,dt = \Phi(T) - \Phi(t_0)$$

то будет

$$\int_{AB} F(z)\,dz = \Omega(T) - \Omega(t_0) + \sqrt{-1}\,[\Phi(T) - \Phi(t_0)] =$$
$$= [\Omega(T) + \Phi(T)\sqrt{-1}] - [\Omega(t_0) + \Phi(t_0)\sqrt{-1}]$$

Можно это вычисление произвести и иначе, написав равенство

$$\int_{AB} F(z)\,dz = \int_{AB} [\varphi(x, y) + \sqrt{-1}\,\psi(x, y)]\,(dx + dy\sqrt{-1}) =$$
$$= \int_{AB} [\varphi(x, y)\,dx - \psi(x, y)\,dy] + \sqrt{-1}\int_{AB} [\psi(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy]$$

Но, в силу равенств (7)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

количества

$$\varphi(x, y)\,dx - \psi(x, y)\,dy$$

и

$$\psi(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy$$

суть *полные дифференциалы*; обозначая их соответственно через $dP(x, y)$ и $dQ(x, y)$ и координаты точек A и B — через x_0, y_0 и X, Y, получим

$$\int_{AB} [\varphi(x, y)\,dx - \psi(x, y)\,dy] = P(X, Y) - P(x_0, y_0)$$

$$\int_{AB} [\psi(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy] = Q(X, Y) - Q(x_0, y_0)$$

и, значит, будет

$$\int_{AB} F(z)\,dz = [P(X, Y) + \sqrt{-1}\,Q(X, Y)] - [P(x_0, y_0) + \sqrt{-1}\,Q(x_0, y_0)] \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что $P(X, Y) + \sqrt{-1}\,Q(X, Y)$ есть моногенная функция величины $X + Y\sqrt{-1}$; обозначая ее через Z и считая, что X и Y — переменные, равно как и Z, x_0 y_0 — заданные постоянные, можем предыдущее равенство написать так:

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \Omega(Z) - \Omega(z_0) \quad (13)$$

причем величина Z соответствует точке B, величина z_0 — точке A.

Формула (13) показывает, что в рассматриваемом случае величина интеграла

$$\int_{AB} F(z)\,dz$$

не зависит от пути AB, а лишь от положения начальной его точки A и конечной точки B, совершенно подобно тому, как, например, работа силы, коей составляющие были бы $\varphi(x, y)$ и $-\psi(x, y)$ или $\psi(x, y)$ и $\varphi(x, y)$, ибо эти силы имели бы соответственно потенциалы $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

Проведем между точками A и B кривые ACB и ADB, обе „простые“; они ограничат площадь $ACBDA$ (фиг. 32). Положим, что как на контуре, так и внутри этой площади, функция $F(z)$ остается моногенной

В силу доказанного выше будет для всякой функции $F(z)$ конечной и однозначной:

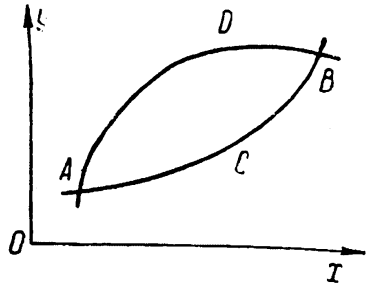
$$\int_{ACB} F(z)\,dz = \int_{ADB} F(z)\,dz$$

или иначе

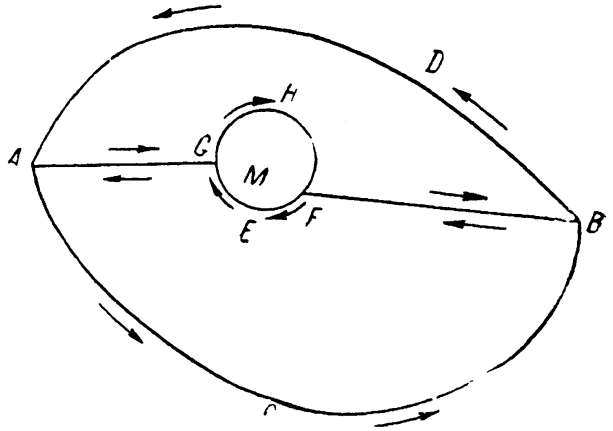
$$\int_{ACB} F(z)\,dz - \int_{ADB} F(z)\,dz = 0$$

Но так как

$$-\int_{ADB} F(z)\,dz = \int_{BDA} F(z)\,dz$$



Фиг. 32.



Фиг. 33.

то предыдущая формула напишется так:

$$\int_{ACB} F(z)\,dz + \int_{BDA} F(z)\,dz = \int_{ACBDA} F(z)\,dz = 0$$

таким образом, мы получаем следующую основную теорему Коши: *Интеграл, взятый по произвольному простому замкнутому контуру от всякой функции мнимого переменного, моногенной как для всех точек плоскости внутри контура, так и на нем самом, равен нулю.*

§ 52. Рассмотрим теперь тот случай, когда функция $F(z)$, при некотором $z=a$, обращается в бесконечность, причем точка $M\,(z=a)$ лежит внутри контура $ABCDA$, и $\lim\limits_{z=a}(z-a)F(z)=K$ (фиг. 33).

Опишем около точки $M(z=a)$ круг EGF радиуса ρ, возьмем на этом круге две произвольные точки G и F и соединим их произвольными простыми линиями, например прямыми, с точками A и B нашего контура; тогда получится два простых контура $ACBFEGA$ и $AGHFBDA$, обой-

денных, как указано, в положительном направлении, т. е. так, что ограничиваемая площадь остается слева. Для каждого из таких контуров интеграл

$$\int F(z)\,dz$$

равен нулю, ибо та точка M, где функция $F(z)$ обращается в бесконечность, лежит вне обходимых площадей.

Таким образом, имеем

$$\int_{ACBFEGA} F(z)\,dz + \int_{AGHFBDA} F(z)\,dz = 0$$

Но нетрудно видеть, что в состав двух вышенаписанных интегралов вошли интегралы от A до G и от G до A и от F до B и от B до F: так как функция $F(z)$ *однозначна*, то эти интегралы равны между собою и разных знаков, — значит, в сумме пропадают, — затем, из остальных частей образуется контур $ACBDA$, обойденный в положительном направлении, и контур $GHFEG$; таким образом, предыдущее равенство равносильно такому:

$$\int_{ACBDA} F(z)\,dz + \int_{GHFEG} F(z)\,dz = 0$$

или иначе

$$\int_{ACBDA} F(z)\,dz = \int_{GEFHG} F(z)\,dz$$

Остается найти интеграл

$$\int_{GEFHG} F(z)\,dz$$

когда радиус круга ρ неопределенно убывает, ибо величина этого интеграла не зависит от величины ρ.

По сделанному предположению

$$\lim_{z=a} (z-a)\,F(z) = K$$

где K есть конечная и определенная величина; пользуясь этим можно показать, что

$$F(z) = \frac{K}{z-a} + \Phi(z)$$

причем функция $\Phi(z)$ моногенна и в точке $z=a$ уже остается конечной; следовательно,

$$\int_{GEFHG} F(z)\,dz = K \int_{GEFHG} \frac{dz}{z-a} + \int_{GEFHG} \Phi(z)\,dz$$

Последний из этих интегралов равен нулю, — остается найти

$$\int \frac{dz}{z-a}$$

Для контура $GEFHG$ будет $z=a+\rho e^{i\theta}$; значит, $dz=i\rho e^{i\theta}d\theta$, и наш интеграл будет

$$\int_{CEFHG} \frac{dz}{z-a} = i\int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} \frac{\rho e^{i\theta}d\theta}{\rho e^{i\theta}} = 2\pi i = 2\pi\sqrt{-1}$$

Таким образом,

$$\int_{GEFHG} F(z)\,dz = 2\pi\sqrt{-1}K \tag{1}$$

где

$$K=\lim_{z=a}(z-a)F(z) \tag{2}$$

Коши назвал вообще интеграл, взятый по бесконечно малому круговому контуру, описанному как из центра, из той точки, где подинтегральная функция обращается в бесконечность, и разделенный на $2\pi\sqrt{-1}$, — „*résidu*“, что принято по-русски переводить термином „*интегральный вычет*“, и предложил обозначать его знаком

$$\mathcal{E}_a F(z)$$

причем знак $\mathcal{E}$ есть начальная буква в слове „extraction“ — извлечение или нахождение вычета, буква же a указывает, к какому значению переменной z вычет относится.

В более общем случае функция $F(z)$ внутри заданного контура может обращаться в бесконечность не для одного значения z, а для нескольких, например:

$$z=a;\ z=b;\ z=c$$

Кроме того, может оказаться, что к конечному пределу приближаются не произведение $(z-a)F(z)$ или $(z-b)F(z)\ldots$, а произведения: $(z-a)^k F(z)$, $(z-b)^l F(z)$, $(z-c)^n F(z)$, причем k, l, n, — заданные *целые* положительные числа.

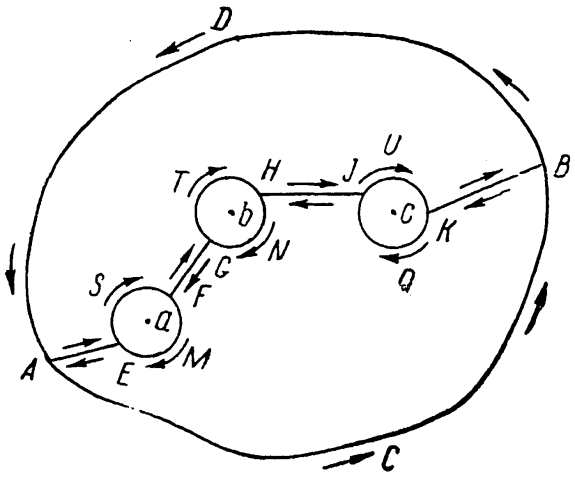
Опишем около точек $z=a$; $z=b$; $z=c$ (фиг. 34) круги бесконечно малого радиуса ρ, и, взяв на каждом из них по две произвольных точки, проведем, как показано, прямые AE, FG, HJ, KB; тогда наша площадь разобьется на две, ограниченных простыми контурами $ACBKQJHNGFMEA$

и *AESFGTHJUKBDA*, и внутри этих контуров и на границе их функция $F(z)$ в бесконечность не обращается и повсюду однозначна. Применяя теорему Коши и обозначая, для краткости письма, первый контур через C_1, второй — через C_2, получим

$$\int_{C_1} F(z)\,dz + \int_{C_2} F(z)\,dz = 0$$

Обратим, затем, внимание, что, при обходе этих контуров, участки *AE*, *FG*, *HJ*, *KB* пройдем дважды, и, значит, части интегралов, к ним относящиеся, пропадают, и затем остальные слагаемые образуют: во-первых, интеграл

$$\int F(z)\,dz$$



Фиг. 34.

взятый по контуру *ACBDA*, обойденному в положительном направлении, и, во-вторых, сумму интегралов

$$\int_{ESFME} F(z)\,dz + \int_{GTHNG} F(z)\,dz + \int_{JUKQJ} F(z)\,dz$$

или, что то же,

$$-\int_{EMFSE} F(z)\,dz - \int_{GNHTG} F(z)\,dz - \int_{JQKUJ} F(z)\,dz$$

Таким образом, получим равенство

$$\int_{ACBDA} F(z)\,dz = \int_{EMFSE} F(z)\,dz + \int_{GNHTG} F(z)\,dz + \int_{JQKUJ} F(z)\,dz$$

Стоящие в правой части этого равенства интегралы суть, по определению Коши, не что иное, как вычеты, умноженные на $2\pi\sqrt{-1}$ и относящиеся к значениям

$$z = a; \quad z = b; \quad z = c$$

По указанному выше обозначению получим

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{ACBDA} F(z)\,dz = \mathfrak{C}_a F(z) + \mathfrak{C}_b F(z) + \mathfrak{C}_c F(z) + \ldots \qquad (3)$$

Сумму всех вычетов, заключенных внутри данного контура, Коши называет „полным вычетом“ (résidu intégral) и обозначает тем же знаком $\mathcal{E}$, но без значка, так что предыдущее равенство напишется так:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{ACBDA} F(z)\,dz = \mathcal{E}\,F(z) \qquad (4)$$

Чтобы исчислить величину вычета, относящегося к точке $z=a$, для которой

$$\lim (z-a)^k F(z) = A \qquad (5)$$

поступим подобно предыдущему.

Пользуясь равенством (5), можно показать, что функция $F(z)$ будет

$$F(z) = \frac{A}{(z-a)^k} + \frac{B}{(z-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{K}{z-a} + \Phi(z)$$

причем $B,\ C,\ \ldots\ K$ — некоторые постоянные, $\Phi(z)$ — такая функция, которая при $z=a$ в бесконечность не обращается.

Делая опять

$$z-a = \rho e^{\theta i}$$

и замечая, что, при обходе по кругу, θ изменяется от какого-либо значения θ_0 до $\theta_0+2\pi$, получим

$$\int_{EMFSE} F(z)\,dk = A\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \frac{\rho i e^{\theta i}\,d\theta}{\rho^k e^{k\theta i}} + B\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \frac{\rho i e^{\theta i}}{\rho^{k-1} e^{(k-1)\theta i}} + \cdots$$

$$\ldots + K\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \frac{\rho i e^{\theta i}\,d\theta}{\rho e^{\theta i}} + \int_{EMFSE} \Phi(z)\,dz$$

Последний интеграл правой части равен нулю, предпоследний, очевидно, равен $2\pi\sqrt{-1}$.

Все остальные интегралы равны нулю.

В самом деле, возьмем, например, первый:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \frac{\rho i e^{\theta i}\,d\theta}{\rho^k e^{k\theta i}} = \frac{1}{\rho^{k-1}}\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} e^{-(k-1)\theta i}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{\rho^{k-1}}\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \left[\cos(k-1)\theta - \sqrt{-1}\sin(k-1)\theta\right] d\theta = 0$$

ибо

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \cos(k-1)\theta\,d\theta = 0 \quad \text{и} \quad \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \sin(k-1)\theta\,d\theta = 0$$

и притом *тожественно* относительно θ_0.

Таким образом, будет

$$\mathcal{E}_a F(z) = K$$

где K есть коэффициент при *первой* степени в разложении функции $F(z)$ по степеням $\frac{1}{z-a}$ в сопредельности со значением $z=a$.

§ 53. Коши дал множество различных приложений теории интегральных вычетов. Те из них, которые нам понадобятся, вытекают из предыдущей основной теоремы и из следующих двух:

Теорема 1. *Вычет функции* $\frac{f(z)}{z-c}$, *где* $f(z)$ *есть однозначная функция переменной* z, *не обращающаяся ни в нуль, ни в бесконечность при* $z=c$, *равен* $f(c)$.

В самом деле, полагая

$$F(z) = \frac{f(z)}{z-c}$$

видим, что по условию, высказанному в теореме, будет

$$\lim_{z=c} F(z)(z-c) = \lim_{z=c} f(z) = f(c)$$

Итак, имеем равенство

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)}{z-c} dz = \mathcal{E}_c \frac{f(z)}{z-c} = f(c) \qquad (1)$$

причем интеграл берется по такому контуру, внутри коего никаких других „критических“ точек, кроме $z=c$, не заключается.

Теорема 2. *Вычет функции* $\frac{f(z)}{(z-c)^n}$, *где* n *есть целое и положительное число, большее единицы, и* $f(z)$ *есть однозначная функция, не обращающаяся в бесконечность при* $z=c$, *равен*

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)} \frac{d^{n-1} f(c)}{dc^{n-1}}$$

В самом деле, так как параметр c не входит в пределы интеграла формулы (1), то, дифференцируя $n-1$ раз к ряду по этому параметру формулы (1), получим

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)}{(z-c)^n} dz = \frac{d^{n-1} f(c)}{dc^{n-1}} \qquad (2)$$

Но, по определению, взятый по любому контуру, не заключающему внутри никаких других критических точек кроме точки $z=c$, интеграл

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)}{(z-c)^n}dz=\mathcal{E}_c\frac{f(z)}{(z-c)^n}$$

и, значит, предыдущее равенство дает

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)}{(z-c)^n}dz=\mathcal{E}_c\frac{f(z)}{(z-c)^n}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}f(c)}{dc^{n-1}}\qquad(2')$$

Обратим еще внимание на следующую теорему.

Если $f(z)$ есть функция с конечным числом критических точек на всей плоскости, для которой модуль произведения $zf(z)$ имеет своим пределом нуль, когда модуль z неопределенно возрастает, то полный вычет разен нулю, т. е. будет

$$\mathcal{E}f(z)=0$$

В самом деле,

$$\mathcal{E}f(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C f(z)\,dz$$

причем C есть окружность круга, описанного из начала координат, как из центра, достаточно большим радиусом, ибо такой круг будет заключать все те значения z, для коих $f(z)$ может обращаться в бесконечность, значит, взятый по контуру этого круга интеграл и будет равен сумме всех вычетов функции $f(z)$.

Обозначим этот радиус через R; тогда сделаем $z=Re^{\theta i}$, откуда $dz=Rie^{\theta i}\,d\theta=izd\theta$, и наш интеграл будет

$$\int_C f(z)\,dz=\sqrt{-1}\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi}zf(z)\,d\theta$$

Интеграл второй части, при неопределенном возрастании R, имеет своим пределом нуль, что и доказывает теорему.

§ 54. Из приложений теории интегральных вычетов мы рассмотрим следующие:

1) к нахождению определенных интегралов,

2) к разложению функций в ряды Фурье и им подобные,

3) к интегрированию обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами,

4) к интегрированию линейных дифференциальных уравнений с частными производными и с постоянными коэффициентами.

Формула

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C F(z)\,dz = \Sigma F(z)$$

прилагается особенно удобно к нахождению интегралов с бесконечными пределами.

Пусть, например,

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

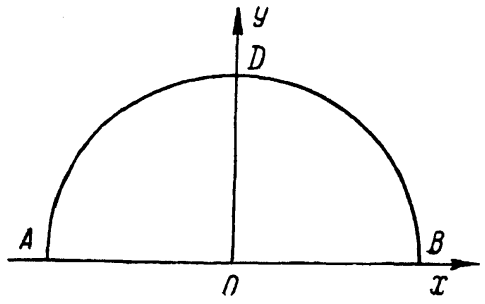
где $P(x)$ и $Q(x)$ — целые функции x и степень $Q(x)$, по крайней мере, на две единицы выше степени $P(x)$.

Тогда интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

будет иметь конечное значение, если все корни знаменателя мнимые.

Возьмем функцию



Фиг. 35.

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Для всех точек оси x она будет равна $F(x)$, для точек же, для которых модуль z бесконечно велик, модуль дроби $\frac{P(z)}{Q(z)}$ будет бесконечно малый, и модуль произведения $\frac{zP(z)}{Q(z)}$ будет иметь своим пределом нуль, ибо степень $Q(z)$, как сказано, по крайней мере, на две единицы выше степени $P(z)$.

Если из начала координат, как из центра, радиусом R описать полукруг, то интеграл, взятый по контуру $AOBDA$ (фиг. 35), будет

$$\int_{AOBDA} F(z)\,dz = \int_{AOB} F(z)\,dz + \int_{BDA} F(z)\,dz = \int_{-R}^{+R} F(x)\,dx + \int_{BDA} F(z)\,dz$$

При неопределенном возрастании R, интеграл

$$\int_{-R}^{+R} F(x)\,dx$$

будет иметь своим пределом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

интеграл

$$\int_{BDA} F(z)\,dz$$

в пределе обратится в нуль, и у нас будет

$$\text{Пред.} \int_{AOBDA} F(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \mathcal{E} F(z)\, 2\pi\sqrt{-1} \qquad (1)$$

где вычеты надо взять для всех корней, лежащих внутри полукруга $AOBDA$, т. е. для всех тех, у коих коэффициент при $\sqrt{-1}$ положительный.

Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ суть такие корни уравнения $Q(x)=0$; тогда предыдущая формула равносильна такой:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \mathcal{E}_\alpha \frac{P(z)}{Q(z)} + \mathcal{E}_\beta \frac{P(z)}{Q(z)} + \cdots + \mathcal{E}_\lambda \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Если α есть простой корень уравнения $Q(z)=0$, то будет

$$Q(z) = (z-\alpha)\, Q_1(z) \qquad (*)$$

причем $Q_1(z)$ при $z=\alpha$ в нуль не обращается, и тогда

$$\mathcal{E}_\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} = \mathcal{E}_\alpha \frac{1}{z-\alpha} \frac{P(z)}{Q_1(z)} = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$$

по 1-й теореме § 53.

Но, в силу равенства (*), будет $Q_1(\alpha) = Q'(\alpha)$; значит,

$$\mathcal{E}_\alpha \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)} \qquad (2)$$

для простого корня α.

Если же который-нибудь из корней кратный, скажем β — k-кратный корень, то будет

$$Q(z) = (z-\beta)^k\, Q_2(z)$$

причем $Q_2(z)$ в нуль при $z=\beta$ не обращается; тогда

$$\mathcal{E}_\beta \frac{P(z)}{Q(z)} = \mathcal{E}_\beta \frac{1}{(z-\beta)^k} \frac{P(z)}{Q_2(z)} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (k-1)} \frac{d^{k-1}}{d\beta^{k-1}} \left(\frac{P(\beta)}{Q_2(\beta)}\right) \qquad (3)$$

Пример 1. Найдем интеграл

$$S=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx \qquad (m<n)$$

причем m и n — целые и положительные числа и $m<n$.

По предыдущей формуле будет

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\,S=\mathcal{E}_{\alpha_1}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}+\mathcal{E}_{\alpha_2}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}+\cdots+\mathcal{E}_{\alpha_n}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}$$

где

$$\alpha_1=\cos\frac{\pi}{2n}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2n};\ \alpha_2=\cos\frac{3\pi}{2n}+\sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{2n};\ \ldots$$

$$\ldots\ \alpha_n=\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}+\sqrt{-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}$$

ибо лишь эти корни знаменателя имеют положительный коэффициент при $\sqrt{-1}$.

Обозначим α_1 просто через α; тогда будет

$$\alpha_1=\alpha;\ \alpha_2=\alpha^3;\ \alpha_3=\alpha^5;\ \ldots\ \alpha_n=\alpha^{2n-1}$$

Вместе с тем,

$$P(\alpha_k)=\alpha_k^{2m}=\alpha^{2m(2k-1)}$$

$$Q'(\alpha_k)=2n\alpha_k^{2n-1}=2n\,\alpha_k^{2n}\,\alpha_k^{-1}=-2n\,\alpha_k^{-1}=-2n\,\alpha^{-(2k-1)}$$

следовательно,

$$\mathcal{E}_{\alpha_k}\frac{P(z)}{Q(z)}=-\frac{1}{2n}\alpha^{(2m+1)(2k-1)}$$

и значит,

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\,S=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{k=n}\alpha^{(2m+1)(2k-1)}=-\frac{1}{2n}\,\frac{\alpha^{2m+1}-\alpha^{2m+1}\alpha^{2n}}{1-\alpha^{(2m+1)2}}=$$

$$=-\frac{1}{n}\,\frac{\alpha^{2m+1}}{1-(\alpha^{2m+1})^2}$$

Подставляя вместо α^{2m+1} его величину

$$\cos\frac{(2m+1)\pi}{2n}+\sqrt{-1}\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n}$$

после простых преобразований, получим

$$S=\frac{\pi}{n\sin\dfrac{(2m+1)\pi}{2n}}$$

Очевидно, будет

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n \sin \frac{(2m+1)\pi}{2n}}$$

Положив

$$x^{2n} = u$$

и

$$\frac{2m+1}{2n} = a$$

получим

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{a-1}}{1+u}\,du = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (0 < a < 1)$$

известный интеграл, найденный Эйлером.

Пример 2. Найдем интеграл

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{p^2+x^2}\,dx$$

Взяв функцию

$$F(z) = \frac{e^{az\sqrt{-1}}}{p^2+z^2} \qquad (a > 0)$$

и проинтегрировав ее по такому же контуру, как и в предыдущей задаче, увидим, что при интегрировании по AB будет

$$\int_{AB} F(z)\,dz = \int_{-R}^{+R} \frac{\cos ax}{p^2+x^2}\,dx + \sqrt{-1} \int_{-R}^{+R} \frac{\sin ax}{p^2+x^2}\,dx$$

второй из этих интегралов, очевидно, равен нулю, и останется

$$\int_{AB} F(z)\,dz = \int_{-R}^{+R} \frac{\cos ax}{p^2+x^2}\,dx$$

При интегрировании по полукругу, при неопределенном возрастании его радиуса, интеграл приближается к нулю, и, значит, по теореме Коши, будет

$$\int_{AOBDA} F(z)\,dz = \int_{AB} F(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{p^2+x^2}\,dx = 2\pi\sqrt{-1}\,\mathfrak{C}F(z)$$

Но внутри рассматриваемого полукруга лежит лишь один корень уравнения

$$p^2 + z^2 = 0$$

именно $z = + p\sqrt{-1}$; и у нас будет

$$\mathcal{E}F(z) = \mathcal{E}\frac{e^{az\sqrt{-1}}}{(z - p\sqrt{-1})(z + p\sqrt{-1})} = \left[\frac{e^{az\sqrt{-1}}}{z + p\sqrt{-1}}\right]_{z=p\sqrt{-1}} = \frac{1}{2p\sqrt{-1}}e^{-ap}$$

и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{p^2 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{p}e^{-ap} \qquad (a > 0)$$

откуда следует

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{p^2 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{2p}e^{-ap} \qquad (a > 0)$$

Мы не будем останавливаться на дальнейших примерах, отсылая или к обычным руководствам анализа, или к мемуарам Коши в томе VI 2-й серии его „Oeuvres complètes“.

§ 55. Те ряды, которыми нам приходилось и придется и дальше пользоваться в нашем курсе, вытекают из приложения формулы Коши

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{f(z)}{\varphi(z)}\,dz = \mathcal{E}\frac{f(z)}{\varphi(z)} \qquad (1)$$

причем сумма вычетов берется для всех корней функции $\varphi(z)$, лежащих внутри контура C.

Мы будем рассматривать лишь такие функции $\varphi(z)$ и $f(z)$, которые однозначны и при конечных значениях z конечны.

Вычет, соответствующий каждому корню $\varphi(z)$, имеет конечное и вполне определенное значение.

Обозначим эти вычеты, соответствующие корням, лежащим внутри C, через

$$A_1, A_2, \ldots A_k$$

тогда предыдущая формула напишется так:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{f(z)}{\varphi(z)}\,dz = A_1 + A_2 + \ldots + A_k \qquad (2)$$

Положим теперь, что $f(z)$ и $\varphi(z)$ или, по крайней мере, одна из этих функций содержит под своим знаком, кроме переменной z, еще переменный параметр α, не зависящий от z; тогда все вычеты будут вообще функциями этой величины α, и наша формула напишется так:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{f(z,\alpha)}{\varphi(z,\alpha)}\,dz = A_1(\alpha) + A_2(\alpha) + \ldots + A_k(\alpha) \qquad (3)$$

Положим теперь, что мы за контур C возьмем круг, описанный из начала координат, как из центра, радиус которого будем неопределенно увеличивать, тогда число корней функции $\varphi(z)$, заключающихся внутри этого круга, может также неопределенно возрастать; значит, в правой части предыдущего равенства получится бесконечный ряд, члены которого будут некоторые определенные функции буквы α.

В левой части нашего равенства будет стоять интеграл

$$\int_C \frac{f(z,\alpha)}{\varphi(z,\alpha)}\,dz$$

причем, как сказано, круговой контур C неопределенно возрастает; при этом величина интеграла также будет приближаться к некоторому пределу, который будет вообще функцией от α. Если мы сумеем найти эту функцию, которую обозначим через $\omega(\alpha)$, то получим разложение

$$\omega(\alpha) = A_1(\alpha) + A_2(\alpha) + \ldots + A_k(\alpha) + \ldots$$

этой функции в ряд, расположенный по функциям $A_i(\alpha)$.

Выполнение этого вычисления в общем виде и доставит как требуемые разложения, так и те условия, при которых они имеют место.

§ 56. Положим, что подинтегральная функция имеет вид

$$\frac{\psi(z)}{\pi(z)}\,f(z,\alpha)$$

и уравнение $\pi(z) = 0$ имеет лишь „простые“ корни

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$$

Тогда формула (3) предыдущего параграфа напишется так:

$$\lim \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{\psi(z)}{\pi(z)}\,f(z,\alpha)\,dz = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\psi(\lambda_n)}{\pi'(\lambda_n)}\,f(\lambda_n,\alpha) \qquad (1)$$

и все сведется к вычислению предела, стоящего в левой части интеграла, когда радиус круга C неопределенно возрастает.

Сделаем

$$z = re^{\theta\sqrt{-1}}; \qquad dz = \sqrt{-1}\, re^{\theta\sqrt{-1}}\, d\theta$$

тогда предыдущий интеграл будет

$$S = \frac{1}{2\pi} r \int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} \frac{\psi(re^{\theta\sqrt{-1}})}{\pi(re^{\theta\sqrt{-1}})} f(re^{\theta\sqrt{-1}}, \alpha)\, e^{\theta\sqrt{-1}}\, d\theta \qquad (*)$$

этот интеграл будет приближаться к конечному и определенному пределу, если выражение

$$r \frac{\psi(re^{\theta\sqrt{-1}})}{\pi(re^{\theta\sqrt{-1}})} f(re^{\theta\sqrt{-1}}, \alpha)$$

при возрастании величины r по некоторому определенному закону будет приближаться к таковому, *независимо от величины* θ *и равномерно.*

Интеграл (*), если сделать в нем $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ и обозначить $\sqrt{-1}$ через i, можно написать так:

$$S = \frac{r}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\psi(re^{\theta i})}{\pi(re^{\theta i})} f(re^{\theta i}, \alpha)\, e^{\theta i}\, d\theta + \frac{r}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\psi(re^{\theta i})}{\pi(re^{\theta i})} f(re^{\theta i}, \alpha)\, e^{\theta i}\, d\theta \qquad (2)$$

или, полагая в последнем из этих интегралов

$$-\pi + \theta = \theta_1$$

и написав под знаком интеграла опять θ вместо θ_1, получим

$$S = \frac{r}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\psi(re^{\theta i})}{\pi(re^{\theta i})} f(re^{\theta i}, \alpha)\, e^{\theta i}\, d\theta - \frac{r}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\psi(-re^{\theta i})}{\pi(-re^{\theta i})} f(-re^{\theta i}, \alpha)\, e^{\theta i}\, d\theta \qquad (2')$$

Это показывает, что S будет иметь конечный и определенный предел если величина

$$r\left[\frac{\psi(re^{\theta i})}{\pi(re^{\theta i})} f(re^{\theta i}, \alpha) - \frac{\psi(-re^{\theta i})}{\pi(-re^{\theta i})} f(-re^{\theta i}, \alpha)\right]$$

при неопределенном возрастании r по некоторому определенному закону приближается к таковому независимо от величины θ.

S будет также иметь конечный и определенный предел, когда

$$r\frac{\psi(re^{\theta i})}{\pi(re^{\theta i})}f(re^{\theta i},\alpha) \quad \text{и} \quad r\frac{\psi(-re^{\theta i})}{\pi(-re^{\theta i})}f(-re^{\theta i},\alpha)$$

будут приближаться и к различным пределам, лишь бы эти пределы были конечные и определенные.

Точно так же, если для некоторого *ограниченного* числа частных значений $\theta=\theta_j$ вышеприведеные величины не будут стремиться ни к какому определенному пределу, но если при этом

$$r\int_{\theta_j-\varepsilon}^{\theta_j+\varepsilon}(\ldots)\,d\theta$$

имеет порядок ε при упомянутом возрастании r, то S будет иметь конечный и определенный предел.

Если сделать опять $re^{\theta i}=z$, то видно, что когда θ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, то z есть такая комплексная величина, у которой вещественная часть положительная или, в крайнем случае, нуль, и видно, что условие существования предела для S состоит в том, чтобы или произведение

$$z\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}f(z,\alpha)$$

стремилось равномерно к конечному и определенному пределу, или чтобы количества

$$z\frac{\psi(z)}{\pi(z)}f(z) \quad \text{и} \quad (-z)\frac{\psi(-z)}{\pi(-z)}f(-z)$$

стремились к таковому, когда модуль z неопределенно возрастает по некоторому закону и вещественная часть z не есть отрицательная.

Коши, чтобы получить те ряды, которые он потом прилагает к решению задач математической физики, берет за функцию $f(z,\alpha)$ следующую:

$$f(z,\alpha)=\int_{\alpha_0}^{\alpha}e^{z(\alpha-\mu)}F(\mu)\,d\mu \qquad (\alpha>\alpha_0)$$

где $F(\mu)$ есть функция буквы μ, *удовлетворяющая условиям Дирихле.*

Таким образом, надо будет исследовать предел выражения

$$z\frac{\psi(z)}{\pi(z)}\int_{\alpha_0}^{\alpha}e^{z(\alpha-\mu)}F(\mu)\,d\mu-z\frac{\psi(-z)}{\pi(-z)}\int_{\alpha_0}^{\alpha}e^{-z(\alpha-\mu)}F(\mu)\,d\mu \qquad (3)$$

при неопределенном возрастании модули z и условии, что вещественная часть z не есть отрицательная.

Первый член этого выражения может быть написан так:

$$z\frac{\psi(z)}{\pi(z)}e^{s(\alpha-\alpha_0)}\int_{\alpha_0}^{\alpha}e^{s(\alpha_0-\mu)}F(\mu)\,d\mu=\frac{z\cdot\psi(z)}{\pi(z)}e^{s(\alpha-\alpha_0)}\int_{\alpha_0}^{\alpha}e^{-s(\mu-\alpha_0)}F(\mu)\,d\mu$$

и если величина

$$\frac{\psi(z)}{\pi(z)}e^{s(\alpha-\alpha_0)}$$

имеет своим пределом 0, то этот член также стремится к нулю, ибо величина

$$z\int_{\alpha_0}^{\alpha}e^{-s(\mu-\alpha_0)}F(\mu)\,d\mu$$

конечна для функции $F(\mu)$, удовлетворяющей условиям Дирихле.

В самом деле, в этом случае промежуток от α_0 до α можно разбить на такие частные промежутки:

$$\alpha_0 \text{ до } \alpha_1;\ \alpha_1 \text{ до } \alpha_2;\ \ldots\ \alpha_k \text{ до } \alpha$$

в каждом из которых функция $F(\mu)$ изменяется в одну сторону, т. е. или все время возрастая, или все время убывая, и, значит, для каждого из этих промежутков приложима вторая теорема о средней. Число таких промежутков k будет конечное (условие Дирихле).

Итак, возьмем первый промежуток, и пусть будет

$$ze^{-s(\mu-\alpha_0)}=P+Q\sqrt{-1}$$

тогда нам надо будет исследовать интегралы

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}PF(\mu)\,d\mu \quad \text{и} \quad \int_{\alpha_0}^{\alpha_1}QF(\mu)\,d\mu$$

Возьмем первый; по второй теореме о средней будет

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}PF(\mu)\,d\mu=F(\alpha_0)\int_{\alpha_0}^{\beta_1}P\,d\mu+F(\alpha_1)\int_{\beta_1}^{\alpha_1}P\,d\mu \qquad (\alpha_0<\beta_1<\alpha_1)$$

Но величина интеграла

$$\int_{\beta_1}P\,d\mu$$

есть вещественная часть интеграла

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_1} ze^{-s(\mu-\alpha_0)}d\mu = 1 - e^{-s(\beta_1-\alpha_0)}$$

т. е. величина конечная, ибо вещественная часть z или нуль, или положительная, и $\beta_1 > \alpha_0$.

Точно также увидим, что и второй из этих интегралов конечный.

Совершенно также убедимся, что и интеграл

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} QF(\mu)\,d\mu$$

конечный, а следовательно, конечный и интеграл

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} ze^{-s(\mu-\alpha)}F(\mu)\,d\mu$$

и, следовательно, когда предел выражения

$$\frac{\psi(z)}{\pi(z)}\,e^{s(\alpha-\alpha_0)}$$

есть нуль, то и предел выражения

$$z\frac{\psi(z)}{\pi(z)}e^{s(\alpha-\alpha_0)}\int_{\alpha_0}^{\alpha} e^{-s(\mu-\alpha_0)}F(\mu)\,d\mu$$

равен нулю, если функция $F(\mu)$ *удовлетворяет условиям Дирихле.*

Перейдем теперь ко второму члену формулы (3) и найдем сперва предел

$$z\int_{\alpha_0}^{\alpha} e^{-s(\alpha-\mu)}F(\mu)\,d\mu$$

Очевидно, что если вещественная часть z, оставаясь положительной, так же неопределенно возрастает, как и модуль z, то предел $ze^{-s\varepsilon}$ есть нуль, и, значит, предел интеграла

$$z\int_{\alpha_0}^{\alpha-\varepsilon} e^{-s(\alpha-\mu)}F(\mu)\,d\mu$$

есть нуль, лишь бы вещественная часть произведения $z\varepsilon$ неопределенно возрастала.

Таким образом, остается найти предел выражения

$$z\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} e^{-z(\alpha-\mu)}F(\mu)\,d\mu = F(\alpha)\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} e^{-z(\alpha-\mu)}z\,d\mu + \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} ze^{-z(\alpha-\mu)}[F(\mu)-F(\alpha)]\,d\mu$$

Первый член второй части есть $F(\alpha)[1-e^{-z\varepsilon}]$.

Во втором члене разность $F(\mu)-F(\alpha)$ будет изменяться при достаточно малом ε в одну сторону, ибо функция $F(\mu)$ по условию Дирихле, имеет ограниченное число максимумов и минимумов, разделенных конечными промежутками между собою, и, значит, можно воспользоваться второй теоремою о средней, чтобы исчислить вещественную и мнимую часть этого интеграла.

Полагая попрежнему,

$$ze^{-z(\alpha-\mu)} = P + Q\sqrt{-1}$$

можем написать равенство

$$\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} e^{-z(\alpha-\mu)}[F(\mu)-F(\alpha)]\,z\,d\mu =$$

$$= \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} P[F(\mu)-F(\alpha)]\,d\mu + \sqrt{-1}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} Q[F(\mu)-F(\alpha)]\,d\mu$$

или, в силу второй теоремы о средней,

$$\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} e^{-z(\alpha-\mu)}[F(\mu)-F(\alpha)]\,z\,d\mu = [F(\alpha-\varepsilon)-F(\alpha)]\left\{\int_{\alpha-\varepsilon}^{\beta} P\,d\mu + \sqrt{-1}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\gamma} Q\,d\mu\right\}$$

где

$$\alpha-\varepsilon<\beta<\alpha$$

и

$$\alpha-\varepsilon<\gamma<\alpha$$

Но интеграл

$$\int_{\alpha-\varepsilon}^{\beta} P\,d\mu$$

есть вещественная часть интеграла

$$\int_{\alpha-\varepsilon}^{\beta} e^{-z(\alpha-\mu)}z\,d\mu = e^{-z(\alpha-\beta)} - e^{-z\varepsilon}$$

и так как вещественная часть z или положительная, или в крайнем случае нуль, то этот интеграл — конечный или нуль; а так как, при бесконечно малом ε, разность $F(\alpha-\varepsilon)-F(\alpha)$ имеет своим пределом нуль, то, значит, предел нашего интеграла есть нуль.

Таким образом, видим, что

$$\lim z\int_{\alpha_0}^{\alpha} e^{-z(\alpha-\mu)}F(\mu)\,d\mu = F(\alpha) \tag{4}$$

и лишь для случая, когда аргумент z равен $+\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$, этот предел может и не равняться величине $F(\alpha)$; но, повторив вышеприведенное рассуждение и применив теорему о средней, увидим, что этот интеграл остается конечным при возрастании модуля z.

Таким образом, мы видим, что

$$\lim\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C\frac{\psi(z)}{\pi(z)}\int_{\alpha_0}^{\alpha}e^{z(\alpha-\mu)}F(\mu)\,d\mu\,dz = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{F(\alpha)}{2\pi}\lim\frac{\psi(-z)}{\pi(-z)}\,d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2}F(\alpha)\lim\frac{\psi(-z)}{\pi(-z)}$$

Поэтому, если функции $\psi(z)$ и $\pi(z)$ таковы, что

$$\lim\frac{\psi(-z)}{\pi(-z)} = c$$

то, на основании формул (1) и (4), будет

$$-\frac{1}{2}cF(\alpha) = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\psi(\lambda_n)}{\pi'(\lambda_n)}\int_{\alpha_0}^{\alpha}e^{\lambda_n(\alpha-\mu)}F(\mu)\,d\mu \qquad (\alpha>\alpha_0) \tag{5}$$

и величины $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$ суть корни уравнения

$$\pi(z)=0$$

и функция $\psi(z)$ такова, что

$$\lim\frac{\psi(-z)}{\pi(-z)}=c \quad \text{и} \quad \lim\frac{\psi(z)}{\pi(z)}e^{z(\alpha-\alpha_0)}=0$$

когда

$$\lim(\text{mod. } z)=\infty$$

Необходимо при этом еще заметить, что если бы функция $F(\alpha)$ не была непрерывна при $x=\alpha$, то вместо $F(\alpha)$ надо брать

$$\lim_{\varepsilon=0}F(\alpha-\varepsilon)=F(\alpha-0)$$

Если мы вместо функции $\psi(z)$ возьмем функцию $\chi(z)$ такою, чтобы было

$$\lim \frac{\chi(z)}{\pi(z)} = C \quad \text{и} \quad \lim \frac{\chi(-z)}{\pi(-z)} e^{s(\alpha_1-\alpha)} = 0$$

и вместо интеграла

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} e^{(\alpha-\mu)} F(\mu)\, d\mu$$

возьмем

$$\int_{\alpha}^{\alpha_1} e^{s(\alpha-\mu)} F(\mu)\, d\mu$$

то получим, совершенно подобно предыдущему,

$$\frac{1}{2} CF(\alpha) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\chi(\lambda_n)}{\pi'(\lambda_n)} \int_{\alpha}^{\alpha_1} e^{\lambda_n(\alpha-\mu)} F(\mu)\, d\mu \qquad (\alpha_1 > \alpha) \quad (6)$$

причем, если при $z = \alpha$ функция $F(\alpha)$ имеет разрыв, то надо брать

$$\lim_{\eta=0} F(\alpha + \eta) = F(\alpha + 0)$$

Формулы (5), (6) не представляют непосредственно простых разложений функции $F(\alpha)$. Чтобы получить таковые, Коши поступает следующим образом: он берет функции $\psi(z)$ и $\chi(z)$ так, чтобы было

$$\psi(z) + \chi(z) = \pi(z) \qquad (7)$$

и выбирает эти функции так, чтобы было

$$\left.\begin{array}{ll} \lim \dfrac{\chi(z)}{\pi(z)} = 1 & \lim \dfrac{\chi(-z)}{\pi(-z)} = 0 \\ \lim \dfrac{\psi(z)}{\pi(z)} = 0 & \lim \dfrac{\psi(-z)}{\pi(-z)} = 1 \\ \lim \dfrac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{s(\alpha-\alpha_0)} = 0 & \lim \dfrac{\chi(-z)}{\pi(-z)} e^{s(\alpha_1-\alpha)} = 0 \end{array}\right\} \qquad (8)$$

причем вторая строчка написанных условий есть очевидное следствие первой строчки.

Значит в формулах (5), (6) будет: $C = 1$ и $c = 1$, и эти формулы напишутся так:

$$-\frac{1}{2} F(\alpha) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\psi(\lambda_n)}{\pi'(\lambda_n)} \int_{\alpha_0}^{\alpha} e^{\lambda_n(\alpha-\mu)} F(\mu)\, d\mu \qquad (5')$$

$$\frac{1}{2} F(\alpha) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\chi(\lambda_n)}{\pi'(\lambda_n)} \int_{\alpha}^{\alpha_1} e^{\lambda_n(\alpha-\mu)} F(\mu)\, d\mu \qquad (6')$$

причем попрежнему $\alpha_1 > \alpha > \alpha_0$.

Заметив, что

$$\psi(\lambda_n)+\chi(\lambda_n)=\pi(\lambda_n)=0 \tag{7'}$$

получим, вычитая первое из вышенаписанных равенств из второго,

$$F(\alpha)=-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\psi(\lambda_n)}{\pi'(\lambda_n)}\,e^{\lambda_n\alpha}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}e^{-\lambda_n\mu}F(\mu)\,d\mu=$$

$$=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\chi(\lambda_n)}{\pi'(\lambda_n)}\,e^{\lambda_n\alpha}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}e^{-\lambda_n\mu}F(\mu)\,d\mu \tag{9}$$

причем для мест разрыва, вместо величины $F(\alpha)$, надо брать

$$\frac{1}{2}[F(\alpha-0)+F(\alpha+0)]$$

Это и есть то разложение, данное Коши, которое заключает в себе множество разложений, зависящих от корней трансцендентных уравнений.

Так, например, пусть будет

$$\pi(z)=e^{az}-1 \qquad a>0$$

так что

$$\chi(z)=e^{az};\quad \psi(z)=-1$$

Корни уравнения $\pi(z)=0$ суть

$z=\lambda_k=\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{a}$ (k — целое положительное или отрицательное число или нуль),

$\frac{\chi(z)}{\pi(z)}=\frac{e^{az}}{e^{az}-1}$ при неопределенном возрастании модуля z будет иметь своим пределом 1,

$\frac{\psi(z)}{\pi(z)}=\frac{-1}{e^{az}-1}$ имеет своим пределом 0,

$\frac{\chi(-z)}{\pi(-z)}=\frac{e^{-az}}{e^{-az}-1}$ при неопределенном возрастании модуля z имеет своим пределом 0,

$\frac{\psi(-z)}{\pi(-z)}=\frac{-1}{e^{-az}-1}$ имеет своим пределом 1.

Затем,

$\frac{\chi(-z)}{\pi(-z)}e^{z(\alpha_1-\alpha)}=\frac{e^{-az}\,e^{z(\alpha_1-\alpha)}}{e^{-az}-1}=\frac{e^{-z(a-\alpha_1+\alpha)}}{e^{-az}-1}$ будет иметь пределом 0,

если

$$a-\alpha_1+\alpha>0 \quad\text{или}\quad \alpha_1-\alpha<a$$

$\frac{\psi(z)}{\pi(z)}e^{z(\alpha-\alpha_0)}=-\frac{e^{z(\alpha-\alpha_0)}}{e^{az}-1}=\frac{e^{z(\alpha-\alpha_0-a)}}{e^{-az}-1}$ будет иметь пределом 0

если

$$\alpha - \alpha_0 - a < 0 \quad \text{иначе} \quad \alpha < \alpha_0 + a$$

Таким образом, если $\alpha_1 - a < \alpha < \alpha_0 + a$, то все условия соблюдены, и формула Коши

$$F(\alpha) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\chi(\lambda_n)}{\pi'(\lambda_n)} e^{\lambda_n \alpha} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} e^{-\lambda_n \mu} F(\mu)\, d\mu$$

имеет место и дает

$$F(\alpha) = \frac{1}{a} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{e^{2k\pi\sqrt{-1}}}{e^{2k\pi\sqrt{-1}}} e^{\frac{2k\pi\alpha}{a}\sqrt{-1}} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} e^{-\frac{2k\pi\mu}{a}\sqrt{-1}} F(\mu)\, d\mu$$

или

$$F(\alpha) = \frac{1}{a} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{\frac{2k\pi\alpha}{a}\sqrt{-1}} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} e^{-\frac{2k\pi\mu}{a}\sqrt{-1}} F(\mu)\, d\mu$$

при $\alpha_1 - a < \alpha < \alpha_0 + a$.

Выделяя член, соответствующий $k = 0$, и соединяя попарно остальные, соответствующие $k = -n$ и $k = +n$, получим

$$F(\alpha) = \frac{1}{a} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} F(\mu)\, d\mu + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \cos \frac{2k\pi}{a} (\alpha - \mu) F(\mu)\, d\mu$$

взяв

$$a = 2l; \quad \alpha_1 = l; \quad \alpha_0 = -l$$

получим

$$F(\alpha) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} F(\mu)\, d\mu + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_{-l}^{+l} \cos \frac{n\pi}{l} (\alpha - \mu) F(\mu)\, d\mu \qquad (10)$$

известное разложение в тригонометрический ряд Фурье.

Возьмем, как второй пример,

$$\pi(z) = z(e^{az} + e^{-az}) + h(e^{az} - e^{-az}) \qquad (a > 0 \text{ и } h > 0)$$

Делаем

$$\chi(z) = e^{az}(z + h); \quad \psi(z) = e^{-az}(z - h)$$

Тогда будет

$$\lim \frac{\chi(z)}{\pi(z)} = 1 \qquad \lim \frac{\psi(z)}{\pi(z)} = 0$$

$$\lim \frac{\chi(-z)}{\pi(-z)} = 0 \qquad \lim \frac{\psi(-z)}{\pi(-z)} = 1$$

$$\lim \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(\alpha-\alpha_0)} = \lim \frac{e^{z(x-\alpha_0-a)}(z-h)}{e^{az}(z+h)+e^{-az}(z-h)} = 0$$

если

$$\alpha - \alpha_0 - 2a < 0, \quad \text{т. е.} \quad \alpha < \alpha_0 + 2a$$

$$\lim \frac{\chi(-z)}{\pi(-z)} e^{z(\alpha_1-\alpha)} = \lim \frac{e^{z(\alpha_1-\alpha-a)}(-z+h)}{e^{-az}(-z+h)-(z+h)e^{az}} = 0$$

если

$$\alpha_1 - \alpha - 2a < 0 \quad \text{или} \quad \alpha > \alpha_1 - 2a$$

Остается рассмотреть корни уравнения $\pi(z)=0$

Это уравнение будет

$$z(e^{az}+e^{-az})+h(e^{az}-e^{-az})=0 \tag{11}$$

Это уравнение может иметь лишь чисто мнимые корни, кроме корня $z=0$.

В самом деле, если сделать $az=x+iy$ и в полученном уравнении отделить вещественную часть от мнимой, то это уравнение распадется на два:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{ah}\,x(e^x+e^{-x})+(e^x-e^{-x})\left(1-\frac{1}{ah}\,y\operatorname{tg}y\right)=0 \\ &\frac{1}{ah}\,x(e^x-e^{-x})+(e^x+e^{-x})\left(1+\frac{1}{ah}\,\frac{y}{\operatorname{tg}y}\right)=0 \end{aligned} \tag{*}$$

При x, не равном нулю, будет

$$\begin{aligned} \frac{1}{ah}\,y\operatorname{tg}y &= 1+\frac{x}{ah}\,\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \\ \frac{1}{ah}\,\frac{y}{\operatorname{tg}y} &= -1-\frac{x}{ah}\,\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \end{aligned}$$

Первое из этих количеств всегда положительное, второе — отрицательное, между тем $y\operatorname{tg}y$ и $\frac{y}{\operatorname{tg}y}$ должно быть одного и того же знака; следовательно, x может быть только *равно* нулю, и тогда первое уравнение (*) удовлетворяется тождественно, второе же обращается в такое:

$$\operatorname{tg}y+\frac{1}{ah}\,y=0$$

которое у нас уже было.

Таким образом, делая $z=\lambda\sqrt{-1}$, видим, что уравнение $\pi(z)=0$ обратится в такое:

$$\lambda\cos a\lambda+h\sin a\lambda=0 \tag{12}$$

Затем,

$$\pi'(z)=(1+ah)(e^{az}+e^{-az})+az(e^{az}-e^{-az})$$

$$\pi'(\lambda\sqrt{-1})=2(1+ah)\cos a\lambda-2a\lambda\sin a\lambda=\frac{\sin 2a\lambda-2a\lambda}{\sin a\lambda} \tag{**}$$

и формула Коши дает разложение

$$F(\alpha)=\sum\frac{e^{a\lambda\sqrt{-1}}(\lambda\sqrt{-1}+h)}{\sin 2a\lambda-2a\lambda}\sin a\lambda\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}e^{\lambda\sqrt{-1}(\alpha-\mu)}F(\mu)\,d\mu \tag{13}$$

$$(\alpha_1-2a<\alpha<\alpha_0+2a)$$

и суммирование распространено на *все* корни уравнения (12).

Выделив член, соответствующий $\lambda=0$, который обратится в

$$\frac{h}{2(1+ah)}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}F(\mu)\,d\mu$$

на основании равенства (**), и соединив остальные попарно соответственно значениям λ и $-\lambda$, получим

$$F(\alpha)=\frac{h}{2(1+ah)}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}F(\mu)\,d\mu+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2\lambda_n}{2a\lambda_n-\sin 2a\lambda_n}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}F(\mu)\cos\lambda_n(\alpha-\mu)\,d\mu$$

причем должно быть

$$\alpha_1-2a<\alpha<\alpha_0+2a$$

Взяв

$$\alpha_1=a;\qquad\alpha_0=-a$$

получим

$$F(\alpha)=\frac{h}{2(1+ah)}\int_{-a}^{+a}F(\mu)\,d\mu+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2\lambda_n}{2a\lambda_n-\sin 2a\lambda_n}\int_{-a}^{+a}F(\mu)\cos\lambda_n(\alpha-\mu)\,d\mu \tag{14}$$

λ_n суть *положительные* корни уравнения

$$\lambda\cos a\lambda+h\sin a\lambda=0 \tag{12}$$

Это и есть общее разложение по синусам и косинусам дуг, зависящим от корней уравнения (12).

Из этого разложения, совершенно подобно тому, как для разложений по синусам и косинусам кратных дуг, получаются разложения только по синусам или только по косинусам для функции, заданной от 0 до a.

В самом деле, положим, что $F(-\mu)=-F(\mu)$ в пределах от $-a<\mu<a$; тогда будет

$$F(\alpha)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{4\lambda_n \sin\lambda_n\alpha}{2a\lambda_n-\sin 2a\lambda_n}\int_0^a F(\mu)\sin\lambda_n\mu\,d\mu \quad (0<\alpha<a) \tag{15}$$

Если же $F(-\mu)=F(\mu)$, то будет

$$F(\alpha)=\frac{h}{1+ah}\int_0^h F(\mu)\,d\mu+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{4\lambda_n\cos\lambda_n\alpha}{2a\lambda_n-\sin 2a\lambda_n}\int_0^a F(\mu)\cos(\lambda_n\mu)\,d\mu \tag{16}$$

§ 57. Покажем теперь, каким образом Коши применил теорию вычетов к интегрированию линейных уравнений, и начнем с уравнений обыкновенных.

Положим, что требуется найти общий интеграл уравнения

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_n y=0 \tag{1}$$

с постоянными коэффициентами.

Составляем характеристическое уравнение

$$F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{2}$$

Простому корню λ_1 этого уравнения соответствует частное решение вида $e^{\lambda_1 x}$, k-кратному корню λ_i соответствует k частных решений:

$$e^{\lambda_i x};\quad xe^{\lambda_i x};\quad \ldots\ x^{k-1}e^{\lambda_i x}$$

или иначе

$$e^{\lambda_i x};\quad \frac{\partial}{\partial\lambda_i}e^{\lambda_i x};\quad \frac{\partial^2}{\partial\lambda_i^2}(e^{\lambda_i x});\quad \ldots\ \frac{\partial^{k-1}}{\partial\lambda_i^{k-1}}(e^{\lambda_i x})$$

Чтобы получить общий интеграл, каждое частное решение множится на произвольную постоянную, и берется сумма полученных произведений.

Коши замечает, что, если взять выражение

$$\frac{\varphi(\lambda)e^{\lambda x}}{F(\lambda)} \tag{3}$$

где $\varphi(\lambda)$ есть какая угодно функция от λ — моногенная на всей плоскости λ, то полный вычет

$$y = \mathcal{E} \frac{\varphi(\lambda)\, e^{\lambda x}}{F(\lambda)} \tag{4}$$

и будет как раз требуемым общим интегралом предложенного уравнения.

В самом деле, заметив, что

$$y^{(k)} = \frac{\partial^k y}{\partial x^k} = \mathcal{E} \frac{\varphi(\lambda)\, e^{\lambda x}}{F(\lambda)} \lambda^k$$

видим, что результат подстановки этой величины y в предложенное уравнение есть

$$\mathcal{E} \frac{F(\lambda)\varphi(\lambda)\, e^{\lambda x}}{F(\lambda)} \mathcal{E} \varphi(\lambda)\, e^{\lambda x} = 0$$

ибо, по предложению, функция $\varphi(\lambda)$ в бесконечность не обращается.

Значит, величина (4) удовлетворяет уравнению (1).

Надо теперь показать, что эта величина содержит и требуемое число n постоянных произвольных.

Если, например, λ_1 есть простой корень уравнения $F(\lambda) = 0$, то вычет, ему соответствующий, есть

$$\frac{\varphi(\lambda_1)}{F'(\lambda_1)}\, e^{\lambda_1 x}$$

а так как $\varphi(\lambda)$ есть *произвольная* функция от буквы λ, то величина $\varphi(\lambda)$ есть произвольная постоянная; такова же и величина $\frac{\varphi(\lambda)}{F'(\lambda_1)}$. Значит, каждому простому корню соответствует в сумме (4) одна произвольная постоянная.

Вычет, соответствующий k-кратному корню λ_i, найдется по формуле

$$\mathcal{E}_{\lambda_i} \frac{\varphi(\lambda)}{F(\lambda_i)} e^{\lambda x} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (k-1)} \frac{\partial^{k-1}}{\partial \lambda_i^{k-1}} \frac{\varphi(\lambda_i)\, e^{\lambda_i x}}{F_1(\lambda_i)}$$

где

$$F_1(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^k = F(\lambda)$$

Так как функция $\varphi(\lambda)$ произвольная, то ее производным

$$\varphi'(\lambda),\ \varphi''(\lambda),\ \ldots\ \varphi^{(k-1)}(\lambda)$$

можно приписывать любые постоянные значения, и значит предыдущее выражение равносильно такому:

$$(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_k x^{k-1}) e^{\lambda x}$$

т. е. представляет как раз сумму тех k частных решений, которые соответствуют k-кратному корню характеристического уравнения.

Следовательно, величина

$$y = \mathcal{E} \frac{\varphi(\lambda) e^{\lambda x}}{F(\lambda)} \tag{5}$$

есть, действительно, *общий интеграл* уравнения (1).

§ 58. Положим теперь, что предложено уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{6}$$

с последним членом, и будем искать его решение под видом

$$y = \mathcal{E} \frac{\psi(\lambda, x)}{F(\lambda)} e^{\lambda x} \tag{6'}$$

причем вычеты берутся по корням уравнения $F(\lambda) = 0$.

Подчиним функцию $\psi(\lambda, x)$, подобно тому, как это делается при способе изменения постоянных произвольных, тем $(n-1)$ условиям, которые выражают, чтобы производные от 1-го до $(n-1)$-го порядка, от y при $\psi(\lambda, x)$, зависящем от x, выражались так же, как и при $\psi(\lambda, x)$, не содержащем буквы x.

Итак, имеем

$$y' = \mathcal{E} \lambda e^{\lambda x} \frac{\psi(\lambda, x)}{F(\lambda)} + \mathcal{E} e^{\lambda x} \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} \frac{1}{F(\lambda)}$$

и, значит, первое из сказанных условий есть

$$\mathcal{E} e^{\lambda x} \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} \frac{1}{F(\lambda)} = 0 \tag{1'}$$

При соблюдении этого условия будет

$$y'' = \mathcal{E} \lambda^2 e^{\lambda x} \frac{\psi(\lambda, x)}{F(\lambda)} + \mathcal{E} e^{\lambda x} \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} \frac{\lambda}{F(\lambda)}$$

и значит, второе условие будет

$$\mathcal{E} e^{\lambda x} \frac{\partial \psi(\lambda, x)}{\partial x} \frac{\lambda}{F(\lambda)} = 0 \tag{2'}$$

При соблюдении этих двух условий (1) и (2) будет

$$y''' = \mathcal{E}\lambda^3 e^{\lambda x}\frac{\psi(\lambda, x)}{F(\lambda)} + \mathcal{E}e^{\lambda x}\frac{\partial\psi(\lambda, x)}{\partial x}\frac{\lambda^2}{F(\lambda)}$$

и третье условие будет

$$\mathcal{E}e^{\lambda x}\frac{\partial\psi(\lambda, x)}{\partial x}\frac{\lambda^2}{F(\lambda)} = 0 \qquad (3')$$

Продолжая таким образом, видим, что сказанные $(n-1)$ условий можно выразить формулою

$$\mathcal{E}e^{\lambda x}\frac{\partial\psi(\lambda, x)}{\partial x}\frac{\lambda^k}{F(\lambda)} = 0, \text{ если } 0 \leqslant k < n-1 \qquad (7)$$

При соблюдении этих условий будет

$$y^{(n)} = \mathcal{E}\lambda^n e^{\lambda x}\frac{\psi(\lambda, x)}{F(x)} + \mathcal{E}e^{\lambda x}\frac{\partial\psi(\lambda, x)}{\partial x}\frac{\lambda^{n-1}}{F(\lambda)}$$

подставляя величины

$$y,\ y',\ \ldots\ y^{(n)}$$

в предложенное уравнение, получим

$$\mathcal{E}\frac{F(\lambda)\,\psi(\lambda, x)}{F(\lambda)}e^{\lambda x} + \mathcal{E}e^{\lambda x}\frac{\partial\psi(\lambda, x)}{\partial x}\frac{\lambda^{n-1}}{F(\lambda)} = f(x) \qquad (*)$$

Но так как

$$\mathcal{E}\frac{F(\lambda)\,\psi(\lambda, x)\,e^{\lambda x}}{F(\lambda)} = 0$$

то последнее условие, которому должна удовлетворять функция $\psi(\lambda, x)$, есть

$$\mathcal{E}e^{\lambda x}\frac{\partial\psi(\lambda, x)}{\partial x}\frac{\lambda^{n-1}}{F(\lambda)} = f(x) \qquad (8)$$

Таким образом, надо найти такую функцию $\psi(\lambda, x)$, которая удовлетворяла бы условиям (7) и (8).

Но так как при всяком $k < (n-1)$

$$\mathcal{E}\frac{\lambda^k}{F(\lambda)} = 0$$

ибо в этом случае

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_c \frac{\lambda^k\,d\lambda}{F(\lambda)} = 0$$

когда контур C есть круг, радиус коего неопределенно возрастает, и

$$\mathcal{E}\frac{\lambda^{n-1}}{F(\lambda)}=1$$

то стоит только взять

$$e^{\lambda x}\frac{\partial\psi(\lambda, x)}{\partial x}=f(x) \tag{9}$$

и условия (7) и (8) будут удовлетворены.

Из уравнения же следует

$$\psi(\lambda, x)=\varphi(\lambda)+\int_a^x e^{-\lambda\xi}f(\xi)\,d\xi \tag{10}$$

где $\varphi(\lambda)$ есть произвольная функция от λ, моногенная на всей плоскости λ, и, следовательно, искомая величина y есть

$$y=\mathcal{E}e^{\lambda x}\frac{\varphi(\lambda)}{F(\lambda)}+\mathcal{E}e^{\lambda x}\int_a^x e^{-\lambda}\frac{f(\xi)d\xi}{F(\lambda)} \tag{11}$$

Припомнив ту связь, которая существует между нахождением вычетов и разложением рациональных дробей на простейшие, увидим полную аналогию этой формулы с формулами (8) § 9.

Для пояснения методы возьмем уравнение

$$y''+2hy'+n^2y=f(x)$$

предполагая, что

$$n^2-h^2=n_1^2>0$$

Уравнение

$$F(\lambda)=0$$

будет

$$\lambda^2+2h\lambda+n^2=0$$

его корни:

$$\lambda_1=-h+n_1\sqrt{-1}$$

$$\lambda_2=-h-n_1\sqrt{-1}$$

Формула (11) дает

$$y=\mathcal{E}e^{\lambda x}\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^2+2h\lambda+n^2}+\mathcal{E}\int_a^x e^{\lambda(x-\xi)}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\lambda^2+2h\lambda+n^2}$$

Затем, имеем

$$\mathcal{E} e^{\lambda x} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^2 + 2h\lambda + n^2} = e^{\lambda_1 x} \frac{\varphi(\lambda_1)}{2\lambda_1 + 2h} + e^{\lambda_2 x} \frac{\varphi(\lambda_2)}{2\lambda_2 + 2h} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} =$$

$$= e^{-hx} [A \cos n_1 x + B \sin n_1 x]$$

$$\mathcal{E} \int_a^x e^{\lambda (x-\xi)} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\lambda^2 + 2h\lambda + n^2} = \frac{1}{2} \int_a^x f(\xi) \left[\frac{e^{\lambda_1 (x-\xi)}}{\lambda_1 + h} + \frac{e^{\lambda_2 (x-\xi)}}{\lambda_2 + h} \right] d\xi$$

Но

$$\lambda_1 + h = n_1 \sqrt{-1}; \qquad \lambda_2 + h = -n_1 \sqrt{-1}$$

и предыдущее выражение будет

$$\frac{1}{n_1} \int_a^x e^{-h(x-\xi)} f(\xi) \sin n_1 (x - \xi)\, d\xi$$

и значит, общий интеграл нашего уравнения

$$y = e^{-hx} (A \cos n_1 x + B \sin n_1 x) + \frac{1}{n_1} e^{-hx} \int_a^x e^{h\xi} f(\xi) \sin n_1 (x - \xi)\, d\xi$$

что́ мы имели и раньше.

§ 59. Коши, изложив этот способ в своем мемуаре „Application du calcul des résidus à l'intégration des équations différentielles linéaires aux coefficients constants“ (Oeuvres, II série, t. VI, p. 252), этим не ограничился, и в мемуаре „Sur la détermination des constantes arbitraires renfermées dans les intégrales des équations différentielles linéaires“ (Oeuvres, II série, t. VII, p. 40) прилагает интегральные вычеты к определению постоянных произвольных, входящих в общий интеграл линейного уравнения по заданным начальным условиям.

Итак, положим, что надо интегрировать уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (1)$$

при условии, чтобы при $x = x_0$ было

$$y = \eta_0; \quad y' = \eta_1; \quad y'' = \eta_2; \quad \ldots \quad y^{(n-1)} = \eta_{n-1} \qquad (2)$$

Прежде чем решить этот общий вопрос, Коши решает частный, именно, вместо условий (2) он ставит такие: при $x = x_0$ должно быть

$$y = \eta^0; \quad y' = \eta^1; \quad y'' = \eta^2; \quad \ldots \quad y^{n-1} = \eta^{n-1} \qquad (3)$$

т. е. берет все эти величины в геометрической прогресии.

Мы видели, что общий интеграл уравнения (1) есть

$$y = \mathcal{E} \frac{\varphi(\lambda) e^{\lambda x}}{F(\lambda)}$$

где $\varphi(\lambda)$ — произвольная функция λ.

В виду того, что

$$y^{(k)} = \mathcal{E} \frac{\lambda^k \varphi(\lambda)}{F(\lambda)} e^{\lambda x}$$

то надо, значит, выбрать функцию $\varphi(\lambda)$ так, чтобы были выполнены условия

$$\mathcal{E} \frac{\varphi(\lambda) \lambda^k e^{\lambda x_0}}{F(\lambda)} = \eta^k \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)] \quad (4)$$

Но величина η^k сама может быть представлена как вычет, именно:

$$\eta^k = \mathcal{E} \frac{\lambda^k}{(\lambda - \eta)}$$

следовательно, предыдущее условие напишется так:

$$\mathcal{E} \left[\frac{\lambda^k \varphi(\lambda) e^{\lambda x_0}}{F(\lambda)} - \frac{\lambda^k}{\lambda - \eta} \right] = 0 \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)]$$

или иначе

$$\mathcal{E} \lambda^k \frac{\varphi(\lambda) e^{\lambda x_0} (\lambda - \eta) - F(\lambda)}{(\lambda - \eta) F(\lambda)} = 0 \quad [k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)] = 0 \quad (4')$$

Знаменатель, по корням коего вычеты берутся, есть целая функция степени $(n+1)$; значит, условие (4′) будет выполнено, если выбрать функцию $\varphi(\lambda)$ так, чтобы числитель был также целой функцией, но степени не выше $(n-1)$; а так как первый множитель уже при $k = n-1$ будет степени $(n-1)$; то, значит, надо, чтобы было

$$\varphi(\lambda) e^{\lambda x_0} (\lambda - \eta) - F(\lambda) = C = \text{const}$$

Отсюда следует

$$\varphi(\lambda) = \frac{F(\lambda) + C}{\lambda - \eta} e^{-\lambda x_0}$$

Если желательно, чтобы $\varphi(\lambda)$ было конечное при $\lambda = \eta$, то стоит только взять C так, чтобы

$$F(\eta) + C = 0$$

или

$$C = -F(\eta)$$

и тогда будет

$$\varphi(\lambda) = \frac{F(\lambda) - F(\eta)}{\lambda - \eta} e^{-\lambda x_0}$$

и следовательно,

$$y = \mathcal{E} \frac{F(\lambda) - F(\eta)}{(\lambda - \eta) F(\lambda)} e^{\lambda (x - x_0)} \tag{5}$$

Выражение

$$\frac{F(\lambda) - F(\eta)}{\lambda - \eta}$$

есть целый полином степени $(n-1)$ относительно как λ, так и η. Расположим его по степеням η, и пусть будет

$$\frac{F(\lambda) - F(\eta)}{\lambda - \eta} = A_0 + A_1 \eta + A_2 \eta^2 + \ldots + A_{n-1} \eta^{n-1}$$

где

$$A_0, \; A_1, \ldots A_{n-1}$$

будут известными функциями λ. Подставив эту величину в формулу (5), получим для y выражение подобного же вида, т. е. в виде полинома степени $(n-1)$ относительно η. Пусть оно будет

$$y = P_0 + P_1 \eta + P_2 \eta^2 + \ldots + P_{n-1} \eta^{n-1} \tag{6}$$

причем

$$P_0, \; P_1, \ldots P_{n-1}$$

будут известными функциями буквы x.

