АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СОБРАНИЕ ТРУДОВ

АКАДЕМИКА

А. Н. КРЫЛОВА

IV

БАЛЛИСТИКА

БИБЛИОТЕКА
Ин-та механики
Академии Наук СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА — ЛЕНИНГРАД
1937

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Июнь 1937 г.

Непременный секретарь академик *Н. Горбунов*

Редактор издания акад. А. Н. Крылов

Технический редактор С. А. Шабуневич. — Ученый корректор Е. В. Ростовцева

Сдано в набор 11 ноября 1936 г. — Подписано к печати 13 июня 1937 г.

IV + 444 стр. (68 фиг.) + 6 вкл.

Формат бум. 72 × 110 см. — 29 3/4 печ. л. — 31.32 уч.-авт. л. — 42115 тип. зн. — Тираж 1500

Ленгорлит № 3101. — АНИ № 1467. — Заказ № 372

Типография Академии Наук СССР. Ленинград, В. О., 9 линия, 12.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
О вращательном движении продолговатого снаряда во время полета . .	1
О некоторых приемах приближенного интегрирования уравнений вращательного движения продолговатого снаряда	303
Заметки по баллистике	335
Некоторые замечания о крешерах и индикаторах	373
Анализ диаграммы давления в цилиндре компрессора, снятой индикатором Виккерса	413
О продольных колебаниях орудия	423

О ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ПРОДОЛГОВАТОГО СНАРЯДА ВО ВРЕМЯ ПОЛЕТА

Предисловие

Меткость стрельбы всецело зависит от правильности полета снаряда, правильность же полета обеспечивается правильностью того вращательного, движения, которое сообщается снаряду нарезами.

В настоящем исследовании, произведенном по поручению Научно-технического комитета морских сил СССР, вопрос о вращательном движении снаряда подвергнут мною подробному теоретическому изучению, а затем приведены описание и результаты опытов, произведенных в Англии в 1919 г. и опубликованных в «Записках Лондонского королевского общества».

Чтобы сделать это исследование более доступным военным инженер-технологам и артиллеристам, я предпосылаю ему введение, в котором изложены все те необходимые сведения из теоретической механики, которыми приходится пользоваться, вместе с тем я стараюсь ограничиваться применением лишь самых основных методов высшего анализа, не выходящих за пределы обычных курсов высших военно-морских училищ.

Все выводы даются нарочно с необходимою подробностью, чтобы чтение этого исследования не представляло затруднений.

Таким образом предлагаемое исследование содержит: введение и три главы.

Введение заключает, как уже сказано, изложение необходимых сведений из теоретической механики. Я начинаю с понятия о координатах в пространстве и их преобразованиях, необходимых при определении положения твердого тела. Я подробно останавливаюсь на соотношениях между косинусами углов между осями, на Эйлеровых углах и их выборе, чтобы все эти формулы иметь собранными в одном месте, так чтобы читателю не приходилось наводить справки в других сочинениях.

Затем излагаются необходимые сведения из кинематики твердого тела и выводятся выражения проекций угловой скорости на подвижные и неподвижные оси, проекций линейной скорости точки твердого тела, связь между проекциями угловой скорости, Эйлеровыми углами и их производными.

После этой кинематической части сперва даются необходимые сведения из динамики системы материальных точек и твердого тела, приводится начало Даламберта и затем первая и вторая Лагранжевы формы дифференциальных уравнений движения всякой системы. Из этих уравнений получаются закон количеств движения (движения центра тяжести системы) и закон моментов количеств движения, после чего составляются дифференциальные уравнения движения твердого тела как в форме Эйлера, так и в других видах.

В заключение дается один чисто математический параграф, в котором показывается способ изменения постоянных произвольных в применении к линейному дифференциальному уравнению второго порядка с последним членом, так как такого рода уравнения постоянно встречаются в этом исследовании.

В главе I излагается *учение о вращательном движении снаряда на небольшом участке его траектории, который можно принять за прямолинейный.*

Здесь сперва приводятся исследования Н. В. Майевского, который первый начал изучать теоретически вращательное движение снаряда еще в 1865 г. Результатами исследований Майевского пользуются еще и по сие время, и они перешли из его «Ballistique extérieure», изданной в 1872 г., почти во все руководства по баллистике.

Разбор этих исследований обнаруживает в них некоторые существенные недостатки, которые, однако, легко устраняются надлежащим анализом и преобразованием формул.

Затем дается разбор теории Н. А. Забудского, изложенной в его руководстве по «Внешней баллистике», изданном в 1895 г. Этот разбор показывает, что выводы, полученные Забудским, неправильны и основаны на ошибочных допущениях, устранив которые мы получаем те же самые результаты, которые следуют из теории Майевского при правильном ее изложении.

В заключении главы рассматривается условие устойчивости снаряда при полете и наименьшая крутизна нарезов, обеспечивающая эту устойчивость.

Во всей этой главе положение оси снаряда определяется углом нутации, т. е. углом, составляемым осью снаряда с касательной к траектории, и углом прецессии, т. е. двугранным углом, составляемым плоскостью, проведенной через ось и касательную, с плоскостью стрельбы.

Глава II. *Вращательное движение снаряда на криволинейной траектории.* В этой главе приводится прежде всего вывод, данный Майевским, двух дифференциальных уравнений, связывающих изменения угла нутации и угла прецессии с быстротою изменения угла наклонения касательной.

Эти уравнения получаются Майевским из *кинематических* соображений, не считаясь с динамикою, кроме того они заключают предположение, что угол нутации (считаемый от касательной) остается постоянным. Это

допущение на деле места не имеет, поэтому данные Майевским уравнения, которые вошли затем во многие руководства по баллистике, в том числе и в руководство Cranz'a, не верны. Забудский выводит те же уравнения аналитически из своей ошибочной теории, по которой также оказывается, что угол нутации остается постоянным. Способов, примененных Майевским и Забудским для интегрирования этих уравнений, не было надобности разбирать, ибо на практике они привели бы к весьма громоздким вычислениям, поэтому рассмотрен только способ де Спарра, чтобы исследовать, к каким заключениям можно бы придти, исходя из уравнений Майевского.

Этот способ приведен в «Баллистике» Забудского, но интегрирование не доведено до конца, так как те квадратуры, к которым вопрос приведен, не выполнены.

Квадратуры, к которым вопрос приводится, встречаются во многих прикладных науках: под знаком определенного интеграла находится произведение функции монотонной (т. е. изменяющейся все время в одну сторону) и синуса или косинуса. Разность пределов интеграла заключает *большое* число периодов, и первая функция такова, что ее изменение в течение одного периода *малое*. Пользуясь этою особенностью, показано, как выполнить эти квадратуры в конечном виде, с достаточным приближением для любой функции, обладающей указанными свойствами, и довести таким образом интегрирование уравнений Майевского до конца.

В 1919 г. в «Записках Геттингенского научного общества» появилась статья проф. Noether'a под заглавием «Über analytische Berechnung der Geschosspendelungen», причем Noether указывает, что он имел в своем распоряжении рукопись проф. A. Sommerfeld'a по этому вопросу.

Дав полный перевод этой статьи, пришлось отметить и ее существенный недостаток: все исследование основано на предположении, что ось снаряда и главный момент количеств движения совпадают. Между тем такого совпадения нет, и все исследование Noether'a не имело бы никакого значения, если бы не имело место одно обстоятельство, на которое он не обратил внимания, но которое и является самым существенным: вектор, изображающий главный момент количеств движения, описывает около оси снаряда, как среднего своего положения, весьма быстрое коническое движение. Составляя свои уравнения, Noether все эти быстро изменяющиеся периодические члены заранее отбросил, и таким образом получил то, что в астрономии называют «вековым движением» — оно же соответствует движению оси снаряда. Но по сути дела метода не внесла ничего нового, так как если ее обобщить для любого закона сопротивления и принять изменение плотности воздуха с высотою, то мы получим те же результаты, которые следуют из теории де Спарра.

Нетрудно видеть, что вращательное движение снаряда, иначе колебания его оси, представляет аналогию с качкою корабля. В самом деле, когда корабль совершает размахи боковой и килевой качки, то его мачта описывает коническое движение около среднего своего положения, которое

подобно коническому движению оси снаряда вокруг среднего ее положения.

В своих статьях о качке корабля, напечатанных в 1896 и 1898 гг., я ввел в рассмотрение особый выбор Эйлеровых углов, сделанный так, что когда мачта корабля *мало* уклоняется от среднего своего положения, хотя бы она ходила вокруг него в круговую, все три Эйлеровы угла оставались малыми.

Этот выбор Эйлеровых углов доставил возможность решить вопрос о качке корабля в самом общем виде.

Естественно было применить подобный прием и к исследованию движения снаряда и, вместо углов нутации и прецессии, ввести другие углы, обозначенные мною через α и β. Угол α есть угол между осью снаряда и плоскостью стрельбы, угол β есть угол между касательной и проекцией оси снаряда на плоскость стрельбы.

Введя в рассмотрение эти углы, я беру вопрос «ab ovo», т. е. составляю, пользуясь второю Лагранжевой формой, дифференциальные уравнения движения, принимая во внимание и происходящее с течением времени понижение касательной к траектории.

Затем перехожу к рассмотрению движения на прямолинейном участке траектории, для чего стоит только принять в общих уравнениях, что касательная неподвижна, при этом получаются вновь результаты, уже полученные в главе I.

После этого рассматривается движение на криволинейной траектории. Само собою разумеется, что здесь нет надобности прибегать к каким-нибудь дополнительным кинематическим выводам или к уравнениям Майевского, так как требуемые уравнения следуют из общих уравнений движения.

Исследование этих уравнений показывает, что интегрирование их приводится к интегрированию уравнения вида

$$\frac{d^2v}{ds^2} + (k^2 - p(s))v = f(s) \tag{1}$$

где k^2 есть некоторая постоянная, $p(s)$ и $f(s)$ — заданные функции переменной s, причем разность $k^2 - p(s)$ остается все время положительной.

Уравнению вида (1) посвящено множество исследований самых знаменитых математиков, но для нашей цели этими исследованиями воспользоваться нельзя по следующим причинам: 1) в них предполагается, что функции $p(s)$ и $f(s)$ заданы аналитически, в нашем же случае эти функции заданы графически или таблично; 2) область изменения переменной независимой предполагается неограниченной (от $-\infty$ до $+\infty$), или даже эта переменная предполагается комплексной, в нашем случае переменная s, пропорциональная времени, изменяется в тесных пределах времени полета снаряда; 3) в общих исследованиях редко обращается внимание на практическую, числовую исполнимость предлагаемых методов, в нашем случае

получение численных достаточной точности результатов есть все, что от решения требуется.

Я развиваю подробно приближенный способ решения уравнения (1) и поясняю его численным примером, приводя все подробности вычисления, и строю затем чертеж, показывающий наглядно движение оси снаряда во все время полета.

Уже самое сличение наших точных, полученных без всяких допущений, дифференциальных уравнений обнаруживает те пробелы, которые находятся в уравнениях Майевского, Спарра, Noether'a и пр.: оказывается, что в них исчезли так называемые «инерционные» члены, а сохранились только члены «гироскопические» и члены, происходящие «от опрокидывающей пары». Между тем подсчет показывает, что члены «инерционные» составляют до 30% от суммы прочих, но замечательно, что, несмотря на это, общий характер движения, получаемый из вышеуказанных уравнений, когда их интегрирование доведено до конца правильно, оказывается близким к действительности.

Попутно я показываю, каким образом на основании полученных результатов можно рассчитать деривацию, и делаю примерный расчет, чтобы показать на числах применение общих формул, но этот вопрос здесь затронут лишь предварительно и, так сказать, мимоходом, — он требует гораздо более подробного и обстоятельного изучения.

В главе III дается перевод статьи, помещенной в томе 221 «Записок Лондонского королевского общества» (Philosophical Transactions of the Royal Society of London), в которой авторы: R. H. Fowler, E. G. Gallop, C. H. Lock и H. W. Richmond описывают произведенные в 1919 г. опыты над изучением вращательного движения снаряда стрельбою по картонным щитам и приводят результаты и выводы из этих опытов. Кроме того, они излагают математическую теорию вращательного движения снаряда.

Я привожу все, что касается опытов и их результатов, но математическую их теорию опускаю, ибо авторы делают неудачный выбор тех координатных параметров, коими определяется положение оси снаряда, и благодаря этому получают уравнения весьма сложные и неудобные, причем эта сложность вовсе не вызывается сущностью дела.

Сличение наблюденных результатов с нашими численными примерами показывает полное совпадение характера движения оси снаряда наблюденного и вычисленного.

Таким образом изложенный в этой книге способ расчета вращательного движения снаряда во время полета доставляет величину угла отклонения оси снаряда от касательной к траектории и, следовательно, дает суждение о том, в какой мере снаряд данного типа устойчив при заданной крутизне нарезов при различных условиях стрельбы.

При пояснении общих теоретических выводов численными примерами, я намеренно не брал действительно существующих снарядов и стрельбы из действительно существующих в нашей артиллерии орудий, а взял

идеальный воображаемый снаряд, так что эти численные примеры отнюдь не являются исследованием какого-либо реального случая, а служат лишь образцами того, как надо располагать и производить относящиеся сюда вычисления; благодаря этому эта книга может быть предоставлена в общее пользование и может служить учебным пособием в специальных учебных заведениях, исследования же действительных снарядов составляют предмет ведения Научно-технического комитета, и им нет места в этой книге, предназначенной для общего пользования.

Введение

§ 1. При рассмотрении вопроса о вращательном движении снаряда нам постоянно придется пользоваться теми общими формулами, уравнениями и законами, которые выводятся в аналитической механике, в учении о движении твердого тела.

Чтобы читателю не приходилось наводить справки в различных сочинениях, в которых часто для той же самой величины приняты различные обозначения, разбираться в разнообразных приемах вывода формул и решения уравнений, — в этом введении даны все те выводы теоретической механики, которые нам будут необходимы.

§ 2. Движением тела называется перемена им своего места в пространстве, совершающаяся с течением времени последовательно и непрерывно.

То представление, которое мы имеем о пространстве, не дает возможности отличить одно его место от всякого другого, поэтому для суждения о движении тела определяют положение, им во всякий заданный момент времени занимаемое по отношению к другому телу, принимаемому за неподвижное.

При изучении движения снаряда, вообще говоря, можно считать за неподвижное тело земной шар, а значит, и всякое тело, неизменно с землею связанное. Лишь при стрельбе на весьма большие дистанции приходится принимать во внимание «поправку на вращение земли», при рассмотрении же вращательного движения снаряда можно с движением земли не считаться, ибо оно не оказывает какого-либо практически заметного влияния.

§ 3. Положение тела считается определенным, если известно положение любой его точки.

Для определения положения точки, мы будем пользоваться исключительно прямолинейными прямоугольными координатами, т. е. будем считать, что с тем телом, по отношению к которому положение точки определяется, связаны неизменно три взаимно перпендикулярные плоскости xoy, yoz, zox,

которые своим пересечением дают три взаимно перпендикулярные прямые xx', yy', zz' и точку O (фиг. 1). От этой точки на каждой прямой надо различать два взаимно противоположных направления ox и ox', oy и oy', oz и oz', из которых на каждой из этих трех прямых одно принимается за положительное, обратное ему — за отрицательное. Эти плоскости называются плоскостями координат, сказанные прямые — осями координат и точка O — началом координат.

Ясно, что после того как на каждой из осей положительное направление избрано, то из восьми «трех прямоугольных пространств» выделится одно $zoxy$, все три ребра которого направлены по положительной части соответствующей оси. Для наглядности и ясности чертежа, мы всегда будем изображать только это пространство. Положим сперва, что в нем лежит какая-либо точка M. Ее положение будет вполне определено, если задать ее расстояния до каждой из плоскостей координат, т. е. MP до плоскости zoy, MQ до плоскости zox и MR до плоскости xoy. Очевидно, что этими расстояниями определяются соответственно им равные отрезки OP, OQ, OR на координатных осях. Само собою разумеется, что для измерения этих расстояний или отрезков должна быть принята какая-нибудь единица, мы примем в дальнейшем для всех числовых расчетов *метр*.

Отрезки OP, OQ и OR называются координатами точки M и условно обозначаются, соответственно, буквами x, y, z, так что

$$x = OP;\ y = OQ;\ z = OR$$

Но ясно, что точка может лежать и в любом из восьми координатных углов или пространств; так, напр., возьмем точку M', ее координаты OP', OQ' направлены от начала O в положительную сторону по оси ox и оси oy, отрезок же OR' направлен по оси oz', т. е. в ту сторону, куда откладываются отрицательные значения z. Чтобы это обстоятельство указать в формулах, величине OR' приписывают знак —.

Таким образом, если, напр., длина $OP = 2$ м, длина $OQ = 3$ м, длина $OR' = 3.5$ м, то пишут, что координаты точки M', соответственно, равны:

$$x = +2 \text{ м}$$
$$y = +3 \text{ м}$$
$$z = -3.5 \text{ м}$$

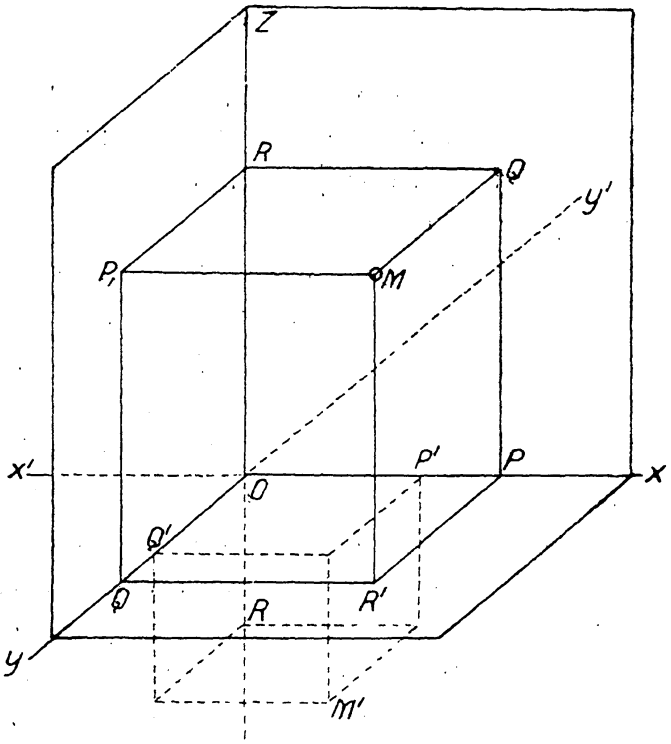
Когда единица длины избрана раз навсегда, то понятно, что нет надобности постоянно писать ее наименование, не пишут также для сокра-

щения и знака + перед положительными величинами, так что координаты точки M' можно при таком условии писать просто:

$$x = 2; \quad y = 3; \quad z = -3.5$$

и само собою понятно, где лежит точка M'', координаты которой:

$$x = -3, \quad y = -7, \quad z = 5$$



Фиг. 1.

Хотя все математические операции производятся над числами или буквами, под которыми также разумеются числа, но надо всегда помнить, что и при сделанном условном начертании координаты выражаются в определенных единицах длины, и если бы, напр., за единицу длины мы приняли не метр, а сантиметр, то последние три числа стали бы:

$$x = -300; \quad y = -700; \quad z = 500$$

(опускаем слово сантиметров).

Короче говоря, координаты x, y, z имеют «размерность» длины.

Отношение координаты, напр., x к определенной длине представляет собою *число отвлеченное*, не зависящее от выбора той единицы меры,

в которой выражены x и a. Так, если бы a была длина в 6 м, то в нашем примере отношение

$$\frac{x}{a} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

сохранило бы свое значение неизменным, когда за единицу для измерения длин был бы взят, вместо метра, напр., сантиметр. Мы имели бы тогда:

$$\frac{x}{a} = -\frac{300}{600} = -\frac{1}{2}$$

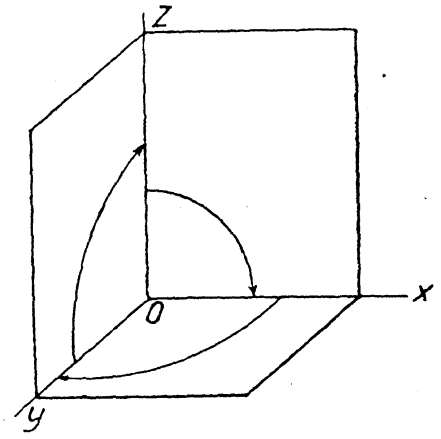
В эти подробности приходится потому входить, что в прикладных науках можно указать неисчислимое число ошибок, происшедших от того, что это или подобное обстоятельство упускается из виду.

§ 4. При выборе осей координат необходимо обращать внимание на следующее обстоятельство: мы будем иметь множество формул, в которых буквы x, y, z входят симметрично. Ясно, что выкладки упростятся (примерно в 3 раза), если распорядиться так, что как только одна такая формула получена, можно было бы написать другие две, ей подобные, не повторяя выкладки, а просто сделав в окончательной формуле круговую перестановку букв, т. е. x, y, z на y, z, x, на z, x, y. Обыкновенно те величины, к которым подобные формулы относятся, связаны с направлением некоторого вращения, и с переменою этого направления изменяют свой знак. Чтобы при вышеуказанной круговой замене не получать формул с неверными знаками, надо поступать так: избрать какое-нибудь направление вращения за положительное, напр. то, которое происходит «по часовой стрелке», тогда надо, чтобы положительная ось ox переходила в положительную ось oy вращением на угол $\frac{\pi}{2}$ или 90° в положительном направлении, т. е. ось oy лежала от оси ox на 90° «вправо». Ось oz, т. е. положительное ее направление, надо тогда брать так, чтобы, смотря от ее «конца» на начало O (как смотрят на часы), видеть ось y вправо на 90° от оси ox, т. е. в сторону положительного вращения в данном случае по часовой стрелке.

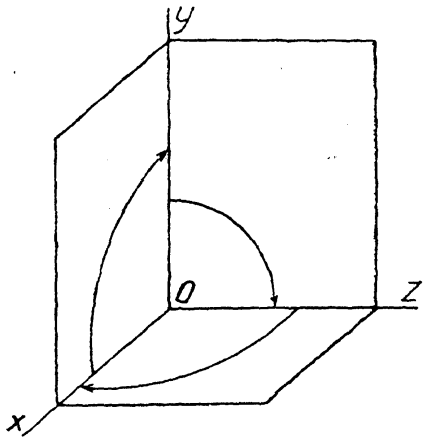
Точно так же при указанной круговой замене надо, чтобы положительная ось y-ков, т. е. oy, при повороте в плоскости zoy по часовой стрелке на 90°, переходила в ось oz и чтобы это вращение именно таковым представлялось, когда смотреть по положительной части оси ox с ее «конца» на начало O, т. е. на плоскость yoz, как смотрят на часы. Совершенно так же, смотря по положительной оси oy с «конца» на начало O, мы будем видеть ось ox «вправо» на 90° от оси oz.

Такие координатные оси будем называть *правыми* (фиг. 2а, 2б).

Если бы за положительное направление вращения принять обратное, или, как говорят, «против часовой» стрелки, то оси координат надо было бы

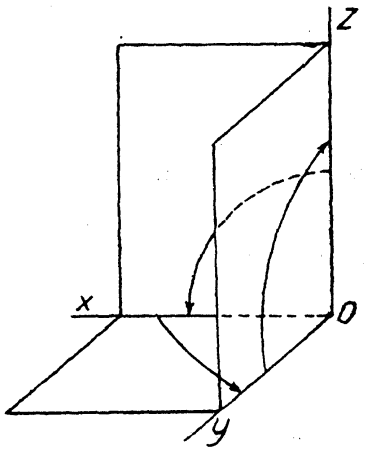


Фиг. 2а.

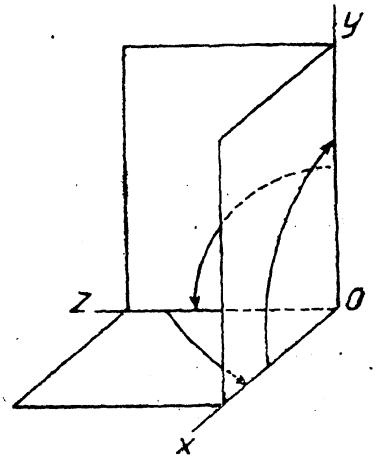


Фиг. 2б.

располагать так, чтобы ось *oy* была на 90° «влево» от оси *ox*, ось *oz* — на 90° влево от *oy* и *ox* — на 90° влево от *oz*, когда смотреть на соответствующую плоскость с «конца» оси, к этой плоскости перпендикулярной. Такая



Фиг. 2в.

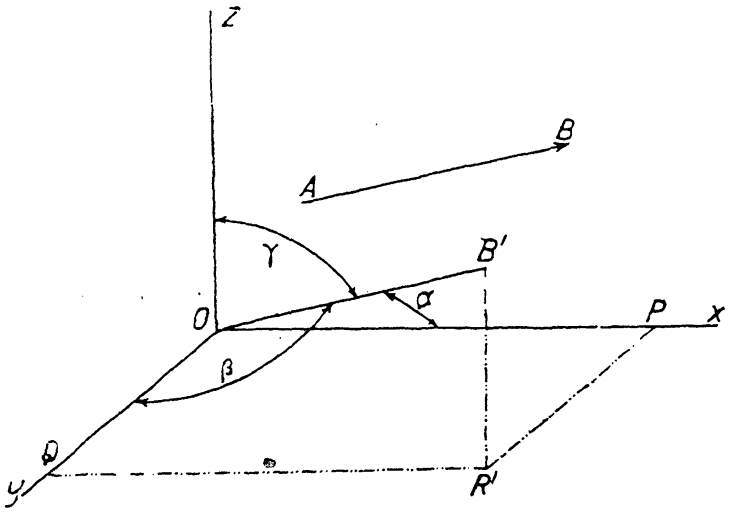


Фиг. 2г.

система координатных осей называется «*левой*» (фиг. 2в и 2г). Безразлично, какою системою пользоваться — «правою» или «левою», необходимо только иметь в виду, что при «правой» системе надо все углы и вращения считать положительными по часовой стрелке, при «левой» — против часовой стрелки, тогда все формулы будут одинаковы, если же этого не придерживаться, то легко сделать ошибку в знаке.

§ 5. Кроме положения точки, надо уметь определять направление прямой в пространстве.

Пусть дана прямая AB, на которой точка A принята за начало и положительное направление счета длин идет от A к B; это кратко выражают словами: прямая, направленная от A к B, или имеет направление от A к B. Чтобы задать это направление, воображают, что из начала координат проведена прямая OB', параллельная AB и направленная в ту же сторону. Направление этой прямой определяется заданием косинусов углов, составляемых прямою OB' с осями координат ox, oy, oz. Эти углы надо



Фиг. 3.

считать для правых осей по часовой стрелке от направления прямой до соответствующей оси. Пусть они будут α, β, γ; тогда задают $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$. При этом необходимо заметить соотношение

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{1}$$

которое всегда должно иметь место.

Вместе с тем, если длина $OB' = l$, то будет по величине и по знаку:

$$\begin{aligned} x &= l\cos\alpha \\ y &= l\cos\beta \\ z &= l\cos\gamma \end{aligned} \tag{2}$$

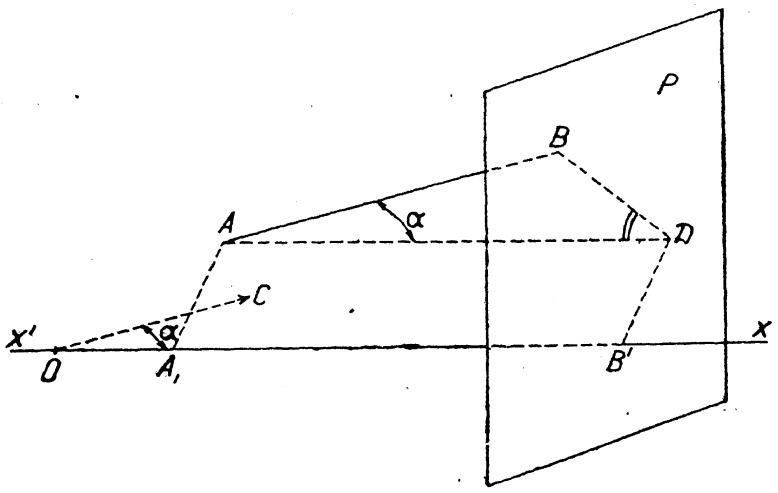
где x, y, z суть координаты точки B'. Построив параллелопипед, коего OB' диагональ и коего ребра направлены по осям координат, легко видеть, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \tag{3}$$

поэтому, взяв сумму квадратов равенств (2), по сокращении на l^2, получим равенство (1).

§ **6.** Нам постоянно придется пользоваться так называемою *теоремою проекций*.

Положим, что дана какая-либо ось Ox (фиг. 4) и на ней какая-либо точка O принята за начало и направление ox принято за положительное, пусть также дан отрезок прямой, на нем точка A принята за начало, точка B — за конец, так что направление отрезка есть от A к B. Проведя через точки A и B плоскости, перпендикулярные оси ox, получим в пересечении



Фиг. 4.

с осью точки A_1 и B_1, называемые проекциями точек A и B на ось ox. Эти две точки A_1 и B_1 определяют на оси отрезок, который будет по величине и по знаку равен разности $OB_1 - OA_1$, т. е. абсолютная длина отрезка будет A_1B_1, знак же будет положительный, если точка B_1 лежит от A_1 со стороны положительных x, в нашем случае вправо, и отрицательным в обратном случае.

Проведем через точку O прямую OC, или, как говорят, луч OC, параллельный AB, и обозначим через α — угол, составляемый им с осью ox. Этот угол может принимать все значения от 0 до 2π.

Проведем через точку A прямую AD, параллельную оси ox, до пересечения в точке D с плоскостью P, тогда, если угол $\alpha < \frac{\pi}{2}$, из прямоугольного треугольника BAD следует

$$AD = A_1B' = AB \cdot \cos\alpha$$

Если же будет $\pi > \alpha > \frac{\pi}{2}$, то в треугольнике BAD угол A будет равен $\pi - \alpha$, и длина AD будет

$$AD = AB \cdot \cos(\pi - \alpha) = AB \cdot \cos\alpha$$

но легко видеть, что в этом случае проекция прямой AB будет отрицательная, т. е. будет $A_1B' = -AD$, и следовательно, по величине и по знаку будет

$$A_1B' = AB \cdot \cos\alpha$$

Нетрудно убедиться в общности этой формулы при всяком значении угла α.

Обозначая длину AB через l, эту формулу пишут сокращенно так:

$$l_x = l\cos(\widehat{lx}) \tag{1}$$

Положим теперь, что имеем в пространстве замкнутую ломаную линию $ABCDEA$, причем направления сторон ее указаны стрелками (фиг. 5), так что начало стороны AB есть A, начало стороны BC есть B и т. д., начало стороны EA есть E и конец этой стороны есть A.

Проектируя эту ломаную на ось ox, получим точки:

$$A_1, \quad B_1, \quad C_1, \quad D_1, \quad E_1$$

и, соответственно сторонам ломаной, проекции их:

$$A_1B_1, \quad B_1C_1, \quad C_1D_1, \quad D_1E_1 \quad \text{и} \quad E_1A_1$$

Ясно, что если бы движущаяся точка обходила ломаную как показывают стрелки, то проекция этой точки на ось ox, начав свое движение от точки A_1, прошла бы последовательно через точки B_1, C_1, D_1, E_1 и вернулась бы в A_1, т. е. расстояние ее до этой точки после полного обхода равно нулю, с другой же стороны это расстояние равно алгебраической сумме (т. е. принимая во внимание знаки)

$$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 + E_1A_1$$

Таким образом будет

$$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 + E_1A_1 = 0 \tag{2}$$

т. е. *алгебраическая сумма проекций сторон замкнутой ломаной линии на любую ось равна нулю.*

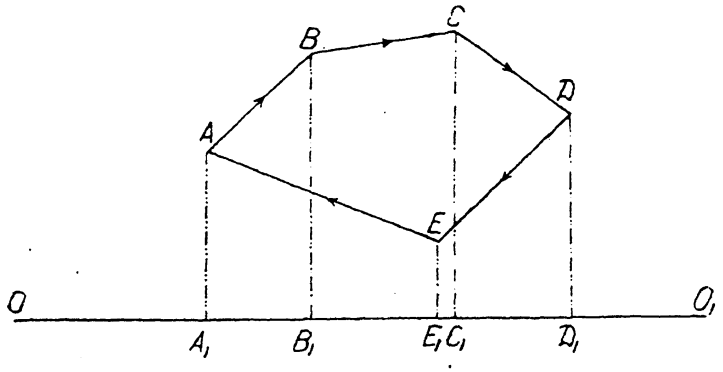
Изменим направление стороны EA на обратное, т. е. AE, тогда отрезок AE называют *замыкающей* ломаной $ABCDE$.

Ясно, что с переменою направления стороны EA на обратное AE и направление его проекции меняется на обратное, т. е. проекция меняет знак, так что

$$-E_1A_1 = A_1E_1 = \text{проекции } AE$$

Тогда из формулы (2) следует такая:

$$(3) \qquad A_1E_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1$$



Фиг. 5.

Каждую из сторон ломаной называют ее *составляющей*, и предыдущее равенство выражает такую теорему проекций:

Проекция замыкающей какой угодно ломаной линии на любую ось равна алгебраической сумме проекций, ее составляющих, на ту же ось.

Обозначим через $l_1, l_2, \ldots l_k$ — длины сторон какой-либо ломаной линии и через L — длину замыкающей, тогда высказанная теорема выразится такою формулой

$$(4) \qquad L\cos(\widehat{Lx}) = l_1\cos(\widehat{l_1x}) + l_2\cos(\widehat{l_2x}) + \ldots + l_k\cos(\widehat{l_kx})$$

причем все длины $L, l_1, l_2, \ldots l_k$ берутся по абсолютной величине и считаются положительными, знаки проекций определяются знаками косинусов углов, считаемых как указано выше.

Выведем, пользуясь теоремою проекций, выражение косинуса угла между двумя прямыми и вообще двумя направлениями в пространстве.

Пусть эти направления (фиг. 6) суть OA и OB, определяемые, соответственно, косинусами углов с осями координат:

$$OA: \quad \cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \cos\gamma$$
$$OB: \quad \cos\alpha_1, \quad \cos\beta_1, \quad \cos\gamma_1$$

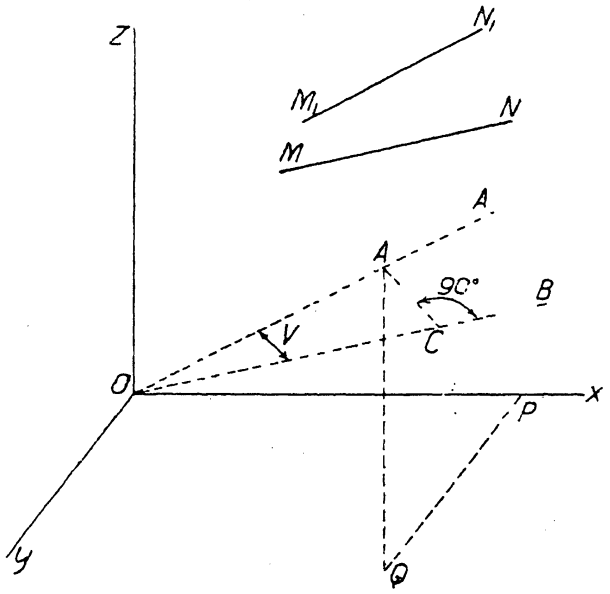
Возьмем на луче OA точку A и построим ее координаты:

$$x = OP, \quad y = PQ, \quad z = QA$$

тогда можно рассматривать OA как замыкающую ломаной $OPQA$.

Проектируем OA на OB, опустив перпендикуляр AC, тогда, обозначая длину OA через l и угол AOB через V:

$$l \cdot \cos V = OC$$



Фиг. 6.

С другой стороны, проектируя ломаную, имеем

$$OC = OP \cdot \cos\alpha_1 + PQ \cdot \cos\beta_1 + QR \cos\gamma_1$$

но

$$OP = l \cdot \cos\alpha; \quad PD = l\cos\beta; \quad QR = l\cos\gamma$$

подставляя и сокращая на l, получаем

$$\cos V = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 \tag{5}$$

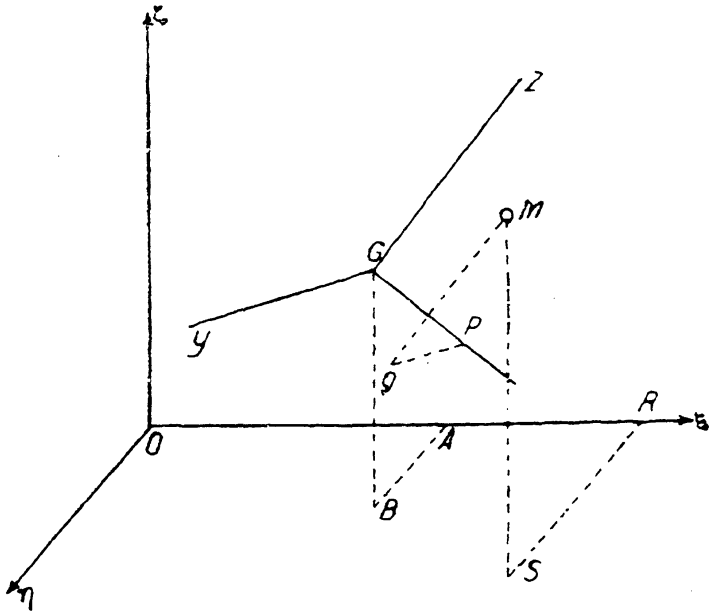
Отсюда следует условие перпендикулярности двух прямых в пространстве:

$$\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 = 0 \tag{6}$$

§ 7. Перейдем теперь к определению положения твердого тела. Для этого выбирают три взаимно перпендикулярные оси в пространстве, пра-

вые или левые — все равно. Пусть эти оси будут $o\zeta$, $o\xi$, $o\eta$; в теле принимают какую-либо точку G за начало и проводят через нее три оси координат Gx, Gy, Gz такие же, какие взяты в пространстве, т. е. правые, если в пространстве взяты оси правые, и левые, если в пространстве взяты оси левые.

Возьмем в теле какую-либо точку M, ее координаты относительно осей $Gxyz$ обозначим через x, y, z; эта же точка по отношению к осям $O\xi\eta\zeta$ имеет координаты ξ, η, ζ, требуется найти зависимость между величинами x, y, z и величинами ξ, η, ζ.



Фиг. 7.

Положение осей $Gxyz$ относительно осей $O\xi\eta\zeta$ задается координатами точки G, именно (фиг. 7):

$$\xi_0 = OA,\ \eta_0 = AB \quad \text{и} \quad \zeta_0 = BG$$

направление же каждой из осей — косинусами углов, которые эта ось составляет с $o\xi$, $o\eta$, $o\zeta$. Эти косинусы обозначим как показывает следующая таблица:

	x	y	z
ξ	a_1	a_2	a_3
η	b_1	b_2	b_3
ζ	c_1	c_2	c_3

Библиотека Академии наук СССР

так что, напр.:

$$\cos(\widehat{x\xi}) = \cos(\widehat{\xi x}) = a_1$$
$$\cos(\widehat{x\eta}) = \cos(\widehat{\eta x}) = b_1$$

и т. д.

Тогда, рассматривая OM как замыкающую ломаной $OGPQM$ и замечая, что

$$x = GP;\ y = PQ;\ z = QM$$

и что проекция OM на ось $o\xi$ есть координата ξ точки M, получим

$$\xi = \xi_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z \tag{1}$$

Совершенно так же, проектируя ту же ломаную на оси $o\eta$ и $o\zeta$, получим

$$\eta = \eta_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z \tag{1'}$$

и

$$\zeta = \zeta_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z \tag{1''}$$

Между показанными в таблице косинусами имеют место следующие соотношения.

Во-первых:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1 \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1 \\ a^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ибо оси $O\xi\eta\zeta$ — прямоугольные.

Во-вторых:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

ибо оси $Gxyz$ — прямоугольные.

В третьих, соотношения:

$$\left.\begin{aligned} a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= 0 \\ a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 &= 0 \\ a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

которые выражают, что оси Gx, Gy, Gz взаимно перпендикулярны, т. е. что каждая из них перпендикулярна к каждой из двух остальных.