Величина (6) для y должа удовлетворять уравнению (1) при всяком значении буквы η; значит, каждая из величин

$$P_0, \; P_1, \ldots P_{n-1}$$

в отдельности этому уравнению удовлетворяет, а так как эта величина y удовлетворяет и условиям (3), то значит функции

$$P_0, \; P_1, \; P_2, \ldots P_{n-1}$$

таковы, что при $x = x_0$, P_0 обращается в 1, остальные — в нули, P_1' обращается в 1, а все остальные производные первого порядка, т. е.

$$P_0', \; P_2', \ldots P_{n-1}'$$

в нули, и т. д., как показывает следующая схема:

$$\begin{array}{lllll}
P_0 = 1; & P_1 = 0; & P_2 = 0; \ldots & P_{n-1} = 0 \\
P_0' = 0; & P_1' = 1; & P_2' = 0; \ldots & P_{n-1}' = 0 \\
P_0'' = 0; & P_1'' = 0; & P_2'' = 1; \ldots & P_{n-1}'' = 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
P_0^{(n-1)} = 0; & P_1^{(n-1)} = 0; & P_2^{(n-1)} = 0; \ldots & P_{n-1}^{(n-1)} = 1
\end{array} \tag{7}$$

Отсюда видно, что, представив y в виде

$$y = P_0 \eta^0 + P_1 \eta^1 + P_2 \eta^2 + \ldots + P_{n-1} \eta^{n-1}$$

и написав вместо показателей при букве η значки, т. е. заменив соответственно: η^0 через η_0; η^1 через η_1; η^2 через η_2; $\ldots$ η^{n-1} через η_{n-1}, мы получим величину

$$y = P_0 \eta_0 + P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + \ldots + P_{n-1} \eta_{n-1} \tag{8}$$

которая, удовлетворяя уравнению (1), вместе с тем, в силу условий (7), такова, что при $x = x_0$ будет

$$y = \eta_0;\ y' = \eta_1;\ y'' = \eta_2;\ \ldots\ y^{(n-1)} = \eta_{n-1}$$

т. е. что эта величина y удовлетворяет и начальным условиям.

Таким образом, имеем следующее правило:

Чтобы найти такое решение уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0$$

которое при $x = x_0$ *удовлетворяет условиям*

$$y = \eta_0;\ y' = \eta_1;\ \ldots\ y^{(n-1)} = \eta_{n-1}$$

надо, составив выражение

$$y = \mathfrak{L} \frac{F(\lambda) - F(\eta)}{(\lambda - \eta) F(\lambda)} e^{\lambda (x - x_0)} \tag{9}$$

представить его в виде

$$y = P_0 \eta^0 + P_1 \eta^1 + P_2 \eta^2 + \ldots + P_{n-1} \eta^{n-1} \tag{10}$$

и заменить показатели при букве η *соответствующими значками.*

Так, например, положим, что надо интегрировать уравнение

$$y'' + a^2 y = 0$$

при условии, чтобы при $x = 0$ было $y = 1$ и $y' = 0$.

Сперва ищем такое решение, чтобы при $x = 0$ было $y = \eta_0$ и $y' = \eta_1$ и затем полагаем $\eta_0 = 1$, $\eta_1 = 0$.

По правилу составляем

$$F(\lambda) = \lambda^2 + a^2$$

$$\frac{F(\lambda) - F(\eta)}{\lambda - \eta} = \frac{\lambda^2 - \eta^2}{\lambda - \eta} = \lambda + \eta = \lambda \eta^0 + \eta^1$$

Значит,

$$y = \mathcal{E}(\lambda\eta_0 + \eta_1)\frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2 + a^2} = \mathcal{E}\frac{\lambda}{\lambda^2 + a^2}e^{\lambda x} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{a\sqrt{-1}x} + \frac{1}{2}e^{-a\sqrt{-1}x}\cos ax$$

как видно, этот способ Коши избавляет от необходимости решать для нахождения значений постоянных произвольных, удовлетворяющих начальным условиям, систему уравнений первой степени, к которой приходим, пользуясь обычным способом.

Положим теперь, что предложено уравнение с последним членом

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x)$$

и что надо найти такое решение, которое удовлетворяло бы условиям: при $x = x_0$ должно быть

$$y = \eta_0;\ y' = \eta_1;\ \ldots\ y^{(n-1)} = \eta_{n-1} \qquad (*)$$

где $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_{n-1}$ — заданные величины.

Мы видели, что общий интеграл нашего уравнения есть

$$y = \mathcal{E}\frac{\varphi(\lambda)e^{\lambda x}}{F(\lambda)} + \mathcal{E}\frac{1}{F(\lambda)}\int_{x_0}^{x} e^{\lambda(x-\xi)}f(\xi)\,d\xi \qquad (11)$$

Обозначим, для краткости письма, первый член через u, второй — через v, так что

$$y = u + v \qquad (12)$$

Покажем теперь, что при $x = x_0$ будет

$$v = 0;\ v' = 0;\ v'' = 0;\ \ldots\ v^{(n-1)} = 0$$

В самом деле,

$$v^{(k)} = \mathcal{E}\frac{1}{F(\lambda)}\left[\lambda^k \int_{x_0}^{x} e^{\lambda(x-\xi)}f(\xi)\,d\xi + \lambda^{k-1}f(x) + \lambda^{k-2}f'(x) + \ldots + f^{(k-1)}(x)\right]$$

и при $x = x_0$ эта величина обращается в нуль, если $k = 0, 1, \ldots n-1$.

Значит, присутствие члена v в формуле (12) не оказывает влияния на условия (*), и их можно заменить такими: при $x = x_0$ должно быть

$$u = \eta_0;\ u' = \eta_1;\ \ldots\ u^{(n-1)} = \eta_{n-1}$$

и, следовательно,

$$u = \mathcal{E}\frac{F(\lambda) - F(\eta)}{(\lambda - \eta)F(\lambda)} e^{\lambda(x-x_0)}$$

где, после разложения по степеням буквы η, надо показатели степени заменить соответствующими им значками.

Пример 1. Интегрировать уравнение

$$y'' + a^2 y = f(x)$$

при условии, чтобы при $x = 0$ было

$$y = \eta_0 \quad \text{и} \quad y' = \eta_1$$

Применяя правило, имеем

$$F(\lambda) = \lambda^2 + a^2$$

$$\frac{F(\lambda) - F(\eta)}{\lambda - \eta} = \lambda + \eta = \lambda\eta^0 + \eta^1$$

значит,

$$u = \mathcal{E}(\lambda\eta_0 + \eta_1)\frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2 + a^2} = \frac{1}{2}\frac{\lambda_1\eta_0 + \eta_1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 x} + \frac{1}{2}\frac{\lambda_2\eta_0 + \eta_1}{\lambda_2} e^{\lambda_2 x}$$

Но

$$\lambda_1 = a\sqrt{-1}; \quad \lambda_2 = -a\sqrt{-1}$$

значит,

$$u = \frac{1}{2}\eta_0\left(e^{a\sqrt{-1}x} + e^{-a\sqrt{-1}x}\right) + \frac{1}{2}\frac{\eta_1}{a\sqrt{-1}}\left(e^{a\sqrt{-1}x} - e^{-a\sqrt{-1}x}\right) =$$

$$= \eta_0 \cos ax + \frac{\eta_1}{a}\sin ax$$

Затем, найдем v:

$$v = \mathcal{E}\frac{\int_0^x e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi)\, d\xi}{\lambda^2 + a^2} = \frac{1}{2\lambda_1}\int_0^x e^{\lambda_1(x-\xi)} f(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2\lambda_2}\int_0^x e^{\lambda_2(x-\xi)} f(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{-1}}\int_0^x f(\xi)\left[e^{a\sqrt{-1}(x-\xi)} - e^{-a\sqrt{-1}(x-\xi)}\right] d\xi = \frac{1}{a}\int_0^x f(\xi)\sin a(x-\xi)\, d\xi$$

и значит, искомая величина y есть

$$y = \eta_0 \cos ax + \frac{\eta_1}{a}\sin ax + \frac{1}{a}\int_a^x f(\xi)\sin a(x-\xi)\, d\xi$$

Пример 2. Интегрировать уравнение

$$y''-2y'+y=f(x)$$

при условии, чтобы при $x=0$ было

$$y=\eta_0 \quad \text{и} \quad y'=\eta_1$$

Имеем

$$F(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$$

$$\frac{F(\lambda)-F(\eta)}{\lambda-\eta}=\frac{(\lambda-1)^2-(\eta-1)^2}{\lambda-\eta}=(\lambda-1)+(\eta-1)=(\lambda-2)\eta^0+\eta^1$$

значит, будет

$$u=\mathcal{E}[(\lambda-2)\eta_0+\eta_1]\frac{e^{\lambda x}}{(\lambda-1)^2}=\left[\frac{d}{d\lambda}[(\lambda-2)\eta_0+\eta_1]e^{\lambda x}\right]_{\lambda=1}=$$

$$=[\eta_0+(\eta_1-\eta_0)x]e^x$$

Затем,

$$v=\mathcal{E}\frac{\int_0^x e^{\lambda(x-\xi)}f(\xi)\,d\xi}{(\lambda-1)^2}=\frac{d}{d\lambda}\left[\int_0^x e^{\lambda(x-\xi)}f(\xi)\,d\xi\right]_{\lambda=1}=\int_0^x(x-\xi)e^{x-\xi}f(\xi)\,d\xi$$

следовательно, искомая величина y есть

$$y=[\eta_0+(\eta_1-\eta_0)x]e^x+\int_0^x(x-\xi)e^{x-\xi}f(\xi)\,d\xi$$

§ 60. Метода Коши распространяется и на интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt}&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n\\
\frac{dx_2}{dt}&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n\\
\frac{dx_3}{dt}&=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\ldots+a_{3n}x_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dx_n}{dt}&=a_{n1}x_n+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\ldots+a_{nn}x_n
\end{aligned}\qquad (1)$$

На основании изложенного в главе I, решения этой системы будут вообще вида

$$x_1 = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots$$

где λ_1, λ_2, ... суть корни „характеристического“ уравнения

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda, & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda, & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2),$$

следовательно, можно положить

$$x_1 = \mathcal{C}\frac{\varphi_1(\lambda)}{F(\lambda)} e^{\lambda t}; \quad x_2 = \mathcal{C}\frac{\varphi_2(\lambda)}{F(\lambda)} e^{\lambda t}; \quad \ldots x_n = \mathcal{C}\frac{\varphi_n(\lambda)}{F(\lambda)} e^{\lambda t} \qquad (3)$$

причем $\varphi_1(\lambda)$, $\varphi_2(\lambda)$, ... $\varphi_n(\lambda)$ — некоторые пока неизвестные функции λ.

Подставив эти выражения в систему (1), мы увидим, что эти функции должны быть выбраны так, чтобы имели место равенства

$$\mathcal{C}\frac{(\lambda-a_{11})\varphi_1(\lambda) - a_{12}\varphi_2(\lambda) - \ldots - a_{1n}\varphi_n(\lambda)}{F(\lambda)} e^{\lambda t} = 0$$

$$\mathcal{C}\frac{-a_{21}\varphi_1(\lambda) + (\lambda-a_{22})\varphi_2(\lambda) - \ldots - a_{2n}\varphi_n(\lambda)}{F(\lambda)} e^{\lambda t} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Чтобы удовлетворить этим уравнениям, стоит только взять

$$\begin{aligned} (\lambda-a_{11})\varphi_1(\lambda) - a_{12}\varphi_2(\lambda) - \ldots - a_{1n}\varphi_n(\lambda) &= \alpha_1 F(\lambda) \\ -a_{21}\varphi(\lambda) + (\lambda-a_{22})\varphi_2(\lambda) - \ldots - a_{2n}\varphi_n(\lambda) &= \alpha_2 F(\lambda) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

где α_1, α_2, ... суть постоянные произвольные.

Нетрудно видеть, что решения этой системы уравнений будут вида

$$\begin{aligned} \varphi_1(\lambda) &= \alpha_1\theta_{11}(\lambda) + \alpha_2\theta_{12}(\lambda) + \ldots + \alpha_n\theta_{1n}(\lambda) \\ \varphi_2(\lambda) &= \alpha_1\theta_{21}(\lambda) + \alpha_2\theta_{22}(\lambda) + \ldots + \alpha_n\theta_{2n}(\lambda) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(\lambda) &= \alpha_1\theta_{n1}(\lambda) + \alpha_2\theta_{n2}(\lambda) + \ldots + \alpha_n\theta_{nn}(\lambda) \end{aligned} \qquad (4)$$

где θ_{11}, θ_{12}, ... θ_{nn} суть *целые* функции буквы λ, и притом

$$\theta_{11},\ \theta_{22},\ \theta_{33},\ \ldots\ \theta_{nn}$$

будут степени $(n-1)$, все же остальные функции θ_{ik}, у которых значки i и k между собою не равны, будут степени $(n-2)$.

Таким образом, каково бы ни было характеристическое уравнение $F(\lambda)$, формулы (3) и (4) доставят решения нашей системы, содержащие n постоянных произвольных α_1, α_2, α_3, ... α_n.

Более того: эти решения будут таковы, что при $t=0$ величина x_1 обратится в α_1, x_2 обратится в α_2, x_n обратится в α_n и т. д.

В самом деле, подставив, например, в первую из формул (3) вместо $\varphi_1(\lambda)$ его величину (4), получим

$$x_1 = \mathcal{E}\frac{\alpha_1\theta_{11}(\lambda)+\alpha_2\theta_{12}(\lambda)+\ldots+\alpha_n\theta_{1n}(\lambda)}{F(\lambda)}e^{\lambda t}$$

При $t=0$ эта величина обратится в такую:

$$(x_1)_0 = \mathcal{E}\frac{\alpha_1\theta_{11}(\lambda)+\alpha_2\theta_{12}(\lambda)+\ldots+\alpha_n\theta_{1n}(\lambda)}{F(\lambda)}$$

Но, как уже сказано, θ_{12}, θ_{13}, ... θ_{1n} суть целые функции степени $(n-2)$; следовательно,

$$\mathcal{E}\frac{\theta_{12}(\lambda)}{F(\lambda)}=0;\quad \mathcal{E}\frac{\theta_{13}(\lambda)}{F(\lambda)}=0;\ \ldots\ \mathcal{E}\frac{\theta_{1n}(\lambda)}{F(\lambda)}=0$$

и остается

$$(x_1)_0 = \mathcal{E}\frac{\alpha_1\theta_{11}(\lambda)}{F(\lambda)} = \alpha_1\mathcal{E}\frac{\theta_{11}(\lambda)}{F(\lambda)}$$

а так как функция $\theta_{11}(\lambda)$ степени $(n-1)$ относительно λ, функция же $F(\lambda)$ степени n, то вычет

$$\mathcal{E}\frac{\theta_{11}(\lambda)}{F(\lambda)}$$

равен отношению коэффициентов при высших членах числителя и знаменателя, которое равно единице; значит, будет

$$(x_1)_0 = \alpha_1$$

Совершенно так же увидим, что будет

$$(x_2)_0 = \alpha_2;\ (x_3)_0 = \alpha_3;\ \ldots\ (x_n)_0 = \alpha_n$$

Эта метода приложима и к интегрированию систем, содержащих уравнения порядка выше первого, без их предварительного приведения к виду (1).

Так, например, положим, что дана система

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A_1 x + B_1 y + C_1 z$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = A_2 x + B_2 y + C_2 z$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = A_3 x + B_3 y + C_3 z$$

для которой характеристическое уравнение есть

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} A_1 - \lambda^2, & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 - \lambda^2, & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

положив, попрежнему,

$$x = \mathcal{E}\frac{\varphi_1(\lambda)}{F(\lambda)} e^{\lambda t}; \quad y = \mathcal{E}\frac{\varphi_2(\lambda)}{F(\lambda)} e^{\lambda t}; \quad z = \mathcal{E}\frac{\varphi_3(\lambda)}{F(\lambda)} e^{\lambda t}$$

видим, что эти величины будут удовлетворять предложенной системе, если функции φ_1, φ_2 и φ_3 определить таким образом, чтобы было

$$\mathcal{E}\frac{(\lambda^2 - A_1)\varphi_1(\lambda) - B_1\varphi_2(\lambda) - C_1\varphi_3(\lambda)}{F(\lambda)} e^{\lambda t} = 0$$

$$\mathcal{E}\frac{-A_2\varphi_1(\lambda) + (\lambda^2 - B_2)\varphi_2(\lambda) - C_2\varphi_3(\lambda)}{F(\lambda)} e^{\lambda t} = 0$$

$$\mathcal{E}\frac{-A_3\varphi_1(\lambda) - B_3\varphi_2(\lambda) + (\lambda^2 - C_3)\varphi_3(\lambda)}{F(\lambda)} e^{\lambda t} = 0$$

Этим уравнениям можно удовлетворить, взяв

$$(\lambda^2 - A_1)\varphi_1(\lambda) - B_1\varphi_2(\lambda) - C_1\varphi_3(\lambda) = (\alpha_1\lambda + \beta_1)F(\lambda)$$
$$-A_2\varphi_1(\lambda) + (\lambda^2 - B_2)\varphi_2(\lambda) - C_2\varphi_3(\lambda) = (\alpha_2\lambda + \beta_2)F(\lambda)$$
$$-A_3\varphi_2(\lambda) - B_3\varphi_2(\lambda) + (\lambda^2 - C_3)\varphi_3(\lambda) = (\alpha_3\lambda + \beta_3)F(\lambda)$$

где α_1, β_1, α_2, β_2, α_3 и β_3 суть произвольные постоянные.

Следующие из этих уравнений величины φ_1, φ_2, φ_3 будут вида

$$\varphi_1(\lambda) = (\alpha_1\lambda + \beta_1)\theta_{11}(\lambda) + (\alpha_2\lambda + \beta_2)\theta_{11}(\lambda) + (\alpha_3\lambda + \beta_3)\theta_{13}(\lambda)$$
$$\varphi_2(\lambda) = (\alpha_1\lambda + \beta_1)\theta_{21}(\lambda) + (\alpha_2\lambda + \beta_2)\theta_{22}(\lambda) + (\alpha_3\lambda + \beta_3)\theta_{23}(\lambda)$$
$$\varphi_3(\lambda) = (\alpha_1\lambda + \beta_1)\theta_{31}(\lambda) + (\alpha_2\lambda + \beta_2)\theta_{32}(\lambda) + (\alpha_3\lambda + \beta_3)\theta_{33}(\lambda)$$

причем $\theta_{11}(\lambda)$, $\theta_{22}(\lambda)$, $\theta_{33}(\lambda)$ будут целыми функциями от λ четвертой степени, остальные же θ_{ik} — второй степени относительно λ.

Таким образом, величины x, y, z приведутся к следующим:

$$x = \mathcal{E}\frac{(\alpha_1\lambda + \beta_1)\,\theta_{11}(\lambda)}{F(\lambda)}\,e^{\lambda t}$$
$$y = \mathcal{E}\frac{(\alpha_2\lambda + \beta_2)\,\theta_{22}(\lambda)}{F(\lambda)}\,e^{\lambda t}$$
$$z = \mathcal{E}\frac{(\alpha_3\lambda + \beta_3)\,\theta_{33}(\lambda)}{F(\lambda)}\,e^{\lambda t}$$

При $t=0$ величина x обратится в такую:

$$x_0 = \mathcal{E}\frac{(\alpha_1\lambda + \beta_1)\,\theta_{11}(\lambda)}{F(\lambda)}$$

и так как $F(\lambda)$ — шестой степени относительно λ и коэффициент при λ^6 есть 1, функция $\theta_{11}(\lambda)$ — четвертой степени относительно λ и коэффициент при λ^4 есть 1, то этот вычет равен α_1.

Взяв производную по букве t, имеем

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{E}\frac{(\alpha_1\lambda^2 + \beta_1\lambda)\,\theta_{11}(\lambda)}{F(\lambda)}\,e^{\lambda t}$$

и при $t=0$ будет

$$\left(\frac{dx}{at}\right)_0 = \mathcal{E}\frac{(\alpha_1\lambda^2 + \beta_1\lambda)\,\theta_{11}(\lambda)}{F(\lambda)}$$

Функция $\theta_{11}(\lambda)$ — вида $a\lambda^4 + b\lambda^2 + c$, и коэффициент $a=1$; поэтому предыдущий вычет равен β_1; следовательно, найденное решение таково, что при $t=0$ сама величина x обращается в α_1 и $\frac{dx}{dt}$ в β_1.

Совершенно то же докажем и относительно y и z.

§ 61. Метода Коши приложима и к интегрированию систем уравнений с последними членами.

Пусть будет дана система

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t)$$
$$\frac{dx^2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t)$$

В том случае, когда

$$f_1(t) = f_2(t) = \ldots = f_n(t) = 0$$

решение, как мы видели, дается формулами

$$x_i = \mathcal{E} \frac{\alpha_1 \theta_{i1}(\lambda) + \alpha_2 \theta_{i2}(\lambda) + \ldots + \alpha_i \theta_{ii}(\lambda) + \ldots + \alpha_n \theta_{in}(\lambda)}{F(\lambda)} e^{\lambda t} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n)$$

в которых α_1, α_2, ... α_n суть произвольные постоянные, $\theta_{ik}(\lambda)$ целые функции от λ степени $(n-2)$ при $i \neq k$ и степени $(n-1)$ при $i = k$.

Будем искать решения того же вида, но считая α_1, α_2, ... α_n за функции от t.

Эти функции тогда определяются уравнениями

$$\mathcal{E} \frac{\alpha_1' \theta_{i1}(\lambda) + \alpha_2' \theta_{i2}(\lambda) + \ldots + \alpha_i' \theta_{ii}(\lambda) + \ldots + \alpha_n' \theta_{in}(\lambda)}{F(\lambda)} e^{\lambda t} = f_i(t) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots n)$$

как то следует из подстановки в данную систему.

Этим уравнениям мы удовлетворим, взяв

$$\alpha_i' = e^{-\lambda t} f_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n)$$

ибо тогда в стоящих в левых частях предыдущих равенств вычетах придется удержать лишь по одному члену, именно — содержащему $\theta_{ii}(\lambda)$, так как вычеты от всех прочих будут нули.

Таким образом, после подстановки, предыдущие равенства примут вид

$$f_i(t) \mathcal{E} \frac{\theta_{ii}(\lambda)}{F(\lambda)} = f_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n)$$

а так как

$$\mathcal{E} \frac{\theta_{ii}(\lambda)}{F(\lambda)} = 1$$

то эти равенства имеют место тожественно, и, следовательно, взятые величины α_i' удовлетворяют системе (*).

Таким образом, будет

$$\alpha_i' = e^{-\lambda t} f_i(t)$$

откуда следует

$$\alpha_i = C_i + \int_a^t e^{-\lambda \xi} f_i(\xi)\, d\xi \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n)$$

где C_i — постоянные, произвольные, a — заданное постоянное число.

Если желательно иметь такие частные решения, которые при $t = 0$ обращались бы в 0, то надо взять $C_i = 0$ и $a = 0$, т. е. брать

$$\alpha_i = \int_0^t e^{-\lambda \xi} f_i(\xi)\, d\xi$$

и, следовательно, будет

$$x_i = \mathfrak{C} \int_0^t \frac{f_1(\xi)\,\theta_{i1}(\lambda) + f_2(\xi)\,\theta_{i2}(\lambda) + \ldots + f_n(\xi)\,\theta_{in}(\lambda)}{f(\lambda)}\, e^{\lambda(t-\xi)}\, d\xi \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n)$$

Стоит только к этим величинам придать найденные выше, соответствующие уравнениям без последних членов и обращающиеся при $t = 0$ в $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, — и мы получим такие решения для $x_1, x_2, \ldots x_n$, которые удовлетворяют заданной системе дифференциальных уравнений с последними членами и при $t = 0$ принимают наперед назначенные значения.

§ 62. Коши показал также ряд приложений своей теории к решению алгебраических уравнений высших степеней, именно — к определению числа корней данного уравнения, заключающихся внутри заданного контура. Не излагая этой теории, приведем без доказательства один результат, полученный Hurwitz'ем, имеющий прямое отношение к нашему предмету. Исследование малых колебаний материальной системы приводится, как показано в главе I, к интегрированию системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, а это последнее — к решению характеристического уравнения. Колебания будут „затухающие", если все корни характеристического уравнения будут иметь *отрицательную* вещественную часть.

Необходимые и достаточные для этого условия даются следующей теоремой Hurwitz'a:

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы уравнение

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

при $a_0 > 0$ имело все корни с отрицательною вещественною частью, состоит в том, чтобы все определители числом n

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3, \ldots \Delta_n$$

составленные по ниже показанной схеме, были **положительные.**

Эти определители составляются так:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & a_{2k-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & a_{2k-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \ldots & a_{2k-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_k \end{vmatrix}$$

так что будет

$$\Delta_1 = a_1 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_4 \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} \ldots \text{ и т. д.}$$

Затем все коэффициенты, указатели коих больше n, заменяются нулями; так, например, условия при $n = 4$ будут

$$a_1 > 0 \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0$$

последнее условие можно писать так: $a_4 > 0$.

Доказательство этой теоремы, которое можно найти в превосходном курсе акад. Д. А. Граве „Элементы высшей алгебры“, слишком сложно, чтобы его давать в нашем курсе, самая же теорема и пользование ею, как видно, весьма просты.

§ 63. В мемуаре, озаглавленном: „Mémoire sur l'application du calcul des résidus á la solution des problèmes de physique mathématique“, изданном в 1827 г., Коши прилагает теорию вычетов к решению уравнений с частными производными линейных и с постоянными коэффициентами.

При изучении этой методы, необходимо постоянно иметь в виду формулы §§ 57, 58 и 59, дающие решения обыкновенных уравнений, и формулу § 56, которую Коши пишет так:

$$f(x) = \mathcal{E} \frac{\chi(\lambda)}{\pi(\lambda)} \int_{x_0}^{x} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \qquad (1)$$

В этой формуле вычеты берутся для всех корней уравнения

$$\pi(\lambda) = 0 \qquad (2)$$

и вместе с тем:

$$\pi(\lambda) = \psi(\lambda) + \chi(\lambda)$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z=\infty} \frac{\chi(z)}{\pi(z)} = 1 && \lim_{z=\infty} \frac{\chi(-z)}{\pi(-z)} = 0 \\
&\lim_{z=\infty} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} = 0 && \lim_{z=\infty} \frac{\psi(-z)}{\pi(-z)} = 1 \qquad (3) \\
&\lim_{z=\infty} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_0)} = 0 && \lim_{z=\infty} \frac{\chi(-z)}{\pi(-z)} e^{z(X-x)} = 0
\end{aligned}$$

причем вторая строчка написанных условий есть очевидное следствие первой строчки.

Мы уже имели примеры разложений, получаемых на основании формул 1, 2 и 3. Коши обращает еще внимание на следующие, которые получаются, если сделать

$$\chi(z) = F(z)\, e^{az}$$

и

$$\psi(z) = -F(b-z)\, e^{a(b-z)}$$

причем b — какая угодно постоянная, a — положительная величина, бóльшая $\frac{X-x_0}{4}$, и $F(z)$ — целая функция z.

В этом случае будет

$$\lim \frac{\chi(z)}{\pi(z)} = \lim \frac{F(z)\, e^{az}}{F(z)\, e^{az} - F(b-z)\, e^{a(b-z)}} = 1$$

$$\lim \frac{\chi(-z)}{\pi(-z)} = \lim \frac{F(-z)\, e^{-az}}{F(-z)\, e^{-az} - F(b+z)\, e^{a(b+z)}} = 0$$

$$\lim \frac{\psi(z)}{\pi(z)} = \lim \frac{F(b-z)\, e^{a(b-z)}}{F(z)\, e^{az} - F(b-z)\, e^{a(b-z)}} = 0$$

$$\lim \frac{\psi(-z)}{\pi(-z)} = \lim \frac{F(b+z)\, e^{a(b+z)}}{F(-z)\, e^{-az} - F(b+z)\, e^{a(b+z)}} = 1$$

$$\lim \frac{\chi(-z)}{\pi(-z)} e^{z(X-x)} = \lim \frac{F(-z)\, e^{-az}\, e^{z(X-x)}}{F(-z)\, e^{-az} - F(b+z)\, e^{a(b+z)}} =$$

$$= \lim \frac{F(-z)\, e^{z(X-x-2a)}}{F(b+z)\, e^{ab} - F(-z)\, e^{-2az}}$$

Этот предел будет 0, если $X - x - 2a < 0$, т. е. когда

$$X - 2a < x$$

$$\lim \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_0)} = \lim \frac{F(a-z)\, e^{a(b-z)}\, e^{z(x-x_0)}}{F(z)\, e^{az} - F(b-z)\, e^{a(b-z)}} =$$

$$= \lim \frac{F(b-z)\, e^{z(x-x_0-2a)}}{F(z)\, e^{-ab} - F(b-z)\, e^{-2az}}$$

Этот предел будет 0, если $x - x_0 - 2a < 0$, т. е. когда

$$x < x_0 + 2a$$

Таким образом, для величины x, удовлетворяющей неравенствам

$$X - 2a < x < x_0 + 2a$$

будет иметь место формула

$$f(x) = \mathcal{E}\frac{\chi(\lambda)}{\pi(\lambda)}\int_{x_0}^{X} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu = \mathcal{E}\frac{F(\lambda)\, e^{a\lambda}\int_{x_0}^{X} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{F(\lambda)\, e^{a\lambda} - F(b-\lambda)\, e^{a(b-\lambda)}} \qquad (*)$$

причем вычеты берутся для всех корней уравнения

$$\pi(\lambda) = F(\lambda)\, e^{a\lambda} - F(b-\lambda)\, e^{a(b-\lambda)} = 0$$

§ 64. При изложении методы Коши, мы не будем следовать буквально за ее автором, а будем согласовывать обозначения со сделанными в предыдущих параграфах, и самое изложение будем вести так, чтобы яснее выступала как связь этой методы со второю методою Пуассона, так и их различие.

Пусть дано уравнение

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + b\frac{\partial z}{\partial t} = a_1\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b_1\frac{\partial z}{\partial x} + c_1 z \qquad (1)$$

и требуется его интегрировать так, чтобы было соблюдено условие:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial x} + hz = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \\ &\frac{\partial z}{\partial x} + h_1 z = 0 \quad \text{„} \quad x = l \end{aligned}\right\} \text{ при всяком значении } t. \qquad (2)$$

Затем, чтобы при $t = 0$ было

$$z = f_0(x)$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial t} = f_1(x) \qquad (3)$$

причем функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ заданы для промежутка от $x = 0$ до $x = l$.

По второй методе Пуассона ищем решение вида

$$z = \sum XT$$

причем каждый член этой суммы в отдельности должен удовлетворять как уравнению (1), так и граничным условиям (2).

Совершенно так же поступает и Коши, и, значит, для определения функций X и T имеем уравнение

$$(aT'' + bT')X = (a_1 X'' + b_1 X' + c_1 X)T$$

которое распадается на два:

$$\frac{aT'' + bT'}{T} = \frac{a_1 X'' + b_1 X' + c_1 X}{X} = \alpha \tag{4}$$

где α есть какая угодно произвольная постоянная величина

Написав уравнение (4) так:

$$aT'' + bT' - \alpha T = 0 \tag{5}$$

$$a_1 X'' + b_1 X' + (c_1 - \alpha)X = 0 \tag{6}$$

получаем соответствующие (5) и (6) характеристические уравнения

$$a\mu^2 + b\mu = \alpha \tag{7}$$

$$a_1 \lambda^2 + b_1 \lambda + c_1 = \alpha \tag{8}$$

где, как уже сказано, α — какая угодно постоянная.

Далее следовало бы решить уравнение (8), и если обозначить его корни через λ_1 и λ_2, то будет

$$X = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$$

причем A и B — какие угодно постоянные.

Корни λ_1 и λ_2 выразились бы через α.

Коши, для упрощения вычислений, поступает иначе. Так как α величина произвольная и, в силу уравнения (8),

$$\lambda_1 = \varphi_1(\alpha) \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \varphi_2(\alpha)$$

то, значит, будет

$$\lambda_2 = \omega(\lambda_1)$$

т. е. вместо того, чтобы оба корня выражать через произвольную α, можно один из них принять произвольно и выразить другой или, в общем случае, все остальные через него. Итак, пусть будет

$$\lambda_1 = \rho$$

тогда

$$\alpha = a_1 \rho^2 + b_1 \rho + c_1$$

и уравнение (8) напишется так:

$$a_1 \lambda^2 + b_1 \lambda + c_1 = a_1 \rho^2 + b_1 \rho + c_1$$

или

$$a_1(\lambda^2-\rho^2)+b_1(\lambda-\rho)=(\lambda-\rho)[a_1(\lambda+\rho)+b_1]=0$$

и значит, будет

$$\lambda_1=\rho;\quad \lambda_2=-\frac{b_1}{a_1}-\rho=k-\rho \tag{9}$$

и, следовательно, функция X будет

$$X=Ae^{\rho x}+Be^{(k-\rho)x}$$

Надо теперь выбрать постоянные A и B так, чтобы удовлетворить граничным условиям, по составлении которых имеем

$$\begin{aligned} A(\rho+h)+B(k-\rho+h)&=0\\ A(\rho+h_1)e^{\rho l}+B(k-\rho+h_1)e^{(k-\rho)l}&=0 \end{aligned} \tag{10}$$

Эти два уравнения лишь тогда допускают решения, отличные от нуля, когда определитель равен нулю, т. е. когда

$$\Delta(\rho)=(\rho+h_1)(k-\rho+h)e^{\rho l}-(\rho+h)(k-\rho+h_1)e^{(k-\rho)l}=0 \tag{11}$$

и вместо A и B можно взять

$$A=(k-\rho+h)C$$

и

$$B=-(\rho+h)C$$

где C — любая постоянная величина. Мы уже видели, что без ущерба общности эту постоянную можно принять равной 1.

Таким образом будет

$$X=-(\rho+h)e^{(k-\rho)x}+(k-\rho+h)e^{\rho x} \tag{12}$$

Уравнение (7) напишется так:

$$a\mu^2+b\mu=a_1\rho^2+b_1\rho+c_1 \tag{13}$$

Пусть его корни суть: $\mu_1=\sigma$ и $\mu_2=\omega$, причем σ и ω будут известными функциями ρ; тогда решение уравнения (5) будет

$$T=De^{\sigma t}+Ee^{\omega t}$$

и, следовательно, величина z, удовлетворяющая уравнению (1) и граничным условиям, будет

$$z=\sum_{\rho}(De^{\sigma t}+Ee^{\omega t})X \tag{14}$$

причем суммирование распространяется на все значения ρ, удовлетворяющие уравнению (11), D и E — произвольные постоянные.

Коши пишет формулу (14) иначе, а именно:

$$z=\mathcal{E}_\rho \mathcal{E}_\mu \left[\frac{\varphi(\mu,\rho)\, e^{\mu t}}{\Phi(\rho,\mu)} \frac{X}{\Delta(\rho)}\right] \tag{15}$$

где через $\Phi(\rho, \mu)$ обозначена функция

$$\Phi(\rho, \mu)=a\mu^2+b\mu-a_1\rho^2-b_1\rho-c_1 \tag{13'}$$

и сперва надо взять вычет по букве μ, функция же $\varphi(\mu, \rho)$ какая угодно.

Остается теперь выбрать эту функцию так, чтобы были удовлетворены и начальные условия (3). Коши для этой цели поступает так: он берет функцию $\varphi(\mu, \rho)$ равной

$$\varphi(\mu, \rho)=(\rho+h_1)\int_0^l \frac{\Phi(\rho,\mu)-\Phi(\rho,f)}{\mu-f} e^{\rho(l-\alpha)}\, d\alpha$$

причем, после выполнения деления

$$\frac{\Phi(\rho,\mu)-\Phi(\rho,f)}{\mu-f}$$

в полученном полиноме степени буквы f, т. е.

$$f^0 \quad \text{и} \quad f^2$$

заменяются функциями

$$f_0(\alpha) \quad \text{и} \quad f_1(\alpha)$$

В самом деле, в этом случае величины z и $\frac{\partial z}{\partial t}$, следующие из выражения

$$z=\mathcal{E}_\rho \mathcal{E}_\mu \frac{e^{\mu t}\varphi(\rho,\mu)}{\Phi(\rho,\mu)} \frac{X}{\Delta(\rho)}$$

при $t=0$ будут, на основании сказанного в § 59,

$$z_0=\mathcal{E}_\rho \frac{(\rho+h_1) X \int_0^l e^{\rho(l-\alpha)} f_0(\alpha)\, d\alpha}{\Delta(\rho)} \tag{16}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_0=\mathcal{E}_\rho \frac{(\rho+h_1)}{\Delta(\rho)} X \int_0^l e^{\rho(l-\alpha)} f_1(\alpha)\, d\alpha \tag{17}$$

Действительно, по извлечении вычетов относительно буквы μ, величина

$$\mathcal{E}_\mu \frac{e^{\mu t}}{\Phi(\rho,\mu)} \int_0^l \frac{\Phi(\rho,\mu)-\Phi(\rho,f)}{\mu-f} e^{\rho(l-\alpha)}\, d\alpha$$

при $t=0$ обратится в

$$\int_0^l e^{\rho(l-\alpha)} f_0(\alpha)\, d\alpha$$

и ее производная по t обратится в

$$\int_0^l e^{\rho(l-\alpha)} f_1(\alpha)\, d\alpha$$

ибо при всяком ρ величина

$$\mathcal{E}_\mu \frac{e^{\mu t}}{\Phi(\rho,\mu)} \frac{\Phi(\rho,\mu)-\Phi(f,f)}{\mu-f}$$

удовлетворяет уравнению

$$\Phi(D_{t,\rho})\, T=0$$

и при $t=0$ обращается: само T в f^0 и $\frac{\partial T}{\partial t}$ в f^1, а так как мы условились после взятия вычетов по μ заменять f^0 через $f_0(\alpha)$ и f^1 через $f_1(\alpha)$, то формулы (16) и (17) и будут иметь место.

Остается еще показать, что величина z, даваемая формулой (16), и $\frac{\partial z}{\partial t}$, даваемая формулой (17), действительно, равны $f_0(x)$ и $f_1(x)$. Для этого поставим вместо X его величину (12), вместо $\Delta(\rho)$ — его величину (11); тогда формула (16) примет вид

$$z_0=\mathcal{E}_\rho \frac{(\rho+h_1)[(k-\rho+h)e^{\rho x}-(\rho+h)e^{(k-\rho)x}]}{(\rho+h_1)(k-\rho+h)e^{\rho l}-(\rho+h)(k-\rho+h_1)e^{(k-\rho)l}} \int_0^l e^{\rho(l-\alpha)} f_0(\alpha)\, d\alpha =$$

$$=\mathcal{E}_\rho \frac{(\rho+h_1)(k-\rho+h)e^{\rho l}\int_0^l e^{\rho(x-\alpha)} f_0(\alpha)\, d\alpha}{(\rho+h_1)(k-\rho+h)e^{\rho l}-(\rho+h)(k-\rho+h_1)e^{(k-\rho)l}} -$$

$$-\mathcal{E}_\rho \frac{(\rho+h_1)(\rho+h)e^{\rho l}e^{kx}\int_0^l e^{-\rho(x+\alpha)} f_0(\alpha)\, d\alpha}{(\rho+h_1)(k-\rho+h)e^{\rho l}-(\rho+h)(k-\rho+h_1)e^{(k-\rho)l}}$$

В силу формулы (*) § 63 первый член равен $f_0(x)$, так как стоит только в формуле (*) положить $F(\lambda)=(\lambda+h_1)(k-\lambda+h)$ и заменить букву λ буквою ρ, букву a буквою l и букву b буквою k и пределы у интеграла взять $x_0=0$ и $X=l$; второй же член этой формулы при всяком $x>0$ равен нулю, что мы видели при доказательстве теоремы Коши, из коей получилась формула (*) (см. § 53.).

Совершенно так же поступим и для $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_0$ и убедимся, что эта величина равна $f_1(x)$.

Таким образом, получаем следующую теорему:

Чтобы найти такое решение уравнения

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + b\frac{\partial z}{\partial t} = a_1\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b_1\frac{\partial z}{\partial x} + c_1 z$$

которое удовлетворяло бы граничным условиям:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{при} & x=0 & \text{должно быть} \quad \frac{\partial z}{\partial x} + hz = 0 \\ \text{„} & x=l & \text{„} \quad \text{„} \quad \frac{\partial z}{\partial x} + h_1 z = 0 \end{array}\right\} \text{при всяком значении } t$$

и начальным условиям: при $t=0$ должно быть

$$z = f_0(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = f_1(x)$$

надлежит:

во-первых, составить уравнение

$$a_1\lambda^2 + b_1\lambda + c_1 = a_1\rho^2 + b_1\rho + c_1$$

и выразить его корни через ρ, при этом всегда один из корней будет $\lambda_1 = \rho$;

во-вторых, составить функцию

$$X = Ae^{\rho x} + Be^{\lambda_2 x}$$

и определить отношение между величинами A и B так, чтобы эта функция удовлетворяла граничным условиям: тогда величина ρ будет корнем некоторого трансцендентного уравнения

$$\Delta(\rho) = 0$$

именно:

$$\Delta(\rho) = (\rho + h_1)(k - \rho + h)e^{\rho l} - (\rho + h)(k - \rho + h_1)e^{(k-\rho)l}$$

произвольный же постоянный множитель, входящий в состав функции X, можно взять равным 1;

в-третьих, составить функцию

$$\Phi(\rho, \mu) = a\mu^2 + b\mu - a_1\rho^2 - b_1\rho - c_1$$

тогда искомая величина z будет выражаться формулою

$$z = \mathcal{E}_\rho \mathcal{E}_\mu \frac{\varphi(\mu, \rho)\, e^{\mu t}}{\Phi(\rho, \mu)} \frac{X}{\Delta(\rho)}$$

причем

$$\varphi(\mu, \rho) = (\rho + h_1) \int_0^l \frac{\Phi(\rho, \mu) - \Phi(\rho, f)}{\mu - f} e^{\rho(l-\alpha)} da$$

и, по выполнении стоящего под знаком интеграла деления, надо величину f^0 *заменить через* $f_0(\alpha)$ *и* f^1 *заменить через* $f_1(\alpha)$, *при извлечении же вычетов сперва найти вычеты, относящиеся к букве* μ, *а затем к букве* ρ.

Как видно, эта метода дополняет вторую методу Пуассона как раз в том пункте, который составлял ее слабое место, т. е. в удовлетворении начальным условиям, когда заданную функцию приходилось представлять в виде бесконечного ряда, расположенного по известным функциям, зависящим от корней трансцендентного уравнения.

Коши дает в вышеупомянутом мемуаре и ряд других способов для определения функции $\varphi(\rho, \mu)$, а также и ряд примеров, прилагая выведенные формулы к решению задачи о колебании струны, распространению тепла в пруте и пр.; но мы на этом останавливаться не будем, так как главная наша цель при изложении этой методы состояла в том, чтобы показать, что есть общий способ для доказательства сходимости получаемых по второй методе Пуассона разложений, а также и нахождения тех условий, при которых эти разложения имеют место.

В практике же следует пользоваться второю методою Пуассона, как приводящею простейшими выкладками к цели, и лишь если определение коэффициентов в разложениях представит затруднения, то надо воспользоваться или методою Коши, или же первою методою Пуассона, что же касается доказательства сходимости полученных рядов, а также применения их для численных вычислений и изучения функций, ими представляемых, то в следующей главе мы даем простой способ, приложимый во многих случаях.

ГЛАВА VI

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ И ИМ ПОДОБНЫХ И О СУММИРОВАНИИ СИХ РЯДОВ

§ 65. Из предыдущих параграфов видно, что решения рассмотренных нами задач математической физики представляются в виде бесконечных рядов, подобных рядам Фурье; поэтому исследование сходимости таких рядов и величины остаточных членов может дать указания на то, сколько членов брать в ряде для получения той, по большей части весьма грубой, степени точности, которая требуется в технических вопросах.

Приведем сперва те замечания, которые по этому поводу делает в своих лекциях о распространении тепла умерший в 1912 г. знаменитый математик H. Poincaré.

Основанием для своих рассуждений он берет следующую теорему Абеля:

Дан ряд

$$\sigma = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

сходящийся или колеблющийся (т. е. коего суммы σ_n первых n слагаемых ограничены, но не имеют определенного предела, например $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$) *и совокупность положительных чисел*

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n, \ldots \tag{2}$$

неопределенно убывающих с возрастанием значка n и стремящихся к нулю, тогда ряд

$$S = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n + \ldots$$

сходящийся.

В самом деле, если ряд (1) сходящийся, то, каково бы ни было число p, при достаточно большом n будет

$$|\sigma_{n+p} - \sigma_n| < \rho_n \tag{3}$$

где ρ_n — сколь угодно малая величина. Если же ряд (1) колеблющийся, то в неравенстве (3) ρ_n будет величиною конечною.

Составим теперь верхний предел остатка ряда S.

Имеем

$$S_{n+p} - S_n = \alpha_{n+1} u_{n+1} + \alpha_{n+2} u_{n+2} + \ldots + \alpha_{n+p} u_{n+p}$$

Вторую часть этого равенства можно писать так:

$$\alpha_{n+1}(\sigma_{n+1} - \sigma_n) + \alpha_{n+2}(\sigma_{n+2} - \sigma_{n+1}) + \ldots + \alpha_{n+p}(\sigma_{n+p} - \sigma_{n+p-1}) =$$

$$= \alpha_{n+1}(\sigma_{n+1} - \sigma_n) + \alpha_{n+2}[(\sigma_{n+2} - \sigma_n) - (\sigma_{n+1} - \sigma_n)] + \ldots$$

$$\ldots + \alpha_{n+p}[(\sigma_{n+p} - \sigma_n) - (\sigma_{n+p-1} - \sigma_n)] =$$

$$= (\sigma_{n+1} - \sigma_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + (\sigma_{n+2} - \sigma_n)(\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3}) + \ldots$$

$$\ldots + (\sigma_{n+p-1} - \sigma_n)(\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}) + (\sigma_{n+p} - \sigma_n)\alpha_{n+p}$$

Так как числа α все убывающие, то все разности $(\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k-1})$ положительные, и так как по абсолютной величине

$$|\sigma_{n+p} - \sigma_n| < \rho_n$$

то по абсолютной величине предыдущая сумма будет меньше

$$\rho_n[(\alpha_{n+1} - \alpha_n) + (\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1}) + \ldots + (\alpha_{n+p+1} - \alpha_{n+p}) + \alpha_{n+p}]$$

т. е.

$$|S_{n+p} - S_n| < \rho_n \alpha_{n+p+1} \qquad (4)$$

При неопределенном возрастании значка n эта величина стремится к нулю; значит, ряд (2) сходящийся, *лишь бы* ρ_n *было конечное*, и формула (4) дает верхний предел остатка этого ряда.

§ 66. Покажем теперь, следуя Poincaré, приложения этой теоремы.

Пусть будет

$$u_n = e^{nx\sqrt{-1}}$$

тогда

$$\sigma_{n+p} - \sigma_n = e^{nx\sqrt{-1}}\left[e^{x\sqrt{-1}} + e^{2x\sqrt{-1}} + \ldots + e^{px\sqrt{-1}}\right] =$$

$$= e^{nx\sqrt{-1}}\,\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{(p+1)\sqrt{-1}\,x}}{1 - e^{x\sqrt{-1}}} = e^{(n+1)\,x\sqrt{-1}}\,\frac{1 - e^{px\sqrt{-1}}}{1 - e^{x\sqrt{-1}}} =$$

$$= e^{(n+1)x\sqrt{-1}}\,\frac{\sin\frac{px}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,\frac{\left(\cos\frac{px}{2} - \sqrt{-1}\sin\frac{px}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2} - \sqrt{-1}\sin\frac{x}{2}}$$

следовательно, модуль величины $\sigma_{n+p} - \sigma_n$ равен модулю величины

$$\frac{\sin\frac{px}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

т. е. меньше

$$\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$$

следовательно, можно брать

$$\rho_n = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

Эта величина конечная для всех значений x, кроме как для x, равных четному кратному числа π и $x = 0$.

Следовательно, если взять ряд

$$\alpha_1 e^{x\sqrt{-1}} + \alpha_2 e^{2x\sqrt{-1}} + \ldots + \alpha_n e^{nx\sqrt{-1}} + \ldots \qquad (5)$$

где числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ положительные и бесконечно убывающие, то этот ряд будет сходящийся, кроме значений x, равных четному кратному числа π и $x = 0$.

Ясно, что то же заключение относится и к рядам

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \cos 2x + \ldots + \alpha_n \cos nx + \ldots \\ &\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \ldots + \alpha_n \sin nx + \ldots \end{aligned} \qquad (6)$$

представляющим вещественную часть и коэффициент при $\sqrt{-1}$ в мнимой части предыдущего ряда.

Если взять числа x_0 и x_1 так, чтобы было

$$0 < x_0 < x < x_1 < 2\pi \tag{7}$$

то всегда найдется такое число M, не зависящее от x, что будет

$$\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} < M$$

и, значит, в пределах от x_0 до x_1 ряды (6) будут *равномерно* сходящиеся, и, значит, их можно *интегрировать* почленно.

Если, например, взять

$$\alpha_n = \frac{1}{n}$$

то получатся ряды

$$S_1 = \sum \frac{\sin nx}{n}$$

и

$$T_1 = \sum \frac{\cos nx}{n}$$

сходящиеся для промежутка $0 < x < 2\pi$, но не абсолютно.

Взяв

$$\alpha_n = \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \cdots$$

получим ряды

$$S_2 = \sum \frac{\sin nx}{n^2}; \qquad T_2 = \sum \frac{\cos nx}{n^2}$$

$$S_3 = \sum \frac{\sin nx}{n^3}; \qquad T_3 = \sum \frac{\cos nx}{n^3}$$

. . . . . .

Эти ряды равномерно и абсолютно сходящиеся, ибо абсолютные величины их членов соответственно меньше членов сходящихся рядов

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} + \cdots$$

которые буквы x не содержат.

Если взять производную от ряда S_2 почленно, то получится

$$\frac{dS_2}{dx} = \sum \frac{\cos nx}{n} = T_1$$

и так как ряд T_1 равномерно сходящийся при условии (7), то сумма T_1 представляет производную функции S_2 для всех значений буквы x, кроме $x=0$ и x, равного четному кратному числа π.

Формула $\frac{dS_3}{dx} = T_2$ имеет место без всяких ограничений; но $\frac{d^2 S_3}{dx^2}$ имеет разрыв непрерывности при $x=2k\pi$, и т. д.

Возьмем теперь ряд вида

$$S=\sum P_n \cos nx$$

в котором P_n есть целый полином относительно $\frac{1}{n}$:

$$P_n = \frac{\lambda_p}{n^p} + \frac{\lambda_{p+1}}{n^{p+1}} + \cdots + \frac{\lambda_{p+q}}{n^{p+q}}$$

где λ_p, λ_{p+1}, ... λ_{p+q} — постоянные числа, не зависящие от n. Тогда, очевидно, будет

$$S=\lambda_p T_p + \lambda_{p+1} T_{p+1} + \ldots + \lambda_{p+q} T_{p+q}$$

и, значит, исследование ряда S привелось к уже рассмотренным рядам T_p, ... T_{p+q}.

Положим теперь, что в ряде

$$S=\sum a_n \cos nx$$

коэффициенты a_n могут быть разложены в ряд по степеням $\frac{1}{n}$, так что

$$a_n = \frac{\lambda_p}{n^p} + \frac{\lambda_{p+1}}{n^{p+1}} + \cdots + \frac{\lambda_{p+q}}{n^{p+q}} + \frac{\lambda_{p+q+1}}{n^{p+q+1}} + \cdots$$

и пусть будет

$$P_n = \frac{\lambda_p}{n^p} + \frac{\lambda_{p+1}}{n^{p+1}} + \cdots + \frac{\lambda_{p+q}}{n^{p+q}}$$

$$R_n = \frac{\lambda_{p+q+1}}{n^{p+q+1}} + \cdots$$

Тогда наш ряд напишется так:

$$S=\sum P_n \cos nx + \sum R_n \cos nx$$

Первый из этих рядов представляет, как мы видели, непрерывную функцию вместе со своими $(p-2)$ первыми производными, производная же $(p-1)$-ого порядка имеет разрывы.

Что же касается ряда $\Sigma R_n \cos nx$, то по абсолютной величине будет

$$|R_n| < \frac{k}{n^{p+q+1}}$$

где k есть некоторое постоянное число. Ряд

$$\sum \frac{k}{n^{p+q+1}} \cos nx$$

равномерно сходящийся вместе со своими $(p+q-1)$ производными, то же будет и по отношению ряда $\Sigma R_n \cos nx$; значит, ряд $\Sigma a_n \cos nx$ имеет непрерывные производные до порядка $(p-2)$ и вообще может быть уподобляем рядам S_p и T_p в отношении условий сходимости и дифференцирования.

§ 67. Рассмотрим теперь, каков будет порядок относительно $\frac{1}{n}$ коэффициентов ряда Фурье при разложении разного рода функций.

Мы знаем, что если

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

то коэффициенты a_n и b_n выражаются формулами

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \cos n\xi \, d\xi \quad \text{и} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \sin n\xi \, d\xi$$

Положим, что промежуток от 0 до 2π может быть подразделен на конечное число $p+1$ таких частных промежутков, именно:

$$\text{от } 0 \text{ до } k_1; \quad \text{от } k_1 \text{ до } k_2; \quad \text{от } k_2 \text{ до } k_3; \ \ldots; \quad \text{от } k_p \text{ до } 2\pi$$

в каждом из которых функция $f(x)$ и ее производные непрерывны вплоть до концов этих промежутков, тогда мы можем, написав равенство

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{k_1} f(\xi) \cos n\xi \, d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{k_1}^{k_2} f(\xi) \cos n\xi \, d\xi + \ldots + \frac{1}{\pi} \int_{k_p}^{2\pi} f(\xi) \cos n\xi \, d\xi$$

выполнить интегрирование по частям, после чего имеем

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin n\xi}{n} f(\xi)\right]_0^{k_1} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin n\xi}{n} f(\xi)\right]_{k_1}^{k_2} + \ldots + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin n\xi}{n} f(\xi)\right]_{k_p}^{2\pi} -$$

$$- \frac{1}{\pi n}\int_0^{k_1} f'(\xi)\sin n\xi\, d\xi - \frac{1}{\pi n}\int_{k_1}^{k_2} f'(\xi)\sin n\xi\, d\xi - \ldots - \frac{1}{n\pi}\int_{k_p}^{2\pi} f'(\xi)\sin n\xi\, d\xi$$

и, пользуясь обозначением

$$\lim_{\varepsilon=0} f(k+\varepsilon) = f(k+0)$$

и

$$\lim_{\varepsilon=0} f(k-\varepsilon) = f(k-0) \qquad (\varepsilon > 0)$$

получим

$$a_n = \frac{A}{n} - \frac{b_n'}{n}$$

где

$$\pi A = \sin nk_1[f(k_1-0) - f(k_1+0)] +$$

$$+ \sin nk_2[f(k_2-0) - f(k_2+0)] + \ldots + \sin nk_p[f(k_p-0) - f(k_p+0)]$$

величина же b_n' есть коэффициент при $\sin nx$ в разложении функции, составленной из производных $f'(x)$ так же, как сама функция $f(x)$ составлена из значений $f(x)$, заданных в вышеупомянутых промежутках.

Совершенно так же получим

$$b_n = \frac{B}{n} + \frac{a_n'}{n}$$

где

$$-\pi B = -f(+0) + \cos nk_1[f(k_1-0) - f(k_1+0)] +$$

$$+ \cos nk_2[f(k_2-0) - f(k_2+0)] + \ldots + f(2\pi-0)$$

величина же a_n' есть коэффициент при $\cos nx$ в вышеупомянутом разложении функции, составленной из $f'(x)$.

Совершенно так же будем иметь

$$a_n' = \frac{A'}{n} - \frac{b_n}{n}$$

где k_1', k_2', ... k_q суть место разрыва $f'(x)$

$$\pi A' = \sin nk_1 [f'(k_1' - 0) - f'(k_1' + 0)] + \\ + \sin nk_2' [f'(k_2' - 0) - f'(k_2' + 0)] + \ldots + \sin nk_p' [f(k_q' - 0) - f(k_q' + 0)]$$

и b_n'' есть коэффициент при $\sin nx$ в разложении функции, составленной из значений $f''(x)$ для каждого из вышеуказанных промежутков.

Точно так же

$$b_n' = \frac{B'}{n} + \frac{a_n''}{n}$$

где

$$-\pi B' = -f'(+0) + \cos nk_1' [f'(k_1' - 0) - f'(k_1' + 0)] + \ldots + f'(2\pi - 0)$$

и a_n'' есть коэффициент при $\cos nx$ в разложении функции, составленной из значений $f''(x)$.

Таким образом, будет

$$a_n = \frac{A}{n} - \frac{B'}{n^2} - \frac{a_n''}{n^2}$$
$$b_n = \frac{B}{n} + \frac{A'}{n^2} - \frac{b''}{n^2}$$

следовательно, чтобы полученный ряд Фурье был *абсолютно* сходящимся, достаточно, чтобы при всяком n было

$$A = 0 \quad \text{и} \quad B = 0$$

ибо при этом условии полученный ряд будет иметь коэффициенты второго порядка относительно $\frac{1}{n^2}$ и может быть уподобляем рядам S_2 и T_2, коих члены, по абсолютной величине, меньше членов ряда

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

а тогда этот ряд будет и *равномерно* сходящимся.

Но чтобы было $A = 0$ и $B = 0$, необходимо, чтобы было

$$f(k_1 - 0) = f(k_1 + 0)$$
$$f(k_2 - 0) = f(k_2 + 0)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(k_p - 0) = f(k_p + 0)$$
$$f(2\pi - 0) = f(+0)$$

Таким образом, видим, что при указанных выше условиях *ряд Фурье, представляющий непрерывную функцию в промежутке от* 0 *до* 2π *и такую, что* $f(0)=f(2\pi)$, *будет абсолютно и равномерно сходящийся*

Отсюда следует, что если функция, представляемая рядом Фурье, или имеет разрывы непрерывности в промежутке от 0 до 2π, или значения ее, соответствующие 0 и 2π, между собою не равны, то коэффициенты в разложении будут *первого* порядка относительно $\frac{1}{n}$.

§ 68. Полученные в предыдущем параграфе выражения показывают, что коэффициенты при $\frac{1}{n}$ в составе величин a_n и b_n зависят только от величины скачков в значениях функции $f(x)$ в местах разрывов; поэтому если функцию $f(x)$ представить в виде

$$f(x)=F(x)+\varphi(x)$$

и выбрать функцию $F(x)$ так, чтобы она имела те же скачки, как и $f(x)$, то разность $\varphi(x)=f(x)-F(x)$ представится таким рядом Фурье, порядок коэффициентов которого будет не ниже второго.

Наоборот, если дано разложение некоторой функции в ряд Фурье, то ясно, что, при нахождении суммы этого ряда или при приближенном представлении этой функции первыми членами ряда, вообще говоря, можно взять, для достижения одной и той же степени точности, тем меньшее число членов, чем их порядок относительно $\frac{1}{n}$ выше.

Оказывается, что такое выделение функции $F(x)$ возможно всегда выполнить таким образом, что остаток $\varphi(x)$ представится рядом Фурье, коэффициенты которого будут сколь угодно высокого порядка относительно $\frac{1}{n}$.

Покажем теперь общий прием такого выделения.

Мы видели, что в разложении функции $f(x)$, заданной от 0 до 2π в ряд вида

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{n=\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

коэффициенты a_n и b_n выражаются так:

$$\pi a_n=\int_0^{2\pi} f(\xi)\cos n\xi\,d\xi \quad \text{и} \quad \pi b_n=\int_0^{2\pi} f(\xi)\sin n\xi\,d\xi$$

Воспользовавшись общею формулою интегрирования по частям

$$\int uv^{(k)}\,dx=uv^{(k-1)}-u'v^{(k-2)}+u''v^{(k-3)}-u'''v^{k-4}+\ldots$$

$$\ldots\pm u^{(p-1)}v^{(k-p)}\pm\int u^{(p)}v^{(k-p)}\,dx$$

получим, останавливаясь для краткости письма, на членах $\frac{1}{n^4}$,

$$\int f(\xi)\cos n\xi\, d\xi = \frac{1}{n} f(\xi)\sin n\xi + \frac{1}{n^2} f'(\xi)\cos n\xi - \frac{1}{n^3} f''(\xi)\sin n\xi -$$

$$- \frac{1}{n^4} f'''(\xi)\cos n\xi + \frac{1}{n^4}\int f^{(IV)}(\xi)\cos n\xi\, d\xi$$

$$\int f(\xi)\sin n\xi\, d\xi = -\frac{1}{n} f(\xi)\cos n\xi + \frac{1}{n^2} f'(\xi)\sin n\xi + \frac{1}{n^3} f''(\varsigma)\cos n\xi -$$

$$- \frac{1}{n^4} f'''(\xi)\sin n\xi + \frac{1}{n^4}\int f^{(IV)}(\xi)\sin n\xi\, d\xi$$

Обозначая, затем, через $k_1, k_2, k_3, \ldots k_p$ места разрывов функции $f(x)$ между пределами 0 и 2π через $k_1', k_2', \ldots k_q'$, места разрывов функции $f'(x)$, т. е. места разрывов производных тех функций, из совокупности коих для отдельных промежутков функция $f(x)$ составлена, через $k_1'', k_2'', \ldots k_r''$, то же для функции $f''(x)$, и т. д., получим

$$\begin{aligned} n\pi a_n &= A + \frac{A_1}{n} - \frac{A_2}{n^2} - \frac{A_3}{n^3} + \frac{A_4}{n^4} - \frac{b_n^{(V)}}{n^4} \\ n\pi b_n &= -B + \frac{B_1}{n} + \frac{B_2}{n^2} - \frac{B_3}{n^3} - \frac{B_4}{n^4} + \frac{a_n^{(V)}}{n^4} \end{aligned} \qquad (1)$$

где

$$A = [f(k_1 - 0) - f(k_1 + 0)]\sin nk_1 + [f(k_2 - 0) - f(k_2 + 0)]\sin nk_2 + \ldots$$
$$\ldots + [f(k_p - 0) - f(k_p + 0)]\sin nk_p$$
$$A_1 = f'(2\pi - 0) - f'(+0) + [f'(k_1' - 0) - f'(k_1' + 0)]\cos nk' + \ldots$$
$$\ldots + [f'(k_q' - 0) - f'(k_q' + 0)]\cos nk_q'$$
$$A_2 = [f''(k_1'' - 0) - f''(k_1'' + 0)]\sin nk_1'' + \ldots + [f''(k_r'' - 0) - f''(k_r'' + 0)]\sin k_r''$$
. . . . . .

$$B = f(2\pi - 0) - f(+0) + [f(k_1 - 0)] - f(k_1 + 0)]\cos nk_1 + \ldots$$
$$\ldots + [f(k_p - 0) - f(k_p + 0)]\cos nk_p$$
$$B_1 = [f'(k_1' - 0) - f'(k_1' + 0)]\sin nk' + \ldots$$
$$\ldots + [f'(k_q' - 0) - f'(k_q' + 0)]\sin nk_q'$$
$$B_2 = [f''(2\pi - 0) - f''(+0)] + [f''(k_1'' - 0) - f''(k_1'' + 0)]\cos nk_1'' + \ldots$$
$$\ldots + [f''(k_r'' - 0) - f''(k_r'' + 0)]\cos nk_r''$$
. . . . . .

$a_n^{(V)}$ и $b_n^{(V)}$ обозначают коэффициенты в разложении $f^{(V)}(x)$ по косинусам и синусам.

Полагая

$$f(2\pi-0)-f(+0)=K_0; \qquad f'(2\pi-0)-f'(+0)=K_0'$$
$$f(k_1-0)-f(k_1+0)=K_1; \qquad f'(k_1'-0)-f'(k_1'+0)=K_1'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(k_p-0)-f(k_p+0)=K_p; \qquad f'(k_q'-0)-f'(k_q'+0)=K_q' \qquad (*)$$
$$f''(2\pi-0)-f''(+0)=K_0''$$
$$f''(k_1''-0)-f''(k_1''+0)=K_1''$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f''(k_r''-0)-f''(k_r''+0)=K_r''$$

и т. д., мы можем предыдущие формулы написать так:

$$\begin{aligned}
A &= K_1\sin nk_1+K_2\sin nk_2+\ldots+K_p\sin nk_p\\
A_1 &= K_0'+K_1'\cos nk_1'+K_2'\cos nk_2'+\ldots+K_q'\cos nk_q'\\
A_2 &= K_1''\sin nk_1''+K_2''\sin nk_2''+\ldots+K_r''\sin nk_r''\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
B &= K_0+K_1\cos nk_1+K_2\cos nk_2+\ldots+K_p\cos nk_p\\
B_1 &= K_1'\sin nk_1'+K_2'\sin nk_2'+\ldots+K_q'\sin nk_q'\\
B_2 &= K_0''+K_1''\cos nk_1''+K_2''\cos nk_1''+\ldots+K_r''\cos nk''\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) показывают, что в разложении коэффициентов a_n и b_n в ряды, расположенные по степеням $\frac{1}{n}$, коэффициенты A и B при первой степени $\frac{1}{n}$ зависят только от мест разрывов и величины скачков самой функции $f(x)$, коэффициенты A_1 и B_1 при $\frac{1}{n^2}$ зависят только от мест разрывов и величины скачков первой производной $f'(x)$ той функции, которая данным рядом Фурье представляется, коэффициенты A_2 и B_2 при $\frac{1}{n^3}$ зависят только от мест разрывов и величины скачков второй производной $f''(x)$, и т. д.

Отсюда видно, что если желательно, например, выделить функцию $F(x)$ в выражении

$$f(x)=F(x)+\varphi(x) \qquad (3)$$

так, чтобы ряд Фурье, представляющий функцию $\varphi(x)$, имел бы коэффициент порядка j относительно $\frac{1}{n}$, то надо, определив места разрывов

функции $f(x)$ и первых ее $(j-1)$ производных, составить функцию $F(x)$ из отдельных кусков прямых линий и параболических кривых, уравнения коих

$$y = \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1$$
$$y = \alpha_2 x^3 + \beta_2 x^2 + \gamma_2 x + \delta$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y = \alpha_{j-2} x^{j-1} + \beta_{j-2} x^{j-2} + \ldots + \lambda$$

определенных так, чтобы величины скачков и места разрывов функции $f_1(x)$ и первых ее $(j-1)$ производных были как раз те же самые, как и найденные для заданной рядом функции $f(x)$.

Самый процесс такого нахождения функции $F(x)$ выполняется в следующей постепенности: прежде всего находим места разрывов и величины скачков самой функции $f(x)$, т. е. величины

$$k_1, k_2, \ldots k_p \quad \text{и} \quad K_0, K_1, K_2, \ldots K_p$$

воспользовавшись для этого формулами (2) и (1), которые должны иметь место тождественно, т. е. при всяком значении n. Сделав затем в предложенном ряде x равным $0, k_1, k_2, \ldots k_p$, вычисляем соответствующие значения суммы этого ряда. На основании теоремы Дирихле, эти значения будут

$$\frac{1}{2}[f(2\pi-0)+f(+0)]$$
$$\frac{1}{2}[f(k_1-0)+f(k_1+0)]$$
$$\frac{1}{2}[f(k_2-0)+f(k_2+0)]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{2}[f(k_p-0)+f(k_p+0)]$$

а так как

$$f(2\pi-0)-f(+0)=K_0$$
$$f(k_1-0)-(k_1+0)=K_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(k_p-0)-f(k_p+0)=K_p$$

и величины $K_0, K_1, \ldots K_p$ уже найдены, то найдутся и значения

$$f(+0) \quad \text{и} \quad f(2\pi-0); \quad f(k_1-0) \quad \text{и} \quad f(k_1+0); \quad \ldots \quad f(k_p-0)$$
$$\text{и} \quad f(k_p+0)$$

Наносим эти значения на график, и проводим через соответствующие точки прямые линии, тогда функция $F_1(x)$, составленная из этих прямо-

линейных участков, и будет такою, которая имеет те же разрывы, те же скачки и те же самые значения в местах разрывов и при $x=0$ и при $x=2\pi$, как и предложенная $f(x)$. Иными словами, функция $F_1(x)$ определяется так:

$$\begin{aligned}
&F_1(x)=f(+0)+\frac{x}{k_1}[f(k_1-0)-f(+0)] && \text{для} \quad 0<x<k_1\\
&F_1(x)=f(k_1+0)+\frac{x-k_1}{k_2-k_1}[f(k_2-0)-f(k_1+0)] && \text{для} \quad k_1<x<k_2\\
&F_1(x)=f(k_2+0)+\frac{x-k_2}{k_3-k_2}[f(k_3-0)-f(k_2+0)] && \text{для} \quad k_2<x<k_3 \qquad (4)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&F_1(x)=f(k_p+0)+\frac{x-k_p}{2\pi-k_p}[f(2\pi-0)-f(k_p+0)] && \text{для} \quad k_p<x<2\pi
\end{aligned}$$

Если взять

$$F(x)=F_1(x)$$

т. е. положить

$$f(x)=F_1(x)+\varphi_1(x)$$

то функция

$$\varphi_1(x)=f(x)-F_1(x)$$

будет непрерывна на всем протяжении от $x=0$ до $x=2\pi$, и вместе с тем будет

$$\varphi_1(0)=0 \quad \text{и} \quad \varphi_1(2\pi)=0$$

следовательно, при разложении в ряд Фурье функции $\varphi_1(x)$, коэффициенты получаются по меньшей мере второго порядка относительно $\frac{1}{n}$.

Отсюда видно, что стоит только разложить функцию $F_1(x)$ в ряд Фурье и полученное разложение вычесть из заданного, остаток и будет функцией $\varphi(x)$.

Пусть полученный таким образом ряд для

$$\varphi_1(x)=f(x)-F_1(x)$$

будет

$$\varphi_1(x)=c_0+\sum_{n=1}^{n=\infty}c_n\cos nx+\sum_{n=1}^{n=\infty}d_n\sin nx \qquad (5)$$

коэффициенты c_n и d_n будут, вообще говоря, второго порядка относи-

тельно $\frac{1}{n}$. Выполнив дифференцирование ряда, получим разложение $\varphi'_1(x)$, в коем коэффициенты будут первого порядка относительно $\frac{1}{n}$.

Совершенно подобно предыдущему представляем $\varphi_1'(x)$ в виде

$$\varphi_1'(x) = \psi_1(x) + \omega_1(x) \tag{6}$$

так чтобы функция $\psi_1(x)$ состояла из прямолинейных отрезков и имела те же самые скачки и те же места разрывов, как и $\varphi_1'(x)$; тогда функция $\omega_1(x)$ будет представляться рядом, коего коэффициенты второго порядка относительно $\frac{1}{n}$.

Интегрируя равенство (6), получим функцию

$$\varphi_1(x) = \int \psi_1(x)\,dx + \int \omega_1(x)\,dx$$

При вычислении интеграла

$$\int \psi_1(x)\,dx$$

обнаруживается, что вместо прямолинейного отрезка $ax + b$ получится соответствующая ему парабола

$$\frac{1}{2}ax^2 + bx + C$$

Постоянные произвольные C, вводимые таким интегрированием, определятся из того условия, что функция $\varphi_1(x)$ непрерывна и частные ее значения, соответствующие местам разрывов функции $\psi_1(x)$, найдутся по формуле (5).

Интеграл же

$$\int \omega_1(x)\,dx$$

будет представлен рядом, коего коэффициенты третьего порядка относительно $\frac{1}{n}$.

Полагая

$$\int \psi_1(x)\,dx = F_2(x) \quad \text{и} \quad \int \omega_1(x)\,dx = \varphi_2(x)$$

получим равенство

$$f(x) = F_1(x) + F_2(x) + \varphi_2'(x)$$

Очевидно, что если взять

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

то в равенстве

$$f(x) = F(x) + \varphi_2(x)$$

ряд, представляющий функцию $\varphi_2(x)$, будет иметь коэффициенты третьего порядка относительно $\frac{1}{n}$, разрывная же функция $F(x)$, заданная чертежом или аналитически, для отдельных промежутков будет состоять из прямолинейных отрезков и отрезков парабол.

Функцию $\varphi_2(x)$ продифференцируем дважды; тогда ряд, представляющий $\varphi_2''(x)$, будет иметь коэффициенты первого порядка; определив места разрывов и величины скачков функции $\varphi_2''(x)$ и составив функцию $\psi_2(x)$ из прямолинейных отрезков так, чтобы она имела те же места разрывов и те же скачки, как и $\varphi_2''(x)$, делаем

$$\varphi_2''(x) = \psi_2(x) + \omega_2(x)$$

Это равенство интегрируем два раза подряд почленно, причем постоянные произвольные определяем по частным значениям функции $\varphi_2(x)$ и ее производной; получим выражение вида

$$\varphi_2(x) = I_3(x) + \varphi_3(x)$$

в котором $\varphi_3(x)$ будет представлена рядом с коэффициентами четвертого порядка относительно $\frac{1}{n}$.

Продолжая таким образом, можем, очевидно, дойти до любого порядка.

Заметим, что из тех же выражений следует, что если функция $f(x)$ составлена из отдельных частей, каждая из которых есть целая функция относительно x, то коэффициенты a_n и b_n будут целыми функциями от $\frac{1}{n}$, степени коих не более как *единицею* выше, нежели наивысшая степень x.

Так, например, если бы $f(x)$ была задана условиями

$$f(x) = ax + b \quad \text{для } x \text{ от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{4} \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(x) = x^2 \quad \text{для } x \text{ от } \frac{\pi}{4} \text{ до } \frac{\pi}{2} \qquad \left(\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = 0 \quad \text{для } x \text{ от } \frac{\pi}{2} \text{ до } 2\pi \qquad \left(\frac{\pi}{2} < x < 2\pi\right)$$

то коэффициенты a_n и b_n были бы вида

$$\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}$$

Применяя вышеописанный процесс, мы получили бы $\varphi_3(x)=0$ на всем протяжении от $x=0$ до $x=2\pi$ и, значит, по данному разложению нашли бы и саму функцию $f(x)$.

Возьмем, например, ряд

$$S_1=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots+\frac{\sin nx}{n}+\ldots$$

который, как мы видели, сходящийся для всех значений x между 0 и 2π. Так как и при $x=0$ и при $x=2\pi$ величина $S_1=0$, то эта функция *конечна* на всем протяжении от $x=0$ до $x=2\pi$, *включая* эти пределы, и наши формулы *применимы*.

Имеем

$$n\pi a_n=0=K_1\sin nk_1+K_2\sin nk_2+\ldots$$
$$n\pi b_n=\pi=-[K_0+K_1\cos nk_1+\ldots]$$

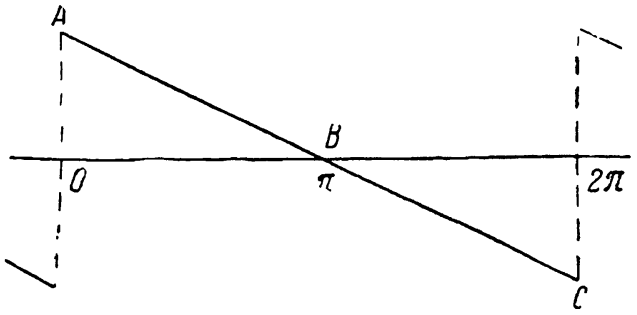
Из второго уравнения следует

$$K_0=f(2\pi-0)-f(+0)=-\pi;\quad K_1=K_2\ldots=0$$

Следовательно, функция $f(x)$ в промежутке от $x=0$ до $x=2\pi$ мест разрыва не имеет, но разность значений $f(2\pi-0)-f(+0)=-\pi$.

Так как, при $x=\pi$, $f(x)=0$, то если мы возьмем за функцию $F_1(x)$ участок прямой, проходящий через точки A, B и C, то функция (фиг. 36)

$$\varphi(x)=f(x)-F_1(x)$$



Фиг. 36.

не будет иметь разрывов, и так как $\varphi(0)=\varphi(2\pi)$, то разложение $\varphi(x)$ может иметь только коэффициенты второго порядка относительно $\frac{1}{n}$.

Итак, функция

$$F_1(x)=\frac{\pi-x}{2}\quad\text{для}\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi$$

составив ее разложение, увидим, что

$$F_1(x)=f(x) \quad \text{для} \quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi$$

и что $\varphi(x)=0$.

Необходимо иметь в виду, что во всех этих рассуждениях предполагается, что сама функция $f(x)$ и ее производные до рассматриваемого порядка $(j-1)$ остаются конечными для всех значений x между 0 и 2π, включая и эти пределы, поэтому, если бы мы взяли ряд

$$f(x)=\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{2}+\ldots+\frac{\cos nx}{n}+\ldots$$

то для этого ряда наши рассуждения были бы неприменимы, ибо, при $x=0$ и $x=2\pi$, $f(x)=\infty$, и, значит, формулы, коими мы пользовались, неприменимы.

§ 69. В приложениях гораздо чаще встречаются ряды, расположенные или только по синусам, или только по косинусам аргументов кратных $\frac{\pi x}{l}$, предполагая, что функция $f(x)$ задана от $x=0$ до $x=l$.

В этом случае коэффициенты разложений

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

и

$$f(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

выражаются формулами

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)\,d\xi$$

и

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi; \qquad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi$$

Поступая совершенно подобно предыдущему, получим

$$\begin{aligned}\frac{n\pi a_n}{2}&=A+\frac{l}{\pi}\frac{A_1}{n}-\frac{l^2}{\pi^2}\frac{A_2}{n^2}-\frac{l^3}{\pi^3}\frac{A_3}{n^3}+\ldots\\ \frac{n\pi b_n}{2}&=-B+\frac{l}{\pi}\frac{B_1}{n}+\frac{l^2}{\pi^2}\frac{B_2}{n_2}-\frac{l^3}{\pi^3}\frac{B_3}{n^3}-\ldots\end{aligned} \qquad (7)$$

причем

$$A = [f(k_1 - 0) - f(k_1 + 0)] \sin\frac{n\pi k_1}{l} + \ldots + [f(k_p - 0) - f(k_p + 0)] \sin\frac{n\pi k_p}{l}$$

$$A_1 = f'(l - 0)\cos n\pi - f'(+0) + [f'(k_1' - 0) - f'(k_1' + 0)]\cos\frac{n\pi k_1'}{l} + \ldots$$

$$\ldots + [f'(k_q' - 0) - f(k_q + 0)]\cos\frac{n\pi k_q}{l}$$

$$A_2 = [f''(k_1'' - 0) - f''(k_1'' + 0)]\sin\frac{n\pi k_1''}{l} + \ldots$$

$$\ldots + [f(k_r'' - 0) - f(k_r'' + 0)]\sin\frac{n\pi k_r''}{l}$$

. . . . . .

$$B = f(l - 0)\cos n\pi - f(+0) + [f(k_1 - 0) - f(k_1 + 0)]\cos\frac{n\pi k_1}{l} + \ldots$$

$$\ldots + [f(k_p - 0) - f(k_p + 0)]\sin\frac{n\pi k_p}{l}$$

$$B_1 = [f'(k_1' - 0) - f'(k_1' + 0)]\sin\frac{n\pi k_1'}{l} + [f'(k_2' - 0) - f'(k_2' + 0)]\sin\frac{n\pi k_2'}{l} + \ldots$$

$$B_2 = f''(l - 0)\cos n\pi - f(+0) + [f''(k_1'' - 0) - f''(k_1'' + 0)]\cos\frac{n\pi k''}{l} + \ldots$$

. . . . . .

Полагая, подобно тому как в § 68,

$$K_0 = f(l - 0)\cos n\pi - f(+0); \qquad K_0' = f'(l - 0)\cos n\pi - f'(+0)$$

$$K_1 = f(k_1 - 0) - f(k_1 + 0); \qquad K_1' = f'(k_1' - 0) - f'(k_1' + 0)$$

. . . . . .

$$K_p = f(k_p - 0) - f(k_p + 0); \qquad K_q' = f'(k_q' - 0) - f'(k_q' + 0)$$

и т. д., мы предыдущие формулы напишем таким образом:

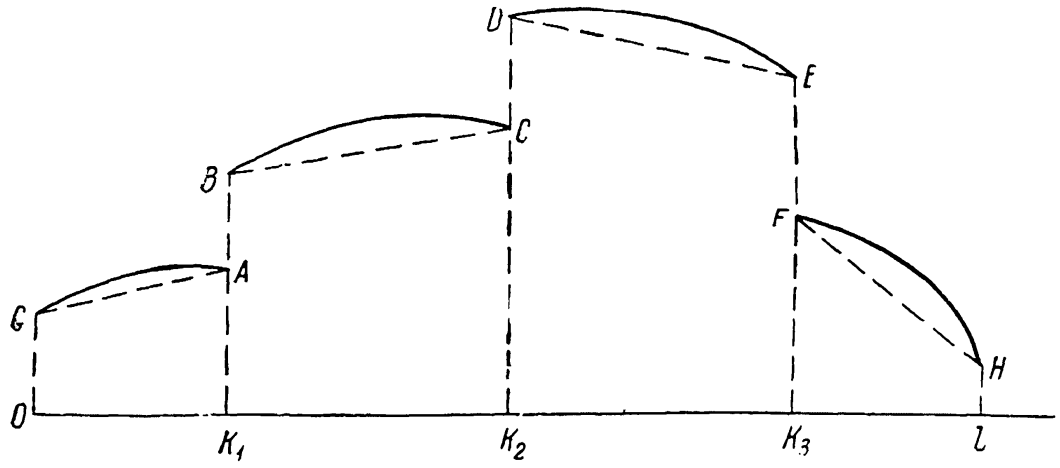
$$\begin{aligned}
A &= K_1 \sin\frac{n\pi k_1}{l} + K_2 \sin\frac{n\pi k_2}{l} + \ldots + K_p \sin\frac{n\pi k_p}{l} \\
A_1 &= K_0' + K_1' \cos\frac{n\pi k_1'}{l} + \ldots + K_q' \cos\frac{n\pi k_q'}{l} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B &= K_0 + K_1 \cos\frac{n\pi k_1}{l} + K_2 \cos\frac{n\pi k_2}{l} + \ldots + K_p \cos\frac{n\pi k_p}{l} \\
B_1 &= K_1' \sin\frac{n\pi k_1'}{l} + K_2' \sin\frac{n\pi k_2'}{l} + \ldots + K_q' \sin\frac{n\pi k_q'}{l}
\end{aligned} \qquad (8)$$

. . . . . .

В остальном надо поступать совершенно так, как сказано выше. Так, положим что дан ряд, представляющий функцию $f(x)$:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

заданную в пределах от $x=0$ до $x=l$. Пусть эта функция изображается чертежом (фиг. 37).



Фиг. 37.

Так как в пределах между 0 и l эта функция имеет разрывы при $x=k_1$, $x=k_2$, $x=k_3$, соответственно равные: $-K_1=AB=f(k_1+0)-f(k_1-0)$; $-K_2=CD=f(k_2+0)-f(k_2-0)$; $-K_3=-FE=f(k_3+0)-f(k_3-0)$, то, составим, определив величину и места этих разрывов, функцию $F_1(x)$, которая была бы такова:

$$F_1(x)=f(+0)+\frac{x}{k_1}[f(k_1-0)-f(+0)] \quad \text{для} \quad 0<x<k_1$$

$$F_1(x)=f(k_1+0)+\frac{x-k_1}{k_2-k_1}[f(k_2-0)-f(k_1+0)] \quad \text{для} \quad k_1<x<k_2$$

$$F_1(x)=f(k_2+0)+\frac{x-k_2}{k_3-k_2}[f(k_3-0)-f(k_2+0)] \quad \text{для} \quad k_2<x<k_3$$

$$F_1(x)=f(k_3+0)+\frac{x-k_3}{l-k_3}[f(l-0)-f(k_3+0)] \quad \text{для} \quad k_3<x<l$$

т. е. $F_1(x)$ представляется изображенной на чертеже линией, составленной из прямолинейных участков так, чтобы скачки были как раз равны и на тех же местах, как у заданной функции.

Составленную таким образом функцию $F_1(x)$ разлагаем в ряд Фурье по синусам аргументов, кратных $\frac{\pi x}{l}$, и вычитаем этот ряд из предложен-

ного; останется такой ряд, в котором коэффициенты — второго порядка относительно $\frac{1}{n}$; обозначим эту функцию через $\varphi(x)$. Составляем производную $\varphi'(x)$; дифференцируя этот ряд почленно, получим ряд, подобный предложенному. Находим его места разрывов и величину скачков и, подобно предыдущему, составляем функцию $\varphi_1(x)$, которая имела бы те же места разрывов, как и $\varphi(x)$ и состояла бы из прямолинейных участков. Тогда будет

$$\varphi'(x) = \varphi_1(x) + \psi(x)$$

причем $\psi(x)$ будет представлять функцию, разложение которой по косинусам имеет коэффициенты не ниже второго порядка относительно $\frac{1}{n}$.

Разлагаем $\varphi_1(x)$ в ряд Фурье и определяем разложение $\psi(x)$, взяв разность рядов

$$\varphi'(x) - \varphi_1(x) = \psi(x)$$

Интегрируя, имеем

$$\varphi(x) = \int \varphi_1(x)\,dx + \int \psi(x)\,\partial x$$

Интеграл

$$\int \varphi_1(x)\,dx$$

будет состоять из соответствующего прямолинейного участка вида $\alpha x + \beta$ для участков, где $\varphi_1(x)$ изображается прямою, параллельною оси x; где же $\varphi_1(x)$ изображалось прямой $ax + b$, будет $\frac{ax^2}{2} + bx + \gamma$; постоянные произвольные определим по значениям функции $\varphi(x)$ в местах разрывов ее производной. Таким образом, выделим из нашего разложения функцию

$$F_1(x) + \int \varphi_1(x)\,dx$$

такую, что остаток будет представлять ряд с коэффициентами третьего порядка относительно $\frac{1}{n}$. Таким образом, можно продолжать до тех пор, пока получится такой ряд, вычисление суммы которого с требуемой степенью точности уже не представит затруднений, ибо он будет достаточно быстро сходящимся.

Пример 1. Возьмем ряд

$$f(x) = \frac{8\beta}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{l} - \ldots\right]$$

который мы имели в § 42 и для которого коэффициент b_n выражается формулою

$$b_n = \frac{8\beta}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

и положим, что мы хотим найти ту функцию, которая этим рядом представляется.

Так как коэффициент b_n второго порядка относительно $\frac{1}{n}$, то самая функция $f(x)$ от $x=0$ до $x=l$ непрерывна.

Составляем производную

$$f'(x)=\frac{8\beta}{\pi}\cdot\frac{1}{l}\left[\frac{1}{1}\cos\frac{\pi x}{l}-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{l}+\ldots\right]=\frac{8\beta}{\pi l}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cos\frac{n\pi x}{l}$$

По формуле (7) имеем

$$\frac{n\pi a_n}{} = \frac{4\beta}{l}\sin\frac{n\pi}{2}=\left\{\left[f'(k_1-0)-f'(k_1+0)\right]\sin\frac{nk_1\pi}{l}+\ldots\right\}$$

так как это равенство должно иметь место тожественно, то будет

$$\frac{\pi n k_1}{l}=\frac{n\pi}{2},\ \text{т. е. } k_1=\frac{l}{2}$$

$$f'(k_1-0)-f'(k_1+0)=\frac{4\beta}{l}$$

По теореме Дирихле, для места разрыва $k_1=\frac{l}{2}$ имеем

$$\frac{1}{2}\left[f'(k_1-0)+f'(k_1+0)\right]=\frac{8\beta}{l}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=0$$

Отсюда следует

$$f'(k_1-0)=\frac{2\beta}{l};\quad f'(k_1+0)=-\frac{2\beta}{l}$$

Значит, за $F_1'(x)$ следует взять функцию

$$F_1'(x)=\quad\frac{2\beta}{l}\quad\text{для}\quad 0<x<\frac{l}{2}$$

$$F_1'(x)=-\frac{2\beta}{l}\quad\text{для}\quad\frac{l}{2}<x<l$$

т. е. $F_1'(x)$ изображается графически чертежом (фиг. 38).

И в самом деле, разлагая $F_1'(x)$ в ряд Фурье, получаем

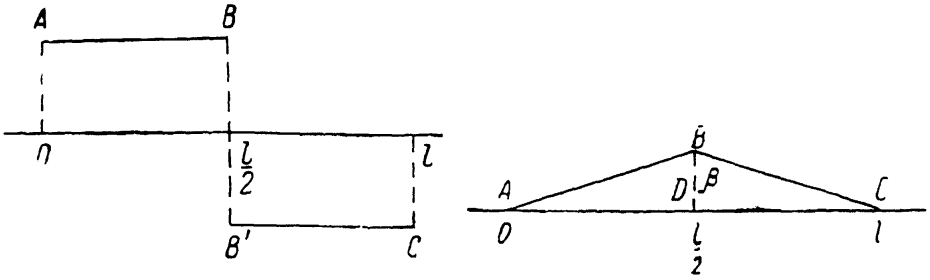
$$F_1'(x)=\frac{4\beta}{\pi l}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cos\frac{n\pi x}{l}$$

т. е.

$$f'(x)=F_1'(x)$$

Значит,

$$f(x)=F_1(x)+C$$



Фиг. 38—39.

Но, интегрируя величину $F_1'(x)$, видим, что для участка от $x=0$ до $x=\frac{l}{2}$ получится

$$F_1(x)=\frac{2\beta}{l}x \quad \text{для} \quad 0<x<\frac{l}{2}$$

так как при $x=0$ должно быть $F_1(x)=0$.

Для участка от $\frac{l}{2}$ до l получится

$$F_1(x)=-\frac{2\beta}{l}x+C_1$$

и так как при $x=l$ должно быть $F_1(x)=0$, то

$$C_1=2\beta$$

и, значит,

$$F_1(x)=\frac{2\beta}{l}(l-x) \quad \text{для} \quad \frac{l}{2}<x<l$$

Таким образом, будет

$$f(x)=F_1(x)=\frac{2\beta}{l}x \qquad \text{для} \quad 0<x<\frac{l}{2}$$

$$f(\lambda)=F(x)=\frac{2\beta}{l}(l-x) \quad \text{для} \quad \frac{l}{2}<x<l$$

так что графически $f(x)$ изображается чертежом (фиг. 39), т. е. ломаною ABC, причем стрелка $BD=\beta$ и $AD=DC=\frac{l}{2}$.

Нетрудно видеть, что когда коэффициенты в ряде Фурье выражаются целыми функциями от $\frac{1}{n}$, то, поступая подобным образом, мы составим

функцию, им представляемую, и она на отдельных участках будет выражаться кривыми, уравнения коих будут вида

$$y = ax^k + bx^{k-1} + \ldots + h$$

где k — целое и положительное число.

Пример 2. Возьмем теперь ряд, у которого коэффициенты не суть целые функции от $\frac{1}{n}$. Пусть будет

$$f(x) = a\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

и желательно усилить быстроту сходимости этого ряда.

Разлагаем коэффициент b_n по степеням $\frac{1}{n^2}$ и остановимся на члене с $\frac{1}{n^5}$, тогда имеем

$$\frac{n}{n^2-1^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}\right]$$

следовательно, предложенный ряд можно написать так:

$$S = -\frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1^2}\sin\frac{n\pi x}{l} = S_1 + S_3 + \Omega$$

причем

$$S_1 = -\frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$S_3 = -\frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\Omega = -\frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^5}\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

Обозначим функцию, представляемую рядом S_1, через $F_1(x)$; тогда для ряда S_1 имеем

$$\frac{n\pi}{2} b_n = -a\cos\frac{n\pi}{2} =$$

$$= -\left[F_1(l-0)\cos n\pi - F_1(+0) + [F_1(k_1-0) - F_1(k_1+0)]\cos\frac{n\pi k_1}{l} + \ldots\right]$$

откуда следует

$$F_1(l-0)=0; \quad F_1(+0)=0$$

$$\frac{n\pi}{2} = \frac{n\pi k_1}{l}$$

т. е.

$$k_1 = \frac{l}{2}$$

$$F_1(k_1-0) - F_1(k_1+0) = a$$

т. е. что функция $F_1(x)$ при $x = k_1 = \frac{l}{2}$ делает скачок, величина коего есть a.

Подставляя $x = k_1 = \frac{l}{2}$ в ряд S_1 и пользуясь теоремой Дирихле, получим

$$F_1(k_1-0) + F_1(k_1+0) = 0$$

Таким образом, имеем уравнения

$$F_1(k_1-0) - F_1(k_1+0) = a$$
$$F_1(k_1-0) + F_1(k_1+0) = 0$$

откуда следует

$$F_1(k_1-0) = \frac{a}{2} \quad \text{и} \quad F_1(k_1+0) = -\frac{a}{2}$$

а так как

$$F_1(+0)=0 \quad \text{и} \quad F_1(l-0)=0$$

то за $F_1(x)$ берем функцию

$$F_1(x) = \frac{a}{l}x \qquad \text{для} \quad 0 < x < \frac{l}{2}$$

$$F_1(x) = \frac{a}{l}(x-l) \qquad \text{для} \quad \frac{l}{2} < x < l$$

и представляем ее в виде ряда Фурье, расположенного, как и предложенный, по синусам аргументов, кратных от $\frac{\pi x}{l}$.

Будем иметь

$$b_{1,n}=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{a}{l}\xi\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi+\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}\frac{a}{l}(\xi-l)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi=$$

$$=\frac{2a}{l^2}\int_0^{l}\xi\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi-\frac{2a}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi=-\frac{2a}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}$$

следовательно,

$$F_1(x)=S_1=-\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

Таким образом, будет

$$f(x)-\frac{a}{2}\sin\frac{\pi x}{l}-F_1(x)=S_3+\Omega$$

Сумма

$$S_3=-\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

представляет функцию, непрерывную вместе с первою своею производною; поэтому, дифференцируя эту функцию дважды, получим

$$S_3''=+\frac{2a\pi}{l^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}=F_3''(x)$$

а эта функция, на основании сказанного о функции $F_1(x)$, определяется равенствами

$$F_3''(x)=-\frac{a\pi^2}{l^3}x \qquad \text{для} \quad 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}$$

$$F_3''(x)=-\frac{a\pi^2}{l^3}(x-l) \qquad \text{для} \quad \frac{l}{2}\leqslant x\leqslant l$$

Значит,

$$F_3(x) = -\frac{a\pi^2}{l^3}\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}$$

$$F_3(x) = -\frac{a\pi^2}{l^3}\frac{(x-l)^3}{6} + C_3(x-l) + C_4 \quad \text{для} \quad \frac{l}{2} \leqslant x \leqslant l$$

Для определения постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 имеем условия

$$F_3(0) = 0; \quad F_3(l) = 0$$

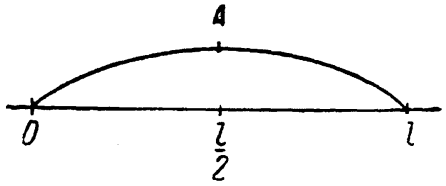
$$\left(-\frac{a\pi^2}{l^3}\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2\right)_{x=\frac{l}{2}} = \left(-\frac{a\pi^2}{l^3}\frac{(x-l)^3}{6} + C_3(x-l) + C_4\right)_{x=\frac{l}{2}}$$

$$\left(-\frac{a\pi^2}{l^3}\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2\right)'_{x=\frac{l}{2}} = \left(-\frac{a\pi^2}{l^3}\frac{(x-l)^3}{6} + C_3(x-l) + C_4\right)'_{x=\frac{l}{2}}$$

ибо функция $F_3(x)$ сама и первая ее производная непрерывны для $0 < x < l$ и вместе с тем $F_3(0) = F_3(l) = 0$.

Таким образом, будет

$$C_2 = C_4 = 0; \quad C_1 = C_3 = \frac{a\pi^2}{24l}$$



Фиг. 40.

и, значит, функция $F_3(x)$ такова:

$$F_3(x) = -\frac{a\pi^2}{6l^3}x^3 + \frac{a\pi^2}{24l}x \quad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}$$

$$F_3(x) = -\frac{a\pi^2}{6l}(x-l)^3 + \frac{a\pi^2}{24l}(x-l) \quad \text{для} \quad \frac{l}{2} < x < l$$

так что $F_3(x)$ представляется графически чертежом (фиг. 40). Полагая

$$f(x) = \frac{a}{2}\sin\frac{\pi x}{l} + F_1(x) + F_3(x) + \Omega$$

где $F_1(x)$, $F_3(x)$ суть найденные выше функции, мы сведем вычисление значений функции $f(x)$ к вычислению значений функций $F_1(x)$, $F_3(x)$, которое весьма просто, и к вычислению суммы Ω, представляемой рядом, коего коэффициенты — пятого порядка относительно $\frac{1}{n}$, тогда как в предложенном ряду они были первого порядка.

§ 70. К такому приему выделения из данного ряда тех его членов, которые дают разрывы или в самой функции, или в ее производных, приходится по необходимости прибегать в том случае, когда надо вычислить или представить в виде ряда производную первого или высшего порядка данной функции и когда непосредственно этой производной дифференцированием предложенного ряда найти нельзя.

Поясним это на примере.

Пусть функция $f(x)$, например, задана так:

$$f(x)=a\sin\frac{\pi x}{l} \quad \text{для} \quad 0<x<\frac{l}{2}$$

$$f(x)=0 \quad \text{для} \quad \frac{l}{2}<x<l$$

Очевидно, что такая функция лишь в месте разрыва, т. е. при $x=\frac{l}{2}$, не имеет производной, для всех же остальных значений x существует производная *любого* порядка.

Так, например, для предложенной функции производная второго порядка была бы

$$f''(x)=-\frac{\pi^2 a}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l} \quad \text{для} \quad 0<x<\frac{l}{2}$$

$$f''(x)=0 \quad \text{для} \quad \frac{l}{2}<x<l$$

между тем, ряд Фурье, представляющий данную функцию, имел бы свои коэффициенты *первого* порядка относительно $\frac{1}{n}$; если бы его дважды продифференцировать почленно, то получился бы ряд, коего коэффициенты были бы первого порядка относительно n, т. е. коего члены неопределенно возрастали бы, — такой ряд, как расходящийся, не имел бы смысла.

Между тем, если представить эту функцию так:

$$f(x)=F_1(x)+F_2(x)+\varphi(x)$$

где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ были бы те функции, которые имеют те же разрывы, как $f(x)$ и $f'(x)$, и, значит, $\varphi(x)$ имело бы разложение, коего коэффициенты были бы третьего порядка относительно $\frac{1}{n}$, тогда можно бы написать

$$f''(x)=F_1''(x)+F_2''(x)+\varphi''(x)$$

причем $F_1''(x)$ и $F_2''(x)$ определялись бы пользуясь *заданием* функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$, а не дифференцированием тех рядов, коими они представляются, $\varphi''(x)$ — дифференцированием соответствующего ему ряда почленно.

Так, возьмем наш пример, т. е.

$$f(x)=a\sin\frac{\pi x}{l} \quad \text{для} \quad 0<x<\frac{l}{2}$$

$$f(x)=0 \quad \text{для} \quad \frac{l}{2}<x<l$$

тогда ряд для $f(x)$ такой:

$$f(x)=\frac{a}{2}\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

который рассмотрен в предыдущем параграфе, и мы имели равенство

$$f(x)=\frac{a}{2}\sin\frac{\pi x}{l}+F_1(x)+S_3+\Omega$$

Но

$$S_3+\Omega=-\frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n(n^2-1)}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

функция же $F_1(x)$ состоит из прямолинейных участков, и, следовательно, производная второго порядка от нее равна нулю, кроме места разрыва, где этой производной нет.

Таким образом, имеем

$$f(x)=\frac{a}{2}\sin\frac{\pi x}{l}+F_1(x)-\frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n(n^2-1)}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

и двукратное дифференцирование дает

$$f''(x)=-\frac{a}{2}\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{2a}{\pi}\frac{\pi^2}{l^2}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin\frac{n\pi x}{l}=$$

$$=-\frac{\pi}{l^2}\left[\frac{a}{2}\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{2a}{\pi}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]=-f(x)\frac{\pi^2}{l^2}$$

и значит,

$$f''(x) = -\frac{a\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l} \quad \text{для} \quad 0 < x < \frac{l}{2}$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{для} \quad \frac{l}{2} < x < l$$

при $x = \frac{l}{2}$ функции $f''(x)$ имеет разрыв.

Если бы функция $f(x)$ нам была неизвестна, то полученное уравнение

$$f''(x) + \frac{\pi^2}{l^2} f(x) = 0$$

послужило бы для ее определения.

В самом деле, из этого уравнения следует

$$f(x) = C_1 \sin\frac{\pi x}{l} + C_2 \cos\frac{\pi x}{l}$$

причем C_1 и C_2 суть произвольные постоянные, которые для разных участков функции $f(x)$ могут иметь и различные значения, ибо функция $f(x)$ при изменении x от 0 до l имеет разрывы.

Значения постоянных C_1 и C_2 должны быть определены по значениям функции для начала и конца каждого участка.

Так, мы нашли в § 69, что функция $f(x)$ имеет разрыв при $x = \frac{l}{2}$, следовательно первый ее участок простирается от $x = 0$ до $x = \frac{l}{2}$. Для этого промежутка мы видели, что

$$f(0) = 0 \quad \text{и} \quad f\left(\frac{l}{2} - 0\right) = a$$

следовательно

$$C_1 = a \quad \text{и} \quad C_2 = 0$$

и, значит, будет

$$f(x) = a\sin\frac{\pi x}{l} \quad \text{для} \quad 0 < x < \frac{l}{2}$$

Второй участок нашей функции от $x = \frac{l}{2}$ до $x = l$. В этом промежутке, как мы видели,

$$f\left(\frac{l}{2} + 0\right) = 0 \quad \text{и} \quad f(l) = 0$$

следовательно

$$C_1 = 0 \quad \text{и} \quad C_2 = 0$$

т. е.

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad \frac{l}{2} < x < l$$

Таким образом, функция $f(x)$ определена вполне.

При пользовании рядами Фурье для решения вопросов теории упругости и сопротивления материалов, необходимо всегда иметь в виду сказанное в этом параграфе о вычислении производных функций, представленных такими рядами.

Заметим также, что изложенный прием усиления быстроты сходимости рядов Фурье и нахождения производных от функций, ими представляемых, может служить для доказательства или для проверки того, что представляемая рядом функция действительно удовлетворяет тому дифференциальному уравнению, как решение коего она найдена, хотя бы самый ряд и нельзя было дифференцировать почленно требуемое число раз.

Предлагается в виде задачи сделать такую поверку для величины u, данной на стр. 170 и представляющей решение задачи о колебании струны.

§ 71. Обратив внимание на вывод формул (7), нетрудно убедиться, что все сказанное в §§ 67—70 относится и вообще к рядам вида

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos \frac{\omega_1 x}{l} + a_2 \cos \frac{\omega_2 x}{l} + a_3 \cos \frac{\omega_3 x}{l} + \ldots$$

и

$$F(x) = b_1 \sin \frac{\rho_1 x}{l} + b_2 \sin \frac{\rho_2 x}{l} + b_3 \sin \frac{\rho_3 x}{l} + \ldots$$

в которых

$$\omega_1, \ \omega_2, \ \ldots \ \omega_n, \ \ldots \ \rho_1, \ \rho_2, \ \ldots \ \rho_n, \ \ldots$$

суть корни трансцендентных уравнений

$$\varphi(\omega) = 0 \tag{1}$$

и

$$\psi(\rho) = 0 \tag{2}$$

причем имеют место равенства

$$\int_0^l \cos \omega_i \frac{x}{l} \cos \omega_j \frac{x}{l} \, dx = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j \tag{3}$$

и

$$\int_0^l \sin \rho_i \frac{x}{l} \sin \rho_j \frac{x}{l} \, dx = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j \tag{4}$$

так что коэффициенты a_n и b_n определяются равенствами

$$a_n = \frac{\int_0^l f(x)\cos\frac{\omega_n x}{l}\,dx}{\int_0^l \cos^2\frac{\omega_n x}{l}\,dx} = K_n \int_0^l f(x)\cos\frac{\omega_n x}{l}\,dx \tag{5}$$

$$b_n = \frac{\int_0^l F(x)\sin\frac{\rho_n x}{l}\,dx}{\int_0^l \sin^2\frac{\rho_n x}{l}\,dx} = L_n \int_0^l F(x)\sin\frac{\rho_n x}{l}\,dx \tag{6}$$

где K_n и L_n будут некоторые определенные функции, первая — от ω_n вторая — от ρ_n.

Посмотрим теперь, каков должен быть вид уравнений $\varphi(\omega)=0$ и $\psi(\rho)=0$, чтобы формулы (3) и (4) и их следствия (5) и (6) имели место.

Имеем

$$2\int_0^l \cos\frac{\omega_i x}{l}\cos\frac{\omega_j x}{l}\,dx = \int_0^l \left(\cos\frac{\omega_i-\omega_j}{l}x + \cos\frac{\omega_i+\omega_j}{l}x\right)dx =$$

$$= l\frac{\sin(\omega_i-\omega_j)}{\omega_i-\omega_j} + l\frac{\sin(\omega_i+\omega_j)}{\omega_i+\omega_j}$$

Чтобы эта величина равнялась нулю, когда $\omega_i \neq \omega_j$, необходимо и достаточно, чтобы было

$$(\omega_i+\omega_j)\sin(\omega_i-\omega_j) + (\omega_i-\omega_j)\sin(\omega_i+\omega_j) = 0$$

Это уравнение можно написать так:

$$\omega_i[\sin(\omega_i-\omega_j)+\sin(\omega_i+\omega_j)] + \omega_j[\sin(\omega_i-\omega_j)-\sin(\omega_i+\omega_j)] = 0$$

или

$$\omega_i\cos\omega_j\sin\omega_i - \omega_j\sin\omega_j\cos\omega_i = 0$$

откуда следует

$$\frac{\omega_i\sin\omega_i}{\cos\omega_i} = \frac{\omega_j\sin\omega_j}{\cos\omega_j} = \alpha$$

где α есть любая постоянная величина.

Таким образом, уравнение $\varphi(\omega)=0$ есть такое:

$$\omega\sin\omega - \alpha\cos\omega = 0 \tag{1'}$$

или иначе

$$\omega\,\mathrm{tg}\,\omega = \alpha \tag{1''}$$

Совершенно так же из условия (4) получим

$$2\int_0^l \sin\frac{\rho_i x}{l}\sin\frac{\rho_k x}{l}\,dx=\int_0^l\left[\cos\frac{(\rho_i-\rho_k)x}{l}-\cos\frac{(\rho_i+\rho_k)x}{l}\right]dx=$$

$$=l\frac{\sin(\rho_i-\rho_k)}{\rho_i-\rho_k}-l\frac{\sin(\rho_i+\rho_k)}{\rho_i+\rho_k}=0$$

откуда следует уравнение

$$(\rho_i+\rho_k)\sin(\rho_i-\rho_k)-(\rho_i-\rho_k)\sin(\rho_i+\rho_k)=0$$

или

$$\rho_i[\sin(\rho_i-\rho_k)-\sin(\rho_i+\rho_k)]+\rho_k[\sin(\rho_i-\rho_k)+\sin(\rho_i+\rho_k)]=0$$

иначе

$$-\rho_i\sin\rho_k\cos\rho_i+\rho_k\sin\rho_i\cos\rho_k=0$$

$$\frac{\rho_i\cos\rho_i}{\sin\rho_i}=\frac{\rho_k\cos\rho_k}{\sin\rho_k}=\beta$$

где β — произвольная постоянная.

Таким образом, уравнение $\psi(\rho)=0$ есть следующее:

$$\rho\operatorname{cotg}\rho=\beta$$

или

$$\rho\cos\rho-\beta\sin\rho=0 \qquad (2')$$

В некоторых случаях удается распространить выводы этой главы на функции, зависящие от корней трансцендентных уравнений, подобные, например, встречающимся в задаче о колебаниях стержня, которых основное свойство, выражаемое равенством

$$\int_0^l X_k X_i\,dx=0, \quad \text{если} \quad i\neq k$$

и служит для нахождения коэффициентов ряда при разложении по этим функциям. В развитие этого вопроса мы, однако, входить не будем, ибо сущность дела видна из изложенного выше простейшего и наиболее часто встречающегося случая рядов Фурье.

ГЛАВА VII

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ИМЕЮЩИХ ПОСЛЕДНИЙ ЧЛЕН. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУН И СТЕРЖНЕЙ И ДРУГИЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ

§ 72. В предыдущих главах показаны различные методы интегрирования уравнений без последнего члена; в этой главе мы покажем общий прием интегрирования таких уравнений, имеющих последний член, причем будем придерживаться того же способа изложения, т. е. развивать методу на классических частных примерах.

Положим, что дано уравнение, представляющее колебание струны под действием внешней возмущающей силы, которую, подобно нагрузке на балку, отнесем на единицу длины струны. Тогда наше уравнение будет вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \tag{1}$$

где $f(x,t)$ есть заданная функция переменных x и t, именно:

$$f(x,t) = \frac{1}{\mu} F(x,t)$$

причем μ есть масса единицы длины струны, $F(x,t)$ — вышеупомянутая нагрузка, действующая в момент t в точке, абсцисса коей x, и отнесенная на единицу длины струны.

Кроме уравнения (1), должны быть заданы граничные и начальные условия. Пусть они будут:

$$\left.\begin{array}{l} \text{при } x=0 \text{ должно быть } u=0 \\ \text{„ } x=l \text{ „ „ } u=0 \end{array}\right\} \text{ при всяком } t \tag{2}$$

и при $t=0$ должно быть

$$u = \varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x) \tag{3}$$

причем функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы на протяжении от

$$x=0 \quad \text{до} \quad x=l$$

Для решения этого вопроса будем поступать совершенно подобно тому, как мы поступали для уравнений обыкновенных, т. е. полагаем

$$u=u_1+u_2$$

и распоряжаемся величинами u_1 и u_2 так, чтобы u_1 представляло *свободные* колебания струны и u_2 — *вынужденные*.

Под словом „свободные“ колебания разумеют те, которые при данных граничных условиях происходят без действия внешней силы, а лишь вследствие начального отклонения струны от формы равновесия и вследствие сообщенных ее частям начальных скоростей.

„Вынужденными“ колебаниями называются те, которые производятся и поддерживаются действием внешней возмущающей силы.

Отсюда видно, что величина u_1 должна удовлетворять:

во-первых, дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=0 \tag{4}$$

во-вторых, граничным условиям:

$$\left.\begin{array}{l}\text{при } x=0 \text{ должно быть } u_1=0\\ \text{„ } x=l \text{ „ „ } u_1=0\end{array}\right\} \text{ при всяком } t \tag{5}$$

в-третьих, начальным условиям: при $t=0$ должно быть

$$u_1=\varphi(x) \text{ и } \frac{\partial u_1}{\partial t}=\psi(x) \tag{6}$$

Что касается u_2, то так как сумма

$$u=u_1+u_2$$

должна удовлетворять уравнению (1) и условиям (2) и (3), а величина u_1 удовлетворяет уравнению (4) и условиям (5) и (6), то ясно, что u_2 должно удовлетворять:

во-первых, дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=f(x,t) \tag{7}$$

во-вторых, граничным условиям:

$$\left.\begin{array}{l}\text{при } x=0 \text{ должно быть } u_2=0\\ \text{„ } x=l \text{ „ „ } u_2=0\end{array}\right\} \text{ при всяком } t \tag{8}$$

в-третьих, начальным условиям: при $t=0$ должно быть

$$u_2=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}=0 \tag{9}$$

С первого взгляда может представиться, что такое подразделение величины u на составляющие u_1 и u_2 не вносит никакого упрощения в решение вопроса, так как все равно величина u_2 должна удовлетворять уравнению (7), не отличающемуся ничем от предложенного уравнения (1).

Но надо помнить, что при решении вопросов, зависящих от уравнений в частных производных, одна из главных трудностей состоит в удовлетворении не только уравнению, но и граничным и начальным условиям, а отсюда и видно, что для величины u_2 начальные условия весьма просты.

Решение начинаем с разыскания величины u_1, причем будем пользоваться второю методою Пуассона, т. е. полагаем

$$u_1=\sum XT \tag{10}$$

и, как объяснено в § 46, получим для определения функций T и X уравнения

$$\begin{aligned} T''+a^2k^2T&=0\\ X''+k^2X&=0 \end{aligned} \tag{11}$$

откуда

$$\begin{aligned} T&=A\cos akt+B\sin akt\\ X&=C\cos kx+D\sin kx \end{aligned} \tag{12}$$

Функции X определяем так, чтобы они удовлетворяли *граничным* условиям; это приводит к трансцендентному уравнению, служащему для определения постоянной k.

В нашем случае это уравнение есть

$$\sin kl=0 \tag{13}$$

так что

$$k=\frac{n\pi}{l} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

и тогда

$$X_n=\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{14}$$

$$T_n=A_n\cos\frac{an\pi t}{l}+B_n\sin\frac{an\pi t}{l} \tag{15}$$

Таким образом, будет

$$u_1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos\frac{an\pi t}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \sin\frac{an\pi t}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (16)$$

причем A_n и B_n — постоянные произвольные, которые определяются по начальным условиям; именно будет

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi \\ B_n &= \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi \end{aligned} \qquad (17)$$

и, значит, u_1 найдется.

Чтобы найти u_2, поступаем так: будем искать эту величину в виде суммы

$$u_2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} X_n S_n \qquad (18)$$

где X_n суть те же самые функции, зависящие от корней трансцендентного уравнения (13), которые вошли в состав величины u_1 и по которым эта величина разложена в ряд.

Мы видели, что эти функции X_n удовлетворяют граничным условиям; значит, и величина u_2, определяемая рядом (18), будет удовлетворять *граничным* условиям.

Остается выбрать функции S_n переменной t так, чтобы были удовлетворены уравнение (7) и начальные условия (9).

Чтобы этого достигнуть, подставляем величину (18) в уравнение (7); оно примет тогда вид

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (S_n'' X_n - a^2 S_n X_n'') = f(x,t)$$

Но функция X_n удовлетворяет уравнению

$$X_n'' + \frac{n^2\pi^2}{l^2} X_n = 0$$

и значит, предыдущее уравнение напишется так:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(S_n'' + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} S_n\right) X_n = f(x,t) \tag{19}$$

Но, с другой стороны, функцию $f(x,t)$, если рассматривать в ней t как переменный параметр, независимый от буквы x, можно представить в виде ряда

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} H_n X_n \tag{20}$$

причем коэффициент H_n определяется совершенно подобно тому, как A_n или B_n при представлении функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в виде ряда, расположенного по функциям X_n, зависящим от корней трансцендентного уравнения (13).

Так, в нашем случае, когда

$$X_n = \sin\frac{n\pi x}{l}$$

будет

$$H_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi \tag{21}$$

так что H_n получится в виде вполне определенной функции буквы t, которую мы и обозначим для краткости $H_n(t)$.

Уравнение (19) примет вид

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(S_n'' + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} S_n - H_n(t)\right) X_n = 0$$

ему мы удовлетворим, взяв S_n так, чтобы при всяком n было

$$S_n'' + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} S_n = H_n(t) \qquad (n = 1,2,3,\ldots) \tag{22}$$

Чтобы величина

$$u_2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} S_n X_n \tag{*}$$

удовлетворяла и начальным условиям: при $t=0$ должно быть $u_2=0$ и $\frac{\partial u_2}{\partial t}=0$, надо взять S_n так, чтобы при всяком n при $t=0$ было

$$S_n(0)=0 \quad \text{и} \quad S_n'(0)=0 \tag{22'}$$

а тогда уравнение (22) дает, на основании формулы (4) [§ 8],

$$S_n = \frac{l}{an\pi} \int_0^t H_n(\sigma) \sin \frac{n\pi a}{l} (t-\sigma)\, d\sigma \tag{23}$$

или, подставляя вместо H_n его величину (21)

$$S_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^t d\sigma \int_0^l f(\xi, \sigma) \sin \frac{n\pi a}{l} (t-\sigma) \sin \frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi \tag{24}$$

и величина u_2 будет

$$u_2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} S_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Во многих частных случаях нет надобности пользоваться общею формулою (23) для нахождения величины S_n, а проще применять приемы, изложенные в главе I, т. е., найдя общий интеграл уравнения (22), определить содержащиеся в нем две постоянные произвольные так, чтобы при $t=0$ было

$$S_n(0)=0 \quad \text{и} \quad S_n'(0)=0$$

и найденную величину S_n подставить в формулу (*).

Обратим, между прочим, внимание на тот случай, когда внешняя сила сосредоточена в одной точке $x=c$, и величина этой силы есть $P=F(t)$.

Этот случай надо рассматривать как предельный, предполагая, что сила распределена как бы то ни было на участке от $x=c$ до $x=c+\lambda$ и что полная величина силы есть P, сколько бы мало λ ни было, так что

$$\int_c^{c+\lambda} f(\xi, t)\, d\xi = P = F(t)$$

Тогда в формуле (24) одно интегрирование может быть выполнено, именно будет

$$\int_0^l f(\xi, \sigma) \sin \frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi = \int_c^{c+\lambda} f(\xi, \sigma) \sin \frac{n\pi\xi}{l} d\xi = \sin \frac{n\pi c}{l} \int_c^{c+\lambda} f(\xi, \sigma)\, d\xi = \sin \frac{n\pi c}{l} F(\sigma)$$

и, следовательно, S_n будет

$$S_n = \frac{2 \sin \frac{n\pi c}{l}}{an\pi} \int_0^t F(\sigma) \sin \frac{a\pi n}{l} (t - \sigma)\, d\sigma \qquad (25)$$

Отсюда видно, что если есть такое целое значение $n = n_1$, что

$$n_1 c = l$$

то $\sin \frac{n\pi c}{l} = 0$ и, значит, $S_n = 0$, и в выражении u_2 члена, соответствующего $n = n_1$, не будет, т. е. будет отсутствовать тот тон, для которого точка приложения силы совпадает с одним из узлов.

Пусть, например,

$$P = K \sin pt$$

тогда по формуле (25) будет, если сделать для краткости письма $\frac{a\pi n}{l} = k$:

$$S_n = \frac{2}{lk} \sin \frac{n\pi c}{l} K \int_0^t \sin p\sigma \sin k(t - \sigma)\, d\sigma =$$

$$= \frac{K}{lk} \sin \frac{n\pi c}{l} \left[\int_0^t \{\cos [kt - (k + p)\sigma] - \cos [kt - (k - p)\sigma]\} \right] d\sigma =$$

$$= \frac{2K}{l(k^2 - p^2)} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin pt - \frac{2p}{lk} \frac{K}{k^2 - p^2} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin kt$$

и, значит, будет

$$u_2 = -\frac{2pK}{a\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2} - p^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi at}{l} +$$

$$+ \frac{2K}{l} \sin pt \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2} - p^2} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

причем предполагается, что нет такого целого числа n, при котором было бы

$$\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2} - p^2 = 0$$

Если же такое целое число есть, например $n = n_1$, то соответствующий ему член должен быть заменен таким:

в первой сумме:

$$\frac{1}{p^2} \sin \frac{n_1 \pi c}{l} K \sin pt \sin \frac{n_1 \pi x}{l}$$

во второй сумме:

$$-\frac{1}{p} \sin \frac{n_1 \pi c}{l} K t \cos pt \sin \frac{n_1 \pi x}{l}$$

Эти формулы обнаруживают и здесь явления резонанса, именно, когда „частота“ p перемен возмущающей силы будет приближаться к частоте одного из тонов струны, то соответствующая этому тону амплитуда колебания будет быстро возрастать, и это колебание получит преобладающее значение, если же было бы полное совпадение частот, то амплитуда, при *отсутствии сопротивления* колебаниям, неопределенно возрастала бы пропорционально времени.

Понятно, что можно было бы не прибегать для решения нашего примера к общей формуле (24), а, найдя по формуле (21) величину H_n, которая в нашем случае будет

$$H_n = \frac{2}{l} \int_c^{c+\lambda} f(\xi, t) \sin \frac{n\pi\xi}{l} d\xi = \frac{2}{l} \sin \frac{n\pi c}{l} \int_c^{c+\lambda} f(\xi, t)\, d\xi = \frac{2}{l} K \sin \frac{n\pi c}{l} \sin pt$$

подставить эту величину в уравнение (21), которое тогда будет

$$S_n'' + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} S_n = \frac{2}{l} K \sin \frac{n\pi c}{l} \sin pt$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$S_n = A_n \cos \frac{an\pi}{l} t + B \sin \frac{an\pi}{l} t + \frac{2}{l} K \sin \frac{n\pi c}{l} \frac{1}{\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} - p^2} \sin pt$$

постоянные произвольные A_n и B_n надо определить так, чтобы было при $t = 0$: $S_n(0) = 0$ и $S_n'(0) = 0$, откуда следует

$$A_n = 0 \quad \text{и} \quad B_n = -\frac{2p}{an\pi} K \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} - p^2}$$

и по подстановке в формулу

$$u_2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} S_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

мы получим тот же результат, как и раньше.

Заметим еще по поводу этих формул, что первая сумма, входящая в состав величины u_2, именно:

$$-\frac{2pK}{a\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} - p^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{an\pi t}{l}$$

приложится к *свободным* колебаниям струны, и эту сумму можно рассматривать как те свободные колебания, которые произойдут, если на струну, находившуюся вначале в равновесии и покое, начнет в момент $t = 0$ действовать заданная внешняя сила; тогда, кроме „вынужденных" колебаний, имеющих тот же период, как и период возмущающей силы, образуются и эти свободные.

Сумма

$$z = \frac{2K}{l} \sin pt \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} - p^2} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

представляющая собственно „чистые" вынужденные колебания, может быть найдена при помощи изложенного в главе VI приема.

Для этого напишем эту сумму так:

$$z = \frac{2Kl}{a^2 \pi^2} \sin pt \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{n^2 \left(1 - \frac{p^2 l^2}{a^2 \pi^2} \frac{1}{n^2}\right)} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

полагая, затем,

$$\frac{p^2 l^2}{a^2 \pi^2} = \alpha^2$$

имеем

$$z = \frac{2K\alpha^2}{p^2 l} \sin pt \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \frac{1}{n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right)}\right] =$$

$$= \frac{2K\alpha^2}{p^2 l} \sin pt \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{2K\alpha^4}{p^2 l} \sin pt \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{n^2 - \alpha^2} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Сумма

$$S_1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

представляет непрерывную функцию от $x=0$ до $x=l$, составленную из прямолинейных отрезков, и, следовательно, вторая производная от этой функции равна нулю на всем протяжении, кроме места разрыва первой производной; поэтому, дифференцируя предыдущее равенство дважды по букве x, получим

$$z'' = -\frac{2K\alpha^4}{p^2 l} \frac{\pi^2}{l^2} \sin pt \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{n^2 - \alpha^2} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

откуда следует

$$z'' + \frac{p^2}{a^2} z = 0$$

Следовательно,

$$z = C \sin \frac{p}{a} (x + \beta)$$

причем для отдельных участков значения постоянных производных C и β могут быть и различные.

Нетрудно видеть, даже не прибегая к общему способу, что место разрыва первой производной от функции z есть $x=c$, сама же функция z непрерывна.

При $x=0$ и при $x=l$ величина $z=0$.

Значит, на участке от $x=0$ до $x=c$ надо брать

$$z = A \sin \frac{p}{a} x$$

на участке же от $x=c$ до $x=l$ должно быть

$$z = B \sin \frac{p}{a} (l - x)$$

При $x=c$ значение z, даваемое и тою и другою формулою, должно быть одно и то же; значит,

$$A \sin \frac{p}{a} c = B \sin \frac{p}{a} (l - c)$$

поэтому, можно брать

$$A = \frac{H}{\sin \frac{p}{a} c} \quad \text{и} \quad B = \frac{H}{\sin \frac{p}{a} (l - c)}$$

где H пока неизвестная величина, не зависящая от x.

Таким образом, будет

$$z = H\frac{\sin\frac{p}{a}x}{\sin\frac{p}{a}c} \qquad \text{для} \quad 0 < x < c$$

$$z = H\frac{\sin\frac{p}{a}(l-x)}{\sin\frac{p}{a}(l-c)} \qquad \text{для} \quad c < x < l$$

Значение постоянной H можно определить, или разложив функцию, определяемую вышеприведенными равенствами, в ряд Фурье и сличив с заданным ее разложением, или определив величину скачка первой производной, или же непосредственно из механических соображений.

Так как параллельная оси z сила

$$\mu P = \mu K \sin pt$$

приложенная в точке $x = c$, должна уравновешиваться натяжением струны T, то будет

$$T(z')_{c-0} + T(z')_{c+0} = \mu P$$

Отсюда следует

$$H\left[\frac{p}{a}\frac{\cos\frac{p}{a}c}{\sin\frac{p}{a}} + \frac{p}{a}\frac{\cos\frac{p}{a}(l-c)}{\sin\frac{p}{a}(l-c)}\right] = \frac{\mu}{T}K\sin pt$$

но

$$\frac{\mu}{T} = \frac{1}{a^2}$$

следовательно будет

$$H = \frac{1}{ap}\frac{\sin\frac{p}{a}c\sin\frac{p}{a}(l-c)}{\sin\frac{pl}{a}}K\sin pt$$

Таким образом, будет

$$z = \frac{1}{ap}K\frac{\sin\frac{p}{a}(l-c)}{\sin\frac{pl}{a}}\sin\frac{p}{a}x\sin pt \qquad \text{для} \quad 0 < x < c$$

$$z = \frac{1}{ap}K\frac{\sin\frac{p}{a}c}{\sin\frac{pl}{a}}\sin\frac{p}{a}(l-x)\sin pt \qquad \text{для} \quad c < x < l$$

§ 73. В том случае, когда струна колеблется в воздухе и встречает сопротивление своим движениям, и если это сопротивление принять пропорциональным первой степени скорости, уравнение движения струны будет

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

где через функцию $f(x,t)$ обозначена возмущающая сила, действующая на струну.

Поступая совершенно подобно предыдущему, полагаем

$$u = u_1 + u_2$$

причем u_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2h\frac{\partial u_1}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

граничным условиям при всяком t: при $x=0$ должно быть $u_1=0$ и при $x=l$ должно быть $u_1=0$, и *начальным условиям*: при $t=0$ должно быть

$$u_1 = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \psi(x) \tag{2}$$

величина же u_2 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + 2h\frac{\partial u_2}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = f(x,t) \tag{3}$$

тем же граничным условиям, как и u_1, и начальным условиям: при $t=0$ должно быть

$$u_2 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

Прежде всего ищем u_1, полагая

$$u_1 = \sum TX \tag{5}$$

и определяя функции T и X так, чтобы каждый член суммы удовлетворял уравнению (1) и граничным условиям.

Тогда для определения T и X имеем уравнение

$$T''X + 2hT'X - a^2TX'' = 0$$

или

$$\frac{T'' + 2hT'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -k^2$$

так что величины T и X удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} T'' + 2hT' + a^2 k^2 T &= 0 \\ X'' + k^2 X &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Отсюда видно, что так как граничные условия остались прежние, то функции X и то трансцендентное уравнение, коим определяется величина k, останутся без изменения, так что

$$X_n = \sin \frac{n\pi x}{l} \qquad n = (1, 2, \ldots n, \ldots)$$

и разница будет лишь в том, что T_n определяется уравнением

$$T_n'' + 2hT_n' + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} T = 0 \tag{7}$$

а не уравнением

$$T_n'' + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} T = 0$$

как то было при $h = 0$.

Общий интеграл уравнения (7) есть

$$T_n = e^{-ht} \{ A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t \}$$

где

$$q_n = \sqrt{\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} - h^2}$$

и, значит, будет

$$u_1 = e^{-ht} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos q_n t + e^{-ht} \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin q_n t$$

коэффициенты A_n и B_n определятся из начальных условий, именно: попрежнему будет

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} d\xi$$

для определения же B_n послужит равенство

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)_0 = \psi(x) = -h \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{n=\infty} q_n B_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

из которого следует

$$\frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi = -hA_n + q_n B_n$$

Присутствие множителя e^{-ht} в выражении u_1 показывает, что свободные колебания в этом случае „затухают“ совершенно подобно тому, как для маятника, колеблющегося в среде, коей сопротивление пропорционально первой степени скорости.

Вынужденные колебания u_2 будем искать, попрежнему, под видом

$$u_2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} S_n X_n$$

где S_n есть функция только t, X_n — та самая функция $X_n = \sin\frac{n\pi x}{l}$, по которой разложено u_1 и которая определяется уравнением (6) и граничными условиями.

Повторив выкладку предыдущего параграфа, видим, что S_n будет удовлетворять уравнению

$$S_n'' + 2hS_n' + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} S_n = H_n \tag{8}$$

где, попрежнему,

$$H_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi, t)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi$$

Начальные же условия для S_n таковы: при $t=0$ должно быть $S_n = 0$ и $S_n' = 0$, вследствие чего будет

$$S_n = \frac{1}{q_n} e^{-ht}\int_0^t e^{h\sigma} H_n(\sigma)\sin q_n(t-\sigma)\,d\sigma$$

т. е.

$$S_n = \frac{2}{lq_n} e^{-ht}\int_0^t d\sigma \int_0^l e^{h\sigma} f(\xi, \sigma)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin q_n(t-\sigma)\,d\xi$$

и все, сказанное в главе I относительно вида и свойств решения уравнения (8), будет приложимо и здесь и будет относиться к тем членам, из коих составляется сумма u_2, почему мы не будем на этом подробно останавливаться.

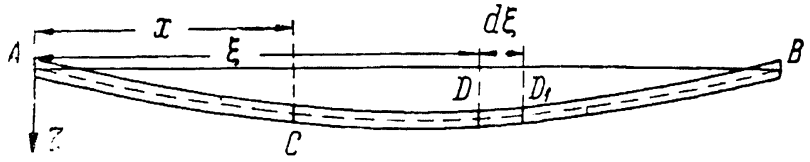
§ 74. Как второй пример, рассмотрим вынужденные поперечные колебания упругого стержня или балки.

Это движение определяется уравнением

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = f(x,t) \tag{1}$$

где z есть стрелка прогиба балки в точке, коей абсцисса есть x в момент времени t; $b^2 = \frac{EJ}{\rho s}$, где E — модуль упругости балки, J — момент инерции площади ее сечения s относительно центральной оси, перпендикулярной к плоскости колебания, ρ — плотность материала балки (масса единицы объема), $f(x,t) = \frac{1}{\rho s} F(x,t)$ и $F(x,t)$ — внешняя нагрузка, отнесенная на единицу длины, действующая в момент t в той точке, коей абсцисса есть x.

Кроме уравнения (1), величина z должна удовлетворять условиям „граничным“, иначе условиям закрепления концов балки, и условиям „начальным“, как о том сказано в § 48.



Фиг. 41.

Это уравнение и условия могут быть выведены следующим образом. Положим, что имеется балка AB (фиг. 41), коей конец A соответствует абсциссе $x=0$, а конец B — абсциссе $x=l$, и что на нее действует нагрузка P, отнесенная к единице длины балки, причем P есть заданная функция абсциссы x. Возьмем сечение балки, соответствующее абсциссе x тогда условие равновесия балки выражается уравнением

$$EJ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = M \tag{*}$$

где M есть изгибающий момент в рассматриваемом сечении, так что вообще будет

$$M = \int_x^l (\xi - x) P(\xi)\, d\xi + ax + b$$

ибо элементарная нагрузка $P(\xi)\, d\xi$ на элемент балки DD_1, лежащий между абсциссами ξ и $\xi + d\xi$, дает момент изгиба в точке C, равный $+ (\xi - x) P(\xi)\, d\xi$, и, значит, полный момент в этом сечении от нагрузки $P(\xi)$ будет

$$+ \int_x^l (\xi - x) P(\xi)\, d\xi$$

Знак + взят потому, что при избранном направлении осей положительная нагрузка P дает момент, стремящийся сообщить балке кривизну, вогнутость коей направлена в сторону положительной оси z. Кроме момента от нагрузки $P(\xi)$, может быть еще момент от пары закрепления в конце B и от реакции опоры B; этот момент выражается линейною функциею абсциссы x.

Итак, будет

$$EJ\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \int_x^l (\xi - x) P(\xi)\, d\xi + ax + b$$

Дифференцируя это уравнение по x дважды, получим

$$EJ\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = -\int_x^l P(\xi)\, d\xi + a \tag{2}$$

и

$$EJ\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = P(x) \tag{3}$$

Уравнение (3) представляет уравнение равновесия упругой балки постоянной площади сечения.

В том случае, когда нагрузка P зависит не только от абсциссы x но и от времени t, т. е. изменяется с течением времени, балка будет совершать колебательное движение, для получения уравнения которого стоит только по принципу Даламберта написать уравнение равновесия, присовокупив и силы инерции к числу действующих на систему сил.

В нашем случае, значит, надо взять силу инерции, отнесенную к единице длины балки. Она будет равна $-\rho s\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, и значит, уравнение (3) заменится таким:

$$EJ\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = F(x, t) - \rho s\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \tag{4}$$

причем вместо $P(x)$ написано $F(x, t)$ — выражение переменной нагрузки.

Полагая $\frac{EJ}{\rho s} = b^2$ и $f(x, t) = \frac{1}{\rho s} F(x, t)$, получим вместо уравнения (4) уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + b^2\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = f(x, t)$$

Что касается условий закрепления концов, то, очевидно, что для конца *заделанного* должно быть

$$z=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial x}=0$$

т. е. прогиб z равен нулю, и направление центральной фибры должно быть касательно к оси x, т. е. $\frac{\partial z}{\partial x}=0$.

Для конца *подпертого* должно быть $z=0$, т. е. прогиб равен нулю, и, кроме того, изгибающий момент должен быть нуль, а значит, в силу уравнения (*), и $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$.

Для конца свободного должен быть изгибающий момент равен нулю, т. е. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$, и срезывающее условие равно нулю, т. е., в силу уравнения (2), должно быть $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=0$.

Чтобы выяснить сущность методы и не иметь дела со сложными выкладками, возьмем случай балки, подпертой в обоих концах, так что наша задача ставится таким образом:

Определить функцию z, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+b^2\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}=f(x, t)$$

граничным условиям: при $z=0$ должно быть

$$z=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

при $x=l$ должно быть

$$z=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

и начальным условиям: при $t=0$ должно быть

$$z=\varphi(x); \quad \frac{\partial z}{\partial t}=\psi(x)$$

По общему правилу, делаем

$$z=z_1+z_2$$

и распоряжаемся так, чтобы z_1 представляло свободные, z_2 — вынужденные колебания нашей балки, т. е. чтобы z_1 удовлетворяло уравнению без последнего члена:

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2}+b^2\frac{\partial^4 z_1}{\partial x^4}=0$$

граничным условиям: при $x=0$ должно быть

$$z_1=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}=0$$

при $x=l$ должно быть

$$z_1=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}=0$$

и начальным условиям: при $t=0$ должно быть

$$z_1=\varphi(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial z_1}{\partial t}=\psi(x) \qquad (**)$$

величина же z_2 должна удовлетворять уравнению с последним членом:

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial t^2}+b^2\frac{\partial^4 z^2}{\partial x^4}=f(x,t) \qquad (1')$$

граничным условиям: при $t=0$ должно быть

$$z_2=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial z_2}{\partial t}=0$$

что следует из условий (**).

Решение задачи начинаем с разыскания z_1, поступая как показано в § 48, получим

$$z_1=\sum TX$$

где T и X определяется уравнениями

$$T''+b^2k^4T=0$$

$$X^{IV}-k^4X=0$$

причем функция X должна удовлетворять и граничным условиям, и тогда получается, что постоянная k есть корень трансцендентного уравнения

$$\sin kl=0$$

и

$$X_n=\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$T_n=A_n\cos\frac{bn^2\pi^2 t}{l^2}+B_n\sin\frac{bn^2\pi^2 t}{l^2}$$

после чего постоянные произвольные A_n и B_n определяются по начальным условиям.

Чтобы найти z_2, полагаем

$$z_2=\sum_{n=1}^{n=\infty} S_n X_n \qquad (5)$$

где S_n — функция только переменной t, функции же X_n — те самые, по которым разложена величина u_1 в рассматриваемой задаче.

Представляем функцию $f(x, t)$ в виде ряда

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} H_n(t) X_n \tag{6}$$

и, подставив в уравнение (1′) вместо z_2 величину (5) и вместо $f(x, t)$ величину (6), получаем уравнение

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(S_n'' + \frac{b^2 n^4 \pi^4}{l^4} S_n \right) X_n = \sum_{n=1}^{n=\infty} H_n(t) X_n$$

что дает для определения S_n уравнение

$$S_n'' + \frac{b^2 n^4 \pi^4}{l^4} S_n = H_n(t) \tag{7}$$

а так как при $t = 0$ должно быть

$$z_2 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial z_2}{\partial t} = 0$$

то для S_n должно быть

$$S_n(0) = 0 \quad \text{и} \quad S_n'(0) = 0$$

так что

$$S_n = \frac{l^2}{bn^2 \pi^2} \int_0^t H_n(\sigma) \sin \frac{bn^2 \pi^2}{l^2} (t - \sigma)\, d\sigma \tag{8}$$

а так как в нашем случае

$$H_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi$$

то будет

$$S_n = \frac{2l}{bn^2 \pi^2} \int_0^t d\sigma \int_0^l f(\xi, \sigma) \sin \frac{n\pi\xi}{l} \sin \frac{bn^2 \pi^2}{l^2} (t - \sigma)\, d\xi \tag{9}$$

$$z_2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} S_n \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{10}$$

Эти формулы и дают общее решение вопроса о вынужденных колебаниях подпертой балки.

Совершенно подобным же образом мы получили бы решение и для всякого другого из шести случаев различных способов закрепления концов.

§ 75. Рассмотрим некоторые замечательнейшие случаи колебания подпертой балки под действием переменной нагрузки.

Как первый пример, возьмем случай постоянной нагрузки p на единицу длины, перемещающейся равномерно со скоростью c по балке.

Чтобы выяснить сущность дела не усложняя выкладок, возьмем простейший случай, когда протяжение нагрузки λ настолько мало по сравнению с длиною балки l, что можно пренебречь временем пробега нагрузки над опорами балки по сравнению с полным временем пробега всей длины балки.