В четвертых, соотношения:

$$(4)\qquad \begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 &= 0 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 &= 0 \end{aligned}$$

которые выражают, что оси $o\xi$, $o\eta$, $o\zeta$ взаимно перпендикулярны.

Заметим следующее тожество, данное Эйлером, которое легко проверить:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &(A^2 + B^2 + C^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (Aa + Bb + Cc)^2 = \\ &= (Ab - Ba)^2 + (Bc - Cb)^2 + (Ac - Ca)^2 \end{aligned}$$

Как сказано, это равенство представляет собою *тожество*, т. е. имеет место при всяких значениях букв, в него входящих.

Напишем первые два из уравнений (3) так:

$$\begin{aligned} \frac{b_1}{a_1} \cdot b_2 + \frac{c_1}{a_1} \cdot c_2 &= -a_2 \\ \frac{b_1}{a_1} \cdot b_3 + \frac{c_1}{a_1} \cdot c_3 &= -a_3 \end{aligned}$$

и решим относительно $\frac{b_1}{a_1}$ и $\frac{c_1}{a_1}$, принимаемых за неизвестные, получим:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{c_2 a_3 - a_2 c_3}{b_2 c_3 - c_2 b_3}; \quad \frac{c_1}{a_1} = \frac{a_2 b_3 - b_2 a_3}{b_2 c_3 - c_2 b_3}$$

эти два равенства можно писать в виде такой пропорции:

$$(*)\qquad \frac{b_2 c_3 - c_2 b_3}{a_1} = \frac{c_2 a_3 - a_2 c_3}{b_1} = \frac{a_2 b_3 - b_2 a_3}{c_1} = s$$

где через s обозначена общая величина этих трех отношений, нам пока неизвестная. Чтобы ее найти, составим производную пропорцию, взяв отношение суммы квадратов всех предыдущих к сумме квадратов всех последующих членов, тогда получим

$$\frac{(b_2 c_3 - c_2 b_3)^2 + (c_2 a_3 - a_2 c_3)^2 + (a_2 b_3 - b_2 a_3)^2}{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$$

Откуда следует

$$s^2 = (b_2 c_3 - c_2 b_3)^2 + (c_2 a_3 + a_2 c_3)^2 + (a_2 b_3 - b_2 a_3)^2$$

ибо

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$$

Возьмем тожество Эйлера и сделаем в нем, напр.:

$$A = a_2, \quad B = b_2, \quad C = c_2$$
$$a = a_3; \quad b = b_3; \quad c = c_3$$

и воспользуемся уравнениями (2) и (3), тогда получим

$$(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2) - (a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3)^2 =$$
$$= (b_2 c_3 - c_2 b_3)^2 + (c_2 a_3 - a_2 c_3)^2 + (a_2 b_3 - b_2 a_3)^2 = 1$$

Отсюда следует

$$s^2 = 1$$

и значит,

$$s = \pm 1$$

Чтобы решить, какой надо взять знак, положим, что оси $Gxyz$ приведены в такое положение, что ox параллельно $G\xi$, ось Gy параллельна $o\eta$ и ось Gz параллельна $o\zeta$, это возможно, ибо обе системы осей одинаковы; тогда будет:

$$a_1 = 1, \; b_2 = 1, \; c_3 = 1$$

все же остальные косинусы — нули; из первого из отношений (*) следует

$$s = + 1$$

и затем из формул (*):

$$a_1 = b_2 c_3 - c_2 b_3$$
$$b_1 = c_2 a_3 - a_2 c_3 \tag{5}$$
$$c_1 = a_2 b_3 - b_2 a_3$$

Совершенно так же получим:

$$a_2 = b_3 c_1 - c_3 b_1$$
$$b_2 = c_3 a_1 - a_3 c_1 \tag{5'}$$
$$c_2 = a_3 b_1 - b_3 a_1$$

и

$$a_3 = b_1 c_2 - c_1 b_2$$
$$b_3 = c_1 a_2 - a_1 c_2 \tag{5''}$$
$$c_3 = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

Таким образом между девятью косинусами $a_1, \; b_1, \ldots c_3$ мы получили множество соотношений, но эти соотношения не суть не зависимые между

собою. Не зависимых между собою соотношений *шесть*, так, напр., (2) и (3). Таким образом можно задавать *три* косинуса (но только не такие, которые в таблице стоят в одной и той же строке или в одном и том же столбце), остальные шесть найдутся из сказанных шести уравнений или их следствий.

§ **8.** Уравнения

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ \eta &= \eta_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ \zeta &= \zeta_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{aligned} \tag{1}$$

дают возможность по данным x, y, z вычислять ξ, η, ζ, т. е. для данной точки в теле вычислить ее координаты в пространстве; если же ставится обратный вопрос, т. е. какая точка тела находится в заданной точке пространства, то эти уравнения надо решить относительно x, y, z. Умножив первое уравнение на a_1, второе — на b_1 и третье — на c_1, мы, на основании (2) и (3) § 7, получим

$$x = -(a_1\xi_0 + b_1\eta_0 + c_1\zeta_0) + a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta \tag{2}$$

и совершенно подобно

$$y = -(a_2\xi_0 + b_2\eta_0 + c_2\zeta_0) + a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta \tag{2}$$

и

$$z = -(a_3\xi_0 + b_3\eta_0 + c_3\zeta_0) + a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta \tag{2}$$

Понятно, что эти формулы можно писать и так:

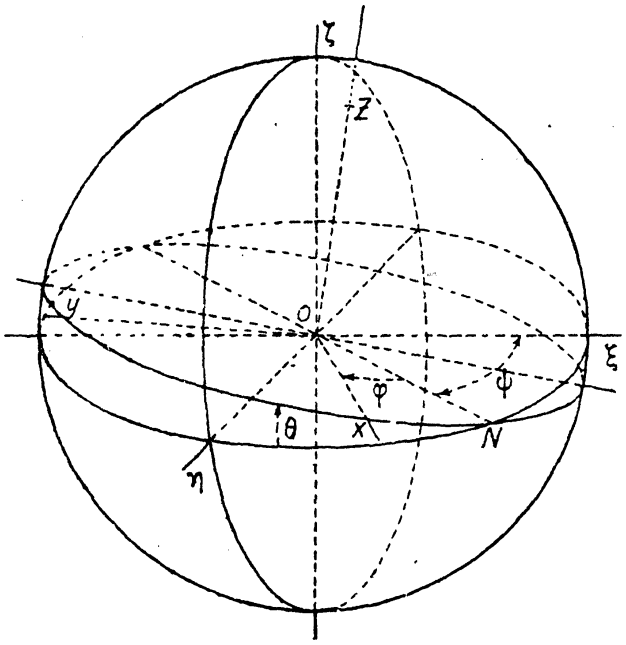
$$\begin{aligned} x &= a_1(\xi - \xi_0) + b_1(\eta - \eta_0) + c_1(\zeta - \zeta_0) \\ y &= a_2(\xi - \xi_0) + b_2(\eta - \eta_0) + c_2(\zeta - \zeta_0) \\ z &= a_3(\xi - \xi_0) + b_3(\eta - \eta_0) + c_3(\zeta - \zeta_0) \end{aligned} \tag{2'}$$

§ **9.** Вместо того, чтобы задавать три из девяти косинусов таблицы § 7, Эйлер задает три угла, через тригонометрические функции которых все девять косинусов выражаются. Так как дело идет только об углах, составляемых осями двух координатных систем, то очевидно, что можно их рассматривать как имеющие общее начало.

Во всех случаях, когда приходится иметь дело с различными направлениями в пространстве, удобно пользоваться приемом, издревле применяемым в астрономии: надо вообразить сферу произвольного радиуса (этот

радиус часто принимают равным длине, принятой за единицу), описанную из начала координат, как центра (фиг. 8). Всякая плоскость, проходящая через начало, пересекает эту сферу по большому кругу, всякая прямая, проведенная через начало в одном направлении, пересекает сферу в *одной* точке, значит всякому направлению в пространстве соответствует одна и только одна точка этой вспомогательной сферы (в астрономии эту сферу называют небесной).

Таким образом в нашем случае получатся на сфере точки ξ, η, ζ и точки x, y, z, соответствующие осям координат, и большие круги $\xi\eta$, $\eta\zeta$, $\zeta\xi$



Фиг. 8.

и xy, yz, zx, соответствующие плоскостям координат. Дуги больших кругов ζx, $\xi\eta$, . . . ζz и будут измерять углы между этими осями, причем когда оси «правые», то все эти дуги, как и соответствующие им углы, надо считать по часовой стрелке.

Сделав указанное построение, отметим прямую ON пересечения плоскости $\xi o\eta$ с плоскостью xoy, иными словами — точку N пересечения дуги $\xi\eta$ с дугою xy.

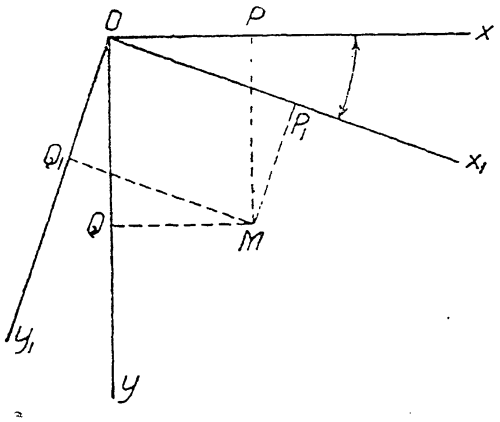
Следуя астрономической терминологии, точку N называют *узлом* и прямую ON — линией узлов.

Положение этой прямой определяется заданием угла $\psi = \xi ON$, считаемого от оси $O\xi$ до прямой ON по часовой стрелке от 0 до 2π. Положение плоскости xoy определяется задавая угол θ, образуемый при ребре ON

(линии узлов) плоскостями $\xi o\eta$ и xoy. На сфере это будет сферический угол $\eta Nx = \theta$, образуемый при точке N дугами $\xi\eta$ и xy. Этот угол надлежит считать от 0 до 2π от дуги $\xi\eta$ или ее продолжения по часовой стрелке. Наконец, положение оси ox в плоскости xoy определяется углом φ, считаемым от линии узлов ON от 0 до 2π по часовой стрелке в сторону к оси ox, так что для оси oy угол Noy будет равен $\varphi + \frac{\pi}{2}$.

Эти три угла, введенные Эйлером, и называются Эйлеровыми углами.

Чтобы вывести выражения косинусов углов между осями через Эйлеровы углы и не подвергать их ограничениям, которые налагаются формулами сферической тригонометрии, обратим внимание сперва на формулы преобразования координат на плоскости, а именно (фиг. 9):



Фиг. 9.

$$x = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha$$

(1)

$$y = x_1 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + y_1 \cos\alpha = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha$$

откуда следует:

$$x_1 = x \cos\alpha + y \sin\alpha$$

(2)

$$y_1 = y \cos\alpha - y \sin\alpha$$

Эти формулы получаются применяя теорему проекций к ломаной OP_1M и имеют место при всяком значении угла α, считаемого от оси ox по часовой стрелке до оси ox_1 от 0 до 2π.

Чтобы получить требуемые выражения косинусов углов, надо выразить зависимость между координатами ξ, η, ζ и x, y, z одной и той же точки и сличить с формулами §§ 7 и 8.

Чтобы это выполнить, будем производить последовательное преобразование координат. 1°) Вообразим, что система осей $\xi\eta\zeta$ повернута около оси $o\zeta$, остающейся неподвижной на угол ψ, тогда ось $o\xi$ ляжет по прямой ON. Возьмем вспомогательную систему ξ_1, η_1, в которой ось $o\xi_1$ совпадает с ON, тогда имеем:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 \cos\psi - \eta_1 \sin\psi \\ \eta &= \xi_1 \sin\psi + \eta_1 \cos\psi \\ \zeta &= \zeta_1 \end{aligned} \tag{3}$$

2°) Вообразим, что система ξ_1, η_1, ζ_1 повернута около оси $o\xi_1$ на угол θ, пока плоскость $\xi_1 o\eta_1$ совпадает с плоскостью xoy; получим новую систему ξ_2, η_2, ζ_2, причем формулы преобразования будут:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_2 \\ \eta_1 &= \eta_2 \cos\theta - \zeta_2 \sin\theta \\ \zeta_1 &= \eta_2 \sin\theta + \zeta_2 \cos\theta \end{aligned} \tag{4}$$

при этом заметим, что так как плоскость $\xi_2 o\eta_2$ совпадает с плоскостью xoy, то будет

$$\zeta_2 = z$$

3°) Вообразим теперь, что система ξ_2, η_2, ζ_2 будет повернута около оси ζ_2, или, что то же, оси z, на угол φ, тогда она совпадает с системою x, y, z, и для перехода от ξ_2, η_2, ζ_2 к x, y, z послужат формулы:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= x \cos\varphi - y \sin\varphi \\ \eta_2 &= x \sin\varphi + y \cos\varphi \\ \zeta_2 &= z \end{aligned} \tag{5}$$

Исключая из уравнений (3), (4), (5) величины

$$\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,\ \xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2$$

получаем:

$$\xi = x(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) - y(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) + z\sin\psi\sin\theta$$

$$\eta = x(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\varphi\cos\theta) + y(-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) - z\cos\psi\sin\theta$$

$$\zeta = x\sin\varphi\sin\theta + y\cos\varphi\sin\theta + z\cos\theta$$

Таким образом, положив в формуле (1) § 8

$$\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$$

и сличив с этими, имеем:

$$\begin{aligned}
&\cos(\widehat{x\xi}) = a_1 = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta \\
&\cos(\widehat{x\eta}) = b_1 = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta \\
&\cos(\widehat{x\zeta}) = c_2 = \sin\varphi\sin\theta \\
&\cos(\widehat{y\xi}) = a_2 = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta \\
&\cos(\widehat{y\eta}) = b_2 = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta \\
&\cos(\widehat{y\zeta}) = c_2 = \cos\varphi\sin\theta \\
&\cos(\widehat{z\xi}) = a_3 = \sin\psi\sin\theta \\
&\cos(\widehat{z\eta}) = b_3 = -\cos\psi\sin\theta \\
&\cos(\widehat{z\zeta}) = c_3 = \cos\theta
\end{aligned} \tag{6}$$

Заметим, что все эти формулы могут быть написаны почти сразу, применяя основную теорему сферической тригонометрии к сферическому треугольнику, одна вершина которого в точке N, другие же две — в точках, соответствующих тем двум осям, угол между которыми требуется.

Для примера составим выражение для b_2. Берем треугольник $Ny\xi$; в этом треугольнике:

$$\xi N = \psi; \quad Ny = \frac{\pi}{2} + \varphi; \quad \xi Ny = \pi - \theta$$

имеем

$$\cos(\widehat{y\xi}) = \cos(\widehat{\xi N})\cdot\cos(\widehat{Ny}) + \sin(\widehat{\xi N})\cdot\sin(\widehat{Ny})\cdot\cos\widehat{\xi Ny}$$

подставляя, получаем

$$\cos(\widehat{y\xi}) = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta$$

Не следует думать, что выбор Эйлеровых углов единственный, напротив во многих вопросах выгоднее брать Эйлеровы углы иначе, а именно: за линию узлов принимать не пересечение двух, так сказать, одноименных плоскостей, т. е. таких, которые при параллельности осей бы совпадали, а таких, которые при параллельности осей были бы взаимно

перпендикулярны, т. е., напр., плоскость xoy с плоскостью $\zeta\xi$ или $\zeta\eta$ (фиг. 10). Для примера возьмем последний случай и напишем формулы косинусов, пользуясь сферической тригонометрией.

В треугольнике ξNx будет:

$$Nx = \varphi; \quad \xi N = \frac{\pi}{2}; \quad \xi Nx = \frac{3\pi}{2} - \theta$$

Значит,

$$\cos(\widehat{\xi x}) = -\sin\varphi \cdot \sin\theta$$

В треугольнике ξNy будет:

$$Ny = \frac{\pi}{2} + \varphi; \quad \xi N = \frac{\pi}{2}; \quad \xi Ny = \frac{3\pi}{2} - \theta$$

Значит,

$$\cos(\xi y) = -\cos\varphi \cdot \sin\theta$$

В треугольнике ξNz будет:

$$Nz = \frac{\pi}{2}; \quad N\xi = \frac{\pi}{2}; \quad \xi Nz = \pi - \theta$$

$$\cos(\xi z) = -\cos\theta$$

Совершенно так же напишутся и остальные формулы, на чем мы останавливаться не будем.

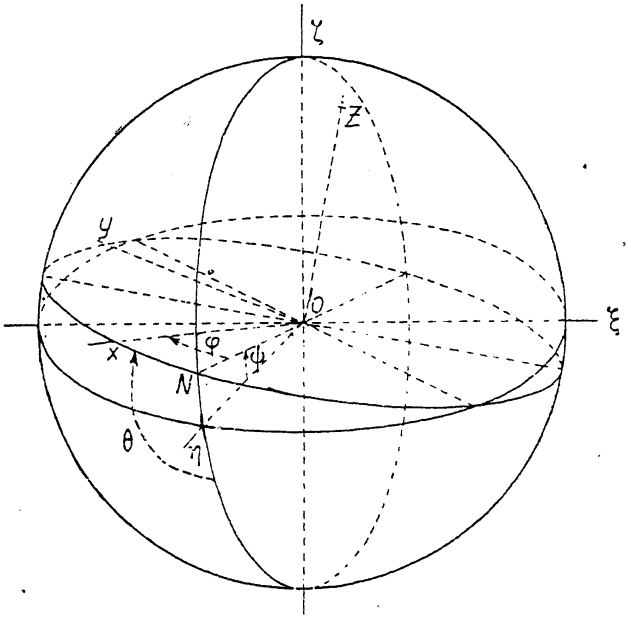
Обыкновенно (ниже будет указано по какой причине) за начало G координат, связанных с телом, берут его центр тяжести, таким образом можно сказать, что для определения положения твердого тела надо задать: координаты ξ_0, η_0, ζ_0, его центр тяжести и три Эйлерова угла ψ, φ, θ.

§ 10. Движение твердого тела называется *поступательным*, если тело перемещается так, что всякая прямая, в нем взятая, все время остается параллельной своему первоначальному положению, или, как условно говорят, что всякая прямая перемещается, оставаясь все время параллельной самой себе.

Понятно, что при таком движении перемещения всех точек тела между собою равны и параллельны, следовательно и скорости и ускорения всех точек тела во всякий момент времени между собою равны и параллельны, значит, чтобы знать поступательное движение тела, достаточно знать движение *одной* какой-либо его точки.

§ 11. Другой простейший вид движения твердого тела есть его вращение около *неподвижной оси*.

При таком движении всякая точка тела описывает в плоскости, перпендикулярной к оси, окружность, центр которой находится на оси, при этом в течение любого промежутка времени все радиусы, соединяющие точки тела с центрами описываемых ими окружностей, поворачиваются на один и тот же угол. Вращение называется равномерным, если этот угол поворота пропорционален времени; тогда угол поворота в единицу времени называется *угловою скоростью* вращения. Угловую скорость выражают различно, и не требуют пояснения термины: 120 оборотов в минуту, или



Фиг. 10.

2 оборота в секунду, или 720° в секунду и т. п. Понятно, что угловая скорость зависит от тех единиц, в которых выражается угол и в которых выражается время. Мы условимся раз навсегда в формулах всякий угол выражать отвлеченным числом, показывающим отношение длины дуги, этот угол стягивающей, к ее радиусу, время же выражать в секундах, поэтому, если тело делает n оборотов в секунду, то угловая его скорость

$$\omega = 2\pi \cdot n$$

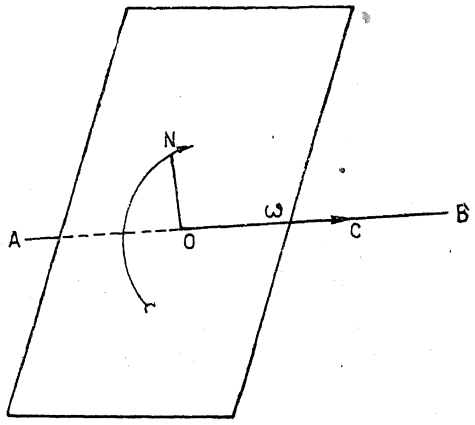
В том случае, когда тело вращается неравномерно, отношение угла поворота в течение какого-либо промежутка времени к этому промежутку называют среднею угловою скоростью в течение этого промежутка, и наконец, угловою скоростью в данный момент называют предел средней угловой скорости за бесконечно малый промежуток времени, предшествующий или последующий за данным моментом. Отсюда следует, что если положение

тела, вращающегося около неподвижной оси, будет задано функциональною зависимостью угла его поворота φ от времени t, напр.:

$$\varphi = f(t)$$

то угловая скорость в момент t выразится производною этой функции, т. е. будет

$$\omega = \varphi' = f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$$



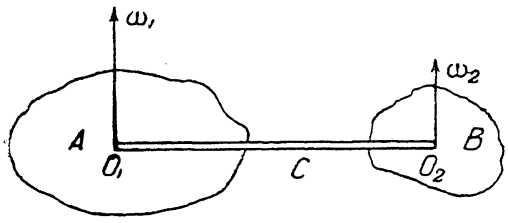
Фиг. 11.

При этом понятно, что когда координатные оси — правые, то угол φ от начального положения какого-нибудь радиуса до конечного его положения надо считать положительным, если вращение идет по часовой стрелке, если же оси — левые, то счет углов надо брать против часовой стрелки; соответственно этому, когда изменение угла положительное, то и угловая скорость положительная.

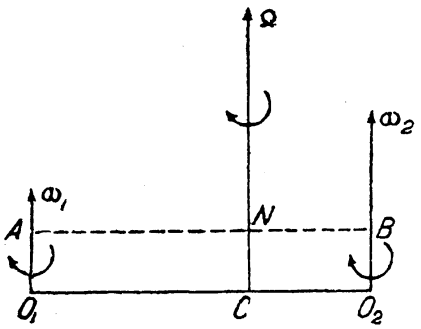
Если тело вращается с угловою скоростью ω около какой-либо оси AB (фиг. 11), то эту угловую скорость можно представить вектором так: взяв на оси AB произвольную точку O, откладывают по ней длину OC, пропорциональную величине ω, в такую сторону, чтобы, смотря из точки C на точку O, видеть вращение совершающимся по часовой стрелке. Вектор OC и будет представлять угловую скорость ω, характеризуя как быстроту вращения, так и ось, около которой оно происходит, и направление вращения.

Отсюда понятно, что следует разуметь под словами *направление угловой скорости*. Это есть направление вектора OC, задаваемое косинусами углов, составляемых им с осями координат; *проекция угловой скорости* на какую-либо ось, в частности на оси координат, — это суть проекции сказанного вектора, причем сам этот вектор, т. е. длина OC, рассматривается как величина положительная, знак же проекции определяется знаком соответствующего косинуса.

Чтобы по отношению к дальнейшему изложению не возникало никаких сомнений или недоразумений, покажем, что сложение и разложение угловых скоростей, так представляемых, следуют тем же правилам сложения векторов, которые установлены в статике для сил.



Фиг. 12.



Фиг. 13.

Поясним сперва, что надо разуметь под сложением вращений или угловых скоростей. Положим, что имеем тело A (фиг. 12), которое может вращаться около оси O_1, и положим, что оно несет рукоятку C, несущую, в свою очередь, ось O_2, около которой может вращаться тело B.

Вообразим сперва, что тело A и рукоятка C, а значит, и ось O_2, не подвижны, а телу B сообщено вращение с угловою скоростью ω_2; положим теперь, что и телу A сообщено вращение около его оси O_1 с угловою скоростью ω_1, подобно тому как это было бы, если бы, скажем, тело A было корабль, а тело B — башня на нем, тогда мы скажем, что тело B обладает двумя вращениями около осей O_1 и O_2 с угловыми скоростями ω_1 и ω_2.

Итак, положим, что тело B обладает двумя вращениями около осей O_1 и O_2 с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 (фиг. 13), направленными в одну и ту же сторону; докажем, что во всякий момент можно рассматривать, что тело B вращается около оси C, параллельной O_1 и O_2, с угловою скоростью $\Omega = \omega_1 + \omega_2$ и что точка C разделяет расстояние O_1O_2 на части, обратно пропорциональные данным скоростям, т. е.

$$(*) \qquad O_1C : O_2C = \omega_2 : \omega_1$$

В самом деле, возьмем на оси O_2 какую-либо точку B, принадлежащую телу B, отметим на прямой O_1O_2 точку C, подразделяющую O_1O_2 в отношении (*), и, проведя прямую CK, параллельную осям O_1A и O_2B, будем рассматривать эту прямую как принадлежащую телу B, т. е. неизменно с этим телом связанную. Пусть N есть какая-либо точка этой прямой, само собою разумеется принадлежащая телу B. Покажем, что эта точка, когда оба вращения совершаются одновременно, остается неподвижной в пространстве. В самом деле, если бы тело A не вращалось, то точка N от вращения тела B имела бы скорость V_2, направленную перпендикулярно плоскости чертежа в сторону от читателя, причем

$$v_2 = BN \cdot \omega_2 = O_2C \cdot \omega_2$$

Вследствие же вращения тела B, увлекаемого телом A, та же точка обладала бы скоростью

$$v_1 = AN \cdot \omega_1 = O_1C \cdot \omega_1$$

направленною обратно v_2, отсюда ясно, что абсолютная скорость точки N в пространстве есть

$$v_2 - v_1 = O_2C \cdot \omega_2 - O_1C \cdot \omega_1 = 0$$

на основании равенства (*).

Значит, точка N, а следовательно, и вся прямая CN, принадлежащая телу B, остается в пространстве неподвижной, т. е. есть ось вращения для этого тела.

Чтобы найти угловую скорость вращения тела B около этой оси, надо рассчитать линейную скорость какой-либо его точки при совместном существовании обоих вращений. Возьмем, напр., точку O_2; вследствие вращения ω_2 скорость ее есть нуль, вследствие вращения вместе с телом A эта скорость есть

$$\omega_1 \cdot \overline{O_1O_2} = \omega_1 (O_1C + CO_2)$$

и вследствие вращения около оси C эта скорость должна равняться $\Omega \cdot CO_2$, откуда для определения Ω — уравнение

$$\Omega \cdot CO_2 = \omega_1 (O_1C + CO_2)$$

но по равенству (*)

$$\omega_1 \cdot O_1C = \omega_2 \cdot CO_2$$

подставляя и сокращая на CO_2, имеем

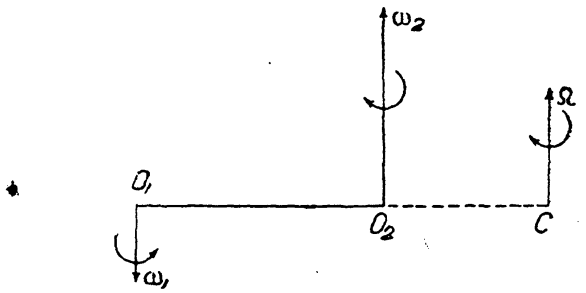
$$\Omega = \omega_1 + \omega_2$$

т. е. составная или равнодействующая скорость вращения равна сумме составляющих.

Совершенно так же докажем, что когда вращения направлены в разные стороны (фиг. 14), то составная угловая скорость равна разности составляющих, направлена в сторону большей угловой скорости, параллельна им, и расстояния оси составного вращения до осей составляющих обратно пропорциональны этим скоростям, т. е.

$$\Omega = \omega_2 - \omega_1$$
$$\omega_1 \cdot O_1C = \omega_2 O_2C$$

причем точка C лежит на продолжении прямой O_1O_2 ближе к большей скорости.



Фиг. 14.

Таким образом видим, что сложение угловых скоростей около осей параллельных следует совершенно тем же правилам, как сложение параллельных сил.

Положим теперь, что тело A вращается около оси OA с угловою скоростью ω_1, что оно несет на себе тело B, вращающееся около оси OB с угловою скоростью ω_2 (напр. тело A — станок, вращающийся около своего центрального штыра, тело B — орудие, вращающееся около оси цапф) и что сказанные оси пересекаются в точке O; тогда говорят, что тело B обладает двумя вращениями около пересекающихся осей. Докажем, что в этом случае угловые скорости складываются по правилу параллелограмма, т. е. что угловая скорость составного вращения из двух вращений, происходящих около пересекающихся осей, по величине и по направлению представляется диагональю параллелограмма, построенного на угловых скоростях составляющих вращений, как сторонах.

Чтобы доказать эту теорему, надо сперва доказать, что диагональ OC (фиг. 15) параллелограмма, построенного на данных угловых скоростях, служит мгновенною осью вращения, а затем найти угловую скорость около этой оси.

Возьмем точку C — конец сказанной диагонали, и вообразим, что она принадлежит телу B, а тело A неподвижно.

Мгновенная скорость точки C вследствие этого вращения есть

$$v_2 = \omega_2 \cdot \overline{CE}$$

где $\overline{CE}$ есть перпендикуляр, опущенный из точки C на ось ω_2, и скорость эта направлена перпендикулярно плоскости чертежа от читателя. Положим теперь, что тело A вращается и, значит, увлекает и точку C, тогда, вследствие только этого вращения, ее скорость была бы $v_1 = \omega_1 \cdot CD$ и направлена перпендикулярно к плоскости чертежа к читателю. Следовательно, скорость точки C в результате обоих движений есть

$$v_1 - v_2 = \omega_1 \cdot CD - \omega_2 \cdot CE$$

но

$$CD = OA \cdot \sin\gamma; \quad CE = OB \cdot \sin\gamma$$

значит

$$v_1 - v_2 = (\omega_1 \cdot OA - \omega_2 \cdot OB)\sin\gamma$$

но длины OB и OA пропорциональны ω_2 и ω_1, т. е.

$$\frac{OB}{OA} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

значит

$$\omega_1 \cdot OA - \omega_2 \cdot OB = 0$$

следовательно и

$$v_1 - v_2 = 0$$

т. е. точка C, принадлежащая телу B, не подвижна, значит и вся прямая OC этого тела не подвижна и есть его мгновенная ось вращения.

Чтобы определить скорость Ω вращения тела B около оси OC, найдем, напр., линейную скорость точки A, рассматриваемую как принадлежащую телу B. Вследствие вращения ω_1 и увлечения тела B телом A, эта скорость есть нуль, вследствие вращения ω_2 тела B эта скорость есть

$$\omega_2 \cdot AF = \omega_2 \cdot OA \cdot \sin\gamma$$

С другой стороны, скорость той же точки должна выражаться и формулою

$$\Omega \cdot AH = \Omega \cdot OA \cdot \sin\alpha$$

и значит, должно иметь место равенство

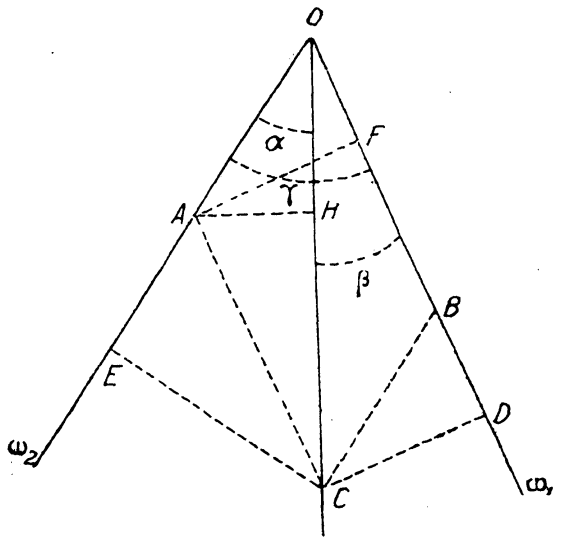
$$\Omega \sin\alpha = \omega_2 \sin\gamma$$

иначе

$$\frac{\Omega}{\omega_2} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

из треугольника же OAC следует

$$\frac{OC}{AC} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$



Фиг. 15.

значит

$$\frac{\Omega}{\omega_2} = \frac{OC}{OB} \quad \text{или} \quad \frac{\Omega}{OC} = \frac{\omega_2}{OB}$$

но мы имели пропорцию

$$\frac{\omega_2}{OB} = \frac{\omega_1}{OA}$$

следовательно

$$\frac{\Omega}{OC} = \frac{\omega_1}{OA} = \frac{\omega_2}{OB}$$

т. е. длина OC представляет угловую скорость Ω, и по величине, следовательно, высказанная теорема доказана.

Само собою разумеется, что стоит только повторить относительно сложения угловых скоростей рассуждения, подобные рассуждениям о сложении сил, о сложении скоростей, о разложении сил или скоростей, чтобы получить «параллелопипед» угловых скоростей или многоугольник угловых скоростей и т. д.

Заметим также, что мы получили бы совершенно тот же результат, если бы рассматривали, что не тело A увлекает в своем движении тело B, а наоборот, тело B, вращающееся с угловою скоростью ω_2, несет на себе ось OA, около которой вращается тело A с угловою скоростью ω_1, так что это тело увлекается телом B, значит при сложении и разложении угловых скоростей нет надобности оговаривать, которое тело влекущее, которое влекомое, — составная угловая скорость будет та же самая.

Отсюда понятно, что угловую скорость можно «проектировать» на оси координат или «разлагать» на составляющие по осям координат — проекции и составляющие будут выражаться одними и теми же формулами:

$$\Omega_x = \Omega \cos(\widehat{\Omega x})$$

$$\Omega_y = \Omega \cos(\widehat{\Omega y})$$

$$\Omega_z = \Omega \cos(\widehat{\Omega z})$$

при само собою понятном обозначении.

§ **12.** Положим, что тело, с которым неизменно связаны координатные оси $oxyz$, вращается в рассматриваемый момент около оси OA с угловою скоростью Ω (Фиг. 16), требуется определить линейную скорость любой точки тела M и ее проекции на оси ox, oy, oz, связанные с телом, а также и на оси $o\xi$, $o\eta$, $o\zeta$, не подвижные в пространстве.

Опустим из точки M перпендикуляр MH на ось вращения, тогда линейная скорость точки M в рассматриваемый момент по величине равна $\Omega \cdot \overline{MH}$ и направлена перпендикулярно плоскости MOA в сторону, показанную на чертеже стрелкой.

Чтобы вычислить скорость v, обозначим через x, y, z — координаты точки M и через α, β, γ — углы, составляемые осью OA с осями координат x, y, z, тогда имеем

$$\overline{MH}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OH}^2$$

но

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$OH = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

значит

$$\overline{MH}^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2$$

Заметив, что

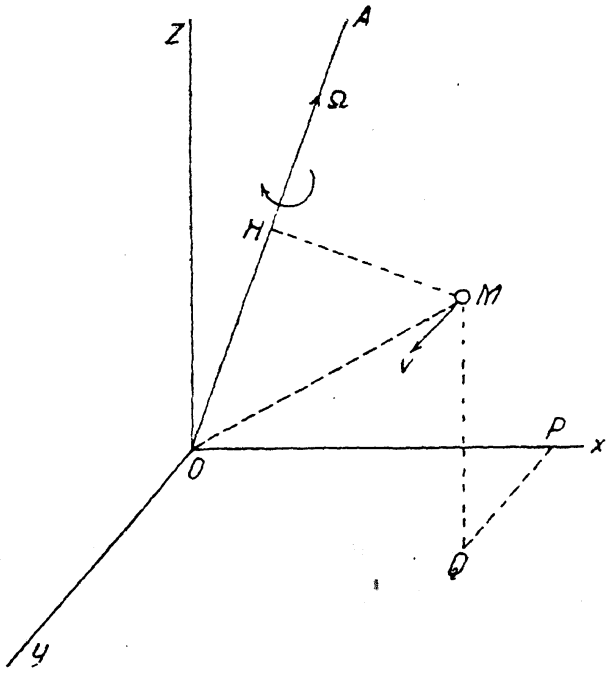
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

воспользуемся для преобразования предыдущего равенства тожеством Эйлера, будем иметь

$$\overline{MH}^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) -$$
$$- (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 = (y\cos\alpha - x\cos\beta)^2 +$$
$$+ (x\cos\gamma - z\cos\alpha)^2 + (z\cos\beta - y\cos\gamma)^2$$

Умножив это равенство на Ω и положив

$$\Omega\cos\alpha = p;\ \Omega\cos\beta = q;\ \Omega\cos\gamma = r$$



Фиг. 16.

так что p, q, r суть проекции угловой скорости на оси координат x, y, z, получим

(1) $$V^2 = \Omega^2 MH^2 = (py - qx)^2 + (rx - pz)^2 + (qz - ry)^2$$

Чтобы получить направление скорости v, обозначим через a, b, c — косинусы углов, составляемых ее направлением с осями координат, тогда имеем следующие уравнения:

(*) $$ax + by + cz = 0$$

и

(*) $$ap + bq + cr = 0$$

из коих первое выражает условие, что направление скорости v перпендикулярно к прямой OM, второе — что оно перпендикулярно к оси вращения OA.

Из уравнений (*), совершенно подобно тому как в § 7, следует

$$\frac{a}{qz-ry}=\frac{b}{rx-pz}=\frac{c}{py-qz}=$$
$$=\frac{1}{\pm\sqrt{(qz-ry)^2+(rx-pz)^2+(py-qx)^2}}$$

Чтобы определить знак перед корнем, стоит только взять какой-либо частный случай, напр.:

$$p=0,\ q=0,\ r=\Omega$$

и точку:

$$x=x_0,\ y=0,\ z=0$$

очевидно, что скорость этой точки направлена параллельно оси y-ков и равна $\Omega\cdot x_0$, следовательно перед корнем надо брать знак $+$. Заметив, что подкоренная величина равна v^2, мы имеем:

$$\text{(2)}\qquad \begin{aligned} v_x &= v\cdot\cos(\widehat{vx})=qz-ry\\ v_y &= v\cdot\cos(\widehat{vy})=rx-pz\\ v_z &= v\cdot\cos(\widehat{vz})=py-qx \end{aligned}$$

Эти формулы понадобятся нам не раз, поэтому дадим для них еще наглядный геометрический вывод.

Вращение Ω около оси OA можно разложить на три вращения около осей координат ox, oy, oz с угловыми скоростями p, q, r, причем будет:

$$\begin{aligned} p &= \Omega\cos(\widehat{\Omega x})=\Omega\cdot\cos\alpha\\ q &= \Omega\cos(\widehat{\Omega y})=\Omega\cdot\cos\beta\\ r &= \Omega\cos(\widehat{\Omega z})=\Omega\cdot\cos\gamma \end{aligned}$$

Но вращение p в течение бесконечно малого времени dt сообщает точке M перемещения:

по оси ox . . . 0
» » oy . . . $-pz\cdot dt$
» » oz . . . $+py\cdot dt$

иначе скорости:

по оси ox . . . 0
» » oy . . . $-pz$
» » oz . . . $+py$

Совершенно так же вращение q дает скорости:

по оси ox . . . $+qz$
» » oy . . . 0
» » oz . . . $-qx$

и наконец, вращение r дает скорости:

по оси ox . . . $-ry$
» » oy . . . $+rx$

Таким образом получаем таблицу:

Вращение	Оси		
	ox	oy	oz
p	0	$-pz$	$+py$
q	$+qz$	0	$-qx$
r	$-ry$	$+rx$	0

Складывая проекции скорости по каждой оси, и получим формулы (2).

Само собою разумеется, что обозначив через P, Q, R — проекции угловой скорости Ω на оси $O\xi\eta\zeta$, не связанные с телом, а неподвижные в пространстве, мы совершенно так же получили бы формулы:

$$V_\xi = Q\zeta - R\eta$$
$$V_\eta = R\xi - P\zeta \tag{3}$$
$$V_\zeta = P\eta - Q\xi$$

§ **13.** Мы видели, что положение твердого тела, имеющего неподвижную точку O, или, что то же, положение системы осей $oxyz$ по отношению к системе осей $o\xi\eta\zeta$, определяется тремя Эйлеровыми углами. Когда тело вращается, увлекая с собою и неизменно с ним связанную систему осей $oxyz$, то эти углы с течением времени изменяются. Чтобы задать вращательное движение тела, т. е. чтобы во всякий данный момент времени t можно было определить его положение, надо задать функциональную зависимость Эйлеровых углов от времени t.

Итак, пусть будет:

$$\psi = \psi(t)$$
$$\varphi = \varphi(t) \tag{1}$$
$$\theta = \theta(t)$$

требуется найти зависимость между величинами проекций угловой скорости p, q, r, Эйлеровыми углами и их производными, т. е. производными тех функций (1), коими выражается зависимость этих углов от времени t.