В этом случае функцию $f(x, t)$ можно взять так:

$$f(x, t)=0 \quad \text{для} \quad 0<x<ct-\frac{\lambda}{2}$$

$$f(x, t)=\frac{p}{\rho s} \quad \text{для} \quad ct-\frac{\lambda}{2}<x<ct+\frac{\lambda}{2}$$

$$f(x, t)=0 \quad \text{для} \quad ct+\frac{\lambda}{2}<x<l$$

Следовательно, будет

$$\frac{l}{2}H_n=\int_{ct-\frac{\lambda}{2}}^{ct+\frac{\lambda}{2}}\frac{p}{\rho s}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi=\frac{p}{\rho s}\frac{l}{n\pi}\left[\cos\frac{\pi n\left(ct-\frac{\lambda}{2}\right)}{l}-\cos\frac{n\pi\left(ct+\frac{\lambda}{2}\right)}{l}\right]=$$

$$=\frac{2p}{\rho s}\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi\lambda}{2l}\sin\frac{n\pi ct}{l}$$

Значит,

$$H_n=\frac{4p}{\rho s}\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi\lambda}{2l}\sin\frac{n\pi ct}{l}=K_n\sin\frac{n\pi ct}{l}$$

и уравнение (7) § 74 будет

$$S_n''+\frac{b^2n^4\pi^4}{l^4}S_n=K_n\sin\frac{n\pi ct}{l}$$

откуда

$$S_n = A_n \cos \frac{b n^2 \pi^2 t}{l^2} + B_n \sin \frac{b \pi^2 n^2 t}{l} + \frac{K_n \sin \frac{n \pi c t}{l}}{\frac{b^2 n^4 \pi^4}{l^4} - \frac{n^2 \pi^2 c^2}{l^2}}$$

причем A_n и B_n определяются из условий

$$S_n(0) = A_n = 0$$

$$S_n'(0) = \frac{b \pi^2 n^2}{l^2} B_n + \frac{K_n n \pi}{l} \frac{c}{\frac{b^2 n^4 \pi^4}{l^4} - \frac{n^2 \pi^2 c^2}{l^2}} = 0$$

т. е.

$$B_n = \frac{K_n l c}{b n^3 \pi^3} \frac{l^4}{b^2 n^2 \pi^2 - c^2 l^2}$$

и, следовательно, будет

$$z_2 = -\frac{4p}{\rho s} \frac{c l^5}{b \pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^4} \frac{\sin \frac{n \pi \lambda}{2l}}{b^2 n^2 \pi^2 - c^2 l^2} \sin \frac{n \pi x}{l} \sin \frac{b n^2 \pi^2 t}{l^2} +$$

$$+ \frac{4p}{\rho s} \frac{l^4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^3} \frac{\sin \frac{n \pi \lambda}{2l}}{b^2 n^2 \pi^2 - c^2 l^2} \sin \frac{n \pi x}{l} \sin \frac{n \pi c t}{l}$$

В случае сосредоточенной нагрузки, надо считать, что длина λ бесконечно малая, но что полная нагрузка, т. е. произведение $p\lambda$, имеет заданную величину P. Переходя к пределу, видим, что в этом случае будет

$$\frac{4p}{\rho s} \frac{l^4}{\pi^3} \sin \frac{n \pi \lambda}{2l} = \frac{2P l^3}{\rho s} \frac{n}{\pi^2}$$

и предыдущая формула будет

$$z_2 = -\frac{2P l^4 c}{\rho s b \pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^3} \frac{1}{b^2 \pi^2 n^2 - c^2 l^2} \sin \frac{n \pi x}{l} \sin \frac{b n^2 \pi^2 t}{l^2} +$$

$$+ \frac{2P l^3}{\rho s \pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{b^2 \pi^2 n^2 - c^2 l^2} \sin \frac{n \pi x}{l} \sin \frac{n \pi c t}{l} \qquad (*)$$

Необходимо помнить, что эта формула имеет место, лишь пока $ct \leqslant l$, т. е. пока нагрузка движется по балке, в момент же $ct = l$ нагрузка достигает конца балки, второй член в предыдущей формуле обращается в нуль, и остается

$$z_2 = -\frac{2P l^4 c}{\rho s b \pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^3} \frac{1}{b^2 \pi^2 n^2 - c^2 l^2} \sin \frac{b n^2 \pi^2}{cl} \sin \frac{n \pi x}{l}$$

Взяв производную $\frac{\partial z_2}{\partial t}$ и делая в ней $t=\frac{l}{c}$, получим

$$\frac{\partial z_2}{\partial t}=-\frac{2Pl^4c}{\rho sb\pi^4}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^3}\frac{bn^2\pi^2}{l^2}\frac{1}{b^2n^2\pi^2-c^2l^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{bn^2\pi^2}{cl}-$$

$$-\frac{2Pl^3}{\rho s\pi^4}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n\pi c}{l}\frac{1}{b^2n^2\pi^2-c^2l^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos n\pi$$

что и представит начальное состояние балки для дальнейшего движения, функция $f(x, t)=0$, т. е. колебания будут свободные, и, следовательно, z будет выражаться формулою, если время t_1 считать с момента схода нагрузки с балки,

$$z=-\frac{2Pl^4c}{\rho sb\pi^4}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^3}\frac{1}{b^2\pi^2n^2-c^2l^2}\sin\frac{bn^2\pi^2}{cl}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{bn^2\pi^2t_1}{l^2}-$$

$$-\frac{2Pl^4c}{\rho sb\pi^4}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^3}\frac{1}{b^2\pi^2n^2-c^2l^2}\cos\frac{bn^2\pi^2}{cl}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{bn^2\pi^2t_1}{l^2}-$$

$$-\frac{2Pl^4c}{\rho sb\pi^5}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^3}\frac{(-1)^n}{b^2\pi^2n^2-c^2l^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{bn^2\pi^2t_1}{l^2}$$

Заметив, что

$$t=\frac{l}{c}+t_1$$

мы можем в предыдущей формуле соединить первые две суммы в одну и написать равенство

$$z=-\frac{2Pl^4c}{\rho sb\pi^4}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^3}\frac{1}{b^2\pi^2n^2-c^2l^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{bn^2\pi^2t}{l}-$$

$$-\frac{2Pl^4c}{\rho sb^2\pi^5}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^3}\frac{(-1)^n}{b^2\pi^2n^2-c^2l^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{bn^2\pi^2}{l^2}\left(t-\frac{c}{l}\right)$$

Все эти формулы предполагают, что нет такого целого числа n, при котором

$$b^2n^2\pi^2-c^2l^2=0$$

Само собою понятно, что в этом случае, если $n=n_1$ есть такое целое число, то соответствующие ему члены в суммах заменятся другими, где время t будет вне знака sin или cos. Выписывать эти формулы не будем.

Обратим еще внимание на следующий случай:

1) если нагрузка движется по балке весьма медленно, то ясно, что во всякий момент балка будет иметь соответствующую форму статического равновесия; надо посмотреть, вытекает ли это свойство из вышеполученных формул, и что значат тогда слова „весьма медленно".

Напишем формулу (*) так:

$$z_2 = -\frac{2Pl^4}{\rho s b^2}\frac{c}{b\pi^6}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^5\left(1-\frac{c^2 l^2}{b^2\pi^2 n^2}\right)}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{bn^2\pi^2 t}{l} +$$

$$+\frac{2Pl^3}{\rho s b^2}\frac{1}{\pi^4}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^4\left(1-\frac{c^2 l^2}{b^2\pi^2 n^2}\right)}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi ct}{l}$$

и положим, что в рассматриваемый момент $ct = a$, так что в первой сумме вместо аргументов $\frac{bn^2\pi^2 t}{l^2}$ надо писать $\frac{bn^2\pi^2 a}{cl^2}$, во второй вместо $\frac{n\pi ct}{l}$ будет $\frac{an\pi}{l}$.

Движение нагрузки вдоль по балке мы будем считать медленным, когда величиною $\frac{c^2 l^2}{b^2\pi^2}$ можно пренебречь по сравнению с 1, а так как отношение множителей,[1] стоящих перед знаками сумм, есть $\frac{1}{\pi}\frac{cl}{b\pi}$, то,

---

[1] Отношение $\frac{cl}{b}$ может быть представлено в другом виде, из которого сразу будет видно, какие скорости движения c приходится считать малыми. Мы видели, что

$$b = \sqrt{\frac{EJ}{\rho s}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\sqrt{\frac{J}{s}}$$

Величина $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ зависит только от материала балки и представляет скорость V распространения звука по этому материалу. Эта скорость для металлов весьма велика, так, например, для стали будет

$$V = \sqrt{\frac{2200000\cdot 980\cdot 1000}{7.9}} = 522000 \text{ см/сек.} = 5220 \text{ м/сек.}$$

Величина $\sqrt{\frac{J}{s}}$ представляет радиус инерции площади сечения балки, обозначим его через r, тогда будет $\frac{cl}{b} = \frac{c}{V}\frac{l}{r}$. Отношение $\frac{l}{r}$ для балки, обладающей достаточной жесткостью, составляет 10—20, и, значит, даже при скорости $c = 30$ м/сек., $\frac{cl}{b}$ составит около $\frac{1}{10}$ и $\frac{c^2 l^2}{b^2\pi^2}$ около $\frac{1}{1000}$.

значит, первою суммою можно пренебречь по сравнению со второю, и, заметив, что $b^2\rho s = EJ$, где E есть модуль упругости и J момент инерции площади сечения балки, получим

$$z_2 = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin\frac{an\pi}{l}}{n^4} \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (**)$$

Чтобы представить сумму, входящую в эту формулу, в ином виде, положим

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin\frac{an\pi}{l}}{n^4} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

тогда, дифференцируя эту функцию три раза, получим

$$\varphi'''(x) = -\frac{\pi^3}{l^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{an\pi}{l} \cos\frac{n\pi x}{l}$$

По формулам § 69 имеем

$$-\frac{\pi^4}{2l^3} \sin\frac{an\pi}{l} = [\varphi'''(k_1 - 0) - \varphi'''(k_1 + 0)] \sin\frac{n\pi_1 k_1}{l}$$

Следовательно,

$$k_1 = a \quad \text{и} \quad \varphi'''(k_1 - 0) - \varphi'''(k_1 + 0) = -\frac{\pi^4}{2l^3}$$

а так как

$$EJz_2 = \frac{2P}{\pi^4} l^3 \varphi(x)$$

то функция $(EJz_2)'''$ имеет при точке a скачок, равный P, т. е. графически представится чертежом (фиг. 42, стр. 324).

Чтобы определить величину Q, надо заметить, что в разложении $\varphi'''(x)$ постоянного члена a_0 нет; значит,

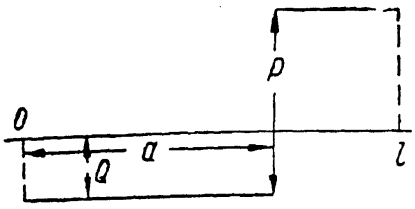
$$\int_0^l \varphi'''(x)\, dx = 0$$

но

$$\int_0^l \varphi'''(x)\, dx = (P + Q)(l - a) + Qa = 0$$

откуда следует

$$Q = -\frac{P(l-a)}{l}$$



Фиг. 42.

Упомянутый чертеж представляет эпюр срезывающих усилий, действующих на балку, коей центральная фибра представляется уравнением (**) Как видно, этот эпюр таков, как при статическом действии сосредоточенной в точке $(x=a)$ нагрузки P.

Из этого графического представления следует, после интегрирования один раз,

$$EJz_2'' = -\frac{Pa}{l}(l-x) \qquad \text{для} \quad a<x<l$$

$$EJz_2'' = \frac{Pa}{l}(l-a) + \frac{P(l-a)}{l}(a-x) = -\frac{P(l-a)]}{l}x \qquad \text{для} \quad 0<x<a$$

и так как в силу формулы (**), z_2'' равно нулю как при $x=0$, так и при $x=l$, то к предыдущим величинам постоянных произвольных прибавлять нет надобности.

Из предыдущих формул следует

$$EJz_2' = \frac{Pa}{2l}(l-x)^2 + C_1 \qquad \text{для} \quad a<x<l$$

$$EJz_2' = -\frac{P(l-a)}{l}\frac{x^2}{2} + C_2 \qquad \text{для} \quad 0<x<a$$

Постоянные C_1 и C_2 определятся из условий:

1) при $x=a$ величины z_2', следующая как из первой, так и из второй формулы, должны быть между собою равны;

2) так как в разложении z_2 постоянного члена нет, то интеграл

$$\int_0^l z_2'\,dx$$

равен нулю.

Таким образом, для определения C_1 и C_2 имеем

$$\frac{Pa}{2l}(l-a)^2+C_1=-\frac{P(l-a)}{l}\frac{a^2}{2}+C_2$$

и

$$\int_a^l\left[C_1+\frac{Pa}{2l}(l-x)^2\right]dx+\int_0^a\left(C_2-\frac{P(l-a)}{l}\frac{x^2}{2}\right)dx=0$$

откуда следует

$$C_1=-\frac{1}{6}\frac{Pa}{l}(l-a)(l+a)$$

$$C_2=\frac{1}{6}\frac{Pa}{l}(l-a)(2l-a)$$

Наконец,

$$EJz_2=C_1x-\frac{Pa}{6l}(l-x)^3+C_3 \quad \text{для} \quad a<x<l$$

$$EJz_2=C_2x-\frac{P(l-a)}{l}\frac{x^3}{6}+C_4 \quad \text{для} \quad 0<x<a$$

Постоянные C_4 и C_3 определяются условиями: $z_2=0$ при $x=0$ и при $x=l$, так что

$$C_4=0; \qquad C_3=-C_1l$$

Таким образом, получаем

$$z_2=\frac{1}{6}\frac{P}{EJ}\frac{a(l-a)}{l}\left[(l+a)(l-x)-\frac{(l-x)^3}{l-a}\right] \quad \text{для} \quad a<x<l$$

$$z_2=\frac{1}{6}\frac{P}{EJ}\frac{a(l-a)}{l}\left[(2l-a)x-\frac{x^3}{a}\right] \quad \text{для} \quad 0<x<a$$

Это и показывает, что формула (**) представляет, действительно, статическую форму равновесия балки под действием сосредоточенной в точке $x=a$ нагрузки, равной P, и что из этой формулы вытекают все те следствия относительно величины срезывающего усилия и изгибающего момента, как и из представления этих величин разрывными функциями или эпюром.

Входящая в состав величины z_2 сумма

$$\zeta=\frac{2Pl^3}{\pi^4EI}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^4\left(1-\frac{c^2l^2}{b^2\pi^2n^2}\right)}\sin\frac{n\pi ct}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

представляющая „чистые“ вынужденные колебания балки, может быть найдена, если поступить подобно тому, как это было показано для струны.

В самом деле, так как в этой сумме коэффициенты — четвертого порядка относительно $\frac{1}{n}$, то функция, ею представляемая, непрерывна вместе с своими двумя первыми производными, третья же производная имеет разрыв непрерывности.

Но, делая

$$\frac{c^2 l^2}{b^2 \pi^2} = \alpha^2$$

имеем

$$-\zeta''' = \frac{2P}{\pi EJ}\left[\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin\frac{n\pi ct}{l}}{n} \cos\frac{n\pi x}{l} + \alpha^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}\frac{\sin\frac{n\pi ct}{l}}{n^2-\alpha^2} \cos\frac{n\pi x}{l}\right]$$

Обозначим всю величину, стоящую в скобках, через $\varphi(x)$, первую сумму через $\varphi_1(x)$, вторую — через $\omega(x)$, так что будет

$$-\frac{\pi EJ}{2P}\zeta''' = \varphi(x) = \varphi_1(x) + \alpha^2 \omega(x)$$

Для функции $\varphi_1(x)$ по формулам § 69 имеем

$$\frac{\pi}{2}\sin\frac{n\pi ct}{l} = [\varphi_1(k_1 - 0) - \varphi_1(k_1 + 0)]\sin\frac{n\pi k_1}{l} + \ldots$$

откуда следует

$$\varphi_1(k_1 - 0) - \varphi_1(k_1 + 0) = \frac{\pi}{2}$$

$$k_1 = ct$$

Так как в нашей сумме коэффициент $a_0 = 0$ и функция $\varphi_1(x)$ состоит из двух прямолинейных участков, параллельных оси x, то должно быть

$$k_1\varphi_1(k_1 - 0) + (l - k_1)\varphi_1(k_1 + 0) = 0$$

следовательно, будет

$$\varphi_1(k_1 - 0) = \frac{\pi}{2}\frac{(l - k_1)}{l}; \qquad \varphi_1(k_1 + 0) = -\frac{\pi}{2}\frac{k_1}{l}$$

и функция $\varphi_1(x)$ определяется равенствами

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{\pi}{2}\frac{(l - k_1)}{l} \quad \text{для} \quad 0 < x < k_1 = ct \\ \varphi_1(x) &= -\frac{\pi}{2}\frac{k_1}{l} \quad \text{для} \quad k_1 < x < l \end{aligned} \qquad (***)$$

и представляется чертежом (фиг. 43).

Функция $\omega(x)$ имеет как первую, так и вторую производные, которые получаются дифференцированием почленно ряда, эту функцию представляющего, производная же функция $\varphi_1(x)$ равна нулю для всех значений x; следовательно, будет

$$\varphi''(x) = \alpha^2 \omega''(x)$$

Но

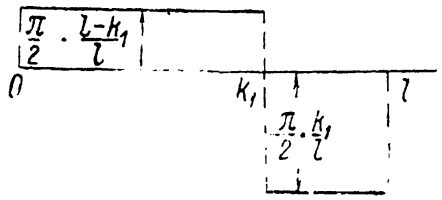
$$\omega''(x) = -\frac{\pi^2}{l^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n}{n^2 - \alpha^2} \sin\frac{n\pi ct}{l} \cos\frac{n\pi x}{l} = -\frac{\pi^2}{l^2} \varphi(x)$$

а так как

$$\alpha^2 \frac{\pi^2}{l^2} = \frac{c^2}{b^2}$$

то предыдущее уравнение будет

$$\varphi''(x) + \frac{c^2}{b^2} \varphi(x) = 0$$



Фиг. 43.

откуда следует

$$\varphi(x) = H \cos\frac{c}{b}(x + \gamma)$$

где H и γ — постоянные произвольные, имеющие различные значения для участков и от $x=0$ до $x=k_1=ct$ и от $x=k_1$ до $x=l$.

Обратив внимание на то, что первая производная функции $\varphi_1(x)$, на основании равенства (***), равна нулю, имеем

$$\varphi'(0) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_1'(l) = 0$$

Следовательно, можно брать

$$\varphi(x) = H_1 \cos\frac{c}{b} x \qquad \text{для} \quad 0 < x < k_1$$

$$\varphi(x) = H_2 \cos\frac{c}{b}(l - x) \qquad \text{для} \quad k_1 < x < l$$

Так как

$$-\frac{\pi}{2} \frac{EJ}{P} \zeta''' = \varphi(x)$$

то по трехкратном интегрировании получаем

$$-\frac{\pi}{2} \frac{EJ}{P} \zeta = \psi_1(x) = A_1 x^2 + B_1 x + C_1 - \frac{b^3}{c^3} H_1 \sin\frac{c}{b} x \quad \text{для} \quad 0 < x < k_1 = ct$$

$$-\frac{\pi}{2} \frac{EJ}{P} \zeta = \psi_2(x) = A_2 (l - x)^2 + B_2 (l - x) + C_2 +$$

$$+ \frac{b^3}{c^3} H_2 \sin\frac{c}{b}(l - x) \quad \text{для} \quad k_1 < x < l$$

Постоянные произвольные A_1, B_1, C_1, H_1, A_2, B_2, C_2, H_2 определяются из условий, непосредственно вытекающих из представления функции ζ рядом

$$\zeta = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^4\left(1 - \frac{c^2 l^2}{b^2 \pi^2 n^2}\right)} \sin \frac{n\pi ct}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

а именно, должно быть

$$\psi_1(0) = 0; \qquad \psi_1''(0) = 0$$

$$\psi_2(l) = 0; \qquad \psi_2''(l) = 0$$

$$\psi_1(k_1) = \psi_2(k_1); \qquad \psi_1'(k_1) = \psi_2'(k_1); \qquad \psi_1''(k_1) = \psi_2''(k_1)$$

$$\psi_1'''(k_1) - \psi_2'''(k_1) = \frac{\pi}{2}$$

Из этих уравнений получится:

$$A_1 = C_1 = A_2 = C_2 = 0$$

$$B_1 = \frac{\pi}{2} \frac{b^2}{c^2} \frac{l - k_1}{l}; \qquad B_2 = \frac{\pi}{2} \frac{b^2}{c^2} \frac{k_1}{l}$$

$$H_1 = \frac{\pi}{2} \frac{\sin \frac{c}{b}(l - k_1)}{\sin \frac{c}{b} l}; \qquad H_2 = -\frac{\pi}{2} \frac{\sin \frac{c}{b} k_1}{\sin \frac{c}{b} l}$$

и, следовательно, будет, при замене k_1 его величиной ct,

$$\zeta = -\frac{P}{EJ} \frac{b^2}{c^2} \left[\frac{l - ct}{l} x - \frac{b}{c} \frac{\sin \frac{c}{b}(l - ct)}{\sin \frac{cl}{b}} \sin \frac{cx}{b} \right] \quad \text{для} \quad 0 < x < ct$$

$$\zeta = -\frac{P}{EJ} \frac{b^2}{c^2} \left[\frac{ct}{l}(l - x) - \frac{b}{c} \frac{\sin \frac{c}{b} ct}{\sin \frac{c}{b} l} \sin \frac{c}{b}(l - x) \right] \quad \text{для} \quad ct < x < l \qquad \text{(I)}$$

Стоит только предположить, что отношение $\frac{cl}{b}$ бесконечно малое, удержать в разложениях синусов первые два члена, затем перейти к пределу, и тогда получатся формулы (**).

Само собою понятно, что исследование чисто вынужденных колебаний и всех обстоятельств изгиба балки при помощи формул (I) гораздо проще, нежели при помощи ряда.

§ 76. В предыдущем параграфе рассмотрен случай действия на балку подвижной нагрузки, которую мы приняли за некоторую *силу*, точка

приложения которой перемещается вдоль по балке. В том же случае, когда нагрузка материальная, она обладает инерцией и, участвуя в движении самой балки, давит на балку с переменным усилием, равным

$$\frac{P}{g}\left(g - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)_{x=ct}$$

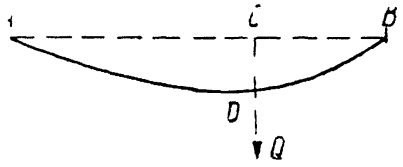
Предыдущий случай можно рассматривать, следовательно, как предельный, когда можно пренебречь ускорениями колебательного движения сравнительно с ускорением силы тяжести.

Если бы расчет показал, что величиною $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)_{x=ct}$ пренебречь нельзя, то можно прибегнуть к способу последовательных приближений: решить сперва задачу, пренебрегая силою инерции нагрузки, полученное решение принять за первое приближение и, просуммировав найденный ряд, выразить ускорение $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)_{x=ct}$ в функции времени t, после чего заменить P вышенаписанной величиною, — получится второе приближение и т. д.

Другой предельный случай есть тот, когда масса самой балки весьма мала по сравнению с массою движущегося по ней груза, и, значит, можно бы пренебрегать инерцией самой балки.

Понятно, что к этому случаю вышеприведенные формулы (I) не относятся.

Пусть (фиг. 44) движущийся груз P в рассматриваемый момент t находится в точке C.



Фиг. 44.

Обозначим через y прогиб CD балки в месте приложения груза.

Под действием усилия Q, приложенного в точке C, балка принимает изогнутую форму, определяемую равенствами

$$z = \frac{1}{6}\frac{Q}{EJ}\frac{a(l-a)}{l}\left[(2l-a)x - \frac{x^3}{a}\right] \quad \text{для} \quad 0 < x < a$$

$$z = \frac{1}{6}\frac{Q}{EJ}\frac{a(l-a)}{l}\left[(l+a)(l-x) - \frac{(l-x)^3}{l-a}\right] \quad \text{для} \quad a < x < l$$

при $x = a$ стрелка прогиба

$$(z)_{x=a} = y = \frac{1}{3}\frac{Q}{EJl}(al - a^2)^2$$

Следовательно, на груз P со стороны балки при величине прогиба y действует вверх сила

$$Q = \frac{3EJly}{(al-a^2)^2}$$

а так как

$$a = ct$$

то уравнение движения груза P будет

$$\frac{P}{g}\frac{d^2y}{dt^2} = P - \frac{3EJly}{(lct - c^2t^2)^2}$$

Положив

$$\frac{g}{C^2} = p; \quad \frac{3EJlg}{Pc^2} = q \quad \text{и} \quad ct = x$$

мы приведем предыдущее уравнение к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p - \frac{q}{(lx - x^2)^2}y \tag{I}$$

Это уравнение было получено в сороковых годах прошлого столетия знаменитым английским математиком и физиком Стоксом, участвовавшим в трудах английской мостовой комиссии, исследовавшей причины обрушения какого-то железнодорожного моста и устанавливавшей нормы для постройки металлических мостов.

Стокс сперва проинтегрировал это уравнение при помощи разложения в ряды и составил таблицы; но вскоре затем В. Томсон (лорд Кэльвин) показал, что это уравнение может быть проинтегрировано в квадратурах. Не проделывая подробно этой выкладки, сообщим лишь результат.

Если, считая $\frac{l^2}{4} > q$, положить

$$y = \frac{x^\alpha}{(l-x)^\beta}v$$

и взять α и β так, чтобы было

$$\left(\frac{l^2}{4} - q\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{l}{2} = l\alpha$$

и

$$\left(\frac{l^2}{4} - q\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{l}{2} = l\beta$$

то уравнение (1) приведется к такому, у коего первая часть полный дифференциал.

По интегрировании получится

$$\frac{dv}{dx} + 2v\frac{x + l\alpha}{lx - x^2} = p\int\frac{(l-x)^\beta}{x^\alpha}dx + A$$

Это уравнение линейное, и его общий интеграл есть

$$v = \frac{(l-x)^{2\beta}}{x^{2\alpha}}\left\{B + \int\frac{x^{2\alpha}}{(l-x)^{2\beta}}\left(A + p\int\frac{(l-x)^\beta}{x^\alpha}dx\right)dx\right\}$$

Мы не будем вдаваться в дальнейшие подробности по этому вопросу и упомянули о нем лишь для того, чтобы привести замечательный пример интегрирования.

§ 77. Положим теперь, что на балку в смежности с точкою C, абсцисса которой есть $x=a$, действует переменная нагрузка, выражающаяся формулою

$$p \sin kt$$

равномерно распределенная на участке от

$$x=a-\frac{\lambda}{2} \quad \text{до} \quad x=a+\frac{\lambda}{2}$$

Требуется определить колебания балки и рассмотреть также случай сосредоточенной нагрузки.

В рассматриваемом случае функция $f(x, t)$ такова:

$$f(x, t)=0 \qquad \text{для} \quad 0<x<a-\frac{\lambda}{2}$$

$$f(x, t)=\frac{1}{\rho s} p \sin kt \qquad \text{для} \quad a-\frac{\lambda}{2}<x<a+\frac{\lambda}{2}$$

$$f(x, t)=0 \qquad \text{для} \quad a+\frac{\lambda}{2}<x<l$$

Значит,

$$\frac{l}{2} H_n=\int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{n\pi\xi}{l} d\xi=\frac{1}{\rho s} p \sin kt \int_{a-\frac{\lambda}{2}}^{a+\frac{\lambda}{2}} \sin \frac{n\pi\xi}{l} d\xi=$$

$$=-\frac{1}{\rho s} p \sin kt \left[\frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi\xi}{l}\right]_{a-\frac{\lambda}{2}}^{a+\frac{\lambda}{2}}=$$

$$=\frac{p}{\rho s} \sin kt \frac{l}{n\pi}\left[\cos \frac{n\pi\left(a-\frac{\lambda}{2}\right)}{l}-\cos \frac{n\pi\left(a+\frac{\lambda}{2}\right)}{l}\right]=$$

$$=\frac{2pl}{\rho s\, n\pi} \sin kt \sin \frac{an\pi}{l} \sin \frac{n\pi\lambda}{2l}$$

Следовательно,

$$H_n=\frac{4p}{\rho s\, n\pi} \sin \frac{n\pi\lambda}{2l} \sin \frac{a\pi n}{l} \sin kt=\frac{1}{n} G_n \sin kt$$

и, значит, уравнение (7) § 74 будет

$$S_n''+\frac{b^2 n^4 \pi^4}{l^4} S_n=\frac{1}{n} G_n \sin kt$$

и

$$S_n = A_n \cos\frac{bn^2\pi^2}{l^2}t + B_n \sin\frac{bn^2\pi^2 t}{l^2} + \frac{1}{n}\frac{G_n l^4}{b^2 n^4 \pi^4 - k^2 l^4}\sin kt$$

начальные для S_n условия, именно: при $t=0$ должно быть

$$S_n = 0 \quad \text{и} \quad S_n' = 0$$

дают

$$A_n = 0 \quad \text{и} \quad B_n = -\frac{k}{n^3}\frac{1}{b\pi^2}\frac{G_n l^6}{b^2 n^4 \pi^4 - k^2 l^4}$$

и, значит, будет

$$z_2 = -\frac{kl^6}{b\pi^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{G_n}{b^2 n^4 \pi^4 - k^2 l^4}\frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{bn^2\pi^2 t}{l^2} +$$

$$+ l^4 \sin kt \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{G_n}{b^2\pi^4 n^4 - k^2 l^4}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

В случае сосредоточенной нагрузки будет

$$\lim_{\lambda=0} p\lambda = P$$

и $\sin\frac{n\pi\lambda}{2l}$ заменится через $\frac{n\pi\lambda}{2l}$, так что

$$H_n = \frac{2P}{\rho s l}\sin\frac{an\pi}{l}\sin kt$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{n}G_n = \frac{2P}{\rho s l}\sin\frac{an\pi}{l}$$

и предыдущая формула даст

$$z_2 = -\frac{2kP}{b\pi^2}\frac{l^5}{\rho s}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin\frac{an\pi}{l}}{n^2(b^2 n^4\pi^4 - k^2 l^4)}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{bn^2\pi^2 t}{l^2} +$$

$$+ \frac{2Pl^3}{\rho s}\sin kt \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin\frac{an\pi}{l}}{b^2\pi^4 n^4 - k^2 l^4}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

предполагая, что нет такого целого числа n, при котором было бы

$$b^2\pi^4 n^4 - k^2 l^4 = 0$$

Если же при $n = n_1$ будет

$$n_1^4 b^2 \pi^4 - k^2 l^4 = 0$$

то члены в суммах, соответствующие значению $n = n_1$, должны быть заменены такими:

$$-\frac{1}{\rho s}\frac{P}{l}\frac{1}{k} t \sin\frac{n_1 \pi a}{l} \cos kt \sin\frac{n_1 \pi x}{l}$$

и

$$\frac{1}{\rho s}\frac{P}{l}\frac{1}{k^2} \sin\frac{n_1 \pi a}{l} \sin kt \sin\frac{n_1 \pi x}{l}$$

что ясно обнаруживает явление резонанса. Необходимо, однако, обратить внимание на то, что эти члены пропадают, если точка приложения силы совпадает с одним из узлов, соответствующих числу n_1, т. е. если a таково, что

$$\frac{n_1 a}{l} = \text{целое число}$$

ибо тогда множитель

$$\sin\frac{n_1 \pi a}{l} = 0$$

Нетрудно видеть, что в случае, если стержень колеблется в среде, коей сопротивление пропорционально первой степени скорости, то свободные колебания будут заключать множитель e^{-ht} и с течением времени пропадут, для вынужденных — все выкладки останутся без всяких изменений, только величина S_n будет определяться уравнением вида

$$S_n'' + 2hS_n' + \frac{b^2 n^4 \pi^4}{l^4} S_n = H_n(t) = \frac{2P}{\rho s l} \sin\frac{n\pi a}{l} \sin kt \qquad (*)$$

и, значит, первая сумма, входящая в состав z_2, будет заключать множитель e^{-ht} и с течением времени пропадет, вторая же — составится по формулам §§ 5 и 6, и сказанное в этих параграфах будет относиться к каждому из членов этой суммы, а именно, будет, отбросив сумму, умноженную на e^{-ht},

$$z_2 = \frac{2P l^3}{\rho s} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin(kt + \varepsilon_n) \sin\frac{n\pi x}{l}$$

причем

$$A_n = \frac{\sin\frac{an\pi}{l}}{\sqrt{(b^2 n^4 \pi^4 - k^2 l^4)^2 + 4h^2 k^2 l^8}}$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_n = -\frac{2hk}{b^2 n^4 \pi^4 - k^2 l^4}$$

Отсюда нетрудно видеть, каков будет характер движения балки, если, при данном a, т. е. сохраняя неизменной точку приложения, сила P меняет частоту колебания k.

При k весьма малом по сравнению с $\frac{b\pi^2}{l^2}$ величина z_2 будет весьма близка к сумме

$$\frac{2Pl^3}{\rho s\, b^2 \pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{an\pi}{l}}{n^4} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin kt$$

которая представляет форму статического равновесия нашей балки, как то показано в предыдущем параграфе, под действием сосредоточенной в точке C нагрузки $P \sin kt$.

Если мы обозначим

$$\frac{2\pi}{k} = \tau$$

и

$$\frac{b\pi^2}{l^2} = \frac{2\pi}{T_1}$$

то T_1 есть период, соответствующий наименьшему секундному числу колебаний балки, т. е. период основного ее тона, τ есть период изменяемости силы, и значит, если основной период балки *мал* по сравнению с периодом изменяемости силы, то сила действует *статически.*

По мере увеличения k или, что то же, уменьшения τ, коэффициенты A_n будут изменяться, как сказано в § 5, и наконец, когда k приблизится к такому значению k_1, при котором будет

$$b^2 \pi^4 = k_1^2 l^4$$

или когда

$$T_1 = \tau$$

тогда коэффициент A_1 будет весьма быстро возрастать и будет близок к величине

$$\frac{\sin \frac{a\pi}{l}}{2hk_1 l^4}$$

и первый член суммы будет гораздо больше всех прочих, так что z_2 практически сведется к этому первому члену

$$\frac{P}{\rho s l} \sin \frac{a\pi}{l} \cdot \frac{\cos k_1 t}{k_1 h} \sin \frac{\pi x}{l}$$

ибо ε_n близко к $\frac{\pi}{2}$ и, значит, балка будет совершать весьма большие колебания с периодом $\tau_1 = \frac{2\pi}{k_1}$, форма же ее во всякий момент есть синусоида вида $f \sin \frac{\pi x}{l}$.

Когда величина k, при дальнейшем своем увеличении, перейдет значение $k_1 = \frac{b\pi^2}{l^2}$, соответствующее совпадению с основным тоном балки, то колебания весьма быстро уменьшатся и будут оставаться малыми до тех пор, пока k не будет приближаться к такому значению $k = k_2$, при котором имеет место равенство

$$2^2 \pi^4 b^2 = k_2^2 l^4, \quad \text{т. е.} \quad k_2 = 2k_1$$

т. е. когда период изменяемости силы приблизится к совпадению с периодом $T_2 = \frac{2l^2\pi}{b\,2^2\pi^2}$ первого обертона балки, тогда второй член суммы будет получать преобладающее значение, и величина z_2 будет приближенно равна

$$\frac{P}{\rho s l} \sin \frac{2a\pi}{l} \frac{\cos 2k_1 t}{2k_1 h} \sin \frac{2\pi x}{l}$$

и т. д.

Нетрудно видеть, что описанное явление резонанса будет иметь место и при всякой другой комбинации закрепления концов балки, а не только когда она подперта. Форма кривой изгиба будет другая, будут также другие периоды; но явление резонанса сохранится, ибо уравнение (*), определяющее S_n, сохранит свой вид.

Сумма

$$\zeta = \frac{2Pl^3}{b^2\pi^4 \rho s} \sin kt \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{an\pi}{l}}{n^4 - \frac{k^2 l^4}{b^2 \pi^4}} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

представляющая „чистые“ вынужденные колебания балки в рассматриваемом случае, может быть найдена, если воспользоваться изложенным в § 69 приемом.

Сделаем, попрежнему,

$$\alpha^4 = \frac{k^2 l^4}{b^2 \pi^4}$$

$$\varphi(x) = \sum^{n=\infty} \frac{\sin \frac{an\pi}{l}}{n^4 - a^4} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

тогда функция $\varphi(x)$ и две первые ее производные непрерывны на всем протяжении от $x=0$ до $x=l$, третья же производная имеет разрыв непрерывности, который окажется при $x=a$. Именно будет

$$\varphi'''(x)=-\frac{\pi^3}{l^3}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n^3}{n^4-\alpha^4}\sin\frac{an\pi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}=$$

$$=-\frac{\pi^3}{l^3}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{an\pi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}-\frac{\pi^3}{l^3}\alpha^4\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin\frac{an\pi}{l}}{n(n^4-\alpha^4)}\cos\frac{n\pi x}{l}$$

Первая из этих сумм уже была найдена в § 75, и функция, ею представляемая, есть

$$\varphi_1(x)=-\frac{\pi^3}{l^3}\frac{\pi}{2}\frac{l-a}{l}\quad\text{для}\quad 0<x<a$$

$$\varphi_1(x)=\frac{\pi^3}{l^3}\frac{\pi}{2}\frac{a}{l}\quad\text{для}\quad a<x<l$$

Дифференцируя равенство

$$\varphi'''(x)=\varphi_1(x)=\frac{\pi^3}{l^3}\alpha^4\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin\frac{an\pi}{l}}{n(n^4-\alpha^4)}\cos\frac{n\pi x}{l}$$

и замечая, что производная $\varphi_1'(x)=0$, получим уравнение

$$\varphi^{IV}(x)=\frac{\pi^4}{l^4}\alpha^4\varphi(x)$$

или, заменив α^4 его величиною,

$$\varphi^{IV}-\frac{k^2}{b^2}\varphi=0 \qquad (**)$$

Функция $\varphi(x)$ состоит из двух участков:

от $x=0$ до $x=a$ пусть будет $\varphi(x)=\psi_1(x)$

и

от $x=a$ до $x=l$ пусть будет $\varphi(x)=\psi_2(x)$

Обе функции ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют уравнению (**), и, делая

$$\frac{k^2}{b^2}=\beta^4$$

можно писать

$$\psi_1 = A_1 \operatorname{ch} \beta x + B_1 \operatorname{sh} \beta x + C_1 \cos \beta x + D_1 \sin \beta x$$
$$\psi_2 = A_2 \operatorname{ch} \beta (l - x) + B_2 \operatorname{sh} \beta (l - x) + C_2 \cos \beta (l - x) + D_2 \sin \beta (l - x)$$

Постоянные произвольные $A_1, B_1, \ldots D_2$ определяются из следующих условий:

$$\psi_1(0) = 0; \qquad \psi_1''(0) = 0$$
$$\psi_2(l) = 0; \qquad \psi_2''(l) = 0$$
$$\psi_1(a) = \psi_2(a); \qquad \psi_1'(a) = \psi_2'(a); \qquad \psi_1''(a) = \psi_2''(a)$$
$$\psi_1'''(a) - \psi_2'''(a) = -\frac{\pi^4}{2l^3}$$

Отсюда получается

$$A_1 = C_1 = A_2 = C_2 = 0$$
$$B_1 = -\frac{\pi^4}{2\beta^3 l^3} \frac{\operatorname{sh} \beta (l - a)}{\operatorname{sh} \beta l}; \qquad D_1 = \frac{\pi^4}{2\beta^3 l^3} \frac{\sin \beta (l - a)}{\sin \beta l}$$
$$B_2 = -\frac{\pi^4}{2\beta^3 l^3} \frac{\operatorname{sh} \beta a}{\operatorname{sh} \beta l}; \qquad D_2 = \frac{\pi^4}{2\beta^3 l^3} \frac{\sin \beta a}{\sin \beta l}$$

и функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ определяются вполне.

К тем же результатам можно было бы притти и из других соображений, а именно: величина ζ, как видно, представляется в виде

$$\zeta = \varphi(x) \sin kt$$

причем $\varphi(x)$ есть функция непрерывная вместе со своими первыми двумя производными, третья же ее производная при $x = a$ делает скачок, равный P, представляющий срезывающую силу, которая и уравновешивает сосредоточенную в этой точке нагрузку. На всем протяжении от $x = 0$ до $x = l$ величина ζ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = 0$$

которое принимает вид

$$[-k^2 \varphi(x) + b^2 \varphi^{IV}(x)] \sin kt = 0$$

Следовательно, функция $\varphi(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$\varphi^{IV}(x) - \frac{k^2}{b^2} \varphi(x) = 0$$

которое мы уже имели. Условие же закрепления концов балки и непрерывность ее формы и кривизны и величина скачка в срезывающем усилии

доставят те же самые восемь начальных условий, которые и послужат для определения восьми постоянных произвольных, входящих в выражения функций ψ_1 и ψ_2, коими ζ представляется на участках от $x=0$ до $x=a$ и от $x=a$ до $x=l$.

Совершенно подобным же образом можно трактовать и тот случай, когда балка колеблется в сопротивляющейся среде; надо только сперва заменить выражение

$$A_n \sin(kt + \varepsilon_n)$$

через

$$A_n \cos\varepsilon_n \sin kt + A_n \sin\varepsilon_n \sin kt$$

и $\cos\varepsilon_n$ и $\sin\varepsilon_n$ их значениями, следующими из $\operatorname{tg}\varepsilon_n$.

Эту выкладку предлагается выполнить в виде задачи.

§ 78. В мемуаре, помещенном в 18-й тетради журнала Политехнической школы и озаглавленном: „Mémoire sur la manière d'exprimer les fonctions en séries de quantités périodiques et sur l'usage de cette transformation dans la résolution de différents problèmes", Пуассон решает, между прочим, задачу о прямолинейном движении тяжелого тела, подвешенного к концу растяжимой нити.

Пуассон рассматривает лишь свободные колебания тела, мы же рассмотрим вынужденные и покажем, что к этой задаче сводится теория индикатора паровой машины, что эта же задача является основною в исследовании крешеров, служащих для изучения действия взрыва или для измерения давления газов в канале орудия. К этой же задаче сводится изучение крутильных колебаний вала с маховиком на конце, изучение разного рода „дрожащих" клапанов и т. д.

Составим сперва уравнения движения тела и нити или струны в задаче Пуассона.

Примем точку закрепления струны за начало координат и направим ось x по оси струны вертикально вниз.

Обозначим через u перемещение точки струны, соответствующей абсциссе x; тогда перемещение точки, соответствующей абсциссе $x+dx$, будет $u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$, относительное удлинение струны в рассматриваемом месте есть $\frac{\partial u}{\partial x}$, и натяжение ее есть $k\frac{\partial u}{\partial x}$, где $k=Es$, причем E есть модуль упругости, s — площадь сечения струны.

Таким образом, на рассматриваемый элемент, масса коего есть $q\,dx$ причем через q обозначена масса *погонной* единицы длины струны, действуют силы:

$$\text{вверх} \quad -k\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\text{вниз} \quad +k\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\right)$$

ускорение этого элемента есть $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, и, значит, уравнение движения струны есть

$$q\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

или, полагая

$$\frac{k}{q}=a^2$$

имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

предполагая, что на струну никаких сил не действует.

Если же на струну действует внешняя сила, то, отнеся ее величину к погонной единице длины струны и обозначая через $F(x,t)$, мы вместо уравнения (1), получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{q}F(x,t) \tag{2}$$

К этому уравнению необходимо еще присовокупить *граничные* и *начальные* условия.

Чтобы составить *граничные* условия, замечаем:

1) что конец струны, соответствующий абсциссе $x=0$, остается неподвижным; следовательно, при $x=0$ должно быть

$$u=0 \tag{3}$$

при всяком t.

2) на конце, соответствующем абсциссе $x=l$, висит груз P, с которым этот конец связан неизменно, так что движение груза P должно быть такое же, как и этого конца.

Если на этот груз P действуют какие бы то ни было внешние силы, в том числе и сила тяжести, то их должно отнести к функции $F(x, t)$ и рассматривать приложенными как бы к последнему элементу струны, а не к грузу.

Так следует поступать для того, чтобы получить, по возможности, простое граничное условие, не зависимое от внешних сил *и одинаковое как для свободных, так и для вынужденных колебаний*, ибо наши общие формулы выведены для таких граничных условий.

Натяжение струны выражается формулою $k\frac{\partial u}{\partial x}$, масса груза есть $\frac{P}{g}$; следовательно, при отнесении, как сказано, всех внешних сил к функции $F(x,t)$ уравнение движения груза, а значит, и второе граничное условие будут: *при $x=l$ должно быть*

$$\frac{P}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-k\frac{\partial u}{\partial x}\ \text{при всяком } t \tag{4}$$

или, делая

$$c^2 = \frac{kg}{P}$$

получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \tag{4'}$$

Начальные условия, т. е. те, которые относятся к моменту времени $t=0$, выразим уравнениями: при $t=0$ должно быть

$$u = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x) \tag{5}$$

причем $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные на протяжении от $x=0$ до $x=l$ функции.

Итак, рассматриваемая задача о колебании струны с грузом на конце сводится к следующей математической: *найти функцию* $u(x, t)$ *удовлетворяющую:*

во-первых, дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{q} F(x, t)$$

во-вторых, граничным условиям:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{при } x=0 \text{ должно быть} & u=0 \\ \text{„ } x=l \quad \text{„ } \quad \text{„} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{array}\right\} \text{при всяком } t$$

в третьих, начальным условиям: при $t=0$ *должно быть*

$$u = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x)$$

Прежде чем решать эту математическую задачу, покажем, что к ней же приводятся и упомянутые технические вопросы об индикаторе и о крутильных колебаниях вала.

Относительно индикатора само собою понятна полная аналогия; вместо слова *струна* надо говорить слова *пружина индикатора*, тогда величина k есть „жесткость“ пружины, т. е. тот множитель, на который надо умножить ее *относительное* удлинение, чтобы получить натяжение. Связь между величиною k и величиною „цены“ одного миллиметра удлинения или сжатия пружины очевидна. Вместо массы груза $\frac{P}{g}$ надо брать *массу поршня и приведенную массу всех частей прибора, с поршнем связанных и участвующих в движении его.*

Чтобы получить „приведенную массу“ подвижных частей индикатора, можно поступить так: вообразить, что в рассматриваемый момент скорость

поршня есть v, скорости всех прочих частей прибора будут пропорциональны v, причем коэффициенты пропорциональности определяются кинематическими связями между поршнем и рассматриваемыми частями.

Составив живую силу всей системы, представляем ее в виде

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{P}{g}+M_1\right)v^2$$

M_1 и будет „приведенною массою“.

Полагая

$$\frac{P}{g}+M_1=M$$

надо граничное условие (3) писать: *при* $x=l$ *должно быть*

$$M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-k\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3'}$$

или, делая

$$c^2=\frac{k}{M}$$

получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-c^2\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3''}$$

как и для случая струны с грузом.

Давление же пара на поршень относим, в силу сказанного выше, к функции $F(x, t)$, т. е. к внешней нагрузке, действующей на пружину.

Для случая вала с маховиком M на конце B, соответствующем абсциссе $x=l$, составим уравнение движения следующим образом.

Начало координат возьмем в точке A — свободном конце вала, ось x направим по оси вала, обозначим через u угол закручивания вала в сечении, соответствующем абсциссе x, тогда приходящееся на единицу длины закручивание у этого сечения есть $\frac{\partial u}{\partial x}$, значит, скручивающий момент будет $k\frac{\partial u}{\partial x}$, где $k=GJ$, причем G есть „модуль сдвига“, J — момент инерции площади сечения вала. Пусть будет K момент инерции единицы длины вала, тогда, рассматривая элементарную часть вала, заключенную между абсциссами x и $x+dx$, имеем:

Момент инерции... $K\,dx$.

Скручивающий момент в сечении x $\quad -k\frac{\partial u}{\partial x}$

„ „ „ „ $x+dx$ $\quad k\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx\right]$

Угловое ускорение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Значит, если на вал никаких внешних сил не действует, то уравнение его движения будет

$$K\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1'')$$

или, полагая

$$\frac{k}{K} = a^2$$

получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

Если же на вал действует внешний скручивающий момент, величину которого, отнесенную к единице длины вала, обозначим через $F(x, t)$, то вместо уравнения (1″) будет

$$K\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t)$$

и вместо (1) будет

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{K}F(x, t) \qquad (2')$$

Что же касается граничных и начальных условий, то легко видеть, что попрежнему будет:

1) при $x = 0$ должно быть $u = 0$ при всяком t,

2) при $x = l$ имеем насаженный неизменно на вал маховик; если момент инерции этого маховика обозначим через K_1, то наше граничное условие будет: *при* $x = l$ *должно быть*

$$K_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -k\frac{\partial u}{\partial x}$$

или, обозначая через $c^2 = \frac{k}{K_1}$, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2\frac{\partial u}{\partial x}$$

как и раньше. Если к маховику приложено еще внешнее усилие, например, происходящее от приводного ремня, то, в силу сказанного выше, момент этого усилия относим к внешней нагрузке, действующей на вал, т. е. к функции $F(x, t)$.

Само собою понятно, что начальные условия будут попрежнему: *при* $t=0$ *должно быть*

$$u=\varphi(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}=\psi(x)$$

Таким образом, математически и эта задача равносильна задаче о колебании струны с грузом на конце.

§ 79. Для решения поставленной в предыдущем параграфе математической задачи применим наш общий прием, а именно, полагаем

$$u=u_1+u_2$$

и выбираем u_1 так, чтобы оно представляло свободные колебания, u_2 — вынужденные колебания, т. е. u_1 должно удовлетворять:

1) уравнению

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=0 \tag{1}$$

2) граничным условиям:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{при} & x=0 & \text{должно быть} \quad u_1=0 \\ \text{„} & x=l & \text{„} \quad \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=-c^2\dfrac{\partial u_1}{\partial x} \end{array}\right\} \text{при всяком } t \tag{2}$$

3) начальным условиям: при $t=0$ должно быть

$$u_1=\varphi(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}=\psi(x) \tag{3}$$

Величина же u_2 должна удовлетворять:

1) уравнению

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{q}F(x,t) \tag{4}$$

2) тем же граничным условиям, как и u_1,

3) начальным условиям: при $t=0$ должно быть

$$u_2=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}=0 \tag{5}$$

Подобно тому, как и раньше, начинаем решение с разыскания u_1, чтобы составить соответствующие задаче „нормальные“ функции X и трансцендентное уравнение, от корней коего они зависят, делаем

$$u_1=\sum TX$$

Для определения T и X получаем уравнения

$$\begin{aligned} T'' + a^2 m^2 T &= 0 \\ X'' + m^2 X &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Значит,

$$T = A\cos amt + B\sin amt$$

$$X = C\cos mx + D\sin mx$$

Обращаемся к граничным условиям.
На основании первого из них будет

$$C = 0$$

значит,

$$X = D\sin mx$$

или просто

$$X = \sin mx$$

ибо, не теряя общности, можно брать $D = 1$, и, значит, будет

$$u_1 = \sum (A\cos amt + B\sin amt)\sin mx$$

Чтобы эта величина удовлетворяла второму граничному условию, т. е. чтобы при $x = l$ было *при всяком* t:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0$$

т. е. чтобы было

$$\sum (a^2 m^2 \sin ml - mc^2 \cos ml)(A\cos amt + B\sin amt) = 0$$

при всяком t достаточно, чтобы имело место равенство

$$a^2 m\sin ml - c^2\cos ml = 0 \tag{7}$$

или, полагая

$$ml = \mu$$

и делая

$$\frac{c^2 l}{a^2} = \frac{qlg}{P} = \frac{Q}{P} = \gamma$$

где Q есть вес струны или пружины, имеем уравнение

$$\mu\,\mathrm{tg}\,\mu = \gamma \tag{8}$$

Пусть корни этого уравнения суть

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_n \ldots \tag{9}$$

для каждого корня получаются соответствующие функции X и T, именно:

$$X_n = \sin \frac{\mu_n x}{l}$$

$$T_n = A_n \cos \frac{\mu_n at}{l} + B_n \sin \frac{\mu_n at}{l}$$

и, значит, будет

$$u_1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin \frac{\mu_n x}{l} \cos \frac{\mu_n at}{l} + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \sin \frac{\mu_n x}{l} \sin \frac{\mu_n at}{l}$$

Чтобы определить коэффициенты A_n и B_n, надо обратиться к начальным условиям, которые дают

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin \frac{\mu_n x}{l}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a\mu_n}{l} B_n \sin \frac{\mu_n x}{l}$$

Чтобы получить коэффициенты A_n и B_n, надо воспользоваться доказанным в § 71 равенством

$$\int_0^l \cos \mu_i \frac{x}{l} \cos \mu_n \frac{x}{l} dx = 0, \quad \text{если} \quad i \neq k$$

когда же

$$i = k, \quad \text{т. е.} \quad \mu_i = \mu_k$$

то интеграл

$$\int_0^l \cos^2 \frac{\mu_k x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 + \cos \frac{2\mu_k x}{l}\right) dx = \frac{l}{2} \left(1 + \frac{1}{2\mu_k} \sin 2\mu_k\right) =$$

$$= \frac{l}{4\mu_k} (2\mu_k + \sin 2\mu_k) \tag{10}$$

Таким образом, нахождение коэффициентов в ряду

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n \cos \frac{\mu_n x}{l}$$

производится по формуле

$$C_n = \frac{4}{l} \frac{\mu_n}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^l \omega(\xi) \cos \frac{\mu_n \xi}{l} d\xi$$

Чтобы привести к этому наш случай, стоит только положить

$$\omega(x)=\varphi'(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty} C_n \cos\frac{\mu_n x}{l}$$

тогда будет

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\frac{\mu_n x}{l} \tag{11}$$

причем

$$A_n=\frac{C_n l}{\mu_n}=\frac{4}{2\mu_n+\sin 2\mu_n}\int_0^l \varphi'(\xi)\cos\frac{\mu_n \xi}{l}\,d\xi \tag{12}$$

Точно так же будет

$$B_n=\frac{4l}{a}\,\frac{1}{\mu_n(2\mu_n+\sin 2\mu_n)}\int_0^l \psi'(\xi)\cos\frac{\mu_n \xi}{l}\,d\xi \tag{12'}$$

Само собою разумеется, что, выполнив в этих двух формулах интегрирование по частям, заменим их другими двумя, в которых под знаком интеграла будут входить только сами заданные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а не их производные.

Перейдем теперь к нахождению величины u_2.

По общему правилу полагаем

$$u_2=\sum_{n=1}^{n=\infty} S_n \sin\frac{\mu_n x}{l}$$

где S_n зависит только от времени t.

Представив функцию $\frac{1}{q}F(x,t)$ в виде ряда

$$\frac{1}{q}F(x,t)=\sum_{n=1}^{n=\infty} H_n(t)\sin\frac{\mu_n x}{l}$$

определяем коэффициенты $H_n(t)$ по формулам

$$H_n(t)=\frac{4}{lq}\,\frac{1}{2\mu_n+\sin 2\mu_n}\int_0^l \frac{\partial F(\xi,t)}{\partial\xi}\cos\frac{\mu_n \xi}{l}\,d\xi \tag{13}$$

тогда функция S_n будет определяться уравнением

$$S_n''+\frac{a^2\mu_n^2}{l^2}S_n=H_n(t)$$

и условиями: при $t=0$ должно быть $S_n=0$ и $S'_n=0$, так что

$$S_n=\frac{l}{a\mu_n}\int_0^t H_n(\sigma)\sin\frac{a\mu_n}{l}(t-\sigma)\,d\sigma \qquad (*)$$

Таким образом, задача решается вполне.

§ 80. Чтобы применить формулы предыдущего параграфа к теории индикатора, стоит только предположить, что внешняя сила $F(x, t)$ представляет действующее на поршень индикатора давление пара, которое, если считать время от момента впуска, будет некоторой функцией $f(t)$.

Уже было упомянуто, что давление следует рассматривать как усилие, сосредоточенное на последнем элементе пружины, иначе, как предельный случай усилия, распределенного на протяжении от c до $c+\lambda$, причем в пределе c должно приближаться к l, и λ должно приближаться к нулю, полная же величина нагрузки к $Af(t)$, где A есть площадь поршня индикатора, причем мы считаем $f(0)=0$.

Отсюда следует, что функцию $F(x, t)$ надо взять так:

$F(x, t)=0$	для промежутка	от	$x=0$ до $x=c$
$F(x, t)=\omega(x)f(t)$	„	„	„ $x=c$ до $x=c+\lambda$
$F(x, t)=0$	„	„	„ $x=c+\lambda$ до l

причем

$$\int_c^{c+\lambda}\omega(x)\,dx=A$$

независимо от величины λ.

При таком выборе функции $F(x, t)$ будет

$$\int_0^l\frac{\partial F(\xi,t)}{\partial\xi}\cos\frac{\mu_n\xi}{l}\,d\xi=f(t)\int_c^{c+\lambda}\omega'(\xi)\cos\frac{\mu_n\xi}{l}\,d\xi$$

$$\int_c^{c+\lambda}\omega'(\xi)\cos\frac{\mu_n\xi}{l}\,d\xi=\left[\omega(\xi)\cos\frac{\mu_n\xi}{l}\right]_c^{c+\lambda}+\frac{\mu_n}{l}\int_c^{c+\lambda}\omega(\xi)\sin\frac{\mu_n\xi}{l}\,d\xi$$

Будем брать функцию $\omega(\xi)$ так, чтобы было

$$\omega(c+\lambda)=\omega(c)=0$$

тогда будет

$$\int_c^{c+\lambda}\omega'(\xi)\cos\frac{\mu_n\xi}{l}\,d\xi=\frac{\mu_n}{l}\int_c^{c+\lambda}\omega(\xi)\sin\frac{\mu_n\xi}{l}\,d\xi$$

Затем имеем

$$\int_c^{c+\lambda} \omega(\xi) \sin\frac{\mu_n \xi}{l}\, d\xi = \left\{\left[\int_c^{\xi} \omega(\alpha)\, d\alpha\right] \sin\frac{\mu_n \xi}{l}\right\}_c^{c+\lambda} -$$

$$-\frac{\mu_n}{l}\int_c^{c+\lambda}\left[\int_c^{\xi} \omega(\alpha)\, d\alpha\right] \cos\frac{\mu_n \xi}{l}\, d\xi$$

В пределе при бесконечно малом λ величина, стоящая в $\{\ \}$, обращается в

$$A \sin\frac{\mu_n c}{l}$$

ибо, по предположению,

$$\lim_{\lambda=0} \int_c^{c+\lambda} \omega(\alpha)\, d\alpha = A$$

Величина же

$$\int_c^{c+\lambda}\left[\int_c^{\xi} \omega(\alpha)\, d\alpha\right] \cos\frac{\mu_n \xi}{l}\, d$$

имеет своим пределом 0.

В самом деле, функция $\omega(\alpha)$ между пределами c и $c+\lambda$, по самой сути дела, положительная; значит, таковою ее и надо воображать, а тогда

$$\int_c^{\xi} \omega(\alpha)\, d\alpha < \int_c^{c+\lambda} \omega(\alpha)\, d\alpha = A$$

т. е.

$$\int_c^{\xi} \omega(\alpha)\, d\alpha < A$$

значит,

$$\int_c^{c+\lambda}\left[\int_c^{\xi} \omega(\alpha)\, d\alpha\right] d\xi < A\lambda$$

а так как по абсолютной величине рассматриваемый интеграл меньше этого, то и будет

$$\lim_{\lambda=0} \int_c^{c+\lambda}\left[\int_c^{\xi} \omega(\alpha)\, d\alpha\right] \cos\frac{\mu_n \xi}{l}\, d\xi = 0$$

таким образом, будет

$$\lim_{\substack{c=l \\ \lambda=0}} \int_c^{c+\lambda} \omega'(\xi) \cos\frac{\mu_n \xi}{l}\, d\xi = \frac{\mu_n \sin \mu_n}{l} A = \frac{\gamma}{l} A \cos \mu_n$$

и, следовательно,

$$H_n(t) = \frac{4\gamma}{ql} \frac{\cos \mu_n}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} A f(t) \tag{14}$$

и на основании формулы (*) стр. 347,

$$S_n = \frac{4\gamma}{aq} \frac{\cos \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} A \int_0^t f(\sigma) \sin \frac{a\mu_n}{l} (t - \sigma)\, d\sigma$$

и попрежнему,

$$u_2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} S_n \sin \frac{\mu_n x}{l}$$

Так как при начале движения

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{и} \quad \psi(x) = 0$$

то

$$u_1 = 0$$

и остается

$$u = u_2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} S_n \sin \frac{\mu_n x}{l}$$

Для теории индикатора представляет интерес единственно движение поршня, а не какой-либо промежуточной точки пружины. Чтобы его получить, стоит только положить в предыдущей формуле $x = l$; тогда она обратится в следующую:

$$u_2 = z = \frac{4\gamma A}{aq} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos \mu_n \sin \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} \int_0^t f(\sigma) \sin \frac{a\mu_n}{l} (t - \sigma)\, d\sigma$$

В силу уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$$

будет

$$\frac{\gamma \cos \mu}{\mu} = \sin \mu$$

и предыдущую формулу можно написать так:

$$z = \frac{4A}{aq} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^t f(\sigma) \sin \frac{a\mu_n}{l} (t - \sigma)\, d\sigma$$

Величина, пропорциональная смешению поршня индикатора z, и записывается на барабане его.

Применив к каждому члену суммы преобразование, показанное в § 8, мы из предыдущей формулы найдем те условия, при которых запись на барабане, действительно, представляет изменяемость давления на поршень, а также и величину погрешности показаний прибора.

В самом деле, имеем

$$\int_0 f(\sigma)\sin\frac{a\mu_n}{l}(t-\sigma)\,d\sigma = \frac{l}{a\mu_n}f(t) - \frac{l}{a\mu_n}\int_0^l f'(\sigma)\cos\frac{a\mu_n}{l}(t-\sigma)\,d\sigma$$

подставляя, получаем

$$z = \frac{4Al}{a^2 q}f(t)\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin^2\mu_n}{\mu_n(2\mu_n+\sin 2\mu_n)} -$$

$$-\frac{4Al}{a^2 q}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin^2\mu_n}{\mu_n(2\mu_n+\sin 2\mu_n)}\int_0^t f'(\sigma)\cos\frac{a\mu_n}{l}(t-\sigma)\,d\sigma$$

Сумму

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin^2\mu_n}{\mu_n(2\mu_n+\sin 2\mu_n)}$$

нетрудно найти, стоит только представить величину x в виде ряда, расположенного по $\sin\frac{\mu_n x}{l}$, тогда получится

$$x = 4l\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin\mu_n}{\mu_n(2\mu_n+\sin 2\mu_n)}\sin\frac{\mu_n x}{l}$$

как то следует из формулы (12) § 79.

Делая в этой формуле $x=l$, получим

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin^2\mu_n}{\mu_n(2\mu_n+\sin 2\mu_n)} = \frac{1}{4}$$

а так как $a^2 q = k$, где k есть мера жесткости пружины, то получится

$$z = \frac{Al}{k}f(t) - 4\frac{Al}{k}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin^2\mu_n}{\mu_n(2\mu_n+\sin 2\mu_n)}\int_0^t f'(\sigma)\cos\frac{a\mu_n}{l}(t-\sigma)\,d\sigma$$

Величина

$$\frac{Al}{k}f(t)$$

представляет то смещение поршня, которое должно бы быть, если бы давление действовало „статически“, и значит, величина

$$\varepsilon = -4\frac{Al}{k}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin^2\mu_n}{\mu_n(2\mu_n+\sin 2\mu_n)}\int_0^t f'(\sigma)\cos\frac{a\mu_n}{l}(t-\sigma)\,d\sigma$$

представляет погрешность показаний прибора.

Величина верхнего предела этой погрешности может быть представлена в более наглядной форме, для чего стоит только воспользоваться формулами § 8, в силу которых, положив

$$\frac{a\mu_n}{l} = \lambda_n$$

можно написать ряд неравенств:

$$\left|\int_0^t f'(\sigma)\cos\lambda_1(t-\sigma)\,d\sigma\right| < \frac{c}{\lambda_1}f'(t_i)$$

$$\left|\int_0^t f'(\sigma)\cos\lambda_2(t-\sigma)\,d\sigma\right| < \frac{c}{\lambda_2}f'(t_i)$$

. . . . . .

$$\left|\int_0^t f'(\sigma)\cos\lambda_n(t-\sigma)\,d\sigma\right| < \frac{c}{\lambda_n}f'(t_i)$$

. . . . . .

где $f'(t_i)$ есть наибольшее значение производной от функции $f(t)$ за время нарастания ее и c — постоянная. Считается, что $f'(\sigma)$ положительна и имеет единственный максимум.

Значит, будет по абсолютной величине:

$$|\varepsilon| < \frac{Al}{k}\frac{4lc}{a}f'(t_i)\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\mu_n}\frac{\sin^2\mu_n}{\mu_n(2\mu_n+\sin 2\mu_n)} \qquad (15)$$

Так как корни уравнения $\mu\,\mathrm{tg}\,\mu = \gamma$ идут возрастая, приблизительно, как ряд натуральных чисел, то

$$\frac{1}{\mu_n} < \frac{1}{\mu_1}$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\mu_n} \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} < \frac{1}{\mu_1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)}$$

т. е. рассматриваемая сумма меньше $\frac{1}{4} \frac{1}{\mu_1}$.

Таким образом, имеем

$$|\varepsilon| < c \frac{Al^2}{k} \frac{1}{a\mu_1} f'(t_i)$$

Величина

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{a\mu_1} \tag{16}$$

есть наибольший из периодов колебаний пружины вместе с поршнем, т. е. период „основного“ колебания ее; поэтому предыдущую формулу можно написать так:

$$|\varepsilon| < \frac{Al}{k} \frac{\sqrt{2}}{\pi} f'(t_i) \tau_1$$

Отсюда следует, что *для правильности показаний индикатора необходимо, чтобы период основного колебания его пружины вместе с поршнем был мал по сравнению с продолжительностью нарастания давления.*

Повторив рассуждения § 8, увидим, что когда период τ_1 весьма велик по сравнению с продолжительностью действия давления, то индикатор показывает импульс давления, и будет

$$z_{\max} = \frac{Al}{k} \frac{a\mu_1}{l} J$$

причем μ_1 есть наименьший из корней уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$$

$$\gamma = \frac{Q}{P} = \frac{\text{вес пружины}}{\text{вес поршня}}$$

$$a = \sqrt{\frac{k}{q}} = \sqrt{\frac{klg}{Q}}$$

Нахождение корней уравнения $\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$ производится по приему, объясненному в § 49; здесь же приведем таблицу значений наименьшего корня для разных величин γ.

Таблица 5

Значения наименьшего корня уравнения $\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$

γ	μ_1	γ	μ_1	γ	μ_1
0.01	0.10	1.0	0.86	10.0	1.417
0.05	0.22	1.5	0.98	15.0	1.473
0.1	0.32	2.0	1.13	20.0	1.523
0.2	0.43	3.0	1.30	100.0	1.568
0.3	0.52	4.0	1.27	∞	1.571
0.4	0.59	5.0	1.32		
0.5	0.65	6.0	1.37		
0.6	0.70	7.0	1.39		
0.7	0.75	8.0	1.40		
0.8	0.79	9.0	1.41		
0.9	0.82				

§ 81. Понятно, что в рассмотренном общем случае, когда отношение массы пружины к массе поршня конечное, должны заключаться и два простейшие частные случаи, именно, когда это отношение весьма велико и когда оно весьма мало.

Если предположить, что масса поршня ничтожно мала, то в уравнений (8) надо сделать $\gamma = \infty$, и оно обратиться в такое:

$$\cos \mu = 0$$

и его корни будут

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots \frac{2n-1}{2}\pi \ldots$$

и соответствующие функции будут

$$X_n = \sin \frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{l} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

В силу уравнения $\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$ будет $\frac{\gamma \cos \mu}{\mu} = \sin \mu$, и, следовательно,

$$\frac{\gamma \cos \mu_n \sin \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} = \frac{\sin^2 \mu_n}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} = \frac{1}{(2n-1)\pi}$$

и величина z обратится в такую:

$$z=\frac{4A}{aq\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{2n-1}\int_0^t f(\sigma)\sin\frac{(2n-1)\pi}{l}(t-\sigma)\,d\sigma$$

которую нетрудно получить и непосредственно.

Другой случай, когда масса пружины ничтожно мала по сравнению с массой поршня, приводит к трансцендентному уравнению

$$\mu\,\mathrm{tg}\,\mu=0$$

и его корни суть

$$\mu=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots\ n\pi,\ \ldots$$

все коэффициенты

$$\frac{\sin^2\mu_n}{2\mu_n+\sin 2\mu_n}$$

обратятся в нуль, кроме первого, принимающего неопределенный вид, и величина z будет

$$z=\lim_{q=0}\left[\frac{4A}{aq}\,\frac{\sin^2\mu}{2\mu+\sin 2\mu}\right]\int_0^t f(\sigma)\sin\frac{a\mu}{l}(t-\sigma)\,d\sigma$$

При разыскании этого предела необходимо иметь в виду следующие соотношения:

$$a^2=\frac{k}{q},\qquad Q=gql$$

$$\mu\,\mathrm{tg}\,\mu=\frac{Q}{P}=\frac{gql}{P}$$

Из последнего уравнения следует, что при бесконечно малом q наименьший корень μ выражается так:

$$\pi=\sqrt{\frac{gql}{P}}$$

значит,

$$\lim\frac{a\mu}{l}=\lim\frac{1}{l}\sqrt{\frac{k}{q}}\sqrt{\frac{glq}{P}}=\sqrt{\frac{kg}{lP}}$$

Затем

$$\lim\frac{4A}{aq}\,\frac{\sin^2\mu}{2\mu+\sin 2\mu}=4A\lim\frac{1}{aq}\,\frac{\mu}{4}=A\lim\frac{1}{\sqrt{kq}}\sqrt{\frac{gql}{P}}=A\sqrt{\frac{gl}{kP}}$$

и, полагая

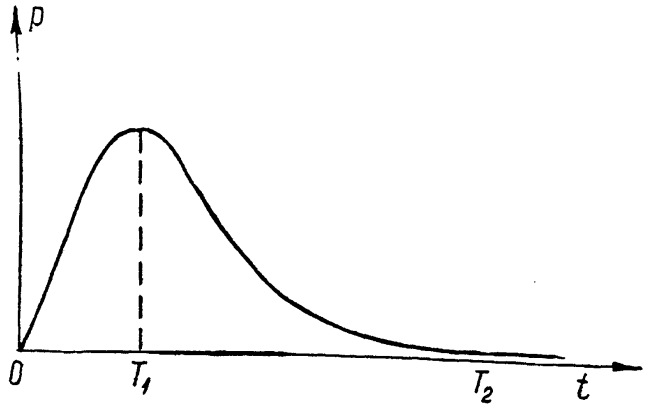
$$\alpha^2=\frac{kg}{lP}$$

мы видим, что $\lim \frac{a\lambda}{l} = \alpha$ и величина $\sqrt{\frac{gl}{kP}} = \frac{\alpha}{k}$, и у нас получится

$$z = \frac{Al}{k}\alpha \int_0 f(\sigma) \sin \alpha (t - \sigma)\, d\sigma$$

в согласии с формулами § 8, представляющими колебание груза, висящего на пружине, массою коей пренебрегают, и подверженного действию переменной силы.

При пользовании индикатором или крешерами необходимо сообразоваться с изложенным в этих параграфах, ибо если период основного колебания системы *не мал* по сравнению с продолжительностью действия силы, то показания прибора не дают нарастания и вообще хода давления в зависимости от времени, и даже в том случае, когда этот период *велик* по сравнению со сказанной продолжительностью, то, например, обжатие крешера может быть пропорционально *импульсу давления*, а не наибольшей величине давления.



Фиг. 45.

Чтобы дать наглядное представление о величине и характере погрешности в записи, даваемой индикатором при разной величине отношения периода колебаний его поршня к продолжительности нарастания давления, приведу пример, рассмотренный в моей статье „Некоторые замечания о крешерах и индикаторах“ (Изв. имп. Акад. Наук, 1909).

Этот пример составлен так: за функцию $f(t)$, представляющую изменяемость давления, взята следующая:

$$f(t) = a \sin \frac{\pi t}{2T_1} \qquad \text{для} \quad 0 < t < T_1$$

$$f(t) = ae^{-\frac{h(t-T_1)}{T_2}} \left[1 + \frac{h(t-T_1)}{T_2}\right] \qquad \text{для} \quad t > T_1$$

причем h настолько большая величина, что с принятою для расчета степенью точности величиною $e^{-h}(1+h)$ можно пренебречь.

Такая функция изображается чертежом (фиг. 45), и изменяя величины T_1 и T_2, можно придавать этой кривой разный вид.

Взяв затем различные величины отношения

$$\frac{\tau_1}{4T_1} = \lambda \qquad \text{и} \qquad \frac{\tau_1}{T_2} = \mu$$

и положив для примера $\lambda = \mu$, рассчитываем по выведенным выше формулам величину z, т. е. запись, даваемую индикатором, и, на основании этих расчетов, составляем чертежи (фиг. 46—51), на которых эта запись и показана пунктирною чертою, а истинный закон нарастания давления — сплошною. Для простоты все предыдущие расчеты сделаны в предположении, что масса пружины мала, но сущность дела остается без перемены и во всех остальных случаях.

§ 82. По поводу предыдущей задачи рассмотрим также действие силы, внезапно приложенной, причем ограничимся тем лишь случаем, когда масса поршня ничтожно мала.

Мы видели, что в общем случае величина u_2 дается формулою

$$u_2 = \frac{4A}{aq} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\gamma \cos \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} \sin \frac{\mu_n x}{l} \int_0^t f(\sigma) \sin \frac{a\mu_n}{l} (t - \sigma)\, d\sigma$$

В силу уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$$

будет вообще $\frac{\gamma \cos \mu}{\mu} = \sin \mu$, в пределе же при $\gamma = \infty$ и $\cos \mu = 0$ будет

$$\mu_n = \frac{2n-1}{2} \pi \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

значит,

$$\sin \mu_n = \sin \frac{2n-1}{2} \pi = (-1)^{n-1}$$

и предыдущая формула принимает вид

$$u_2 = \frac{4A}{\pi aq} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} \sin \frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{l} \int_0^t f(\sigma) \sin \frac{2n-1}{2} \frac{a\pi}{l} (t - \sigma)\, d\sigma \qquad (1)$$

Рассмотрим подробнее тот частный случай, когда сила прилагается внезапно. Для этого стоит только сделать

$$f(\sigma) = p$$

и у нас получится

$$u_2 = \frac{8Al}{\pi^2 a^2 q} p \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{l} \left[1 - \cos \frac{2n-1}{2} \frac{a\pi}{l} t\right] \qquad (2)$$

Чтобы получить полное сжатие пружины, т. е. колебание конца ее B, стоит только сделать $x = l$; тогда будет

$$u_2 = z = \frac{8Apl}{\pi^2 a^2 q} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} 2\sin^2 \frac{2n-1}{4} \frac{a\pi t}{l}$$

Очевидно, что z достигает наибольшего значения при $t = \frac{2l}{a}$ и будет

$$z_{\max} = \frac{16\,Apl}{\pi^2 a^2 q} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Но известно, что

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

так что

$$z_{\max} = \frac{2Apl}{a^2 q} = 2\frac{Apl}{k}$$

т. е. *вдвое* больше статистического сжатия, соответствующего давлению p.

Этот результат относится к *любой* упругой системе: наибольшая деформация, производимая усилием, внезапно приложенным, *вдвое* больше деформации, соответствующей равновесию под действием того же усилия.

Любопытно, вместе с тем, проследить за самым процессом, каким образом после приложения внезапного усилия нарастает деформация пружины не только в ее конце, но и в промежуточных точках, т. е. исследовать вид функции, представляемой уравнением (2).

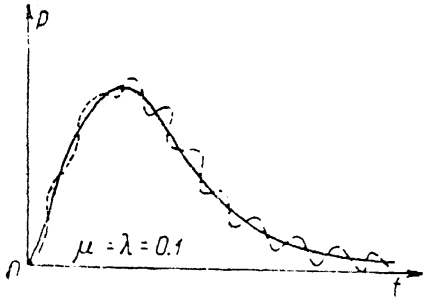
Для этого применим тот прием суммирования рядов Фурье, который показан в § 69.

Пусть будет

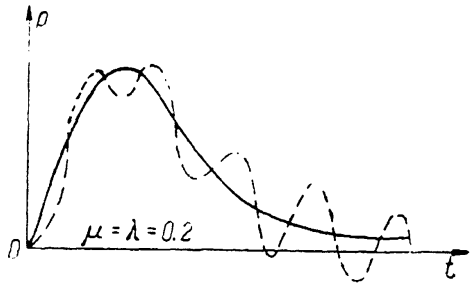
$$F_1(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{l}$$

Ясно, что эта функция имеет своим периодом $4l$, равна нулю при $x = 0$ и при $x = +2l$ и $x = -2l$; при $x = l$ будет $F_1(l) = \frac{\pi^2}{8}$; при $x = -l$ будет $F_1(-l) = -\frac{\pi^2}{8}$; вместе с тем, эта функция имеет производную, которая выражается равенством

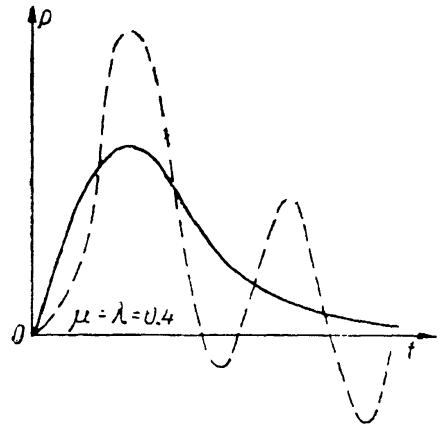
$$F_1'(x) = \frac{\pi}{2l} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{l}$$



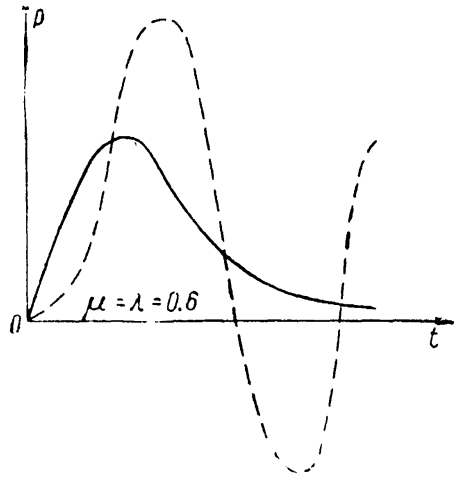
Фиг. 46.



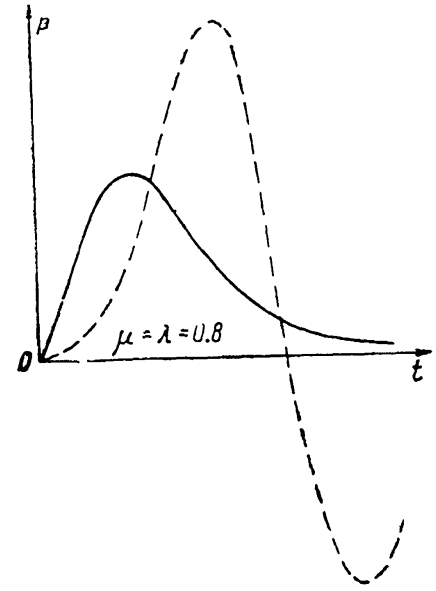
Фиг. 47.



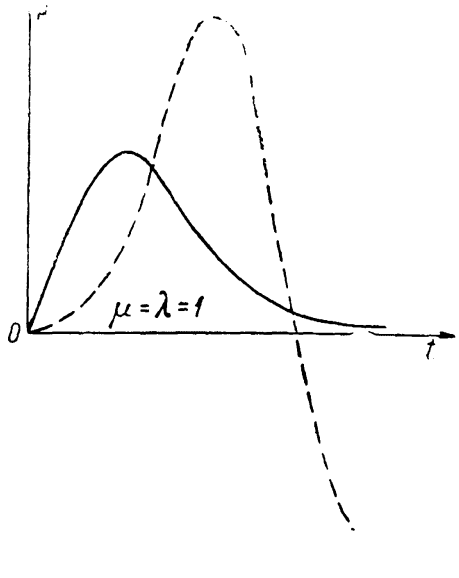
Фиг. 48.



Фиг. 49.



Фиг. 50.



Фиг. 51.

и так как период этой функции есть $4l$, функция эта четная и интеграл

$$\int_0^{2l} \cos\frac{2n-1}{2}\frac{\pi x}{l}\cos\frac{2k-1}{2}\frac{\pi x}{l}\,dx = 0, \quad \text{если} \quad n \neq k$$

то, полагая, что $F_1'(x)=\varphi(x)$, составляем выражение коэффициента a_n в разложении $\varphi(x)$:

$$\frac{2}{2l}\int_0^{2l}\varphi(x)\cos\frac{2n-1}{2}\frac{\pi x}{l}\,dx=a_n$$

и, предполагая, что функция $\varphi(x)$ имеет разрывы в точках $c_1, c_2, \ldots$, получим, что члены первого порядка относительно $\frac{1}{2n-1}$ в выражении a_n будут

$$\frac{2}{(2n-1)\pi}\left\{[\varphi(c_1-0)-\varphi(c_1+0)]\sin\frac{2n-1}{2}\frac{\pi c_1}{l}+\right.$$
$$\left.+[\varphi(c_2-0)-\varphi(c_2+0)]\sin\frac{2n-1}{2}\frac{\pi c_2}{l}+\ldots\right\}$$

Значит, будет

$$\frac{\pi}{2l}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{2}{(2n-1)\pi}[\varphi(c_1-0)-\varphi(c_1+0)]\sin\frac{2n-1}{2}\frac{\pi c_1}{l}$$

т. е.

$$\sin\frac{2n-1}{2}\frac{\pi c_1}{l}=(-1)^{n-1}$$

и

$$\varphi(c_1-0)-\varphi(c_1+0)=\frac{\pi^2}{4l}$$

Из первого из этих равенств следует

$$c_1=l$$

а так как

$$\varphi(c_1)=\frac{1}{2}\varphi(c_1-0)+\frac{1}{2}\varphi(c_1+0)=0$$

$$\varphi(c_1-0)=+\frac{\pi^2}{8l}\quad\text{и}\quad\varphi(c_1+0)=-\frac{\pi^2}{8l}$$

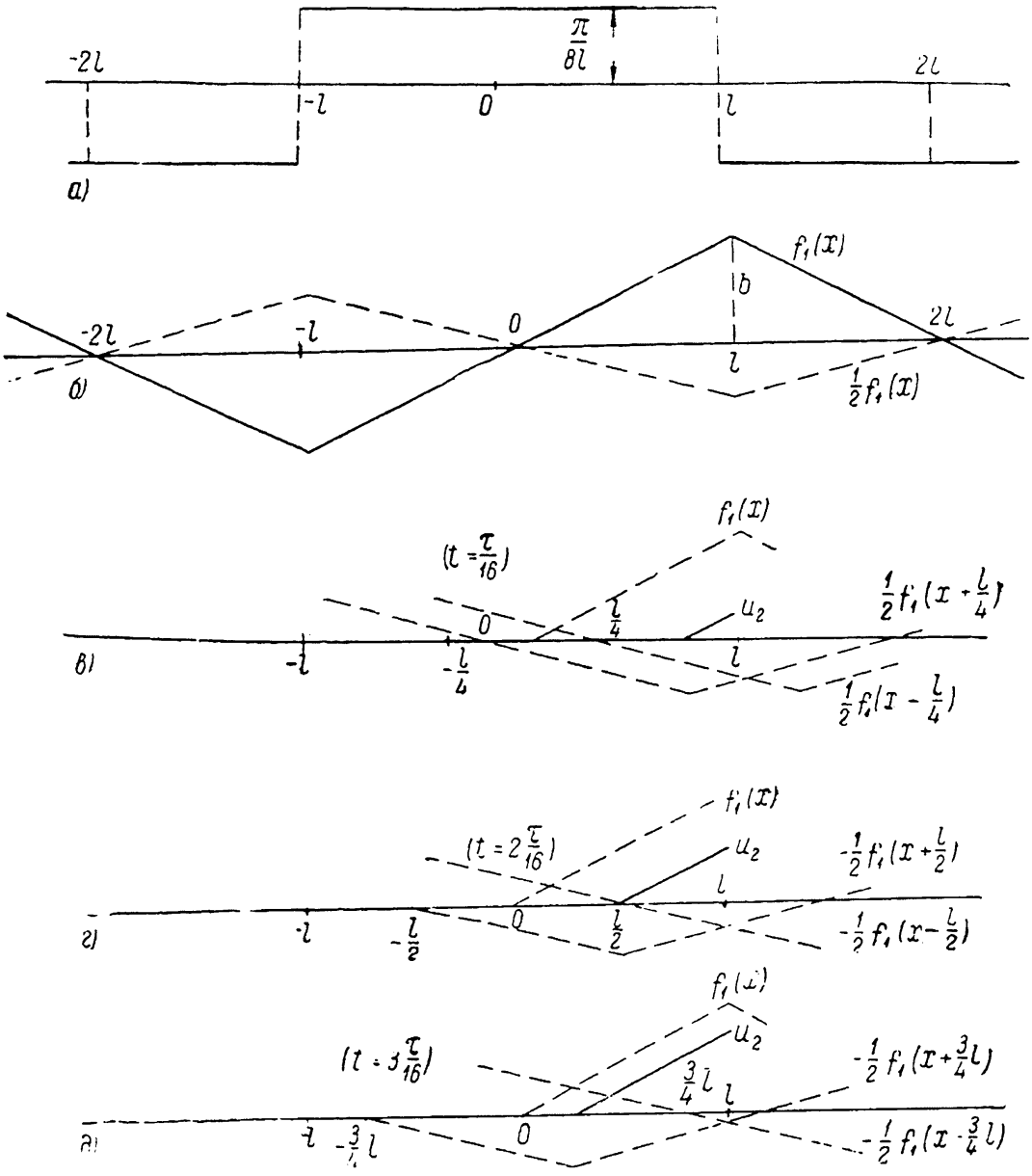
и у нас будет

$$F_1'(x)=\varphi(x)=\frac{\pi^2}{8l}\qquad\text{для}\quad 0<x<l$$

$$F_1'(x)=\varphi(x)=-\frac{\pi^2}{8l}\qquad\text{для}\quad l<x<2l$$

т. е. функция $F_1'(x)$ представляется графически чертежом (фиг. 52, *а*), следовательно, функция

$$f_1(x)=\frac{8Alp}{\pi^2 a^2 q}F_1(x)$$



Фиг. 52.

представляется графически чертежом (фиг. 52, *б*), и наибольшая ордината

$$b = \frac{8Alp}{\pi^2 a q}\frac{\pi^2}{8} = \frac{Alp}{a^2 q}$$

В состав величины u_2 входит еще член

$$F_2(x) = -\frac{8Alp}{\pi^2 a^2 q}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\cos\frac{2n-1}{2}\frac{a\pi t}{l}\sin\frac{2n-1}{2}\frac{\pi x}{l}$$

но так как

$$2\cos\frac{2n-1}{2}\frac{a\pi t}{l}\sin\frac{2n-1}{2}\frac{\pi x}{l}=\sin\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{l}[x+at]+\sin\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{l}[x-at]$$

то, положив

$$x+at=\xi \quad \text{и} \quad x-at=\eta$$

мы напишем предыдущее равенство так:

$$F_2(x)=-\frac{4Al}{\pi^2 aq}\left[\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}\sin\frac{2n-1}{2}\frac{\pi\xi}{l}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{2n-1}{2}\frac{\pi\eta}{l}\right]$$

откуда следует

$$F_2(x)=-\frac{1}{2}[f_1(\xi)+f_1(\eta)]=-\frac{1}{2}[f_1(x+at)+f_1(x-at)]$$

графическое же представление функции $f_1(x)$ дано выше.

Будем теперь придавать времени t последовательно значения:

$$0,\ \frac{\tau_1}{16},\ 2\frac{\tau_1}{16},\ 3\frac{\tau_1}{16},\cdots 15\frac{\tau_1}{16},\ \tau_1$$

причем

$$\tau_1=\frac{4l}{a}$$

и строить величину u_2, даваемую формулою

$$u_2=f_1(x)-\frac{1}{2}[f_1(x+at)+f_1(x-at)]$$

пользуясь графическим представлением функции f_1.

Очевидно, что при $t=0$ будет $u_2=0$; когда $t=\frac{\tau_1}{16}$, то $at=\frac{l}{4}$, и значит, будет

$$f_1(x+at)=f_1\left(x+\frac{l}{4}\right) \quad \text{и} \quad f_1(x-at)=f_1\left(x-\frac{l}{4}\right)$$

Графически функцию $-\frac{1}{2}f_1\left(x+\frac{l}{4}\right)$ получим, продвинув ломаную, изображающую $-\frac{1}{2}f_1(x)$, влево на $\frac{l}{4}$, функцию же $-\frac{1}{2}f_1\left(x-\frac{l}{4}\right)$ получим, продвинув ту же ломаную вправо на $\frac{l}{4}$; тогда получится чертеж (фиг. 52, *в*).

Беря, затем, на протяжении от $x=0$ до $x=l$ алгебраическую сумму ординат всех трех ломаных, получим u_2.

Совершенно так же поступаем для дальнейших значений t и получаем тот ряд ломаных, который показан на чертежах в фиг. 52, *г*, *д*.

Отметим, что деформация бежит *равномерно* по длине пружины; вместе с тем и колебание конца пружины совершается не *синусоидальное* гармоническое, а прерывистое — сперва *равномерно* возрастающее до наибольшей величины, затем *сразу* меняющее скорость на обратную, равномерно убывая *до нуля*, достигнув которого скорость вновь сразу меняет знак и т. д.

Нетрудно видеть, что движение промежуточных точек происходит с остановками. Предлагается, например, в виде задачи построить график, изображающий скорость и закон движения середины пружины.

§ 83. С правильностью показаний индикатора и в особенности с правильным их истолкованием часто связаны весьма большие интересы, как то можно видеть по следующему примеру.

В январе 1914 г., при испытании стрельбою на полигоне пробной установки 12-дюймовых орудий 52 калибров длиною, предназначенных для линейных кораблей, снимались специальным индикатором Виккерса диаграммы давления в цилиндре компрессора; получилась кривая, представленная на чертеже (фиг. 53, *а*).

Эта диаграмма показывает, что по записи индикатора наибольшее давление достигает 450 ат. По контракту с Металлическим заводом, построившим эту установку, испытание цилиндров компрессоров должно было производиться двойным давлением, т. е. до 900 ат, между тем все 48 компрессоров были уже готовы, рассчитаны они были на нормальное давление 250 ат, т. е. на пробное 500 ат. Замена их новыми повлекла бы расход около 2 500 000 руб. и значительно отдалила бы срок готовности кораблей. Произведенное мною исследование этого вопроса показало, что индикатор работал в условиях, соответствующих фиг. 51, и записал давление, в *два* раза большее действительно имевшего место. Так как подобное обстоятельство может представиться и в других случаях, то привожу сущность упомянутого исследования.

§ 84. В § 80 показано [формула (16)], что период колебаний поршня индикатора на пружине его выражается формулою

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\mu_1}\frac{l}{a} \tag{1}$$

в которой μ_1 есть наименьший положительный корень уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \frac{Q}{P} \tag{2}$$

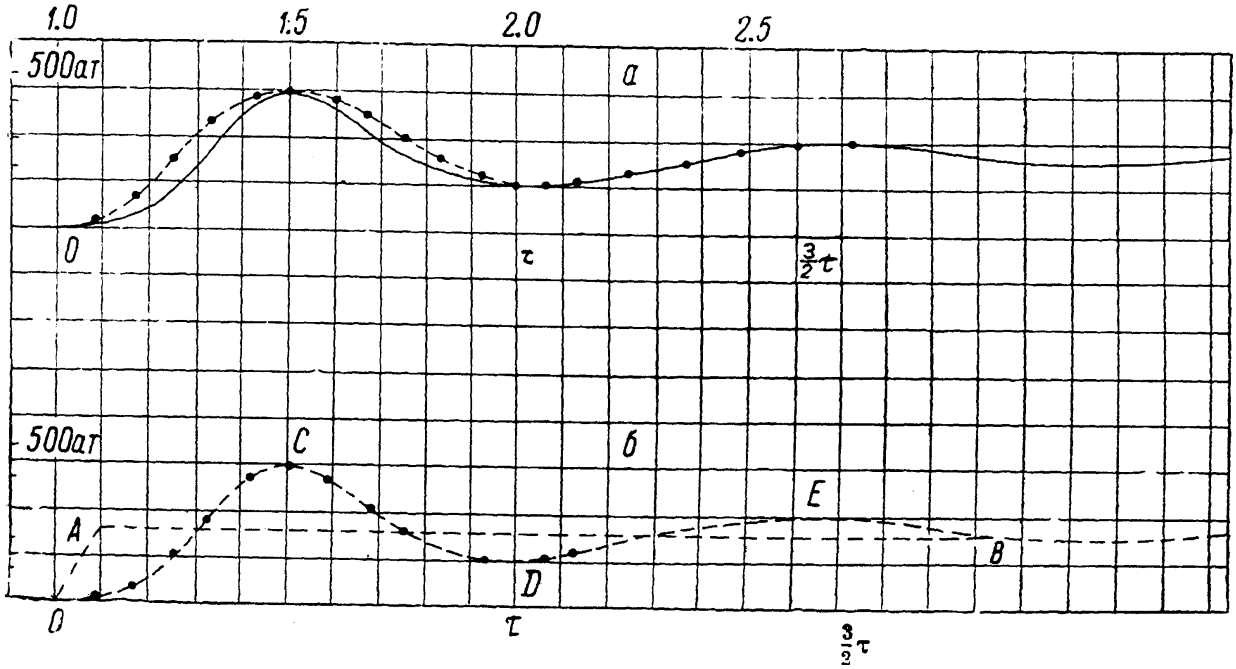
где Q есть вес пружины, P — вес поршня, l — длина пружины в ненагруженном ее состоянии,

$$a = \sqrt{\frac{klg}{Q}} \tag{3}$$

причем k есть мера жесткости пружины, т. е. множитель, на который надо умножить *относительное* сжатие пружины $\frac{z}{l}$, чтобы получить действующее усилие F:

$$F = k\frac{z}{l} \tag{4}$$

В рассматриваемом случае было: $Q = 0.817$ кг, $P = 0.092$ кг, длина пружины $l = 12$ см, жесткость пружины $k = 1165$ кг.



Точки — результаты наблюдения
----- *Наблюденная кривая*

Фиг. 53

Таким образом,

$$a = \sqrt{\frac{1167 \cdot 12 \cdot 981}{0.817}} = 4100 \text{ см/сек.}$$

$$\frac{Q}{P} = \frac{0.817}{0.092} = 8.9$$

Наименьший корень уравнения

$$\mu \cdot \operatorname{tg} \mu = 8.9$$

есть

$$\mu_1 = 1.41$$

следовательно период основного колебания

$$\tau_1 = \frac{2\pi \cdot 12}{1.41 \cdot 4100} = 0.013 \text{ сек.}$$

По записанной кривой видно, что расстояние между двумя последовательными вершинами волн записи составляет около 11 см, что при ско-

рости отката в этот момент около 8.5 м/сек. и будет соответствовать продолжительности 0.013 сек.

При снятии диаграммы не было произведено велосиметрической записи отката, но при другом выстреле наибольшая скорость составляла 22 фут (7 м) в секунду. Расчетная же величина наибольшей скорости отката составляла до 9 м/сек.

Таким образом видно, что если бы принять даваемую индикатором запись за истинную кривую давления, то надо бы допустить, что это давление претерпевало показанное волнообразное изменение в течение времени около 0.013 сек., которое или в точности равно, или весьма близко к периоду свободных колебаний поршня индикатора.

Именно, в этих условиях, как следует из теории прибора, его показания совершенно не согласуются с истинной кривой давления, а представляют наложение свободных колебаний поршня, вследствие инерции его и пружины, на вынужденные, которые пропорциональны действующему давлению.

Примером такой разницы показаний прибора и истинной кривой давления могут служить фиг. 46—51, на которых сплошною чертою показана истинная кривая давления, пунктиром — та запись, которую доставил бы индикатор при различном отношении периода его свободных колебаний к продолжительности нарастания давления.

Уже сказанного в предыдущем параграфе достаточно, чтобы убедиться, что в рассматриваемом случае прибор Виккерса может служить для нахождения *среднего* давления за время отката, но не может давать закона быстро происходящих (по сравнению с 0.013 сек.) изменений давления с течением времени.

Нетрудно подтвердить это обстоятельство и математическим анализом, причем даже достаточно воспользоваться упрощенной теорией индикатора, в которой рассматривается лишь главное его колебание, соответствующее основному тону.

Форма колебания, соответствующая основному тону, есть

$$u = A\cos\left(\frac{\mu_1 at}{l} + \gamma\right)\sin\frac{\mu_1 x}{l}$$

колебание же поршня получится, положив $x = l$, т. е. будет

$$z = A\cos\left(\frac{\mu_1 at}{l} + \gamma\right)\sin\mu_1$$

следовательно, величину u, т. е. смещение точки пружины, соответствующей абсциссе x, можно писать так:

$$u = \frac{\sin\frac{\mu_1 x}{l}}{\sin\mu_1} z \qquad (5)$$

Живая сила всей системы, состоящей из поршня и пружины, будет

$$2T = \frac{P}{g} z'^2 + \frac{Q}{lg} \int_0^l u'^2 \, dx = \frac{P}{g} z'^2 + \frac{Q}{lg} \frac{z'^2}{\sin^2 \mu_1} \int_0^l \sin^2 \frac{\mu_1 x}{l} \, dx$$

т. е. будет

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{g} + \alpha \frac{Q}{g} \right) z'^2 \tag{6}$$

причем α есть „коэффициент приведения“ массы пружины:

$$\alpha = \frac{1}{l \sin^2 \mu_1} \int_0^l \sin^2 \frac{\mu_1 x}{l} \, dx = \frac{1}{2l \sin^2 \mu_1} \left[\int_0^l dx - \int_0^l \cos \frac{2\mu_1 x}{l} \, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \mu_1} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{\sin 2\mu_1}{\mu_1} \right] \tag{7}$$

В нашем случае $\mu_1 = 1.41 = 81^\circ$, и будет

$$\alpha = 0.465$$

Обозначая через M „приведенную“ массу системы

$$M = \frac{1}{g} (P + \alpha Q) \tag{7'}$$

видим, что живая сила системы будет

$$T = \frac{1}{2} M z_2'^2 \tag{8}$$

Когда пружина сжата на величину z, то противодействие, ею оказываемое,

$$F = \frac{kz}{l}$$

и, значит, элементарная работа при перемещении δz будет

$$\delta U = - \frac{kz}{l} \delta z$$

следовательно, уравнение движения системы будет

$$Mz'' + \frac{k}{l} z = 0 \tag{9}$$

когда на нее никаких сил не действует. Если же на поршень действует какая-нибудь внешняя сила G, то уравнение движения будет

$$Mz'' + \frac{k}{l} z = G \tag{10}$$

В нашем случае G есть внешнее давление на поршень индикатора жидкости, находящейся в компрессоре, оно зависит только от времени, если же поршень испытывает трение или иные сопротивления, то их надо также присовокупить к силе G.

Из уравнения (10) следует, что период свободных колебаний поршня равен:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{Ml}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{(P + \alpha Q) l}{kg}}$$

в нашем случае это составит

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{0.092 + 0.465 \cdot 0.817}{1165 \cdot 981} \cdot 12} = 0.0137 \text{ сек.}$$

т. е. величина, близкая к рассчитанной выше.

§ 85. Когда выражение G известно, то по уравнению (10) найдется смещение поршня z. В нашем же случае мы встречаемся с обратною задачею — известна величина z, надо найти G. При этом z задано графически и не в функции времени t, а в функции s длины пути, пройденного от начала отката.

Так как нам приходится рассматривать лишь небольшой участок, соответствующий значениям s: от $s = 10$ до $s = 28$ см, то можно считать что на этом протяжении, или, точнее, на протяжении каждой полуволны, величина s изменяется пропорционально времени, т. е. скорость отката постоянная.

Чтобы воспользоваться уравнением (10) для определения G, пришлось бы величину z, заданную графически, дважды дифференцировать. Такой процесс чрезвычайно ненадежен, и чтобы его избежать, следует в подобных вопросах представить самую величину такою функцией времени t, которою эта величина изображалась бы достаточно точно на всем ее протяжении, и уже эту функцию подставлять в уравнение (10).

Для выбора такой функции надо сообразоваться с самым характером явления.

Так, в нашем случае мы, очевидно, имеем дело с затухающими колебаниями. Простейший случай таких затухающих колебаний есть тот, когда сопротивление состоит из *постоянного* трения.

В этом случае последовательные амплитуды размахов уменьшаются в арифметической прогрессии. Случай этот разобран в § 21 и на основании выводов этого параграфа, допустив на время, что давление на поршень постоянно равно N, так что

$$G = N \pm F$$

где F — сила трения и знак + надо брать, когда $z' < 0$, и знак —, когда $z' > 0$, то мы увидали бы, что z должно представляться формулами такого вида:

$$z_1 = (a - b)\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{\tau}\right) \tag{11}$$

$$z_2 = (a + b) + (a - 3b)\cos\frac{2\pi t_1}{\tau} \tag{12}$$

$$z_3 = (a - b) - (a - 5b)\cos\frac{2\pi t_2}{\tau} \tag{13}$$

причем первая формула относится к первому полуразмаху ($z' > 0$), вторая — ко второму ($z' < 0$), третья — к третьему ($z' > 0$), и время t, t_1, t_2 считается всякий раз от начала этого полуразмаха.

Чтобы найти величины a и b, надо взять последовательные ординаты, соответствующие вершинам и подошвам волн нашей записи. Эти последовательные ординаты суть в миллиметрах на чертеже: 0, 30, 10, 20; таким образом, делая

$$t = \frac{\tau}{2} \quad \text{в формуле (11)}$$

$$t_1 = \frac{\tau}{2} \quad \text{„ „ (12)}$$

$$t_2 = \frac{\tau}{2} \quad \text{„ „ (13)}$$

получим

$$30 = 2a - 2b$$

$$10 = 4b$$

$$20 = 2a - 6b$$

Все эти три уравнения оказываются совместными и дают

$$a = 17.5; \qquad b = 2.5$$

Подставляя эти величины в формулы (11), (12) и (13) и вычисляя величины z_1, z_2, z_3 для значений t, t_1 и t_2 через $\frac{1}{12}\tau$, получим табл. 6.

Вынося эти величины на график и сопоставляя их с действительно наблюденною кривою, видим *систематическое* уклонение на первой и второй полуволне, при этом уклонение это имеет также периодический характер с периодом $\frac{1}{2}\tau$ (фиг. 53, *а*)

По ходу кривой, представляющей это уклонение, видно, что его следует представлять формулою

$$\zeta = c\left[1 - \cos\frac{4\pi t}{\tau}\right] \qquad (14)$$

и, действительно, взяв $c = 2.5$ мм и присовокупляя величину ζ, вычисленную по формуле (14), к величинам z_1 и z_2, получим следующую таблицу, которая показывает, что на своем протяжении величина z, рассчитанная по формулам

$$z = z_1 + \zeta \quad \text{для } t \text{ от } 0 \text{ до } 6\frac{\tau}{12}$$

$$z = z_2 + \zeta \quad \text{для } t \text{ от } \frac{6\tau}{12} \text{ до } 12\frac{\tau}{12}$$

$$z = z_3 \quad \text{для } t \text{ от } 12\frac{\tau}{12} \text{ до } 18\frac{\tau}{12}$$

Таблица 6

Время от начала движения поршня	Время от подошвы каждой полуволны	Первая полуволна	Вторая полуволна	Третья полуволна
$\tau/12$	$\tau/12$	мм	мм	мм
0	0	0.0	—	—
1	1	2.0	—	—
2	2	0.5	—	—
3	3	15.0	—	—
4	4	22.5	—	—
5	5	28.0	—	—
6	6.0	30.0	30.0	—
7	1	—	28.7	—
8	2	—	25.0	—
9	3	—	20.0	—
10	4	—	15.0	—
11	5	—	11.3	—
12	6.0	—	10.0	10.0
13	1	—	—	10.7
14	2	—	—	12.5
15	3	—	—	15.0
16	4	—	—	17.5
17	5	—	—	19.3
18	6.0	—	—	20.0

практически *совпадает* с наблюденною кривой, так как показанные в табл. 7 на стр. 369 разности ординат, вычисленные по формулам и снятые с чертежа, выражаясь десятыми долями миллиметра, не выходят за пределы ширины карандашной линии на подлинной записи индикатора.

Таким образом, получив аналитическое представление функции z, мы можем воспользоваться уравнением (10) для нахождения величины G, и мы получим.

Таблица 7

Время от начала движения	Вычисленные ординаты	Ординаты с чертежа	Разности выч. — снят.
$\tau/_{12}$	мм	мм	мм
0	0	0	0
1	0.7	1	—0.3
2	3.8	3	0.8
3	10.0	9	1.0
4	17.7	18	—0.3
5	26.7	26	0.7
6	30.0	30	0.0
7	26.7	26	0.7
8	21.2	21	0.2
9	15.0	16.5	—1.5
10	11.2	12.5	—1.3
11	10.0	9.8	0.2
12	10.0	9.8	0.2
13	10.7	11.0	—0.3
14	12.5	13	—0.5
15	15.0	15	0.0
16	17.5	17	0.5
17	19.3	19.5	—0.2
18	20.0	20	0.0

а) Для первой полуволны:

$$z = (a - b)\,(1 - \cos nt) - c\,(1 - \cos 2nt)$$

где

$$a = 17.5 \text{ мм} = 1.75 \text{ см}$$
$$b = 2.5 \text{ мм} = 0.25 \text{ см}$$
$$c = 2.5 \text{ мм} = 0.25 \text{ см}$$
$$n = 450$$

$$n^2 = 202\,000 = \frac{k}{lM}$$

$$M = (0.092 + 0.465 \cdot 0.817)\,\frac{1}{981} = \frac{0.472}{981} = 4.8 \cdot 10^{-4}$$

Из уравнения (10) следует

$$\frac{G}{M} = z'' + n^2 z$$

или, по подстановке,

$$\frac{G}{M} = n^2 [a - b - c] - 3n^2 c \cos 2nt \tag{15}$$

б) Для второй полуволны:

$$\begin{aligned} z &= (a + b) + (a - 3b) \cos nt - c (1 - \cos 2nt) \\ \frac{G}{M} &= n^2 (a + b + c) - 3n^2 c \cos 2nt \end{aligned} \tag{16}$$

в) Для третьей полуволны:

$$\begin{aligned} z &= a - b - (a - 5b) \cos nt \\ \frac{G}{M} &= n^2 (a - b) \end{aligned} \tag{17}$$

В формулах (15), (16), (17) надо величины a, b и c выражать в сантиметрах, тогда сила G получится в килограммах.

Присутствие в этих формулах члена $3n^2c \cos 2nt$ с периодом колебания системы заставляет искать причину появления этого члена не в изменении давления в цилиндре компрессора, а в особенностях конструкции самого прибора.

Написав равенство

$$\cos 2nt = 1 - 2 \sin^2 nt$$

видим, что член

$$-3n^2 c \cos 2nt = -3n^2 c + 6n^2 c \sin^2 nt$$

и, значит, например, для первой полуволны будет

$$\frac{G}{M} = n^2 (a - b - 4c) + 6n^2 c \sin^2 nt$$

но при

$$a = 1.75; \quad b = 0.25; \quad c = 0.25$$

будет

$$a - b - 4c = 0.5$$

и остается

$$\frac{G}{M} = 6n^2 c \sin^2 nt + 0.5n^2 \tag{15'}$$

точно так же для второй полуволны будет

$$\frac{G}{M} = (a + b - 4c) n^2 + 6n^2 c \sin^2 nt \tag{16'}$$

В выражениях для z главный член есть первый, и тогда для первой полуволны будет приближенно

$$z' = z_1' = n(a - b)\sin nt$$

для второй:

$$\frac{dz}{dt} = z' = z_2' = -n(a - 3b)\sin nt$$

следовательно, член $6n^2 c \sin^2 nt$ будет приближенно пропорционален z'^2, т. е. второй степени скорости движения поршня, и, значит, его надо искать в тех гидравлических сопротивлениях, которые поршень индикатора встречает.

Обращаясь к конструкции прибора, мы заметим, что завинтованный отросток, которым индикатор ввинчивается в трубку, соединяющую его с цилиндром компрессора, прикрыт ввернутой в него особой втулкой, которая снабжена лишь двумя маленькими дырочками диаметром в 0.05 дюйма, и лишь через эти две маленькие дырочки находящаяся под поршнем индикатора полость сообщается с цилиндром.

Очевидно, что это приспособление сделано, чтобы гасить колебания поршня, не влияя на установившиеся показания прибора.

Обратив внимание на это устройство, мы сейчас же видим, откуда берется член $-3n^2 c \cos 2nt$ в формуле (16).

Для второй полуволны поршень движется в сторону к нулевому своему положению, и, значит, он должен выталкивать из полости под ним жидкость через две вышеупомянутые дырочки, ясно, что он будет встречать сопротивление, пропорциональное квадрату скорости своего движения.

Необходимо обратить внимание, что скорость тока жидкости через сказанные дырочки будет весьма велика.

В самом деле, наибольшая скорость поршня будет

$$n(a - 3b) = 450 \cdot 1.00 = 450 \text{ см/сек.}$$

Площадь поршня $S = \frac{1}{10}$ кв. дюйма.

Площадь дырочки $s = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{20}\right)^2 = \frac{1}{500}$ кв. дюйма, значит, отношение

$$\frac{S}{2s} = 25$$

а принимая во внимание сжатие струи, будем иметь, что отношение скоростей протока жидкости и поршня составит не 25, а около 40.

Значит, наибольшая скорость протока составит около 180 м/сек., чему соответствует давление до 300 ат.

Сопоставляя все вышеизложенное, мы можем притти к заключению, что, по самому своему устройству, прибор Виккерса может давать запись лишь установившегося и сравнительно медленно изменяющегося давления, показываемые же им колебания в рассматриваемом случае не служат признаком изменяемости давления, и если бы давление, например, нарастало так, как показано на фиг. 53, *б* ломаной OAB, то прибор зачертил бы кривую $OCDE$, полученную при испытаниях.

Вообще, этот прибор пригоден для определения по его записи среднего давления, а не быстрой изменяемости давления с течением времени.

§ 86. Чтобы показать, каким образом выводы предыдущих параграфов прилагаются к рассмотрению крутильных колебаний вала, возьмем следующий пример.

На вал, несущий на своем конце маховик, в точке A действует переменный момент

$$M = M_0 + m \sin pt = M_0 + m \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

на маховик же действует постоянное усилие, равное $-M_0$; требуется найти крутильные колебания вала, происходящие вследствие такой изменяемости движущего момента.

Ясно, что это колебательное движение не будет зависеть от величины M_0, которая производит лишь равномерное закручивание вала на протяжении от A до B, и, значит, для нашей задачи можно взять и $M_0 = 0$, от которого установившееся колебательное движение не зависит, если только не рассматривать того колебательного движения, которое произойдет от *внезапного* приложения усилий M_0 в точке A и усилия $-M_0$ в точке B.

Итак, в нашем случае надо сперва вообразить, что движущий момент приложен в смежности с точкою A, абсцисса которой равна b, и распределен как бы то ни было на протяжении от b до $b+\lambda$, однако так, что полная величина этого момента есть $m \sin pt$, т. е. взять функцию $F(x, t)$ так:

$F(x, t) = 0$	для	промежутка	от	$x = 0$	до	$x = b$
$F(x, t) = \omega(x) \sin pt$	„	„	„	$x = b$	до	$b + \lambda$
$F(x, t) = 0$	„	„	„	$x = b + \lambda$	до	$x = l$

причем

$$\int_b^{b+\lambda} \omega(x)\, dx = m$$

независимо от λ, и рассмотреть предельный случай, когда $\lambda = 0$; ясно, что эта задача ничем не отличается от предыдущей, только вместо функции $f(t)$ надо брать $\sin pt$, и абсцисса c не равна l, а равна b.

Вместе с тем, из формул § 80 видно, что величина $H_n(t)$ *не зависит* от вида функции $\omega(x)$; поэтому, можно в формуле

$$\frac{1}{4}(2\mu_n + \sin 2\mu_n) H_n(t) = \frac{\mu_n}{Kl} f(t) \int_b^{b+\lambda} \omega(\xi) \sin \frac{\mu_n \xi}{l} d\xi$$

брать

$$\omega(\xi) = C$$

при условии, что

$$\lim_{\lambda=0} (C\lambda) = m$$

и

$$f(t) = \sin pt$$

тогда будет

$$\frac{1}{4}(2\mu_n + \sin 2\mu_n) H_n(t) = -\frac{C}{K} \sin pt \left[\cos \frac{\mu_n \xi}{l}\right]_b^{b+\lambda} =$$

$$= 2\frac{C}{K} \sin pt \sin \frac{\mu_n}{l}\left(b + \frac{\lambda}{2}\right) \sin \frac{\mu_n \lambda}{2l}$$

и, значит, в пределе при $\lambda = 0$ будет

$$H_n(t) = \frac{4m}{Kl} \frac{\mu_n \sin \frac{\mu_n b}{l}}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \sin pt$$

Следовательно,

$$S_n = \frac{4m}{Kl} \frac{\mu_n \sin \frac{\mu_n b}{l}}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \frac{l^2}{a^2 \mu_n^2 - p^2 l^2} \sin pt$$

и

$$u_2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} S_n \sin \frac{\mu_n x}{l}$$

Случай резонанса очевиден, и так как он был уже не раз рассмотрен, то пояснений не требует.

§ 87. Необходимо еще пояснить, каким образом решать те задачи о вынужденных колебаниях струн или стержней, когда задается не внешняя сила, действующая на струну или стержень, а движение одной из точек струны или стержня.

Такой случай будет, например, когда какая-либо точка струны связывается неизменно с ножкою камертона; в аналогичном условии находится, например, дрожащий пружинный клапан, управляемый каким-либо приводом, и т. п.

В практике движение, сообщаемое точке, обыкновенно периодическое, т. е. ее перемещение представляется выражением

$$u_0 = b \sin pt$$

или же состоит из наложения нескольких таких колебаний, т. е. представляется формулою

$$u_0 = b_1 \sin p_1 t + b_2 \sin p_2 t + b_3 \sin p_3 t + \ldots + b_h \sin p_h t$$

Эта задача может быть сведена к предыдущей.

В самом деле, чтобы сообщать рассматриваемой точке струны какое-либо движение, необходимо соединить эту точку с каким-либо телом, движущимся заданным образом, а это равносильно тому, что к рассматриваемой точке прилагается некоторое внешнее усилие; следовательно, вопрос сводится к нахождению этого усилия, после чего решение докончится по формулам предыдущих параграфов.

Чтобы пояснить это рассуждение, возьмем для примера струну, одну из точек которой, соответствующую абсциссе $x = c$, заставляем двигаться заданным образом.

Математически задача ставится, следовательно, так: требуется найти функцию u, удовлетворяющую:

1) дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

2) граничным условиям:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{при} & x = 0 & \text{должно быть} & u = 0 \\ \text{„} & x = l & \text{„} \quad\quad \text{„} & u = 0 \end{array}\right\} \text{при всяком } t$$

3) начальным условиям: при $t = 0$ должно быть

$$u = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x)$$

причем функции

$$\varphi(x) \quad \text{и} \quad \psi(x)$$

таковы, что

$$\varphi(c) = 0 \quad \text{и} \quad \psi(c) = bp$$

4) условию, что функция u должна быть такова, чтобы при $x = c$ было

$$u = b \sin pt$$

В § 72 показано, что при действии в точке $x=c$ сосредоточенной силы переменного напряжения

$$F=\mu P\sin pt \qquad (\mu=\rho s)$$

вынужденные колебания выражаются формулою

$$u_2=P\sin pt\sum_{n=1}^{n=\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (*)$$

причем

$$C_n=\frac{2}{l}\,\frac{\sin\frac{n\pi c}{l}}{\frac{a^2\pi^2n^2}{l^2}-p^2}=2l\,\frac{\sin\frac{n\pi c}{l}}{a^2\pi^2n^2-p^2l^2}$$

Кроме того, эта сила производит и свободные колебания, сопутствующие этим вынужденным. В случае сопротивления среды, эти свободные колебания пропадают, в остальных же их можно отнести к тем, которые образуются вследствие начальных условий.

Отсюда видно, что стоит только в формуле (*) положить $x=c$ и уравнять полученный результат величине $b\sin pt$, и мы найдем неизвестную P:

$$P=\frac{b}{\sum_{n=1}^{n=\infty}C_n\sin\frac{n\pi c}{l}}$$

а значит, и величину u_2.

Итак будет

$$u_2=b\sin pt\,\frac{\sum_{n=1}^{n=\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}}{\sum_{n=1}^{n=\infty}C_n\sin\frac{n\pi c}{l}} \qquad (1)$$

где, как уже сказано,

$$C_n=2l\,\frac{\sin\frac{n\pi c}{l}}{a^2\pi^2n^2-p^2l^2}$$

Входящие в выражение u_2 суммы были уже найдены в § 72, где показано, что сумма

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}C_n\sin\frac{n\pi c}{l}$$

представляет такую функцию $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\frac{1}{ap}\frac{\sin\frac{p}{a}(l-c)}{\sin\frac{pl}{a}}\sin\frac{px}{a} \quad \text{для} \quad 0<x<c$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{ap}\frac{\sin\frac{pc}{a}}{\sin\frac{pl}{a}}\sin\frac{p}{a}(l-x) \quad \text{для} \quad c<x<$$

Сумма же

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} C_n \sin\frac{n\pi c}{l}=\varphi(c)=\frac{1}{ap}\frac{\sin\frac{p}{a}c\sin\frac{p}{a}(l-c)}{\sin\frac{pl}{a}}$$

следовательно, будет

$$\begin{aligned} u_2&=b\frac{\sin\frac{px}{a}}{\sin\frac{pc}{a}}\sin pt \qquad \text{для} \quad 0<x<c \\ u_2&=b\frac{\sin\frac{p(l-x)}{a}}{\sin\frac{p(l-c)}{a}}\sin pt \quad \text{для} \quad c<x<l \end{aligned} \tag{2}$$

Вместе с тем видно, что величина реакции

$$F=\mu P=\mu bap\frac{\sin\frac{pl}{a}}{\sin\frac{p}{a}c\sin\frac{p}{a}(l-c)}.$$

Эти результаты могут быть получены и иначе, не переходя через ряды, а разыскивая величину u_2 в виде

$$u_2=\varphi(x)\sin pt \tag{3}$$

и выбирая, подобно тому как показано в § 77, функцию $\varphi(x)$ так, чтобы были удовлетворены: уравнение

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=0$$

условия граничные и условие: при $x=c$ должно быть $u_2=b\sin pt$, иначе $\varphi(c)=b$.

Подставляя величину u_2 в дифференциальное уравнение, увидим, что функция φ должна удовлетворять уравнению

$$a^2\varphi''(x)+p^2\varphi(x)=0 \qquad (4)$$

причем на участке от $x=0$ до $x=c$ функция $\varphi(x)$ представляется одним выражением $\varphi(x)=\varphi_1(x)$, на участке от $x=c$ до $x=l$ другим

$$\varphi(x)=\varphi_2(x)$$

Условия, которым удовлетворяют функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, суть

$$\varphi_1(0)=0; \qquad \varphi_1(c)=b$$
$$\varphi_2(l)=0; \qquad \varphi_2(c)=b$$

На основании уравнения (4), коим функция $\varphi(x)$ определяется, и граничных условий берем

$$\varphi_1(x)=A_1\sin\frac{p}{a}x$$

$$\varphi_2(x)=A_2\sin\frac{p}{a}(l-x)$$

тогда условие

$$\varphi_1(c)=\varphi_2(c)=b$$

даст

$$A_1=\frac{b}{\sin\frac{p}{a}c} \quad \text{и} \quad A_2=\frac{b}{\sin\frac{p}{a}(l-c)}$$

таким образом будет

$$u_2=\varphi_1(x)=b\frac{\sin\frac{p}{a}x}{\sin\frac{p}{a}c}\sin pt \quad \text{для} \quad 0<x<c$$

$$u_2=\varphi_2(x)=b\frac{\sin\frac{p}{a}(l-x)}{\sin\frac{p}{a}(l-c)}\sin pt \quad \text{для} \quad c<x<l$$

Совершенно подобным же образом поступим и в том случае, когда величина u при $x=c$ должна по условиям задачи представляться в виде суммы нескольких заданных периодических членов разных периодов, а также и тогда, когда задается движение одного из концов стержня или струны.

§ 88. Рассмотрим еще один знаменитый пример, именно распространение тока по кабелю, которое приводится к интегрированию системы уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} &= RI + L\frac{\partial I}{\partial t} \\ -\frac{\partial I}{\partial x} &= GV + C\frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned} \qquad (1)$$

в которой V и I обозначают потенциал и силу тока в момент времени t в точке кабеля, коей абсцисса есть x; R — омическое сопротивление, L — самоиндукция, C — емкость, G — проводимость изоляции на единицу длины кабеля; все эти величины предполагаются постоянными.

Граничные и начальные условия будут приведены ниже.

Эта система уравнений составляла предмет весьма многочисленных работ, из которых упомянем лишь основной мемуар Кирхгофа, двухтомное исследование В. И. Коваленкова и превосходное по краткости и ясности изложения исследование К. А. Поссе, помещенное в „Известиях Электротехнического института“ за 1904 г., но надо заметить, что результаты этого исследования уже находились в руководстве Ваши (Vaschy. Traité d'électricité et de magnétisme, t. II, Paris, 1890).

Приведем сперва решение в том виде, как оно дано Ваши и Поссе, в котором оно вошло во множество руководств, отметив при этом некоторый недостаток его.

Исключив из уравнения (1) неизвестную функцию I, получаем для определения V уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (CK + LG)\frac{\partial V}{\partial t} + RGV \qquad (2)$$

которое, положив в нем

$$\begin{aligned} LC &= a^2 \\ CR + LG &= 2h \\ RG &= b^2 \end{aligned} \qquad (3)$$

принимает вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - 2h\frac{\partial T}{\partial t} - b^2 V = 0 \qquad (4)$$

при следующих граничных и начальных условиях:

граничные условия:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{при } x=0 & \text{должно быть} & V=E \\ \text{„ } x=l & \text{„ } & \text{„ } V=0 \end{array}\right\} \text{ при всяком значении времени } t \qquad (5)$$

начальные условия: при $t=0$ должно быть

$$V=0; \quad \frac{\partial V}{\partial t}=0 \tag{6}$$

для всех значений x в промежутке $0<x<l$.

Ваши и Поссе полагают

$$V=v+F(x) \tag{7}$$

и определяют функцию $F(x)$ так, чтобы она удовлетворяла уравнению (4) и следующим граничным условиям:

$$\begin{array}{llll} \text{при} & x=0 & \text{должно быть} & F(0)=E \\ \text{„} & x=l & \text{„} \quad \text{„} & F(l)=0 \end{array} \tag{8}$$

тогда функция v будет определяться:

1) *уравнением*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-2h\frac{\partial v}{\partial t}-b^2 v=0 \tag{9}$$

2) *граничными условиями:*

$$\begin{array}{llll} \text{при} & x=0 & \text{должно быть} & v=0 \\ \text{„} & x=l & \text{„} \quad \text{„} & v=0 \end{array} \tag{10}$$

3) *начальными условиями*: при $t=0$ должно быть

$$v=-F(x); \quad \frac{\partial v}{\partial t}=0 \tag{11}$$

Это показывает, что указанною заменою „неоднородные“ граничные условия (5) для функции V приводятся к „однородным“ (10) для функции v; дифференциальное же уравнение, определяющее эти функции, остается без перемены.

Как видно, обозначая производные значками, для определения функции F имеем уравнение

$$F''-b^2F=0 \tag{12}$$

из которого на основании условий (8) следует

$$F(x)=E\frac{e^{b(l-x)}-e^{-b(l-x)}}{e^{bl}-e^{-bl}}=E\frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} \tag{13}$$

Функция v, удовлетворяющая однородному дифференциальному уравнению (9) и однородным граничным условиям (10), находится по обычному способу, применяемому в решении задачи о колебаниях струны.

Следуя этому способу, функцию v ищем под видом суммы

$$v = \sum XT \tag{14}$$

в которой X зависит только от переменной x, T — только от переменной t, и каждый член суммы в отдельности удовлетворяет граничным условиям (10), а вся сумма сверх того и начальным условиям (11).

Таким образом, получаем

$$X' T = (a^2 T'' + 2hT' + b^2 T) X = 0$$

отсюда

$$\frac{X''}{X} = \frac{a^2 T'' + 2hT' + b^2 T}{T} = -m^2$$

где m^2 — какая угодно постоянная. Затем,

$$X'' + m^2 X = 0$$

следовательно, будет

$$\begin{aligned} X &= C \cos mx + D \sin mx \\ T &= Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} \end{aligned} \tag{15}$$

причем α и β — корни уравнения

$$a^2 \lambda^2 + 2h\lambda + b^2 + m^2 = 0$$

т. е.

$$\alpha = -\frac{h}{a^2} + \frac{1}{a^2} \sqrt{h^2 - a^2 (b^2 + m^2)}$$

$$\beta = \frac{h}{a^2} - \frac{1}{a^2} \sqrt{h^2 - a^2 (b^2 + m^2)}$$

Граничные условия дают

$$\begin{aligned} C &= 0 \\ D \sin ml &= 0 \end{aligned}$$

откуда следует

$$m = \frac{k\pi}{l} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots n)$$

Таким образом, будет

$$\begin{aligned} X_k &= D_k \sin \frac{k\pi x}{l} \\ T_k &= A_k e^{\alpha_k t} + B_k e^{\beta_k t} \end{aligned} \tag{16}$$

причем

$$\alpha_k = -\frac{h}{a^2} + \frac{1}{a^2 l}\sqrt{h^2 l^2 - a^2 (b^2 l^2 + k^2 \pi^2)} = -\mu + n_k$$
$$\beta_k = -\frac{h}{a^2} - \frac{1}{a^2 l}\sqrt{h^2 l^2 - a^2 (b^2 l^2 + k^2 \pi^2)} = -\mu - n_k \qquad (17)$$

Так как произведения $A_k D_k$ и $B_k D_k$ такие же произвольные постоянные, как A_k и B_k, то без ущерба общности можно положить $D = 1$, так что будет

$$v = \sum_{k=1}^{k=\infty} (A_k e^{\alpha_k t} + B_k e^{\beta_k t}) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

Затем, начальные условия дают

$$-F(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} (A_k + B_k) \sin \frac{k\pi x}{l}$$
$$0 = \sum_{k=1}^{k=\infty} (\alpha_k A_k + \beta_k B_k) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

Отсюда следует

$$A_k + B_k = -\frac{2}{l}\int_0^l F(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{l}\, d\xi$$

$$\alpha_k A_k + \beta_k B_k = 0$$

Заметив, что при

$$F(x) = E\frac{e^{b(l-x)} - e^{-b(l-x)}}{e^{bl} - e^{-bl}}$$

интеграл

$$\frac{2}{l}\int_0^l F(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{l}\, d\xi = \frac{2k\pi}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} E$$

получим окончательно

$$v = E \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2k\pi}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} \cdot \frac{\beta_k e^{\alpha_k t} - \alpha_k e^{\beta_k t}}{\alpha_k - \beta_k} \sin \frac{k\pi x}{l} \qquad (18)$$

и, заменив α_k и β_k их значениями (17), на основании формулы (7), имеем

$$V = E\frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} - 2Ee^{-\mu t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k\pi}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} \left[\operatorname{ch} n_k t + \right.$$
$$\left. + \frac{\mu}{n_k} \operatorname{sh} n_k t\right] \sin \frac{k\pi x}{l} \qquad (18')$$

Из формулы (17) и последней формулы видно, что, при неопределенном возрастании времени t, функция v стремится к нулю, и „установившееся“ состояние провода определяется равенством

$$V = E\frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} = E\frac{e^{b(l-x)} - e^{-b(l-x)}}{e^{bl} - e^{-bl}}$$

§ 89. После того как потенциал V найден, надо найти силу тока I. Для этого Поссе пользуется первым из уравнений (1), т. е. уравнением

$$L\frac{\partial I}{\partial t} + RI = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{19}$$

которое является по отношению к неизвестной функции I уравнением обыкновенным и, будучи написано так:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

дает

$$I = -\frac{1}{L}e^{-nt}\int_0^t e^{n\tau}\frac{\partial V(x,\tau)}{\partial x}\,d\tau \tag{20}$$

причем положено

$$n = \frac{R}{L}$$

и принято, что при $t = 0$ должно быть $I = 0$.

Вот относительно этой формулы (20) и возникает сомнение, ибо стоящая под знаком интеграла функция $\frac{\partial V}{\partial x}$ представляется рядом *расходящимся* и результат интегрирования такого ряда, в особенности интегрирования почленного, может оказаться и неверным.

Если написать формулу (20) так:

$$I = -\frac{1}{L}e^{-nt}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t e^{n\tau}V(x,\tau)\,d\tau \tag{20'}$$

рассматривая x как параметр, то этим сказанное затруднение как-будто бы формально устраняется в том смысле, что при такой последовательности действий не приходится иметь дела с расходящимися рядами, но сомнение в верности формулы (20′) тем не менее остается.

Это затруднение имеет место и в случае пользования уравнением

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = GV + C\frac{\partial V}{\partial t}$$

ибо и здесь величина $\frac{\partial V}{\partial t}$ представляется расходящимся рядом. Написав формулу

$$I = H(t) - G\int^{x} V(\xi, t)\, d\xi - C\,\frac{\partial}{\partial t}\int^{x} V(\xi, t)\, d\xi \qquad (21)$$

мы формально сказанное затруднение обходим, но сомнение в верности формулы (21) остается, ибо нельзя утверждать, что равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\int^{x} V(\xi, t)\, d\xi = \int^{x} \frac{\partial}{\partial t} V(\xi, t)\, d\xi$$

имеет место

Тем не менее доведем выкладку до конца, и так как пользование формулой (21) проще, нежели (20), то ее и применим. Тогда получим

$$I = H(t) + \frac{GE}{b}\,\frac{\operatorname{ch} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} - 2GlEe^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\operatorname{ch} n_k t + \frac{\mu}{n_k}\operatorname{sh} n_k t\right)\frac{\cos k\pi x}{b^2 l^2 + k^2\pi^2} +$$

$$+ 2CEle^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos\frac{k\pi x}{l}}{b^2 l^2 + k^2\pi^2}\left[\frac{\mu - n_k^2}{n_k}\right]\operatorname{sh} n_k t$$

но

$$\mu^2 - n_k^2 = \frac{b^2 l^2 + k^2\pi^2}{a^2 l^2}$$

и тогда, заметив, что $a^2 = LC$, получим

$$I = H(t) + \frac{GE}{b}\,\frac{\operatorname{ch} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} - \sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\operatorname{ch} n_k t + \frac{\mu}{n_k}\operatorname{sh} n_k t\right)\frac{\cos\frac{k\pi x}{l}}{b^2 l^2 + k^2\pi^2} +$$

$$+ \frac{2E}{Ll}\,e^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{n_k}\operatorname{sh} n_k t\cos\frac{knx}{l}$$

Произвольная функция $H(t)$ определяется по условию

$$LH'(t) + RH(t) = 0$$

следующему из уравнения

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = RI + L\,\frac{\partial I}{\partial t}$$

и из начального условия, что при $t = 0$ должно быть $I(x, 0) = 0$ при всяком x в промежутке $0 < x < l$.

Отсюда получаем

$$H(t) = -\frac{E}{Rl} e^{-\frac{R}{L}t}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$V = E\frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} - 2Ee^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{k\pi}{b^2 l^2 + k^2\pi^2}\left[\operatorname{ch} n_k t + \frac{\mu}{n_k}\operatorname{sh} n_k t\right]\sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$I = \frac{GE}{b}\frac{\operatorname{ch} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} - \frac{RL}{E}e^{-\frac{R}{L}t} -$$

$$-2GlEe^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\operatorname{ch} n_k t + \frac{\mu}{n_k}\operatorname{sh} n_k t\right]\frac{\cos\frac{k\pi x}{l}}{b^2 l^2 + k^2\pi^2} -$$

$$-\frac{2E}{Ll}e^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{n_k}\operatorname{sh} n_k t\cos\frac{k\pi x}{l}$$

§ 90. По поводу предыдущего решения сделаем еще одно замечание: когда от предложенной системы уравнений (1)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} &= RI + L\frac{\partial I}{\partial t} \\ -\frac{\partial I}{\partial x} &= GV + C\frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned} \qquad (1)$$

мы переходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - 2h\frac{\partial V}{\partial t} - b^2 V = 0 \qquad (1')$$

или к уравнению

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - 2h\frac{\partial I}{\partial t} - b^2 I = 0$$

то этим самым мы налагаем некоторые ограничения на функции V и I, а именно, что на всем протяжении от $x=0$ до $x=l$ и при всяком значении t существуют *вторые* производные этих функций, и тем самым производные первого порядка *непрерывны*, тогда как для предложенных уравнений этого ограничения нет, поэтому правильнее рассматривать уравнения задачи в том самом виде, как они предложены. Это же относится и до граничных и начальных условий.

Итак, будем определять искомые функции V и I:
1) системою дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} &= RI + L\frac{\partial I}{\partial t} \\ -\frac{\partial I}{\partial t} &= GV + C\frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned} \qquad (1)$$

2) непосредственно заданными граничными условиями:

при $x=0$ должно быть $V(0,t)=E$ } при всяком значении
„ $x=l$ „ „ $V(l,t)=0$ } времени $t>0$

3) что же касается начальных условий, то можно сказать, что по условиям задачи должно быть

$$V(x,0)=0$$

для всех значений x в данном промежутке, *кроме значения* $x=0$, при котором по условию $V(0,t)=E$, т. е. надо бы писать, пользуясь обычным обозначением

$$V(x+0,0)=0$$

Относительно производной $\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_0$ ничего не задано, и условие, принятое Поссе $\left(\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\right)_{t=0}=0$, основано лишь на допущении, что до момента $t=0$ на всей длине кабеля потенциал $V(x,0)$ равен нулю. Но, очевидно, это условие не относится до точки $x=0$, в котором при $t=0$ потенциал V *мгновенно* становится равным E, — в этой точке производная $\frac{\partial V}{\partial t}$ при $t=0$ не существует.

Можно рассуждать и так: пока $t<0$ и к концу $x=0$ напряжения не приложено, то очевидно, что для всего кабеля $V=0$ и $I=0$. В момент $t=0$ значение $V(+0,0)=E$, но для остальных значений x величина $V(x,0)=0$, то же и величина $I(x,0)=0$.

Таким образом, естественно, ничего не предполагая о начальном значении производной $\frac{\partial V}{\partial t}$, принять следующие начальные условия: при $t=0$ должно быть

$$\begin{aligned} V(x,0)&=0 \quad \text{для} \quad 0<x\leqslant l \\ I(x,0)&=0 \quad \text{„} \quad 0<x\leqslant l \end{aligned}$$

Если к системе (1) применить способ решения Ваши или Поссе, то надо поступить так: полагаем

$$V = v + \varphi(x)$$
$$I = y + \psi(x)$$

и определяем функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ так, чтобы они удовлетворяли системе (1) и граничным условиям

$$\varphi(0) = E; \quad \varphi(l) = 0$$

Тогда имеем

$$-\varphi' = R\psi$$
$$-\psi' = G\varphi$$

Отсюда следует

$$\varphi'' - b^2\varphi = 0$$

причем попрежнему $b^2 = RG$, и, следовательно,

$$\varphi = A \operatorname{ch} b(l-x) + B \operatorname{sh} b(l-x)$$

Условия (5) дают

$$A = 0; \quad B = \frac{E}{\operatorname{sh} bl}$$

Таким образом,

$$\varphi(x) = \frac{E}{\operatorname{sh} bl} \operatorname{sh} b(l-x)$$

и

$$\psi(x) = \frac{Eb}{R} \frac{\operatorname{ch} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl}$$

Для функций v и y имеем:

1) *уравнения*

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = Ry + L\frac{\partial y}{\partial t}$$
$$-\frac{\partial y}{\partial x} = Gv + C\frac{\partial v}{\partial t}$$

2) *граничные условия*

при $x = 0$ должно быть $v = 0$
„ $x = l$ „ „ $v = 0$
} при всяком $t > 0$

3) *начальные условия*: при $t = 0$ должно быть

$$v = -\varphi(x); \quad y = -\psi(x)$$

Соответственно граничным условиям полагаем

$$v = \sum_{k=1}^{k=\infty} T_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$$y = S_0(t) + \sum_{k=1}^{k=\infty} S_k \cos \frac{k\pi x}{l}$$

причем T_k и S_k — функции только переменной t.

На основании уравнений (1) имеем, для определения этих функций, уравнения

$$-\frac{k\pi}{l} T_k = RS_k + LS_k'$$

$$\frac{k\pi}{l} S_k = GT_k + CT_k'$$

исключив неизвестную S_k получаем уравнение

$$CLT_k'' + (CR + LG)\, T_k' + \left(GR + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\right) T_k = 0$$

в котором, положив, попрежнему,

$$CL = a^2; \quad GR = b^2; \quad \frac{CR + LG}{2CL} = \mu = \frac{h}{a^2}$$

имеем

$$T_k = e^{-\mu t}[A_k \operatorname{ch} n_k t + B_k \operatorname{sh} n_k t]$$
$$S_k = e^{-\mu t}[C_k \operatorname{ch} n_k t + D_k \operatorname{sh} n_k t]$$

причем

$$\mu = \frac{h}{a^2}; \quad n_k = \sqrt{\mu^2 - \frac{b^2}{a^2} - \frac{k^2\pi^2}{a^2 l^2}}$$

и между постоянными

$$A_k, B_k, C_k, D_k$$

имеют место соотношения

$$\frac{k\pi}{l} C_k = (G - \mu C) A_k + n_k C B_k \tag{22}$$

$$\frac{k\pi}{l} D_k = (G - \mu C) B_k + n_k C A_k$$

причем

$$G - \mu C = G - \frac{CR + LG}{2L} = \frac{LG - CR}{2L}$$

Кроме того, для определения S_0 имеем уравнение

$$RS_0 + LS_0' = 0$$

$$S_0 = C_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

Начальные условия дают уравнения

$$-\varphi(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$-\psi(x) = C_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} C_k \cos\frac{k\pi x}{l}$$

Отсюда следует

$$C_0 = -\frac{1}{l}\int_0^l \psi(\xi)\,d\xi$$

$$C_k = -\frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi$$

$$A_k = -\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{k\pi\zeta}{l}\,d\xi$$

после чего коэффициенты B_k и D_k находятся из соотношений (22).