Чтобы вывести эти формулы, положим, что в рассматриваемый момент t тело вращается около оси OA с угловою скоростью Ω, слагающие которой по осям координат ox, oy, oz суть, соответственно, p, q, r. Это вращение вызывает изменение углов ψ, φ, θ; быстрота изменения угла ψ измеряется производною ψ', которая представляет собою угловую скорость, направленную по оси $o\zeta$, около которой происходит то вращение, при котором изменяется только угол ψ, точно так же быстрота изменения угла φ, т. е. производная φ', представляет угловую скорость, направленную по oz, и наконец, производная θ' представляет угловую скорость, направленную по линии узлов ON (фиг. 17).

Таким образом угловая скорость Ω могла бы быть разложена по указанным осям и ее слагающие были бы ψ', φ' и θ'; проекции той же скорости на оси координат ox, oy, oz суть p, q, r.

Применив теорему проекций, получаем равенства:

$$\Omega\cos(\widehat{\Omega x}) = p = \psi'\cos(\widehat{\zeta x}) + \varphi'\cos(\widehat{zx}) + \theta'\cos(Nox)$$
$$\Omega\cos(\widehat{\Omega y}) = q = \psi'\cos(\widehat{\zeta y}) + \varphi'\cos(\widehat{zy}) + \theta'\cos(Noy)$$
$$\Omega\cos(\widehat{\Omega z}) = r = \psi'\cos(\widehat{\zeta z}) + \varphi'\cos(\widehat{zz}) + \theta'\cos(Noz)$$

Но мы имеем [см. § 9, форм. (6)]:

$$\cos(\zeta x) = \sin\varphi\sin\theta;\quad \cos(\widehat{zx}) = 0;\quad \cos Nox = \cos\varphi$$
$$\cos(\widehat{\zeta y}) = \cos\varphi\sin\theta;\quad \cos(\widehat{zy}) = 0;\quad \cos Noy = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = -\sin\varphi$$
$$\cos(\zeta z) = \cos\theta;\quad \cos(zz) = 1;\quad \cos(Noz) = 0$$

подставляя, получаем:

$$\begin{aligned} p &= \psi'\sin\varphi\sin\theta + \theta'\cos\varphi \\ q &= \psi'\cos\varphi\sin\theta - \theta'\sin\varphi \\ r &= \psi'\cos\theta + \varphi' \end{aligned} \qquad (2)$$

Подобным же образом можно вывести и выражения проекций P, Q и R угловой скорости на неподвижные оси координат $o\xi\eta\zeta$, и мы получим:

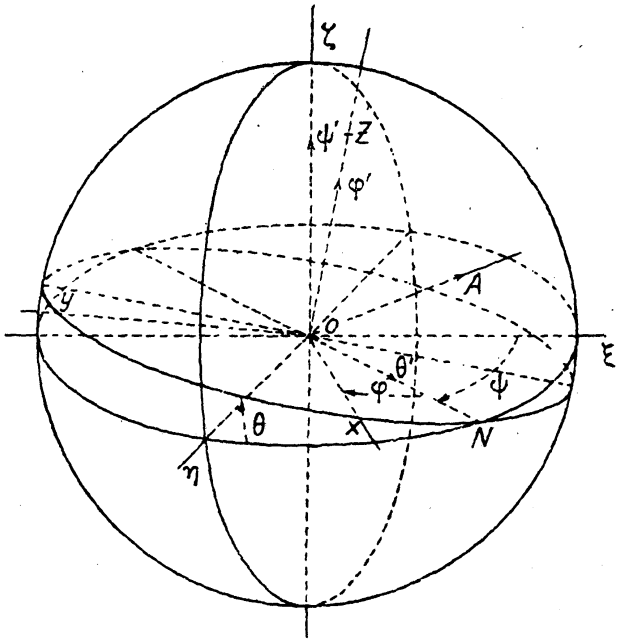
$$\Omega\cos(\Omega\xi) = P = \psi'\cos(\zeta\xi) + \varphi'\cos(z\xi) + \theta'\cos(No\xi)$$
$$\Omega\cos(\Omega\eta) = Q = \psi'\cos(\zeta\eta) + \varphi'\cos(z\eta) + \theta'\cos(No\eta)$$
$$\Omega\cos(\Omega\zeta) = R = \psi'\cos(\widehat{\zeta\zeta}) + \varphi'\cos(z\zeta) + \theta'\cos(No\zeta)$$

Затем имеем:

$$\cos(\zeta\xi) = 0;\ \cos(z\xi) = \sin\psi\sin\theta;\ \cos N o\xi = \cos\psi$$
$$\cos(\zeta\eta) = 0;\ \cos(z\eta) = -\cos\psi\sin\theta;\ \cos(N o\eta) = \sin\psi$$
$$\cos(\zeta\zeta) = 1;\ \cos(z\zeta) = \cos\theta;\ \cos N o\zeta = 0$$

Подставляя, имеем:

$$P = \varphi'\sin\psi\sin\theta + \theta'\cos\psi$$
$$Q = -\varphi'\cos\psi\sin\theta + \theta'\sin\psi \tag{1}$$
$$R = \psi' + \varphi'\cos\theta$$



Фиг. 17.

Мы уже упоминали, что Эйлеровы углы могут быть выбраны на множество манеров. В каждом частном вопросе надо сделать надлежащий для этого вопроса наивыгоднейший выбор и соответственно этому выбору составить выражения косинусов углов и проекций угловой скорости, поэтому мы и остановились так подробно на этих выводах.

§ 14. В некоторых случаях бывает удобно пользоваться выражениями проекций угловой скорости не через Эйлеровы углы и их производные, а через косинусы углов между осями и производные этих косинусов.

Мы имели в § 7 формулы (1), (1′) и (1″), выражающие координаты ξ, η, ζ точки M тела через ее координаты x, y, z и косинусы углов между осями.

Если точка G — начало подвижных осей совпадает с точкою O — началом осей неподвижных, так что тело может только вращаться около этой точки, то будет:

$$\xi_0 = 0,\ \eta_0 = 0,\ \zeta_0 = 0$$

и сказанные формулы примут вид:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \xi &= a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ \eta &= b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ \zeta &= c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{aligned}$$

причем x, y, z для заданной в теле точки остаются постоянными, косинусы же: $a_1, a_2, \ldots c_3$ суть функции времени, связанные между собою всеми теми соотношениями, которые приведены в § 7.

Дифференцируя уравнения (1) и замечая еще раз, что x, y, z от времени t не зависят, получим следующие выражения проекций V_ξ, V_η, V_ζ скорости точки M на неподвижные оси координат $O\xi\eta\zeta$:

$$\begin{aligned} V_\xi &= \xi' = a_1' x + a_2' y + a_3' z \\ V_\eta &= \eta' = b_1' x + b_2' y + b_3' z \\ V_\zeta &= \zeta' = c_1' x + c_2' y + c_3' z \end{aligned}$$

Затем по теореме о проекциях:

$$(*)\qquad \begin{aligned} V_x &= V_\xi a_1 + V_\eta b_1 + V_\zeta c_1 = (a_1 a_1' + b_1 b_1' + c_1 c_1') x + \\ &\quad + (a_1 a_2' + b_1 b_2' + c_1 c_2') y + (a_1 a_3' + b_1 b_3' + c_1 c_3') z \\ V_y &= V_\xi a_2 + V_\eta b_2 + V_\zeta c_2 = (a_2 a_1' + b_2 b_1' + c_2 c_1') x + \\ &\quad + (a_2 a_2' + b_2 b_2' + c_2 c_2') y + (a_2 a_3' + b_2 b_3' + c_2 c_3') z \\ V_z &= V_\xi a_3 + V_\eta b_3 + V_\zeta c_3 = (a_3 a_1' + b_3 b_1' + c_3 c_1') x + \\ &\quad + (a_3 a_2' + b_3 b_2' + c_3 c_2') y + (a_3 a_3' + b_3 b_3' + c_3 c_3') z \end{aligned}$$

Заметим, что на основании равенств

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1,\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1 \quad \text{и} \quad a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1$$

будет:

$$a_1 a_1' + b_1 b_1' + c_1 c_1' = 0;\ a_2 a_2' + b_2 b_2' + c_2 c_2' = 0$$
$$a_3 a_3' + b_3 b_3' + c_3 c_3' = 0$$

Затем, на основании равенств

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0; \quad a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = 0$$
$$a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0$$

имеем:

$$a_2' a_3 + b_2' b_3 + c_2' c_3 = -(a_2 a_3' + b_2 b_3' + c_2 c_3')$$
$$a_1 a_3' + b_1 b_3' + c_1 c_3' = -(a_1' a_3 + b_1' b_3 + c_1' c_3)$$
$$a_1' a_2 + b_1' b_2 + c_1' c_2 = -(a_1 a_2' + b_1 b_2' + c_1 c_2')$$

и, сличив равенства (*) с равенствами

$$V_x = qz - ry$$
$$V_y = rx - pz$$
$$V_z = py - qx$$

получим:

$$p = a_2' a_3 + b_2' b_3 + c_2' c_3 = -(a_2 a_3' + b_2 b_3' + c_2 c_3')$$
$$(1) \qquad q = a_1 a_3' + b_1 b_3' + c_1 c_3' = -(a_1' a_3 + b_1' b_3 + c_1' c_3)$$
$$r = a_1' a_2 + b_1' b_2 + c_1' c_2 = -(a_1 a_2' + b_1 b_2' + c_1 c_2')$$

Совершенно так же можно бы было получить выражение P, Q, R проекций угловой скорости на неподвижные оси, но эти выражения нам не понадобятся, и мы выводить их не будем.

Заметим, что из формулы (1) легко получить выражения a_1', a_2', a_3', . . . c_3 производных косинусов через p, q, r.

Так, чтобы найти a_1', b_1', c_1', возьмем уравнения:

$$a_1' a_1 + b_1' b_1 + c_1' c_1 = 0$$
$$a_1' a_3 + b_1' b_3 + c_1' c_3 = -q$$
$$a_1' a_2 + b_1' b_2 + c_1' c_2 = r$$

Умножив их сперва на a_1, a_3 и a_2 и сложив, получим (§ 7) a_1'; умножив затем на b_1, b_3, b_2 и сложив, получим b_1'; умножив на c_1, c_3, c_2 и сложив, получим c_1', таким образом будет:

$$a_1' = a_2 r - a_3 q$$
$$(2) \qquad b_1' = b_2 r - b_3 q$$
$$c_1' = c_2 r - c_3 q$$

Совершенно подобным образом будем иметь:

$$(2') \qquad \begin{aligned} a_2' &= a_3 p - a_1 r \\ b_2' &= b_3 p - b_1 r \\ c_2' &= c_3 p - c_1 r \end{aligned}$$

и

$$(2'') \qquad \begin{aligned} a_3' &= a_1 q - a_2 p \\ b_3' &= b_1 q - b_2 p \\ c_3' &= c_1 q - c_2 p \end{aligned}$$

§ 15. До сих пор мы рассматривали различные соотношения между геометрическими элементами движения тела, не рассматривая связи между движением тела и причинами, иначе — силами, это движение производящими.

Перейдем теперь к этому последнему рассмотрению.

Совокупность материальных точек, между которыми существуют различные *связи*, называют материальной системой. Под связями разумеют те условия, которым подчинены точки системы; так, напр., некоторые точки могут быть между собою соединены неизменно, скажем, стержнем или как иначе, другие точки не должны сходить с данных поверхностей или линий и т. п.

Все такие связи выражаются аналитически некоторыми зависимостями между координатами точек системы, причем эти зависимости могут заключать и время явным образом.

Мы ограничимся исключительно такими системами и исключим из нашего рассмотрения системы, в которых связи включают соотношения между скоростями точек системы или их бесконечно малыми перемещениями, ибо с системами подобного рода нам иметь дела не придется.

Аналитические выражения тех условий, которым подчинены точки системы, называют уравнениями связей.

Так, напр., если задано, что точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ соединены между собою неизменно так, что расстояние между ними равно l, то это условие выразится уравнением

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = l$$

или

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0$$

Если, напр., точка M_1 должна постоянно находиться на заданной поверхности

$$F(x, y, z) = 0$$

то эта связь выразится уравнением

$$F(x_1, y_1, z_1) = 0$$

показывающим, что координаты точки M_1 удовлетворяют уравнению поверхности и т. д.

Вообще говоря, если система состоит из n точек, координаты коих суть:

$$x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ \ldots\ x_n, y_n, z_n$$

то уравнения связей будут вида:

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} &F_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots z_n) = 0\\ &F_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots z_n) = 0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &F_k(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots z_n) = 0 \end{aligned}$$

причем число этих уравнений k должно быть меньше числа $3n$ координат точек системы.

Если система перемещается, то координаты всех или некоторых ее точек изменятся и обратятся, соответственно, в

$(x_1 + \delta x_1,\ y_1 + \delta y_1,\ z_1 + \delta z_1),\ \ldots\ (x_n + \delta x_n,\ y_n + \delta y_n,\ z_n + \delta z_n)$

причем, если связи не нарушаются, то и новые значения координат удовлетворяют уравнениям (I), и значит, перемещения $\delta x_1, \delta y_1, \ldots \delta z_n$ не могут быть задаваемы произвольно. Мы ограничимся случаем бесконечно малых перемещений и выведем те условия, которым они должны удовлетворять.

Такие бесконечно малые перемещения, при которых новые значения координат удовлетворяют уравнениям связей, называются *возможными*.

Итак, возможные перемещения должны удовлетворять уравнениям:

$$\text{(II)}\qquad \begin{aligned} &F_1(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, z_1 + \delta z_1, \ldots z_n + \delta z_n) = 0\\ &F_2(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, z_1 + \delta z_1, \ldots z_n + \delta z_n) = 0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &F_k(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, z_1 + \delta z_1, \ldots z_n + \delta z_n) = 0 \end{aligned}$$

Вычитая из каждого из этих уравнений соответствующее ему уравнение (I), получим, отбросив члены высших порядков:

$$\text{(III)}\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\cdot\delta x_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdot\delta y_1 + \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\delta z_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial z_n}\cdot\delta z_n = 0\\ &\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial F_2}{\partial z_1}\delta z_1 + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial z_n}\cdot\delta z_n = 0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{\partial F_k}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F_k}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial E_k}{\partial z_1}\delta z_1 + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial z_n}\delta z_n = 0 \end{aligned}$$

Это и суть те уравнения, которым должны удовлетворять *возможные* перемещения. Отличие и преимущество этих уравнений перед уравнениями (II) состоит в том, что они *линейные* относительно δx_1, δy_1, $\ldots \delta z_n$.

В статике доказывается следующее «начало возможных перемещений»: *Для равновесия всякой материальной системы необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех сил, действующих на все точки системы, равнялась нулю для всякого возможного перемещения этой системы.*

Пусть

$$X_1, Y_1, Z_1;\ X_2, Y_2, Z_2;\ \ldots\ X_n, Y_n, Z_n$$

суть составляющие по осям координат всех сил, действующих на точки

$$(x_1, y_1, z_1),\ (x_2 y_2 z_2),\ \ldots\ (x_n, y_n, z_n)$$

системы, подчиненной уравнениям связей (I), тогда элементарная работа сил, действующих на точку x_1, y_1, z_1, выразится суммою

$$X_1\delta x_1 + Y_1\delta y_1 + Z_1\delta z_1$$

и значит, высказанное начало выражается уравнением

$$\text{(IV)}\qquad \sum_{i=1}^{i=n}(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) = 0$$

которое должно иметь место для всех бесконечно малых перемещений

$$\delta x_1,\ \delta y_1, \ldots \delta z_n$$

которые суть *возможные*, т. е. которые удовлетворяют уравнениям (III).

Чтобы найти положения равновесия системы, надо из уравнений (III), число которых k, выразить k величин δx_1, δy_1, δz_1, $\ldots \delta y_\alpha$ в функции остальных $3n-k$; это потребует решения лишь уравнений первой сте-

нени, и сказанные величины выразятся линейным же образом через остальные $3n-k$ величин, найденные значения надо подставить в уравнение (IV), собрать в нем члены, содержащие каждое из этих $3n-k$ бесконечно малых перемещений, и так как они совершенно произвольны, то чтобы уравнение, в которое обратится уравнение (IV), имело место, необходимо, чтобы каждый член его в отдельности (т. е. множитель, стоящий при каждой из бесконечно малых δ) равнялся нулю.

Таким образом это преобразованное уравнение (IV) распадется на $3n-k$ уравнений, которые, будучи присоединены к k уравнениям (II) связей, и послужат для определения $3n$ неизвестных координат:

$$(x_1, y_1, z_1),\ (x_2, y_2, z_2),\ \ldots\ (x_n, y_n, z_n)$$

значения коих и дадут положение или вообще положения равновесия системы, если таковых несколько.

§ **16.** Таков общий ход решения задачи о разыскании положений равновесия системы. Может оказаться, что требующиеся для этого выкладки будут очень сложны. Лагранж предложил два способа для упрощения этих выкладок.

Первый способ, называемый *способом множителей*, состоит в следующем: умножим уравнения (III), соответственно, на множители $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ и придадим к уравнению (IV), оно примет тогда вид

$$\sum_{i=1}^{i=n}\Big[\Big(X_i+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_i}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_i}+\ldots+\lambda_k\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\Big)\delta x_i+$$

$$+\Big(Y_i+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_i}+\ldots+\frac{\partial F_k}{\partial y_i}\Big)\delta y_i+ \tag{IV'}$$

$$+\Big(Z_i+\lambda_1\frac{\partial F_i}{\partial z_i}+\ldots+\lambda_k\frac{\partial F_k}{\partial z_i}\Big)\delta z_i\Big]=0$$

Распорядимся теперь этими множителями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ так, чтобы те величины $\delta x_1, \delta y_1, \ldots \delta y_\alpha$, которые мы имели в виду выразить через остальные, в сумме (IV') пропадали, иными словами, чтобы выполнялись условия:

$$X_1+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_1}+\ldots+\lambda_k\frac{\partial F_k}{\partial x_1}=0$$

$$Y_1+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_1}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial y_1}+\ldots+\lambda_k\frac{\partial F_k}{\partial y_1}=0 \tag{V}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y_\alpha+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_\alpha}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial y_\alpha}+\ldots+\lambda_k\frac{\partial F_k}{\partial y_\alpha}=0$$

число которых, как уже сказано, есть k, тогда в сумме (IV) останутся лишь члены, содержащие те $3n-k$ бесконечно малых $\delta z_\alpha, \ldots \delta z_n$, которые совершенно произвольны, и значит, уравнение (IV′) распадается после того на $3n-k$ уравнений:

$$Z_\alpha + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_\alpha} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial z_\alpha} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial z_n} = 0$$

(V′) . . . . . .

$$Z_n + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_n} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial z_n} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial z_n} = 0$$

Таким образом у нас будет: k уравнений (II), k уравнений (V) и $3n-k$ уравнений (V′), а всего $3n+k$ уравнений, которые и послужат для определения $3n$ неизвестных координат:

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad \ldots \quad (x_n, y_n, z_n)$$

и k неизвестных множителей:

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots \lambda_k$$

Мы не будем вдаваться в дальнейшие подробности об этой методе, ибо нам не придется ее применять в этом исследовании.

Вторая метода Лагранжа есть метода *координатных параметров*.

Сущность этой методы состоит в следующем.

Вообразим, что в уравнениях связей мы $3n-k=h$ величин приняли бы произвольными и решили бы эти уравнения относительно k остальных; очевидно, что если бы выражения этих k величин в функции остальных мы поставили бы в уравнения связей, то эти уравнения удовлетворялись бы тожественно.

Понятно также, что вместо этих h произвольных (переменных) величин можем ввести такое же число новых переменных

$$q_1, \ q_2, \ \ldots q_h$$

уравнениями вида:

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, \ldots q_h)$$

(*) $$y_1 = y_1(q_1, q_2, \ldots q_h)$$

. . . . . .

Подставляя эти значения в выражения k координат через наши избранные h, мы и эти k координат выразим через переменные:

$$q_1, \ q_2, \ \ldots q_h$$

причем этими выражениями и выражениями (*) уравнения связей будут удовлетворяться *тожественно*; таким образом мы выразим *все* координаты через «параметры»

$$q_1, q_2, \ldots q_h$$

так, что все уравнения связей удовлетворяются *тожественно*.

Пусть эти выражения будут:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(q_1, q_2, \ldots q_h) \\ y_1 &= \psi_1(q_1, q_2, \ldots q_h) \\ z_1 &= \omega_1(q_1, q_2, \ldots q_h) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \varphi_n(q_1, q_2, \ldots q_h) \\ y_n &= \psi_n(q_1, q_2, \ldots q_h) \\ z_n &= \omega_n(q_1, q_2, \ldots q_h) \end{aligned} \tag{1}$$

Мы видели, что условия равновесия системы получаются из уравнения

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0 \tag{IV}$$

но, в силу уравнений (1), будет:

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_h}\cdot \delta q_h \\ \delta y_i &= \frac{\partial \psi_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \psi_i}{\partial q_h}\cdot \delta q_h \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n) \\ \delta z_i &= \frac{\partial \omega_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \omega_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \omega_i}{\partial q_h}\cdot \delta q_h \end{aligned} \tag{2}$$

причем опять-таки эти выражения таковы, что ими уравнения связей, а значит, и уравнение (III), удовлетворяются тожественно.

Подставляем выражения (2) в уравнение (IV). По подстановке в уравнения (IV), мы ему придадим вид

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_h \delta q_h = 0 \tag{V''}$$

а так как

$$\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_h$$

произвольные бесконечно малые величины, то это уравнение не иначе имеет место, как если

$$(V'') \qquad Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad Q_3 = 0, \quad \ldots \quad Q_h = 0$$

где

$$(V''') \qquad Q_\alpha = \sum_{i=1}^{i=n} \left(X_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_\alpha} + Y_i \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha} + Z_i \frac{\partial \omega_i}{\partial q_\alpha} \right)$$

Уравнения (V'') и послужат для определения тех значений параметров, при которых система находится в равновесии.

Обыкновенно во всяком частном вопросе бывает возможно, не переходя через составление уравнений связей в прямоугольных координатах, выбрать те координатные параметры, которыми вполне определяется положение и конфигурация системы, и непосредственно составить выражения (1) и выражения (V''').

§ **17.** Перейдем теперь к составлению уравнений движения материальной системы; из этих уравнений мы и получим затем общие уравнения движения твердого тела.

Уравнения движения свободной материальной точки можно написать в таком виде:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \sum X - m\frac{d^2x}{dt^2} &= 0 \\ \sum Y - m\frac{d^2y}{dt^2} &= 0 \\ \sum Z - m\frac{d^2z}{dt^2} &= 0 \end{aligned}$$

причем $\sum X$, $\sum Y$, $\sum Z$ суть суммы проекций всех сил, действующих на точку, масса коей m и координаты которой суть x, y, z, рассматриваемые как неизвестные функции времени t; дифференциальные уравнения (1) и служат вместе с начальными условиями для определения этих функций, т. е. движения точки.

Уравнения (1) имеют совершенно тот же вид, как уравнения равновесия точки, если вообразить, что на нее действует, сверх сил, непосредственно приложенных, суммы проекций коих суть:

$$\sum X, \quad \sum Y, \quad \sum Z$$

еще сила F, которой проекции суть:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}; \quad -m\frac{d^2y}{dt^2}; \quad -m\frac{d^2z}{dt^2}$$

т. е. сила, по величине равная произведению из массы точки на ее ускорение и направленная в сторону, противоположную этому ускорению. Эта фиктивная сила называется *силою инерции.*

Таким образом можно сказать, что при движении свободной материальной точки имеет место равновесие между силами, к ней непосредственно приложенными, и силою инерции.

Если точка не свободна, а должна, напр., двигаться по заданной поверхности

$$F(x, y, z) = 0$$

то можно рассуждать так: при движении точка, будучи вынужденной оставаться на поверхности, производит на нее некоторое давление и, значит, встречает противоположно направленное и равное ему противодействие поверхности. Это противодействие представляет собою силу, приложенную к точке, поэтому, если бы поверхность убрать, но зато во всякий момент прилагать к точке сказанную силу, то можно бы точку рассматривать как свободную, и тогда имело бы место равновесие между: силами, к точке непосредственно приложенными, силою, представляющей противодействие поверхности, и силою инерции.

Но вместо того, чтобы прилагать сказанное противодействие и считать точку свободной, можно восстановить ту связь, которая этим противодействием заменена, тогда можно сказать, что при посредстве связи, коей точка подчинена, имеет место равновесие между силою инерции и силами, к точке непосредственно приложенными и значит, в нашем случае уравнения движения точки написались бы, пользуясь «методою множителей», так:

$$\left(X + \lambda\frac{\partial F}{\partial x} - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y + \lambda\frac{\partial F}{\partial y} - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z + \lambda\frac{\partial F}{\partial z} - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0 \tag{1}$$

Это уравнение распадается на три следующих:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\frac{\partial F}{\partial y} \tag{1'}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda\frac{\partial F}{\partial z}$$

причем к этим трем дифференциальным уравнениям надо присоединить еще и заданное конечное уравнение связи

$$F(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

В общем случае, при движении системы материальных точек, каждая точка находится под действием сил, к ней непосредственно приложенных, как *внешних*, т. е. происходящих от масс, к рассматриваемой системе не принадлежащих, так *внутренних*, т. е. происходящих от прочих точек самой системы, и наконец, *противодействий* связей, коим эта точка подчинена. Если эти противодействия причислить, подобно тому как мы делали выше для одной точки, к силам, действующим на точки системы, то систему можно рассматривать как «свободную», т. е. в которой связей нет, тогда для каждой точки можно сказать, что имеет место равновесие между силами, непосредственно к этой точке приложенными, противодействиями, заменяющими связи, и силою инерции этой точки.

Но можно, вместо того, чтобы заменять связи указанными противодействиями, эти связи восстановить и сказать, *что во всякий момент при посредстве связей имеет место равновесие между силами, действующими на каждую точку системы, как внутренними, так и внешними, и силами инерции.*

В этом и состоит так называемый принцип Даламберта, сводящий составление уравнений движения системы к составлению уравнений равновесия.

Пусть $m_1, m_2, \ldots m_n$ суть массы соответствующих точек системы, (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), $\ldots$ (x_n, y_n, z_n) — координаты этих точек.

Определить движение системы — значит выразить координаты всех ее точек в функции времени так, что для любого заданного момента (частного значения времени) можно вычислить координаты любой точки системы.

При движении системы точек, уравнения связей могут вообще заключать и время t явным образом, т. е. быть вида:

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} &F_1(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &F_k(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0 \end{aligned}$$

Итак, положим, что имеется система точек, массы коих $m_1, m_2, \ldots m_n$ и которые подчинены связям, выражаемым уравнениями (I). Пусть равнодействующая всех внешних и внутренних сил, приложенных к точке m_1,

есть G_1, составляющие ее по осям координат суть X_1, Y_1, Z_1, точно так же для точки m_2 — сила G_2, которой составляющие X_2, Y_2, Z_2, ... и т. д., для точки m_n — сила G_n, коей составляющие X_n, Y_n, Z_n; требуется составить дифференциальные уравнения движения этой системы.

По определению, составляющие сил инерции точек системы суть:

$$
\begin{array}{lll}
-m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}, & -m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}, & -m_1\frac{d^2z_1}{dt^2} \\
-m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}, & -m_2\frac{d^2y_2}{dt^2}, & -m_2\frac{d^2z_2}{dt^2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\
-m_n\frac{d^2x_n}{dt^2}, & -m_n\frac{d^2y_n}{dt^2}, & -m_n\frac{d^2z_n}{dt^2}
\end{array}
$$

По принципу Даламберта имеет место равновесие между силами инерции и силами, действующими на точки системы во всякий момент времени t, на основании связей, в *этот момент* в системе существующих; следовательно, мы будем иметь уравнение

$$
\text{(II)}\qquad \sum_{i=1}^{i=n}\left[\left(X_i - m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)\delta x_i + \left(Y_i - m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right)\delta y_i + \left(Z_i - m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)\right]\delta z_i = 0
$$

для всех «возможных», т. е. удовлетворяющих уравнениям связей, перемещений. Для составления тех линейных уравнений, коим эти бесконечно малые перемещения удовлетворяют, надо дифференцировать уравнения (I), *рассматривая в них время t как постоянную,* ибо нам надо найти зависимость между бесконечно малыми перемещениями, «возможными» в данный момент t, а не в два последующие момента t и $t+\delta t$.

Таким образом из уравнения (I) имеем:

$$
\text{(I')}\qquad
\begin{array}{l}
\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\cdot\delta x_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdot\delta y_1 + \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\delta z_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial z_n}\cdot\delta z_n = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{F\partial_k}{\partial x_1}\cdot\delta x_1 + \frac{\partial F_k}{\partial y_1}\cdot\delta y_1 + \frac{\partial F_k}{\partial z_1}\cdot\delta z_1 + \ldots + \frac{\partial F_k}{\partial z_n}\cdot\delta z_n = 0
\end{array}
$$

Применяя методу множителей как указано в § 16, мы из уравнений (II) и (I) получим следующие дифференциальные уравнения движения нашей материальной системы:

$$
\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} &= X_1 + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_1} \\
m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} &= Y_1 + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial y_1} \\
m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} &= Z_1 + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial z_1} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial z_1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
m_n \frac{d^2x_n}{dt^2} &= X_n + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_n} \\
m_n \frac{d^2y_n}{dt^2} &= Y_n + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_n} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_n} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial y_n} \\
m_n \frac{d^2z_n}{dt^2} &= Z_n + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_n} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial z_n} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial z_n}
\end{aligned}
\qquad \text{(III)}
$$

Таким образом получается система $3n$ дифференциальных уравнений второго порядка, к этим уравнениям надо еще присоединить k конечных уравнений связей (I); эти $3n + k$ уравнений и послужат для определения $3n + k$ неизвестных, т. е. $3n$ координат и k множителей.

Интегрирование этой системы внесет $6n$ произвольных постоянных, которые определятся по начальным условиям, т. е. по заданию в начальный момент $t = t_0$ положения каждой точки системы и той скорости, которою каждая точка в этот начальный момент обладает.

Мы ограничимся этим общим замечанием, и в тех непосредственных приложениях, которые мы имеем в виду, мы не будем пользоваться этою формою уравнений движения, называемой первой Лагранжевой формой их.

§ 18. Соответственно тому, как в § 16 была приведена вторая метода Лагранжа для составления уравнений равновесия системы: введение независимых координатных параметров, так и для дифференциальных уравнений движения системы им же дана вторая форма.

Итак, положим, что конфигурация и положение системы вполне определяются $h = 3n - k$ независимыми координатными параметрами:

$$q_1, q_2, q_3, \ldots q_h$$

такими, что если через них выразить координаты точек системы уравнениями вида

$$\text{(IV)}\qquad \begin{aligned} x_i &= \varphi_i(q_1, q_2, \ldots q_h, t) \\ y_i &= \psi_i(q_1, q_2, \ldots q_h, t) \\ z_i &= \omega_i(q_1, q_2, \ldots q_h, t) \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

то уравнения связей (I) этими выражениями координат удовлетворяются *тожественно.*

Заметим, что так как в общем случае уравнения связей могут содержать и время t явным образом, то и выражения (IV) координат точек системы могут содержать время явно.

Требуется составить те дифференциальные уравнения, которыми определяются координатные параметры $q_1, q_2, \ldots q_h$ при движении системы.

Понятно, что мы этого достигнем заменив в уравнении (V″) § 16 величины X_i, Y_i, Z_i, соответственно, через

$$X_i - m_i \frac{d^2x_i}{dt^2}, \quad Y_i - m_i \frac{d^2y_i}{dt^2}, \quad Z_i - m_i \frac{d^2z_i}{dt^2}$$

т. е. присовокупив к числу сил, приложенных к точкам системы, и силы инерции этих точек.

Сделав эту замену, напишем это уравнение так:

$$\text{(II)}\qquad (Q_1 - P_1)\delta q_1 + (Q_2 - P_2)\delta q_2 + \ldots + (Q_h - P_h)\delta q_h = 0$$

причем

$$P_\alpha = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\frac{d^2x_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_\alpha} + \frac{d^2y_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha} + \frac{d^2z_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial \omega_i}{\partial q_\alpha} \right]$$

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{i=n} \left(X_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_\alpha} + Y_i \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha} + Z_i \frac{\partial \omega_i}{\partial q_\alpha} \right)$$

и, как уже указано:

$$\begin{aligned} x_i &= \varphi_i(q_1, q_2, \ldots q_h, t) \\ y_i &= \psi_i(q_1, q_2, \ldots q_h, t) \\ z_i &= \omega_i(q_1, q_2, \ldots q_h, t) \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n)$$

Уравнение (III), которое должно иметь место при всяких бесконечно малых

$$\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_h$$

распадается на следующие h уравнений:

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} P_1 &= Q_1 \\ P_2 &= Q_2 \\ &\cdots \\ P_h &= Q_h \end{aligned}$$

Выразив в этих уравнениях $\frac{d^2x_1}{dt^2}$, $\frac{d^2y_1}{dt^2}$, $\ldots$ $\frac{d^2z_n}{dt^2}$ через переменные $q_1, \ldots q_h$ и их производные первого и второго порядков и время t, пользуясь для этого уравнениями (I), мы и получим требуемые h дифференциальных уравнений для определения параметров $q_1, q_2, \ldots q_h$, а значит, и движения системы.

Но такой прием потребовал бы сложных выкладок, которые все могут быть обойдены, ибо Лагранж показал, каким образом могут быть составлены уравнения (III), не прибегая к двукратному дифференцированию уравнения (I).

§ **19.** В уравнениях (III) выражения для Q_α не требуют преобразования, ибо они составляются непосредственно подстановкою; надо показать, каким образом преобразуются выражения P_α:

$$P_\alpha = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\frac{d^2x_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_\alpha} + \frac{d^2y_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha} + \frac{d^2z_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial \omega_i}{\partial q_\alpha} \right)$$

Это выражение можно написать, делая для каждого члена то преобразование, которым пользуются при интегрировании по частям, так:

$$P_\alpha = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_\alpha} + \frac{dy_i}{dt} \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha} + \frac{dz_i}{dt} \cdot \frac{\partial \omega_i}{\partial q_\alpha} \right)$$
$$- \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{d\,\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_\alpha}}{dt} + \frac{dy_i}{dt} \cdot \frac{d\,\frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha}}{dt} + \frac{dz_i}{dt} \cdot \frac{d\,\frac{\partial \omega_i}{\partial q_\alpha}}{dt} \right].$$

Здесь надо обратить внимание, что знаками ∂ обозначены частные производные, знаком же d — полная производная по времени t.

Положим для сокращения письма:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i', \quad \frac{dy_i}{dt} = y_i', \quad \frac{dz_i}{dt} = z_i'$$

$$\frac{dq_1}{dt} = q_1', \quad \frac{dq_2}{dt} = q_2', \quad \ldots \quad \frac{dq_h}{dt} = q_h'$$

тогда предыдущее равенство напишется так:

$$P_\alpha = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(x_i'\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_\alpha} + y_i'\frac{\partial\psi_i}{\partial q_\alpha} + z_i'\frac{\partial\omega_i}{\partial q_\alpha}\right)$$
$$-\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(x_i'\frac{d\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_\alpha}}{dt} + y_i'\frac{d\frac{\partial\psi_i}{\partial q_\alpha}}{dt} + z_i'\frac{d\frac{\partial\omega_i}{\partial q_\alpha}}{dt}\right)$$

Но так как

$$x_i = \varphi_i(q_1, q_2, \ldots q_n, t)$$

то будет

(**) $$\frac{dx_i}{dt} = x_i' = \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_1}\cdot q_1' + \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_2}\cdot q_2' + \ldots + \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_n}\cdot q_n' + \frac{\partial\varphi_i}{\partial t}$$

Отсюда следует

(*) $$\frac{\partial x_i'}{\partial q_\alpha'} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_\alpha}$$

Точно так же будет:

(*) $$\frac{\partial y_i'}{\partial q_\alpha'} = \frac{\partial\psi_i}{\partial q_\alpha}$$

(*) $$\frac{\partial z_i'}{\partial q_\alpha'} = \frac{\partial\omega_i}{\partial q_\alpha}$$

Следовательно, первая сумма в выражении P_α может быть написана так:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left[x_i'\cdot\frac{\partial x_i'}{\partial q_\alpha'} + y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_\alpha'} + z_i'\frac{\partial z_i'}{\partial q_\alpha'}\right]$$

Чтобы преобразовать вторую сумму, составим выражение $\frac{d\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_\alpha}}{dt}$ в развитой форме, имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial q_1\partial q_\alpha}\cdot q_1' + \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial q_2\partial q_\alpha}q_2' + \ldots + \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial q_h\partial q_\alpha}q_h' + \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t\,\partial q_\alpha}$$

С другой стороны, составив частную производную от x_i' [форм. (**)] по переменной q_α, имеем

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial q_1\partial q_\alpha}\cdot q_1' + \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial q_2\partial q_\alpha}q_2' + \ldots + \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial q_h\partial q_\alpha}q_h' + \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial q_\alpha\partial t}$$

так как

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t\,\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial q_\alpha\partial t}$$

то из сличения двух предыдущих равенств следует

$$(***) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial x_i'}{\partial q_\alpha}$$

совершенно так же получим:

$$(***) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial y_i'}{\partial q_\alpha}$$

$$(***) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial z_i'}{\partial q_\alpha}$$

и значит, вторая сумма в выражении P_i будет

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_\alpha} + y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_\alpha} + z_i'\frac{\partial z_i'}{\partial q_\alpha}\right)$$

Таким образом будет

$$P_\alpha = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left[x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_\alpha'} + y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_\alpha'} + z_i'\frac{\partial z_i'}{\partial q_\alpha'}\right]$$
$$- \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_\alpha} + y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_\alpha} + z_i'\frac{\partial z_i'}{\partial q_\alpha}\right)$$

Припомнив, что живою силою материальной точки называется половина произведения из ее массы на квадрат скорости, видим, что живая сила нашей системы точек, равная сумме живых сил всех ее точек, будет

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$$

Отсюда следует, что первая сумма в выражении P_α есть частная производная от живой силы по переменной q_α' и вторая сумма есть частная производная от живой силы по переменной q_α, так что будет

$$P_\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$$

Заметив, что выражение

$$Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_h\delta q_h$$

произошло от преобразования к новым переменным q выражения

$$\delta U = \sum_{i=1}^{i=n}(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i)$$

представляющего элементарную работу, видим, что и предыдущая сумма есть элементарная работа всех сил системы; в ней член $Q_\alpha \delta q_\alpha$ есть, следовательно, элементарная работа, производимая всеми силами, действующими на точки системы, когда параметр q_α получает приращение δq_α. На основании этого замечания часто можно упростить составление выражений Q_α и не прибегать к общему их виду.

Таким образом уравнения движения системы напишутся по схеме:

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_h'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} &= Q_h \end{aligned}$$

Следовательно, для составления дифференциальных уравнений движения в каких угодно координатных параметрах

$$q_1,\ q_2,\ q_3, \ldots q_h$$

не зависимых между собой и вполне определяющих положение и конфигурацию системы, т. е. таких, что через них выражаются координаты всех точек системы *конечными уравнениями* и этими выражениями уравнения связей удовлетворяются тожественно, надо составлять выражения через эти координатные параметры и их производные по времени:

во-первых, живой силы

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = T(q_1, q_2, \ldots q_h, q_1', q_2', \ldots q_h', t)$$

во-вторых, элементарной работы

$$\delta U = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_h \delta q_h$$

тогда уравнения движения получатся по схеме (I), называемой их второй Лагранжевой формой.

§ **20.** Чтобы применить предыдущие выводы к составлению уравнений движения твердого тела, нам, прежде всего, надо составить выражение живой силы твердого тела, которое мы будем сперва предполагать однородным.