Чтобы найти вышенаписанные интегралы, воспользуемся следующими известными разложениями, которые нам понадобятся ниже:

$$\frac{\operatorname{ch}\gamma x}{\operatorname{sh}\gamma\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2\gamma} - \frac{\gamma}{1+\gamma^2}\cos x + \frac{\gamma}{4+\gamma^2}\cos 2x - \frac{\gamma}{9+\gamma^2}\cos 3x + \ldots\right] \quad (-\pi < x < +\pi) \tag{23}$$

$$\frac{\operatorname{sh}\gamma x}{\operatorname{sh}\gamma\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1+\gamma^2} - \frac{2}{4+\gamma^2}\sin 2x + \frac{3}{9+\gamma^2}\sin 3x - \ldots\right] \tag{24}$$

Из которых, положив

$$\gamma = \frac{bl}{\pi} \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi(l-z)}{l}$$

следует

$$\frac{\operatorname{ch} b(l-z)}{\operatorname{sh} bl} = \frac{1}{bl} + 2bl\left[\frac{1}{b^2l^2+\pi^2}\cos\frac{\pi z}{l} + \frac{1}{b^2l^2+4\pi^2}\cos\frac{2\pi z}{l} + \ldots\right]$$

$$\frac{\operatorname{sh} b(l-z)}{\operatorname{sh} bl} = 2\pi\left[\frac{1}{b^2l^2+\pi^2}\sin\frac{\pi z}{l} + \frac{2}{b^2l^2+4\pi^2}\sin\frac{2\pi z}{l} + \ldots\right] \tag{25}$$

На основании этих разложений, имеем

$$C_0 = -\frac{E}{Rl}$$

$$C_k = -2EGl\,\frac{1}{b^2 l^2 + k^2\pi^2}$$

$$A_k = -2E\,\frac{k\pi}{b^2 l^2 + k^2\pi^2}$$

Здесь, на основании соотношений (22)

$$B_k = \frac{\mu}{n_k} A_k$$

$$D_k = \frac{\mu}{n_k} C_k - \frac{\mu^2 - n_k^2}{n_k}\,\frac{C}{G}\,C_k = \frac{\mu}{n_k} C_k + \frac{2E}{Ll}\,\frac{1}{n_k}$$

ибо

$$\mu^2 - n_k^2 = \frac{b^2 l^2 + k^2\pi^2}{a^2 l^2} = \frac{b^2 l^2 + k^2\pi^2}{CLl^2}$$

Следовательно, будет

$$V = E\,\frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} - 2Ee^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{k\pi}{b^2 l^2 + k^2\pi^2}\left[\operatorname{ch} n_k t + \frac{\mu}{n_k}\operatorname{sh} n_k t\right]\sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$I = \frac{Eb}{R}\,\frac{\operatorname{ch} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} - \frac{E}{Rl}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{2Ee^{-\mu t}}{Ll}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{n_k}\operatorname{sh} n_k t\cos\frac{k\pi x}{l} - \tag{26}$$

$$-2EGle^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\operatorname{ch} n_k t + \frac{\mu}{n_k}\operatorname{sh} n_k t\right]\frac{\cos\frac{k\pi x}{l}}{b^2 l^2 + k^2\pi^2}$$

т. е. те самые формулы, которые мы имеем в § 89.

§ 91. Мы видели, что

$$n_k = \sqrt{\mu^2 - \frac{b^2}{a^2} - \frac{k^2\pi^2}{a^2 l^2}}$$

$$\mu^2 - \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{LG - CR}{2LC}\right)^2$$

следовательно, какова бы ни была величина $\mu^2 - \frac{b^2}{a^2}$, всегда найдется такое целое k, начиная с которого n_k станет мнимым. Очевидно, что тогда гиперболические функции заменятся тригонометрическими.

Особенно прост тот случай, когда

$$\mu^2 - \frac{b^2}{a^2} = 0$$

иначе, когда

$$LG - RC = 0$$

и в этом случае

$$n_k = \frac{k\pi}{al}\sqrt{-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

Значит, будет

$$\operatorname{ch} n_k t = \cos\frac{k\pi t}{al}$$

$$\frac{\operatorname{sh} n_k t}{n_k} = \frac{al}{k\pi}\sin\frac{k\pi t}{al}$$

$$\mu = \frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$

и, следовательно,

$$V = E\frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} - 2Ee^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{k\pi}{b^2 l^2 + k^2\pi^2}\left[\cos\frac{k\pi t}{al} + \frac{\mu al}{k\pi}\sin\frac{k\pi t}{al}\right]\sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$I = \frac{Eb}{R}\frac{\operatorname{ch} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} - \frac{E}{Rl}e^{-\mu t} + \frac{2E}{L}\frac{a}{\pi}e^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi t}{al}\cos\frac{k\pi x}{l} - \qquad (27)$$

$$- 2EGle^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\cos\frac{k\pi t}{al} + \frac{\mu al}{k\pi}\sin\frac{k\pi t}{al}\right)\frac{\cos\frac{k\pi x}{l}}{b^2 l^2 + k^2\pi^2}$$

Все суммы, входящие в эти формулы, находятся в конечном виде; пользуясь формулами

$$2\cos\frac{k\pi t}{al}\sin\frac{k\pi x}{l} = \sin\frac{k\pi}{l}\left(x + \frac{t}{a}\right) + \sin\frac{k\pi}{l}\left(x - \frac{t}{a}\right)$$

$$2\sin\frac{k\pi t}{al}\cos\frac{k\pi x}{l} = \sin\frac{k\pi}{l}\left(x + \frac{t}{a}\right) - \sin\frac{k\pi}{l}\left(x - \frac{t}{a}\right)$$

$$2\sin\frac{k\pi t}{al}\sin\frac{k\pi x}{l} = \cos\frac{k\pi}{l}\left(x - \frac{t}{a}\right) - \cos\frac{k\pi}{l}\left(x + \frac{t}{a}\right)$$

$$2\cos\frac{k\pi t}{al}\cos\frac{k\pi x}{l} = \cos\frac{k\pi}{l}\left(x + \frac{t}{a}\right) + \cos\frac{k\pi}{l}\left(x - \frac{t}{a}\right)$$

и разложениями (23) и (24).

Мы не будем приводить графиков всех этих функций и их разрывов, так как вопрос этот подробно разобран в сочинении В. И. Коваленкова, а ограничимся лишь немногими примерами, чтобы показать сущность дела.

Возьмем формулу для V.

Сумма

$$\sum = 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k\pi}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} \left(\cos \frac{k\pi t}{al} \sin \frac{k\pi x}{l} + \frac{\mu al}{k\pi} \sin \frac{k\pi t}{al} \sin \frac{k\pi x}{l} \right)$$

входящая в состав функции V, разлагается на следующие четыре суммы:

$$\sum = S_1 + S_2 + \mu al (S_3 - S_4)$$

причем

$$S_1 = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k\pi}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi}{l} \left(x + \frac{t}{a} \right)$$

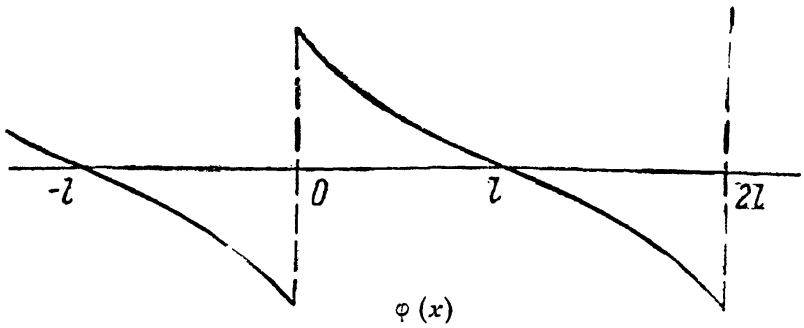
$$S_2 = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k\pi}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi}{l} \left(x - \frac{t}{a} \right)$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} \cos \frac{k\pi}{l} \left(x - \frac{t}{a} \right)$$

$$S_4 = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} \cos \frac{k\pi}{l} \left(x + \frac{t}{a} \right)$$

Мы имеем разложение

$$\frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k\pi}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi x}{l}$$



Фиг. 54.

Это разложение имеет место для промежутка $0 < x < l$, вне же этого промежутка для значений $-l < x < 0$ ряд представляет функцию $-\varphi(x)$. Все прочие значения находятся на основании периодичности, т. е. равенства

$$\varphi(2l + x) = \varphi(x)$$

Таким образом, функция, представляемая рядом, изображается графически чертежом (фиг. 54), причем в местах разрыва сумма ряда есть нуль.

Положим, что

$$0 < ct < l$$

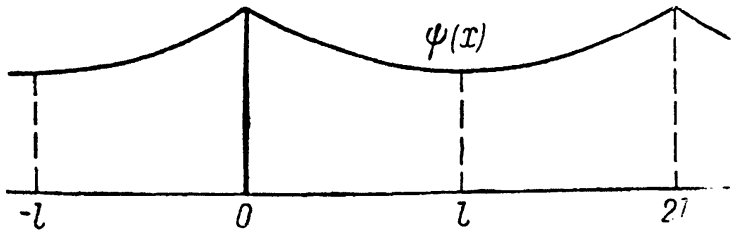
причем $c = \frac{1}{a}$; тогда ряд S_1 представит функцию $\varphi(x + ct)$, т. е. надо всю ступенчатую кривую $\varphi(x)$ подвинуть параллельно самой себе влево на величину ct, тогда в промежутке от 0 до l ляжет участок кривой, обозначенной на фиг. 56 через $\varphi(x + ct)$.

Ряд S_2 представит функцию $\varphi(x - ct)$, т. е. надо всю кривую продвинуть вправо на величину ct, и в промежутке от 0 до l лягут части кривых, помеченные $\varphi(x - ct)$, причем на протяжении $0 < x < ct$ значение функции будет отрицательное, равное $\varphi(ct - x)$, как это и видно по чертежу.

Совершенно так же для сумм S_3 и S_4 мы будем исходить из разложения

$$\frac{\operatorname{ch} b(l-x)}{2bl \operatorname{sh} bl} = \frac{1}{2b^2 l^2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} \cos \frac{k\pi x}{l} = \psi(x)$$

Функция $\psi(x)$ изображена на фиг. 55.



Фиг. 55.

Как видно, сама эта функция непрерывна, но в местах

$$x = 0,\ 2l,\ 4l, \ldots;\ -2l,\ -4l, \ldots$$

она имеет угловые точки, т. е. разрывы первой своей производной.

Совершенно подобно предыдущему видим, что ряды S_3 и S_4 представляют функции $\psi(x - ct) - \frac{1}{2b^2 l^2}$, и $\psi(x + ct) - \frac{1}{2b^2 l^2}$ и части соответствующих кривых, лежащие в промежутке от 0 до l, помечены на фиг. 56 соответствующими значениями.

Из этого чертежа видно, что сумма Σ на участке $0 < x < ct$ и на участке $ct < x < l$ выражается различно, а именно:

Для промежутка $0 < x < ct$ будет

$$\sum\nolimits_1 = \varphi(ct + x) - \varphi(ct - x) + \mu a l [\psi(x - ct) - \psi(ct + x)]$$

и для промежутка $ct < x < l$ будет

$$\sum\nolimits_2 = \varphi(ct + x) + \varphi(x - ct) + \mu a l [\psi(x - ct) - \psi(x + ct)]$$

но мы имеем

$$2\operatorname{sh} bl\,\varphi(ct+x)=\operatorname{sh} b(l-x-ct)$$
$$2\operatorname{sh} bl\,\varphi(ct-x)=\operatorname{sh} b(l-ct+x)$$

Следовательно,

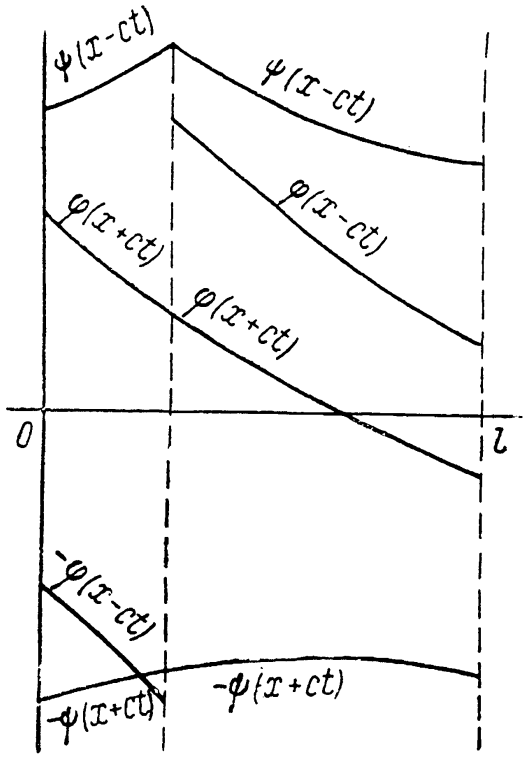
$$\operatorname{sh} bl[\varphi(ct+x)-\varphi(ct-x)]=-\operatorname{sh} bx\operatorname{ch} b(l-ct)$$

Совершенно так же получим

$$bl\operatorname{sh} bl[\psi(x-ct)-\psi(ct+x)]=$$
$$=\operatorname{sh} bx\operatorname{sh} b(l-ct)$$

следовательно, принимая во внимание, что $\frac{\mu a}{b}=1$:

$$\sum_1=\frac{\operatorname{sh} bx}{\operatorname{sh} bl}[\operatorname{sh} b(l-ct)-\operatorname{ch} b(l-ct)]=$$
$$=-\frac{\operatorname{sh} bx}{\operatorname{sh} bl}e^{-b(l-ct)}=-e^{-bl}e^{\mu t}\frac{\operatorname{sh} bx}{\operatorname{sh} bl}$$



Фиг. 56.

но мы имели

$$\frac{V}{E}=\frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl}-e^{-\mu t}\sum_1=$$
$$=\frac{1}{\operatorname{sh} bl}[\operatorname{sh} b(l-x)+\operatorname{sh} bxe^{-bl}]=e^{-bx}$$

Итак, для промежутка $0<x<ct$ будет

$$V=Ee^{-bx}$$

Для промежутка $ct<x<l$

$$2\operatorname{sh} bl\,\varphi(x-ct)=\operatorname{sh} b(l-x+ct)$$
$$2\operatorname{sh} bl\,\varphi(x+ct)=\operatorname{sh} b(l-x-ct)$$

следовательно,

$$\operatorname{sh} bl[\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)]=\operatorname{sh} b(l-x)\operatorname{ch} bc$$

Совершенно так же получим

$$\mu al[\psi(x-ct)-\psi(x+ct)]=\frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl}\operatorname{sh} bct$$

следовательно, будет

$$\sum_2=\frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl}e^{bct}=e^{\mu t}\frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl}$$

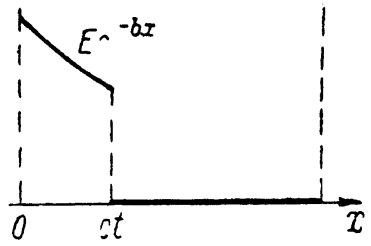
и

$$V=0$$

Таким образом, V определяется такою разрывною функцией:

$$\text{для}\quad 0<x<ct\quad V=Ee^{-bx}$$
$$\text{„}\quad ct<x<l\quad V=0$$

представленной на фиг. (57).



Фиг. 57.

Из уравнения

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=RI+L\frac{\partial I}{\partial t}$$

следует, что для промежутка

$$0<x<ct$$

будет

$$I=He^{-\frac{R}{L}t}+\frac{bE}{R}e^{-bx}=He^{-\mu t}+\frac{bE}{R}e^{-bx}$$

причем H есть произвольная функция от x, которая определяется из условия, что при $t=0$ должна быть

$$I(x,0)=0$$

следовательно,

$$H=-\frac{bE}{R}e^{-bx}$$

Таким образом будет

$$I=\frac{bE}{R}e^{-bx}[1-e^{-\mu t}]$$

Для промежутка же

$$ct<x<l$$

будет

$$I=0$$

следовательно, $I(x,t)$ представляется такою разрывною функцией:

$$\text{для}\quad 0<x<ct\quad I=\frac{bE}{R}e^{-bx}[1-e^{-\mu t}]$$
$$\text{„}\quad ct<x<l\quad I=0$$

Заметим здесь же, что скорость, с которою бежит место разрыва, есть

$$c=\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Совершенно подобным образом найдутся выражения V и I для значений t, при которых

$$l < ct < 2l$$

Затем — для значений t, при которых

$$2l < ct < 3l$$

и т. д. На этих подробностях останавливаться не будем, отсылая к сочинению проф. В. И. Коваленкова.

§ 92. Полученные в §§ 90 и 91 результаты показывают наглядно, что несмотря на разрывность функций $V(x,t)$ и $I(x,t)$, система уравнений (1) и следующее из нее дифференциальное уравнение (4) равносильны, поэтому вместо сказанной системы можно пользоваться этим уравнением и соответствующими граничными и начальными условиями.

Является еще один вопрос: Ваши и Поссе, чтобы привести граничные условия к однородным, положив

$$V = v + \varphi(x)$$

определяют функцию $\varphi(x)$ так, чтобы она удовлетворяла дифференциальному уравнению (4).

В том частном случае, когда при $x=0$ должно быть $V=E$, эта замена выгодна и в смысле простоты выкладок, но не следует думать, что она единственная и что условие, чтобы функция $\varphi(x)$ удовлетворяла уравнению (4), есть необходимое.

Функцию $\varphi(x)$ можно брать как угодно, важно лишь, чтобы при $x=0$ было $\varphi(0)=E$ и при $x=l$ было $\varphi(l)=0$, — разница будет только в том, что уравнение, коим определяется v, не будет однородным, но это обстоятельство не представляет никаких существенных затруднений.

На рассмотренном примере все это выясняется весьма просто.

Очевидно, что простейшая функция, принимающая при $x=0$ и $x=l$ вышеуказанные значения, есть

$$\varphi(x) = E\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

поэтому полагаем

$$V = v + E\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

тогда функция v будет определяться дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2h\frac{\partial v}{\partial t} - b^2 v = b^2 E\left(1 - \frac{x}{l}\right) \qquad (28)$$

и условиями

граничными:

$$\begin{array}{lllll} \text{при} & x=0 & \text{должно быть} & v=0 \\ \text{„} & x=l & \text{„} & v=0 \end{array} \tag{29}$$

начальными: при $t=0$ должно быть

$$v=-E\left(1-\frac{x}{l}\right);\quad \frac{\partial v}{\partial t}=0 \tag{30}$$

применяя общий способ разыскания „вынужденных“ колебаний, полагаем

$$v=v_1+v_2$$

и определяем этим функции так, чтобы v_1 представляло свободные колебания, v_2 — вынужденные. Для этого необходимо, чтобы эти функции определялись следующим образом:

Функция v_1:

1) *дифференциальным уравнением без последнего члена*, т. е. уравнением

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}-2h\frac{\partial v_1}{\partial t}-b^2 v_1=0 \tag{31}$$

2) *граничными условиями*:

$$\begin{array}{lllll} \text{при} & x=0 & \text{должно быть} & v_1=0 \\ \text{„} & x=l & \text{„} & v_1=0 \end{array} \tag{32}$$

3) *начальными условиями*: при $t=0$ должно быть

$$v_1=-E\left(1-\frac{x}{l}\right);\quad \frac{\partial v_1}{\partial t}=0 \tag{33}$$

Функция v_2 определяется:

1) *дифференциальным уравнением с последним членом*:

$$\frac{\partial^2 v^2}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 v^2}{\partial t^2}-2h\frac{\partial v_2}{\partial t}-b^2 v_2=b^2 E\left(1-\frac{x}{l}\right) \tag{34}$$

2) *граничными условиями*:

$$\begin{array}{lllll} \text{при} & x=0 & \text{должно быть} & v_2=0 \\ \text{„} & x=l & \text{„} & v_2=0 \end{array} \tag{35}$$

3) *начальными условиями*: при $t=0$ должно быть

$$v_2=0;\quad \frac{\partial v_2}{\partial t}=0 \tag{36}$$

Поступая подобно тому, как указано в §§ 88 и 89, ищем сперва v_1 под видом суммы

$$v_1 = \sum_{k=1}^{k=\infty} T_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

и получаем

$$v_1 = e^{-\mu t} \sum_{k=1}^{k=\infty} (A_k \operatorname{ch} n_k t + B_k \operatorname{sh} n_k t) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

при прежних обозначениях, т. е.

$$\mu = \frac{h}{a^2} = \frac{CR + LG}{2CL}$$

$$n_k = \frac{1}{a^2 l} \sqrt{h^2 l^2 - a^2 (b^2 l^2 + k^2 \pi^2)} = \sqrt{\mu^2 - \frac{b^2}{a^2} - \frac{k^2 \pi^2}{a^2 l^2}}$$

Затем, для определения коэффициентов A_k, B_k по начальным условиям, имеем равенства

$$-E\left(1 - \frac{x}{l}\right) = \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$$0 = \sum_{k=1}^{k=\infty} (-\mu A_k + B_k n_k) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

которые дают

$$A_k = -\frac{2E}{l} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \frac{k\pi x}{l} \, dx = -\frac{2E}{k\pi}$$

$$B_k = -\frac{2}{k\pi} \frac{\mu}{n_k}$$

Таким образом, будет

$$v_1 = -\frac{2E}{\pi} e^{-\mu t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\operatorname{ch} n_k t + \frac{\mu}{n_k} \operatorname{sh} n_k t\right) \frac{\sin \frac{k\pi x}{l}}{k}$$

Функцию v_2 ищем под видом суммы

$$v_2 = \sum_{k=1}^{k=\infty} S_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

тогда, представив вторую часть уравнения (36) под видом суммы

$$b^2 E\left(1-\frac{x}{l}\right)=b^2 E\sum_{k=1}^{k=\infty} H_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}=\frac{b^2 E}{\pi}\sum\frac{2}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

видим, что функции S_k определяются уравнениями

$$-\frac{k^2\pi^2}{l^2}S_k-a^2 S_k''-2hS_k'-b^2 S_k=\frac{2}{k\pi}b^2 E \quad (k=1,2,3,\ldots)$$

и условиями: при $t=0$ должно быть

$$S_k=0;\quad S_k'=0$$

Отсюда следует

$$S_k=e^{-\mu t}(M_k\operatorname{ch} n_k t+N_k\operatorname{sh} n_k t)-\frac{2Eb^2 l^2}{k\pi}\frac{1}{b^2 l^2+k^2\pi^2}$$

причем

$$M_k=\frac{2E}{k\pi}\frac{b^2 l^2}{b^2 l^2+k^2\pi^2}$$

$$N_k=\frac{\mu}{n_k}M_k$$

Таким образом, будет

$$v_2=-\frac{2E}{\pi}b^2 l^2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\frac{\sin\frac{k\pi x}{l}}{b^2 l^2+k^2\pi^2}+$$

$$+\frac{2E}{\pi}b^2 l^2 e^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\operatorname{ch} n_k t+\frac{\mu}{n_k}\operatorname{sh} n_k t\right)\frac{1}{k\pi}\frac{\sin\frac{k\pi x}{l}}{b^2 l^2+k^2\pi^2}$$

Но мы имели

$$V=E\left(1-\frac{x}{l}\right)+v_1+v_2$$

Заметив, что

$$E\left(1-\frac{x}{l}\right)=\frac{2E}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

получим

$$V=2E\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{k\pi}{b^2 l^2+k^2\pi^2}\sin\frac{\pi x}{l}-2Ee^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\operatorname{ch} n_k t+\frac{\mu}{n_k}\operatorname{sh} n_k t\right)\frac{k\pi\sin\frac{k\pi x}{l}}{b^2 l^2+k^2\pi^2}$$

а так как мы имели разложение

$$2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{k\pi}{b^2 l^2+k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{l}=\frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl}$$

то будет

$$V=E\frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl}-2Ee^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\operatorname{ch} n_k t+\frac{\mu}{n_k}\operatorname{sh} n_k t\right)\frac{k\pi\sin\frac{k\pi x}{l}}{b^2 l^2+k^2\pi^2}$$

т. е. та самая формула (18), которую мы имели в §§ 89 и 90.

Отсюда ясно, что при решении этой задачи за функцию $\varphi(x)$ можно брать просто линейную функцию x, выбирая ее так, чтобы граничные условия стали однородными. Таким образом, во многих случаях выкладки значительно упрощаются.

Мы нарочно остановились столь подробно на рассмотрении простейшего случая нашей задачи, ибо на нем с полной ясностью обнаруживаются все особенности ее решения, из которых наиболее существенные следующие две:

1) предложенную систему двух уравнений первого порядка, несмотря на разрывность решений, можно заменять одним уравнением второго порядка;

2) чтобы сделать граничные условия однородными, нет надобности брать функции переменной x, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям задачи, можно брать любую функцию, делающую граничные условия однородными, проще всего линейную.

§ 93. Более общий случай тот, когда граничными условиями служат

при $x=0$ должно быть $V(0, t)=Ee^{i\omega t}$
„ $x=l$ „ „ $V(l, t)=0$

начальные же условия попрежнему: при $t=0$ должно быть

$$V(x, 0)=0;\quad \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_0=0$$

Исключив из предложенной системы (1) неизвестную функцию I, получаем для определения V уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-2h\frac{\partial V}{\partial t}-b^2 V=0 \qquad (37)$$

Чтобы сделать граничные условия однородными, полагаем

$$V=v+E\left(1-\frac{x}{l}\right)e^{i\omega t} \qquad (38)$$

тогда для определения неизвестной функции v служат:

1) *дифференциальное уравнение*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial v}{\partial t} - b^2 v = E\left(1 - \frac{x}{l}\right)(b^2 - a^2\omega^2 + 2h\omega i)\, e^{i\omega t} \qquad (39)$$

2) *граничные условия:*

$$\begin{array}{lllll} \text{при} & x=0 & \text{должно быть} & v=0 \\ \text{„} & x=l & \text{„} & \text{„} & v=0 \end{array} \qquad (40)$$

3) *начальные условия:* при $t=0$ должно быть

$$v = -E\left(1 - \frac{x}{l}\right); \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -Ei\omega\left(1 - \frac{x}{l}\right) \qquad (41)$$

Полагаем по общему правилу:

$$v = v_1 + v_2$$

и определяем функции v_1 и v_2 так, чтобы v_1 представляла свободные колебания функции, v_2 — вынужденные, тогда эти функции определяются:

Функция v_1:

1) *дифференциальным уравнением без последнего члена,* т. е.

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial v_1}{\partial t} - b^2 v_1 = 0 \qquad (42)$$

2) *граничными условиями:*

$$\begin{array}{lllll} \text{при} & x=0 & \text{должно быть} & v_1=0 \\ \text{„} & x=l & \text{„} & \text{„} & v_1=0 \end{array} \qquad (43)$$

3) *начальными условиями:* при $t=0$ должно быть

$$v_1 = -E\left(1 - \frac{x}{l}\right); \qquad \frac{\partial v_1}{\partial t} = -Ei\omega\left(1 - \frac{x}{l}\right) \qquad (44)$$

Функция v_2 определяется:

1) *дифференциальным уравнением с последним членом:*

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2} - a^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial v_2}{\partial t} - b^2 v_2 = E\left(1 - \frac{x}{l}\right)(b^2 - a^2\omega^2 + 2hi\omega)\, e^{i\omega t} \qquad (45)$$

2) *граничными условиями:*

$$\begin{array}{lllll} \text{при} & x=0 & \text{должно быть} & v_2=0 \\ \text{„} & x=l & \text{„} & \text{„} & v_2=0 \end{array} \qquad (46)$$

3) *начальными условиями:* при $t=0$ должно быть

$$v_2=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial v_2}{\partial t}=0 \tag{47}$$

Если ограничиваться только вещественною частью наших функций, как это и следует по смыслу физической задачи, то, как видно, функция v_1 определяется тем же самым уравнением и теми же самыми условиями, как в § 92, следовательно, будет

$$v_1=-\frac{2E}{\pi}e^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\operatorname{ch} n_k t+\frac{\mu}{n_k}\operatorname{sh} n_k t\right)\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

Для нахождения функции v_2 полагаем

$$v_2=\sum_{k=1}^{k=\infty}S_k\sin\frac{k\pi x}{l}$$

и, представив сперва вторую часть уравнения (45) под видом

$$E(b^2-a^2\omega^2+2hi\omega)\left(1-\frac{x}{l}\right)e^{i\omega t}=\sum_{k=1}^{k=\infty}H_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

так что

$$H_k(t)=\frac{2E}{k\pi}(b^2-a^2\omega^2+2hi\omega)e^{i\omega t}$$

имеем для определения S_k уравнение

$$-\frac{k^2\pi^2}{l^2}S_k-a^2S_k''-2hS_k'-b^2S_k=H_k(t)$$

и условия: при $t=0$ должно быть

$$S_k(0)=0; \qquad S_k'(0)=0$$

Отсюда следует

$$S_k=e^{-\mu t}(M_k\operatorname{ch} n_k t+N_k\operatorname{sh} n_k t)+P_k\cos\omega t+Q_k\sin\omega t$$

причем, на основании начальных условий, будет

$$M_k = -P_k$$

$$N_k = -\frac{1}{n_k}(P_k + \omega Q_k)$$

и величины P_k и Q_k будут

$$P_k = -\frac{2E}{k\pi}\frac{(b^2 - a^2\omega^2)\left(b^2 \quad a^2\omega^2 + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\right) + 4h^2\omega^2}{\left(b^2 - a^2\omega^2 + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\right)^2 + 4h^2\omega^2}$$

$$Q = \frac{4E}{l^2}\, h\omega k\pi \frac{1}{\left(b^2 - a^2\omega^2 + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\right)^2 + 4h^2\omega^2}$$

Таким образом, будет

$$V = E\left(1 - \frac{x}{l}\right)\cos\omega t + v_1 + v_2$$

причем v_1 и v_2 определяются приведенными выше формулами. Не выписывая результата подстановки вместо v_1 и v_2 их значений, заметим, что в выражении V можно будет произвести упрощение, подобное тому, как в § 92.

После того как V найдено, функции $I(x, t)$ находятся совершенно подобно тому, как в § 92.

Мы остановились так подробно на этой задаче потому, что уравнение, к которому она приводится, наиболее общее из рассмотренных нами и заключает, как частные случаи, уравнение распространения тепла и уравнение колебаний струны.

§ 94. Уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - 2h\frac{\partial V}{\partial t} - b^2 V = 0$$

введением новой неизвестной функции и новых переменных независимых приводится к более простому виду, в котором оно часто и рассматривается.

Наиболее обычное приведение такое:

Полагают

$$V = e^{kt} U$$

и выбирают k так, чтобы в преобразованном уравнении

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - 2(a^2 k + h)\frac{\partial U}{\partial t} - (b^2 + a^2 k^2 + 2hk)\, U = 0 \qquad (1)$$

пропал или член, содержащий $\frac{\partial U}{\partial t}$, или член, содержащий U.

В первом случае надо взять

$$k = -\frac{h}{a^2} = -\mu$$

тогда будет

$$b^2 + a^2 k^2 + 2hk = b^2 - \frac{h^2}{a^2}$$

но

$$b^2 = RG; \quad h = \frac{CR + LG}{2}; \quad a^2 = LC$$

так что

$$b^2 - \frac{h^2}{a^2} = -\frac{(CR - LG)^2}{4LC}$$

есть, очевидно, величина отрицательная, которую мы обозначим через $-b_1^2$, тогда рассматриваемое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - b_1^2 U = 0$$

Разделив на b_1^2 и полагая затем

$$b_1 x = x_1 \quad \text{и} \quad \frac{b_1 t}{a} = t_1$$

получим уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t_1^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + U$$

или, опуская значки,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U \tag{2}$$

Это есть первый вид, в котором часто пишется основное уравнение рассмотренной задачи.

Другой вид получается, если выбрать k так, чтобы было

$$a^2 k^2 + 2hk + b^2 = 0$$

иначе

$$k = -\frac{h}{a^2} \pm \frac{1}{a}\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - b^2}$$

Но мы видели, что

$$\frac{h^2}{a^2} - b^2 = \frac{(CR - LG)^2}{4LC}$$

поэтому будет

$$k = -\frac{CR + LG}{2LC} \pm \frac{CR - LG}{2LC}$$

т. е.

$$k_1 = -\frac{G}{L} \quad \text{и} \quad 2(a^2 k_1 + h) = CR - LG$$

$$k_2 = -\frac{R}{L} \quad \text{и} \quad 2(a^2 k_2^2 + h) = LG - CR$$

это показывает, что всегда можно взять то значение k, при котором величина

$$a^2 k + h > 0$$

обозначая эту величину через $2h_1$, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2h_1 \frac{\partial U}{\partial t}$$

разделив на h_1 и полагая

$$x = \frac{a}{h_1} x_1; \quad t = \frac{a^2}{h_1} t_1$$

получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial U}{\partial t_1}$$

или, опуская значки,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial U}{\partial t} \tag{3}$$

а это уравнение есть уравнение колебательного движения струны в среде, оказывающей сопротивление, пропорциональное первой степени скорости, когда же это уравнение относится к распространению электричества, то его обыкновенно называют „уравнением телеграфистов".

Таким образом, для перехода от уравнения (4) к уравнению (2) или (3) служит подстановка

$$V = e^{kt} U$$

Очевидно, что если для неизвестной функции V было граничное условие: при $x = 0$ должно быть $V = E$, то для функции U оно будет

$$U = Ee^{-kt}$$

а если бы оно было $Ee^{i\omega t}$, то для U получилось бы

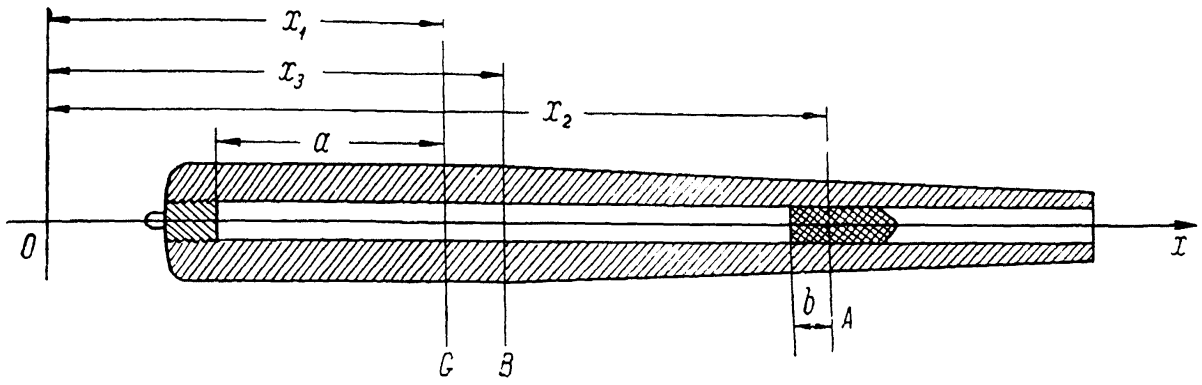
$$U = Ee^{(-k+i\omega)t}$$

Это показывает, что существенной разницы между задачею, рассмотренной Поссе, и более общею задачею § 93 нет, и если бы при решении первой задачи сперва привести основное уравнение к одному из простейших видов его, то решение второй могло бы быть получено простою заменою буквы k на $-k + i\omega$ и отделением вещественной части от мнимой. Мы ограничимся этим замечанием, соответствующих же выкладок производить не будем, так как после изложенного выше они очевидны.

§ 95. Хорошим примером является также изучение продольных колебаний орудия при выстреле или, точнее говоря, его цилиндрической внутренней трубы или ствола.

Рассмотрение поставленного вопроса начнем с установления тех сил, которыми в стволе вызываются продольные напряжения, независимые от тех, которыми сопровождаются поперечные напряжения и которые вызываются этими последними.

Те продольные напряжения, которые мы имеем в виду изучить, вызываются: 1) силами инерции, развивающимися при откате орудия, 2) продольными упругими колебаниями ствола орудия, происходящими от изменяемости усилия, действующего на дно канала.



Фиг. 58.

Пусть имеется орудие, ось канала которого примем за ось x, произвольную неподвижную на ней точку O — за начало координат (фиг. 58).

В момент времени t положение орудия определяется абсциссою x_1 его центра тяжести G, положение снаряда — абсциссою x_2 его центра тяжести A, положение заряда, который мы предположим уже вполне сгоревшим, — абсциссою x_3 центра тяжести B объема, занимаемого газами. Если канал цилиндрический (без каморы), что мы и будем предполагать для простоты выкладки, то точка B лежит посредине между дном снаряда и дном канала.

Обозначим через M_1 массу орудия, через m_2 — массу снаряда, через m_3 — массу заряда, пренебрежем трением снаряда о нарезы и давлением на поршень компрессора (оно в большей части случаев не поспевает и развиться ранее вылета); тогда будем иметь уравнение

$$M_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = \text{const.} \tag{1}$$

ибо при сделанных предположениях центр тяжести всей системы остается неподвижным.

Дифференцируя уравнение (1) два раза по времени, получим

$$M_1 x_1'' + m_2 x_2'' + m_3 x_3'' = 0 \tag{2}$$

но, очевидно,

$$x_3 = \frac{1}{2}(x_2 - b) + \frac{1}{2}(x_1 - a) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{2}(a + b)$$

причем a и b имеют показанные на чертеже значения, следовательно

$$x_3'' = \frac{1}{2} x_1'' + \frac{1}{2} x_2''$$

и уравнение (2) принимает вид

$$\left(M_1 + \frac{1}{2} m_3\right) x_1'' + \left(m_2 + \frac{1}{2} m_3\right) x_2'' = 0 \tag{3}$$

Обозначим через p давление в канале в момент t и через s площадь сечения канала, имеем

$$m_2 x_2'' = ps = F(t) \tag{4}$$

причем $F(t)$ есть некоторая заданная функция времени t.

Отсюда, на основании (3), следует

$$\left(M_1 + \frac{1}{2} m_3\right) x_1'' + \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_3}{m_2}\right) F(t) = 0 \tag{5}$$

Положив для краткости письма

$$k = \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{m_3}{m_2}}{M_1 + \frac{1}{2} m_3} = \frac{2m_2 + m_3}{2M_1 + m_3} \frac{1}{m_2} \tag{6}$$

имеем

$$x_1'' = -kF(t) \tag{7}$$

§ 96. Определяемое уравнением (7) движение всего орудия, как твердого тела, вызывает в каждом его поперечном сечении натяжение, величина которого равна произведению из расположенной впереди этого сечения массы ствола на ускорение x_1''.

Пусть x есть абсцисса рассматриваемого сечения и l_1 — длина дульной части впереди центра тяжести G орудия, тогда сказанная масса $\mu(x)$ будет

$$\mu(x) = \rho \int_x^{x_1 + l_1} \omega(\xi)\, d\xi \tag{8}$$

где $\omega(\xi)$ есть площадь сечения тела орудия, ρ — плотность металла.

Таким образом, в рассматриваемом сечении в момент t будет действовать продольное усилие

$$S(x) = \mu(x) x_1'' = -k\mu(x) F(t) \tag{9}$$

Отсюда видно, что если бы это действие было *статическое*, то соответствующее напряжение металла определилось бы по уравнению

$$\sigma = \frac{1}{\omega(x)} k\mu(x) F(t) \tag{10}$$

Так как масса m_3 заряда не превышает $\frac{1}{200}$ массы орудия, то вместо точной величины k, даваемой уравнением (6), можно брать приближенно

$$k = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_3}{m_2}\right)\frac{1}{M_1} \tag{11}$$

и писать

$$\sigma = \frac{1}{\omega(x)}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_3}{m_2}\right)\frac{\mu(x)}{M_1} F(t) \tag{12}$$

Само собою разумеется, что вычисление величины $\mu(x)$ сейчас же сводится к вычислению продольного распределения массы орудия, считая, например, абсциссы от дна канала или, лучше, от дульного среза. В этом последнем случае будет

$$\mu(x) = \rho \int_x^{l_1+x_1} \omega(\xi)\, d\xi = \rho \int_0^{x_1+l_1-x} \omega_1(\xi)\, d\xi = \rho \int_0^z \omega_1(\xi)\, d\xi = \mu_1(z) \tag{13}$$

и, следовательно, натяжение в момент времени t, в сечении, отстоящем на z от дульного среза, будет

$$\sigma(z) = \frac{1}{\omega(z)}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_3}{m_2}\right)\frac{\mu_1(z)}{M_1} F(t) \tag{14}$$

Вычисление интеграла (13)

$$\mu_1(z) = \rho \int_0^z \omega_1(\xi)\, d\xi \tag{13'}$$

имея чертежи орудия, не представляет никаких затруднений и не требует пояснений.

При статическом действии усилий, нет надобности знать изменяемость силы ps с течением времени, т. е. нет надобности знать функцию $F(t)$, — достаточно знать наибольшее ее значение, соответствующее наибольшему давлению в канале, причем *безразлично*, при каком положении снаряда

по длине канала оно имеет место. Обозначая это наибольшее значение функции $F(t)$ через F_{max}, будем иметь для наибольшего напряжения в данном сечении формулу

$$\sigma_{max}(z) = \frac{1}{\omega(z)}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_3}{m_2}\right)\frac{\mu_1(z)}{M_1}F_{max} = \\ = \frac{s}{\omega(z)}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_3}{m_2}\right)\frac{\mu_1(z)}{M_1}P_{max} \qquad (15)$$

где P_{max} есть наибольшее давление газов в канале.

Эта формула и решает поставленный вопрос о распределении продольных напряжений, при предположении, что действие усилий, вызывающих эти напряжения, *статическое*.

Чтобы при действии на какую угодно упругую систему усилия, изменяющегося с течением времени, можно было это действие, в смысле вызываемых им деформаций и напряжений, считать статическим, необходимо, чтобы период свободных колебаний системы, а если таких периодов много, то наибольший из них, *был мал* по сравнению с продолжительностью *нарастания* усилия от начального нулевого его значения до наибольшего.

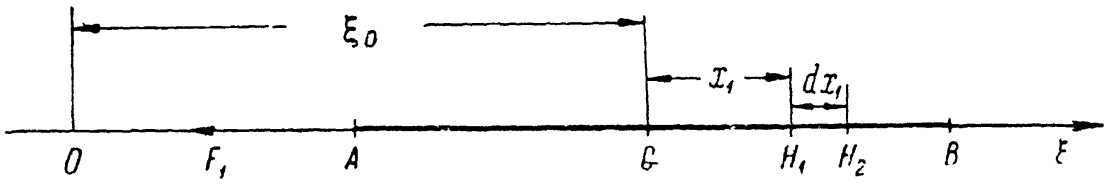
Между тем, по отношению к стволу орудия это предположение вообще не имеет места. Возьмем, например, морскую 4-дюймовую пушку 60 калибров длиною. Давление достигает в ней наибольшего своего значения приблизительно через 0.003 сек., продолжительность движения снаряда по каналу около 0.01 сек. Длина этого орудия 6 м, период основного тона продольных колебаний приблизительно равен продолжительности пробега звуковой волной, бегущей по стали, двойной длины орудия, а это составит около $\frac{12}{5200} = 0.0024$ сек., т. е. величину, близкую или во всяком случае того же порядка, как продолжительность нарастания давления. В этом случае действие „статическое“ и „динамическое“ могут разниться весьма значительно, ибо в стволе возбудятся продольные колебания, напряжения от которых и заменят собою статические.

§ 97. Определение продольных колебаний ствола орудия, если стремиться принять в расчет все особенности его конструкции, представляет задачу чрезмерно сложную и едва ли в общем виде разрешимую, поэтому необходимо разобрать сперва вопрос при разного рода упрощающих дело допущениях, чтобы по анализу этих частных случаев судить хотя бы предположительно об общем.

Простейшим из этих частных случаев является тот, когда ствол состоит из простой цилиндрической трубы одинаковой повсюду толщины стенок. С этого случая и начнем, чтобы на нем пояснить метод решения.

Очевидно, что в этом случае площадь сечения $\omega(\xi)$ есть величина постоянная, которую обозначим через ω, тогда, если пренебречь массою затвора по сравнению с массою тела орудия, будем иметь такую задачу.

К концу A свободного однородного стержня (фиг. 59), *длина коего* l, *приложена переменная сила* $F_1 = F(t)$; *требуется определить движение стержня, принимая во внимание и упругие колебания его.*



Фиг. 59.

Пусть G есть центр тяжести стержня. Если бы стержень был телом неизменяемым, то перемещение u_0 как центра тяжести, так и всех прочих точек стержня, определялось бы уравнением

$$\frac{d^2 u_0}{dt^2} = \frac{1}{M_1}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_3}{m_2}\right) F(t) = \frac{1}{M_1} F_1(t) \qquad (16)$$

причем сила F, действующая на дно снаряда, увеличена в отношении

$$\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_3}{m_2}\right) : 1$$

чтобы получить такое же движение центра тяжести, как и в случае орудия.

Начальные условия: при $t = 0$ должно быть

$$u_0 = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{du}{dt}\right)_0 = 0$$

Пусть сечение H_1 отвечает абсциссе $x_1 = GH_1$, считаемой от центра тяжести, и абсциссе $\xi_1 = \xi_0 + x_1$, считаемой от неподвижного начала O, но

$$\xi_0 = c + u_0$$

где c есть начальная абсцисса центра тяжести, таким образом для сечения H_2, соответствующего $x_2 = x_1 + dx_1$, будет

$$\xi_2 = \xi_1 + d\xi_1 \quad \text{и} \quad d\xi_1 = dx_1$$

Обозначим через $v = u_0 + u$ перемещение сечения H_1, тогда перемещение сечения H_2 в тот же момент будет

$$v + \frac{\partial v}{\partial x_1} dx_1 = u_0 + u + \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1$$

Отсюда видно, что натяжение в сечении H_1 будет

$$E\omega \frac{\partial v}{\partial x_1} = E\omega \frac{\partial u}{\partial x_1}$$

и в сечении H_2 оно будет

$$E\omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1 \right)$$

значит, на элемент $H_1 H_2$, масса которого есть $\rho\omega dx_1$, действуют силы

$$-E\omega \frac{\partial u}{\partial x_1} + E\omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1 \right) = E\omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1$$

и мы получаем уравнение движения

$$(\rho\omega\, dx_1) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = E\omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1$$

но

$$\frac{\partial v^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{M_1} F_1(t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

подставляя, получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{M_1} F_1(t) \tag{17}$$

причем положено

$$\frac{E}{\rho} = a^2 \tag{18}$$

К уравнению (17) необходимо присоединить условия граничные и начальные: первые относятся к концам стержня A и B, отвечающим значениям $x = \pm \frac{l}{2}$, вторые — к моменту времени $t = 0$.

В конце $A\left(x_1 = -\frac{l}{2}\right)$, действует сила $F_1(t)$, конец $B\left(x_1 = +\frac{l}{2}\right)$ свободен от всякого напряжения, следовательно, для величины u будут условия:

граничные:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{при} & x_1 = -\frac{l}{2} & \text{должно быть} \quad E\omega \frac{\partial u}{\partial x_1} = F_1(t) \\ \text{„} & x_1 = +\frac{l}{2} & \text{„} \quad\quad \text{„} \quad\quad \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \end{array}\right\} \text{при всяком значении времени } t \tag{19}$$

начальные же условия суть: при $t = 0$ должно быть

$$u = g(x_1) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f(x_1) \tag{20}$$

где $g(x_1)$ и $f(x_1)$ — заданные функции переменной x_1, для значений этой переменной от $x_1 = -\frac{l}{2}$ до $x_1 = +\frac{l}{2}$.

В нашем частном случае обе эти функции равны нулю для упомянутого участка.

§ 98. Если ставить задачу в такой форме, то ее решение представляет излишние трудности, но можно взять другую задачу, физически равносильную этой и гораздо более простую для решения.

Уравнение (17) представляет *вынужденные* колебания стержня под действием равномерно распределенной по его длине нагрузки, равной $-\frac{1}{M_1} F_1(t)$ на каждую погонную единицу длины стержня.

Вместо силы $F_1(t)$, приложенной к концу $x_1 = -\frac{l}{2}$, возьмем также равномерно распределенную нагрузку $\frac{F_1(t)}{\lambda}$ на каждую погонную единицу длины на протяжении от $x_1 = b$ до $x_1 = b + \lambda$ и затем определим предел, к которому приближается искомая функция u, когда b приближается к $-\frac{l}{2}$ и λ к нулю.

Для выкладок удобнее, если перенести начало счета абсцисс в конец A; эти абсциссы будем обозначать просто через x, а вышеупомянутую нагрузку, распределенную на участке от b до $b + \lambda$, обозначим через $\varphi(x, t)$, тогда наша задача приведется к такой математической:

Требуется определить функцию u, удовлетворяющую:

1) *дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{M_1} F_1(t) + \frac{1}{\rho\omega} \varphi(x, t) \tag{21}$$

2) *граничным условиям:*

$$\left.\begin{array}{lll} \text{при} & x = 0 & \text{должно быть} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \text{„} & x = l & \text{„} \quad \text{„} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \text{при всяком значении } t \tag{22}$$

3) *начальным условиям:* при $t = 0$ должно быть

$$u = g(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f(x) \tag{23}$$

причем $g(x)$ и $f(x)$ — заданные функции в промежутке от $x = 0$ до $x = l$; в нашем частном случае обе эти функции равны нулю, на всем этом протяжении.

Поставленная задача решается по общему способу определения вынужденных колебаний, положив

$$u = u_1 + u_2 \tag{24}$$

и определяя функции u_1 и u_2 так, чтобы u_1 представляло свободные колебания, u_2 — вынужденные. Для этого необходимо подчинить функцию u_1:

1) *дифференциальному уравнению* того же вида, как (21), но без последнего члена, т. е.

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0 \tag{25}$$

2) *граничным условиям тем же*, которые относятся к функции u, т. е. в нашем случае:

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad x = 0 \quad \text{должно быть} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \\ &\text{„} \quad x = l \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

3) *начальным условиям* тем же, которые относятся к функции u.

Что касается функции u_2, представляющей вынужденные колебания, то она должна удовлетворять:

1) *дифференциальному уравнению* (21), *т. е.*

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = -\frac{F_1(t)}{M_1} + \frac{1}{\rho\omega}\varphi(x, t) \tag{27}$$

2) *граничным условиям:*

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad x = 0 \quad \text{должно быть} \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \\ &\text{„} \quad x = l \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

3) *начальным условиям:* при $t = 0$ должно быть

$$u_2 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0 \tag{29}$$

Решение надо начинать с нахождения функции u_1 под видом

$$u_1 = \sum XT \tag{30}$$

где X есть функция одной только переменной x и T — функция только t, причем каждый член этой суммы должен удовлетворять дифференциальному уравнению (25), граничным условиям (26), а вся сумма должна удовлетворять начальным условиям.

Таким образом, имеем

$$T''X - a^2 X'' T = 0 \tag{31}$$

Этому уравнению нельзя удовлетворить иначе, как положив

$$T'' = -a^2 m^2 T \tag{32}$$

$$X'' = -m^2 X \tag{33}$$

где m — постоянная величина, пока произвольная.

Отсюда следует

$$\begin{aligned} T &= A\cos mat + B\sin mat \\ X &= C\cos mx + D\sin mx \end{aligned} \tag{34}$$

Граничные условия дают

$$\begin{aligned} X'(0) &= mD = 0 \\ X'(l) &= mC\sin ml = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

Отсюда следует

$$m = \frac{n\pi}{l} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots n, \ldots) \tag{36}$$

Таким образом, будет

$$X_n = \cos\frac{n\pi x}{l} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots n, \ldots) \tag{37}$$

$$T_n = A_n \cos n\frac{\pi at}{l} + B_n \sin n\frac{\pi at}{l} \tag{38}$$

ибо без нарушения общности все постоянные произвольные C можно брать равными 1.

Необходимо еще заметить, что при $n = 0$ будет

$$X_0 = 1 \quad \text{и} \quad T_0 = A_0 + B_0 t \tag{39}$$

Таким образом, получится

$$u_1 = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{n=\infty} \cos\frac{n\pi x}{l}\left(A_n \cos n\frac{\pi at}{l} + B_n \sin n\frac{\pi at}{l}\right) \tag{40}$$

где A_0, B_0, A_n, B_n — произвольные постоянные, которые определяются по начальным условиям, именно будет

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l g(\xi)\,d \tag{41}$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi \tag{42}$$

$$B_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)\,d\xi \tag{43}$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi \tag{44}$$

Как видно в нашем частном случае, когда на всем протяжении от $x=0$ до $x=l$ функции $g(x)=f(x)=0$, то будет и

$$u_1 = 0$$

§ 99. Вынужденные колебания ищем под видом

$$u_2 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \cos\frac{n\pi x}{l}\,S_n(t) \tag{45}$$

где $S_n(t)$ — неизвестные функции t.

Для этого представляем сперва вторую часть уравнения (27) под видом суммы

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} H_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l} = -\frac{1}{M_1}F_1(t) + \frac{1}{\rho\omega}\varphi(x,\,t) \tag{46}$$

тогда будет

$$\begin{aligned} H_0(t) &= \frac{1}{l}\int_0^l \left(-\frac{1}{M_1}F_1(t) + \frac{1}{\rho\omega}\varphi(\xi,\,t)\right)d\xi \\ H_n(t) &= \frac{2}{l}\int_0^l \frac{1}{\rho\omega}\varphi(\xi,\,t)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi \end{aligned} \tag{47}$$

и величина $S_n(t)$ будет определяться уравнением

$$S_n'' + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}S_n = H_n(t) \qquad (n=1,2,\ldots n) \tag{48}$$

$$S_0'' = H_0(t) \tag{49}$$

и начальными условиями: при $t=0$ должно быть

$$\begin{aligned} S_n(0)&=0; \qquad S_n'(0)=0 \\ S_0(0)&=0; \qquad S'_0(0)=0 \end{aligned} \tag{50}$$

В нашем случае функция $\varphi(\xi, t)$ такова:

$$\begin{aligned} &\text{при} && 0<\xi\leqslant b && \varphi(\xi, t)=0 \\ &\text{„} && b\leqslant\xi\leqslant b+\lambda && \varphi(\xi, t)=\frac{1}{\lambda}F_1(t) \\ &\text{„} && (b+\lambda)\leqslant\xi\leqslant l && \varphi(\xi, t)=0 \end{aligned}$$

и, следовательно, будет

$$H_0(t)=-\frac{F_1(t)}{M_1}+\frac{1}{\rho l\omega}\int_b^{b+\lambda}\frac{1}{\lambda}F_1(t)\,d\xi=-\frac{1}{M_1}[F_1(t)-F_1(t)]=0$$

$$H_n(t)=\frac{2}{l\rho\omega}\int_b^{b+\lambda}\frac{1}{\lambda}F_1(t)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi=$$

$$=\frac{2}{l\rho\omega}\frac{1}{\lambda}\frac{l}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi(b+\lambda)}{l}-\sin\frac{n\pi b}{l}\right]F_1(t)=$$

$$=\frac{4}{M_1}\frac{l}{n\pi\lambda}\sin\frac{n\pi\lambda}{2l}\cos\frac{n\pi\left(b+\frac{1}{2}\lambda\right)}{l}F_1(t)=G_nF_1(t)$$

причем

$$G_n=\frac{4}{M_1}\frac{l}{n\pi\lambda}\sin\frac{n\pi\lambda}{2l}\cos\frac{n\pi\left(b+\frac{1}{2}\lambda\right)}{l}$$

Таким образом, для определения S_0 и S_n имеем уравнения

$$S_0''=H_0=0$$

$$S_n''+\frac{a^2n^2\pi^2}{l}S_n=G_nF_1(t)$$

решения коих, удовлетворяющие условиям (50), суть

$$\begin{aligned} S_0&=0 \\ S_n&=\frac{lG_n}{an\pi}\int_0^t F_1(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\,d\tau \end{aligned} \tag{51}$$

Но величина

$$\frac{l}{an\pi}G_n = \frac{4l}{an\pi M_1}\frac{l}{n\pi\lambda}\sin\frac{n\pi\lambda}{2l}\cos\frac{n\pi\left(b+\frac{1}{2}\lambda\right)}{l}$$

в пределе при $b=0$, $\lambda=0$ будет

$$\lim_{b=0,\,\lambda=0}\left(\frac{l}{an\pi}G_n\right)=\frac{2l}{an\pi M_1}$$

Следовательно, предельное значение $S_n(t)$ будет

$$S_n(t)=\frac{2l}{an\pi M_1}\int_0^t F_1(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau \tag{52}$$

и искомая функция u_2 есть

$$u_2=\sum_{n=1}^{n=\infty}S_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l} \tag{53}$$

причем суммирование взято от $n=1$ до $n=\infty$, ибо $S_0=0$.

Выражение (53) для u_2 и решает поставленную задачу.

§ 100. Хотя входящая в состав выражения u_2 сумма и может быть найдена в простой замкнутой форме (способ нахождения этой суммы совершенно подобен тому, который изложен ниже), но мы на этом останавливаться не будем, ибо нас не столько интересуют величины перемещений различных точек стержня при его продольных упругих колебаниях, сколько происходящие от них напряжения, выражаемые формулою

$$\sigma=E\frac{\partial u}{\partial x}$$

На основании формулы (53) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u_2}{\partial x}=-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n\pi}{l}S_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}=$$

$$=-\frac{2}{aM_1}\sum_{n=1}^{n=\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^t F_1(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau$$

полагая

$$a(t-\tau)=\xi$$

получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2}{a^2M_1}\sum_{n=1}^{n=\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^{at}F_1\left(t-\frac{\xi}{a}\right)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi$$

но

$$a^2 = \frac{E}{\rho}; \qquad M_1 = \rho\omega l$$

поэтому будет

$$\sigma = E\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\omega}\Phi(x, t) \tag{54}$$

причем

$$\Phi(x, t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{n=\infty} \sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^{al} F_1\left(t - \frac{\xi}{a}\right)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi \tag{55}$$

Функция $\Phi(x, t)$ может быть найдена в простой замкнутой форме на основании свойств рядов Фурье и функций, ими представляемых.

В самом деле, известно, что сумма

$$\sum_1 = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{n=\infty} \sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^{l} f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi \tag{56}$$

представляет такую функцию $\Omega(x)$, которая в промежутке от $x=0$ до $x=l$ равна $f(x)$, в промежутке от $x=0$ до $x=-l$ эта функция равна $-f(-x)$, вне же этого основного участка, т. е. от $x=-l$ до $x=+l$, функция Ω определяется условием периодичности $\Omega(x+2l) = \Omega(x)$. В местах разрыва ряд представляет значение

$$\frac{1}{2}[\Omega(c+0) + \Omega(c-0)]$$

Нам величина $\frac{\partial u}{\partial x}$ нужна только для участка от $x=0$ до $x=l$, поэтому мы ограничимся ее составлением для этого участка.

1) Положим, что частное значение t_1 переменной t таково, что

$$0 < at_1 < l$$

тогда, если взять функцию $f(\xi)$ так, чтобы было

$$\begin{aligned} &\text{для} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant at_1 \quad && f(\xi) = F_1\left(t_1 - \frac{\xi}{a}\right) \\ &\text{„} \quad at_1 \leqslant \xi \leqslant l \quad && f(\xi) = 0 \end{aligned}$$

то очевидно, что интеграл

$$\int_0^{l} f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi = \int_0^{at_1} F_1\left(t_1 - \frac{\xi}{a}\right)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi$$

и, следовательно сумма Σ_1 представляет такую функцию $\Phi(x, t)$, которая такова:

$$\begin{aligned} &\text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant at_1 \qquad \Phi(x, t_1) = F_1\left(t_1 - \frac{x}{a}\right) \\ &\text{„} \quad at_1 \leqslant x < l \qquad \Phi(x, t_1) = 0 \end{aligned} \tag{57}$$

2) Пусть частное значение t_2 переменной t таково, что

$$l \leqslant at_2 \leqslant 2l$$

тогда положим

$$2l - at_2 = h$$

величина h будет меньше l.

Очевидно, будет

$$\int_0^{at_2} = \int_0^{l} + \int_{l}^{at_2}$$

т. е.

$$\int_0^{at_2} F_1\left(t_2 - \frac{\xi}{a}\right) \sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi = \int_0^{l} F_1\left(t_2 - \frac{\xi}{a}\right) \sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi + \int_{l}^{at_2} F_1\left(t_2 - \frac{\xi}{a}\right) \sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi$$

Сделаем в последнем интеграле

$$2l - \xi = \xi_1$$

тогда будет

$$\int_{l}^{at_2} F_1\left(t_2 - \frac{\xi}{a}\right) \sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi = -\int_{2l-at_2}^{l} F_1\left(t_2 - \frac{2l-\xi}{a}\right) \sin\frac{n\pi\xi}{l}\, dx$$

Следовательно, рассматриваемая сумма разложится на две и будет

$$\sum_1 = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin\frac{n\pi x}{l} \int_0^{l} F_1\left(t_2 - \frac{\xi}{a}\right) \sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi$$

$$- \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin\frac{n\pi x}{l} \int_{2l-at_2}^{l} F_1\left(t_2 - \frac{2l-\xi}{a}\right) \sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi$$

Первая сумма представляет такую функцию $\Phi_1(x, t_2)$, которая в промежутке от $x = 0$ до $x = l$ равна

$$F_1\left(t_2 - \frac{x}{a}\right)$$

вторая сумма представляет функцию $\Phi_2(x, t_2)$, которая такова:

$$\text{для } 0 \leqslant x \leqslant 2l - at_2 \qquad \Phi_2(x, t_2) = 0$$

$$\text{„ } 2l - at_2 \leqslant x \leqslant l \qquad \Phi_2(x, t_2) = F_1\left(t_2 - \frac{2l - x}{a}\right)$$

следовательно, функция $\Phi(x, t_2)$ определяется условиями:

$$\text{для } 0 \leqslant x \leqslant 2l - at_2 \qquad \Phi(x, t_2) = F_1\left(t_2 - \frac{x}{a}\right)$$

$$\text{„ } 2l - at_2 \leqslant x \leqslant l \qquad \Phi(x, t_2) = F_1\left(t_2 - \frac{x}{a}\right) - F_1\left(t_2 - \frac{2l - x}{a}\right)$$

3) Пусть

$$2l < at_3 < 3l$$

тогда будет

$$\int_0^{at_3} = \int_0^{l} + \int_{l}^{2l} + \int_{2l}^{at_3}$$

соответственно этому и сумма Σ_1 разобьется на три суммы, и нетрудно видеть, что первая сумма представляет такую функцию $\Phi_1(x, t_3)$, которая в промежутке от $x = 0$ до $x = l$ равна

$$F_1\left(t_3 - \frac{x}{a}\right)$$

вторая сумма, после преобразования интеграла к такому виду, чтобы в нем верхний предел равнялся l, будет со знаком — и представляет собою на протяжении от $x = 0$ до $x = l$ функцию $\Phi_2(x, t_2)$, которая равна

$$F_1\left(t_3 - \frac{2l - x}{a}\right)$$

и, наконец, третья сумма представляет функцию $\Phi_3(x, t_3)$, которая в промежутке от $x = 0$ до $x = at_3 - 2l$ равна

$$F_1\left(t_3 - \frac{2l + x}{a}\right)$$

и в промежутке от $x = at_3 - 2l$ до $x = l$ равна нулю.

Таким образом, будет

для $0 \leqslant x \leqslant at_3 - 2l$:

$$\Phi(x, t_3) = F_1\left(t_3 - \frac{x}{a}\right) - F_1\left(t_3 - \frac{2l - x}{a}\right) + F_1\left(t_3 - \frac{2l + x}{a}\right)$$

и для $at_3 - 2l \leqslant x \leqslant l$:

$$\Phi(x, t_3) = F_1\left(t_3 - \frac{x}{a}\right) - F_1\left(t_3 - \frac{2l - x}{a}\right)$$

4) Совершенно так же увидим, что если

$$3l < at_4 < 4l$$

то функция $\Phi(x, t_4)$ будет
для $0 \leqslant x \leqslant 4l - at_4$:

$$\Phi(x, t_4) = F_1\left(t_4 - \frac{x}{a}\right) - F_1\left(t_4 - \frac{2l - v}{a}\right) + F_1\left(t_4 - \frac{2l + x}{a}\right)$$

и для $4l - at_4 \leqslant x \leqslant l$:

$$\Phi(x, t_4) = F_1\left(t_4 - \frac{x}{a}\right) - F_1\left(t_4 - \frac{2l - x}{a}\right) + F_1\left(t_4 - \frac{2l + x}{a}\right) - F_1\left(t_4 - \frac{4l - x}{a}\right)$$

и т. д.

Как видно, этими формулами вопрос решается *вполне*, ибо функция $F_1(t)$ предполагается заданной для всего времени движения снаряда по каналу, причем это задание может быть и графическое.

§ 101. Понятно, что когда функция $F_1(t)$ задана графически, то и функцию $\Phi(x, t)$ надо строить графически же. Это построение, на основании выведенных выше формул, выполняется весьма просто.

Для наглядности сделаем сперва сводку формул, определяющих функцию $\Phi(x, t)$ для различных значений времени t:

1) $$0 < at_1 \leqslant l$$

$$0 < x \leqslant at_1; \quad \Phi(x, t_1) = F_1\left(t_1 - \frac{x}{a}\right)$$

$$at_1 \leqslant x \leqslant l; \quad \Phi(x, t_1) = 0$$

2) $$l \leqslant at_2 \leqslant 2l$$

$$0 \leqslant x \leqslant 2l - at_2; \quad \Phi(x, t_2) = F_1\left(t_2 - \frac{x}{a}\right)$$

$$2l - at_2 \leqslant x \leqslant l; \quad \Phi(x, t_2) = F_1\left(t_2 - \frac{x}{a}\right) - F_1\left(t_2 - \frac{2l - x}{a}\right)$$

3) $$0 \leqslant x \leqslant at_3 - 2l$$

$$0 \leqslant x < at_3 - 2l; \quad \Phi(x_1\, t_3) = F_1\left(t_3 - \frac{x}{a}\right) + F_1\left(t_3 - \frac{2l + x}{a}\right) - F_1\left(t_3 - \frac{2l - x}{a}\right)$$

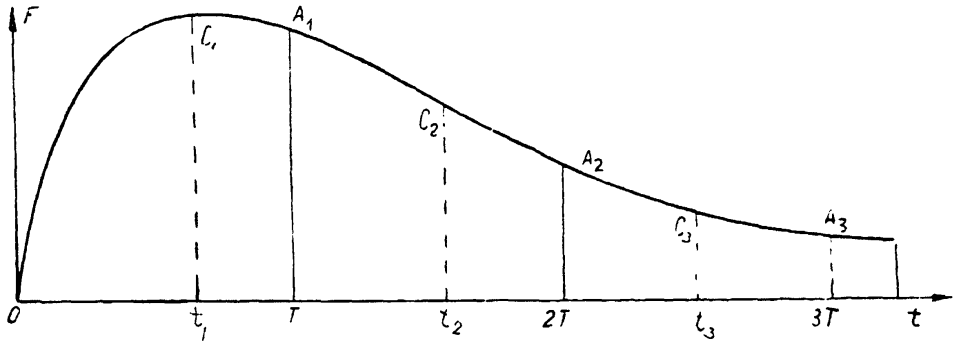
$$at_3 - 2l \leqslant x \leqslant l; \quad \Phi(x, t_3) = F_1\left(t_3 - \frac{a}{x}\right) - F_1\left(t_3 - \frac{2l - x}{a}\right)$$

и т. д.

Для составления графика следует принять определенное соответствие масштабов для времени t и абсцисс x, именно следует эти масштабы избрать так, чтобы на чертеже промежуток времени

$$T = \frac{a}{l}$$

в течение которого звуковая волна, бегущая по металлу со скоростью a проходит путь, равный длине l орудия (стержня), изображался бы такою же длиною, как и l.



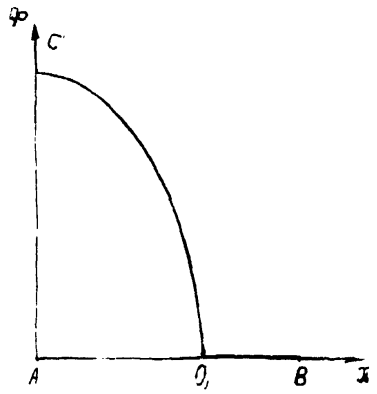
Фиг. 60а.

Затем напряжения

$$E\frac{\partial u}{\partial x}$$

которые пропорциональны $\Phi(x, t)$ или $F_1(t)$, изображать тою же кривою $F_1(t)$, но только читать ее ординаты в соответственном масштабе.

Пусть кривая OA_1, A_2, A_3, ... (фиг. 60а) изображает в принятом масштабе функцию $F_1(\cdot)$. Помечаем на оси времен точки T, $2T$, $3T$ и т. д. Проводим на отдельном чертеже прямую Ox, откладываем по ней длину $AB = l = OT$ с первого чертежа и проводим концевые ординаты.



Фиг. 60б.