Для определения положения твердого тела в пространстве будем поступать как указано в § 7, т. е. берем в теле какую угодно постоянную точку G и проводим через нее три взаимно перпендикулярные оси $Gxyz$, неизменно связанные с телом. Затем берем какую-нибудь неизменную неподвижную систему координат $o\xi\eta\zeta$ в пространстве, тогда положение всякой точки в теле определяется ее координатами x, y, z; положение той же точки в пространстве определяется ее координатами ξ, η, ζ (фиг. 18), причем между этими величинами и предыдущими имеют место уравнения [(1), (1′), (1″) § 7]:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ \eta &= \eta_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ \zeta &= \zeta_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{aligned} \tag{1}$$

Когда тело движется, то с течением времени изменяются величины ξ_0, η_0, ζ_0 и $a_1, a_2, \ldots c_3$, величины же x, y, z от времени не зависят.

Дифференцируя выражения (1), мы получим проекции скорости нашей точки:

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi_0' + a_1' x + a_2' y + a_3' z \\ \eta' &= \eta_0' + b_1' x + b_2' y + b_3' z \\ \zeta' &= \zeta_0' + c_1' x + c_2' y + c_3' z \end{aligned} \tag{2}$$

Причем, как видно, члены $\xi_0', \eta_0', \zeta_0'$ суть проекции скорости V_0 точки G. Если бы тело (иначе оси $oxyz$) не вращалось, то все величины $a_1', \ldots c_3'$ были бы равны нулю — тело двигалось бы поступательно и скорости всех его точек были бы одинаковы, т. е. между собою равны и параллельны и равны скорости V_0 точки G.

Члены

$$(a_1' x + a_2' y + a_3' z);\ (b_1' x + b_2' y + b_3' z);\ (c_1' x + c_2' y + c_3' z)$$

представляют проекции вращательной скорости точки (x, y, z) тела. Как видно, они не зависят от координат точки G и остаются неизменными, движется ли эта точка, или находится в покое. В § 12 показаны различные выражения проекций этой вращательной скорости.

Назовем для краткости письма эти проекции, соответственно, через V_ξ, V_η, V_ζ, тогда формулы (2) напишутся:

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi_0' + V_\xi \\ \eta' &= \eta_0' + V_\eta \\ \zeta' &= \zeta_0' + V_\zeta \end{aligned} \tag{3}$$

и показывают, что скорость каждой точки тела слагается (геометрически) из поступательной скорости какой-либо его точки G и вращательной около этой точки, принимаемой за неподвижную.

Живая сила тела равна сумме живых сил всех частиц его. Пусть m есть масса той частицы, коей координаты суть x, y, z, тогда будет

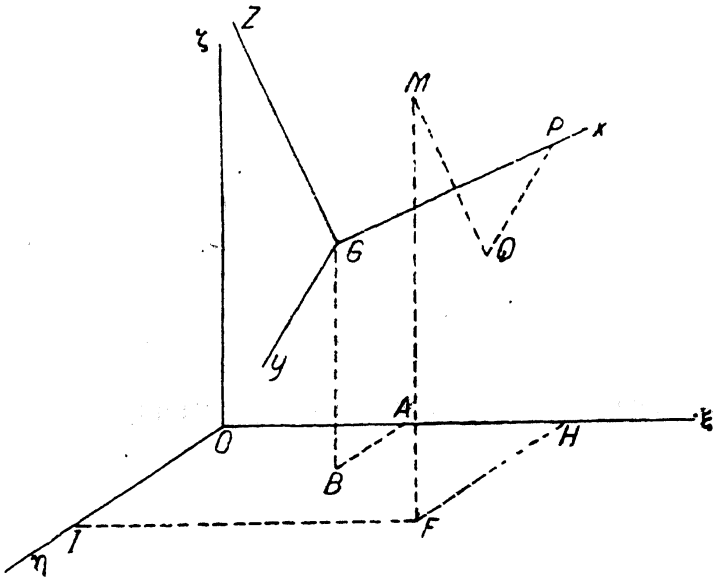
$$2T = \sum m(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) =$$

$$= \sum m[(\xi_0' + V_\eta)^2 + (\eta_0' + V_\eta)^2 + (\zeta_0' + V_\zeta)^2] =$$

$$= (\xi_0'^2 + \eta_0'^2 + \zeta_0'^2)\sum m + 2\xi_0' \sum mV_\xi + 2\eta_0' \sum mV_\eta + 2\zeta_0' \sum mV_\zeta +$$

$$+ \sum m(V_\xi^2 + V_\eta^2 + V_\zeta^2)$$

где все суммы должны распространяться на все частицы тела.



Фиг. 18.

Очевидно, что $\sum m$, т. е. сумма масс всех частиц тела, есть масса M всего тела.

Предыдущее выражение примет более простой вид, если за точку G принять центр тяжести тела.

В самом деле, тогда по определению центра тяжести, будет:

$$\sum mx = 0, \quad \sum my = 0, \quad \sum mz = 0$$

Но

$$V_\xi = a_1' x + a_2' y + a_3' z$$

Значит,

$$\sum mV_\xi = a_1' \sum mx + a_2' \sum my + a_3' \sum mz = 0$$

так как a_1', a_2', a_3' от x, y, z не зависят. Таким образом будет

$$2T = (\xi_0'^2 + \eta_0'^2 + \zeta_0'^2) M + \sum m (V_\xi^2 + V_\eta^2 + V_\zeta^2) \tag{4}$$

Что выражает такое свойство:

Живая сила твердого тела равна живой силе материальной точки, масса которой равна массе тела и скорость которой равна скорости центра тяжести тела плюс живая сила вращательного движения тела около его центра тяжести, принимаемого за неподвижный.

Разовьем теперь подробнее выражение живой силы вращательного движения тела.

Положим, что в рассматриваемый момент тело вращается около мгновенной оси GA с угловою скоростью ω и что m есть та частица, координаты которой суть x, y, z (фиг. 19), тогда ее скорость v равна по величине произведению

$$\omega\rho = \omega \cdot mH$$

где $mH = \rho$ есть расстояние рассматриваемой точки до оси; живая сила этой точки будет

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot \rho^2$$

следовательно, живая сила T_1 всего тела при вращательном движении его будет

$$T_1 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m\rho^2$$

множитель ω^2 вынесен за знак суммы, ибо он один и тот же для всех частиц тела.

Сумма $\sum m\rho^2$, т. е. сумма произведений масс всех частиц тела на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси, называется *моментом инерции тела* около этой оси.

Итак, живая сила вращательного движения твердого тела равна половине произведения квадрата угловой скорости на момент инерции относительно оси вращения.

Положим, что ось вращения GA составляет с осями $Gxyz$ (фиг. 19) углы α, β, γ, тогда проекции угловой скорости на оси координат суть:

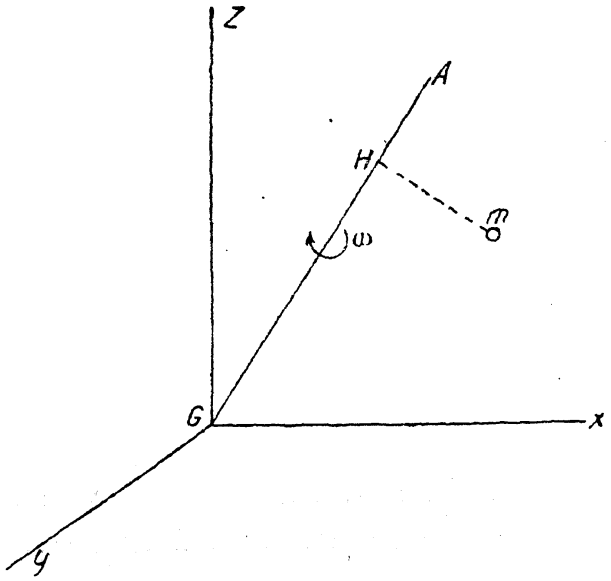
$$\omega \cos\alpha = p, \quad \omega \cos\beta = q, \quad \omega \cos\gamma = r$$

вместе с тем линейная скорость точки $m(x, y, z)$ имеет своими проекциями на те же оси:

$$v_x = qz - ry$$
$$v_y = rx - pz$$
$$v_z = py - qx$$

так что квадрат скорости этой точки есть

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$



Фиг. 19.

Таким образом будет

$$2T_1 = \sum mv^2 = \sum m[(qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2] =$$
$$= p^2 \sum m(y^2 + z^2) + q^2 \sum m(x^2 + z^2) + r^2 \sum m(x^2 + y^2)$$
$$- 2pq \sum mxy - 2pr \sum mxz - 2qr \sum myz$$

Положим:

$$\sum m(y^2 + z^2) = A; \quad \sum m(x^2 + z^2) = B; \quad \sum m(x^2 + y^2) = C$$
(5)
$$\sum mxy = D; \quad \sum mxz = E; \quad \sum myz = F$$

все эти величины для данного тела и заданного в нем положения осей будут некоторые вполне определенные постоянные, причем, как видно, A есть момент инерции тела около оси ox; B — момент инерции около оси oy и C — момент инерции около оси oz. Величины же D, E, F у английских авторов

называются «произведения инерции» (products of inertia), в русской же научной литературе принят термин «центробежные моменты». Таким образом удвоенная живая сила вращательного движения твердого тела выражается формулою

$$2T_1 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dpq - 2Epr - 2Fqr \tag{6}$$

С другой стороны, обозначая через I — момент инерции около оси OA, мы для той же живой силы имели формулу

$$2T_1 = I \cdot \omega^2 \tag{7}$$

Заметив, что

$$p = \omega \cos\alpha;\ q = \omega \cos\beta;\ r = \omega \cos\gamma$$

подставим эти выражения в формулу (6), тогда, уравняв выражения (6) и (7), по сокращении на ω^2, получим

$$\begin{aligned} I = {} & A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - 2D\cos\alpha\cos\beta \\ & - 2E\cos\alpha\cos\gamma - 2F\cos\beta\cos\gamma \end{aligned} \tag{8}$$

Эта формула дает зависимость момента инерции I относительно оси, составляющей с осями координат углы α, β, γ, от моментов инерции и центробежных моментов, взятых относительно осей координат.

Не приводя выводов и доказательств, упомянем, что во всяком теле всегда можно выбрать три взаимно перпендикулярные оси так, чтобы по отношению к этим осям было:

$$\sum mxy = 0,\ \sum mxz = 0,\ \sum myz = 0 \tag{9}$$

такие оси называются *главными осями* и соответствующие им моменты инерции — *главными моментами инерции.*

Нетрудно видеть, что для однородного тела вращения ось симметрии будет главною, т. е. что оба центробежные моменты, относящиеся к этой оси, будут равны нулю.

В самом деле, положим, что такою осью является ось ox, тогда в сумме $\sum mxy$ для всякого избранного значения x и y будет равный член с тем же значением x и обратным значением y, так что эти два элемента суммы уничтожаются и сумма $\sum mxy$ будет равна нулю. Совершенно так же и сумма $\sum mxz = 0$, а это и выражает, что ось ox есть главная.

Другие две главные оси лежат в плоскости yoz, перпендикулярной к оси ox, и так как в этой плоскости, какую бы ось ни брать, моменты инерции одинаковы, то любая ось в плоскости xoy может быть взята за главную.

Таким образом, приняв для тела вращения ось ox за ось симметрии, видим, что его моменты инерции будут:

$$A,\ B \text{ и } B$$

ибо момент инерции $C = B$.

Как уже сказано, мы начало координат берем в центре тяжести тела, тогда оказывается, что если

$$A < B$$

то этот момент инерции есть наименьший из всех моментов инерции этого тела, взятых относительно любой оси.

Мы не будем приводить других свойств моментов инерции, ибо они нам в дальнейшем не понадобятся.

Таким образом живая сила вращательного движения твердого тела выразится

$$2T_1 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 \tag{10}$$

если за оси в теле приняты его главные оси инерции.

Если, кроме того, это тело есть тело вращения, то будет

$$2T_1 = Ap^2 + B(q^2 + r^2) \tag{10'}$$

предполагая, что ось симметрии тела есть ось ox.

Вместе с тем формула (8) примет вид

$$I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma \tag{11}$$

и

$$I = A\cos^2\alpha + B(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) \tag{11}$$

но так как

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

то будет

$$\cos^2\beta + \cos^2\gamma = \sin^2\alpha$$

и последняя формула напишется так:

$$I = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha \tag{12}$$

Заметим, что эту формулу можно писать так:

$$I = A + (B - A)\sin^2\alpha = B - (B - A)\cos^2\alpha$$

отсюда и видно, что если

$$B > A$$

то

$$A < I < B$$

т. е. A есть наименьший из моментов инерции и B — наибольший для всех осей, проведенных через точку O.

§ **21.** Прежде чем составить уравнения движения твердого тела, рассмотрим два общих свойства движения какой угодно системы точек.

Пусть $m_1, m_2, \ldots m_n$ — массы точек системы,

$$(x_1, y_1, z_1),\ (x_2, y_2, z_2),\ \ldots\ (x_n, y_n, z_n)$$

— координаты этих точек, и пусть между этими точками существуют связи, выражающиеся уравнениями, не содержащими явно времени t, т. е. уравнениями вида

$$F_\alpha(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots k)$$

Силы, действующие на точки системы, подразделим на три группы: 1) силы внешние, т. е. такие, которые происходят от масс, не принадлежащих к системе, или от каких иных причин, 2) силы внутренние, которые происходят от взаимодействий между точками системы, и 3) противодействия или, как их зовут, реакции связей.

Условимся обозначать: сумму проекций на оси координат внешних сил, приложенных к точке m_h, через

$$X_e^{(h)},\ Y_e^{(h)},\ Z_e^{(h)}$$

сумму проекций внутренних сил, приложенных к той же точке и происходящих от действия на эту точку (m_h) массы m_j, через

$$X_{jh},\ Y_{jh},\ Z_{jh}$$

Заметим здесь же, что действие массы m_h на массу m_j имеет слагающие:

$$X_{hj},\ Y_{hj},\ Z_{hj}$$

и так как это действие равно и прямопротивоположно предыдущему, то будет:

$$X_{jh} = -X_{hj};\ Y_{jh} = -Y_{hj};\ Z_{jh} = -Z_{hj}$$

Наконец, проекции реакции связи

$$F_\alpha(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n) = 0$$

обозначим через

$$N_\alpha^{(h)},\ P_\alpha^{(h)},\ Q_\alpha^{(h)}$$

При этих обозначениях уравнения движения точек системы напишутся так:

$$\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} &= X_e^{(1)} + \sum_j X_{j1} + \sum_\alpha N_\alpha^{(1)} \\
m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} &= Y_e^{(1)} + \sum_j Y_{j1} + \sum_\alpha P_\alpha^{(1)} \\
m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} &= Z_e^{(1)} + \sum_j Z_{j1} + \sum_\alpha Q_\alpha^{(1)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
m_n \frac{d^2x_n}{dt^2} &= X_e^{(n)} + \sum_j X_{jn} + \sum_\alpha N_\alpha^{(n)} \\
m_n \frac{d^2y_n}{dt^2} &= Y_e^{(n)} + \sum_j Y_{jn} + \sum_\alpha P_\alpha^{(n)} \\
m_n \frac{d^2z_n}{dt^2} &= Z_e + \sum_j Z_{jn} + \sum_\alpha Q_\alpha^{(n)}
\end{aligned} \tag{1}$$

Прежде всего, сличая эти уравнения с уравнениями (III) § 17, видим, что, напр., в первом уравнении стоит сумма

$$\sum_\alpha N_\alpha^{(1)} = N_1^{(1)} + N_2^{(1)} + \ldots + N_k^{(1)}$$

в уравнениях же (III) § 17 стоит сумма

$$\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_1}$$

причем и та и другая сумма представляет то действие, которое оказывают связи на точку m_1, и нетрудно видеть, что так как первые части уравнения (III) и уравнения (1) одинаковы, то будет:

$$N_1^{(1)} = \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1};\quad N_2^{(1)} = \lambda_1 \frac{\partial F_2}{\partial x_1};\quad \ldots\quad N_k^{(1)} = \lambda_1 \frac{\partial F_k}{\partial x_1} \tag{2}$$

аналогичные равенства имеют место и для всех прочих слагающих и для всех точек.

Сложив почленно соответственные уравнения (1), получим:

$$(3)\qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=n} X_e^{(i)} + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\sum_{\alpha} N_\alpha^{(i)} \right) \\ \sum_{i=n}^{i=n} m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \sum_{i=n}^{i=n} Y_e^{(i)} + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\sum_{\alpha} P_\alpha^{(i)} \right) \\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=n} Z_e^{(i)} + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\sum Q_\alpha^{(i)} \right) \end{cases}$$

Сумм, заключающих внутренние силы, мы не пишем, ибо они тожественно равны нулю, так как всякому члену X_{ji} есть равный по величине, но противуположный по знаку член X_{ij}.

Уравнения (3) выражают следующее свойство движения центра тяжести системы.

Обозначим координаты центра тяжести через x_0, y_0, z_0, тогда будет:

$$(*)\qquad \begin{aligned} Mx_0 &= \sum_i m_i x_i \\ My_0 &= \sum_i m_i y_i \\ Mz_0 &= \sum_i m_i z_i \end{aligned}$$

где $M = \sum_i m_i$ есть масса всей системы. Дифференцируя уравнение (*) по времени 2 раза, получим:

$$\begin{aligned} M\frac{d^2 x_0}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \\ M\frac{d^2 y_0}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \\ M\frac{d^2 z_0}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \end{aligned}$$

и уравнения (3) напишутся:

$$M\frac{d^2x_0}{dt^2} = \sum_{i=n}^{i=n} X_e + \sum_{i=1}^{i=n}\left(\sum_{\alpha} N_\alpha^{(i)}\right)$$

$$M\frac{d^2y_0}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=n} Y_e + \sum_{i=1}^{i=n}\left(\sum_{i=1} P_\alpha^{(i)}\right) \qquad (4)$$

$$M\frac{d^2z_0}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=n} Z_e + \sum_{i=1}^{i=n}\left(\sum_{\alpha} Q_\alpha^{(i)}\right)$$

Эти уравнения совершенно подобны уравнениям движения материальной точки, масса которой есть M и к которой была бы приложена сила, равная геометрической сумме (равнодействующей) главного вектора всех *внешних* сил, действующих на все точки системы, и главного вектора реакций связей.

Таким образом имеем следующий закон движения центра тяжести системы: *Центр тяжести системы движется так, как двигалась бы материальная точка, масса коей равна массе всей системы, под действием главного вектора всех сил вместе с главным вектором реакций связей.*

Во многих случаях, в частности когда связи системы состоят в том, что расстояния между точками системы неизменны (как для твердого тела), то главный вектор таких связей равен нулю.

В самом деле, неизменность расстояния, напр. между точкою m_1 и m_2 выражается уравнением

$$F_1(x_2, \ldots z_1) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} = -2(x_2 - x_1);\ \frac{\partial F_1}{\partial y_1} = -2(y_2 - y_1);\ \frac{\partial F_1}{\partial z_1} = -2(z_2 - z_1)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 2(x_2 - x_1);\ \frac{\partial F_1}{\partial y_2} = 2(y_2 - y_1);\ \frac{\partial F_1}{\partial z_2} = 2(z_2 - z_1)$$

в суммах все эти члены пропадают, тогда уравнения (4) примут вид:

$$M\frac{d^2x_0}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=n} X_e^{(i)}$$

$$M\frac{d^2y_0}{dt^2} = \sum_{i=n}^{i=n} Y_e^{(i)} \qquad (4')$$

$$M\frac{d^2z_0}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=n} Z_e^{(i)}$$

Эти уравнения выражают такое свойство: если главный вектор реакций связей равен нулю, то центр тяжести системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы под действием силы, равной главному вектору всех внешних сил, действующих на все точки системы.

Уравнениям (4') может быть придано и другое толкование; для простоты ограничимся тем случаем, когда главный вектор реакций связей равен нулю.

Имеем:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{dx_i}{dt}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{dy_i}{dt}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \sum m_i \frac{dz_i}{dt}$$

Припомним, что количеством движения материальной точки называется произведение массы этой точки на ее скорость, причем количество движения есть величина *векториальная*, т. е. ему приписывают направление, именно — направление скорости. Отсюда понятно, что количество движения можно проектировать на любую ось и что проекция количества движения на какую-либо ось равна произведению из массы точки на проекцию ее скорости на эту ось.

Таким образом проекции количества движения точки m_i суть:

$$m_i \frac{dx_i}{dt}; \quad m_i \frac{dy_i}{dt}; \quad m_i \frac{dz_i}{dt}$$

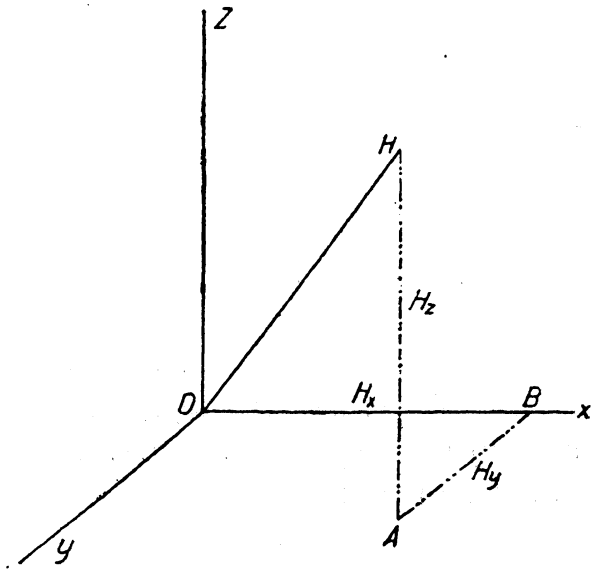
Если взять вектор H, коего проекции на оси координат были бы (фиг. 20)

$$H_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{dx_i}{dt}; \quad H_y = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{dy_i}{dt}; \quad H_z = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{dz_i}{dt}$$

то этот вектор, равный *геометрической* сумме векторов, представляющих количества движения каждой из точек системы, называется количеством движения всей системы, и предыдущие уравнения напишутся:

$$(5) \qquad \frac{dH_x}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} X_e^{(i)}; \quad \frac{dH_y}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} Y_e^{(i)}; \quad \frac{dH_z}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} Z_e^{(i)}$$

Если вообразить, что из начала координат проведен луч, коего проекции на оси были бы H_x, H_y, H_z, то эти величины представили бы координаты конца этого луча. Производные $\frac{dH_x}{dt}$, $\frac{dH_y}{dt}$, $\frac{dH_z}{dt}$ представляют проекции скорости точки H (т. е. конца луча OH), и предыдущие уравнения показывают, что эти проекции скорости точки H равны соответствующим проекциям главного вектора сил, короче говоря: *скорость точки H — конца вектора, изображающего количество движения системы, — по величине и направлению равна главному вектору внешних сил, действующих на систему, предполагая, что главный вектор реакций связей равен нулю.*



Фиг. 20.

§ 22. Возьмем опять те же уравнения [(1) § 21], но будем в них для краткости производные по времени обозначать значками и суммы

$$\sum_\alpha N_\alpha^{(i)}, \quad \sum_\alpha P_\alpha^{(i)}, \quad \sum_\alpha Q_\alpha^{(i)}$$

обозначим просто $N^{(i)}$, $P^{(i)}$, $Q^{(i)}$, суммы

$$\sum_j X_{ji}, \quad \sum_j Y_{ji}, \quad \sum_j Z_{ji},$$

обозначим через $A^{(i)}$, $B^{(i)}$, $C^{(i)}$, тогда уравнения движения напишутся так:

$$\begin{aligned} m_i x_i'' &= X_e^{(i)} + A^{(i)} + N^{(i)} \\ m_i y_i'' &= Y_e^{(i)} + B^{(i)} + P^{(i)} \qquad (i = 1, \ldots n) \\ m_i z_i'' &= Z_e^{(i)} + C^{(i)} + Q^{(i)} \end{aligned}$$

Умножим первое уравнение на $-y_i$, второе — на x_i и сложим; получим, опуская для простоты письма значок i:

$$m(y''x - yx'') = (Y_e x - X_e y) + (Bx - Ay) + (Px - Ny)$$

Заметив, что

$$y''x - yx'' = (y'x - yx')' = \frac{d}{dt}(y'x - yx')$$

получим

$$(*) \quad \frac{d}{dt}[m(y'x - yx')] = (Y_e x - X_e y) + (Bx - Ay) + (Px - Ny)$$

Величина $m(y'x - yx') = my' \cdot x - mx' \cdot y$ представляет собою момент относительно оси z-ов — вектора, изображающего количество движения точки m, совершенно подобно тому, как величина $Y_e x - X_e y$ представляет момент относительно той же оси, силы коей слагающие Y_e и X_e; величину

$$m(y'x - yx')$$

называют, поэтому, моментом количества движения точки m относительно оси z-ов.

Составим выражение, подобное (*), для всех точек системы и сложим их — увидим, что суммы, содержащие силы внутренние, тожественно обратятся в нуль, ибо каждому члену будет соответствовать член, равный и противоположный по знаку, тогда останется

$$(1) \quad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i(y_i' x_i - x_i' y_i) = \sum_{i=1}^{i=n}(Y_e^{(i)} x_i - X_e^{(i)} y_i) + \sum_{i=1}^{i=n}(P^{(i)} x_i - N^{(i)} y_i)$$

Совершенно подобным же образом получатся уравнения:

$$(1') \quad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i(x_i' z_i - z_i' x_i) = \sum_{i=1}^{i=n}(X_e^{(i)} z_i - Z_e^{(i)} x_i) + \sum_{i=1}^{i=n}(N^{(i)} z_i - Q^{(i)} x_i)$$

$$(1'') \quad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i(z_i' y_i - y_i' z_i) = \sum_{i=1}^{i=n}(Z_e^{(i)} y_i - Y_e^{(i)} z_i) + \sum(Q^{(i)} y_i - P^{(i)} z_i)$$

В левой части этих равенств стоят производные по времени от суммы моментов количеств движения относительно осей координат, в правой — суммы моментов внешних сил относительно тех же осей и суммы моментов реакций связей. Совершенно подобно предыдущему увидим, что если связи состоят в том, что точки сохраняют неизменными взаимные расстояния (как в твердом теле), то суммы моментов реакций связей обращаются в нуль, и предыдущие уравнения принимают вид:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i(y_i' x_i - x' y_i) &= \sum_{i=1}^{i=n} (Y_e^{(i)} x_i - X_e^{(i)} y_i)\\
\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i(x_i' z_i - z_i' x_i) &= \sum_{i=1}^{i=n} (X_e^{(i)} z_i - Z_e^{(i)} x_i)\\
\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i(z_i' y_i - y_i' z_i) &= \sum_{i=1}^{i=n} (Z_e^{(i)} y_i - Y_e^{(i)} z_i)
\end{aligned}
$$

Суммы, стоящие в правых частях этих равенств, представляют суммы моментов внешних сил относительно осей координат, или, как говорят, проекции главного момента сил на оси координат, подобно этому суммы в левых частях представляют проекции момента количеств движения системы на те же оси. Изображая и тот и другой момент вектором, имеющим соответствующие проекции, видим, что предыдущие равенства выражают такое свойство: *скорость точки, представляющей конец вектора, изображающего момент количеств движения системы, равна и параллельна вектору, изображающему главный момент внешних сил, действующих на систему, при этом предполагается, что главный момент реакций связей равен нулю.*

Эти два свойства движения системы называются законами количеств движения и моментов количеств движения; они нам понадобятся при составлении уравнений движения твердого тела, отнесенного к осям координат, движущимся как в самом теле, так и в пространстве.

§ **23.** Перейдем теперь к составлению уравнений движения твердого тела и воспользуемся для этого второю Лагранжевой формой уравнений движения любой системы.

Мы рассматриваем твердое тело как систему множества частиц, принимаемых за материальные точки, расстояния между которыми сохраняются неизменными.

Из сказанного в § 7 видно, что положение твердого тела и всякой точки в нем определяется, если, взяв какие-либо неподвижные оси координат в пространстве ($O\xi\eta\zeta$), принять центр тяжести G тела за начало координатных осей $Gxyz$, неизменно с телом связанных, и задать: 1) координаты ξ_0, η_0, ζ_0 точки G, т. е. центра тяжести тела, 2) три Эйлеровы угла ψ, φ, θ, определяющие положение осей $Gxyz$ относительно осей $G\xi_1\eta_1\zeta_1$, параллельных осям $O\xi\eta\zeta$ и проведенным через центр тяжести тела.

Эти шесть не зависимых друг от друга величин и представляют координатные параметры для твердого тела.

Итак, положим, что имеется твердое тело, положение коего определяется как указано выше, и к этому телу приложены различные силы, заданные всеми своими элементами.

Как известно, все силы, приложенные к твердому телу, можно привести к одной силе (главный вектор сил) и к одной паре (главный момент сил). Положим, что такое приведение сделано, причем за начало координат в теле взята точка G — его центр тяжести.

Пусть F есть главный вектор сил и F_ξ, F_η, F_ζ — его проекции на неподвижные оси координат.

Пусть K есть главный момент сил и L, M, N — его проекции на оси Gx, Gy, Gz, неизменные в теле, и пусть M_0 есть масса всего тела.

Мы видели, что когда начало подвижных координат взято в центре тяжести тела, живая сила его выражается так:

$$(1)\qquad \begin{aligned} 2T = M_0(\xi_0'^2 + \eta_0'^2 + \zeta_0'^2) + Ap^2 + Br^2 + Cr^2 - 2Dpq \\ - 2Epr - 2Fqr \end{aligned}$$

где p, q, r — проекции угловой скорости на оси Gx, Gy, Gz и A, B, C — моменты инерции относительно этих осей; D, E, F — центробежные моменты.

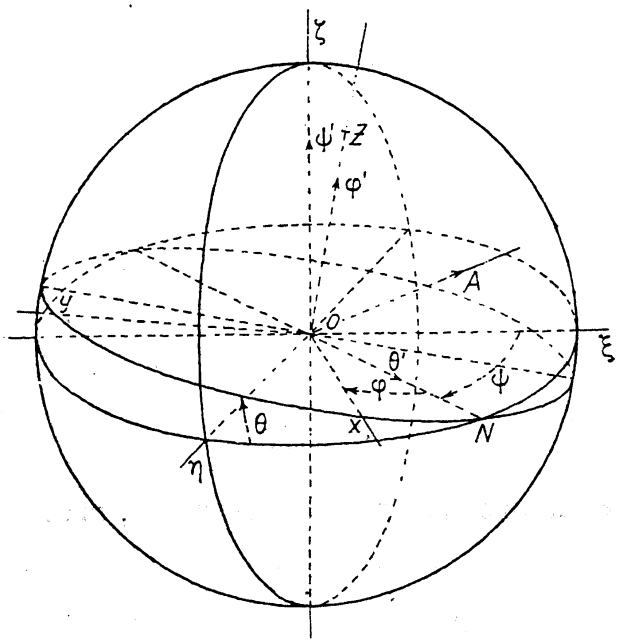
Элементарная работа сил, действующих на тело, выразится так:

$$\delta U + F_\xi \cdot \delta\xi_0 + F_\eta\,\delta\eta_0 + F_\zeta\,\delta\zeta_0 + \Psi\,\delta\psi + \Phi\,\delta\varphi + \Theta\,\delta\theta$$

первые три члена представляют работу главного вектора сил, т. е. их работу при поступательном перемещении тела, последние три — работу при вращательном перемещении.

По схеме [(I) § 19] Лагранжа мы можем сразу написать три уравнения, определяющие поступательное движение тела, это будут уравнения:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_0} &= F_\xi \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \eta_0} &= F_\eta \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \zeta_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \zeta_0} &= F_\zeta \end{aligned}$$



Фиг. 21.

которые, по выполнении дифференцирований, примут вид:

$$(1)\qquad \begin{aligned} M_0 \frac{d^2\xi_0}{dt^2} &= F_\xi \\ M_0 \frac{d^2\eta_0}{dt^2} &= F_\eta \\ M_0 \frac{d^2\zeta_0}{dt^2} &= F_\zeta \end{aligned}$$

Эти уравнения, очевидно, представляют движение центра тяжести тела.

Остается составить уравнения вращательного движения тела около его центра тяжести.

Эти уравнения напишутся по схеме:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = \Psi$$

(2) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \Phi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \Theta$$

причем T дается формулою (1), величины же p, q, r, в эту формулу входящие, выражаются так (§ 13, 2):

$$p = \psi' \sin\varphi \sin\theta + \theta' \cos\varphi$$

(3) $$q = \psi' \cos\varphi \sin\theta - \theta' \sin\varphi$$

$$r = \psi' \cos\theta + \varphi'$$

Заметив, что ось вращения φ' совпадает с осью Gz, видим, что при бесконечно малом перемещении $\delta\varphi$ совершает работу лишь пара N, лежащая в плоскости Gxy, и элементарная работа этой пары будет $N\delta\varphi$, следовательно

$$\Phi = N$$

Значит, не составляя пока других выражений, мы можем писать

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = N$$

Но

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \frac{\partial T}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial \varphi'} + \frac{\partial T}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial \varphi'} + \frac{\partial T}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial \varphi'} = \frac{\partial T}{\partial r}$$

ибо

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi'} = 0; \quad \frac{\partial q}{\partial \varphi'} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial r}{\partial \varphi'} = 1$$

Затем

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial T}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial \varphi} + \frac{\partial T}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial \varphi} = q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q}$$

ибо

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \psi' \cos\varphi \sin\theta - \theta' \sin\varphi = q$$

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi} = -\psi' \sin\varphi \sin\theta - \theta' \cos\varphi = -p$$

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = -0$$

Таким образом имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)+q\frac{\partial T}{\partial p}-p\frac{\partial T}{\partial q}=N=\sum(xY-yX) \tag{4}$$

где N есть момент всех действующих на тело сил относительно оси Gz, т. е. той, проекция угловой скорости на которую есть r; заметив это, можем остальные два уравнения написать простою заменою букв, и у нас будет:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)+p\frac{\partial T}{\partial r}-r\frac{\partial T}{\partial p}&=M=\sum(zX-xZ)\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)+r\frac{\partial T}{\partial q}-q\frac{\partial T}{\partial r}&=N=\sum(yZ-zY)\end{aligned} \tag{4'}$$

В том случае, когда за оси координат приняты главные оси инерции тела, предыдущие уравнения принимают более простой вид, а именно, живая сила будет

$$2T=Ap^2+Bq^2+Cr^2+M_0(\xi_0'^2+\eta_0'^2+\zeta_0'^2) \tag{5}$$

и уравнения вращательного движения тела будут:

$$\begin{aligned}C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq&=N=\sum(xY-yX)\\ B\frac{dq}{dt}+(A-C)pr&=M=\sum(zX-Xz)\\ A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr&=L=\sum(yZ-zY)\end{aligned} \tag{6}$$

причем

$$\begin{aligned}p&=\psi'\sin\varphi\sin\theta+\theta'\cos\varphi\\ q&=\psi'\cos\varphi\sin\theta-\theta'\sin\varphi\\ r&=\psi'\cos\theta+\varphi'\end{aligned} \tag{3}$$

Эти шесть уравнений называются Эйлеровыми уравнениями вращательного движения твердого тела.

В том случае, когда два главные момента инерции между собою равны, выгодно взять за ось z-ов, при вышеуказанном выборе Эйлеровых углов, ось симметрии тела, тогда будет

$$A=B$$

и уравнения вращательного движения примут вид:

$$C\frac{dr}{dt} = N = \sum (xY - yX)$$

$$A\frac{dq}{dt} + (A - C)pr = M = \sum (zX - Xz) \tag{7}$$

$$A\frac{dp}{dt} + (C - A)qr = L = \sum (yZ - zY)$$

Заметим, что в этом случае живая сила будет выражаться так:

$$2T = M_0(\xi_0'^2 + \eta_0'^2 + \zeta_0'^2) + A(p^2 + q^2) + Cr^2 =$$
$$= M_0(\xi_0'^2 + \eta_0'^2 + \zeta_0'^2) + A(\psi'^2 \sin^2\theta + \theta'^2) + C(\psi' \cos\theta + \varphi')^2$$

и не содержит явно самих переменных ψ и φ, тогда будет

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

и Лагранжевы уравнения примут вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right) = \Psi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\right) = \Phi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \Theta$$

§ 24. Мы видели в § 21, что при рассмотрении движения системы имеют важное значение количество движения системы и момент количеств движения, поэтому покажем, каким образом эти величины выражаются для твердого тела.

Чтобы получить количество движения тела, надо составить его проекции на оси координат, ибо количество движения есть величина векториальная, т. е. имеет не только величину, но и направление.

Если обозначим через V_x, V_y, V_z — проекции на оси $Gxyz$ скорости точки, коей координаты суть x, y, z, то заметим, что проекции скорости точки G на оси ξ, η, ζ суть:

$$\xi_0', \eta_0', \zeta_0'$$

проекции же вращательной скорости на оси $Gxyz$ суть:

$$v_x = qz - ry$$
$$v_y = rx - pz$$
$$v_z = py - qx$$

будем иметь

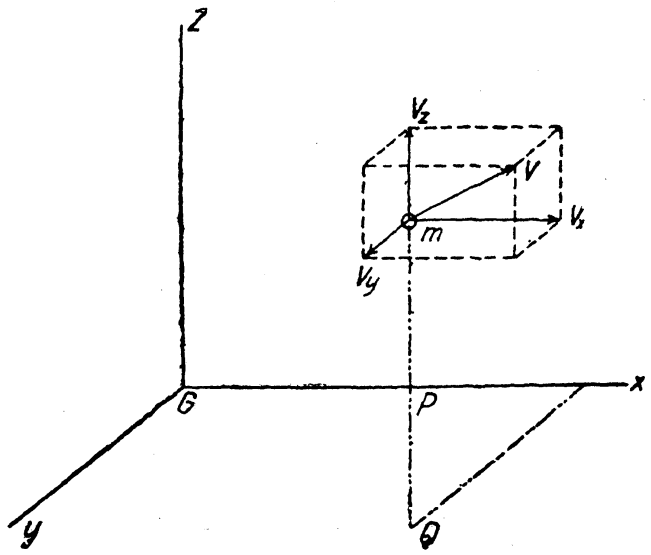
$$V_x = a_1\xi_0' + b_1\eta_0' + c_1\zeta_0' + qz + ry$$

Умножив это выражение на массу m частицы и взяв сумму для всех частиц тела, получим проекцию количества движения тела на ось Ox, именно будет

$$H_x = \sum m V_x = M_0(a_1\xi_0' + b_1\eta_0' + c_1\zeta_0') + q\sum mz - r\sum my$$

но когда за начало координат $Gxyz$ взят центр тяжести тела, то

$$\sum mz = 0 \quad \text{и} \quad \sum my = 0$$



Фиг. 22.

тогда, обратив внимание, что величина $a_1\xi_0' + a_2\eta_0' + a_3\zeta_0'$ есть проекция скорости V_0 центра тяжести тела на ось Gx, т. е. $V_0\cos(\widehat{V_0x})$, получим

$$H_x = M_0 \cdot V_0\cos(\widehat{V_0x})$$

и точно так же:

$$H_y = M_0 \cdot V_0\cos(\widehat{V_0y})$$
$$H_z = M_0 \cdot V_0\cos(\widehat{V_0z})$$

Но M_0V_0 есть количество движения точки, масса которой есть M_0, т. е. равна массе тела, и скорость которой есть V_0, т. е. скорость центра тяжести тела. Таким образом мы видим, что количество движения тела не зависит от формы и распределения масс в теле, а по величине и направлению равно произведению массы тела на скорость его центра тяжести.

Составим теперь выражения момента количеств движения относительно осей Gx, Gy, Gz.

Возьмем, напр., ось Gx и какую-либо частицу m, коей координаты x, y, z (фиг. 22).

Пусть скорость этой частицы есть V, и проекции этой скорости на оси координат пусть будут:

$$V_x,\ V_y,\ V_z$$

тогда проекции, иначе составляющие количества движения mV частицы, параллельные осям координат, суть:

$$mV_x,\ mV_y,\ mV_z$$

момент вектора mV относительно оси Gx, подобно моменту силы, выражается так:

$$mV_z \cdot y - mV_y \cdot z = m(V_z y - V_y z)$$

но мы имеем:

$$V_y = \xi_0' \cdot a_2 + \eta_0' \cdot b_2 + \zeta_0' \cdot c_2 + rx - pz$$
$$V_z = \xi_0' \cdot a_3 + \eta_0' \cdot b_3 + \zeta_0' \cdot c_3 + py - qx$$

Составив выражение $V_z y - V_y z$, умножив его на m и взяв сумму для всех частиц тела, получим момент количества движения около оси Gx; обозначая этот момент через S_x, увидим, что все члены, содержащие множители ξ_0', η_0', ζ_0', пропадут, ибо будут заключать и один из множителей

$$\sum my = 0 \quad \text{и} \quad \sum mz = 0$$

и останутся только члены, содержащие p, q, r, именно будет

$$S_x = p\sum m(y^2 + z^2) - q\sum mxy + r\sum mxz - Ap - Dq - Er$$

пользуясь обозначениями § 23 для момента инерции и центробежных моментов.