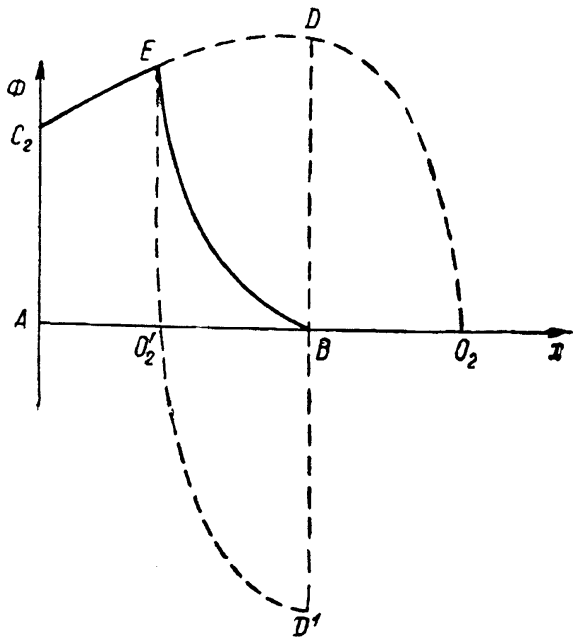
Положим, что надо построить функцию $F(x, t_1)$; тогда на первом чертеже (фиг. 60а) откладываем длину Ot_1, изображающую промежуток времени t, и на втором чертеже (фиг. 60б) откладываем длину $AO_1 = Ot_1$. С кривой $F_1(t)$ снимаем шаблон и, повернув этот шаблон точкою O вправо, прикладываем его так, чтобы точка O легла в O_1 и ось t совмещалась бы с осью x, тогда точка t_1 ляжет в A, и ордината $t_1 C_1$ ляжет по оси $A\Phi$; по шаблону очерчиваем кривую $C' O_1$ — эта кривая и представит функцию

$$F_1\left(t_1 - \frac{x}{a}\right)$$

которой равна $\Phi(x, t_1)$ для значений x от $x = 0$ до $x = at_1 = AO_1$. Для дальнейшего протяжения $O_1 B$ эта функция равна нулю — напряжение еще не поспело распространиться до конца B орудия (стержня).

Положим теперь, что промежуток времени t_2 такой, что $l < at_2 < 2l$.

Выносим на первый чертеж (фиг. 60а) точку t_2 по оси Ot, на втором чертеже (фиг. 60в) проводим ось Ax и концевые ординаты через точки A и B; прикладываем шаблон кривой, изображающей $F_1(t)$, так, чтобы ординаты $t_2 C_2$ легли на оси $A\Phi$ и точка O легла на оси Ax в точку O_2, такую, что $AO_2 = Ot_2$, и прочерчиваем пунктирно часть $C_2 D$ кривой между осью $O_2 F$ и концевою ординатою, — этот участок представит функцию

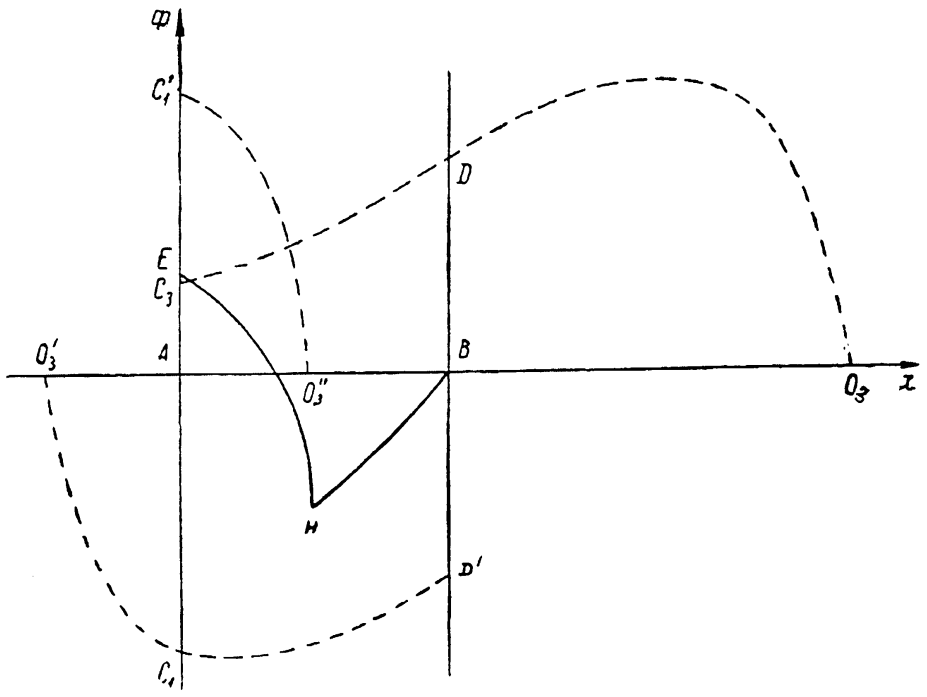


Фиг. 60в.

$$F_1\left(t_2 - \frac{x}{a}\right)$$

в промежутке от $x = 0$ до $x = l$; продолжение кривой заняло бы положение DO_2 (прочерчивать это положение нет надобности). Помещаем на шаблоне ординату, проходящую через точку D и оборачиваем шаблон так, чтобы точка O легла в O_2' и точка D легла бы в D', и обчерчиваем пунктирно кривую $O_2' D'$ — эта кривая представит функцию

$$-F_1\left(t_2 - \frac{2l - x}{a}\right)$$



Фиг. 60г.

По пунктирным кривым C_2D и $O_2'D'$ строим сплошную кривую C_2EB, ординаты которой представляют алгебраическую сумму ординат кривых C_2D и $O_2'D'$. Полученная кривая C_2EB и представляет функцию $\Phi(x_1, t_2)$. для рассматриваемого значения t_2 времени t.

Физический смысл этого построения таков: распространяющееся по стволу напряжение, достигнув дульного среза (свободный конец стержня), отражается, изменившись на противоположное, и распространяется с тою же скоростью в обратную сторону, причем к рассматриваемому моменту t_2 эта отраженная волна достигнет точки O'_2, симметричной с точкой O_2, в которую она пришла бы, если бы стержень был неограниченный.

Совершенно так же для значения t_3 времени такого, что $2l < at_3 < 3l$, наносим на первом чертеже (60а) точку t_3, помечаем на шаблоне ординату t_3C_3, накладываем шаблон на второй чертеж (фиг. 60г) так, чтобы эта ордината шла по $A\Phi$, а начальная точка O шаблона лежала в точке O_3 на оси Ox. Прочерчиваем пунктирно часть C_3D кривой между осью $A\Phi$ и концевою ординатою, помечаем на шаблоне ординату, проходящую через точку D, оборачиваем шаблон так, чтобы точка O_3 легла в O_3' и точка D легла бы в D', прочерчиваем пунктирно кривую C_1D'. Между осью $O\Phi_1$ и концевою ординатою помечаем ординату, проходящую через точку C_1, оборачиваем шаблон так, чтобы точка O_3' легла в O_3'' и точка C в C_1', прочерчиваем кривую C_1O_3'' пунктирно. По ординатам пунктирных кривых $C'O_3''$, C_3D, C_1D' строим сплошную кривую EHB, ординаты которой равны алгебраической сумме ординат трех предыдущих кривых, кривая EHB и представить функцию $\Phi(x, t_3)$. Как уже сказано, оборот шаблона соответствует отражению волны от конца стержня; построение, как видно, состоит в том, чтобы волну, которая в неограниченном стержне заняла бы положение C_3DO_3, собрать отражениями с переменой при всяком отражении знака на участок между концами стержня, иначе, между дульным и казенным срезом орудия.

Отсюда ясно, каким образом выполнять построения для любого момента времени.

§ 102. Физическое истолкование полученного решения делает его почти очевидным a priori: приложенная к концу $x = 0$ сила $F_1(t)$ возбуждает в этом конце натяжение, ей соответствующее, этому натяжению отвечает определенное относительное удлинение материала (расширение), это расширение (волна расширения) бежит по длине стержня со скоростью распространения звука по металлу, достигает свободного конца, от него отражается, превращаясь в волну сжатия, и бежит обратно к первому концу, достигнув которого вновь отражается, обратившись вновь в волну расширения и т. д., причем действие силы служит постоянным источником все новых и новых волн. Все эти волны не выходят из стержня, отражаясь от концов его, образуют, накладываясь друг на друга, сложную систему равнодействующей волны напряжений.

§ 103. Если бы встретилась надобность построить не только величины напряжений, но и самих перемещений, то для каждого данного момента времени мы имеем соотношение

$$u = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial x}\, dx$$

Но вместо того, чтобы интегрировать всякий раз кривую $\frac{\partial u}{\partial x}$, проще сперва по заданной кривой $F_1(t)$ построить ее интегральную кривую

$$I(t) = \int_0^t F_1(\tau)\, d\tau$$

а затем с этой кривою поступить совершенно так же, как мы поступали с кривою $F_1(t)$, — получится распределение упругих перемещений по длине ствола, в масштабе, определяемом величиною $E\omega$.

Если бы потребовались и абсолютные положения каждого сечения по отношению к неподвижному началу, то к исчисленным величинам u надо присовокупить величину u_0 перемещения всего стержня, как неизменяемого тела, рассчитав u_0 по формуле

$$u_0 = \frac{1}{M_1} \int_0^t d\tau \int_0^\tau F_1(\tau)\, d\tau$$

Таким образом, случай колебаний однородного упругого стержня, возбуждаемых действием переменной силы, приложенной к одному из его концов, а значит, и простейший случай продольных колебаний ствола орудия, получает полное решение, весьма наглядное, простое и удобное для практического пользования им.

§ 104. О вибрации судов. На многих судах, снабженных поршневыми машинами, замечается следующее явление: при некотором определенном числе оборотов, корпус корабля испытывает сильные сотрясения (вибрации), которые пропадают почти совершенно, как только число оборотов будет изменено в ту или другую сторону на 4—5% от вышеупомянутого „критического".

На судах с весьма быстроходными машинами иногда замечается два критических числа оборотов, значительно отличающихся друг от друга.

Уже самый характер явления показывает, что мы имеем здесь случай резонанса: корабль представляет собою громадную упругую балку переменного сечения. Такая балка, подобно балке постоянного сечения, имеет вполне определенные частоты свободных колебаний; если в машине силы

инерции движущихся частей не вполне уравновешены, то при работе этой машины происходят периодические усилия, воспринимаемые фундаментом ее; передаваясь корпусу корабля, они и вызывают его вибрацию.

Таким образом, вибрация корабля представляет собою *вынужденные* колебания. Наша задача состоит в вычислении их.

Таким образом, мы имеем такую задачу: *даны возмущающие силы и пары, происходящие от неуравновешенных сил инерции движущихся частей машины, требуется вычислить вибрацию, которая будет происходить на данном корабле при работе на нем этой машины.*

§ 105. Положим сперва, что все неуравновешенные силы инерции машины приводятся к одной вертикальной силе, лежащей в диаметральной плоскости корабля, тогда можно принять, что на корабль действует внешняя сила

$$R = -Q \sin kt$$

приложенная в некоторой точке, лежащей в машинном отделении; пусть c есть абсцисса этой точки, считаемая от кормового перпендикуляра.

Сила R производит двоякого рода действие: 1) колебательное движение всего корабля, рассматриваемого как неизменяемое твердое тело, и 2) упругие колебания корабля, составляющие его вибрацию.

Колебания первого рода состоят из килевых качаний корабля и вертикальных колебаний его. В общем случае и те и другие слагаются из колебаний свободных и вынужденных, но, вследствие сопротивления воды, свободные колебания весьма быстро погашаются, и остаются одни вынужденные.

Так как период силы весьма мал по сравнению с периодами упомянутых свободных колебаний корабля и сопротивление сравнительно не велико, то вынужденные колебания определятся из уравнений

$$\begin{aligned} \zeta_0'' + n^2 \zeta_0 &= -\frac{Qg}{P} \sin kt \\ \vartheta'' + p^2 \vartheta &= -\frac{Q}{K}\left(c - \frac{l}{2}\right) \sin kt \end{aligned} \qquad (1)$$

т. е. из уравнений вертикальных и килевых качаний корабля, пренебрегая сопротивлением воды, где

$$n^2 = \frac{Sq}{P}; \qquad p^2 = \frac{P(\rho - a)}{K}$$

причем P есть вес корабля, S — площадь его грузовой ватерлинии, q — вес кубического метра воды (пресной 1000 кг, соленой 1025 кг), K — моменг инерции корабля около поперечной оси, $(\rho - a)$ — возвышение продольного метацентра над центром тяжести корабля.

Из уравнений (1) следует

$$\zeta_0 = -\frac{Qg}{P} \frac{1}{n^2 - k^2} \sin kt$$

$$\vartheta = \frac{Q}{K} \frac{l - 2c}{2} \frac{1}{p^2 - k^2} \sin kt$$

Величины n^2 и p^2 весьма малы по сравнению с k^2 $\left(\text{меньше } \frac{1}{50}\right)$, поэтому можно писать

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= a \sin kt \\ \vartheta &= \alpha \sin kt \end{aligned} \tag{2}$$

причем

$$a = \frac{Qg}{P}\frac{1}{k^2}; \qquad \alpha = -\frac{Q}{K}\frac{l-2c}{2k^2} \tag{2'}$$

Положение продольной недеформированной оси корабля, совершающего вышеприведенные колебания, очевидно, будет

$$\zeta = \zeta_0 + \vartheta\left(x - \frac{l}{2}\right) = (b + \alpha x)\sin kt$$

положив

$$b = a - \frac{\alpha l}{2}$$

Для численных примеров, приводимых ниже, взято:

$$\frac{Q}{P} = \frac{1}{100}; \quad l = 100\ м; \quad c = \frac{1}{2}l, \quad \frac{1}{3}l \text{ и } \frac{1}{6}l; \quad k = \frac{\pi N}{30} = \frac{\pi 76}{30}$$

$$k^2 = 63.25; \qquad K = \frac{P}{g}\frac{l^2}{20}$$

тогда по вышеприведенным формулам имеем

при $c = \frac{1}{2}l$ $a = 0.155$ см; $\alpha = 0$; $b = 0.155$ см

„ $c = \frac{1}{3}l$ $a = 0.155$ см; $\alpha = -0.000051$; $b = 0.410$ см

„ $c = \frac{1}{6}l$ $a = 0.155$ см; $\alpha = -0.000102$; $b = 0.665$ см

По этим данным положение продольной оси корабля, в недеформированном состсянии, легко наносится для любого момента времени t.

Заметим, что формулу (2) можно получить сразу из уравнений

$$\frac{P}{g}\zeta_0'' = -Q\sin kt \qquad \text{и} \qquad K\vartheta'' = -Q\left(c - \frac{l}{2}\right)\sin kt$$

представляющих колебания не плавающего, а свободного тела.

Так как наша задача состоит в определении вибраций корабля (колебательное его движение исключается из окончательного результата), то можно принимать корабль, плавающий на тихой воде, за свободное тело, находящееся в равновесии. Это допущение равносильно отбрасыванию влияния: 1) изменений пловучести, происходящих от вышеуказанного колебательного движения, и 2) сопротивления воды.

Легко видеть, что влияние изменений пловучести на вибрацию ничтожно мало, сопротивление же воды погашает свободные упругие колебания, почти не влияя на вынужденные, за исключением случаев почти полного синхронизма.

§ 106. При вычислении статических прогибов корабля и напряжений, происходящих от данного изгибающего момента, корабль принимается за упругую балку, поперечными размерами которой пренебрегают по сравнению с ее длиною l, при тех же предположениях будем вычислять и вибрацию.

Пусть „жесткость“, т. е. произведение момента инерции J площади поперечного сечения корпуса корабля на модуль упругости E материала (стали), есть заданная функция

$$EJ = f(x),$$

и отнесенная на один погонный метр приведенная масса есть также заданная функция

$$q(x) = \frac{w(x)}{g}$$

абсциссы x рассматриваемого сечения, $w(x)$ есть вес корабля вместе с весом увлекаемой воды (стр. 430) на один погонный метр, g — ускорение силы тяжести.

При указанных предположениях и обозначениях очевидно, что определение вибрации v корабля равносильно задаче об определении вынужденных упругих колебаний балки, оба конца которой свободны под действием силы

$$R = -Q \sin kt$$

приложенной в точке $x = c$.

Эта же последняя задача выражается математически следующим образом:

Требуется найти такую функцию v переменных независимых x и t, которая удовлетворяет:

во-первых, дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[f(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] + q(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = F(x,t) \tag{3}$$

во-вторых, граничным условиям:

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad x = 0 \quad \text{должно быть} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \\ &\text{„} \quad x = l \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

в-третьих, условиям сопряжения, которые состоят в том, что при $x = c$, где действует сосредоточенная внешняя сила, значения

$$v; \quad \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

остаются непрерывными, значение же $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}$ претерпевает разрыв непрерывности, так что

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_{c-\varepsilon} - \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_{c+\varepsilon} = \frac{1}{f(c)} Q \sin kt \tag{5}$$

Начальных условий нет надобности рассматривать, ибо ищется вынужденное синусоидальное колебание того же периода, что и вынуждающая сила.

Функция $F(x, t)$ в правой части уравнения (3) представляет отнесенную на один погонный метр „внешнюю“ нагрузку, действующую на балку в момент времени t в точке, абсцисса коей есть x; в нашем случае она сводится к силе инерции колебательного движения корабля, рассматриваемого как неизменяемое твердое тело, следовательно, будет

$$F(x, t) = -q(x)\frac{d^2\zeta}{dt^2} \tag{6}$$

причем

$$\zeta = \zeta_0 + \left(x - \frac{l}{2}\right)\theta = (b + \alpha x)\sin kt$$

и

$$b = a - \alpha\frac{l}{2}$$

По подстановке в уравнение (3) получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[f(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] + q(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = k^2(b + \alpha x)\,q(x)\sin kt \tag{3'}$$

положив

$$v = u - (b + \alpha x)\sin kt \tag{7}$$

имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[f(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] + q(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{8}$$

Условия граничные и условия сопряжения будут:

$$\begin{aligned} &\text{при } x = 0 \quad \text{должно быть} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \\ &\text{„ } x = l \quad \text{„ } \quad \text{„ } \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{„ } \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \end{aligned} \tag{4'}$$

Величины u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $x = c$ непрерывны:

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{c-\varepsilon} - \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{c+\varepsilon} = \frac{1}{f(c)}\,Q\sin kt \tag{5'}$$

Таким образом, наша задача приведена к определению функции u, представляющей „чистые“ упругие колебания или вибрацию корабля. Для определения этой функции подразделим полную длину l корабля сечением $x = c$ на две части, из которых первая заключается между значениями

$$x = 0 \quad \text{и} \quad x = c$$

вторая — между значениями

$$x=c \quad \text{и} \quad x=l$$

причем абсцисса x считается от кормового перпендикуляра.

Для первой части полагаем

$$u=\varphi_1(x)\sin kt \tag{9}$$

для второй части удобнее считать абсциссы от носового перпендикуляра, поэтому, положив

$$x_1=l-x$$

берем

$$u=\varphi_2(x_1)\sin kt \tag{10}$$

тогда наша задача сводится к определению функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x_1)$.

Положив

$$f_1(x_1)=f(l-x) \quad \text{и} \quad q_1(x_1)=q(l-x)$$

получим для определения функций φ_1 и φ_2, подставив выражения (9) и (10) в уравнение (8), обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[f(x)\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}\right]-k^2q(x)\varphi_1=0 \tag{11}$$

$$\frac{d^2}{dx_1^2}\left[f_1(x_1)\frac{d^2\varphi_2}{dx_1}\right]-k^2q_1(x_1)\varphi_2=0 \tag{12}$$

Оба эти уравнения линейные четвертого порядка, следовательно, их общие интегралы содержат по *четыре* произвольных постоянных и притом *линейно*. Значения этих постоянных определяются условиями граничными и условиями сопряжения.

Мы примем, что функция $f(x)$ не равна нулю ни при $x=0$, ни при $x=l$, тогда граничные условия выражаются уравнениями

$$\begin{aligned}&\varphi_1''(0)=0; \qquad \varphi_1'''(0)=0\\ &\varphi_2''(0)=0; \qquad \varphi_2'''(0)=0\end{aligned} \tag{13}$$

условия сопряжения суть

$$\begin{gathered}\varphi_1(c)=\varphi_2(l-c); \quad \varphi_1'(c)=-\varphi_2'(l-c); \quad \varphi_1''(c)=\varphi_2''(l-c)\\ \varphi_1'''(c)=-\varphi_2'''(l-c)+\frac{1}{f(c)}Q\end{gathered} \tag{14}$$

причем, как обыкновенно, производные обозначены штрихами. Знак минус при производных нечетного порядка функции φ_2 приписан потому, что

производные надо брать по переменной x, аргумент же функции φ_2 есть $x_1 = l - x$, поэтому будет, например,

$$\frac{d}{dx}\varphi_2(x_1) = \frac{d\varphi_2(x_1)}{dx_1}\frac{dx_1}{dx} = -\varphi_1'(x_1)$$

Прежде чем переходить к численным расчетам, необходимо сделать „приведение“ нагрузки, учитывая добавочную массу воды, увлекаемую кораблем при вибрации.

Для производства этого учета, в статье I. Lookwood Taylor „Vibration of ships“ (Tr. Inst. N. A., 1930) указан следующий способ: объем воды, увлекаемый каждым сечением корабля, отнесенный к единице длины, пропорционален погруженной площади этого сечения $A(x)$, отношению $b:2d$ ширины сечения при грузовой к его удвоенному углублению $2d$, причем коэффициент пропорциональности C есть произведение чисел C_1 и C_2, показанных в ниже приводимых табл. 8 и 9.

Коэффициент C_1 показан для сечений трех видов:

I ..... прямоугольник
II ..... треугольник
III ..... две дуги круга

Таблица 8

Коэффициенты C_1

Форма сечения I		Форма сечения II		Форма сечения III	
b/d	C_1	b/d	C_1	b/d	C_1
4	1.07	2	1.19	2	1.00
3	1.12	1.5	1.23	1.5	1.03
2.5	1.15	1	1.06	1	1.04
2	1.19	0.5	0.98	0.5	1.01

Таблица 9

Коэффициенты C_2

Отношение: $L : B$	6	7	8	9	10
C_2 (две узловые точки) . .	0.674	0.724	0.764	0.797	0.825
C_2 (три узловые точки) . .	0.564	0.633	0.682	0.723	0.760

В табл. 9 L есть длина корабля, B — наибольшая ширина его.

Таким образом, для сечения, абсцисса коего есть x_1 будет

$$C = C_1 C_2 \frac{b}{2d}$$

$$q_2(x) = C \frac{\Delta}{g} A(x)$$

где $\frac{\Delta}{g}$ есть масса единицы объема воды, $q_2(x)$ — добавочная масса. Обозначая через $q_1(x)$ массу, рассчитанную по кривой полной нагрузки корабля, получим „приведенную массу“, для сечения, коего абсцисса есть x, по формуле

$$q(x) = q_1(x) + q_2(x)$$

Эта приведеная масса и вводится в расчет вибрации.

§ 107. Наметив общий ход расчета, необходимо показать, каким образом он на самом деле выполняется. Это может быть сделано лишь на численном примере, применяя для интегрирования уравнений (11) и (12) методу приближенного численного интегрирования, в данном случае методу *Штермера*, подробное изложение которой можно найти во многих статьях моих по этому предмету, а также в издаваемом Академией Наук курсе „Лекции о приближенных вычислениях“.[1] Здесь же для ясности приведем ее сущность.

Метода Штермера развита ее автором в применении к уравнениям вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y) \tag{15}$$

и начальных условий: когда $x = x_0$, то должно быть

$$y = y_0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = y_0' \tag{15'}$$

причем y_0 и y_0' задаются численно.

Проинтегрировать уравнение (15) численно — значит составить таблицу значений искомой функции y, удовлетворяющей уравнению (15) и условиям (15′) для ряда последовательных, обыкновенно равноотстоящих значений аргумента x, начиная с $x = x_0$.

Пусть эти значения аргумента будут

$$x_0; \quad x_1 = x_0 + h; \quad x_2 = x_0 + 2h; \ldots x_n = x_0 + nh$$

и соответствующие им значения функции y:

$$y_0, y_1, y_2, \cdots y_n$$

Метода Штермера состоит в применении следующего процесса к продолжению таблицы этих значений.

---

[1] В настоящем издании эти „Лекции“ помещены в т. III, вып. 1.

Пусть будет

$$\eta_n = h^2 f(x_n, y_n) \tag{16}$$

и положим, что составляются следующие две таблицы (табл. 10 и 11):

Таблица 10

n	x_n	y_n	Δy_n	$\Delta^2 y_n$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$n-4$	x_{n-4}	y_{n-4}		
			Δy_{n-4}	
$n-3$	x_{n-3}	y_{n-3}		$\Delta^2 y_{n-4}$
			Δy_{n-3}	
$n-2$	x_{n-2}	y_{n-2}		$\Delta^2 y_{n-3}$
			Δy_{n-2}	
$n-1$	x_{n-1}	y_{n-1}		$\Delta^2 y_{n-2}$
			Δy_{n-1}	
n	x_n	y_n		$\Delta^2 y_{n-1}$
			Δy_n	
$n+1$	x_{n+1}	y_{n+1}		

Таблица 11

η_n	$\Delta\eta_n$	$\Delta^2\eta_n$	$\Delta^3\eta_n$	$\Delta^4\eta_n$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
η_{n-4}				
	$\Delta\eta_{n-4}$			
η_{n-3}		$\Delta^2\eta_{n-4}$		
	$\Delta\eta_{n-3}$		$\Delta^3\eta_{n-4}$	
η_{n-2}		$\Delta^2\eta_{n-3}$		$\Delta^4\eta_{n-4}$
	$\Delta\eta_{n-2}$		$\Delta^3\eta_{n-3}$	
η_{n-1}		$\Delta^2\eta_{n-2}$		
	$\Delta\eta_{n-1}$			
η_n				

и что при составлении их мы дошли до значения y_n, соответствующего значению $x = x_n$. Чтобы продолжить таблицы, надо составить значение, соответствующее $x = x_{n+1}$, причем табличный промежуток h выбран настолько малым, чтобы разности четвертого порядка величины η можно было считать постоянными, с тою степенью точности, с которою вычисление производится. Тогда по данной проф. Штермером формуле

$$\Delta^2 y_{n-1} = \eta_n + \frac{1}{12}\left[\Delta^2\eta_{n-2} + \Delta^3\eta_{n-3} + \Delta^4\eta_{n-4} - \frac{1}{20}\Delta^4\eta_{n-4}\right] \tag{17}$$

вычисляем величину $\Delta^2 y_{n-1}$, пользуясь, как видно, числами, стоящими в нижней косой строке табл. 11, и вписываем эту величину в свое место табл. 10, как показано прямым шрифтом, затем имеем

$$\Delta y_n = \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-1}$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$$

причем эти величины сразу вписываются в свои места; таким образом табл. 10 будет заполнена до указателя $n+1$.

После того как y_{n+1} вычислено, вычисляем η_{n+1} по формуле

$$\eta_{n+1} = h^2 f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

выписываем в свое место табл. 11 и, составив разности, заполняем косую строку, начиная с η_{n+1}, и продолжаем таким образом далее, пока не дойдем до того крайнего значения аргумента, на котором таблица заканчивается.

Если взять промежуток h настолько малым, что можно пренебрегать третьими и четвертыми разностями величины η, то формула (17) принимает весьма простой вид

$$\Delta^2 y_{n-1} = \eta_n + \frac{1}{12}\Delta^2 \eta_{n-2} \tag{18}$$

и вычисление идет весьма быстро.

Чтобы начать вычисление, стоит только взять h настолько малым, чтобы в формуле (18) можно было ограничиться одним первым ее членом, т. е.

$$\Delta^2 y_{n-1} = \eta_n \tag{18'}$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} n=0 \qquad & y_n = y_0 \text{ (задано)} \\ n=1 \qquad & y_n = y_1 = y_0 + hy_0' \\ & \eta_1 = h^2 f(x_1, y_1) \\ & \Delta^2 y_0 = \eta_1 \end{aligned}$$

и таблицу можно будет продолжать как объяснено выше, увеличив промежуток h так, чтобы пользоваться формулой (18) или (17).

§ 108. Чтобы применить эту методу к нашему случаю, надо прежде всего привести уравнения и начальные условия к соответствующему для применения методы Штермера виду.

Возьмем сперва уравнение (11) и полагаем

$$f(x)\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} = z_1 \tag{19}$$

тогда уравнение (11) принимает вид

$$\frac{d^2 z_1}{dx^2} = k^2 q(x)\varphi_1 \tag{20}$$

Таким образом, уравнение (11) заменяется эквивалентною ему системою

$$\begin{aligned} \varphi_1'' &= \frac{1}{f(x)} z_1 \\ z_1'' &= k^2 q(x)\varphi_1 \end{aligned} \tag{11'}$$

к которой метода Штермера непосредственно была бы применима, если бы были заданы начальные значения

$$(z_1)_0, \quad (z_1')_0, \quad (\varphi_1)_0 \quad \text{и} \quad (\varphi_1')_0$$

соответствующие значению $x=0$ аргумента.

В предположении, что $f(0)$ не равно нулю, имеем, на основании уравнения (13), при $x=0$

$$z_1=(z_1)_0=0 \quad \text{и} \quad z_1'=(z_1')_0=0 \tag{21}$$

но величины $\varphi_1(0)$ и $\varphi_1'(0)$ остаются произвольными, поэтому полагаем

$$\varphi_1(0)=A_1; \qquad \varphi_1'(0)=B_1 \tag{22}$$

и принимаем A_1 и B_1 за произвольные постоянные.

Так как уравнения (11′) линейные, то будет

$$\varphi_1(x)=A_1\,\omega_1(x)+B_1\,\psi_1(x)+C_1\,\sigma_1(x)+D_1\,\chi_1(x)$$

причем A_1, B_1, C_1, D_1 — произвольные постоянные, $\omega_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\sigma_1(x)$ и $\chi_1(x)$ — независимые частные решения системы (11′). Линейно независимые частные решения всегда можно выбрать таким образом, чтобы произвольные постоянные A_1, B_1, C_1, D_1 представляли начальные значения функций z_1 и φ_1 и их первой производной z_1' и φ_1'; поэтому можно положить

$$C_1=(z_1)_0; \qquad D_1=(z_1')_0 \tag{21'}$$

а тогда, на основании равенств (21), будет

$$C_1=D_1=0$$

и остается

$$\varphi_1(x)=A_1\,\omega_1(x)+B_1\,\psi_1(x) \tag{23}$$

Величина z_1 содержит те же произвольные постоянные A_1, B_1, C_1, D_1 и также линейно, поэтому полагаем

$$z_1=A_1\,y_1+B_1\,s_1 \tag{24}$$

причем y_1 и s_1 также два независимых между собою частных решения системы (11′).

Таким образом, вместо двух неизвестных функций z_1 и φ_1 мы будем искать четыре функции ω_1, ψ_1, y_1 и s_1, удовлетворяющие той же системе (11′),

и для этих функций мы можем выбирать начальные значения по произволу, надо лишь брать их так, чтобы выполнялись условия (21′) и (22), т. е. чтобы было

$$\begin{aligned} A_1 (y_1)_0 + B_1 (s_1)_0 &= 0 \\ A_1 (y_1')_0 + B_1 (s_1')_0 &= 0 \end{aligned} \tag{21″}$$

$$\begin{aligned} A_1 \omega_1 (0) + B_1 \psi_1 (0) &= A_1 \\ A_1 \omega_1' (0) + B_1 \psi_1' (0) &= B_1 \end{aligned} \tag{22′}$$

Очевидно, эти условия будут удовлетворены, если взять

$$\begin{aligned} &(y_1)_0 = 0; \quad (y_1')_0 = 0; \quad \omega_1 (0) = 1; \quad \omega_1' (0) = 0 \\ &(s_1)_0 = 0; \quad (s_1')_0 = 0; \quad \psi_1 (0) = 0; \quad \psi_1' (0) = 1 \end{aligned} \tag{25}$$

причем неизвестные функции y_1, ω_1, s_1, ψ_1 определяются уравнениями

$$\begin{aligned} y_1'' &= k^2 q (x) \omega_1 \\ \omega_1'' &= \frac{1}{f(x)} y_1 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} s_1'' &= k^2 q (x) \psi_1 \\ \psi_1'' &= \frac{1}{f(x)} s_1 \end{aligned} \tag{26′}$$

к численному интегрированию которых метода Штермера теперь непосредственно применима.

Совершенно таким же образом надо поступать и для определения функции $\varphi_2 (x_1)$, относящейся к промежутку от $x = c$ до $x = l$ или от $x_1 = 0$ до $x_1 = l - c$. У нас будут совершенно те же начальные условия, только вместо независимой переменной x будем иметь переменную x_1, поэтому мы представим функцию φ_2 формулой

$$\varphi_2 (x_1) = A_2 \omega_2 (x_1) + B_2 \psi_2 (x_1) \tag{23′}$$

причем A_2 и B_2 — произвольные постоянные, введем вспомогательные функции y_2 и s_2, так что наши четыре неизвестные функции

$$y_2 (x_1), \quad \omega_2 (x_1), \quad s_2 (x_1) \quad \text{и} \quad \psi_2 (x_1)$$

будут определяться уравнениями

$$\frac{d^2 y_2}{dx_1^2} = k^2 q_1 (x_1)\, \omega_2$$
$$\frac{d^2 \omega_2}{dx_1^2} = \frac{1}{f_1 (x_1)}\, y_2 \qquad (26'')$$

$$\frac{d^2 s_2}{dx_1^2} = k^2 q_1 (x_1)\, \psi_2$$
$$\frac{d^2 \psi_2}{dx_1^2} = \frac{1}{f_1 (x_1)}\, s_2 \qquad (26''')$$

и начальными условиями: при $x_1 = 0$ должно быть

$$\begin{array}{llll} (y_2)_0 = 0; & (y_2')_0 = 0; & \omega_2 (0) = 1; & \omega_2' (0) = 0 \\ (s_2)_0 = 0; & (s_2')_0 = 0; & \psi_2 (0) = 0; & \psi_2' (0) = 1 \end{array} \qquad (25')$$

§ 109. Прежде чем переходить к численному примеру, надо показать, каким образом определяются произвольные постоянные A_1, B_1, A_2, B_2 по условиям сопряжения.

При сделанных обозначениях эти условия будут

$$\begin{array}{l} A_1 \omega_1 (c) + B_1 \psi_1 (c) = A_2 \omega_2 (l-c) + B_2 \psi_2 (l-c) \\ A_1 \omega_1' (c) + B_1 \psi_1' (c) = -[A_2 \omega_2' (l-c) + B_2 \psi_2' (l-c)] \\ A_1 \omega_1'' (c) + B_1 \psi_1'' (c) = A_2 \omega_2'' (l-c) + B_2 \psi_2'' (l-c) \\ A_1 \omega_1''' (c) + B_1 \psi_1''' (c) = -[A_2 \omega_2''' (l-c) + B_2 \psi_2''' (l-c)] + \frac{1}{f(c)} Q \end{array} \qquad (27)$$

Прежде всего необходимо заметить по поводу этих уравнений, что мы не будем иметь аналитических выражений функций ω_1, ψ_1, ω_2, ψ_2, а лишь таблицу значений этих функций и их вторых производных, нам же надо, кроме того, иметь первую и третью производные. Для нахождения их значений надо будет воспользоваться, как для всяких табличных функций, формулою Стирлинга, которая будет приведена ниже, и применение ее пояснено на численном примере.

В общем случае определитель системы уравнений (27) не будет равен нулю (он обращается в нуль в том случае, когда число оборотов машины равно частоте одного из основных „свободных“ упругих колебаний корабля), поэтому уравнения (27) доставят вполне определенные значения

постоянных A_1, B_1, A_2, B_2, причем все эти значения будут содержать множитель $\frac{1}{f(c)}Q$, т. е. будут вида

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{f(c)}Qa_1; \qquad & B_1 &= \frac{1}{f(c)}Qb_1 \\ A_2 &= \frac{1}{f(c)}Qa_2; \qquad & B_2 &= \frac{1}{f(c)}Qb_2 \end{aligned} \tag{28}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 будут известные числа, таким образом будет

$$\begin{aligned} u &= \frac{Q}{f(c)}[a_1\omega_1(x) + b_1\psi_1(x)]\sin kt \qquad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant c \\ u &= \frac{Q}{f(c)}[a_2\omega_2(x_1) + b_2\psi_2(x_1)]\sin kt \qquad \text{для} \quad c \leqslant x \leqslant l \end{aligned} \tag{29}$$

причем $x_1 = l - x$; по уравнению (7) полное движение корабля, состоящее из его упругих колебаний (вибрации) и качаний как неизменяемого плавающего тела, будет

$$v = u - (b + \alpha x)\sin kt \tag{30}$$

Эти формулы и заключают полное решение поставленного вопроса.

§ 110. Мы предположили, что определитель системы (27) не равен нулю. Значение этого определителя зависит от величины k, т. е. от числа оборотов машины, представляющего „частоту“ изменяемости возмущающей силы. При „критическом“ числе оборотов имеет место резонанс, и определитель системы обращается в нуль, и, значит, решение стало бы бесконечным, как и вообще при резонансе и отсутствии погашения.

На практике амплитуда вибрации в этом случае зависит от сопротивления воды этим колебаниям; вычислить эту зависимость невозможно, если не сделать каких-либо более или менее произвольных допущений, входить в рассмотрение которых не будем, заметив лишь, что при таком резонансе и неуравновешенной машине вибрация становится настолько значительной, что такого числа оборотов держать нельзя и надо его изменить на 4—5%, увеличив или уменьшив.

Таким образом, если бы при расчете оказалось, что определитель системы (27) равен нулю, то это служило бы признаком резонанса и критического числа оборотов, но может быть, что определитель не равен нулю, между тем число оборотов близко к критическому, и вибрация значительна, спрашивается, по какому признаку можно об этом судить.

Для этого стоит только, имея кривую „жесткости“ корабля $EI = f(x)$, рассчитать по заданной нагрузке Q статическую деформацию или наиболь-

шую стрелку прогиба, этою нагрузкою вызываемую, и сличить величину этого прогиба с наибольшею амплитудою вибрации. Это сличение и даст ответ на поставленный вопрос.

§ 111. Присутствие множителя $\frac{1}{f(c)}$ в выражении u приводит к замечанию, имеющему непосредственное практическое значение, не только в случае корабля, но во всех аналогичных вопросах. Формулы (29) представляют чистую вибрацию корабля, т. е. ту, которая замечалась бы наблюдателем, находящимся на корабле, причем эта вибрация считается от принимаемой за неизменную продольной оси корабля; мы получим более ясное представление об этой вибрации, и притом подлежащее непосредственному наблюдению, если мы отнесем вибрацию не к оси корабля, а к другой прямой, которую мы получим, соединяя в любой момент t точки

$$(x=0,\ z=\varphi_1(0)) \quad \text{и} \quad (x=l,\ z=\varphi_2(0))$$

т. е. его оконечности в *деформированном* состоянии. Отступления от этой прямой и будут представлять, так сказать, „искривление“ корабля при вибрации.

Пусть будет

$$z=\gamma x+\delta$$

уравнение сказанной прямой, очевидно, что γ и δ будут также содержать множитель $\frac{1}{f(c)}$; составляем разности

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \varphi_1(x)-(\gamma x+\delta) \\ F_2(x_1) &= \varphi_2(x_1)-[\gamma(l-x_1)+\delta] \end{aligned} \tag{31}$$

и получаем

$$\begin{aligned} w &= F_1(x)\sin kt \quad \text{для} \quad 0\leqslant x\leqslant c \\ w &= F_2(x)\sin kt \quad \text{„} \quad c\leqslant x\leqslant l \end{aligned} \tag{32}$$

Тогда функция $\sigma(x)$, равная $\pm F_1(x)$ в промежутке 0 до c и равная $F_2(x_1)$ в промежутке c до l, представит крайние величины искривления корабля при вибрации. Очевидно, что оно будет также пропорционально $\frac{1}{f(c)}$, как и амплитуды вибрации.

Присутствие делителя $f(c)$, представляющего „жесткость“ в месте приложения силы R, показывает, что с увеличением этой *местной* жесткости уменьшается общая вибрация корабля.

Мы показали, как рассчитывается действие *одной* сосредоточенной силы, но практически на корабль будут действовать несколько сил, точки приложения которых расположены в районе машинного отделения, отсюда ясно, что для уменьшения вибрации надо *увеличивать жесткость корабля в районе машинного его отделения* как устройством фундаментов под

машину, так и взаимною связью палуб, надлежащим устройством кожуха машинного люка и пр. Практика вполне подтверждает этот теоретический вывод. Вот почему на судах „Нефтесиндикат СССР“ и „Советская Нефть“, по моему проекту, выполнена весьма солидная арочная связь в машинном отделении. Подобная связь начинает теперь входить в практику заграничного судостроения.

§ 112. Перейдем теперь к пояснению самых численных расчетов и способа их производства. Мы будем предполагать, что для данного корабля составлены кривые „жесткости“ и „нагрузки“. По этой последней, разделив ординаты на ускорение силы тяжести g, получаем и кривую $q(x)$ „распределение приведенных масс“.

Меры, для простоты рассуждений, будем предполагать метрическими. Произведение EJ при обычных единицах (тонны и сантиметры) обыкновенно выражается громадными числами, с которыми, даже при упрощенном начертании их (например $2.573 \cdot 10^9$), оперировать неудобно; при счете логарифмической линейкой надо следить за показателями 10, причем легко ошибиться, а ошибка в показателе влечет весьма крупную ошибку в результате; поэтому удобнее распорядиться так, чтобы с такими большими числами дела не иметь. Мы этого достигнем, если будем вести весь расчет в величинах относительных и лишь окончательный результат переведем в абсолютные.

Обозначим через f_0, q_0 значения $f\left(\frac{l}{2}\right)$ и $q\left(\frac{l}{2}\right)$, т. е. при миделе; обыкновенно это будут и наибольшие значения этих величин, тогда можно писать

$$f(x) = \frac{f(x)}{f_0} f_0; \qquad q(x) = \frac{q(x)}{q_0} q_0$$

Сделаем $x = l\xi$ и положим

$$\frac{f(x)}{f_0} = \alpha(\xi); \qquad \frac{q(x)}{q_0} = \beta(\xi) \tag{33}$$

тогда уравнение (11) напишется так:

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left[\alpha(\xi)\frac{d^2\varphi_1}{d\xi^2}\right] - k_1\beta(\xi)\varphi_1 = 0 \tag{34}$$

$$k_1 = k^2 \frac{q_0}{f_0} l^4 \tag{35}$$

Соответственно этому уравнения (26) будут

$$\frac{d^2\omega_1}{d\xi^2} = \frac{1}{\alpha(\xi)} y_1; \qquad \frac{d^2 y_1}{d\xi^2} = k_1\beta(\xi)\omega_1 \tag{36}$$

и условие (15′), при $\xi = 0$, должно быть

$$y_1 = 0; \quad \frac{dy_1}{d\xi} = 0; \quad \omega_1 = 1; \quad \frac{d\omega_1}{d\xi} = 0 \tag{36′}$$

Точно так же уравнения (26‴) будут

$$\frac{d^2\psi_2}{d\xi_1^2} = \frac{1}{\alpha(\xi_1)} s_2; \quad \frac{d^2 s_2}{d\xi_1^2} = k_1 \beta(\xi_1) \psi_2 \tag{37}$$

и условие (25′), при $\xi_1 = 0$ (где $\xi_1 = 1 - \xi$), должно быть

$$s_2 = 0; \quad \frac{ds_2}{d\xi_1} = 0; \quad \psi_2 = 0; \quad \frac{d\psi_2}{d\xi_1} = 1 \tag{37′}$$

Как видно, здесь ξ будет отвлеченное число, изменяющееся от 0 до 1; функции $\alpha(\xi)$ и $\beta(\xi)$ будут также отвлеченными числами, независимыми от принятых единиц мер.

Чтобы избежать грубых ошибок, полезно составить приближенную величину постоянной k_1 для корабля обычного типа.

Величина момента инерции площади связей I_0 определяется из равенства

$$I_0 = \frac{MH}{T}$$

где M — изгибающий момент, H — удаление от нейтральной оси до опаснейшей фибры, T — допускаемое напряжение.

Приближенно можно положить, обозначая через P вес корабля,

$$M = \frac{1}{20} Pl; \quad H = \frac{1}{20} l$$

Тогда будет

$$I_0 = \frac{1}{400} \frac{Pl^2}{T}$$

и, значит,

$$EI_0 = \frac{1}{400} Pl^2 \frac{E}{T} = f_0$$

Отношение $\frac{E}{T}$ не зависит от принятых единиц мер и составляет для стали около 2000; значит, будет приближенно

$$f_0 = 5Pl^2$$

Чтобы получить приближенную величину q_0, вообразим, что кривая нагрузки совпадает со строевою по шпангоутам (кривая площадей погру-

женной части шпангоутов), эту же последнюю примем за синусоиду, так что будет

$$q(x)=q(l\xi)=q_0 \sin\frac{\pi x}{l}=q_0 \sin \pi\xi$$

а так как

$$\frac{P}{g}=\int_0^l q(x)\,dx=\frac{2l}{\pi}q_0$$

то

$$q_0=\frac{\pi}{2}\frac{D}{gl}$$

где g есть ускорение силы тяжести.

Следовательно, будет

$$\frac{q_0}{f_0}l^4=\frac{\pi}{10}\frac{l}{g}$$

Обозначим через n *минутное* число оборотов машины, когда $k=\frac{\pi n}{30}$, и, следовательно,

$$k_1=k^2\frac{q_0}{f_0}l^4=\frac{\pi^3}{9000}\frac{n^2 l}{g}=\frac{1}{285}\frac{n^2 l}{g} \tag{38}$$

Нетрудно видеть, что, какая бы величина (метр, фут) ни была принята за единицу длины, величина k_1 останется без перемены.

Обратимся теперь к численному примеру, для которого вычисления выполнены в прилагаемых табл. 12 и 13.

Для простоты расчетов предположено, что как кривая нагрузки, так и кривая жесткости, симметричны относительно миделя; иными словами

$$\alpha(\xi)=\alpha(\xi_1)=\alpha(1-\xi)$$
$$\beta(\xi)=\beta(\xi_1)=\beta(1-\xi)$$

В этом случае очевидно, что ω_2 и y_2 будут такими же функциями ξ_1, как ω_1 и y_1 от ξ, и, значит, для вычисления этих функций может служить та же самая таблица и схема. Аналогичное будет иметь место и для ψ_1 и s_1.

В нашем численном примере предположено

$$l=100 \text{ м}$$
$$n=76 \text{ (оборотов в минуту)}$$
$$c=\frac{1}{3}l$$

Для величин ξ табличный промежуток h взят равным $\frac{1}{30}$, иными словами, длина корабля подразделена на 30 равных частей; тогда будет

$$h^2 k_1=0.2285 \tag{39}$$

Вычисление вели

$$\omega'' = \frac{1}{\alpha(\xi)}\, y;$$

при $\xi = 0$ должно быть: $y = 0$;

n $30\,\xi$ $30\,\xi_1$	$\alpha(\xi)$	$\beta(\xi)$	$\frac{h^2}{\alpha(\xi)}$	$k_1 h^2 \beta(\xi)$	ω	$\Delta\omega$	$\Delta^2\omega$
0	0.1045	0.0523	0.01063	0.01195	1.0000	0.00000	0.00006
1	0.2079	0.1564	0.00535	0.03570	1.0000	0.00006	0.00021
2	0.3090	0.2588	0.00360	0.05920	1.00006	0.00027	0.00045
3	0.4067	0.3584	0.00273	0.08200	1.00033	0.00072	0.00078
4	0.5000	0.4540	0.00222	0.1039	1.00105	0.0015	0.00122
5	0.5878	0.5446	0.00189	0.1245	1.0026	0.0027	0.00176
6	0.6691	0.6293	0.00166	0.1438	1.0053	0.0045	0.00242
7	0.7431	0.7071	0.00149_5	0.1615	1.0098	0.0069	0.00322
8	0.8090	0.7772	0.00137_3	0.1775	1.0167	0.0101	0.00417
9	0.8660	0.8387	0.00128_3	0.1918	1.0268	0.0143	0.00528
10	0.9136	0.8910	0.00121_5	0.2035	1.0411	0.0196	0.00662
11	0.9511	0.9336	0.00116_9	0.2135	1.0607	0.0262	0.00819
12	0.9782	0.9659	0.00113_6	0.2205	1.0869	0.0344	0.01005
13	0.9945	0.9877	0.00111_9	0.2254	1.1213	0.0444	0.01225
14	1.0000	0.9986	0.00111_1	0.2280	1.1657	0.0567	0.01482
15	1.0000	1.0000	0.00111_1	0.2285	1.2224	0.0715	0.01767
16	1.0000	0.9986	0.00111_1	0.2280	1.2939	0.0892	0.02102
17	0.9945	0.9877	0.00111_9	0.2254	1.3831	0.1103	0.02495
18	0.9782	0.9659	0.00113_6	0.2205	1.4933	0.1352	0.02982
19	0.9511	0.9336	0.00116_9	0.2135	1.6285	0.1650	0.03574
20	0.9136	0.8910	0.00121_5	0.2035	1.7935	0.2007	0.04317
21	0.8660	0.8387	0.00128_3	0.1918	1.9942	0.2439	0.05256
22	0.8090	0.7772	0.00137_3	0.1775	2.2381	0.2965	0.06473
23	0.7431	0.7071	0.00149_5	0.1615	2.5346	0.3612	0.08104
24	0.6691	0.6293	0.00166	0.1438	2.8958	0.4422	0.1033
25	0.5878	0.5446	0.00189	0.1245	3.3380	0.5455	0.1355
26	0.5000	0.4540	0.00222	0.1039	3.8835	0.6810	0.1852
27	0.4067	0.3584	0.00273	0.08200	4.5645	0.866	0.270
28	0.3090	0.2588	0.00360	0.05920	5.431	1.136	0.444
29	0.2079	0.1564	0.00535	0.03570	6.567	1.580	
30	0.1045	0.0523	0.01063	0.01195	8.147		

Примечание. Эти же таблицы служат для определения величины ω_2 (ξ_1).

$\omega_1 = 1.0411$, $\omega_2 = 1.7935$. Для вычисления служат формулы

$$\Delta^2\omega_{n-1} = \lambda_n + \frac{1}{12}\,\Delta^2\lambda_{n-2};$$

Вычисления начинаются следующим образом: так как $\omega_0 = 1$ и $\omega'_0 = 0$, то в пер- σ_2, а также $\Delta\sigma_0$, $\Delta\sigma_1$, $\Delta^2\sigma_0$. По формулам

$$\Delta y_0 = y_0' h + \frac{1}{2}\sigma_0 + \frac{1}{6}\Delta\sigma_0 - \frac{1}{24}\Delta^2\sigma_0;$$

Находим Δy_0, $\Delta^2 y_0$ и по ним определяем y_1 и y_2. По неизвестным y_0, y_1, y_2 находим Эти разности вместе с $\omega_0 = 1.00$ дают исправленные значения ω_1 и ω_2. Исправления $\Delta^2 y$, по ним определяем ω_3, y_3, и т. д.

Таблица 12

чин ω и y

$y'' = k_1 \beta(\xi)\omega$ $\qquad h = \frac{1}{30}$

$y = 0; \quad \omega = 1; \quad \omega' = 0$ $\qquad k_1 = 0.2285$

$\xi_n = nh$

$\lambda = \frac{h^2}{\alpha(\xi)} y$	$\Delta\lambda$	$\Delta^2\lambda$	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\sigma = k_1 h^2 \beta(\xi)\omega$	$\Delta\sigma$	$\Delta^2\sigma$
0.0000	0.00005	0.00010	0.0000	0.0100	0.0357	0.01195	0.02375	—0.00025
0.00005	0.00015	0.00009	0.0100	0.0457	0.0592	0.03570	0.02350	—0.00067
0.00020	0.00024	0.00009	0.0557	0.1049	0.0820	0.05920	0.02283	—0.0008
0.00044	0.00033	0.00011	0.1606	0.1869	0.1039	0.08203	0.0220	—0.0012
0.00077	0.00044	0.00010	0.3475	0.2903	0.1247	0.1040	0.0208	—0.0010
0.00121	0.00054	0.00012	0.6383	0.4155	0.1445	0.1248	0.0193	—0.0013
0.00175	0.00066	0.00014	1.0538	0.5600	0.1629	0.1446	0.0185	—0.0010
0.00241	0.00080	0.00015	1.6138	0.7229	0.1804	0.1630	0.0175	—0.0010
0.00321	0.00095	0.00016	2.3367	0.9033	0.1969	0.1805	0.0165	—0.0015
0.00416	0.00111	0.00022	3.2400	1.1002	0.2119	0.1970	0.0150	—0.005
0.00527	0.00133	0.00024	4.3402	1.3121	0.2265	0.2120	0.0145	—0.0013
0.00660	0.00157	0.00029	5.6523	1.5386	0.240	0.2265	0.0132	0.0000
0.00817	0.00186	0.00033	7.1909	1.779	0.253	0.2397	0.0132	0.0000
0.01003	0.00219	0.00038	8.970	2.032	0.266	0.2529	0.0131	0.0005
0.01222	0.00257	0.00029	11.002	2.298	0.280	0.2660	0.0136	0.0021
0.01479	0.00286	0.00047	13.300	2.578	0.295	0.2796	0.0157	0.0010
0.01765	0.00333	0.00059	15.878	2.873	0.312	0.2953	0.0167	0.0010
0.02098	0.00392	0.00093	18.751	3.185	0.330	0.3120	0.0177	0.0005
0.02490	0.00485	0.00105	21.936	3.515	0.348	0.3298	0.0182	—0.0011
0.02975	0.00590	0.00150	25.451	3.863	0.366	0.3480	0.0174	—0.0005
0.03565	0.00740	0.00195	29.314	4.229	0.383	0.3657	0.0169	—0.0025
0.04305	0.00935	0.00275	33.543	4.612	0.397	0.3826	0.0144	—0.0016
0.05240	0.01210	0.00410	38.155	5.009	0.410	0.3970	0.0128	—0.0066
0.06450	0.01620	0.0059	43.164	5.419	0.415	0.4098	0.062	—0.0073
0.08070	0.0221	0.0093	48.583	5.834	0.414	0.4160	—0.100	—0.0105
0.10280	0.0319	0.0172	54.417	6.248	0.403	0.4150	—0.115	—0.0180
0.1347	0.0491	0.0347	60.665	6.651	0.372	0.4035	—0.295	—0.0230
0.1838	0.0838	0.0856	67.316	7.02	0.320	0.3740	—0.525	—0.0350
0.2676	0.1694		74.34	7.34	0.231	0.3215	—0.875	
0.4370			81.68	7.65		0.2340		
			89.33					

При этом надо иметь в виду, что $\xi_1 = 1 - \xi$. Например, для $\xi = \frac{10}{30}$ будет $\xi_1 = \frac{20}{30}$, так что

$$\Delta^2 y_{n-1} = \sigma_n + \frac{1}{12}\Delta^2\sigma_{n-2} \qquad (1)$$

вом приближении полагаем $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = 1$, что дает возможность определить σ_0, σ_1,

$$\Delta^2 y_0 = \sigma_0 + \Delta\sigma_0 + \frac{1}{12}\Delta^2\sigma_0 \qquad (2)$$

λ_0, λ_1, λ_2 и разность $\Delta\lambda_0$, $\Delta\lambda_1$, $\Delta^2\lambda_0$, что дает $\Delta\omega_0$, $\Delta^2\omega_0$ по формулам, аналогичным (2). незначительны, и $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ не меняются. Далее пользуемся формулами (1) для $\Delta^2\omega_1$,

Вычисле

$$\psi'' = \frac{1}{a(\xi)} s;$$

При $\xi = 0$ должно быть

n 30ξ $30\xi_1$	$\frac{h^2}{\alpha(\xi)}$	$k_1 h^2 \beta(\xi)$	ψ	$\Delta\psi$	$\Delta^2\psi$	$\lambda = \frac{h^2}{\alpha(\xi)} s$	$\Delta\lambda$
0	0.01063	0.01195	0.0000	0.0333	0.0000	0.0000	
1	0.00535	0.03570	0.0333	0.0334	0.0000	0.0000	
2	0.00360	0.05920	0.0667	0.0333	0.0000	0.0000	
3	0.00273	0.08200	0.1000	0.0333	0.0000	0.0000	
4	0.00222	0.1039	0.1333	0.0333	0.0001	0.00005	0.00004
5	0.00189	0.1245	0.1666	0.0334	0.0002	0.00009	0.00007
6	0.00166	0.1438	0.2000	0.0336	0.0003	0.00016	0.00010
7	0.00149_5	0.1615	0.2336	0.0339	0.0004	0.00026	0.00014
8	0.00137_3	0.1775	0.2675	0.0343	0.0006	0.00040	0.00018
9	0.00128_3	0.1918	0.3018	0.0349	0.0008	0.00058	0.00024
10	0.00121_5	0.2035	0.3367	0.0357	0.0011	0.00082	0.00030
11	0.00116_9	0.2135	0.3724	0.0368	0.0015	0.00112	0.00039
12	0.00113_6	0.2205	0.4092	0.0383	0.0020	0.00151	0.00049
13	0.00111_9	0.2254	0.4475	0.0403	0.0026	0.00200	0.00061
14	0.00111_1	0.2280	0.4878	0.0429	0.0034	0.00261	0.00075
15	0.00111_1	0.2285	0.5307	0.0463	0.0042	0.00336	0.00088
16	0.00111_1	0.2280	0.5770	0.0505	0.0053	0.00424	0.00105
17	0.00111_9	0.2254	0.6275	0.0558	0.0066	0.00529	0.00131
18	0.00113_6	0.2205	0.6833	0.0624	0.0082	0.00660	0.00160
19	0.00116_9	0.2135	0.7457	0.0706	0.0102	0.00820	0.00200
20	0.00121_5	0.2035	0.8163	0.0808	0.0128	0.01020	0.00254
21	0.00128_3	0.1918	0.8971	0.0936	0.0160	0.01274	0.00323
22	0.00137_3	0.1775	0.9907	0.1096	0.0203	0.01597	0.0042
23	0.00149_5	0.1615	1.1003	0.1299	0.0260	0.0202	0.0057
24	0.00166	0.1438	1.2302	0.1559	0.0339	0.0259	0.0078
25	0.00189	0.1245	1.3861	0.1898	0.0453	0.0337	0.0113
26	0.00222	0.1039	1.5759	0.2351	0.0628	0.0450	0.0173
27	0.00273	0.08200	1.8110	0.2979	0.0930	0.0623	0.0297
28	0.00360	0.05920	2.1089	0.3909	0.1545	0.0920	0.0600
29	0.00535	0.03570	2.4998	0.5454		0.1520	
30	0.01063	0.01195	3.0452				

Примечание. Все, сказанное для табл. 12, верно и для табл. 13, за исклю
гаем $\psi_1 = h = 0.0333$, $\psi_2 = 2h = 0.0667$ и находим σ_0, σ_1, σ_2.
и по последним $\Delta\psi_0$, $\Delta^2\psi_0$. Второе приближение для ψ_1, ψ_2

Таблица 13

ние ψ и s

$s'' = k_1 \beta(\xi)\psi$

$\psi = 0;\ \psi' = 1;\ s = 0;\ s'' = 0$

$\Delta^2\lambda$	s	Δs	$\Delta^2 s$	$\sigma = k_1 h^2 \beta(\xi)\psi$	$\Delta\sigma$	$\Delta^2\sigma$
	0.0000	0.00014	0.0013	0.0000	0.0012	0.0015
	0.00014	0.00144	0.0040	0.0012	0.0027	0.0016
	0.0016	0.0054	0.0083	0.0039	0.0043	0.0013
	0.0070	0.0137	0.0139	0.0082	0.0056	0.0013
0.00003	0.0207	0.0276	0.0208	0.0138	0.0069	0.0012
0.00003	0.0483	0.0484	0.0289	0.0207	0.0081	0.0009
0.00004	0.0967	0.0773	0.0378	0.0288	0.0090	0.0007
0.00004	0.1740	0.1151	0.0476	0.0378	0.0097	0.0007
0.00006	0.2891	0.1627	0.0579	0.0475	0.0104	0.0003
0.00006	0.4518	0.2206	0.0686	0.0579	0.0107	0.0002
0.00009	0.6724	0.2892	0.0795	0.0686	0.0109	0.0000
0.00010	0.9616	0.3687	0.0903	0.0795	0.0108	—0.0004
0.00012	1.3303	0.4590	0.1007	0.0903	0.0104	0.0002
0.00014	1.7893	0.5597	0.1113	0.1007	0.0106	—0.0006
0.00013	2.3490	0.6710	0.1213	0.1113	0.0100	0.0002
0.00017	3.0200	0.7923	0.1315	0.1213	0.0101	—0.0004
0.00026	3.8123	0.9238	0.1413	0.1315	0.0098	—0.0003
0.00029	4.7361	1.0651	0.1508	0.1413	0.0095	—0.0011
0.00040	5.8012	1.2159	0.1591	0.1508	0.0084	—0.0015
0.00054	7.0171	1.3750	0.1660	0.1592	0.0069	—0.0009
0.00069	8.3921	1.5410	0.1720	0.1661	0.0060	—0.0024
0.0010	9.9331	1.7130	0.175	0.1721	0.0036	—0.0017
0.0015	11.6461	1.888	0.177	0.1757	0.0019	—0.002
0.0021	13.534	2.065	0.177	0.1776	0.000	—0.005
0.0035	15.599	2.242	0.172	0.177	—0.005	—0.003
0.0060	17.841	2.414	0.164	0.172	—0.008	—0.008
0.0116	20.255	2.578	0.147	0.164	—0.016	—0.007
0.0303	22.833	2.725	0.124	0.148	—0.023	—0.013
	25.558	2.849	0.089	0.125	—0.036	
	28.407	2.938		0.089		
	31.345					

чением начала вычислений. Так как $\psi_0 = 0$, $\psi'_0 = 1$, то в первом приближении пола-
Так же, как для табл. 12, находим s_0, s_1, s_2 и по ним λ_0, λ_1, λ_2 и их разности
в точности совпадает с первым.

и вычисление расположится, как показано в табл. 12 и 13, которые не требуют дальнейших пояснений, кроме сказанного выше.

Табл. 12 и 13, в которых вычисление значений функций $\omega_1(\xi)$ и $\omega_2(\xi_1)$, $\psi_1(\xi)$ и $\psi_2(\xi_1)$ произведено для всех значений аргументов ξ и ξ_1 от 0 до 1, дают возможность найти производимую силою P вибрацию при любом месте приложения этой силы, стоит только составить „условия сопряжения“ для этого места.

Так, в нашем случае $c = \frac{1}{3} l$, следовательно, соответствующие значения суть

$$\xi = \frac{10}{30} \quad \text{и} \quad \xi_1 = \frac{20}{30}$$

значит, надо „сопрягать“ величины, соответствующие этим значениям, т. е. отвечающие значениям указателя $n = 10$ и $n = 20$.

Чтобы выполнить это сопряжение, нам потребуются значения производных $\omega_1'(c)$; $\omega_1''(c)$; $\omega_1'''(c)$ и, аналогично, для других функций.

В таблицах же имеются лишь значения ω_1 и $h^2\omega_1''$. Для нахождения производных мы будем пользоваться следующей методой.

Пусть z есть какая-нибудь функция $z = F(x)$ переменной $x = nh$, заданная таблично, так что

$$z_n = F(x_n) = F(nh)$$

Надо найти $z_n' = F'(x_n)$. Для этого берем ряд значений функции z так, чтобы z_n занимало в нем среднее место, и составляем таблицу разностей, как обыкновенно; таким образом получим табл. 14.

Таблица 14

n	z_n	Δz_n	$\Delta^2 z_n$	$\Delta^3 z_n$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$n-2$	z_{n-2}			
		Δz_{n-2}		
$n-1$	z_{n-1}		$\Delta^2 z_{n-2}$	
		Δz_{n-1}		$\Delta^3 z_{n-2}$
n	z_n		$\Delta^2 z_{n-1}$	
		Δz_n		$\Delta^3 z_{n-1}$
$n+1$	z_{n+1}		$\Delta^2 z_n$	
		Δz_{n-1}		
$n+2$	z_{n+2}			

Берем затем

$$A_n = \frac{1}{2}(\Delta z_n + \Delta z_{n-1}); \quad B_n = \frac{1}{2}(\Delta^3 z_{n-1} + \Delta^3 z_{n-2}), \ldots$$

т. е. полусуммы разностей нечетного порядка, прилегающих к строке, соответствующей значению n, тогда по формуле, данной еще Стирлингом в 1730 г., будет

$$hz_n' = A_n - \frac{1}{6} B_n + \frac{1}{30} C_n \qquad (40)$$

В нашем случае по большей части достаточно будет довольствоваться первым членом, в крайнем случае — первыми двумя. Так, по данным табл. 12 будем иметь для величин ω_1 и $\lambda_1 = h^2 \omega_1''$ (табл. 15):

Таблица 15

30ξ	ω_1	$\Delta\omega_1$	$\Delta^2\omega_1$	$\Delta^3\omega_1$	λ_1	$\Delta\lambda_1$	$\Delta^2\lambda_1$	$\Delta^3\lambda_1$
8	1.0167				0.00321			
		0.0101				0.00095		
9	1.0268		0.0042		0.00416		0.00016	
		0.0143		0.0011		0.00111		0.00006
10	1.0411		0.0053		0.00527		0.00022	
		0.0196		0.0013		0.00133		0.00002
11	1.0607		0.0066		0.00660		0.00024	
		0.0262				0.00157		
12	1.0869				0.00817			

$A_n = 0.01695$; $B_n = 0.0012$; $A_n = 0.00122$; $B_n = 0.00004$

$\omega_1' h = 0.01695 - 0.0002 = 0.01675$; $\lambda_1' h = \omega_1''' h^3 = 0.00121$

Так как для величины ω_2 нам надо производную $\frac{d\omega_2}{d\xi}$, то располагаем табл. 15 по возрастающим аргументам ξ, а не ξ_1, как они расположены в табл. 12; будем иметь табл. 16.

Таблица 16

$30\xi_1$	30ξ	ω_2	$\Delta\omega_2$	$\Delta^2\omega_2$	$\Delta^3\omega_2$	λ_2	$\Delta\lambda_2$	$\Delta^2\lambda_2$	$\Delta^3\lambda_2$
22	8	2.2331				0.05240			
			—0.2439				—0.00935		
21	9	1.9942		—0.0432		0.04305		0.00195	
			—0.2007		—0.0075		—0.00740		—0.00045
20	10	1.7935		—0.0357		0.03565		0.00150	
			—0.1650		—0.0059		—0.00590		—0.00045
19	11	1.6285		—0.0298		0.02975		0.00105	
			—0.1352				—0.00485		
18	12	1.4933				0.02490			

$A_n = -0.1828$; $B_n = -0.0067$; $A_n = -0.00665$; $B_n = -0.00045$

$\omega_2' h = -0.1823 + 0.0011 = -0.1817$; $\lambda_2' h = \omega_2''' h^3 = -0.00658$

Совершенно так же поступим и относительно ψ_1 и ψ_2 и получим следующие результаты при $\xi = \frac{10}{30} = \frac{c}{l}$:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 1.4011; & \psi_1 &= 0.3367\\
\omega_2 &= 1.7935; & \psi_2 &= 0.8107\\
h\omega_1' &= 0.01675; & h\psi_1' &= 0.0353\\
h\omega_2' &= -0.1817; & h\psi_2' &= -0.0753\\
h^2\omega_1'' &= 0.00527; & h^2\psi_1'' &= 0.00082\\
h^2\omega_2'' &= 0.03565; & h^2\psi_2'' &= 0.01020\\
h^3\omega_1''' &= 0.00121; & h^3\psi_1''' &= 0.00027\\
h^3\omega_2''' &= -0.00658; & h^3\psi_2''' &= -0.00225
\end{aligned}$$

На основании вышеприведенных значений, условия сопряжения будут, если принять для удобства вычислений $h^3 P = 0.001$:

$$\begin{aligned}
&1.0411\ A_1 + 0.3367\ B_1 - 1.7935\ A_2 - 0.8163\ B_2 = 0\\
&0.01675\ A_1 + 0.0353\ B_1 + 0.1817\ A_2 + 0.0753\ B_2 = 0\\
&0.00527\ A_1 + 0.00082\ B_1 - 0.03565\ A_2 - 0.01020\ B_2 = 0\\
&0.00121\ A_1 + 0.00027\ B_1 + 0.00658\ A_2 + 0.00225\ B_2 = 0.001
\end{aligned} \qquad (41)$$

Из этих уравнений, производя вычисление логарифмической линейкой, имеем

$$A_1 = 0.613;\quad B_1 = -1.174;\quad A_2 = -0.0597;\quad B_2 = 0.430$$

Таким образом, будет

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\xi) &= 0.613\,\omega_1(\xi) - 1.174\,\psi_1(\xi) && 0 \leqslant \xi \leqslant \tfrac{1}{3}\\
\varphi_2(\xi) &= -0.0597\,\omega_2(\xi) + 0.430\,\psi_2(\xi) && \tfrac{1}{3} \leqslant \xi \leqslant 1
\end{aligned}$$

причем значения функций $\omega_1(\xi)$, $\psi_1(\xi)$, $\omega_2(\xi)$, $\psi_2(\xi)$ даются в таблицах I и II.

§ 113. Остается еще показать, каким образом перейти от величин относительных, в которых произведен расчет, к абсолютным.

Для этого стоит найти только ту величину P, которая взята в уравнениях „сопряжения“, и выразить ее в желаемых единицах.

Последнее из уравнений (27), если бы его написать в общем виде, было бы

$$h^3\left[A_1\frac{d^3\omega_1}{d\xi^3}+B_1\frac{d^3\psi_1}{d\xi^3}\right]-h^3\left[A_2\frac{d^3\omega_2}{d\xi^3}+B_2\frac{d^3\psi_2}{d\xi^3}\right]=\mu. \qquad (**)$$

Настоящее же уравнение должно бы быть

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{c-0}-\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{c+0}=\frac{1}{f(c)}Q \qquad (*)$$

По уравнению (25) имеем $\frac{d\psi_1}{dx}=1$.

Когда мы ввели вместо переменной x переменную ξ, то мы, попрежнему, сохранили обозначения функций ω_1 и ψ_1, хотя их следовало бы обозначить для ясности другими буквами, например Ω_1 и Ψ_1.

Вместо условия (25) мы взяли условие

$$\frac{d\psi_1}{d\xi}=1 \qquad (42)$$

Но $x=l\xi$, поэтому, чтобы условие (42) совпадало с (25), очевидно, надо брать $\psi_1=l\Psi_1$ и, следовательно, писать

$$u=l[A_1\Omega_1(\xi)+B_1\Psi_1(\xi)]$$

или, сохраняя прежнее обозначение,

$$u=l[A_1\omega_1(\xi)+B_1\psi_1(\xi)]$$

иными словами, прогиб, рассчитанный по формуле

$$\varphi_1=A_1\omega_1(\xi)+B_1\psi_1(\xi)$$

выражается в долях длины корабля, принятой за единицу.

Таким образом, уравнение (**) равносильно такому:

$$\frac{h^3}{l}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^3}\right]_{\frac{c}{l}-0}-\frac{h^3}{l}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^3}\right]_{\frac{c}{l}+0}=\mu.$$

иначе

$$h^3 l^2\left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right]_{c-0}-h^3 l^2\left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right]_{c+0}=\mu.$$

Сличая его с уравнением (*), видим, что

$$\mu=\frac{1}{f(c)}Ph^3 l^2=\frac{1}{\alpha(c)}\frac{P}{f_0}h^3 l^2$$

В нашем численном примере $h=\frac{1}{30}$ (отвлеченное число); $\mu=0.001$; $\alpha(c)=0.9136$; $f_0=5Pl^3$, значит, будет

$$Q=\mu f_0 \alpha(c)\frac{1}{h^3 l^2}=0.001\cdot 5Pl^2\cdot 0.9136\frac{27000}{l^2}=123.5P$$

где P — вес корабля.

При таком значении Q и силы $R=Q\sin kt$ прогиб u выражался бы формулою

$$u=l[0.613\,\omega_1(\xi)-1.174\,\psi_1(\xi)] \qquad 0\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{3}$$

$$u=l[-0.0597\,\omega_2(\xi_1)+0.430\,\psi_2(\xi_1)] \qquad \frac{1}{3}\leqslant\xi\leqslant 1$$

причем $\xi_1=1-\xi$, где l — длина корабля, множители же в скобках суть отвлеченные числа, даваемые табл. 17, составленной по табл. 12 и 13.

Ясно, что вышеприведенные величины имеют чисто условный смысл, но от них легко перейти к любым мерам.

Так, если $Q=0.01\ P$ и $l=100$ м, и мы хотели бы получить u в сантиметрах, то вышеприведенные величины стоило бы умножить на

$$\frac{100\cdot 100}{100\cdot 123.5}=0.81$$

а так как наибольшая стрелка прогиба в относительных мерах при $\mu=0.001$ составляла 0.087, то ее величина в сантиметрах, при $Q=0.01P$, будет

$$0.147\cdot 0.81=0.119\text{ см}=1.19\text{ мм}$$

как то и показано в последнем столбце таблицы 17.

Сравним эту величину с приближенным значением статического прогиба балки такой же длины, как наш корабль, и такой же средней жесткости.

Предполагая, что для этой балки распределение добавочной силы поддержания, уравновешивающей нагрузку P, есть равномерное, получим, что наибольший изгибающий момент будет $M=\frac{1}{9}Ql$, т. е. $\frac{Pl}{900}$.

Стрелка прогиба будет

$$s=\frac{1}{3}\frac{1}{EI}\frac{M^2 l}{Q}$$

а так как, по предположению, $EI=5Pl^2$, то будет

$$s=\frac{1}{3.5Pl^2}\frac{P^2 l^2}{0.01P}\frac{10000}{900^2}=\frac{20}{243}=\frac{1}{12}=0.083\text{ см}$$

Таблица 17

$$c=\frac{1}{3}\,l$$

30ξ	$A_1\omega_1$ / $A_2\omega_2$	$B_1\psi_1$ / $B_2\psi_2$	$\varphi_1=A_1\omega_1+B_1\psi_1$ / $\varphi_2=A_2\omega_2+B_2\psi_2$	Ординаты прямой z	$z-\varphi_1$ / $z-\varphi_2$	$z-\varphi_1$ (в мм) / $z-\varphi_2$ (в мм)
0	0.613	—0.000	0.613	0.613	0.000	0.00
1	0.613	—0.039	0.574	0.591	0.017	0.14
2	0.613	—0.078	0.535	0.568	0.033	0.27
3	0.613	—0.117	0.496	0.546	0.052	0.42
4	0.614	—0.156	0.458	0.523	0.065	0.53
5	0.614	—0.196	0.413	0.501	0.083	0.67
6	0.616	—0.235	0.381	0.478	0.097	0.78
7	0.619	—0.274	0.345	0.456	0.111	0.90
8	0.623	—0.314	0.309	0.433	0.124	1.01
9	0.630	—0.355	0.275	0.411	0.136	1.10
10	0.638	—0.396	0.242	} 0.389	} 0.147	} 1.19
10	—0.107	0.351	0.241			
11	—0.097	0.321	0.224	0.367	0.143	1.16
12	—0.089	0.294	0.205	0.344	0.139	1.13
13	—0.083	0.270	0.187	0.322	0.135	1.09
14	—0.077	0.248	0.171	0.299	0.128	1.04
15	—0.073	0.228	0.155	0.277	0.122	0.99
16	—0.070	0.210	0.140	0.254	0.114	0.92
17	—0.067	0.192	0.125	0.232	0.107	0.87
18	—0.065	0.176	0.111	0.209	0.093	0.79
19	—0.063	0.160	0.097	0.187	0.090	0.73
20	—0.062	0.145	0.083	0.164	0.081	0.66
21	—0.061	0.130	0.069	0.142	0.073	0.59
22	—0.061	0.115	0.054	0.119	0.065	0.53
23	—0.060	0.100	0.040	0.097	0.057	0.46
24	—0.060	0.086	0.026	0.074	0.048	0.39
25	—0.060	0.072	0.012	0.052	0.040	0.32
26	—0.060	0.057	—0.003	0.029	0.032	0.26
27	—0.060	0.043	—0.017	0.007	0.024	0.19
28	—0.060	0.029	—0.031	—0.016	0.015	0.12
29	—0.060	0.014	—0.046	—0.038	0.008	0.06
30	—0.060	0.000	—0.060	—0.060	0.000	0.00

$A_1=0.613$; $B_1=-1.174$

$A_2=-0.0597$; $B_2=0.43$

При вышеприведенном расчете было положено $c = \frac{1}{3} l$, т. е. что середина машины расположена на одной трети длины судна, считая от кормового перпендикуляра.

Совершенно подобным же образом производится расчет и при всяком другом положении машины, стоит только сопряжение делать для соответствующего значения абсциссы.

Для сличения приведем результаты, относящиеся к значениям $c = \frac{1}{6} l$ и к $c = \frac{1}{2} l$.

При $c = \frac{1}{6} l$ получаем

$$\varphi_1(\xi) = 0.461\,\omega_1(\xi) - 0.700\,\psi_1(\xi)$$
$$\varphi_2(\xi_1) = -0.369\,\omega_2(\xi_1) + 1.14\,\psi_2(\xi_1)$$

выбирая значения $\omega_1(\xi)$, $\psi_1(\xi)$, $\omega_2(\xi_1)$, $\psi_2(\xi_1)$ из табл. 12 и 13, получаем табл. 18.

Совершенно так же, при $c = \frac{1}{2} l$, имеем

$$\varphi_1(\xi) = 0.292\,\omega_1(\xi) - 0.417\,\psi_1(\xi)$$
$$\varphi_2(\xi_1) = 0\,292\,\omega_2(\xi) - 0.417\,\psi_2(\xi_1)$$

Это показывает, что форма вибрации — симметрична относительно миделя. Форма эта дается табл. 19.

Мы рассмотрели тот случай, когда неуравновешенные силы инерции машины сводятся к одной силе. Если бы они привелись к одной паре, то решение задачи отличалось бы от изложенного только тем, что в условиях сопряжения разрыв был бы в выражении производной второго порядка, т. е. было бы

$$\varphi_1(c) = \varphi_2(c); \qquad \varphi_1'(c) = \varphi_2'(c); \qquad \varphi_1'''(c) = \varphi_2'''(c)$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}\right)_{c-\varepsilon} - \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{d^2\varphi_2}{dx^2}\right)_{c+\varepsilon} = \frac{1}{f(c)} M$$

где $M \sin kt$ есть возмущающая пара.

Наконец, если бы силы инерции привелись к одной силе $Q = P \sin kt$ с точкой приложения $x = c$ и к паре $N = M \sin(kt + \gamma)$, то, на основании „принципа наложения малых колебаний“, следовало бы рассчитать в отдельности вибрацию, производимую силою, и вибрацию, производимую парой, и взять их алгебраическую сумму.

Совершенно подобным образом может быть рассчитана вибрация любого сооружения, например моста, фундамента под машиною и т. п.,

Таблица 18

$$c = \frac{1}{6} l$$

30ξ	$30\xi_1$	$A_1\omega_1$ / $A_2\omega_2$	$B_1\psi_1$ / $B_2\psi_2$	φ_1 / φ_2	Ординаты прямой z	$\varphi_1 - z$ / $\varphi_2 - z$
0	30	0.461	0.000	0.461	0.461	0.000
1	29	0.461	—0.023	0.438	0.433	0.005
2	28	0.461	—0.047	0.414	0.405	0.009
3	27	0.461	—0.070	0.391	0.378	0.013
4	26	0.461	—0.093	0.368	0.350	0.018
5	25	0.462	—0.117	} 0.345	} 0.322	} 0.023
5	25	—1.233	1.578			
6	24	—1.070	1.402	0.332	0.295	0.037
7	23	—0.935	1.253	0.318	0.267	0.051
8	22	—0.825	1.130	0.305	0.239	0.066
9	21	—0.736	1.023	0.287	0.212	0.075
10	20	—0.662	0.930	0.268	0.184	0.084
11	19	—0.601	0.850	0.249	0.156	0.093
12	18	—0.551	0.777	0.226	0.129	0.097
13	17	—0.510	0.715	0.205	0.101	0.104
14	16	—0.478	0.658	0.180	0.073	0.107
15	15	—0.452	0.605	0.153	0.046	0.107
16	14	—0.430	0.555	0.125	0.018	0.107
17	13	—0.414	0.510	0.096	—0.010	0.106
18	12	—0.400	0.466	0.066	—0.037	0.103
19	11	—0.392	0.424	0.032	—0.065	0.097
20	10	—0.384	0.384	0.000	—0.093	0.093
21	9	—0.379	0.344	—0.035	—0.120	0.085
22	8	—0.375	0.305	—0.070	—0.148	0.078
23	7	—0.372	0.266	—0.106	—0.176	0.070
24	6	—0.371	0.228	—0.143	—0.203	0.060
25	5	—0.370	0.190	—0.180	—0.231	0.051
26	4	—0.369	0.152	—0.217	—0.259	0.042
27	3	—0.369	0.114	—0.255	—0.286	0.031
28	2	—0.369	0.076	—0.293	—0.314	0.021
29	1	—0.369	0.038	—0.331	—0.342	0.011
30	0	—0.369	0.000	—0.369	—0.369	0.000

$A_1 = 0.461$ $\quad B_1 = -0.700$

$A_2 = -0.369$ $\quad B_2 = 1.140$

Таблица 19

30ξ	$\frac{A_1\omega_1}{A_2\omega_2}$	$\frac{B_1\psi_1}{B_2\psi_2}$	$\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$	$\frac{z_0-\varphi_1}{z_0-\varphi_2}$
0	0.292	0.000	0.292	0.000
1	0.292	—0.014	0.278	0.014
2	0.292	—0.028	0.264	0.028
3	0.292	—0.042	0.250	0.042
4	0.292	—0.055	0.237	0.055
5	0.293	—0.069	0.224	0.068
6	0.293	—0.083	0.210	0.082
7	0.294	—0.097	0.197	0.095
8	0.297	—0.112	0.135	0.107
9	0.300	—0.126	0.174	0.118
10	0.304	—0.140	0.164	0.128
11	0.310	—0.155	0.155	0.137
12	0.317	—0.171	0.146	0.146
13	0.327	—0.187	0.140	0.152
14	0.340	—0.203	0.137	0.155
15	0.357	—0.222	0.135	0.157
16	0.340	—0.203	0.137	0.155
17	0.327	—0.187	0.140	0.152
18	0.317	—0.171	0.146	0.146

$$A_1 = 0.292; \quad B_1 = -0\,417$$

надо лишь иметь кривые жесткости, распределения масс и действующую периодическую силу или пару.

§ 114. В §§ 104—113 показано, каким образом вычисляются „вынужденные“ упругие колебания балки переменного сечения под действием периодически изменяющейся силы или пары. Для большей части практических вопросов только это и требуется, но подобная же метода может быть применена для вычисления самих фундаментальных функций и характеристических чисел.

Поясним это на примере балки, оба конца которой свободны.

Свободные колебания нашей балки как раз представлялись бы уравнением

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[f(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]+q(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{1}$$

совершенно подобным уравнению (8) § 106.

Повторяя рассуждения § 106, увидим, что фундаментальные функции X будут определяться уравнением вида

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[f(x)\frac{d^2X}{dx^2}\right]-\lambda q(x)X=0 \tag{2}$$

подобным уравнениям (11) и (12) и граничными условиями:

$$\begin{array}{llll} \text{при} & x=0 & \text{должно быть} & X''=0 \quad \text{и} \quad X'''=0 \\ \text{„} & x=l & \text{„} \quad\quad \text{„} & X''=0 \quad \text{и} \quad X'''=0 \end{array} \tag{3}$$

Так как функция X определяется уравнением линейным, то она будет вида

$$X=AY+BZ+CU+DV$$

причем A, B, C, D — произвольные постоянные, Y, Z, U, V — четыре независимых частных решения уравнения (2). Очевидно, что эти решения будут зависеть и от параметра λ, значение которого пока неизвестно.

Граничные условия, обозначая значками производные по x, будут

$$\begin{aligned} &AY''(0,\lambda)+BZ''(0,\lambda)+CU''(0,\lambda)+DV''(0,\lambda)=0 \\ &AY'''(0,\lambda)+BZ'''(0,\lambda)+CU'''(0,\lambda)+DV'''(0,\lambda)=0 \\ &AY''(l,\lambda)+BZ''(l,\lambda)+CU''(l,\lambda)+DV''(l,\lambda)=0 \\ &AY'''(l,\lambda)+BZ'''(l;\lambda)+CU'''(l,\lambda)+DV'''(l,\lambda)=0 \end{aligned} \tag{4}$$

Чтобы эти уравнения допускали для A, B, C, D решения, отличные от нуля, необходимо, чтобы определитель

$$\Delta(\lambda)=|\,Y''(0,\lambda),\ Z'''(0,\lambda),\ U''(l,\lambda),\ V'''(l,\lambda)\,|=0 \tag{5}$$

Это и есть то трансцендентное уравнение, которым определяются „характеристические числа“ λ.

Но ясно, что лишь для весьма немногих частных видов функций $f(x)$ и $q(x)$ этот определитель может быть составлен аналитически, в большей же

части случаев это недостижимо, а когда функции $f(x)$ и $q(x)$ заданы графически, как это бывает в практических вопросах, и совсем невозможно.

Но для того чтобы вычислить по приближению значения λ, нет надобности иметь этот определитель в аналитическом, развернутом виде; достаточно, если мы будем иметь возможность вычислять частное его значение $\Delta(k)$, когда величине λ будет приписано какое-либо частное значение $\lambda = k$.

В самом деле, если на основании каких-либо соображений, изложение которых здесь опускаем, было бы известно, что одно из приближенных значений некоторого корня λ, скажем первого, есть k, то, вычислив $\Delta(k)$, положили бы затем $\lambda = k + h$ и вычислили бы $\Delta(k+h)$; если эти величины окажутся разных знаков, то искомое значение λ лежит между k и $k+h$, после чего обычным приемом последовательных приближений оно и найдется с любою степенью точности.

Таким образом, все дело свелось к тому, чтобы показать, каким образом можно вычислить частное значение $\Delta(k)$.

Постоянные произвольные можно выбрать так, чтобы они представляли частные значения функции X и первых трех ее производных при $x = 0$, для этого стоит только взять такие частные решения Y, Z, U, V, которые, как говорят, обладали бы „единичною матрицею“, т. е. чтобы при $x = 0$ было

$$\begin{array}{llll} Y=1; & Y'=0; & Y''=0; & Y'''=0 \\ Z=0; & Z'=1; & Z''=0; & Z'''=0 \\ U=0; & U'=0; & U''=1; & U'''=0 \\ V=0; & V'=0; & V''=0; & V'''=1 \end{array} \tag{6}$$

Так как функция

$$X = AY + BZ + CU + DV$$

удовлетворяет граничным условиям (3), то, очевидно, будет

$$C = 0 \quad \text{и} \quad D = 0$$

так что остается только найти функцию Y и Z, чего мы и достигли совершенно подобно тому, как указано в § 107, введя вспомогательные неизвестные y и s, так что Y и y будут определяться системою

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y}{dx^2} &= \frac{1}{f(x)} y \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= kq(x)\, Y \end{aligned} \tag{7}$$

и начальными значениями: при $x=0$ должно быть

$$y=0; \qquad y'=0$$
$$Y=1; \qquad Y'=0$$

которые следуют из уравнений первой строки матрицы (6).

Применяя к этой системе методу Штермера, составим таблицу значений Y и y от $x=0$ до $x-l$, причем попутно получится и таблица значений их вторых производных.

Совершенно так же, положив

$$\frac{d^2Z}{dx^2}=\frac{1}{f(x)}z$$
$$\frac{d^2z}{dx^2}=kq(x)Z \qquad (7')$$

и взяв за начальные условия: при $x=0$ должно быть

$$z=0 \quad \text{и} \quad z'=0$$
$$Z=0 \quad \text{и} \quad Z'=1 \qquad (8)$$

составим таблицу значений функции Z и попутно с нею и значений Z'

Таким образом, будет

$$X=AY+BZ$$

причем постоянные произвольные определяются уравнениями

$$AY''(l,\lambda)+BZ''(l,\lambda)=0$$
$$AY'''(l,\lambda)+BZ'''(l,\lambda)=0 \qquad (9)$$

причем значения Y''' и Z''' при $x=l$ найдем в том случае, когда функции $f(x)$ и $q(x)$ заданы аналитически, из уравнений (7) и (7'), продифференцировав их, когда же $f(x)$ и $q(x)$ заданы таблично или графически, то — по формулам интерполяции, подобным формуле Стирлинга; таким образом, уравнения (9) примут вид

$$AP+BQ=0$$
$$AM+BN=0 \qquad (10)$$

причем P, Q, M и N будут известные числа, и, значит, частное значение определителя будет

$$\Delta(k)=PN-QM$$

Если бы оно оказалось равным нулю, то значение $\lambda = k$ и было бы характеристическим числом, если же $\Delta(k)$ нулю не равно, то, положив $\lambda = k + h$, надо повторить процесс, найдем значение $\Delta(k+h)$ и, как сказано выше, будем последовательными приближениями искать значение λ.

Таким образом, имеется возможность действительно найти значения характеристических чисел, но, как видно, вычисление было бы весьма продолжительно, в особенности если исходное значение k взято недостаточно близко к истинному.

Чтобы избежать длинных вычислений, поступают так: принимают за X какую-нибудь функцию, *удовлетворяющую условиям* (9), например для балки постоянного сечения и соответствующего веса, или берут целый полином; пусть эта функция будет $F(x)$, так что

$$X = F(x)$$

причем в нашем случае будет

$$\begin{aligned} F'(0) &= 0; \qquad F'''(0) = 0 \\ F''(l) &= 0; \qquad F'''(l) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Если бы уравнение (2) было бы *точное*, то мы имели бы

$$\frac{d^2}{dx^2}[f(x)F'(x)] = \lambda q(x) F(x) \tag{12}$$

Умножим обе части этого равенства на $F(x)\,dx$ и проинтегрируем в пределах от 0 до l, тогда будут

$$\lambda \int_0^l q(x)[F(x)]^2\,dx = \int_0^l F(x)\frac{d^2}{dx^2}[f(x)F''(x)]\,dx$$

Затем, интегрируя по частям, получим на основании условий (11)

$$\int_0^l F(x)\frac{d^2}{dx^2}[f(x)F''(x)]\,dx =$$

$$= \Big\{F(x)\frac{d}{dx}[f(x)F''(x)]\Big\}_0^l - \int_0^l F'(x)\frac{d}{dx}[f(x)F''(x)]\,dx =$$

$$= -\Big\{F'(x)f(x)F''(x)\Big\}_0^l + \int_0^l f(x)\,[F''(x)]^2\,dx = \int_0^l f(x)\,[F''(x)]^2\,dx$$

Значит, будет на основании уравнения (12)

$$\lambda = \frac{\int_0^l f(x)\,[F''(x)]^2\,dx}{\int_0^l q(x)\,[F(x)]^2\,dx}$$

Вычисленное по этой формуле значение λ, даже при грубом приближении функции $F(x)$, обыкновенно оказывается весьма близким к истинному. Приняв это значение за первое приближение k, вычисляем, как объяснено выше, X и X'', определяя отношение $B:A$ из уравнения

$$A(P+M)+B(Q+N)=0$$

представляющего сумму уравнений (10), после чего, положив, например, $A=1$, вычисляем по формуле (13) величину λ, которую и принимаем за $k+h$, и продолжаем таким образом, пока не получим величину λ с требуемой степенью точности.

При этом вычислении необходимо обращать внимание, чтобы не только разность

$$PN - QM$$

была достаточно близка к нулю, но и чтобы отношение $QM:PN$ было близко к единице, в той мере точно, как производится вычисление и как то в поставленном вопросе требуется.

Совершенно подобным же образом надо поступать с другими типами уравнений, нами рассмотренных, когда вместо постоянных коэффициентов, в них будут коэффициенты переменные, например в уравнении струны, когда оно относится или к продольным колебаниям стержня переменного сечения, или к вычислению сейш (приливов) в озерах или в замкнутых морях.

ГЛАВА VIII

РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

§ 115. Чтобы дать пример уравнений с переменными коэффициентами, интегрирование которых совершается подобно тому, как интегрирование уравнений с постоянными коэффициентами, т. е. приводится к функциям хорошо исследованным, для которых существуют таблицы, рассмотрим радиальные колебания полого цилиндра, задача о которых имеет приложение при проектировании орудий.

Радиальные колебания полого цилиндра, внутренний радиус коего есть a, внешний b, определяются уравнением

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) = \rho F(r, t) \tag{1}$$

в котором u есть радиальное перемещение слоя, отстоящего на величину r от оси цилиндра, ρ есть плотность (масса единицы объема) материала цилиндра, $F(r, t)$ — внешнее усилие, действующее в момент t на единицу массы в слое, отстоящем на r от оси, λ и μ — коэффициенты упругости материала, а именно: μ — модуль сдвига и

$$\frac{\lambda(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = E \tag{2}$$

где E — модуль упругости (модуль Юнга).

К уравнению (1) необходимо еще присовокупить *граничные* и *начальные* условия. В том случае, когда обе поверхности цилиндра „свободны", то граничные условия выражаются так:

$$\left.\begin{array}{l} \text{при } r = a \text{ должно быть } r\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\lambda}{\lambda + 2\mu}u = 0 \\ \text{„ } r = b \text{ „ „ } r\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\lambda}{\lambda + 2\mu}u = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{при } \textit{всяком} \\ \text{значении} \\ \text{времени } t \end{array} \tag{3}$$

Начальные условия относятся к моменту $t = 0$ и выражаются так:

$$\text{при } t = 0 \text{ должно быть } u = \varphi(r)$$

$$\text{„ } t = 0 \text{ „ „ } \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(r)$$

причем $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ — две функции переменной r, произвольно заданные от $r=a$ до $r=b$.

По общему способу решения вопроса о вынужденных колебаниях, полагаем

$$u=u_1+u_2$$

и подчиняем эти функции таким уравнениям и условиям, чтобы u_1 представляло свободные колебания и u_2 — вынужденные.

Для этого необходимо, чтобы величина u_1 удовлетворяла:

во-первых, уравнению, соответствующему (1), но без последнего члена, т. е.

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-c^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r}-\frac{u_1}{r^2}\right)=0 \tag{4}$$

где

$$c^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho};$$

во-вторых, граничным условиям:

$$\left.\begin{array}{l}\text{при } r=a \text{ должно быть } r\dfrac{\partial u_1}{\partial r}+hu_1=0\\ \text{„ } r=b \text{ „ „ } r\dfrac{\partial u_1}{\partial r}+hu_1=0\end{array}\right\}\ \text{при всяком } t \tag{5}$$

где

$$h=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu};$$

в третьих, начальным условиям:

$$\begin{array}{lll}\text{при } t=0 \text{ должно быть} & u_1=\varphi(r)\\ \text{„ } t=0 \text{ „ „} & \dfrac{\partial u_1}{\partial t}=\psi(r)\end{array} \tag{6}$$

Что касается величины u_2, то она должна удовлетворять:

во-первых, уравнению с последним членом:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-c^2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r}-\frac{u_2}{r^2}\right)=F(r,t) \tag{7}$$

во-вторых, граничным условиям:

$$\left.\begin{array}{l}\text{при } r=a \text{ должно быть } r\dfrac{\partial u_2}{\partial r}+hu_2=0\\ \text{„ } r=b \text{ „ „ } r\dfrac{\partial u_2}{\partial r}+hu_2=0\end{array}\right\}\ \text{при всяком } t \tag{8}$$

и, в-третьих, начальным условиям: при $t=0$ должно быть

$$u_2=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}=0 \tag{9}$$

Необходимо теперь же сделать следующее замечание.

С первого взгляда может представиться, что решаемая задача не относится к тому случаю, когда цилиндр подвержен давлению, действующему на внутреннюю его поверхность и изменяющемуся с течением времени, ибо граничные условия получены так, что приравнена нулю, при $r=a$ и при $r=b$, нормальная слагающая напряжения, которая выражается формулой

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial r}+\lambda\frac{u}{r}$$

и можно думать, что следовало бы эту величину уравнять величине внутреннего давления.

Но можно поступать иначе: граничные условия должно составлять для *свободных* колебаний тела, все же внешние условия относить к „нагрузке" $\rho F(r, t)$, выбирая подобающим образом вид функции $F(r, t)$, т. е. когда действует давление на внутреннюю поверхность, то надо его вообразить замененным нагрузкою, сосредоточенной на бесконечно тонком слое, прилегающем к внутренней поверхности, и перейти к пределу, беря толщину слоя равной нулю.

Такая замена приводит к однородным граничным условиям и дает возможность решить вопрос о вынужденных колебаниях, подобно тому как это показано в главе VII этого курса.

§ 116. Решение необходимо начинать с разыскания свободных колебаний, хотя бы при $t=0$ система была в равновесии и покое, т. е. когда $\varphi(r)=0$ и $\psi(r)=0$, и свободных колебаний не было бы, так как тогда $u_1=0$.

Строим выражение

$$TR \tag{10}$$

где функция T зависит только от переменной t, функция R — только от переменной r, и определяем функции T и R так, чтобы оно удовлетворяло как уравнению (4), так и граничным условиям (5).

По подстановке величины (10) в уравнение (4), оно примет вид

$$T''R-c^2\left(R''+\frac{1}{r}R'-\frac{R}{r^2}\right)T=0$$

где значками обозначены производные по той переменной, от коей функция зависит.

Следовательно, функции T и R должны быть взяты так, чтобы выполнить уравнение

$$T''R-c^2\left(R''+\frac{1}{r}R'-\frac{R}{r^2}\right)T=0$$

что не иначе может быть, как если будет

$$\frac{T''}{c^2T}=\frac{R''+\frac{1}{r}R'-\frac{R}{r^2}}{R}=-p^2 \tag{11}$$

где $-p^2$ есть какое угодно число, не зависящее ни от t, ни от r.

Таким образом, для нахождения функций T и R имеем уравнения

$$T' + c^2 p^2 T = 0 \tag{12}$$

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(p^2 - \frac{1}{r^2}\right) R = 0 \tag{13}$$

Первое из этих уравнений дает

$$T = C \cos cpt + D \sin cpt$$

где C и D — постоянные произвольные.

Уравнение (13), как видно, также линейное, но с переменными коэффициентами. Функции, этому уравнению удовлетворяющие, хорошо исследованы, и для них составлены таблицы; эти функции называются *Бесселевыми* или *цилиндрическими* и встречаются во множестве вопросов математической физики, когда приходится иметь дело с цилиндром или шаром.

Ниже мы приведем те свойства этих функций, которые нам понадобятся, чтобы воспользоваться их готовыми таблицами.

Сделав в уравнении (13)

$$pr = x$$

мы получим уравнение

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) R = 0 \tag{13'}$$

которое показывает, что величина R есть функция только буквы x, т. е. *произведения* pr, а не переменных p и r в отдельности.

Общий интеграл уравнения (13′) будет вида

$$R = AI_1(x) + BY_1(x)$$

где A и B — произвольные постоянные, $I_1(x)$ и $Y_1(x)$ — два *независимых*, частных решения уравнения (13′); следовательно, будет

$$R = AI_1(pr) + BY_1(pr) \tag{14}$$

Составляя граничные условия, которым должна удовлетворять функция R, получаем

$$\begin{aligned} aR'(a) + hR(a) &= 0 \\ bR'(b) + hR(b) &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

причем

$$R' = \frac{dR}{dr}$$

Развив условия (15) на основании формулы (14) имеем

$$\begin{aligned} A[ap\,I_1'(ap)+hI_1(ap)]+B[ap\,Y_1'(ap)+hY_1(ap)]=0 \\ A[bp\,I_1'(bp)+hI_1(bp)]+B[bp\,Y_1'(bp)+hY_1(bp)]=0 \end{aligned} \tag{16}$$

Чтобы уравнения (16) допускали решения, отличные от нуля, необходимо, чтобы было

$$\begin{aligned} &[ap\,I_1'(ap)+hI_1(ap)][bp\,Y_1'(bp)+hY_1(bp)] \\ &-[bp\,I_1'(bp)+hI_1(bp)][ap\,Y_1'(ap)+hY_1(ap)]=0 \end{aligned} \tag{17}$$

Это трансцендентное уравнение определит те значения, которые может принимать остававшееся пока произвольным число p.

Пусть эти значения будут:

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots\ p_k,\ \ldots$$

каждому из этих значений будет соответствовать своя функция R и своя функция T; мы их обозначим соответственно

$$\begin{aligned} &T_1,\ T_2,\ T_3,\ \ldots\ T_k,\ \ldots \\ &R_1,\ R_2,\ R_3,\ \ldots\ R_k,\ \ldots \end{aligned}$$

так что

$$T_k = C_k \cos cp_k t + D_k \sin cp_k t$$

$$R_k = H_k\{[ap_k\,Y_1'(ap_k)+hY_1(ap_k)]\,I_1(p_k r)-[ap_k\,I_1'(ap_k)+hI_1\,ap_k)]\,Y_1(p_k r)\}$$

где C_k, D_k и H_k — произвольные постоянные, причем эта последняя заменяет постоянные A_k и B_k, связанные первым уравнением (16), ибо, в силу (17), второе есть следствие первого, так что надо брать

$$\begin{aligned} A_k &= H_k[ap_k\,Y_1'(ap_k)+hY_1(ap_k)] \\ B_k &= -H_k[ap_k\,I_1'(ap_k)+hI_1(ap_k)] \end{aligned}$$

В виду того, что в выражение u_1 входят лишь произведения $T_k\,R_k$, можно без ущерба общности брать $H_k=1$, ибо $C_k\,H_k$ и $D_k\,H_k$ суть такие же произвольные постоянные, как C_k и D_k.

Таким образом, за функцию R_k берем

$$\begin{aligned} R_k = &[ap_k\,Y_1'(ap_k)+hY_1(ap_k)]\,I_1(p_k r)- \\ &-[ap_k\,I_1'(ap_k)+hI_1(ap_k)]\,Y_1(p_k r) \end{aligned} \tag{18}$$

и скажем здесь же, что для функций I_1 и Y_1 и их производных имеются готовые таблицы.

Ищем u_1 в виде суммы построенных выше выражений (10)

$$u_1 = \sum_{k=1}^{k=\infty} C_k R_k \cos cp_k t + \sum_{k=1}^{k=\infty} D_k R_k \sin cp_k t \qquad (19)$$

и постоянные произвольные C_k и D_k определяются по начальным условиям.

§ 117. Определение постоянных произвольных по начальным условиям приводит к равенствам

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{k=\infty} C_k R_k$$

$$\psi(r) = \sum_{k=1}^{k=\infty} cp_k D_k R_k$$

требующим разложения заданных функций $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ по функциям R_k, определяемым дифференциальным уравнением (13) в связи с уравнением (17).

Это определение выполняется на основании следующего свойства функции R_k:

$$\int_a^b R_m R_n r\,dr = 0, \quad \text{если} \quad m \neq n$$

В самом деле, функции R_m и R_n удовлетворяют дифференциальным уравнениям, которые получаются после замены в (13) для первой p через p_m и для второй через p_n, т. е.

$$R_m'' + \frac{1}{r} R_m' + \left(p_m^2 - \frac{1}{r^2}\right) R_m = 0$$

$$R_n'' + \frac{1}{r} R_n' + \left(p_n^2 - \frac{1}{r^2}\right) R_n = 0$$

Эти уравнения можно написать так:

$$(rR_m')' + \left(p_m^2 - \frac{1}{r^2}\right) R_m r = 0$$

$$(rR_n')' + \left(p_n^2 - \frac{1}{r^2}\right) R_n r = 0$$

Умножая первое уравнение на R_n, второе на R_m и вычитая его из первого, получим равенство

$$(p_m^2 - p_n^2) R_m R_n r = R_m (rR_n')' - R_n (rR_n')'$$

Умножив это уравнение на dr и интегрируя в пределах от $r=a$ до $r=b$, получим

$$(p_m^2-p_n^2)\int_a^b R_m R_n r dr=\int_a^b R_m d[rR_n']-\int_a^b R_n d[rR_n']$$

выполнив во второй части интегрирование по частям, получим

$$(p_m^2-p_n^2)\int_a^b R_m R_n r dr=\Big[rR_m R_n'-rR_n R_m'\Big]_a^b=$$

$$=[bR_n'(b)R_m(b)-bR_m'(b)R_n(b)]-[aR_n'(a)R_m(a)-aR_m'(a)R_n(a)].$$

Но, в силу уравнений (15), будет

$$aR_m'(a)=-hR_m(a);\qquad aR_n'(a)=-hR_n(a)$$
$$bR_m'(b)=-hR_m(b);\qquad bR_n'(b)=-hR_n(b);$$

следовательно, вторая часть предыдущего равенства есть нуль, а так как по предположению p_m не равно p_n, то будет

$$\int_a^b R_m R_n r dr=0,\quad \text{если}\quad m\neq n \tag{20}$$

На основании этого свойства произвольные постоянные C_k и D_k определяются совершенно подобно тому, как и для рядов Фурье, и значит, будет

$$C_k=\frac{\int_a^b \varphi(r)\,rR_k\,dr}{\int_a^b R_k^2\,rdr};\qquad D_k=\frac{1}{cp_k}\frac{\int_a^b \psi(r)\,rR_k\,dr}{\int_a^b R_k^2\,rdr} \tag{21}$$

Входящий в знаменатель этих выражений интеграл

$$\int_a^b R_k^2\,rdr$$

может быть найден по обыкновенному приему, подобно тому как в задаче об упругих колебаниях стержня.

Действительно, мы имеем вообще

$$\int_a^b R_m R_n r dr=\frac{\Big[rR_m R_n'-rR_n R_m'\Big]_a^b}{p^2_m-p^2_n}$$

когда m становится равным n, то выражение во второй части принимает неопределенный вид $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, заменим p_m через p и обозначим соответствующую функцию через R; тогда вторая часть предыдущего равенства обратится в дробь вида

$$\frac{F(p)}{p^2 - p_m^2}$$

причем

$$F(p_n) = 0$$

Истинное значение этой дроби есть

$$\left[\frac{\frac{\partial F(p)}{\partial p}}{2p}\right]_{p=p_n}$$

Но

$$F(p) = \left[rRR_n' - rR_n R'\right]_a^b = \left[rRR_n - rR_n \frac{\partial R}{\partial r}\right]_a^b$$

величины R_n и R_n' буквы p не содержат, величина же R есть функция произведения pr, как то указывает формула (14); следовательно, будет

$$\frac{\partial R}{\partial p} = \frac{r}{p}\frac{\partial R}{\partial r} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 R}{\partial p \partial r} = \frac{\partial^2 R}{\partial r \partial p} = \frac{1}{p}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{r}{p}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}$$

и, значит,

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \left[rR_n'\frac{\partial R}{\partial p} - rR_n\frac{\partial^2 R}{\partial p \partial r}\right]_a^b = \left[\frac{r^2}{p}R_n'\frac{\partial R}{\partial r} - \frac{r}{p}R_n\frac{\partial R}{\partial r} - \frac{r^2}{p}R_n\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}\right]_a^b$$

При $p = p_n$ функция R обращается в R_n и, в силу уравнения,

$$\frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(p_n^2 - \frac{1}{r^2}\right)R_n = 0$$

будет

$$-r^2\frac{d^2 R_n}{dr^2} = r\frac{dR_n}{dr} + (p_n^2 r^2 - 1)R_n$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{\frac{\partial F(p)}{\partial p}}{2p}\right|_{p=p_n} = \frac{1}{2p_n^2}\left[r^2 R_n'^2 + R_n^2(p^2 r^2 - 1)\right]_a^b \qquad (22)$$

Таким образом, задача о нахождении свободных колебаний сводится к составлению функции R_k.

§ 118. Приведем теперь без доказательства те главнейшие формулы, относящиеся к Бесселевым функциям, которые нам понадобятся.

Уравнение (13′)

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)R=0 \tag{13′}$$

есть частный случай уравнения

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)R=0 \tag{23}$$

соответствующий $n=1$.

Когда в уравнении (23) n есть целое и положительное число, то его общий интеграл будет вида

$$R=AI_n(x)+BY_n(x)$$

причем $I_n(x)$ называется Бесселевой функцией первого рода и n-ого порядка, $Y_n(x)$ — Бесселевой функцией второго рода и n-ого порядка

Эти функции определяются следующими рядами:

$$I_n(x)=\frac{x^n}{2^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left[1-\frac{x^2}{2(2n+2)}+\frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)}+\cdots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{2\cdot 4\ldots 2k(2n+2)(2n+4)\ldots(2n+2k)}+\cdots\right]$$

$$Y_n(x)=I_n(x)\log(x)-\left[2^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}+\frac{2^{n-3}(n-2)!}{1!}x^{-n+2}+\right.$$
$$\left.+\frac{2^{n-5}(n-3)!}{2!}x^{-n+4}+\ldots+\frac{x^{n-2}}{2^{n-1}(n-1)!}\right]-\frac{x^n}{2^{n+1}n!}\sum_1^n\frac{1}{k}+$$
$$+\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{n+2k}k!\,(n+k)!}A_{n,k}\,x^{n+2k}$$

причем

$$A_{n,k}=\sum_{h=1}^{h=k}\left[\frac{1}{2h}+\frac{1}{2(n+h)}\right]-\sum_{h=1}^{h=n}\frac{1}{2h} \tag{24}$$

По поводу этих двух рядов сделаем следующее замечание.

Чтобы найти общий интеграл уравнения

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0 \tag{23′}$$

надо найти *два* каких бы то ни было линейно *независимых* его решения; будем искать частные решения вида

$$y = x^{\alpha}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots) = \sum_{k=0}^{k=\infty} a_k x^{\alpha+k}$$

Подставляя эту величину y в данное уравнение, получим

$$(\alpha^2 - n^2) a_0 x^{\alpha} + [(\alpha+1)^2 - n^2] a_1 x^{\alpha+1} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{k=\infty} \{[(\alpha+k)^2 - n^2] a_k + a_{k-2}\} x^{\alpha+k} = 0$$

Чтобы это равенство могло иметь место при всяком значении переменной x, необходимо взять показатель α и коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots$ так, чтобы каждая степень x в отдельности пропадала, т. е, чтобы было

$$\alpha^2 - n^2 = 0 \quad \text{и} \quad a_0 \neq 0$$

Следовательно, можно взять

$$\alpha = +n \quad \text{и} \quad \alpha = -n$$

Возьмем сперва $\alpha = +n$; тогда величина $(\alpha+1)^2 - n^2 = 2n+1$ нулю не равна (мы предполагаем, что n не равно $\frac{1}{2}$), и, значит, должно быть

$$a_1 = 0$$

Дальнейшие коэффициенты определяются системою уравнений

$$[(\alpha+k)^2 - n^2] a_k + a_{k-2} = 0 \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots)$$

т. е. при $\alpha = n$ системою

$$k(2n+k) a_k + a_{k-2} = 0 \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots) \qquad (*)$$

Так как $a_1 = 0$, то из этой системы видно, что будет и

$$a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = a_{2i+1} = \ldots = 0$$

Затем, для четных значений k получим

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2n+2)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(2n+4)} = \frac{a_0}{2 \cdot 4 (2n+2)(2n+4)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6(2n+6)} = -\frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 (2n+2)(2n+4)2n+6)}$$

и т. д., причем закон составления коэффициентов очевиден; таким образом, *одно* частное решение уравнения (23) будет

$$y_1 = a_0 x^n \left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \cdots\right]$$

причем a_0 остается произвольным, и так как при составлении общего интеграла y_1 множится на произвольную постоянную A, то a_0 можно брать как угодно. По соображениям, которые излагать не будем, принято брать[1]

$$a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$$

и соответствующую величину y_1 обозначать знаком $I_n(x)$, так что

$$I_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \cdot \left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right] \quad (24')$$

Если n *не есть целое положительное число*, то, взяв

$$\alpha = -n$$

мы получили бы *второе* решение y_2 вида

$$y_2 = a_0 x^{-n} \left[1 - \frac{x^2}{2(2-2n)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2-2n)(4-2n)} - \cdots\right]$$

которое было бы *независимо* от первого, и, взяв по аналогии

$$a_0 = \frac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)}$$

обозначили бы функцию, ему соответствующую, через $I_{-n}(x)$, так что

$$I_{-n}(x) = \frac{x^{-n}}{2^{-n}\Gamma(-n+1)}\left[1 - \frac{x^2}{2(2-2n)} + \right.$$
$$\left. + \frac{x^4}{2\cdot 4(2-2n)(4-2n)} - \cdots\right] \quad (24'')$$

и общий интеграл уравнения (23) был бы

$$y = AI_n(x) + BI_{-n}(x) \quad (25)$$

---

[1] Функция $\Gamma(n+1)$ есть Эйлеров интеграл второго рода

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$$

При n целом и положительном $\Gamma(n+1) = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots n$. При $n = 0$ значение функции $\Gamma(n+1)$ есть 1.

Но если n есть *целое* и *положительное число*, то значение $\alpha = -n$ не дает решения независимого от первого.

В самом деле, в этом случае система уравнений (*) будет

$$a_1 = 0$$

$$k(k-2n)\,a_k + a_{k-2} = 0 \qquad (k = 2, 3, 4, 5, \ldots)$$

попрежнему получится

$$a_0 = a_5 = a_7 = \ldots = 0$$

Но если взять a_0 не равным нулю, то коэффициент a_{2n} и все за ним следующие заключали бы в знаменателе множитель $2n - 2n$, равный 0, т. е. были бы бесконечны; следовательно, надо брать

$$a_0 = a_2 = a_4 = \ldots = a_{2n-2} = 0$$

Тогда уравнение, соответствующее значению $k = 2n$ в системе (*) будет

$$2n\,(2n-2n)\,a_{2n} = 0$$

Значит, a_{2n} можно брать произвольно, последующие уравнения будут

$$(2n+2)\,(2n+2-2n)\,a_{2n+2} + a_{2n} = 0$$
$$(2n+4)\,(2n+4-2n)\,a_{2n+4} + a_{2n+2} = 0$$

и т. д., и получится

$$a_{2n+2} = -\frac{a_{2n}}{(2n+2)\,2}$$

$$a_{2n+4} = -\frac{a_{2n+2}}{(2n+4)\,4} = \frac{a_{2n}}{(2n+4)\,(2n+2)\,4 \cdot 2}$$

и т. д., величина y_2 будет

$$y_2 = x^{-n}\left[a_{2n}x^{2n} + a_{2n+2}x^{2n+2} + \ldots\right] =$$
$$= a_{2n}x^n\left[1 - \frac{x^2}{2\,(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4\,(2n+2)\,(2n+4)} - \ldots\right]$$

т. е. y_2 отличалось бы от y_1 постоянным множителем и не было бы *независимым* интегралом уравнения (23).

Чтобы найти этот второй независимый интеграл, можно поступать следующим образом: искать непосредственно решение вида

$$y_2 = x^{-n}(a_0 + b_0 \log x) + x^{-n+1}(a_1 + b_1 \log x) + \dots$$

т. е.

$$y_2 = x^{-n} \sum_{k=0}^{k=\infty} (a_k + b_k \log x)\, x^k$$

и, подставив эту величину в уравнение (23), собрать в нем члены с одинаковыми степенями буквы x и уравнять нулю коэффициенты при них, причем получится некоторая система уравнений, из которой все коэффициенты a_k четного порядка выразятся через a_{2n}, которое само остается произвольным, все коэффициенты b_k четного порядка выразятся через b_{2n}, которое само остается произвольным, все же коэффициенты a_k и b_k нечетного порядка равны нулю.

Оказывается, что величина y_2 будет

$$y_2 = a_{2n} y_1 + b_{2n} z_n$$

где

$$y_1 = x^n \left\{1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots\right\}$$

и

$$z_n = x^n\left(1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots\right)\log x -$$

$$-2^{2n-1}\cdot n!\,(n-1)!\left\{x^{-n} + \frac{x^{-n+2}}{2(2n-2)} + \frac{x^{-n+4}}{2\cdot 4(2n-2)(2n-4)} + \dots\right.$$

$$\left. \dots + \frac{x^{n-2}}{(2\cdot 4\cdot 6\dots 2n-2)^2}\right\} + 0\cdot x^n + \frac{x^{n+2}}{2(2n+2)}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+2}\right] -$$

$$- \frac{x^{n+4}}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4}\right] + \dots$$

$$\dots + (-1)^{k-1}\frac{x^{n+2k}}{2\cdot 4\dots 2k(2n+2)(2n+4)\dots(2n+2k)}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right.$$

$$\left. \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} + \dots + \frac{1}{2n+2k}\right] + \dots$$

При $n = 0$ величина z_n не заключает отрицательных степеней буквы x, и будет

$$z_0 = \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} - \dots\right)\log x + \frac{x^2}{2^2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} +$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} - \dots$$

Но вместо этой функции y_2 рассматривают другую, которая получается, если приписать a_{2n} и b_{2n} некоторые определенные частные значения, выбранные так, что соответствующая им величина y_2 обладает свойствами, вполне аналогичными свойствам функций $I_n(x)$. Такая функция и обозначается знаком $Y_n(x)$, и выражение ее приведено выше; она называется *Бесселевой функцией второго рода n-ого порядка.*

§ 119. Для Бесселевых функций составлены следующие таблицы:

1) Значения функций $I_0(x)$ и $I_1(x)$ для аргументов: от $x=0$ до $x=15.50$ через 0.01.

2) Значения функций $I_n(x)$ для целых значений значков n и аргументов x через 1, пока величина функции остается больше $\frac{1}{10^{18}}$.

3) Значения первых 50 корней уравнения $I_1(x)=0$ и соответствующих им значений $I_0(x)$.

4) Значения функций $Y_0(x)$ и $Y_1(x)$ для аргументов от $x=0$ до $x=10.2$; до $x=1$ через 0.01 и затем через 0.1.

Первые три таблицы имеются в руководстве Gray and Mathews — „Treatise on Bessel functions“, последняя — в томах XXVI журнала „Messenger of Mathematics“, а также в сборнике таблиц: Janke und Emde — „Functionentafeln“. Все эти таблицы, сокращенные до пяти знаков, находятся также в изданном Академией Наук „Сборнике математических и астрономических таблиц“ проф. С. П. Глазенапа.

Как видно, чтобы пользоваться этими таблицами, необходимо порядок функций привести к нулю или единице. Для всех функций *целого* порядка это достигается при помощи следующих формул приведения, доказывать которые не будем, отсылая к руководствам по Бесселевым функциям.

Для краткости письма мы опускаем аргумент (x), так что вместо $I_n(x)$ будем просто писать I_n и вместо $Y_n(x)$ просто Y_n.

Эти формулы следующие:

$$\begin{aligned} I_{n-1} - \frac{2n}{x} I_n + I_{n+1} &= 0 \\ Y_{n-1} - \frac{2n}{x} Y_n + Y_{n+1} &= 0 \end{aligned} \qquad (I)$$

Эти две формулы дают возможность выразить функции Бесселя любого целого порядка через функции *нулевого* и *первого* порядков, для коих составлены таблицы.

При пользовании функциями Бесселя встречаются обыкновенно, как и в нашей задаче, не только сами функции, но и их производные.

Понятно само собою, что, пользуясь дифференциальным уравнением (23), можно производную второго и всех высших порядков выразить через самую функцию и ее производную *первого* порядка.

Что же касается первой производной, то оказывается, что эти производные выражаются следующим образом:

$$I_n' = \frac{n}{x} I_n - I_{n+1} = I_{n-1} - \frac{n}{x} I_n$$
$$Y_n' = \frac{n}{x} Y_n - Y_{n+1} = Y_{n-1} - \frac{n}{x} Y_n \qquad \text{(II)}$$

а в частном случае

$$I_0' = -I_1$$
$$Y_0' = -Y_1 \qquad \text{(III)}$$

Формулы (I), (II) и (III) и дают возможность приводить всякое выражение, содержащее Бесселевы функции любого *целого* порядка и их производные любого порядка, к такому виду, в который входили бы только функции нулевого и первого порядка, и, значит, при вычислениях пользоваться готовыми таблицами, а не теми рядами, коими функции определяются.

Выше приведены те значения аргументов, для коих таблицы составлены; как видно, эти значения невелики, и следовательно, если бы встретилась надобность найти значение функции для аргумента, лежащего вне табличной границы, то пришлось бы обратиться к рядам, — а так как для больших значений x эти ряды медленно сходятся, то пришлось бы брать в них много членов.

Чтобы этого избежать, составлены для больших значений x следующие две приближенные формулы:

$$I_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[P \cos\left(\frac{2n+1}{4}\pi - x\right) + Q \sin\left(\frac{2n+1}{4}\pi - x\right)\right]$$
$$Y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} [\log 2 - C] I_n(x) + \qquad (26)$$
$$+ \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left[Q \cos\left(\frac{2n+1}{4}\pi - x\right) - P \sin\left(\frac{2n+1}{4}\pi - x\right)\right]$$

где

$$P = 1 - \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)}{2!\,(8x)^2} + \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)(4n^2-49)}{4!\,(8x)^4} - \ldots$$

$$Q = \frac{4n^2-1}{8x} - \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)}{3!\,(8x)^3} + \ldots$$

Здесь C есть Эйлерова постоянная ($C = 0.57721566\ldots$), так что

$$\log 2 - C = 0.115931516\ldots$$

Очевидно, что ряды для P и Q — расходящиеся, и при пользовании предыдущими формулами надо брать лишь немногие первые их члены, пока эти члены идут убывая, подобно тому как при пользовании рядом Стирлинга.

§ 120. Мы имели формулу

$$R_k = [ap_k Y_1'(ap_k) + hY_1(ap_k)] I_1(p_k r) - [ap_k I_1'(ap_k) + hY_1(ap_k)] Y_1(p_k r),$$

причем p_k есть k-ый корень уравнения

$$[ap\, I_1'(ap) + hI_1(ap)][bp\, Y_1'(bp) + hY_1(bp)] - [bp\, I_1'(bp) + hI_1(bp)][ap\, Y_1'(ap) + hY_1(ap)] = 0$$

Чтобы при вычислениях пользоваться таблицами, надо в этих формулах заменить $I_1'(ap)$, $Y_1'(ap)$, $I_1'(bp)$ и $Y_1'(bp)$ их выражениями

$$I_1'(ap) = I_0(ap) - \frac{1}{ap} I_1(ap) \quad \text{и} \quad Y_1'(ap) = Y_0(ap) - \frac{1}{ap} Y_1(ap)$$

$$I_1'(bp) = I_0(bp) - \frac{1}{bp} I_1(bp) \quad \text{и} \quad Y_1'(bp) = Y_0(bp) - \frac{1}{bp} Y_1(bp)$$

после чего в эти формулы будут входить только функции, значения коих непосредственно даются таблицами.

§ 121. Прежде чем приступать к численным вычислениям, покажем, каким образом найти вынужденные колебания u_2.

Следуя общей методе, поступаем так:

1) представляем функцию $F(r, t)$, стоящую во второй части уравнения

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{u_2}{r^2} \right) = F(r, t)$$

в виде ряда, расположенного по „фундаментальным“ функциям R_k, коими определяются свободные колебания нашего цилиндра, т. е. полагаем

$$F(r, t) = \sum_{k=1}^{k=\infty} N_k(t) R_k \tag{27}$$

тогда величина коэффициента $N_k(t)$ определится равенствами

$$N_k(t) = \frac{\int_a^b F(r, t) R_k r dr}{\int_a^b r R_k^2 dr} \tag{28}$$

2) Величину u_2 ищем под видом суммы

$$u_2 = \sum_{k=1}^{k=\infty} S_k(t) R_k \tag{29}$$

расположенной по тем же функциям R_k.

3) Подставляем величину (29) в уравнение (7) и получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \left[S_k'' R_k - c^2 \left(R_k'' + \frac{1}{r} R_k' - \frac{R_k}{r^2} \right) S_k - N_k(t) R_k \right] = 0$$

но, в силу уравнения (10),

$$R_k'' + \frac{1}{r} R_k' - \frac{1}{r^2} R_k = - p_k^2 R$$

и предыдущее равенство примет вид

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} [S_k'' + c^2 p^2 S_k - N_k(t)] R_k = 0 \tag{30}$$

которое не иначе может иметь место, как если брать

$$S_k'' + c^2 p^2 S_k = N_k(t) \tag{31}$$

Это уравнение и послужит для определения S_k.

Так как при $t = 0$ должно быть

$$u_2 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0$$

то необходимо и величины S_k подчинить условиям, чтобы при $t = 0$ было

$$S_k = 0 \quad \text{и} \quad S_k' = 0 \tag{32}$$

и, значит, величина S_k будет

$$S_k = \frac{1}{cp_k} \int_0^t N(\xi) \sin cp_k (t - \xi)\, d\xi \tag{33}$$

причем

$$N(\xi) = \frac{\int_a^b F(\xi, r) R_k\, r dr}{\int_a^b R_k^2\, r dr} \tag{33'}$$

Формулы (29) и (33) и решают поставленный вопрос о вынужденных колебаниях цилиндра.

§ 122. В § 115 был отмечен тот частный случай, когда внешнее усилие приложено не в виде объемной силы $\rho F(r, t)$, а сосредоточено на внутренней поверхности и представляет некоторое давление, изменяющееся с течением времени t. Там же указан и способ решения в этом случае.

Итак, пусть сказанное давление, отнесенное на единицу площади внутренней поверхности цилиндра, есть

$$P = f(t)$$

тогда будем сперва брать функцию $\rho F(r, t)$ так, чтобы было

$$\begin{aligned} \rho F(q, t) &= \frac{P}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} f(t) \quad \text{для} \quad a < r < a + \lambda \\ F(r, t) &= 0 \qquad\qquad\quad \text{для} \quad a + \lambda < r < b \end{aligned} \tag{34}$$

причем λ предполагается весьма малою величиною.

Ясно, что при таком выборе нагрузки $\rho F(r, t)$ вся сила сосредоточена на слое, прилегающем к внутренней поверхности цилиндра и имеющем толщину λ, причем на элементарную призму, коей основание есть 1 и высота λ, действует усилие, равное P. Стоит только перейти к пределу $\lambda = 0$, и мы получим решение, относящееся к случаю давления P, сосредоточенного на внутренней поверхности.

При вышеуказанном выборе функции $\rho F(r, t)$ будет

$$N_k(\xi) \int_a^b r R_k^2 \, dr = \int_a^b F(\xi, \eta) R_k \, r dr = \frac{1}{\rho} \int_a^{a+\lambda} \frac{1}{\lambda} f(\xi) R_k \, r dr$$

а так как λ весьма малая величина, то последний интеграл равен

$$\frac{a}{\rho} f(\xi) R_k(a)$$

значит,

$$N_k(\xi) = \frac{a}{\rho} \frac{R_k(a)}{\int_a^b r R_k^2 \, dr} f(\xi)$$

и, следовательно,

$$S_k = \frac{a}{\rho c p_k} \frac{R_k(a)}{\int_a^b r R_k^2 \, dr} \int_0^t f(\xi) \sin c p_k (t - \xi) \, d\xi \tag{35}$$

Это выражение совершенно подобно тому, которое встречается вообще при изучении колебательных движений, и его свойства по отношению к „статическому“ или „динамическому“ характеру действия силы в зависимости от быстроты ее нарастания по сравнению с периодом основного „тона“ (соответствует значению $k=1$) системы, изложенные в главах I и VII, целиком применимы и к настоящему случаю.

На этом мы закончим теоретическую часть рассмотрения вопроса и перейдем к численному примеру, соответствующему случаю колебания стенок камеры 12-дюймовой пушки.

§ 123. Для наших орудий толщина стенок приблизительно равна калибру; следовательно, будет

$$b=3a$$

Вместе с тем, в виду плотного прилегания сильным натяжением колец и кожуха к трубе и между собою, можно для радиальных колебаний, в особенности при растяжении, считать стенку как бы сплошною, а не слойчатою.

Величина

$$h=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}$$

может быть принята равной $\frac{1}{3}$, т. е. $\lambda=\mu$; тогда полагая

$$ap=\alpha$$

будем иметь

$$bp=3\alpha$$

и уравнение (17) примет вид

$$[3\alpha I_1'(\alpha)+I_1(\alpha)]\,[9\alpha Y_1'(3\alpha)+Y_1(3\alpha)]-[3\alpha Y_1'(\alpha)+$$

$$+Y_1(\alpha)]\,[9\alpha I_1'(3\alpha)+I_1(3\alpha)]=0$$

Но по формулам (11) § 119 будет

$$I_1'(\alpha)=I_0(\alpha)-\frac{1}{\alpha}I_1(\alpha) \quad \text{и} \quad I_1'(3\alpha)=I_0(3\alpha)-\frac{1}{3\alpha}I_1(3\alpha)$$

$$Y_1'(\alpha)=Y_0(\alpha)-\frac{1}{\alpha}Y_1(\alpha) \quad \text{и} \quad Y_1'(3\alpha)=Y_0(3\alpha)-\frac{1}{3\alpha}Y_1(3\alpha)$$

Подставляя эти величины в предыдущее уравнение, получим

$$\begin{aligned}&[3\alpha I_0(\alpha)-2I_1(\alpha)][9\alpha Y_0(3\alpha)-2Y_1(3\alpha)]\\&-[3\alpha Y_0(\alpha)-2Y_1(\alpha)][9\alpha I_0(3\alpha)-2I_1(3\alpha)]=0\end{aligned}\qquad(36)$$

Таким образом, вычисление корней уравнения (17) приведено к вычислению корней уравнения (36) (см. табл. 20, стр. 480—481), в которое входят лишь такие величины, которые непосредственно даются таблицами.

Заметим, что в силу формул (24) при $\alpha=0$ первая часть уравнения (36) равна $-10\frac{2}{3}=-10.66\ldots$

Для решения уравнения (36) вычисляем значения первой его части при $\alpha=0,\ 0.5,\ 1,\ 1.5,\ \ldots$, затем сближаем пределы там, где происходит перемена знака. Это вычисление приложено в виде отдельной таблицы в конце книги.

Оказывается, что наименьший корень

$$p_1 a=0.516$$

Выражая все длины в сантиметрах и веса в килограммах, имеем

$$a=15.25;\qquad b=45.75;\qquad \rho=\frac{0.008}{981}$$

Тогда

$$c=550\,000\ \text{см/сек.}$$

так что период τ_1, соответствующий низшему тону, будет

$$\tau_1=\frac{2\pi}{cp_1}=\frac{2\pi\cdot 15.25}{0.516\cdot 550000}=\frac{1}{2960}\ \text{сек.}$$

Следовательно, продолжительность действия силы надо сравнивать с величиною τ_1, приблизительно равной $\frac{1}{3000}$ сек., и *малой* продолжительности надо почитать те силы, коих время нарастания мало по сравнению с $\frac{1}{3000}$ сек., а так как продолжительность нарастания давления в этом орудии при выстреле составляет не менее $\frac{1}{100}$ сек., то действие выстрела можно рассчитывать „статически“, ибо оно „медленное“ по сравнению с периодом радиальных колебаний стенок пушки.

Этим примером мы и закончим наш курс.

Решение

$$F(\alpha) = [3\alpha I_0(\alpha) - 2I_1(\alpha)]\ [9\alpha Y_0(3\alpha) - 2Y_1(3\alpha)]$$

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
α	$I_0(\alpha)$	$-2I_1(\alpha)$	$Y_0(\alpha)$	$-2Y_1(\alpha)$	3α	$I_0(3\alpha)$	$-2I_1(3\alpha)$	$Y_0(3\alpha)$	$-2Y_1(3\alpha)$
0.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.5	0.94	—0.48	—0.59	4.56	1.5	0.51	—1.12	0.66	1.17
1.0	0.76	—0.88	0.23	2.35	3.0	—0.26	—0.68	0.56	—1.10
1.5	0.51	—1.12	0.66	1.17	4.5	—0.32	0.46	—0.34	—0.89
2.0	0.22	—1.15	0.83	0.20	6.0	0.15	0.55	—0.44	0.61
2.5	—0.05	—1.00	0.78	—0.57	7.5	0.26	—0.27	0.22	0.78
3.0	—0.26	—0.68	0.56	—1.10	9.0	—0.09	—0.49	0.33	—0.38
3.5	—0.38	—0.27	0.25	—1.32	10.5	—0.24	0.08	—0.139	—0.72

Вычисление наименьшего

0.5	0.938	—0.484	—0.590	+4.567	1.5	0.512	—1.116	0.660	1.166
0.6	0.912	—0.573	—0.379	+3.893	1.8	0.340	—1.163	0.789	0.568

Приближенная величина корня $\alpha_1 =$

В промежутках, отмеченных в столбце XXI

Таблица 20

уравнения

$$-[3\alpha Y_0(\alpha) - 2Y_1(\alpha)]\ [9\alpha I_0(3\alpha) - 2I_1(3\alpha)] = 0$$

XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI
$3\alpha I_0(\alpha)$	$3\alpha I_0(3\alpha)$	$3\alpha Y_0(\alpha)$	$9\alpha Y_0(3\alpha)$	$3\alpha I_0(\alpha) - 2I_1(\alpha)$	$9\alpha Y_0(3\alpha) - 2Y_1(3\alpha)$	$3\alpha Y_0(\alpha) - 2Y_1(\alpha)$	$9\alpha I_0(3\alpha) - 2I_1(3\alpha)$	(XV)·(XVI)	(XVII)·(XVIII)	(XIX)—(XX) = $F(\alpha)$
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—10.67
1.41	2.30	—0.88	3.00	0.93	4.17	3.68	1.18	3.89	4.34	— 0.45
2.28	—2.28	0.69	5.04	1.40	3.94	3.04	—2.96	5.52	— 9.00	14.52
2.30	—4.32	3.00	—4.59	1.18	—5.48	4.17	—3.86	— 6.47	—16.12	9.65
1.32	2.70	5.00	—7.92	0.17	—7.31	5.20	3.25	— 1.24	16.80	—18.04
—0.38	5.85	5.85	4.95	—1.38	5.73	5.28	5.58	— 7.90	29.50	—37.40
—2.34	—2.43	5.04	10.30	—3.02	9.92	4.94	—2.92	—30.00	—14.50	—15.50
—4.00	—7.56	2.62	— 4.38	—4.27	—5.10	1.30	—7.48	21.8	— 9.73	31.53

корня $0.5 < \alpha_1 < 1.00$:

1.406	2.302	—0.885	2.970	0.922	4.136	3.682	1.186	3.820	4.37	—0.550
1.642	1.835	—0.682	4.260	1.069	4.828	3.211	0.673	5.160	2.160	3.000

$$0.50 + \frac{0.550}{3.550} \cdot \frac{1}{10} = 0.50 + 0.016 = 0.516$$

толстою чертою, лежат корни.

ЗАМЕЧЕННЫЕ СУЩЕСТВЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	*Строка*	*Напечатано*	*Должно быть*
21	10 сверху	$t(A+Bt+Pt^l)$	$t(A+Bt+\ldots+Pt^l)$
64	1 снизу	$F_{ij}=F_{ji}\ \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots,k \\ i=1,2,\ldots,k \end{pmatrix}$	$F_{ij}=F_{ji}\ \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots,k \\ j=1,2,\ldots,k \end{pmatrix}$
172	7 сверху	$=\frac{e^{-bt}}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a^3\alpha^2 t}\cos\alpha z\,[\ldots]\,dzd\alpha$	$=\frac{e^{-bt}}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha z\,[\ldots]\,dzd\alpha$
192	11 „	$\int_0^{2l}\sin\xi d\xi$	$\int_0^{2l}\sin^2\omega_i\xi d\xi$
200	10 „	$X_i^{\mathrm{IV}}-k_i^4X=0$ и $X_j^{\mathrm{IV}}-k_j^4X=0$	$X_i^{\mathrm{IV}}-k_i^4X_i=0$ и $X_j^{\mathrm{IV}}-k_j^4X_j=0$
231	10 „	$r\int_{\theta_j-\varepsilon}^{\theta_j+\varepsilon}(\cdots)\,d\theta$	$r\int_{\theta_j-\varepsilon}^{\theta_j+\varepsilon}(\cdots)\,d\theta$
242	9 „	$\mathscr{E}\frac{F(\lambda)\varphi(\lambda)e^{\lambda\alpha}}{F(\lambda)}\mathscr{E}\varphi(\lambda)e^{\lambda x}=0$	$\mathscr{E}\frac{F(\lambda)\varphi(\lambda)e^{\lambda\alpha}}{F(\lambda)}=\mathscr{E}\varphi(\lambda)e^{\lambda x}=0$
246	2 снизу	$y^{n-1}=\eta^{n-1}$	$y^{(n-1)}=\eta^{n-1}$
256	5 „	$\frac{dx}{dt}=$	$\frac{dx_2}{dt}=$
288	11 сверху	$\frac{n\pi a_n}{}=$	$\frac{n\pi a_n}{l}=$
317	5 сверху	$\frac{\partial^2 z_2}{\partial t^2}+b^2\frac{\partial^4 z^2}{\partial x^4}=f(x,t)$	$\frac{\partial^2 z_2}{\partial t^2}+b^2\frac{\partial^4 z_2}{\partial x^4}=f(x,t)$
330	6 снизу	первая	правая
333	10 „	$=\frac{2P}{\rho sl}\pi\sin kt$	$=\frac{2P}{\rho sl}\sin\frac{\alpha n\pi}{l}\sin kt$
354	7 „	$\pi=\sqrt{\frac{gql}{p}}$	$\mu=\sqrt{\frac{gql}{p}}$
380	9 „	$\beta=\frac{h}{a^2}-\frac{1}{a^2}\sqrt{h^2-a^2(b^2+m^2)}$	$\beta=-\frac{h}{a^2}-\frac{1}{a^2}\sqrt{h^2-a^2(b^2+m^2)}$
443	3 сверху	$y=0$	$y'=0$
475	6 „	$-[ap_kI_1'(ap_k)+hY_1(ap_k)]Y_1(p_kr)$	$-[ap_kI_1'(ap_k)+hI_1(ap_k)]Y_1(p_kz)$

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Академии Наук СССР

*

Технический редактор *А. В. Смирнова*
Корректоры *Г. А. Закс* и *А. Д. Копысова*

*

РИСО АН СССР № 2918. Подписано к печати 24/V 1949 г. Печ. л. 30 1/4. Уч.-изд. л. 37 1/2. М-09435. Тираж 3000. Зак. 1394.

1-я тип. Издательства Академии Наук СССР.
Ленинград, В. О. 9-я лин., 12