Обратив внимание на выражение живой силы, видим, что

$$S_x = \frac{\partial T}{\partial p}$$

Значит, можем сразу написать:

$$S_y = \frac{\partial T}{\partial q} = Bq - Dp - Fr$$

$$S_z = \frac{\partial T}{\partial r} = Cr - Ep - Fq$$

В том случае, когда за оси $Gxyz$ приняты главные оси инерции тела, будет:

$$D = 0,\ E = 0,\ F = 0$$

и предыдущие формулы принимают следующий простой вид:

$$S_x = Ap$$
$$S_y = Bq$$
$$S_z = Cr$$

Полный момент количеств движения

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$$

и направление его определяется следующими косинусами углов с осями $Gxyz$, именно:

$$\cos(\hat{Sx}) = \frac{S_x}{S}$$
$$\cos(\hat{Sy}) = \frac{S_y}{S}$$
$$\cos(\hat{Sz}) = \frac{S_z}{S}$$

Для главных осей инерции будем иметь:

$$S = \sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}$$
$$\cos(\hat{Sx}) = \frac{Ap}{S}$$
$$\cos(\hat{Sy}) = \frac{Bq}{S}$$
$$\cos(\hat{Sz}) = \frac{Cr}{S}$$

Обратим внимание на ошибку, которую иногда делают: для живой силы мы имели выражение

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \cdot I$$

где I есть момент инерции около оси вращения и ω — угловая скорость его, но было бы ошибочно писать вообще для момента количеств движения

$$S = \omega I$$

эта формула имеет место только если ось вращения совпадает с одною из главных осей инерции тела.

§ 25. Закон количеств движения и закон моментов количеств, которые выражены в § 22, дают возможность составлять уравнения движения

твердого тела почти без выкладок, и притом для каких угодно координатных осей, как неизменно связанных с телом, так и движущихся относительно тела.

Возьмем пока случай таких неподвижных в теле осей, которые совпадают с главными осями инерции тела.

В этом случае мы имели следующие выражения проекций момента количеств движения:

$$Ap,\ Bq,\ Cr$$

таким образом координаты точки S — конца вектора, представляющего момент количества движения тела, будут:

$$\bar{x} = Ap;\ \bar{y} = Bq;\ \bar{z} = Cr;$$

если бы вектор GS не изменялся, т. е. координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ были бы постоянные, то проекции скорости точки S на оси Gx, Gy, Gz были бы:

$$\begin{aligned} v_x &= q\bar{z} - r\bar{y} \\ v_y &= r\bar{x} - p\bar{z} \\ v_z &= p\bar{y} - q\bar{x} \end{aligned}$$

но сам вектор S изменяется с течением времени и проекции скорости перемещения точки S, вследствие этого изменения, на те же оси будут:

$$\frac{d\bar{x}}{dt};\ \frac{d\bar{y}}{dt};\ \frac{d\bar{z}}{dt}$$

эти величины и надо приложить к предыдущим и полученные выражения уравнять проекциям главного момента сил, т. е. L, M, N.

Таким образом будет:

$$\begin{aligned} &\frac{d\bar{x}}{dt} + q\bar{z} - r\bar{y} = L \\ (1)\qquad &\frac{d\bar{y}}{dt} + r\bar{x} - p\bar{z} = M \\ &\frac{d\bar{z}}{dt} + p\bar{y} - q\bar{x} = N \end{aligned}$$

подставляя вместо $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ их величины, имеем:

$$\begin{aligned} &A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = L \\ (2)\qquad &B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,pr = M \\ &C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = N \end{aligned}$$

— уравнения Эйлера, которые мы имели выведенными иным образом.

Совершенно так же, в более общем случае, когда оси Gx, Gy, Gz не суть главные оси инерции тела, мы положили бы:

$$\bar{x} = \frac{\partial T}{\partial p}; \quad \bar{y} = \frac{\partial T}{\partial q}; \quad \bar{z} = \frac{\partial T}{\partial r}$$

и получили бы уравнения:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} = L \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r} = M \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p} = N \end{aligned} \tag{3}$$

которые мы также имели.

§ **26.** Нам постоянно придется иметь дело с уравнениями вида

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2 y = F(t) \tag{1}$$

где n^2 — заданная постоянная и $F(t)$ — заданная функция переменной независимой. В этом параграфе мы приведем решение этого уравнения.

Соответствующее уравнению (1) уравнение без последнего члена есть

$$u'' + n^2 u = 0 \tag{2}$$

причем, для краткости письма, производная обозначена значками.

Очевидно, что функции

$$u_1 = \cos nt; \quad u_2 = \sin nt$$

представляют два частных решения этого уравнения и притом таких, что между ними нет линейной зависимости, поэтому общий интеграл уравнения (2) есть

$$u = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt$$

причем C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Положим, что функция u должна удовлетворять таким начальным условиям: при $t = 0$ должно быть:

$$(u)_0 = a; \quad (u')_0 = b \tag{3}$$

тогда постоянные произвольные определятся уравнениями:

$$\begin{aligned} a &= C_1 \\ b &= nC_2, \quad \text{значит} \quad C_2 = \frac{b}{n} \end{aligned}$$

и решение уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям (3), будет

$$u = a\cos nt + \frac{b}{n}\sin nt \tag{4}$$

Перейдем теперь к уравнению (1) с последним членом.

Для нахождения общего его интеграла применим «способ изменения произвольных постоянных», предложенный Лагранжем.

Способ этот состоит в том, что неизвестная функция y ищется под тем же самым видом, как и функция u, т. е. полагая

$$y = C_1\cos nt + C_2\sin nt \tag{5}$$

но только C_1 и C_2 — не постоянные, а две новые неизвестные функции переменной t.

Так как этих функций *две*, уравнений же, которым они должны удовлетворять, *одно*, именно — уравнение (1), то можно их подчинить еще *одному* какому угодно условию. Лагранжево условие такое: надо, чтобы производная y' при переменных C_1 и C_2 выражалась так же, как и при C_1 и C_2 постоянных.

Но при переменных C_1 и C_2 будет

$$y' = -C_1 n\sin nt + C_2 n\cos nt + C_1'\cos nt + C_2'\sin nt$$

следовательно добавочное условие есть

$$C_1'\cos nt + C_2'\sin nt = 0 \tag{6}$$

тогда будет

$$y' = -C_1 n_1\sin nt + C_2 n\cos nt$$

Дифференцируя вторично, имеем

$$y'' = -C_1 n^2\cos nt - C_2 n^2\sin nt - C' n\sin nt + C_2' n\cos nt$$

Вместе с тем

$$y = C_1\cos nt + C_2\sin nt$$

Подставляя в уравнение (1), имеем

$$-C' n\sin nt + C_2' n\cos nt = F(t) \tag{7}$$

Из уравнений (6) и (7) находим:

$$C_1' = \frac{1}{n}F(t)\sin nt; \quad C_2' = \frac{1}{n}F(t)\cos nt$$

Отсюда следует:

$$C_1 = \frac{1}{n}\int F(t)\sin nt\,dt + A_1$$

$$C_2 = \frac{1}{n}\int F(t)\cos nt\,dt + B_1$$

где A_1 и B_1 — произвольные постоянные.

Для ясности обозначим переменную, по которой производится интегрирование, через ξ, тогда, взяв за нижний предел интегралов 0, напишем предыдущие формулы так:

$$C_1 = A_1 - \frac{1}{n}\int_0^t F(\xi)\sin n\xi\,d\xi$$

(8)

$$C_2 = B_1 + \frac{1}{n}\int_0^t F(\xi)\cos n\xi\,d\xi$$

и у нас будет:

$$y = A_1\cos nt + B_1\sin nt$$

$$(9)\qquad -\frac{1}{n}\left[\cos nt\int_0^t F(\xi)\sin n\xi\,d\xi - \sin nt\int_0^t F(\xi)\cos n\xi\cdot d\xi\right]$$

или иначе:

$$(9')\qquad y = A_1\cos nt + B_1\sin nt - \frac{1}{n}\int_0^t F(\xi)\sin n(\xi - t)\,d\xi$$

Если y должно удовлетворять начальным условиям: при $t = 0$

$$(y)_0 = a;\ (y')_0 = b$$

то, полагая в уравнении (9) $t = 0$, имеем

$$a = A_1$$

ибо все остальные члены уничтожаются.

Взяв производную y' и заметив, что

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t F(\xi)\sin n\xi\,d\xi\right) = F(t)\sin nt$$

и

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t F(\xi)\cos n\xi\,d\xi\right) = F(t)\cos nt$$

получим, положив $t = 0$ в выражении y':

$$b = nB_1$$

все же прочие члены уничтожаются.

Таким образом значения производных постоянных определяются теми же самыми уравнениями

$$a = A_1$$
$$b = nB_1$$

как и для дифференциального уравнения без последнего члена.

Мы не будем в дальнейшем пояснять решения уравнений указанного вида, а будем писать их сразу.

На этом мы и закончим наше введение и перейдем к изложению учения о вращательном движении снаряда.

ГЛАВА I

Вращательное движение снаряда на небольшом участке его траектории, который можно принять за прямолинейный

§ 27. Одним из первых исследователей вращательного движения снаряда был профессор Артиллерийской академии генерал Н. В. Майевский.

Свои исследования, первоначально напечатанные в «Артиллерийском журнале» (№ 3, 1865), изданные затем отдельной книгой, он впоследствии несколько переработал и поместил в свое руководство «Внешней баллистики», изданное сперва на русском языке, а затем и во французском переводе, в 1872 г.[1]

Этим сочинением, как последним по времени, мы и будем пользоваться.

Исследования Майевского, как мы увидим, не утратили своего значения и по настоящее время и, являясь основными, заслуживают изучения и разбора.

Снаряд представляет собою тело вращения, поэтому его ось симметрии есть главная ось инерции, другие две главные оси лежат в плоскости, перпендикулярной к оси снаряда, и все моменты инерции около любой оси в этой плоскости равны между собою.

---

[1] В этом французском издании множество опечаток; но я случайно приобрел экземпляр, принадлежавший лично Майевскому, в этом экземпляре все опечатки тщательно исправлены.

Для упрощения вопроса сперва допускают, что вращательное движение снаряда не влияет на его поступательное движение, которое и рассчитывается, пренебрегая деривацией, по одному из методов приближенного интегрирования уравнений внешней баллистики. Движение центра тяжести снаряда рассматривается при этом как движение материальной точки, на которую действуют сила тяжести и сопротивление воздуха.

Затем вопрос о вращательном движении снаряда еще более упрощается допущением, что движение центра тяжести снаряда прямолинейное, так что касательная к траектории сохраняет неизменное направление. Понятно, что это допущение приложимо лишь к малому участку траектории, который и берется обыкновенно непосредственно после вылета снаряда или, как говорят, у дула.

Майевский в своем «Traité de Ballistique extérieure» исходит из уравнений Эйлера, причем за ось ox берет ось снаряда, и момент инерции относительно этой оси обозначает через A, так что другие два главные момента между собою равны:

$$B = C$$

и

$$B > A$$

На снаряд, как уже сказано, действуют сила тяжести, которая момента относительно центра тяжести снаряда не дает, и сопротивление воздуха, которое дает пару, лежащую в плоскости, проходящей через ось снаряда, и касательную к траектории. По Майевскому, момент этой пары выражается формулой [1]

(1) $$K = hR\rho \sin\delta$$

где h — численный коэффициент (по Майевскому равный 2.7 для 4-фунтовой гранаты того времени), R — радиус снаряда (полукалибр), ρ — прямое сопротивление воздуха на снаряд, δ — угол между осью снаряда и касательной.

Оси координат Майевский избирает как показано на фиг. 23. По поводу такого выбора углов — в сущности углов Эйлера — приходится сделать следующее замечание: оси взяты те, которые мы назвали в § 4 правыми, а для таких осей выгодно *все* углы считать по часовой стрелке, здесь же угол δ считается положительным против часовой стрелки, от этого при

[1] Майевский пишет эту формулу так:

$$K = hR\rho_A \sin\delta$$

для упрощения набора мы заменили ρ_A через ρ.

составлении выражений проекций угловой скорости происходит некоторая путаница в знаках.

Таким образом, при сделанных обозначениях, Майевский пишет:

$$
\begin{aligned}
p &= -\eta' + \nu' \cos\delta \\
q &= \delta' \cos\eta - \nu' \sin\eta \sin\delta \\
r &= -\delta' \sin\eta - \nu' \cos\eta \sin\delta
\end{aligned}
\tag{2}
$$

откуда следует:

$$
\begin{aligned}
\delta' &= q\cos\eta - r\sin\eta \\
\nu' \sin\delta &= -(q\sin\eta + r\cos\eta) \\
\eta' \sin\delta &= -[p\sin\delta + (q\sin\eta + r\cos\eta)\cos\delta]
\end{aligned}
\tag{3}
$$

и уравнения движения Эйлера принимают вид:

$$
\begin{aligned}
A \cdot \frac{dp}{dt} &= 0 \\
B \cdot \frac{dq}{dt} + (B - A)pr &= H\sin\delta\cos\eta \\
B \cdot \frac{dr}{dt} - (B - A)pq &= H\sin\delta\sin\eta
\end{aligned}
\tag{4}
$$

ибо пара K сопротивления воздуха представляется своею осью, которая направлена по прямой ON и разлагается по осям oy, oz на

$$K\cos\eta \quad \text{и} \quad K\cos\left(\frac{\pi}{2} + \eta\right) = -K\sin\eta$$

вместе с тем, для сокращения письма, нами положено

$$H = hR\rho \tag{5}$$

величина эта, при сделанных предположениях, будет постоянной для данного снаряда и данной скорости его.

Для уравнений (4) можно написать следующие интегралы:

$$p = p_0 \tag{6}$$

где p_0 — есть постоянная.

Затем, умножив второе уравнение на q, третье — на r, сложив и заметив, что

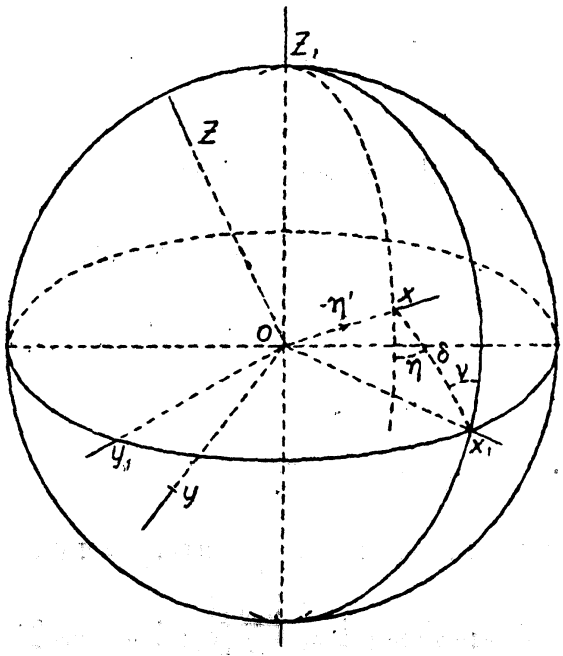
$$q\cos\eta - r\sin\eta = \delta'$$

получим

$$B(qq' + rr') = H\sin\delta\cdot\delta'$$

и по интегрировании:

$$B(q^2 + r^2) = 2H(\cos\delta_0 - \cos\delta) \tag{6'}$$



Фиг. 23.

причем Майевский принимает, что при $t = 0$:

$$\delta = \delta_0;\ \delta' = 0;\ \nu' = 0$$

Заметим здесь же, что два последние условия являются произвольными и налагают некоторые ограничения на движение, о чем подробнее будет сказано ниже.

Полученный интеграл (6') есть интеграл живой силы.

Наконец, третий интеграл может быть получен так: множим второе уравнение на $\sin\eta$, третье — на $\cos\eta$, тогда, сложив, имеем

$$B[q'\sin\eta + r'\cos\eta] + (B - A)p[r\sin\eta - q\cos\eta] = 0$$

но

$$q'\sin\eta + r'\cos\eta = (q\sin\eta + r(\cos\eta)' - (q\cos\eta - r\sin\eta)\eta' = \\ = -(\nu'\sin\delta)' - \delta'\eta'$$

на основании уравнения (3).

Таким образом будет

$$B(\nu' \sin\delta)' + B(\eta' + p)\delta' - Ap\delta' = 0$$

иначе, на основании уравнений (2) и (3),

$$B \cdot \nu'' \sin\delta + 2B\nu' \cos\delta \cdot \delta' - Ap_0\delta' = 0$$

Умножив это уравнение на $\sin\delta$, получим

$$B(\nu' \sin^2\delta)' = Ap_0 \sin\delta \cdot \delta'$$

и по интегрировании:

$$B\nu' \sin^2\delta = Ap_0[\cos\delta_0 - \cos\delta] \tag{6''}$$

опять-таки предполагая, что при $t = 0$ должно быть

$$\delta = \delta_0 \quad \text{и} \quad \nu' = 0$$

На основании уравнения (2),

$$q^2 + r^2 = \delta'^2 + \nu'^2 \sin^2\delta$$

Майевский пишет второй и третий интеграл так:

$$\delta'^2 + \nu'^2 \sin^2\delta = \frac{2H}{B}[\cos\delta_0 - \cos\delta]$$

и

$$\nu' = \frac{Ap_0}{B} \cdot \frac{\cos\delta_0 - \cos\delta}{\sin^2\delta}$$

Исключив из этих двух уравнений ν' и заметив, что

$$-\sin\delta \cdot \delta' = (\cos\delta)'$$

Майевский получает уравнение

$$(\cos\delta)' = \sqrt{\frac{2H}{B}} \cdot \sqrt{(\cos\delta_0 - \cos)\left[1 - \cos^2\delta - \frac{A^2p_0^2}{2HB}(\cos\delta_0 - \cos\delta)\right]}$$

откуда, положив

$$\cos\delta = u$$

и отделяя переменные, получаем

$$dt = \sqrt{\frac{B}{2H}} \frac{du}{\sqrt{(u_0 - u)[1 - u^2 - m(u_0 - u)]}}$$

где

$$m = \frac{A^2 p_0^2}{2HB} = \frac{A^2 p_0^2}{2hR_\rho B}$$

и значит, время t выражается эллиптическим интегралом

$$t = \sqrt{\frac{B}{2H}} \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{(u_0 - u)[1 - u^2 - m(u_0 - u)]}} \tag{7}$$

следовательно u выразится эллиптической функцией времени t.

Чтобы избежать применения эллиптических функций, Майевский применяет приближенный прием, который, при сделанных нами для сокращения письма обозначениях, вытекает из следующих формул: стоящий под знаком корня многочлен

$$1 - u^2 - m(u_0 - u)$$

разлагается на произведение

$$\left[\left(\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - mu_0 + 1}\right) - u\right]\left[u - \left(\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - mu_0 + 1}\right)\right]$$

Величина $\frac{m}{2}$ — «большая», обратная ей величина $\frac{2}{m} = \alpha$ — «малая», по степеням этой малой величины Майевский и производит разложение, ограничиваясь первою степенью ее.

Таким образом будет

$$\frac{m}{2}\sqrt{\frac{m^2}{4} - mu_0 + 1} = \frac{m}{2} 1 + \sqrt{1 - 2\alpha u_0 + \alpha^2} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[1 + (1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{2\alpha u_0}{1 + \alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[1 + 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha u_0 - \frac{1}{2}\alpha^2 u_0^2\right] = \frac{2}{\alpha} - u_0 + \frac{1}{2}\alpha(1 - u_0^2)$$

последний член, «по его малости» сравнительно с первым, отбрасывается.

Точно так же будет

$$\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} mu_0 + 1} = \frac{1}{\alpha}\left[1 - 1 + \alpha u_0 - \frac{1}{2}\alpha^2(1 - u_0^2)\right] =$$

$$= u_0 - \frac{1}{2}\alpha(1 - u_0^2)$$

и значит, будет

$$1-u^2-m(u_0-u)=\left[\frac{2}{\alpha}-(u_0+u)\right]\cdot\left[u-u_0+\frac{1}{2}\alpha(1-u_0^2)\right]=$$
$$=\frac{2}{\alpha}\left[1-\frac{\alpha}{2}(u_0+u)\right]\cdot\left[(u-u_0)+\frac{1}{2}\alpha(1-u_0^2)\right]$$

В первом множителе опять величина

$$\frac{\alpha}{2}(u_0+u)$$

«по ее малости сравнительно с 1, отбрасывается»; таким образом, по подстановке в формулу (7), по Майевскому, имеем

$$(8)\qquad t=\frac{B}{Ap_0}\int_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{(u_0-u)\cdot\left[(u-u_0)+\frac{1}{2}\alpha(1-u_0^2)\right]}}$$

Этот интеграл находится в конечном виде и выражается через обратные тригонометрические функции.

Но проще поступить так: обозначим для краткости:

$$\frac{B}{Ap_0}=\frac{1}{n}$$

тогда будет

$$n\,dt=\frac{du}{\sqrt{(u_0-u)\left[u-u_0+\frac{1}{2}\alpha(1-u_0^2)\right]}}$$

Отсюда, обозначая производные по t значками, имеем

$$(7')\qquad (u_0-u)\left[(u-u_0)+\frac{1}{2}\alpha(1-u_0^2)\right]=\frac{1}{n^2}\cdot u'^2$$

Затем, дифференцируя, получаем

$$-u'\left[u-u_0+\frac{1}{2}\alpha(1-u_0^2)\right]+u_0-u=\frac{2}{n^2}\cdot u''\cdot u'$$

что дает, по упрощении, уравнение

$$u''+n^2(u-u_0)=\frac{\alpha}{4}\cdot n^2(1-u_0^2)$$

Отсюда

$$u-u_0=C_1\cos nt+C_2\sin nt-\frac{\alpha}{4}(1-u_0^2)$$

Постоянные произвольные определяются из условий, вытекающих из формул (7) и (7′):

при $t = 0$ должно быть: $u = u_0,\ u' = 0$

и следовательно, будет

$$u = u_0 - \frac{\alpha}{4}(1 - u_0^2)[1 - \cos nt]$$

или, возвращаясь к первоначальному обозначению, имеем формулу, даваемую Майевским:

$$\cos\delta = \cos\delta_0 - \frac{hR_\rho B \cdot \sin\delta_0}{A^2 p_0^2}\left(1 - \cos\frac{Ap_0 t}{B}\right) \cdot \sin\delta_0$$

Затем Майевский говорит: «так как величина

$$\frac{hR_\rho B \cdot \sin\delta_0}{A^2 p_0^2}\left(1 - \cos\frac{Ap_0 t}{B}\right)$$

малая, то можно принять, что ее косинус равен 1 и синус — самой величине, тогда из предыдущей формулы следует

$$\delta = \delta_0 + \frac{hR_\rho B}{A^2 p_0^2} \cdot \left(1 - \cos\frac{Ap_0 t}{B}\right) \cdot \sin\delta_0 \tag{9}$$

Это уравнение показывает, что величина δ колеблется между своим наименьшим значением

$$\delta = \delta_0$$

и наибольшим

$$\delta = \delta_0 + \frac{hR_\rho B}{Ap_0^2 \rho^2} \cdot \sin\delta_0»$$

Чтобы найти ν, Майевский обращается к формуле (6″) и, воспользовавшись формулой (9), отбрасывая члены, заключающие «малую» величину

$$\frac{hR_\rho B}{A^2 p_0^2}$$

в степени выше первой, он получает

$$\nu' = \frac{hR_\rho}{Ap_0}\left(1 - \cos\frac{Ap_0 t}{B}\right) \tag{10}$$

Отсюда, приняв, что при $t = 0$ величина $\nu = 0$, следует

$$\nu = \frac{hR_\rho B}{A^2 p_0^2}\left[\frac{Ap_0 t}{B} - \sin\frac{Ap_0 t}{B}\right] \tag{11}$$

§ 28. Из предыдущего изложения теории Майевского, в котором мы придерживались рассуждений и выводов самого автора, внося в них лишь некоторые упрощения, главным образом в громоздкие обозначения, видно, что много раз отбрасываются члены «малые» по сравнению с другими или по сравнению с единицею. Эти члены определяются тем, что они заключают один из множителей:

$$\frac{hR\rho B}{A^2 p_0^2}, \quad \frac{2hR\rho B}{A^2 p_0^2} \quad \text{и} \quad \frac{4hR\rho B}{A^2 p_0^2}$$

Множители эти представляют числа отвлеченные, не зависящие от единиц длины, времени и массы. По исчислению самого Майевского, для снарядов и скоростей, бывших в его время,

$$\frac{R\rho B}{A^2 p_0^2}$$

достигает до $\frac{1}{10}$, соответственно чему другие два множителя будут 0.2 и 0.4. Квадраты этих величин составляют 0.01; 0.04 и 0.16, и если можно пренебрегать по сравнению с единицею первыми двумя, то отбрасывание величины 0.16 может уже дать чувствительную погрешность. Но это не все — при преобразовании интеграла (7) была отброшена «малая» по сравнению с единицею величина

$$\frac{\alpha}{2}(u_0 + u)$$

при нашем обозначении, которая при обозначении Майевского есть

$$\frac{\alpha}{2}(u_0 + u) = \frac{2hR\rho B}{A^2 p_0^2}(\cos\delta_0 + \cos\delta)$$

Так как углы δ и δ_0 малые (вообще не более 10°), то эта величина почти равна

$$\frac{4hR\rho B}{A^2 p_0^2}$$

т. е. 0.4, и отбрасывание ее по сравнению с единицею влечет уже очень чувствительную погрешность.

Между тем, обращаясь к основной формуле, выражающей момент опрокидывающей пары, и графическому его изображению, приводимому Майевским, мы видим, что выражение

$$K = hR\rho \cdot \sin\delta \tag{1}$$

имеет место, пока угол δ не превосходит 10° или 12°; далее, до $\delta = 20°$,

Майевский предлагает формулу

$$K = hR\rho \sin\delta \cdot \cos\delta$$

При значениях угла δ, не превосходящих 20°, первые члены разложений синуса и косинуса, т. е. формулы

$$\sin\delta = \delta; \quad \cos\delta = 1 - \frac{\delta^2}{2} \tag{2}$$

дают следующие результаты:

$\delta°$	δ	$\sin\delta$	$\cos\delta$	$1-\frac{\delta^2}{2}$
5°	0.0873	0.0872	0.9962	0.9962
10	0.1745	0.1736	0.9848	0.9848
15	0.2618	0.2588	0.9659	0.9757
20	0.3491	0.3420	0.9397	0.9388

т. е. для углов, меньших 10°, относительная погрешность первой формулы не превышает $\frac{1}{2}\%$, второй—меньше $\frac{1}{100}\%$, и значит, в этих пределах пользование этими простыми формулами несравненно точнее всех тех допущений и отбрасываний, которые сделаны Майевским; можно с уверенностью сказать, — во много раз точнее самой формулы (1), являющейся основною в этом вопросе. Поэтому естественно воспользоваться для приближенного решения формулами (2) и сделать наново все выкладки Майевского.

Мы имели *точные* интегралы уравнений движения:

$$p = p_0$$

$$B(q^2 + r^2) = -2H\cos\delta + C_1 \tag{3}$$

$$B\nu' \sin^2\delta = -Ap_0\cos\delta + C_2$$

причем

$$q^2 + r^2 = \delta'^2 + \nu'^2 \sin^2\delta \tag{4}$$

мы намеренно написали произвольные постоянные C_1 и C_2, чтобы освободиться от того ограничения, которое наложено Майевским, именно: за начальные условия им было принято, что при $t = 0$ должно быть:

$$\delta = \delta_0; \ \delta' = 0; \ \nu' = 0 \tag{5}$$

затем в дальнейшем полагается еще, что

$$\nu = 0 \tag{6}$$

При изучении полета снаряда стрельбою по картонным щитам понадобится считать время не с момента вылета, а, напр., с момента пролета через первый щит или вообще через какой-нибудь щит, а тогда такого совпадения, как принято, не будет, поэтому мы возьмем общие условия: при $t = 0$ должно быть:

$$\delta = \delta_0, \quad \delta' = \delta_0' \qquad (5')$$
$$\nu = \nu_0 \quad \nu' = \nu_0'$$

Тогда вышеприведенные интегралы напишутся так:

$$p = p_0$$
$$\delta'^2 + \nu'^2 \sin^2\delta = \frac{2H}{B}[(\cos\delta_0 - \cos\delta) + C_1] \qquad (6)$$
$$\nu' = \frac{Ap_0}{B}\left[\frac{\cos\delta_0 - \cos\delta}{\sin^2\delta} + \frac{C_2}{\sin^2\delta}\right]$$

причем

$$C_1 = (\delta_0'^2 + \nu_0'^2 \sin^2\delta_0) \cdot \frac{B}{2H}$$
$$C_2 = \frac{B}{Ap_0} \cdot \nu_0' \cdot \sin^2\delta_0$$

В этих точных интегралах мы и сделаем указанные замены:

$$\sin\delta = \delta$$
$$\cos\delta = 1 - \frac{\delta^2}{2} \qquad (7)$$

Значит, и

$$\sin\delta_0 = \delta_0$$
$$\cos\delta_0 = 1 - \frac{\delta_0^2}{2}$$

тогда уравнения (2) и (3) напишутся так:

$$\delta'^2 + \nu'^2 \cdot \delta^2 = \frac{H}{B}[(\delta^2 - \delta_0^2) + C_1]$$
$$\nu' \cdot \delta^2 = \frac{Ap_0}{2B}[(\delta^2 - \delta_0^2) + C_2] \qquad (8)$$

причем теперь:

$$C_1 = (\delta_0'^2 + \nu_0'^2 \cdot \delta_0^2) \cdot \frac{B}{H}$$
$$C_2 = 2\nu_0' \cdot \delta_0^2 \cdot \frac{B}{Ap_0} \qquad (9)$$

Умножив первое из уравнений (8) на δ^2 и вычтя из него квадрат второго, получим по умножении разности на 4:

$$4\delta^2 \cdot \delta'^2 = \frac{4H}{B}\,[\delta^2 - \delta_0^{\,2} + C_1]\cdot\delta^2 - \frac{A^2 p_0^{\,2}}{B^2}\,[\delta^2 - \delta_0^{\,2} + C_2]^2$$

Полагая в этом уравнении

$$\delta^2 - \delta_0^{\,2} = u$$

и для симметрии

$$\delta_0^{\,2} = u_0$$

имеем

$$u'^2 = \frac{4H}{B}\,[u + C_1]\cdot[u + u_0] - \frac{A^2 p_0^{\,2}}{B^2}\,[u + C_2]^2$$

Дифференцируя это уравнение, получим по сокращении на u':

$$u'' + \left(\frac{A^2 p_0^{\,2}}{B^2} - \frac{4H}{B}\right)u = \frac{2H}{B}(u_0 + C_1) - \frac{A^2 p_0^{\,2}}{B^2}\cdot C^2 \tag{10}$$

Из этого уравнения, прежде всего, видно, что u будет выражаться функцией тригонометрической, т. е. величина δ будет оставаться в определенных границах, когда

$$\frac{A^2 p_0^{\,2}}{B^2} - \frac{4H}{B} > 0 \tag{11}$$

Таким образом, заменяя H его величиною

$$H = hR\rho$$

мы имеем следующее условие *устойчивости* снаряда на полете, т. е. что отклонение δ его оси от касательной не будет выходить из определенных пределов

$$A^2 p_0^{\,2} > 4hR\rho \cdot B \tag{12}$$

Этим условием определяется крутизна нарезов у дула, и мы к нему еще вернемся.

Итак, полагая, что неравенство (12) соблюдено, делаем

$$\frac{A^2 p_0^{\,2}}{B^2} - \frac{4H}{B} = n^2 \tag{13}$$

и

$$\frac{2H}{B}(u_0 + C_1) - \frac{A^2 p_0^{\,2}}{B^2}\cdot C_2 = n^2\alpha^2$$

получим

$$u'' + n^2 u = n^2\alpha^2 \tag{14}$$

Откуда следует

$$u = C_3 \cos nt + C_4 \sin nt + \alpha^2$$

Но при $t = 0$ должно быть:

$$u = 0;\ u' = 2\delta_0 \cdot \delta_0'$$

следовательно:

$$C_3 = -\alpha^2 \quad \text{и} \quad C_4 = \frac{2\delta_0 \cdot \delta_0'}{n}$$

(15) $$u = \alpha^2(1 - \cos nt) + \frac{2\delta_0 \delta_0'}{n} \cdot \sin nt$$

Значит,

(16) $$\delta^2 = \delta_0^2 + \alpha^2(1 - \cos nt) + \frac{2\delta_0 \delta_0'}{n} \sin nt$$

Заметим здесь же, для упрощения дальнейших выкладок, что всегда можно распорядиться так, чтобы время считать с того момента, когда δ^2 достигает своего наибольшего или наименьшего значения, т. е. $\delta_0' = 0$, тогда предыдущая формула будет

(16′) $$\delta^2 = \delta_0^2 + \alpha^2(1 - \cos nt)$$

Затем мы имели уравнение

$$\nu' \delta^2 = \frac{Ap_0}{2B}[\delta^2 - \delta_0^2 + C_2]$$

которое, по подстановке вместо δ^2 его значения из уравнения (16′), принимает вид

$$\nu' = \frac{Ap_0}{2B} + \frac{C_2 - \delta_0^2}{2B} \cdot \frac{Ap_0}{\delta_0^2 + \alpha^2 \cos nt}$$

Откуда

(17) $$\nu - \nu_0 = \frac{Ap_0}{2B} \cdot t + (C_2 - \delta_0^2) \cdot \frac{Ap_0}{2B} \cdot \int_0^t \frac{dt}{\delta_0^2 + \alpha^2 - \alpha^2 \cos nt}$$

Интеграл

$$\int_0^t \frac{dt}{\delta_0^2 + \alpha^2 - \alpha^2 \cos nt} = \int_0^t \frac{dt}{\delta_0^2 + \alpha^2 - \alpha^2\left(\cos^2 \frac{nt}{2} - \sin^2 \frac{nt}{2}\right)} =$$

$$= \int_0^t \frac{\frac{dt}{\cos^2 \frac{nt}{2}}}{\delta_0^2 + (\delta_0^2 + 2\alpha^2) \operatorname{tg}^2 \frac{nt}{2}} =$$

$$= \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{\delta_0 \sqrt{\delta_0^2 + 2\alpha^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{\delta_0^2 + 2\alpha^2}}{\delta_0} \operatorname{tg} \frac{nt}{2}\right)$$

Значит,

$$(18)\quad \nu - \nu_0 = \frac{Ap_0}{2B}\cdot t + \frac{Ap_0}{nB}\cdot\frac{C_2 - \delta_0^2}{\delta_0\sqrt{\delta_0^3 + 2\alpha^2}}\cdot \operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{\delta_0^2 + 2\alpha^2}}{\delta_0}\operatorname{tg}\frac{nt}{2}\right]$$

§ **28a.** Сличая формулы (16′) и (18′) с формулами Майевского, т. е. с уравнениями

$$\delta = \delta_0 + \frac{hR_\rho B}{A^2 p_0^2}\left(1 - \cos\frac{Ap_0 t}{B}\right)$$

$$\nu = \frac{hR_\rho B}{A^2 p_0^2}\left[Apt - \sin\frac{Ap_0 t}{B}\right]$$

мы видим весьма существенную разницу, а именно:

1°) По Майевскому, постоянная, не зависимая от начальных условий, часть скорости прецессии составляет

$$\frac{h\rho RB}{Ap_0}$$

по нашей теории эта скорость есть

$$\frac{Ap_0}{B}$$

2°) По Майевскому периодически изменяющаяся часть угла нутации имеет «частоту» перемен

$$\frac{Ap_0}{B}$$

по нашей теории эта частота есть n, причем

$$n^2 = (A^2 p_0^2 - 4hR_\rho B) : B$$

и только в пределе, при весьма больших скоростях p_0, эта частота приближается к указываемой Майевским.

Это обстоятельство требует некоторых пояснений.

Вернемся к тем уравнениям, из которых формулы получены, а именно:

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{aligned} B(q^2 + r^2)' &= 2H\sin\delta\cdot\delta' \\ B(\nu'\cdot\sin^2\delta)' &= Ap_0\sin\delta\cdot\delta' \end{aligned}$$

При интегрировании надо брать самые общие начальные условия, чтобы не вводить в решение ограничений, поэтому полагаем, что при $t = 0$ должно быть:

$$\delta = \delta_0,\ \delta' = \delta_0',\ \nu' = \nu_0',\ \nu = \nu_0$$

Тогда имеем

$$q^2 + \nu^2 = \frac{2H}{B}(\cos\delta_0 - \cos\delta) + C_1$$

иначе

$$\delta'^2 + \nu'^2 \sin^2\delta = \frac{2H}{B}(\cos\delta_0 - \cos\delta) + C_1 \tag{1}$$

следовательно

$$C_1 = -\delta_0'^2 + \nu_0'^2 \cdot \sin^2\delta_0 \tag{2}$$

Из второго уравнения имеем

$$\nu' \cdot \sin^2\delta = \frac{Ap_0}{B}[\cos\delta_0 - \cos\delta] + C_2 \tag{3}$$

причем

$$C_2 = \nu' \sin^2\delta_0 \tag{4}$$

Исключая из уравнений (1) и (3) ν', получаем

$$\sin^2\delta \cdot \delta'^2 = \left[\frac{2H}{B}(\cos\delta_0 - \cos\delta) + C_1\right](1 - \cos^2\delta) - \left(\frac{Ap_0}{B}(\cos\delta_0 - \cos\delta) + C_2\right)^2$$

откуда следует

$$dt = \frac{d(\cos\delta)}{\sqrt{\left[\frac{2H}{B}(\cos\delta_0 - \cos\delta) + C_1\right](1 - \cos^2\delta) - \left[\frac{Ap_0}{B}(\cos\delta_0 - \cos\delta) + C_2\right]^2}} \tag{5}$$

при том частном предположении, которое делает Майевский, что

$$\delta_0' = 0 \quad \text{и} \quad \nu_0' = 0 \tag{6}$$

будет

$$C_1 = 0 \quad \text{и} \quad C_2 = 0 \tag{6}$$

и подкоренная величина разлагается сразу на множители

$$\frac{2H}{B} \cdot (\cos\delta_0 - \cos\delta)\left[1 - \cos^2\delta - \frac{A^2 p_0^2}{2HB}(\cos\delta_0 - \cos\delta)\right] \tag{7}$$

понятно, что величина [ ], в свою очередь, сейчас же разлагается также на два множителя.

В общем же случае, когда C_1 и C_2 не равны нулю, это разложение требовало бы решения кубичного уравнения и было бы гораздо сложнее.

Не исследуя этого общего случая, решим один частный вопрос, сюда относящийся.

§ **28б.** Спрашивается, при каком условии может совершаться такое движение, что скорость прецессии будет оставаться постоянной, т. е. будет

$$\nu' = \nu_0'$$

Выполнив указанное во втором уравнении (I) дифференцирование, имеем

$$\left(2\nu_0' \sin\delta \cdot \cos\delta - \frac{Ap_0}{B}\sin\delta\right)\delta' = 0$$

Отсюда следует, предполагая, что δ не равно нулю:

(8) или, во-первых, $\delta' = 0$

(8) или, во-вторых, $\nu_0' \cos\delta - \frac{Ap_0}{2B} = 0$

Положим, что выполнено первое условие, т. е. (второе к нему сводится)

$$\delta' = 0$$

Значит,

$$\delta = \delta_0$$

остается во все время движения постоянным, но этого еще не достаточно, надо, чтобы были удовлетворены *все* уравнения движения, которые дают (при обозначениях Майевского, см. § 27):

$$\begin{aligned} p_0 &= -\eta' + \nu_0' \cos\delta_0 \\ q &= -\nu_0' \sin\delta_0 \sin\eta \\ r &= -\nu_0' \sin\delta_0 \cos\eta \end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \eta' &= \nu_0' \cos\delta_0 - p_0 \\ q' &= -\nu_0' \sin\delta_0 \cos\eta \cdot \eta' \\ r' &= \nu_0' \sin\delta_0 \sin\eta \cdot \eta' \end{aligned}$$

Подставляя эти величины в уравнения Эйлера, как второе так и третье, получаем одно и то же уравнение, которым определяются возможные значения постоянной ν_0', а именно:

(9) $$B\nu_0'^2 \cos\delta_0 - A\nu_0' p^0 + H = 0$$

из которого следует

$$\nu_0' = \frac{Ap_0}{2B\cos\delta_0} \pm \frac{\sqrt{A^2 p_0^2 - 4HB\cos^2\delta_0}}{2B\cos\delta_0}$$

т. е. что для вещественности значений ν_0' необходимо, чтобы было

$$A^2 p_0^2 - 4HB\cos^2\delta_0 \geqq 0 \tag{10}$$

В том случае, когда это неравенство выполнено, движение *с постоянным значением* $\delta = \delta_0$ возможно с каждою из двух скоростей прецессии:

$$1^\circ) \quad \nu' = \nu_1' = \frac{Ap_0}{2B\cos\delta_0} + \frac{\sqrt{A^2 p_0^2 - 4HB\cos^2\delta_0}}{2B\cos\delta_0}$$

и

$$2^\circ) \quad \nu' = \nu_2' = \frac{Ap_0}{2B\cos\delta_0} - \frac{\sqrt{Ap_0 - 4HB\cos^2\delta_0}}{2B\cos\delta_0}$$

Если в (10) имеет место знак равенства, то обе скорости равны

$$\nu_1' = \nu_2'$$

Наконец, если

$$A^2 p_0^2 - 4HB\cos^2\delta_0 < 0$$

то движение с постоянным значением $\delta = \delta_0$ *невозможно*, но из одного этого нельзя еще заключить, что снаряд будет неустойчив, т. е. что или δ будет неопределенно возрастать (снаряд кувыркаться), или совершать колебания между слишком широкими пределами.

Так и соблюдение неравенства не указывает еще *достаточного* условия устойчивости снаряда, ибо не дает критерия и не налагает без дальнейших выводов ограничений колебаний угла нутации.

К этому вопросу мы еще вернемся подробнее, а пока исследуем изменяемость корней ν_1' и ν_2' с возрастанием быстроты p_0 вращения снаряда.

Итак, положим, что p_0 от наименьшего своего значения, определяемого равенством

$$A^2 p_0^2 = 4HB \cdot \cos^2\delta_0$$

или

$$p_0 = \sqrt{\frac{4hR_0 B}{A^2}} \cdot \cos\delta_0$$

при котором

$$\nu_1' = \nu_2' = \frac{Ap_0}{2B\cos\delta_0}$$

возрастает неопределенно, тогда, очевидно, корень ν_1' возрастает, корень ν_2' убывает.

Написав равенства

$$\nu_1' = \frac{Ap_0}{2B\cos\delta_0}\left[1 + \left(1 - \frac{4HB}{A^2 p_0^2}\cos^2\delta_0\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\nu_2' = \frac{Ap_0}{2B\cos\delta_0}\left[1 - \left(1 - \frac{4HB}{A^2 p_0^2}\cos^2\delta_0\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

видим, ограничиваясь первыми членами разложений, что

$$\nu_1' = \frac{Ap_0}{B\cos\delta_0} - \frac{H}{Ap_0}\cos\delta_0 + \ldots$$

$$\nu_2' = \frac{H}{Ap_0}\cos\delta_0 + \ldots$$

Как видно, с возрастанием p_0 корень ν_1' неопределенно возрастает и приближается к

$$\frac{Ap_0}{B\cos\delta_0}$$

другой же корень ν_2' неопределенно убывает; первому корню соответствует *быстрая* прецессия, угловая скорость которой в пределе *не зависит* от величины опрокидывающей пары и при малых углах δ_0 ($\cos\delta_0 = 1$) приблизительно равна $\frac{A}{B}p_0$.

Второму корню при большой скорости вращения p_0 соответствует *медленная* прецессия, скорость которой приблизительно равна

$$\frac{H}{Ap_0} = \frac{hR_\varrho}{A \cdot p_0}$$

т. е. эта скорость пропорциональна (при данном δ_0) опрокидывающей паре и тем *медленнее*, чем скорость вращения p_0 снаряда *больше*.

Как видно, характерные особенности обоих движений совершенно различны.

После этого объяснения дело становится очевидным: Майевский, при выборе начальных условий, а затем при преобразовании подкоренного многочлена в формуле § 27 «отбрасыванием» разных членов, заключающих разные степени количества $\frac{hR_\varrho}{Ap_0}$, сделал это преобразование так, что при неопределенном возрастании p_0 полученное им выражение скорости прецессии приближается к прецессии *медленной*, т. е. он как бы неявно принял, что движение снаряда относится к группе движений с *медленной*

прецессией. В нашей же теории каких-либо предположений о «малости» величины $\frac{hR_\rho}{Ap_0}$ не делается, а исследуется вопрос, с какою прецессией может при данных начальных условиях и постоянных снаряда совершаться такое его движение, что угол нутации δ будет изменяться в тесных пределах, оставаясь притом малым.

Сам анализ показал, что это движение будет относиться к группе движений с прецессией *быстрой*.

Рассматривая результаты опытов, приводимые в главе III, видим, что и на самом деле снаряд вращается именно так, т. е. *с прецессией быстрой*.

Это различие весьма важно для использования результатов таких опытов.

Мы пока не будем останавливаться на дальнейшем рассмотрении теории Майевского, а перейдем к теории Забудского.

§ **29.** Н. А. Забудский рассматривает вращательное движение продолговатых снарядов в воздухе в главе VII своей «Внешней баллистики», изданной в 1895 г. Затем он в 1908 г. издал отдельною книгою «Исследование о движении продолговатого снаряда» и дополнения к этому исследованию.

В «Исследовании о движении продолговатого снаряда» рассматривается, главным образом, движение снаряда на криволинейной траектории его, поэтому мы вернемся к нему в главе II, а пока ограничимся рассмотрением той теории, которая изложена во «Внешней баллистике», так как эта книга в течение весьма многих лет служила, да и теперь еще служит после книги Майевского, основным и единственным руководством по баллистике на русском языке.

Н. А. Забудский выбирает за оси координат в снаряде его главные оси инерции, т. е. за ось Ox берет ось снаряда, за другие две оси oy' и oz' — какие-либо две прямые в плоскости, перпендикулярной к оси снаряда, момент инерции обозначает, соответственно, через A, B, B, проекции же угловой скорости на эти оси — через p, q', r'. Затем он берет оси ox_1, oy_1, oz_1 (фиг. 24), из которых ox_1 совпадает с касательной к траектории и oz_1 перпендикулярно касательной в вертикальной плоскости, проходящей через касательную. Прямая ON пересечения плоскостей $z'oy'$ и z_1oy_1, будучи перпендикулярной к плоскости x_1ox, представляет направление оси опрокидывающей пары K, наконец Забудский вводит еще третью систему осей $oxyz$, вращающихся около оси ox, так чтобы ось oy совпадала постоянно с прямою ON и, значит, и с направлением оси опрокидывающей пары K. Положение осей опреде-

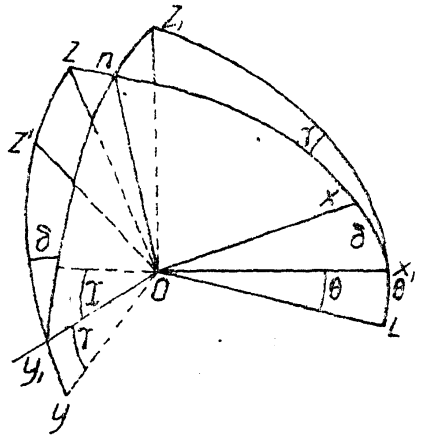
ляется указанными на чертеже углами: θ — углом наклонения касательной, ν и δ — углом прецессии и наклонности оси (иначе углом нутации) и, наконец, углом $y'oy$, который обозначен через ξ. Сохраняя эти обозначения, мы, однако, заменим букву ξ буквою γ, оставляя обозначения ξ, η, ζ для координат и других переменных.

При сделанных обозначениях Эйлеровы уравнения движения будут:

$$A\frac{dp}{dt} = 0$$

$$B\frac{dq'}{dt} + (B - A)pr' = K\cos\gamma \tag{1}$$

$$B\cdot\frac{dr'}{dt} - (B - A)pq' = K\sin\gamma$$



Фиг. 24.

Эти уравнения преобразуются сперва к осям $oxyz$, указанным выше. Понятно, что при этом преобразовании первое уравнение остается без перемены, второе уравнение (1) множится на $\cos\gamma$, третье — на $\sin\gamma$ и результаты складываются, что дает

$$B\left[\frac{dq'}{dt}\cdot\cos\gamma + \frac{dr'}{dt}\sin\gamma\right] + (B - A)p(r'\cos\gamma - q'\sin\gamma) = K$$

затем, умножив эти уравнения соответственно на $-\sin\gamma$ и $\cos\gamma$ и сложив, получаем

$$B\left[\frac{dr'}{dt}\cdot\cos\gamma - \frac{dq'}{dt}\cdot\sin\gamma\right] - (B - A)p(q'\cos\gamma + r'\sin\gamma) = 0$$

В эти уравнения надо теперь ввести, вместо угловых скоростей q' и r', угловые скорости q и r, относящиеся к осям oy и oz.

Проектируя, имеем:

$$q' = q\cos\gamma - r\sin\gamma$$
$$r' = q\sin\gamma + r\cos\gamma \tag{2}$$

Отсюда следует:

$$\frac{dq'}{dt} = \frac{dq}{dt}\cdot\cos\gamma - \frac{dr}{dt}\cdot\sin\gamma - (q\sin\gamma + r\cos\gamma)\frac{d\gamma}{dt}$$
$$\frac{dr'}{dt} = \frac{dq}{dt}\sin\gamma + \frac{dr}{dt}\cos\gamma + (q\cos\gamma - r\sin\gamma)\frac{d\gamma}{dt}$$

Из равенств (2) следует:

$$q = q'\cos\gamma + r'\sin\gamma$$
$$r = r'\cos\gamma - q'\sin\gamma$$

Из равенств (3) имеем:

$$\frac{dq'}{dt}\cdot\cos\gamma + \frac{dr'}{dt}\cdot\sin\gamma = \frac{dq}{dt} - r\frac{d\gamma}{dt}$$
$$\frac{dr'}{dt}\cdot\cos\gamma - \frac{dq'}{dt}\cdot\sin\gamma = \frac{dr}{dt} + q\frac{d\gamma}{dt}$$

Подставляя в два последние уравнения (1), присоединив и первое уравнение (1) и положив $\frac{d\gamma}{dt} = n$, имеем:

$$A\frac{dp}{dt} = 0$$
$$B\frac{dq}{dt} + [B(p-n) - Ap]r = K \tag{3}$$
$$B\frac{dr}{dt} - [B(p-n) - Ap]q = 0$$

Из рассмотрения чертежа, применяя теорему проекций и считая за положительное направление вращения против часовой стрелки, получаются следующие выражения проекций угловых скоростей на оси ox, oy, oz:

$$p = n + \cos\delta\cdot\nu' + \sin\delta\sin\nu\cdot\theta'$$
$$q = \delta' + \cos\nu\cdot\theta' \tag{4}$$
$$r = -\sin\delta\cdot\nu' - \sin\nu\cos\delta\cdot\theta'$$

Для малых углов δ момент опрокидывающей пары Забудский выражает той же формулой, как Майевский, именно:

$$K = hR\rho\sin\delta \tag{5}$$

До сих пор все правильно и вполне точно, но с дальнейшим изложением Забудского согласиться нельзя, и приходится это изложение признать неудовлетворительным.

Чтобы сущность дела была ясна, приведем без изменений (за исключением указанных выше перемен в обозначениях и означении производных значками) n° 177 «Внешней баллистики», озаглавленный: «*Упрощение дифференциальных уравнений вращательного движения продолговатого снаряда и их интегрирование*».

§ **30.** В начале этого n° говорится: «так как вращение p весьма велико, вращение ν' — одного порядка с осью пары сопротивления воздуха и мало, а вращение θ' изменяется медленно, то, как видно из первого из уравнений (4), можно пренебречь $p - n$ перед p и привести уравнения (3) к виду:

$$A\frac{dp}{dt} = 0$$

$$B \cdot \frac{dq}{dt} - Apr = K \tag{1}$$

$$B \cdot \frac{dr}{dt} + Apq = 0$$

Найдем интегралы этих уравнений.

«Первое из этих уравнений дает

$$p = p_0$$

где p_0 есть начальная скорость снаряда, а это показывает, что угловая скорость снаряда вокруг оси фигуры (если пренебречь трением воздуха о снаряд) постоянна во все время вращения».

Подставив в остальные два уравнения (1) вместо p его величину p_0, взяв затем производную от третьего уравнения и подставив вместо $\frac{dq}{dt}$ его величину из второго, Забудский получает уравнение

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{A^2p_0^2}{B^2}r = -\frac{Ap_0}{B^2} \cdot K \tag{2}$$

т. е. линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Приняв за начальные условия, что при $t = 0$ должно быть:

$$r = r_0 = 0, \quad q = q_0 = 0$$

из третьего уравнения (1) следует, что и

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = 0 \tag{6}$$

Решение уравнения (2) при этих начальных условиях будет (см. § 26)

$$r = \frac{1}{B}\int_0^t K \sin \frac{Ap_0(z-t)}{B} \cdot dz \tag{7}$$

Этот результат Забудского представлял бы решение вопроса, если бы K было *известной* функцией времени и, значит, под знаком интеграла стояла бы известная функция $K(z)$ той переменной z, по которой интегрирование производится, но K есть функция переменной δ, которая входит и в состав r, именно:

$$r = -\sin\delta \cdot \nu' + \sin\nu\cos\delta \cdot \theta'$$

и в сущности формула (7) представляет дифференциальное уравнение даже более сложное, нежели то, из которого она получена.

Не придавая, однако, значения этому обстоятельству, Забудский в своей книге применяет следующий процесс:

«Интегрируя 2 раза по частям выражение

$$\int_0^t K \sin \frac{Ap_0}{B}(z-t) \cdot dz$$

и *замечая, что в начале движения* $K = 0$, получим:

$$\int_0^t K \sin \frac{Ap_0(z-t)}{B} \cdot dz = -\left[\frac{BK}{Ap_0}\cos\frac{Ap_0}{B}(z-t)\right]_0^t +$$

$$+ \frac{B}{Ap_0}\int_0^t \frac{dK}{dz}\cos\frac{Ap_0(z-t)}{B} \cdot dz$$

$$\int_0^t \frac{dK}{dz}\cos\frac{Ap_0(z-t)}{B} \cdot dz = \left[\frac{B}{Ap_0}\sin\frac{Ap_0}{B}(z-t)\right]_0^t$$

$$- \frac{B}{Ap_0}\int_0^t \frac{d^2K}{dz^2} \cdot \sin\frac{Ap_0}{B}(z-t) \cdot dz$$

откуда

$$\int_0^t K \sin\frac{Ap_0}{B}(z-t) \cdot \left[1 + \frac{1}{K} \cdot \frac{B}{A^2p_0^2} \cdot \frac{d^2K}{dz^2}\right] \cdot dz =$$

$$= -\frac{BK}{Ap_0} + \frac{B^2}{A^2p_0^2}\left(\frac{dK}{dt}\right)_0 \cdot \sin\frac{Ap_0 t}{B}»$$

Затем сказано: «пренебрегая, вследствие весьма большой величины p_0, членом $\frac{1}{K} \cdot \frac{B^2}{A^2 p_0^2} \cdot \frac{d^2K}{dz^2}$ перед единицею, найдем приближенную величину интеграла

$$(8) \qquad \int_0^t K \sin \frac{Ap_0}{B}(z-t) \cdot dz = -\frac{B}{Ap_0} \cdot K + \frac{B^2}{A^2 p_0^2} \left(\frac{dK}{dt}\right)_0 \sin \frac{Ap_0 t}{B}$$

которую, подставив в выражение (7), получим

$$(8) \qquad r = -\frac{K}{Ap_0} + \frac{B}{A^2 p_0^2} \left(\frac{dK}{dt}\right)_0 \cdot \sin \frac{Ap_0 t}{B}$$

«Так как последнее уравнение выведено в предположении, что отбрасываются члены порядка $\frac{B^2}{A^2 p_0^2}$, то и в нем можно пренебречь вторым членом второй части, вследствие того, что этот член периодический; происходящая при этом ошибка еще более уменьшается, если будем рассматривать вращательное движение во все продолжение полета.

«Итак, можем положить

$$(9) \qquad r = -\frac{K}{Ap_0}$$

«Третье из уравнений (1) дает

$$q = -\frac{B}{Ap_0} \cdot \frac{dr}{dt}$$

«Вставив в него величину r из уравнения (8), получим

$$(10) \qquad q = \frac{B}{A^2 p_0^2} \cdot \frac{dK}{dt} - \frac{B}{A^2 p_0^2} \left(\frac{dK}{dt}\right)_0 \cos \frac{Ap_0 t}{B}$$

«Так как мы решаем вопрос при допущении, что можно пренебречь членами, содержащими $\frac{B}{A^2 p_0^2}$, то найдем, с принятым приближением,

$$q = 0$$

во все время полета».

К этому месту сделана еще следующая выноска: «Дальнейшие выводы основаны на допущении, что можно пренебрегать членами,

содержащими $\frac{B}{A^2 p_0^2}$; так как эти выводы относятся до случаев, при которых угол δ мал, то влияние пренебрегаемых членов, как показывают исследования, ничтожно даже для длинных снарядов.

«Вставив $q = 0$ во второе из уравнений [(4) § 29], а в третье из этих уравнений вставив $r = -\frac{K}{Ap_0}$, получим дифференциальные уравнения вращательного движения оси фигуры продолговатого снаряда в следующем виде:

$$d\delta = -\cos\nu \cdot d\theta$$

(11)

$$d\nu = \frac{K}{Ap_0 \sin\delta} \cdot dt + \frac{\sin\nu}{\operatorname{tg}\delta} d\theta»$$

Заметим здесь же, что в этом виде эти уравнения даны и Майевским и вошли в различные учебники баллистики, не исключая и новейшего издания немецкого руководства по баллистике Cranz'a.

Эти уравнения относятся к движению снаряда на криволинейной траектории, т. е. на значительном ее участке, там мы и скажем о них еще несколько слов.

§ **31.** Прежде чем приступить к разбору теории Забудского, приведем еще n° 189 его книги, где рассматривается одно из важнейших приложений теории вращательного движения снаряда, именно — вопрос «*об угловой скорости вращения продолговатого снаряда, необходимой для правильного его полета*».

Вот что по этому поводу сказано: «Произведенные опыты показывают, что в орудиях, имеющих определенную длину хода нарезов у дула, с увеличением длины снаряда за некоторым пределом уменьшается меткость, причем обнаружено, что если получается весьма дурная меткость на больших дистанциях, то наблюдается также неправильный полет снаряда на самых малых расстояниях от дула. Рассмотрим причину этого явления и попытаемся вывести условия, которыми определяется длина хода нарезов у дула орудия по данной конструкции продолговатого снаряда с медным ведущим поясом.

«Принимая во внимание вышеупомянутое замечание, можно ограничиться для простоты выводом этого условия из уравнений, определяющих движение продолговатого снаряда вблизи дула орудия, когда приблизительно можно принять, что движение центра тяжести снаряда совершается по прямой, составляющей продолжение оси орудия. В этом случае $d\theta = 0$.

«Уравнения, определяющие вращательное движение продолговатого снаряда, будут:

$$A\frac{dp}{dt}=0$$

$$B\frac{dq}{dt}+[B(p-n)-Ap]r=K$$

$$B\frac{dr}{dt}-[B(p-n)-Ap]q=0$$

$$p=n+\cos\delta\cdot\nu'$$

$$q=\delta' \tag{2}$$

$$r=-\sin\delta\cdot\nu'$$

«Пренебрегая членами $p-n$ перед p, были получены интегралы:

$$p=p_0 \tag{3}$$

$$q=\frac{B}{A^2p_0^2}\frac{dK}{dt}-\frac{B}{A^2p^2}\left(\frac{dK}{dt}\right)_0\cos\frac{Ap_0t}{B} \tag{4}$$

$$r=-\frac{K}{Ap_0}+\frac{B}{A^2p_0^2}\left(\frac{dK}{dt}\right)_0\sin\frac{Ap_0t}{B} \tag{5}$$

«Из уравнений (2) и (4) имеем

$$\frac{d\delta}{dt}=\frac{B}{A^2p_0^2}\cdot\frac{dK}{dt}-\frac{B}{A^2p_0^2}\cdot\left(\frac{dK}{dt}\right)_0\cos\frac{Ap_0t}{B}$$

«Интегрируя в пределах от $\delta=0$ до δ и от $t=0$ до t, получим

$$\delta=\frac{B}{A^2p_0^2}K-\frac{B^2}{A^3p_0^3}\left(\frac{dK}{dt}\right)_0\sin\frac{Ap_0t}{B} \tag{6}$$

«Из последнего выражения видно, что угол δ, составляемый осью снаряда с направлением движения, изменяется периодически, так что ось фигуры то удаляется от направления движения, то к нему приближается, причем период этого колебания $\tau=2\pi\cdot\frac{B}{Ap_0}$ не велик, вследствие значительной величины угловой скорости p_0.

«При отдельных выстрелах время достижения снарядом какой-либо точки траектории неизбежно должно меняться. Так как период колебания оси фигуры снаряда относительно направления движения не велик, то значения δ будут получаться в определенной точке траектории весьма разнообразными при каждом выстреле, что, без сомнения, должно вредно влиять

на меткость стрельбы, *если изменения угла* δ *по отношению самой величины будут иметь заметную величину* (курсив наш). Поэтому, для правильного движения снаряда, необходимо, по возможности, уменьшить эти колебания».

Казалось бы и следовало вывести эти условия, но далее сказано:

«Выведем условия, при которых можно пренебречь членами порядка

$$\frac{B}{A^2 p_0^2}$$

«При допущении, что членами порядка $\frac{B}{A^2 p_0^2}$ можно пренебречь, получим из формулы (4):

$$q = 0$$

и затем

$$\frac{d\delta}{dt} = 0$$

«Так как во все время полета $q = 0$, значит и $\frac{dq}{dt} = 0$, то из второго из уравнений (1) получим

$$-Br \cdot n + (B - A) r p_0 = K$$

«Исключив n и r при помощи первого и третьего уравнений (2), получим

$$B \sin\delta \left(p_0 - \cos\delta \cdot \frac{dv}{dt} \right) \frac{dv}{dt} - p_0 (B - A) \sin\delta \cdot \frac{dv}{dt} = K$$

откуда

$$A p_0 \sin\delta \cdot \frac{dv}{dt} - B \cdot \sin\delta \cdot \cos\delta \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 - K = 0$$

«Чтобы это уравнение давало вещественные значения для $\frac{dv}{dt}$, необходимо, чтобы было

$$\frac{A^2 p_0^2}{4B^2 \cos^2\delta} - \frac{K}{B \sin\delta \cos\delta} \geqslant 0$$

что при малых значениях δ и

$$K = hR\rho$$

дает

(7) $$A^2 p_0^2 \geqslant 4 h R \rho \cdot B».$$

Условие это мы уже имели в § 28.

По поводу же изложенного вывода, мы сделаем замечания при общем разборе этой теории.

§ **32.** Сделав эти длинные выписки из книги Забудского, перейдем к подробному разбору его теории, из которого нетрудно будет убедиться

во множестве неправильных рассуждений и выводов и ряде допущений, делающих эту теорию совершенно необоснованной и ошибочной.

Начнем с простейшего случая, т. е. для начального участка траектории, который мы потом примем прямолинейным.

Вывод всех формул основан на следующих допущениях:

1) Что величиною $p - n$ $\left(\text{при обозначении Забудского } p - \frac{d\xi}{dt}\right)$ можно пренебречь по сравнению с p.

2) Что членами порядка $\frac{B}{A^2 p_0^2}$ можно пренебречь.

3) Что имеет место формула

$$(8) \qquad \int_0^t K \sin \frac{A p_0}{B}(z-t)\,dz = -\frac{B}{A p_0} K + \frac{B^2}{A^2 p_0^2}\left(\frac{dK}{dt}\right)_0 \sin \frac{A p_0 t}{B}$$

из которой затем и получаются все дальнейшие выводы.

Мы имели следующие формулы:

$$p = n + \nu' \cos\delta + \theta' \sin\delta \sin\nu$$
$$q = \delta' + \theta' \cos\nu$$
$$r = -\nu' + \theta' \cos\delta \sin\nu$$

причем положено $\gamma' = n$.

Крутизна нарезов составляет для современных орудий около 25 калибров, начальную скорость можно считать около 800 м/сек., тогда для угловых скоростей p_0 получаются следующие приблизительно значения:

Калибр		Угловая скорость	
Дюймы	См.	m, об/сек.	$2\pi m = p_0$
16	400	80	500
14	350	92	580
12	300	105	660
10	250	128	800
8	200	160	1000
6	150	215	1350
4	100	320	2050
3	75	430	2700
2.4	60	570	3580
0.3	0.8*	3300	20000
0.25	0.6*	4400	27000

* Винтовка. Нарезка принята 30 калибров.

Для длинных пятикалиберных снарядов отношение $\frac{B}{A}$ моментов инерции составляет около 10—12. Наименьшая средняя скорость ν' прецессии составляет приблизительно $\frac{hR\rho}{Ap_0}$, значит

$$\frac{\nu'}{Ap_0} = \frac{hR\rho}{A^2 p_0^2}$$

а так как длина хода нарезов рассчитывается по приближенному условию

$$A^2 p_0^2 \approx 4h R\rho B$$

то приближенно будет

$$\frac{\nu'}{p_0} \approx \frac{1}{4}\frac{A}{B} \approx \frac{1}{40} \sim \frac{1}{48}$$

Скорость θ' вообще малая и составляет около $1\frac{1}{2}^\circ$ в секунду, т. е. около $\frac{1}{40}$.

Отсюда следует, что приблизительно будет

$$\gamma' = n \approx \left(1 - \frac{1}{48}\right) p_0$$

и значит, пренебрегать разностью $p - n$ по сравнению с p_0 представляется как бы правильным и влекущим погрешность около 2%.

Но если мы обратим внимание на самое уравнение, где эта разность входит, то увидим, что отбрасывается не просто член $p - n$ по сравнению с p, а член $B(p - n)$ по сравнению с Ap. Но B составляет около $12A$, и значит, первый член составит не $\frac{1}{48}$ второго, а около $\frac{12}{48}$, т. е. $\frac{1}{4}$ второго, и погрешность такого «отбрасывания» не 2%, а около 25%.

Но скорость прецессии может составлять и $\frac{1}{2}\frac{A}{B} \cdot p_0$, т. е. около $\frac{1}{20} \cdot p_0$, а тогда $B(p - n)$ по сравнению с Ap составит $\frac{12}{20}$, т. е. до 60%.

Отбрасывание в самом дифференциальном уравнении даже «малых» членов может иметь своим следствием, что в общем интеграле появится «значительная» погрешность, тем более не внушает доверия теория, где отброшены в самом начале члены, составляющие до 25% и даже до 60% от удержанных.

По отношению ко второму допущению дело обстоит еще гораздо хуже: величина $\frac{B}{A^2 p_0^2}$ не есть *отвлеченное* число, а есть величина, имеющая размерность $t^2 m^{-1} l^{-2}$; при обычном обозначении, попросту говоря, это есть величина *именованная*, численное значение которой зависит от выбора единиц, и при различном выборе единиц ей можно придать любое численное значение, и нельзя говорить о ее великости или малости по сравнению с каким-нибудь *отвлеченным числом*.

Поясним это грубыми примерами. Положим, что мы хотим найти крайние пределы этой величины, т. е. для самого большого, скажем 16-дюймового снаряда, и для самого малого — японской 6-мм пули.

Положим, что начав расчет со снаряда, мы приняли: за единицу веса — тонну, за единицу длины — метр, за единицу времени — секунду, так что у нас будет в круглых числах:

$$\text{Вес снаряда } P = 1 \text{ т}$$

$$\text{Радиус снаряда } R = 0.2 \text{ м}$$

$$\text{Отношение } \frac{A}{B} = \frac{1}{10}$$

$$A = \mu \frac{P}{g} R^2, \text{ причем } \mu = \frac{1}{2}$$

$$g = 9.82 \text{ или кругло } 10 \text{ м/сек.}$$

$$p_0 = 80 \text{ об/сек.} = 500$$

Тогда будет:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{500}$$

$$\frac{B}{A^2 p_0^2} = \frac{B}{A} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{p_0^2} = 10 \cdot 500 \cdot \frac{1}{500 \cdot 500} = \frac{1}{50} = 0.02$$

В тех же единицах для пули имеем:

$$P = \frac{1}{80000}; \quad R = 0.003; \quad p_0 = 20000$$

и будет:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{80000} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{1000} \cdot \frac{3}{1000} = 6 \cdot 10^{-12}$$

$$\frac{B}{A^2 p_0^2} = 10 \cdot \frac{10^{12}}{6} \cdot \frac{1}{20000} \cdot \frac{1}{20000} \approx 4500$$

Можно сказать, что взяты неподходящие единицы, — возьмем обычные килограмм, метр и секунду; предыдущие числа уменьшатся в 1000 раз и будут, соответственно, 0.00002 и 4.5.

Не будем на этом останавливаться: ошибку легко исправить, стоит только писать, напр.,

$$K = hR\rho \sin\delta = hR\rho_0 \cdot \frac{\rho}{\rho_0} \sin\delta$$

где ρ_0 есть сопротивление при начальной скорости, и вместо величины $\frac{B}{A^2 p_0^2}$ брать $hR\rho_0 \cdot \frac{B}{A^2 p_0^2}$, которая будет числом отвлеченным, равным приблизительно, как исчислено у Майевского, около $\frac{1}{10}$.

Но, идя далее, мы видим, что все дальнейшее основано на формуле (8), полученной преобразованием интеграла

$$\int_0^t K \sin \frac{Ap_0(z-t)}{B} \cdot dz$$

интегрированием по частям, причем полагается, что величина $K = 0$ при $t = 0$, т. е. $\delta_0 = 0$, и получается формула

$$\int_0^t K \sin \frac{Ap_0(z-t)}{B} \cdot \left[1 + \frac{1}{K} \cdot \frac{B^2}{A^2 p_0^2} \cdot \frac{d^2K}{dz^2}\right] dz =$$

$$= -\frac{B \cdot K}{Ap_0} + \frac{B^2}{A^2 p_0^2} \left(\frac{dK}{dt}\right)_0 \cdot \sin \frac{Ap_0 t}{B}$$

в которой затем отбрасывается член $\frac{1}{K} \cdot \frac{B^2}{A^2 p_0^2} \cdot \frac{d^2K}{dz^2}$ «*по его малости сравнительно с единицею*», и получается формула

(8)
$$\int^t K \sin \frac{Ap_0(z-t)}{B} \cdot dz =$$

$$= -\frac{B}{Ap_0} \cdot K + \frac{B^2}{A^2 p_0^2} \left(\frac{dK}{dt}\right)_0 \sin \frac{Ap_0 t}{B}$$

Здесь, прежде всего, приходится обратить внимание на неподходящий выбор начального условия: допущение, что $\delta_0 = 0$ при $t = 0$ совершенно произвольно, даже если время считать с момента вылета — величина δ_0 не зависит от нас, но мы всегда можем вообразить, что время t считается с того момента, когда δ проходит через максимум или минимум, и значит, всегда можно распорядиться так, чтобы в начальный момент $t = 0$ было

$\delta = \delta_0$ и $\delta' = 0$, т. е. тогда будет $K = K_0$ и $\left(\frac{dK}{dt}\right) = 0$, ибо K есть функция переменной δ и $\frac{dK}{dt}$ заключает множителем δ'.

Таким образом в формуле (8) следовало бы отбросить член, содержащий $\left(\frac{dK}{dt}\right)_0$, и первый член писать так:

$$-\frac{B}{Ap_0}\left[K - K_0 \cos\frac{Ap_0 t}{B}\right]$$

Преобразование, которое в книге применено, имело бы смысл, если бы в то время как интегрирование вносит малый множитель, дифференцирование не вносило бы множитель большой.

Поясним примером, что мы этим хотим сказать: положим было бы

$$K(z) = H \sin 1000\, z$$

а величина $\frac{B}{Ap_0} = \frac{1}{100}$, так что $\frac{Ap_0}{B} = 100$; рассматриваемый интеграл был бы

$$H\int_0^t \sin 1000\, z \cdot \sin 100\,(z - t) \cdot dz$$

Очевидно

$$\frac{d^2K}{dz^2} = -H \cdot (1000)^2 \cdot \sin 1000\, z$$

и

$$\frac{1}{K} \cdot \frac{B^2}{A^2p^2} \cdot \frac{d^2K}{dz^2} = -\frac{1}{(100)^2} \cdot (1000)^2 = -100$$

Интеграл в нашем примере будет

$$\int_0^t K \sin\frac{B}{Ap_0}(z - t)\left[1 + \frac{1}{K}\frac{B^3}{A^2p_0^2}\frac{d^2K}{dz^2}\right]dz =$$

$$= \int_0^t K \sin\frac{Ap_0}{B}(z - t) \cdot [1 - 100]\, dz$$

и в нем была бы откинута величина -100 и вместо истинной величины

$$-99\int_0^t K \sin\frac{Ap_0}{B}(z - t) \cdot dz$$

была бы взята величина

$$\int_0^t K \sin\frac{Ap_0}{B} \cdot (z - t) \cdot dz$$

Ясно, что это не было бы приближением, а совершенно неверным результатом.

Наш грубый пример обнаруживает это с полною наглядностью, в рассматриваемом же вопросе как раз имеет место обстоятельство, подобное указанному в нашем примере.

В самом деле, в § 31 приведена формула (6)

$$\delta = \frac{B}{A^2 p_0^2} K - \frac{B^2}{A^3 p_0^3} \left(\frac{dK}{dt}\right)_0 \sin \frac{A p_0 t}{B}$$

полученная на основании сделанных допущений.

Для малых углов δ величина

$$K = h\rho R \cdot \sin \delta = hR\rho \cdot \delta$$

тогда из предыдущей формулы следует

$$\delta = \frac{B}{A^2 p_0^2} \cdot hR\rho \cdot \delta - \frac{B^2}{A^3 p_0^3} \cdot \left(\frac{dK}{dt}\right)_0 \sin \frac{A p_0 t}{B}$$

т. е.

$$\delta = \alpha \cdot \sin \frac{A p_0 t}{B}$$

где α — постоянная, значение которой нет надобности выписывать, значит будет

$$K(z) = \alpha hR\rho \cdot \sin \frac{A p_0 z}{B}$$

и

$$\frac{B^2}{A^2 p_0^2} \cdot \frac{1}{K} \cdot \frac{d^2 K}{dz^2} = -1$$

и формула (8) теряет всякий смысл.

Совершенно подобный же результат получится, если за начальные условия принять (как и следовало бы), что при $t = 0$ должно быть

$$\delta = \delta_0 \quad \text{и} \quad \delta' = 0,$$

значит и

$$\left(\frac{dK}{dz}\right) = 0$$

В самом деле, тогда было бы

$$\delta - \delta_0 = \frac{B}{A^2 p_0^2} \left[K - K_0 \cos \frac{A p_0 t}{B} \right]$$

причем

$$K_0 = hR\rho \cdot \delta_0$$
$$K = hR\rho \cdot \delta$$

и мы получили бы для δ выражение вида

$$\delta = a + b\cos\frac{Ap_0 t}{B}$$

причем постоянная b может быть около $\frac{1}{2}a$ или $\frac{2}{3}a$

Значит, и величина $K(z)$ будет вида

$$K(z) = a_1 + b_1\cos\frac{Ap_0 z}{B}$$

с тем же отношением постоянных a_1 и b_1, следовательно будет

$$\frac{B^2}{A^2 p_0^2}\cdot\frac{1}{K}\cdot\frac{d^2K}{dz^2} = -\frac{b_1\cdot\cos\frac{Ap_0 z}{B}}{a_1 + b_1\cos\frac{Ap_0 z}{B}}$$

и напр., при $b_1 = \frac{2}{3}a_1$ эта формула напишется

$$\frac{B^2}{A^2 p_0^2}\cdot\frac{1}{K}\cdot\frac{d^2K}{dz^2} = -\frac{2\cos\frac{Ap_0 z}{B}}{3 + 2\cos\frac{Ap_0 z}{B}}$$

Эта величина при

$$\frac{Ap_0 z}{B} = 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ \ldots$$

равна $-\frac{2}{5}$, при значениях же аргумента

$$\frac{Ap_0 z}{B} = \pi,\ 3\pi,\ 5\pi,\ \ldots$$

эта величина равна $+2$, колеблясь между этими крайними пределами.

Отсюда неприменимость *основной* во всей теории Забудского формулы становится очевидной, а значит, и вся теория, на этой формуле основанная, *является ошибочной* и *доверия не заслуживающей.*

§ **33.** Покажем теперь, каким образом, исходя из той формы уравнений, которой пользовался Н. А. Забудский, получить как точное, так и приближенное решение вопроса о вращательном движении снаряда для столь малого участка траектории, что его можно принимать за прямолинейный.

В этом случае θ' равно нулю и приведенные в § 29 уравнения движения снаряда будут:

$$A \cdot \frac{dp}{dt} = 0 \tag{1}$$

$$B \cdot \frac{dq}{dt} + [B(p - n) - Ap]r = K \tag{2}$$

$$B \cdot \frac{dr}{dt} - [B(p - n) - Ap]q = 0 \tag{3}$$

$$p = \gamma' + \nu' \cos\delta = n + \nu' \cos\delta \tag{4}$$

$$q = \delta' \tag{5}$$

$$r = -\nu' \sin\delta \tag{6}$$

причем

$$K = hR\rho \sin\delta = H \sin\delta \tag{7}$$

Для уравнений (1)—(3) имеем следующие три интеграла.

Во-первых,

$$p = p_0 \tag{8}$$

Во-вторых, множим уравнение (2) на q, (3) — на r и складываем; заметив, что по уравнению (5) $q = \delta'$, получим

$$B[qq' + rr'] = H \sin\delta \cdot \delta'$$

откуда, по интегрировании,

$$B(q^2 + r^2) = 2H[\cos\delta_0 - \cos\delta] + C_1 \tag{9}$$

где C_1 есть произвольная постоянная, значение которой будет определено по начальным условиям.

Полученный интеграл есть не что иное, как интеграл живых сил.

В третьих, умножив уравнение (1) на $\cos\delta$, (3) — на $\sin\delta$ и сложив, получаем

$$Ap' \cos\delta - Br' \sin\delta + (B - A)pq \sin\delta - Bqn \cdot \sin\delta = 0$$

Но, очевидно,

$$Ap' \cos\delta - Br' \sin\delta = (Ap \cos\delta - Br \sin\delta)' + \\ + Ap \sin\delta \cdot \delta' + Br \cos\delta \cdot \delta'$$

подставляя, имеем

$$(Ap \cos\delta - Br \sin\delta)' = \\ = [Ap \sin\delta \cdot \delta' + (B - A)p \sin\delta \cdot \delta' + Br \cos\delta \cdot \delta' - Bn \sin\delta \cdot \delta']$$

но, на основании уравнений (1), (2), (3),

$$[\,] = Bp \sin \delta \cdot \delta' +$$
$$+ B(p - \nu' \cos \delta) \sin \delta \cdot \delta' - B(p - \nu' \cos \delta) \sin \delta \cdot \delta' = 0$$

Следовательно,

$$(Ap \cos \delta - Br \sin \delta)' = 0$$

и значит,

$$Ap \cos \delta - Br \sin \delta = C_2 \tag{10}$$

где C_2 есть произвольная постоянная, значение которой определим по начальным условиям.

Уравнение (10) есть интеграл моментов количеств движения; заменив p его величиною p_0, можно этот интеграл писать так:

$$Ap_0 \cos \delta - Br \sin \delta = C_2 \tag{10'}$$

Все три формулы (8), (9), (10) *точные*, и при выводе их никаких допущений или отбрасываний членов сделано не было.

Уже было упомянуто, что всегда можно принять за начальный момент такой, при котором δ достигает своего наибольшего или наименьшего значения, т. е. когда $\delta' = 0$, поэтому примем за начальные условия: при $t = 0$ должно быть:

$$\delta = \delta_0; \quad \delta' = 0$$
$$\nu = \nu_0; \quad \nu' = \nu_0'$$

Эти условия, как видно, отличаются от принятых Майевским, являясь более общими и не налагающими никаких ограничений на движение снаряда.

Написав уравнения (9) и (10′) так:

$$\delta'^2 + \nu'^2 \cdot \sin^2 \delta = \frac{2H}{B}(\cos \delta_0 - \cos \delta) + a \tag{9'}$$

$$\frac{A}{B} \cdot p_0 \cos \delta + \nu' \sin^2 \delta = b \tag{10''}$$

и обозначив для краткости:

$$\frac{2H}{B} = \frac{2hR\rho}{B} = l$$

$$\frac{A}{B} = k$$

получим произвольные постоянные a и b:

$$a = \nu_0'^2 \cdot \sin^2 \delta_0 \tag{11}$$

и

$$b = kp_0 \cos \delta_0 + \nu_0' \sin^2 \delta_0 \tag{11}$$

и формулы (9′) и (10″) будут:

$$\begin{aligned} \delta'^2 + \nu'^2 \sin^2 \delta &= l(\cos \delta_0 - \cos \delta) + a \\ kp_0 \cos \delta + \nu' \sin^2 \delta &= b \end{aligned} \tag{11′}$$

Исключая из этих двух уравнений ν', получаем

$$\delta'^2 \sin^2 \delta = [l(\cos \delta_0 - \cos \delta) + a][1 - \cos^2 \delta] - (b - kp_0 \cos \delta)^2$$

положив

$$\cos \delta = u$$

и отделяя переменные, имеем

$$dt = \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)[l(u_0 - u) + a] - (b - kp_0 u)^2}} \tag{12}$$

следовательно

$$t = \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)[l(u_0 - u) + a] - (b - kp_0 u)}} \tag{12′}$$

т. е. t выражается эллиптическим интегралом первого рода в функции

$$u = \cos \delta$$

значит, наоборот, $\cos \delta$ выразится эллиптическою функциею времени t.

Нетрудно видеть, что при начальных условиях, принятых Майевским, т. е. при $t = 0$, должно быть

$$\delta' = 0 \quad \text{и} \quad \nu' = 0,$$

уравнение (12) обращается в уравнение (7) § 27, приведенное у Майевского, отличаясь от него лишь обозначением.

Из уравнения (10″) имеем

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{b - kp_0 \cos \delta}{\sin^2 \delta} = \frac{b - kp_0 u}{1 - u^2}$$

следовательно, на основании (12′), будет

$$\nu = \int_{u_0}^{u} \frac{b - kp_0 u}{1 - u^2} \cdot \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)[l(u_0 - u) + a] - (b - kp_0 u)^2}}$$

и значит, после того как u будет найдено, найдется и ν.

§ **34.** Было бы совершенно напрасно преобразовать интегралы (12′) и (13) к каноническому виду, делать обращение интеграла (12′) и вообще пускать в ход весь хорошо разработанный аппарат теории эллиптических интегралов и функций, ибо самая исходная формула

$$K = hR\rho \sin\delta$$

не есть формула абсолютно точная, а лишь приближенная и притом грубо приближенная как в отношении численного значения коэффициента h, так и множителя $\sin\delta$.

Мы уже обращали внимание в разборе теории Майевского, что было бы гораздо точнее и проще, чем пользоваться разными «отбрасываниями» малых величин, доходящих однако до 16% и даже до 40% от удерживаемых, воспользоваться формулами:

$$\cos\delta = 1 - \frac{\delta^2}{2}$$

$$\sin\delta = \delta$$

о точности которых можно судить по следующей таблице:

δ°	δ	$\sin\delta$	$1 - \frac{1}{2}\delta^2$	$\cos\delta$
5°	0.08727	0.08716	0.9962	0.9962
10	0.1745	0.1737	0.9848	0.9848
15	0.2618	0.2588	0.9658	0.9659
20	0.3491	0.3420	0.9391	0.9397
25	0.4363	0.4226	0.9048	0.9063

Эта таблица показывает, что пока угол δ не превышает 25°, относительная погрешность формулы

$$\cos\delta = 1 - \frac{\delta^2}{2}$$

не превышает 0.4% и формулы

$$\sin\delta = \delta$$

не превышает 3.3%, т. е. обе формулы не только гораздо точнее и приближений Майевского и допущения Забудского о малости величины $B(p-n)$ по сравнению с Ap и пр., но точнее и формулы

$$K = hR\rho \sin\delta$$

тем более, что при правильном полете снаряда угол δ остается в пределах до 10°, при 15° полет становится уже неправильным, как мы увидим из новейших английских опытов.

Воспользуемся этими приближенными формулами, чтобы, не вдаваясь в теорию эллиптических функций, довести вопрос до конца.

На основании этих формул, уравнение (11″) напишется так:

$$(1)\qquad \delta^2\delta'^2+\left[b-kp_0+\frac{1}{2}kp_0\delta^2\right]^2-\left[\frac{l}{2}(\delta^2-\delta_0^2)+a\right]\delta^2=0$$

причем

$$a=\nu_0'^2\cdot\delta_0^2$$

$$(2)\qquad b=kp_0-kp_0\frac{\delta_0^2}{2}+\nu_0'\cdot\delta_0^2$$

значит

$$b-kp_0=\nu_0'\delta_0^2-\frac{1}{2}kp_0\delta_0^2=\delta_0^2\left(\nu_0'-\frac{1}{2}kp_0\right)$$

и предыдущее уравнение будет

$$\delta^2\delta'^2+\left[\delta_0^2\nu_0'+\frac{1}{2}kp_0(\delta^2-\delta_0^2)\right]^2-\left[\frac{l}{2}(\delta^2-\delta_0^2)+a\right]\cdot\delta^2=0$$

полагая

$$(*)\qquad \delta^2-\delta_0^2=u\quad\text{и}\quad\delta_0^2=u_0$$

Напишем предыдущее уравнение так:

$$u'^2+4\left[\delta_0^2\nu_0'+\frac{1}{2}kp_0u\right]^2-4\left[\frac{l}{2}\cdot u+a\right]\cdot[u+u_0]=0$$

Хотя в этом уравнении легко отделить переменные, но проще его продифференцировать и составить уравнение второго порядка, коему u удовлетворяет. Таким образом получим по разделении на $2u'$:

$$u''+2\left(\delta_0^2\nu_0'+\frac{1}{2}kp_0u\right)\cdot kp_0-lu-2a-l(u+u_0)=0$$

или

$$(3)\qquad u''+(k^2p_0^2-2l)u=lu_0+2[a-\delta_0^2\nu_0'kp_0]$$

Начальные условия, следующие из уравнений (*), таковы: при $t=0$ должно быть

$$u=0\quad\text{и}\quad u'=2\delta_0\delta_0'=0$$

ибо

$$\delta_0'=0$$

Чтобы уравнение (3) имело решение, выражающееся тригонометрическими функциями, необходимо, чтобы было

$$(4)\qquad k^2p_0^2-2l>0$$

поэтому полагаем

$$k^2 p_0^2 - 2l = n^2 \tag{4'}$$

и заметив, что, на основании уравнения (2),

$$2\left[a - \delta_0^2 \cdot \nu' \cdot kp_0\right] = 2\delta_0^2\left[\nu_0'^2 - \nu' kp_0\right]$$

получим

$$u'' + n^2 u = lu_0 + \delta_0^2\left[\nu_0'^2 - \nu_0' kp_0\right]$$

значит

$$u = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt + \frac{l}{n^2} u_0 + \frac{\delta_0^2}{n^2}\left[\nu_0'^2 - \nu_0' kp_0\right]$$

На основании начальных условий, постоянные произвольные будут:

$$C_1 = -\frac{\delta_0^2}{n^2}\left[l + \nu_0'^2 - \nu_0' kp_0\right]$$

$$C_2 = 0$$

следовательно, заменив u его величиною $\delta^2 - \delta_0^2$, имеем

$$\delta^2 = \delta_0^2 + \frac{\delta_0^2}{n^2}\left[l + \nu_0'^2 - \nu_0' kp_0\right]\left[1 - \cos nt\right] \tag{5}$$

что мы будем писать короче так:

$$\delta^2 = \delta_0^2 + \alpha^2(1 - \cos nt) \tag{5'}$$

Уравнение (11′) в нашем приближении дает

$$\nu' = \frac{1}{2} kp_0 + (b - kp_0) \cdot \frac{1}{\delta^2}$$

заменив δ^2 его величиною (4′), имеем

$$\nu' = \frac{1}{2} kp_0 + (b - kp_0) \cdot \frac{1}{\delta_0^2 + 2\alpha^2 \sin^2 \frac{nt}{2}} \tag{4''}$$

и, по интегрировании, получаем

$$\nu = \nu_0 + \frac{1}{2} kp_0\, t + (b - kp_0) \int_0^t \frac{dt}{\delta_0^2 + 2\alpha^2 \sin^2 \frac{nt}{2}}$$

затем имеем

$$\int_0^t \frac{dt}{\delta_0^2 + 2\alpha^2 \sin^2 \frac{nt}{2}} = \frac{2}{n} \int_0^t \frac{d \operatorname{tg} \frac{nt}{2}}{\delta_0^2 + (\delta_0^2 + 2\alpha^2) \operatorname{tg}^2 \frac{nt}{2}} =$$

$$= \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{\delta_0 \sqrt{\delta_0^2 + 2\alpha^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{\delta_0^2 + 2\alpha^2}}{\delta_0} \operatorname{tg} \frac{nt}{2} \right)$$

таким образом, заметив, что

$$b - kp_0 = \delta_0^2 \left(\nu_0' - \frac{1}{2} kp_0 \right)$$

получим

$$\nu = \nu_0 + \frac{1}{2} kp_0 t +$$

(5'')

$$+ \frac{2\nu_0' - kp_0}{n} \cdot \frac{\delta_0}{\sqrt{\delta_0^2 + 2\alpha^2}} \operatorname{arctg} \left[\frac{\sqrt{\delta_0^2 + 2\alpha^2}}{\delta_0} \operatorname{tg} \frac{nt}{2} \right]$$

Углами δ и ν положение оси снаряда определяется, эти же углы выражены в зависимости от времени, значит формулы (5') и (5')' решают поставленный вопрос о вращательном движении снаряда на малом, принимаемом за прямолинейный, участке его траектории.

§ 35. Мы видели, что при сделанном нами обозначении условие «устойчивости» движения снаряда, т. е. чтобы отклонение δ его оси от касательной к траектории оставалось в определенных пределах, выражается неравенством

$$k^2 p_0^2 - 2l > 0$$

но

$$k = \frac{A}{B}; \quad l = \frac{2H}{B} = \frac{4hR\rho}{B}$$

значит это неравенство можно писать так:

(1) $$A^2 p_0^2 > 4hR\rho B$$

Но мы имели:

(2) $$n^2 = k^2 p_0^2 - 2l$$

(3) $$\delta^2 = \delta_0^2 + \alpha^2 (1 - \cos nt)$$

причем

(4) $$\alpha^2 = [l + \nu_0'^2 - kp_0 \nu_0'] \cdot \frac{\delta_0^2}{n^2}$$

Из формулы (3) видно, что величина δ^2 колеблется между пределами:

$$\delta_{\min}^2 = \delta_0^2$$

$$\delta_{\max}^2 = \delta_0^2 + 2\alpha^2$$

Очевидно, что α^2 принимает свое наибольшее значение $\frac{l}{n^2} \cdot \delta_0^2$ при $\nu_0' = 0$, ибо ν_0' должно быть положительное и превышает kp_0, поэтому, если мы распорядимся так величиною n^2, иначе $A^2 p_0^2$, чтобы пределы изменяемости δ^2 были достаточно тесными при наибольшем значении α^2, то они таковыми и подавно останутся при всяких иных значениях α^2.

Поясним сперва это рассуждение примером: положим, мы хотим ограничить значения δ пределами δ_0 и $2\delta_0$, значит будет

$$4\delta_0^2 = \delta_0^2 + 2\alpha^2$$

и следовательно,

$$\alpha^2 = \frac{3}{2} \cdot \delta_0^2$$

и с другой стороны,

$$\alpha^2 = \frac{l}{n^2} \cdot \delta_0^2$$

следовательно

(*) $$l = \frac{3}{2} n^2 = \frac{3}{2}(k^2 p_0^2 - 2l)$$

откуда

$$3k^2 p_0^2 = 8l$$

подставляя вместо $k^2 p_0^2$ и l их значения, имеем

$$3A^2 p_0^2 = 16 h R \rho B$$

или

(5) $$A p_0 = 2.31 \sqrt{h R \rho B}$$

Совершенно так же, если бы мы ограничили изменяемость угла δ пределами

$$\delta_0 \quad \text{и} \quad 3\delta_0$$

то написали бы

$$\alpha^2 = 4\delta_0^2$$

и, вместо уравнения (*), имели бы уравнение

$$l = 4(k^2 p_0^2 - 2l)$$

которое дает

$$4k^2 p_0^2 = 10l = \frac{20 h R \rho}{B}$$

и отсюда

$$A p_0 = 2.24 \sqrt{h R \rho B}$$

Рассматривая приводимые в главе III результаты английских опытов (фиг. 43 и 44), мы видим, что устанавливается правильное движение оси и достигается хорошая меткость при пределах

$$\delta_0 \quad \text{и} \quad 4\delta_0$$

что дает

$$\alpha^2 = \frac{15}{2}$$

Этой величине соответствует

$$l = \frac{15}{2}(k^2 p_0^2 - 2l)$$

откуда

$$k^2 p_0^2 = \frac{32}{15} l$$

и

(6) $$\Delta p_0 = 2.07 \sqrt{hR\rho B}$$

В № 191 «Баллистики» Забудского говорится: «Вычислив по формуле

(*) $$\Delta p_0 = 2 \sqrt{hR\rho B}$$

длины хода нарезов для испытанных у нас снарядов различной относительной длины, находим, что если длина хода нарезов у дула орудий была не более вычисленной, то получалась удовлетворительная меткость при стрельбе испытанными снарядами, в тех же случаях, когда длина хода нарезов у дула превосходила вычисленную, снаряды давали дурную меткость.

«Из этого следует, что для правильного полета снаряда данной конструкции длина хода нарезов у дула не должна превосходить некоторого предела, который, повидимому, близок к величине, получаемой по формуле (*). Для полного обеспечения удовлетворительной меткости стрельбы снарядами данной конструкции следует, как показывает опыт, *принять в орудии длину хода нарезов у дула, уменьшенную на несколько (от 3 до 5) калибров против вычисленной по выведенной формуле*».

Длина хода нарезов для снарядов того времени (1890-ые годы) составляла около 30—35 калибров; уменьшение этой величины на 3—5 калибров соответствует увеличению угловой скорости на 10—15%, значит в таком же процентном отношении надо увеличить коэффициент в формуле (*), т. е. вместо 2 брать кругло 2.25, чему соответствуют пределы изменяемости угла нутации

$$\delta_0 \quad \text{и} \quad 3\delta_0$$

Таким образом то правило, которое в «Баллистике» Забудского приводится как результат опыта, находит себе полное и вполне определенное обоснование в нашей теории.

§ **36.** Дадим в заключение этой главы пример вычисления по приведенным выше формулам положения, занимаемого осью снаряда относительно касательной к траектории и плоскости стрельбы.

Мы имели уравнения:

$$\delta^2 = \delta_0^2 + \alpha^2(1 - \cos nt) \tag{1}$$

$$\nu - \nu_0 = \frac{1}{2}kp_0 t + \frac{2\nu_0' - kp_0}{n}\frac{\delta_0}{\sqrt{\delta_0^2 + 2\alpha^2}}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{\delta_0^2 + 2\alpha^2}}{\delta_0}\operatorname{tg}\frac{nt}{2}\right] \tag{2}$$

причем

$$k = \frac{A}{B}; \quad n^2 = \frac{A^2 p_0^2}{B^2} - \frac{4hR\varrho}{B}$$

примем для простоты численных расчетов:

$$\nu_0' = \frac{1}{4}kp_0; \quad n = \frac{1}{2}kp_0$$

$$\frac{\delta_0}{\sqrt{\delta_0^2 + 2\alpha^2}} = \frac{1}{4}; \quad \delta_0 = 2^\circ; \quad \sqrt{\delta_0^2 + 2\alpha^2} = 8^\circ$$

$$2\alpha^2 = 60.$$

Тогда будет

$$\nu - \nu_0 = nt - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(4\operatorname{tg}\frac{nt}{2}\right) \tag{2'}$$

Будем брать последовательно:

$$nt = 0, \ \frac{\pi}{8}, \ \frac{\pi}{4}, \ 3\frac{\pi}{8}, \ \ldots \ 2\pi$$

тогда, пользуясь таблицею натуральных тригонометрических функций, расположим вычисление как показано в табл. I и Ia на стр. 128 и 129.

После того как δ и ν вычислены, составляем прилагаемый чертеж (Фиг. 25), который представляет как бы путь, описываемый следом оси снаряда на плоскости, перпендикулярной к касательной к траектории, причем эта плоскость движется вместе со снарядом, сохраняя постоянное расстояние до центра тяжести его.

На этом чертеже точка K представляет след касательной, остающийся неподвижным.

Начальное положение оси снаряда отмечено буквою A, в этот момент $nt = 0$, угол прецессии принят равным нулю и $\delta = \delta_0 = 2^\circ$.

За время, пока nt изменяется от 0 до 2π, угол нутации, т. е. величина δ, пробегает полный цикл своих значений и, начавшись с $\delta = 2^\circ$, вновь возвращается к этому значению, однако в момент $nt = 2\pi$ ось снаряда

Таблица I

Вычисление

$$\delta^2 = \delta_0^2 + \alpha^2 (1 - \cos nt)$$

nt	$\cos nt$	$1 - \cos nt$	$\alpha^2 (1 - \cos nt)$	δ^2	δ
0°.0	1.000	0.000	0.00	4.00	2°.0
22°.5	0.924	0.076	2.3	6.30	2.5
45	.707	0.393	11.8	15.80	4.0
67.5	.383	0.617	18.5	22.50	4.7
90	.000	1.000	30.0	34.00	5.8
112.5	— .383	1.383	41.4	45.40	6.7
135	.707	1.707	51.2	55.20	7.4
157.5	.924	1.924	57.7	61.70	7.9
180	—1.000	2.000	60.0	64.00	8.0
202.5					7.9
225					7.4
247.5					6.7
270					5.8
292.5					4.7
315					4.0
337.5					2.5
360					2.0
22.5					2.5
45					4.0
67.5					4.7
90					5.8
112.5					6.7
135					7.4
157.5					7.9
180					8.0
202.5					7.9
225					7.4
247.5					6.7
270					5.8
292.5					4.7
315					4.0
337.5					2.5
360					2.0

Таблица Ia

Вычисление ν

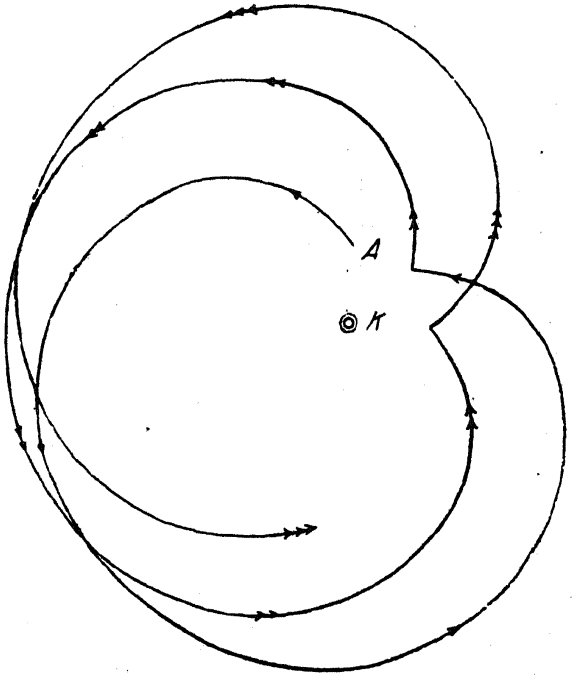
$$\nu - \nu_0 = nt - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(4\operatorname{tg}\frac{nt}{2}\right).$$

$\frac{nt}{2}$	$\operatorname{tg}\frac{nt}{2}$	$4\operatorname{tg}\frac{nt}{2}$	arctg ( )	$\frac{1}{4}$ arctg	$\nu - \nu_0$
0°0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
11.3	0.198	0.796	38°5	9°6	12°9
22.5	0.414	1.66	59.0	14·8	31.2
33.8	0.670	2.28	66.3	16.6	50.9
45	1.000	4.00	76.0	19.0	71.0
56.3	1.500	6.00	80.5	20.1	92.5
67.5	2.414	9.66	84.1	21.0	114.0
78.8	5.020	20.08	87.1	21.8	135.8
90.0	∞	∞	90	22.5	157.5
101.3	—5.020		92.9	23.2	179·3
112.5	2.414		95.8	23.9	201.1
123.8	1.500		99.5	24.9	222·6
135.0	1.000		104.0	26.0	244.0
146.3	0.670		113.7	28.4	264.1
157.3	0.414		121.0	30.2	284.8
168.8	—0.198		141.5	35.3	302.2
180	0.000		180	45.0	315.0
191.3	0.138		218.6	54.6	327.9
202.5	0.414		239.0	59.8	345.2
213.8	0.670		246.3	60.2	7.3
225.0	1.000		256.0	64.0	26.0
236.3	1.500		260.5	65.1	47.4
247.5	2.414		264.1	66.0	69.0
258.8	5.020		267.1	66.8	88.7
270.0	∞		270	67.8	112.2
281.3	—5.020		272.9	68.2	134.3
292.5	2.414		276.9	69.0	156.0
303.8	1.500		279.5	69.9	168.6
315.0	1.000		284.0	71.0	199.0
326.3	0.670		293.7	73·4	219.1
337.5	0.414		301.0	75.2	239.8
348.8	—0.198		321.4	80.3	256.2
360.0	0.000		360°	90.0	270.0

не совпадает с точкою A и угол ν равен не 360°, а всего 315°. С этого момента след оси описывает свой второй завиток до того момента, когда $nt = 4\pi$, и величина δ заканчивает второй полный цикл своих значений и т. д.

Масштаб кривой взят 1 см = 2°, что соответствует расстоянию плоскости проекций до центра тяжести снаряда в 28.7 см.

Сличив представленную на фиг. 24 кривую, вычисленную по нашим теоретическим формулам, с кривыми, приведенными в главе III, полученными



Фиг. 25.

на основании английских опытов, мы видим весьма близкое совпадение их характера. Необходимо при этом заметить, что мы приняли произвольные начальные условия, при которых упрощается вычисление, — совпадение было бы еще более близкое, если бы взять те начальные условия, которые имели место в действительности.

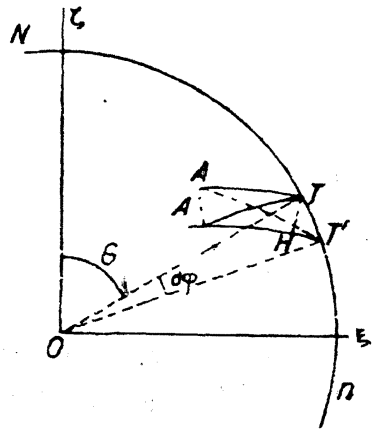
В § 51 показан другой более симметричный способ представления движения оси снаряда, имеющий также и то преимущество, что он более соответствует динамическим принципам, нежели описанное чисто кинематическое представление, введенное еще Майевским.

ГЛАВА II

Вращательное движение снаряда на криволинейной траектории

§ 37. Прежде чем изложить то решение вопроса о вращательном движении снаряда, которое было развито мною еще в 1920 г. и доложено в заседании Морской артиллерийской комиссии, я даю в этой главе обзор других главнейших теорий и отмечаю их недостатки, чтобы с полною отчетливостью выяснить сущность дела в этом важном и сложном вопросе.

При изучении вращательного движения снаряда на криволинейной траектории, Майевский, а за ним многие другие баллистики, в том числе и Cranz, рассуждают следующим образом.



Фиг. 26.

Пусть OT (фиг. 26) есть направление касательной к траектории в момент времени t, Non есть вертикальная плоскость стрельбы, которую, пренебрегая деривацией, примем постоянной, OA — положение оси снаряда, определяемое углом прецессии $NTA = \nu$ и углом нутации

$$AOT = AT = \delta$$

В момент времени $t + dt$ касательная займет положение OT' такое, что угол

$$TOT' = d\varphi$$

где φ есть угол наклонения касательной, считаемый от *вертикали*, таким образом $d\varphi$ есть «понижение» касательной в течение времени dt.

Чтобы нанести на чертеж положение оси снаряда OA', Майевский говорит: так как приращение угла δ вследствие действия пары сопротивления воздуха мало (не сказано по сравнению с чем, все же рассуждение относится до величин бесконечно малых), то можно принять, что дуга

$$AT = A'T = \delta \tag{1}$$

и что приращение угла ν выражается формулой

$$(2) \qquad d\nu_1 = \frac{K}{Ap_0 \sin\delta} dt = ATA'$$

при допущении (1), из элементарного треугольника $TT'H$, следует

$$d\delta = HT' = TT' \cos\nu = d\varphi \cdot \cos\nu$$

Чтобы получить, следуя Майевскому, изменение угла нутации, проведем дугу AT' и заметим, что на нашем чертеже:

$$NTA = \nu$$

$$NT'A' = \nu + d\nu$$

Обозначим на время углы

$$NT'A = \beta \quad \text{и} \quad AT'A = \omega$$

этот последний угол бесконечно малый, и мерою ему служит

$$\omega = \frac{AA'}{\sin AT} = \frac{AA'}{\sin\delta}$$

Но угол ω представляет изменение угла ν_1, предполагая, что касательная OT сохранила свое положение, следовательно, обозначая это изменение через $d\nu_1$, получим

$$(3) \qquad \omega = d\nu_1 = \frac{K}{Ap_0 \sin\delta} dt$$

в предположении *медленной* прецессии и *постоянной* величины угла нутации при неподвижности касательной.

Из треугольника ATT' имеем

$$(4) \qquad \frac{\sin\nu}{\sin\beta} = \frac{\sin AT'}{\sin AT} = \frac{\sin(\delta + d\delta)}{\sin\delta}$$

Очевидно

$$d\nu = \omega - (\nu - \beta)$$

из формулы же (4) следует

$$\frac{\sin\nu - \sin\beta}{\sin\nu} = \frac{\sin(\delta + d\delta) - \sin\delta}{\sin(\delta + d\delta)} = \operatorname{cotg}\delta \cdot d$$

иначе

$$\frac{2\sin\frac{\nu-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\nu+\beta}{2}}{\sin\nu} = (\nu - \beta)\operatorname{cotg}\nu = \operatorname{cotg}\delta \cdot d\delta$$

следовательно

$$\nu - \beta = \frac{\operatorname{tg}\nu}{\operatorname{tg}\delta} d\delta$$

Подставляя, получаем

$$d\nu = d\nu_1 - \frac{\operatorname{tg}\nu}{\operatorname{tg}\delta} d\delta$$

Таким образом происходящие от «понижения» касательной дифференциальные изменения выражаются формулами:

$$d\delta = \cos\nu \cdot d\varphi$$

(I)

$$d\nu = \frac{K}{Ap_0 \sin\delta} dt - \frac{\operatorname{tg}\nu}{\operatorname{tg}\delta} d\delta$$

Это и суть уравнения Майевского.

Как уже сказано, эти уравнения выведены в предположении:

а) что при неподвижной касательной угол нутации *постоянный*,

б) что имеет место *медленная* прецессия, скорость которой

$$\frac{d\nu_1}{dt} = \frac{K}{Ap_0 \sin\delta} dt = \frac{hR\varrho}{Ap_0} dt$$

Мы уже видели, насколько эти предположения далеки от действительности (они равносильны тому, что на фиг. 25 каждый завиток спирали принят за круг с центром в точке K), поэтому, казалось бы, не стоило их и приводить, но надо иметь в виду, что эти формулы нашли место даже в таком руководстве, как «Баллистика» Cranz'a; необходимо критически отнестись к выводу их.

Заметим еще, что если вообразить, что ось снаряда описывает свою прецессию не около касательной к траектории, а около своего среднего положения, близкого к мгновенному положению равновесия (как это и будет показано в § 52), то стоит только принять, что вместо плоскости стрельбы проводится вертикальная плоскость через это положение, как прецессия становится почти равномерной и угол нутации медленно изменяющимся, тогда предыдущие уравнения (I) относительно этой вспомогательной плоскости и указанного положения оси имеют место.

Н. А. Забудский исходит из уравнений:

$$p = n + \nu' \cos\delta + \theta' \sin\delta \sin\nu$$

(5)

$$q = \delta' + \theta' \cos\nu$$

$$r = -\nu' \sin\delta + \theta' \cos\delta \sin\nu$$

и уравнений:

$$A\frac{dp}{dt}=0$$

$$B\frac{dq}{dt}+[B(p-n)-Ap]r=K \tag{6}$$

$$B\frac{dr}{dt}-[B(p-n)-Ap]q=0$$

для которых им получены, при разных «допущениях» и после разных «отбрасываний», верный и очевидный интеграл

$$p=p_0 \tag{7}$$

и интегралы:

$$q=0$$

$$r=-\frac{K}{Ap_0} \tag{8}$$

которые, на основании сказанного в главе I, признать правильными нельзя.

Пользуясь этими результатами, он при θ', не равном нулю, получает из второго уравнения (5):

$$\frac{d\delta}{dt}=-\cos\nu\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

и из третьего:

$$\frac{d\nu}{dt}=\frac{K}{Ap_0\sin\delta}+\frac{\sin\nu}{\operatorname{tg}\delta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{K}{Ap_0\sin\delta}-\frac{\operatorname{tg}\nu}{\operatorname{tg}\delta}\cdot\frac{d\delta}{dt}$$

это суть уравнения Майевского, ибо при нашем обозначении

$$\theta=90^\circ-\varphi$$

§ **38.** Входящая в уравнения (I) величина производной

$$\varphi'=\frac{d\varphi}{dt}$$

находится из уравнений движения центра тяжести снаряда.

В самом деле, обозначим через P — вес снаряда, через g — ускорение силы тяжести, через v — скорость и через r — радиус кривизны траектории в точке (x, y), через φ — наклонение ее в этой точке, считаемое от вертикали, через ρ — сопротивление воздуха на снаряд и через $f(y)$ — отно-

сительную плотность воздуха на уровне y выше дула, — мы имеем следующие дифференциальные уравнения движения центра тяжести снаряда:

$$\frac{P}{g}\cdot\frac{d(v\sin\varphi)}{dt}=-\rho\sin\varphi \tag{1}$$

$$\frac{P}{g}\cdot\frac{v^2}{r}=P\sin\varphi \tag{2}$$

$$v=\frac{r\,d\varphi}{dt} \tag{3}$$

$$dx=r\sin\varphi\cdot d\varphi \tag{4}$$

$$dy=r\cos\varphi\cdot d\varphi \tag{5}$$

причем сопротивление воздуха

$$\rho=\pi R^2 v^2 F(v)\cdot f(y) \tag{6}$$

Из уравнений (2) и (3) следует

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{g}{v}\sin\varphi \tag{7}$$

§ **39.** Мы не будем вдаваться в подробный разбор способов интегрирования уравнений (I), изложенных в руководствах Майевского и Забудского, способы эти мало удовлетворительны, и ограничимся только изложением методы де Спарра, приведенной в «Баллистике» Забудского.

Если угол δ остается настолько малым, что можно принять

$$\sin\delta=\delta=\operatorname{tg}\delta$$
$$\cos\delta=1$$

то уравнения (I) примут вид:

$$d\delta=\cos\nu\,d\varphi$$

$$\delta\cdot d\nu=\frac{hR\rho}{Ap_0}\delta\cdot dt-\sin\nu\,d\varphi \tag{1}$$

Введем, вместо переменной t, переменную s уравнением

$$ds=\frac{hR\rho}{Ap_0}dt$$

так что

$$s=\frac{hR}{Ap_0}\int_0^t\rho\,dt \tag{2}$$

тогда, на основании уравнения (7) предыдущего параграфа, будет

$$d\varphi=\frac{gAp_0}{hR}\cdot\frac{\sin\varphi}{v}\frac{ds}{\rho} \tag{3}$$

Из расчета траектории имеется табличная зависимость между переменной φ, принятой, напр., в нашем способе расчета за независимую, и прочими переменными; пользуясь этою зависимостью, строим кривые $\varphi(t)$ и $q(t)$, представляющие φ и s в функции времени t, и по ним сейчас же найдем и функцию $\varphi(s)$ (это показано ниже на численном примере) и ее производную $\varphi'(s)$, взятую по переменной s, которую обозначим так:

$$\varphi'(s) = f(s)$$

При таких обозначениях уравнения (1) будут:

$$\begin{aligned} d\delta &= f(s) \cdot \cos\nu \, ds \\ d\nu &= \delta \cdot ds - f(s) \sin\nu \, ds \end{aligned} \tag{3}$$

Спарр вводит две новые неизвестные, которые мы обозначим через Δ_1 и Δ_2, именно:

$$\Delta_1 = \delta \cdot \cos\nu; \quad \Delta_2 = \delta \cdot \sin\nu \tag{4}$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} d\Delta_1 &= \cos\nu \, d\delta - \delta \cdot \sin\nu \, d\nu \\ d\Delta_2 &= \sin\nu \, d\delta + \delta \cos\nu \, d\nu \\ d\delta &= \cos\nu \, d\Delta_1 + \sin\nu \, d\Delta_2 \\ \delta \cdot d\nu &= -\sin\nu \, d\Delta_1 + \cos\nu \, d\Delta_2 \end{aligned}$$

после чего уравнения (4) напишутся:

$$\begin{aligned} \cos\nu \, d\Delta_1 + \sin\nu \, d\Delta_2 &= f(s) \cos\nu \, ds \\ -\sin\nu \, d\Delta_1 + \cos\nu \, d\Delta_2 &= \delta \cdot ds - f(q) \sin\nu \cdot ds \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} d\Delta_1 &= -\delta \cdot \sin\nu \cdot ds + f(s) \, ds \\ d\Delta_2 &= \delta \cos\nu \end{aligned} \tag{5}$$

Приняв во внимание уравнения (4), по разделении на ds, обозначая производные значками, имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_1' + \Delta_2 &= f(s) \\ \Delta_2' - \Delta_1 &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Взяв производную от второго из этих уравнений и исключив Δ_1', получим

$$\Delta_2'' + \Delta_2 = f(s) \tag{7}$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$\Delta_2 = C_1 \cos s + C_2 \sin s + \int_0^s f(\xi) \sin(s-\xi)\, d\xi \tag{8}$$

и затем, на основании (6),

$$\Delta_1 = -C_1 \sin s + C_2 \cos s + \int_0^s f(\xi) \cos(s-\xi)\, d\xi \tag{8'}$$

Постоянные произвольные определяются из начальных условий, за которые можно принять: при $s = 0$ должно быть

$$\delta = \delta_0; \quad \nu = \nu_0$$

иначе:

$$\Delta_1 = \delta_0 \cos \nu_0; \quad \Delta_2 = \delta_0 \sin \nu_0$$

Таким образом будет:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \delta_0 \cos(s + \nu_0) + \int_0^s f(\xi) \cos(s-\xi)\, d\xi \\ \Delta_2 &= \delta_0 \sin(s + \nu_0) + \int_0^s f(\xi) \sin(s-\xi)\, d\xi \end{aligned} \tag{9}$$

Положив

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_0^s f(\xi) \cos\xi\, d\xi = \int_0^s \varphi'(\xi) \cos\xi\, d\xi \\ K_2 &= \int_0^s f(\xi) \sin\xi\, d\xi = \int_0^s \varphi'(\xi) \sin\xi\, d\xi \end{aligned} \tag{10}$$

мы будем иметь:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \delta \cdot \cos\nu = \delta_0 \cos(s + \nu_0) + K_1 \cos s + K_2 \sin s \\ \Delta_2 &= \delta \cdot \sin\nu = \delta_0 \sin(s + \nu_0) + K_1 \sin s - K_2 \cos s \end{aligned} \tag{11}$$

и все дело свелось к нахождению интегралов K_1 и K_2, в которых переменная независимая s ограничена лишь временем полета снаряда.

§ 40. Для вычисления этих интегралов, которые нам понадобятся и впоследствии, мы не будем придерживаться Спарра, а применим следующую методу.

Возьмем сперва интеграл

$$K_1 = \int_0^s \varphi'(\xi) \cos \xi \, d\xi$$

Интегрируя по частям, имеем

$$K_1 = [\varphi(\xi) \cos \xi]_0^s + \int_0^s \varphi(\xi) \sin \xi \, d\xi =$$

$$= -\varphi(0) + \varphi(s) \cos s + \int_0^s \varphi(\xi) \sin \xi \, d\xi$$

Так как безразлично, от какого начала считать углы φ, то мы можем положить $\varphi(0) = 0$ и писать

$$K_1 = \varphi(s) \cos s + \int_0^s \varphi(\xi) \sin \xi \, d\xi$$

Стоящая под знаком интеграла функция $\varphi(\xi)$ не только сохраняет свой знак, но есть функция «монотонная», т. е. все время изменяется в одну сторону, оставаясь возрастающей.

Вынеся на чертеж значения ξ, равные $0, 2\pi, 4\pi, \ldots$, мы видим, что в каждом из этих промежутков функция $\varphi(\xi)$ может быть заменена прямою линией.

Пусть будет

$$q = 2i\pi + \alpha$$

тогда, обозначая через

$$\varphi_0, \ \varphi_1, \ \varphi_2, \ \ldots \varphi_i$$

значения функции $\varphi(s)$ при s, равном

$$0, \ 2\pi, \ 4\pi, \ \ldots \ 2i\pi$$

мы имеем

$$\int_0^s = \int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{4\pi} + \ldots + \int_{(2j-2)\pi}^{2j\pi} + \ldots + \int_{2i\pi}^{2i\pi+\alpha}$$

полагаем затем в промежутке:

$$(2j-2)\pi \quad \text{до} \quad 2j\pi$$

$$\xi = (2j-2)\pi + z$$

$$\varphi(\xi) = \varphi_{j-1} + \frac{\varphi_j - \varphi_{j-1}}{2\pi} z$$

будем иметь:

$$\int_{(2j-2)\pi}^{2j\pi} = \int_0^{2\pi} \left(\varphi_{j-1} + \frac{\varphi_j - \varphi_{j-1}}{2\pi} z\right) \sin z \, dz =$$

$$= -\varphi_{j-1} [\cos z]_0^{2\pi} + \frac{\varphi_j - \varphi_{j-1}}{2\pi} [-z \cos z + \sin z]_0^{2\pi} = -(\varphi_j - \varphi_{j-1})$$

$$\int_{2j\pi}^{2i\pi+\alpha} = \int_0^{\alpha} \left(\varphi_j + \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{2\pi} z\right) \sin z \, dz =$$

$$= -\varphi_i \cdot [\cos z]_0^{\alpha} + \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{2\pi} [-z \cos z + \sin z]_0^{\alpha} =$$

$$= \varphi_i (1 - \cos\alpha) - \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{2\pi} \alpha \cos\alpha + \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{2\pi} \sin\alpha =$$

$$= \varphi_i - \left[\varphi_i + \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{2\pi} \alpha\right] \cos\alpha + \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{2\pi} \sin\alpha$$

Но, с принятою степенью приближения, будет:

$$\varphi_i + \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{2\pi} \alpha = \varphi(s)$$

$$\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{2\pi} = \varphi'(s)$$

вместе с тем:

$$\cos\alpha = \cos s; \quad \sin\alpha = \sin s$$

Таким образом получим

$$\int_0^s \varphi(\xi) \sin\xi \, d\xi = -[(\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots + (\varphi_i - \varphi_{i-1})] +$$

$$+ \varphi_i - \varphi(s) \cos s + \varphi'(s) \sin s =$$

$$= -\varphi(s) \cos s + \varphi'(s) \sin s$$

и следовательно,

$$K_1 = \int_0^s \varphi'(\xi) \cos\xi \cdot d\xi = \varphi'(s) \sin s \tag{12}$$

Совершенно так же имеем:

$$K_2 = \int_0^s \varphi'(\xi)\sin\xi\,d\xi = \varphi(s)\sin q - \int_0^s \varphi(\xi)\cos\xi\,d\xi$$

$$\int_0^s = \int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{4\pi} + \ldots + \int_{(2j-2)\pi}^{2j\pi} + \ldots + \int_{2i\pi}^{2i\pi+\alpha}$$

$$\int_{(2j-2)\pi}^{2j\pi} = \int_0^{2\pi}\left(\varphi_{j-1} + \frac{\varphi_j - \varphi_{j-1}}{2\pi}z\right)\cos z\,dz =$$

$$= \varphi_{j-1}\left[\sin z\right]_0^{2\pi} + \frac{\varphi_j - \varphi_{j-1}}{2\pi}\left[z\sin z + \cos z\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_{2\pi i}^{2\pi i+\alpha} = \int_0^{\alpha}\left(\varphi_i + \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{2\pi}z\right)\cos z\,dz =$$

$$= \varphi_i\sin\alpha + \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{2\pi}\left[z\sin z + \cos z\right]_0^{\alpha} =$$

$$= \left(\varphi_i + \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{2\pi}\alpha\right)\sin\alpha - \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{2\pi}(1 - \cos\alpha) =$$

$$= \varphi(s)\sin s - (1 - \cos s)\cdot\varphi'(s)$$

Следовательно, будет

$$K_2 = \int_0^s \varphi'(\xi)\sin\xi\,d\xi = \varphi'(s)(1 - \cos s) \tag{13}$$

Подставляя в уравнения (14) найденные значения интегралов K_1 и K_2, мы получим:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \delta_0\cos(s + \nu_0) + \varphi'(s)\sin s\\ \Delta_2 &= \delta_0\sin(s + \nu_0) + \varphi'(s)(1 - \cos s)\end{aligned} \tag{14}$$

причем

$$s = \frac{hR}{Ap_0}\int_0^t \rho\,dt$$

$$\varphi'(s) = \frac{g\cdot Ap_0}{hR\rho v}\sin\varphi$$

Из уравнений (4) следует:

$$\delta = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}$$

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$$

В уравнениях (14) члены

$$\delta_0 \cos(s + \nu_0) \quad \text{и} \quad \delta_0 \sin(s + \nu_0)$$

представляют, так сказать, «свободные» колебания снаряда, которые образуются в начальный момент и не зависят от величины $\varphi'(s)$, члены же

$$\varphi'(s) \sin s \quad \text{и} \quad \varphi'(s)(1 - \cos s)$$

представляют «вынужденные», которые не зависят от начальных условий и образуются вследствие «понижения» касательной. Эти последние и характеризуют собою «устойчивость снаряда» при полете, т. е. в какой мере его ось «следит» за постепенным понижением касательной.

Мы подробнее разберем это движение ниже, когда получим более общие формулы и приведем численный пример.

Теперь же мы перейдём к рассмотрению теории вращательного движения снаряда, изложенной проф. Noether'ом в 1919 г. Эта теория доставит нам те же самые формулы (14), но выведенные из совершенно иных соображений.

§ **41.** Статья Noether'a под заглавием «Über analytische Berechnung der Geschosspendelungen» помещена в «Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen» (Math. Phys. Klasse, Heft 3, 1919).

Проф. Noether при этом говорит, что он имел в своем распоряжении рукопись проф. A. Sommerfeld'a, который вместе с F. Klein'ом издал о вращательном движении твердого тела известное сочинение: «Theorie des Kreisels» — «Теория волчка», в 966 страниц убористой печати.

В начале своего исследования Noether высказывает основные допущения, которые он делает, а именно:

I. Траектория центра тяжести снаряда принимается за плоскую кривую, лежащую в вертикальной плоскости стрельбы, и считается известной по предварительному вычислению, производимому обычными во внешней баллистике способами.

Сопротивление воздуха принимается пропорциональным квадрату скорости, так что сопротивление, отнесенное на единицу массы снаряда (ускорение от сопротивления воздуха), выражается формулой

(1) $$\rho = cv^2$$

При таком законе сопротивления, если не принимать в расчет изменения плотности воздуха с высотою, уравнения движения снаряда интегрируются в квадратах.

II. Кроме прямого сопротивления, на снаряд действует опрокидывающая пара, стремящаяся удалить ось снаряда от касательной к траектории, так что то положение динамического равновесия, при котором ось совпадает с касательной, есть положение неустойчивое.

Ось этой пары перпендикулярна к оси снаряда и к касательной к траектории, и момент пары равен нулю как при совпадении оси снаряда с касательной, так и при взаимной перпендикулярности их.

Момент этой пары принимается равным

$$K = Cv^2 \sin \delta \tag{2}$$

где δ — угол между касательной и осью.

Само собою разумеется, что формула (2) есть не что иное, как формула Майевского для сопротивления воздуха, пропорционального второй степени скорости.

III. Вследствие сообщенного снаряду вращения около продольной его оси, момент количества движения которого обозначим через N, вышеуказанное динамическое равновесие становится устойчивым, если

$$N^2 > 4BCv^2 \tag{3}$$

причем B есть момент инерции снаряда около поперечной оси.

В этом случае вращательное движение снаряда во время полета состоит из прецессии, происходящей вокруг касательной (принимаемой за неподвижную) и из нутации.

Когда неравенство (3) выполнено с большим избытком, то амплитуда нутации будет малая, если только с самого начала движения не образовалась нутация вследствие начального толчка, чего не предполагается.

Таким образом движение рассматривается как чистая прецессия, при которой *ось снаряда и ось моментов количеств движения* (главный момент количеств движения) *совпадают*.

Скажем здесь же от себя, что такого совпадения нет. Но от этого ограничения или допущения, которое лишало бы исследование Noether'a всякого практического значения, можно освободиться, как будет нами показано в § 64.

Движение снаряда Noether относит к подвижной системе координат, образуемой главною нормалью, касательной и бинормалью к траектории (фиг. 27).

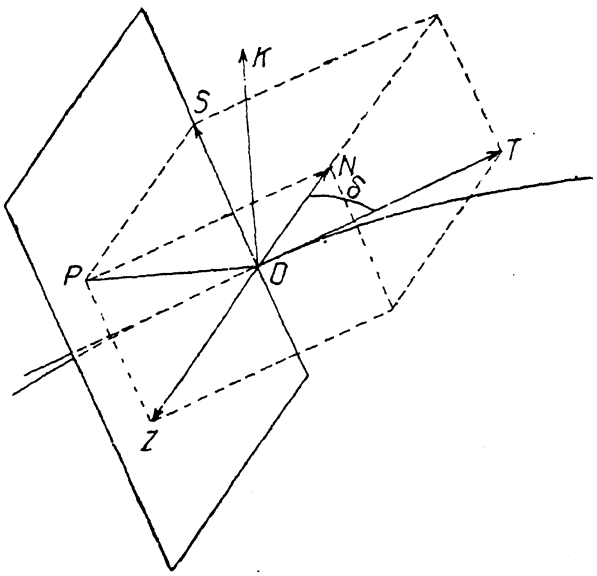
В таком случае угловая скорость ω вращения осей имеет своими слагающими:

$$0,\ 0,\ -\frac{d\theta}{dt}$$

где θ есть наклонение касательной к горизонту.

Обозначим через

$$S,\ T,\ Z$$



Фиг. 27.

проекции главного момента количеств движения на упомянутые оси координат, самый же главный момент обозначим через N, так что

$$N^2 = S^2 + T^2 + Z^2$$

и

$$\cos(N,S) = \frac{S}{N};\quad \cos(N,T) = \frac{T}{N};\quad \cos(N,Z) = \frac{Z}{N}$$

С другой стороны, проекции вектора K, т. е. момента опрокидывающей пары на те же оси, суть:

$$-K\cdot\frac{Z}{N},\quad 0,\quad K\cdot\frac{S}{N}$$

или, заменив K его величиною Cv^2:

$$-\frac{Cv^2 Z}{N},\quad 0,\quad \frac{Cv^2 S}{N}$$

На основании закона моментов количеств движения, пользуясь формулами и рассуждениями, изложенными в § 25, мы имеем следующие уравнения движения:

$$\frac{dS}{dt} = -T\frac{d\theta}{dt} - \frac{Cv^2 Z}{N}$$

$$\frac{dT}{dt} = S\frac{d\theta}{dt} \qquad (4')$$

$$\frac{dZ}{dt} = Cv^2\frac{S}{N}$$

Заметим здесь же по поводу этих уравнений, что при $\theta' = 0$ и v постоянном, т. е. для начального прямолинейного участка траектории, будет

$$Cv^2 = m = \text{const}$$

и уравнения (4′) будут, обозначая производные по времени t значками:

$$S' = -m\frac{Z}{N}$$

$$T' = 0$$

$$Z' = m\frac{S}{N}$$

Отсюда следует

$$T = T_0 = \text{const}$$

Затем

$$2SS' + 2TT' + 2ZZ' = 0$$

и, по интегрировании,

$$S^2 + T^2 + Z^2 = N^2 = N_0^2 = \text{const}$$

Положив

$$\frac{Cv^2}{N_0} = m_1$$

имеем уравнения:

$$S' = -m_1 Z$$

$$Z' = m_1 S$$

из которых следует

$$Z'' + m_1^2 Z = 0$$

и значит,

$$Z = C_1 \cos m_1 t + C_2 \sin m_1 t$$

$$S = -C_1 \sin m_1 t + C_2 \cos m_2 t$$

Но в предположении, что ось снаряда и вектор N совпадают, будет

$$S^2 + Z^2 = N_0^2 \sin^2 \delta$$

значит,

$$N_0^2 \sin^2 \delta = C_1^2 + C_2^2 = N_0^2 \sin^2 \delta_0$$

т. е.

$$\delta = \delta_0$$

что показывает, что это предположение приводит к чистой конической прецессии без нутации, следовательно уравнения (4′) могут служить для разыскания *вынужденных* колебаний, но не для полного определения движения.

После этого замечания вернемся к уравнениям (4′) и их исследованию Noether'ом.

Умножив уравнения (4′), соответственно, на

$$2S,\ 2T,\ 2Z$$

и сложив, получим

$$2SS' + 2TT' + 2ZZ' = 0 \tag{4''}$$

и, по интегрировании,

$$S^2 + T^2 + Z^2 = N^2 = N_0^2 = \text{const}$$

Заменяя в уравнениях (4′) N через N_0, видим, что эти уравнения *линейные*.

Введем в уравнения (4′), вместо переменной t, переменную независимую u уравнением

$$u = -\operatorname{tg} \theta \tag{5}$$

Из этого уравнения следует

$$du = -\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = -(1 + u^2)\, d\theta$$

С другой стороны, при движении центра тяжести снаряда проекция ускорения его на главную нормаль к траектории равна $-g \cos \theta$, так что

$$\frac{v^2}{r} = \frac{v^2\, d\theta}{ds} = \frac{v \cdot d\theta}{dt} = -g \cos \theta$$

значит,

$$dt = -\frac{v}{g} \frac{d\theta}{\cos \theta}$$

и по замене получаем:

$$\frac{dS}{du} = \frac{T}{1+u^2} - (1+u^2)\cdot\frac{Cv^3\cos^3\theta}{gN_0}\cdot Z$$

$$(4''') \qquad \frac{dT}{du} = -\frac{S}{1+u^2}$$

$$\frac{dZ}{du} = (1+u^2)\frac{Cv^3\cos^3\theta}{gN_0}S$$

В эти уравнения, кроме переменной u, входит еще величина $v\cos\theta$, но эта величина находится из уравнений движения центра тяжести снаряда и может быть выражена через переменную θ, значит и через u.

Из уравнений движения центра тяжести следует

$$(7) \qquad \frac{d(v\cos\theta)}{d\theta} = \frac{ev\cdot f(v)}{g}$$

где $cf(v)$ есть закон сопротивления воздуха. В нашем случае принято

$$f(v) = v^2,$$

тогда уравнение (7) может быть написано

$$\frac{d(v\cos\theta)}{(v\cos\theta)^3} = \frac{c}{g}\frac{d\theta}{\cos^3\theta} = -\frac{c}{g}\cdot\sqrt{1+u^2}\cdot du$$

и, по интегрировании, дает

$$(7') \qquad \left(\frac{v_s}{v\cos\theta}\right)^2 = 1+\frac{cv_s^2}{g}\left[\log\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)+u\sqrt{1+u^2}\right]$$

где через v_s обозначена скорость в вершине траектории, соответствующая значению $u=0$.

Для сокращения будем писать эту формулу так:

$$(7'') \qquad \left(\frac{v_s}{v\cos\theta}\right)^2 = 1+c'\chi(u)$$

причем

$$c' = \frac{cv_s^2}{g}$$

Величина c', а также $c'\chi(u)$, в практике, по крайней мере для навесных траекторий, — малая.

Значение $c'=0$ соответствует параболе для безвоздушного пространства.

На основании уравнения (7″) имеем

$$\frac{Cv^3\cos^3\theta}{gN_0} = \eta\,[1 + c'\chi(u)]^{-\frac{3}{2}}$$

причем[1]

$$\eta = \frac{Cv_s^3}{gN_0}$$

представляет характеристическую постоянную для нашей задачи. Эту постоянную можно рассматривать как отношение скорости прецессии к быстроте изменения наклонения траектории в ее вершине ($u = 0$).

Чтобы придать уравнениям (4‴) более простой вид, введем новую независимую переменную ψ уравнением

$$\psi = \int_0^u (1 + u^2)\,[1 + c'\chi(u)]^{-\frac{3}{2}} \cdot du \tag{9}$$

тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\psi} &= \gamma(u)\cdot T - \eta\cdot Z \\ \frac{dT}{d\psi} &= -\gamma(u)\cdot S \\ \frac{dZ}{d\psi} &= \eta S \end{aligned} \tag{6'}$$

причем

$$\gamma(u) = (1 + u^2)^{-2}\,[1 + c'\chi(u)]^{-\frac{3}{2}}$$

§ **42.** В системе уравнений (6′) представляется полезным рассматривать сперва два предельных случая, являющихся характеристическими.

1°) Значительное преобладание членов, содержащих множитель $\gamma(u)$, так что

$$1 = \gamma(0) \gg \eta$$

(знак $\gg$ означает весьма велико по сравнению).

Отбрасывание членов, содержащих η, равносильно тому, что в самих исходных уравнениях было бы положено $K = 0$; а тогда, по закону моментов количеств движения, вектор N сохраняет не только свою постоянную величину N_0, но и постоянное направление, значит и ось снаряда при его

[1] У автора эта величина обозначена через λ, но так как у нас буква λ, как раз в вопросе о сопротивлении воздуха, принята для обозначения коэффициента формы, то мы заменим ее через η.

полете оставалась бы все время параллельной своему первоначальному направлению, т. е. она не следовала бы за касательной, которая все более и более отходила бы от оси, — снаряд чрезмерно устойчив или чрезмерно «стоек», и при больших углах падения будет поражать цель или боком, или даже дном.

2°) Значительное преобладание членов, содержащих множитель k, так что

$$1 = \gamma(0) \ll \eta$$

Отбрасывание членов, содержащих $\gamma(u)$, равносильно тому, что в уравнениях $(4'')$ будут отброшены члены, содержащие $\frac{d\theta}{dt}$, т. е. пренебрегается кривизною траектории. В этом случае движение представляло бы чистую прецессию с образовавшейся, вследствие начального вообще малого уклонения, нутацией оси относительно касательной.

Является вопрос, останется ли это уклонение малым и во все время полета, несмотря на постепенное, достигающее значительной величины, понижение касательной, иными словами, будет ли ось снаряда «следить» за касательной.

Положим сперва, чтобы получить общую картину, что $\gamma(u)$ — постоянное [для настильных траекторий, для которых u мало, $\gamma(v)$ близко к 1], тогда из второго и третьего уравнений $(6')$ следует

$$\left(\eta \frac{dT}{d\psi} + \gamma \frac{dZ}{d\psi}\right) = \frac{d}{d\psi}(\eta T + \gamma Z) = 0$$

следовательно

$$R = \eta \cdot T + \gamma Z = R_0 = \text{const}$$

Пользуясь этим уравнением, исключим из уравнения $(6')$ T, и получим:

$$\frac{dS}{d\psi} = \frac{\gamma}{\eta} R_0 - \left(1 + \frac{\gamma^2}{k^2}\right) \cdot \eta Z = 0$$

$$\frac{dZ}{d\psi} = \eta S$$

Интегрирование дает:

$$S = r_1 \cos n\psi + r_2 \sin n\psi$$

$$Z = \frac{\gamma R_0}{n^2} + r_3 \cos n\psi + r_4 \sin n\psi \qquad (10)$$

причем

$$n^2 = \eta^2 + \gamma^2$$

$$r_3 = -\frac{\eta r_2}{\sqrt{\eta^2+\gamma^2}}$$

$$r_4 = \frac{\eta r_1}{\sqrt{\eta^2+\gamma^2}}$$

Из этих формул следует: движение снаряда представляет гармоническое колебание, частота коего есть

$$\frac{\sqrt{\eta^2+\gamma^2}}{2\pi}$$

около среднего положения, отклоненного вправо на величину $\frac{\gamma R^0}{n^2}$. Это среднее уклонение составляет

$$\frac{Z}{N_0} = \frac{\gamma}{\eta^2+\gamma^{2/}}\frac{R_0}{N_0}$$

Если угол вылета снаряда равен нулю, т. е. при вылете его ось совпадает в точности с осью орудия и с касательной к траектории в начальной ее точке ($Z_0 = 0$), то будет

$$R_0 = \eta T_0 = \eta N_0$$

и следовательно, среднее уклонение

$$\frac{Z}{N_0} = \frac{\eta\gamma}{\eta^2+\gamma^2}$$

В этом случае, вследствие периодичности решения, ось снаряда, совершив полное колебание, возвращается вновь к точному совпадению с касательной, и у нас будет:

$$(10') \qquad \begin{aligned} \frac{S}{N_0} &= \frac{\gamma}{\sqrt{\eta^2+\gamma^2}}\sin n(\psi-\psi_0) \\ \frac{Z}{N_0} &= \frac{\gamma}{\sqrt{\eta^2+\gamma^2}}[1-\cos n(\psi-\psi_0)] \end{aligned}$$

причем ψ_0 есть начальное, соответствующее $u = 0$, значение переменной ψ.

В результате этого ориентировочного расчета получается такое заключение: амплитуда колебаний и среднее уклонение тем меньше, чем $\frac{\eta}{\gamma}$ больше; в предельном случае, когда $\frac{\eta}{\gamma} \gg 1$, обе величины обращаются

в нуль, следовательно снаряд тогда в точности следит за касательной и поражает цель носком.

§ **43.** В общем случае необходимо принимать в соображение изменяемость величины γ.

Для сжатости вычислений выгодно соединить S и Z в одно комплексное количество Q:

$$Q = S + iZ$$

тогда первое и третье уравнения (6′), будучи соединены в одно уравнение, дают

$$\frac{dQ}{d\psi} - i\eta Q = \gamma T \tag{11}$$

причем

$$T = N_0^2 - S^2 - Z^2 \tag{11′}$$

Уравнение (11) имеет интегрирующего множителя $e^{-i\eta\psi}$ и, по интегрировании, дает

$$Q = e^{i\eta\psi} \int^{\psi} \gamma T e^{-i\eta\psi} d\psi \tag{12}$$

Предполагая, как оговорено вначале, что угол δ остается небольшим, скажем $\delta < 30^\circ$, и так как $\cos\delta = \frac{T}{N_0}$, то можно в исходном приближении принять (с погрешностью $< 13\,\%$)

$$T = N_0$$

тогда уравнение (12) будет

$$Q = N_0 \cdot e^{i\eta\psi} \int^{\psi} \gamma e^{-i\eta\psi} d\psi \tag{12′}$$

Если угол вылета равен нулю, то при $\psi = \psi_0$ будет $S = Z = 0$, и следовательно,

$$Q = N_0 \cdot e^{i\eta\psi} \int_{\psi_0}^{\psi} \gamma e^{-i\eta\psi} d\psi \,. \tag{12″}$$

В общем случае на движение, определяемое уравнением (12″), налагается еще зависящее от начального положения оси при вылете круговое колебание

$$Q_1 = Be^{i\eta\psi}$$

Таким образом приходим к следующему заключению: *вращательное движение снаряда при заданной начальной скорости и угле возвышения является вполне определенным. Происходящие при выстреле случайные возмущения проявляются лишь в присоединении кругового колебательного движения постоянной (вообще малой) амплитуды.* Но в эти колебания не включена образующаяся при некоторых обстоятельствах нутация вследствие толчка, ибо, согласно сделанному в начале допущению III, предположено, что *главный момент количеств движения совпадает с осью снаряда.*

В дальнейшем мы ограничимся лишь исследованием решения (12′), оставляя в стороне колебания (12″).

Итак, пусть будет

$$\frac{Q}{N_0} = e^{i\eta\psi} \int_{\psi_0}^{\psi} \gamma e^{-i\eta\psi}\, d\psi$$

стоящий в правой части интеграл может быть разложен (формально) в ряд по возрастающим степеням $\frac{1}{\eta}$, стоит только его преобразовывать интегрированием по частям.

Таким образом получим

$$\frac{Q}{N_0} = e^{i\eta\psi}\left[\frac{i}{\eta}(\gamma e^{-i\eta\psi} - \gamma_0 e^{i\eta\psi_0}) - \frac{i}{\eta}\int_{\psi_0}^{\psi} \gamma' e^{-i\eta\psi}\, d\psi\right]$$

Стоящие вне интегрального знака члены, по отделении вещественной и мнимой части, дают:

$$(13') \qquad \begin{aligned} \frac{S^{(1)}}{N_0} &= \frac{\gamma_0}{\eta}\sin\eta(\psi - \psi_0) \\ \frac{Z^{(1)}}{N_0} &= \frac{\gamma}{\eta} - \frac{\gamma_0}{\eta}\cos\eta(\psi - \psi_0) \end{aligned}$$

Таким образом здесь опять появляется уже полученная для настильных траекторий форма решения (10′), с тою разницею, что вместо

$$\sqrt{\eta^2 + \gamma^2}$$

здесь стоит η, что указывает, что допущение $T \approx N_0$ имеет место лишь при достаточно большом отношении $\eta : \gamma$. Второе отличие в том, что среднее уклонение $\left(\text{т. е. непериодический член } \frac{\gamma}{\eta}\right)$ имеет теперь переменную величину.

Спрашивается, в каком случае решение, доставляемое этим первым членом, обладает достаточною точностью. Для этого необходимо, чтобы второй член

$$\frac{i}{\eta}\int_{\psi_0}^{\psi}\gamma' e^{-i\eta\psi}\,d\psi$$

был мал по сравнению с $\frac{\gamma_0}{\eta}$.

Стоящая под знаком интеграла функция состоит из двух множителей — периодического $e^{-i\eta\psi}$ и непериодического γ'; так как этот множитель также переменный, то интеграл не будет чисто периодическим, и получатся колебания с переменною амплитудой.

В частности, существенно то обстоятельство, что в смежности с значением $\psi = 0$ величина γ' сперва быстро возрастает, затем убывает, превратившись из положительной в отрицательную, вследствие этого такие элементы интеграла, которые при постоянном γ' взаимно уничтожались, здесь будут складываться.

Вследствие изменяемости знака периодического множителя (см. § 44), эти элементы в сумме будут порядка наибольшего значения $\frac{\gamma'}{\eta}$ и, прилагаясь к амплитуде колебаний, дадут на нисходящей ветви ($\psi = 0$) добавочный член порядка $\frac{\gamma'}{\eta^2}$. Так как наибольшее значение γ' остается конечным, то η может быть выбрано достаточно большим, чтобы эти члены стали малыми по сравнению с $\frac{\gamma_0}{\eta}$. Таким образом для весьма больших значений η как среднее уклонение, так и амплитуда колебаний (13′) будут весьма малые.

Итак, имеем предложение: *При весьма больших значениях η движение снаряда* (подобно тому как для настильных траекторий) *представляется первым членом формулы (13). Ось снаряда, уклонившись в среднем немного вправо, следит за касательной, колеблясь вокруг нее. В предельном случае $\eta = \infty$ снаряд следит за касательной абсолютно точно.*

§ **44.** Вторичным интегрированием по частям получаем из (13):

$$\frac{Q}{N_0} = \frac{i}{\eta}\left[\gamma - \gamma_0 e^{i\eta(\psi-\psi_0)}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\eta^2}\left(\gamma' - \gamma_0' e^{i\eta(\psi-\psi_0)}\right) - \frac{e^{i\eta\psi}}{\eta^2}\int_{\psi_0}^{\psi}\gamma'' e^{-i\eta\psi}\,d\psi \tag{14}$$

Относительно последнего члена в этой формуле может быть произведено исследование, подобное тому как для формулы (13).

Если же этот член для достаточно больших значений η отбросить, то члены второго порядка будут:

$$(14') \qquad \begin{aligned} \frac{S^{(2)}}{N_0} &= \frac{\gamma'}{\eta^2} - \frac{\gamma_0'}{\eta^2}\cos\eta(\psi-\psi_0) \\ \frac{Z^{(2)}}{N_0} &= \frac{\gamma_0'}{\eta^2}\sin\eta(\psi-\psi_0) \end{aligned}$$

Эти члены представляют круговое колебание около переменного среднего положения оси, расположенного в плоскости стрельбы: для восходящей ветви траектории — выше, для нисходящей — ниже касательной.

Разложение по степеням $\frac{1}{\eta}$ могло бы быть продолжено интегрированием по частям и далее, но оно оказалось бы *полусходящимся*, т. е. сперва как члены ряда, так и остаточный член его идут убывая, затем после некоторого члена начинают возрастать неопределенно; таким образом для больших значений η разложение дает достаточную точность своим первым или первыми двумя членами, в остальных же случаях требуется особое исследование, главным образом для нисходящей ветви.

§ **45.** Вернувшись опять к переменной независимой u, напишем, на основании уравнений (6) и (9), решение (12″) в виде:

$$Q = N_0 e^{i\eta\psi(u)} \int_{u_0}^{u} \frac{1}{1+u^2} e^{-i\eta\psi(u)}\, du$$

$$(12''') \quad \psi(u) = \int_0^u \frac{1+u^2}{[1+c'\chi(u)]^{\frac{3}{2}}} \cdot du$$

$$\chi(u) = 2\int_0^u \sqrt{1+u^2}\cdot du = u\sqrt{1+u^2} + \log\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)$$

Изученные в предыдущем параграфе колебания по амплитуде определяются начальным значением γ_0 функции γ, среднее уклонение — значением $\gamma(u)$. Так как в первых двух интегралах [ур-ние (12‴)] подинтегральная функция при $u = \pm\infty$ быстро приближается к нулю, то можно расширить пределы интегрирования и писать

$$\int_{u_0}^{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{u_0} - \int_{u}^{\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} + \int_{u_0}^{-\infty} + \int_{\infty}^{u}$$

и, полагая

$$I=\int_{u_0}^{u};\quad I_1=\int_{u_0}^{-\infty};\quad I_2=\int_{-\infty}^{+\infty};\quad I_3=\int_{+\infty}^{u}$$

будем иметь

$$I=I_1+I_2+I_3$$

так что

$$\frac{Q}{N_0}=I_1\,e^{i\eta\psi(u)}+I_2\,e^{i\eta\psi(u)}+I_3\,e^{i\eta\psi(u)}$$

В этой формуле средний член представляет колебание, которое не зависит непосредственно от u_0, амплитуда этого колебания также есть некоторая постоянная, и хотя это колебание относится в сущности к асимптотическому концу траектории ($u=\infty$), но так как главная часть колебания образуется близ вершины, то по значению I_2 можно судить о колебаниях на всей нисходящей ветви. Noether называет это колебание «присущим» снаряду («eingeprägte Pendelung»).

Затем он вычисляет, пользуясь свойствами функций мнимого переменного и теоремою Коши об интегральных вычетах, два предела, между которыми заключается величина I_2, а именно:

$$1.47e^{-\left(\frac{2}{3}-2ic'\right)\eta}<I_2<1.67e^{-\left(\frac{2}{3}-2ic'\right)\eta}$$

понятно, что, точнее говоря, эти пределы относятся до амплитуды I_2, тогда как фаза их зависит от $e^{2ic/\eta}$, поэтому, обозначая эту амплитуду через I, будем иметь

$$1.47e^{\frac{2}{3}\eta}<I<1.67e^{-\frac{2}{3}\eta}$$

Здесь необходимо обратить внимание, что величина I не зависит от c', а зависит единственно от величины η:

$$\eta=\frac{Cv_s^3}{gN_0}$$

или, при наших обозначениях,

$$\eta=\frac{hR\varrho_1 v_s}{gAp_0}$$

где v_s есть скорость в вершине траектории.

Замечательно, что абсолютная величина амплитуды, будучи не зависимой от c', остается неизменной, даже если вместо истинной траектории взять параболу, соответствующую безвоздушному пространству, но такую,

у которой скорость в вершине одинакова со скоростью на траектории. Лишь фаза зависит от c'.

В заключение своей статьи Noether приводит численный пример, чтобы дать понятие об относительной величине встречающихся в его анализе величин.

Так, взяв угол возвышения

$$\theta_0 = 60^\circ, \quad \eta = 4, \quad c' = 0$$

он находит, что среднее уклонение, достигающее своей наибольшей величины для вершины (при $u = 0$), равно $\frac{1}{\eta}$, т. е. около 14°, амплитуда колебаний, вследствие понижения касательной,

$$I_1 = \frac{\gamma_0}{\eta} = \frac{1}{(1 + u_0^2)^2} \cdot \frac{1}{\eta} = \frac{1}{64} \approx 1^\circ$$

тогда как амплитуда «присущих» снаряду колебаний равна

$$1.57 \cdot e^{-\frac{2}{3}\eta} = 0.11 = 6'.5$$

и, следовательно, превосходит в несколько раз амплитуду I_1.

Полное отклонение может в рассматриваемом случае достичь

$$14^\circ + 6'.5 + 1^\circ = 21'.5$$

так что допущение второе имеет место.

Дальнейшие численные данные и, в частности, зависимость величины η от элементов траектории (начальная скорость, угол возвышения, а также форма и калибр снаряда) можно найти в статье Noether'a, помещенной в «Artilleristische Monatshefte» (Mai — Juni 1919). Этого журнала мне достать в ленинградских библиотеках пока не удалось.

Доказательства формул Noether'a, как представляющие только чисто математический интерес, здесь не приводятся.

§ **46.** Статья Noether'a требует целого ряда пояснений по отношению к применению изложенных в ней способов к чисто артиллерийским вопросам.

Прежде всего приходится остановиться на допущении третьем, являющемся основным, именно, что *движение снаряда представляет чистую прецессию, при которой главный вектор* (ось) *моментов количеств движения совпадает с осью снаряда* (Wir setzen daher die Momentan-bewegung

der Geschossaxe als reine Präzession varaus bei der die Impulsaxe mit der Geschossaxe zusammenfällt).

Это допущение, в такой форме выраженное, места не имеет.

В самом деле, возьмем формулы (2) § 27, именно:

$$p = -\eta' + \nu' \cos\delta$$
$$q = \delta' \cos\eta - \nu' \sin\eta \sin\delta$$
$$r = -\delta' \sin\eta - \nu' \cos\eta \sin\delta$$

делая в них $\delta' = 0$, т. е. что движение состоит из чистой прецессии без нутации, имеем:

$$p = -\eta' + \nu' \cos\delta$$
$$q = -\nu' \sin\eta \sin\delta$$
$$r = -\nu' \cos\eta \sin\delta$$

скорость процессии ν' составляет не более

$$\frac{1}{2}\frac{Ap_0}{B}, \text{ т. е. } \frac{1}{20}p_0$$

угол δ малый, так что $\cos\delta \approx 1$, тогда по абсолютной величине будет приближенно, положив $-\eta' = \omega$:

$$p = 1.05\omega$$

Пусть в рассматриваемый момент

$$\eta = \frac{3\pi}{2}$$

тогда:

$$q = \nu' \sin\delta = \frac{1}{20}\omega \cdot \sin\delta$$

$$r = 0 \sin\delta = \delta$$

тогда

$$q \approx \frac{1}{20}\delta$$

и значит, угол между направлением мгновенной угловой скорости вращения Ω и осью будет

$$\sin\widehat{\Omega p} = \frac{q}{p} = \frac{1}{20}\sin\delta$$

следовательно

$$\widehat{\Omega p} = \frac{1}{20}\delta$$

т. е. мгновенная ось вращения почти совпадает с осью фигуры снаряда, но отсюда отнюдь не следует, чтобы и главные моменты количеств движения совпадали с осью фигуры снаряда.

Так, в нашем случае будет:

$$N_x = Ap = 1.05A\omega$$
$$N_y = Bq = 10 \cdot \frac{1}{20} A\omega \cdot \sin\delta$$
$$N_z = Br = 0$$

и значит,

$$\sin(N, N_x) = \frac{10}{20} \cdot \frac{1}{1.05} \sin\delta = \frac{10}{21} \sin\delta$$

так что угол

$$\widehat{N, N_x} = \widehat{Nx} = \frac{10}{21}\delta$$

но величина

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2} = A\omega\sqrt{(1.05)^2 + 0.25\sin^2\delta}$$
$$= 1.05\,(1 + 0.12\sin^2\delta)\,A\omega$$

даже при

$$\sin\delta = \frac{1}{4} \quad \text{т. е. при } \delta = 15^\circ$$

будет отличаться от $1.05A\omega$ или Ap_0 меньше, чем на 1%.

Таким образом главные моменты количества движения сохраняют *постоянную величину,* но направление его изменяется значительно и уклонения достигают до $\frac{1}{2}\delta$, чем пренебрегать нельзя.

Возьмем общий случай:

$$q = -\nu' \sin\delta \cdot \sin\omega t$$
$$r = -\nu' \sin\delta \cdot \cos\omega t$$

ибо

$$\eta \approx \omega t$$

тогда

$$\sqrt{q^2 + r^2} = \nu'^2 \cdot \sin^2\delta \approx 0.0925\sin^2\delta$$

и мы увидим, что

$$\Omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \approx 1.05\omega \approx p_0$$

и угол

$$\widehat{\Omega x} = \frac{1}{21}\delta$$

как и раньше.

Но слагающие главного момента количеств движения суть:

$$N_x = Ap = Ap_0 = 1.05A\omega$$
$$N_y = Bq = -10\,A\nu' \sin\delta \cdot \sin\omega t$$
$$N_z = Br = -10\,A\nu' \sin\delta \cdot \cos\omega t$$

Значит,

$$B^2(q^2 + r^2) = 100\,A^2\nu'^2 \sin^2\delta \approx 0.25\,A^2\omega^2 \sin^2\delta$$
$$N^2 = A^2p^2 + B^2(q^2 + r^2) = [(1.05)^2 + 0.25 \sin^2\delta]\,A^2\omega^2$$

и следовательно,

$$N \approx 1.05A\omega\,[1 + 0.125 \sin^2\delta]$$
$$\approx 1.05A\omega \approx Ap_0$$

между тем угол

$$\sin(\hat{Nx}) = \frac{B \cdot \sqrt{q^2 + r^2}}{N} = \frac{0.5 \cdot A\omega \cdot \sin\delta}{1.05\,A\omega} \approx \frac{1}{2}\sin\delta$$

т. е.

$$\hat{Nx} \approx \frac{1}{2}\delta$$

как и раньше, причем вектор N описывает около оси фигуры Ox конус растворением, равным этому углу, делая полный оборот в течение $\frac{2\pi}{\omega}$ или, примерно, $\frac{2\pi}{p_0}$, т. е. с угловою скоростью p_0.

В общем случае ось снаряда, кроме прецессии, совершает и нутацию, и угол δ меняется в пределах от

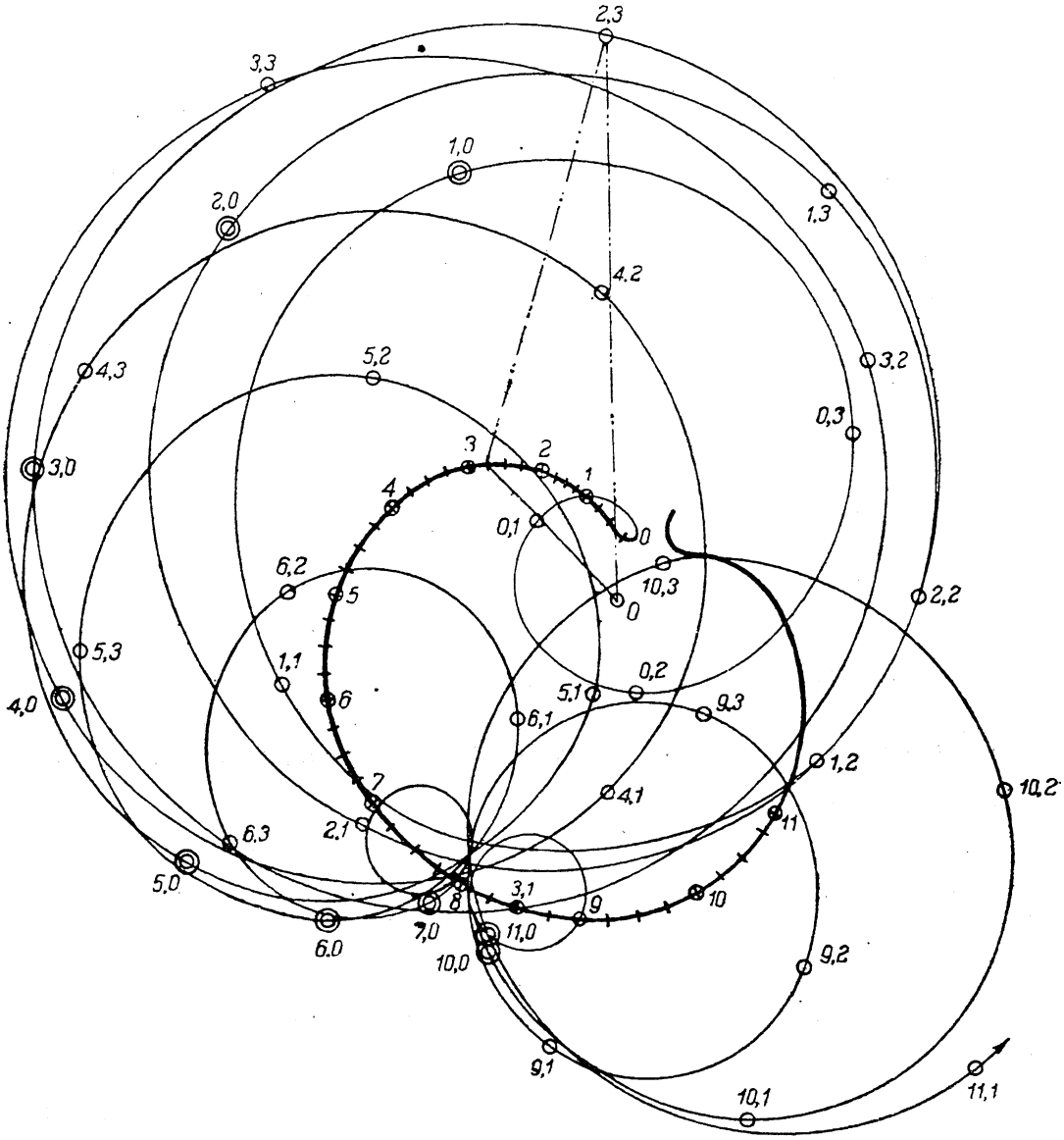
$$\delta_0 \quad \text{до} \quad 3\delta_0$$

или около того, тогда отклонения главного момента количеств движения от оси снаряда становятся еще более значительными и переменными как по величине, так и по направлению.

Чтобы представить это обстоятельство наглядно, составлен чертеж (фиг. 28), на котором показаны: положения конца вектора, изображающего моменты количеств движения, конца оси фигуры снаряда и касательной для движения, определяемого уравнениями:

$$\delta^2 = \delta_0^2 + \alpha^2(1 - \cos nt)$$

$$\nu - \nu_0 = \frac{1}{2}kp_0\,t + \frac{2\nu' - kp_0}{n} \cdot \frac{\delta_0}{\sqrt{\delta_0^2 + 2\alpha^2}} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{\delta_0^2 + 2\alpha^2}}{\delta_0}\operatorname{tg}\frac{nt}{2}\right)$$


2,3
3,3
1,0
2,0
1,3
4,2
4,3
5,2
3,2
0,3
3,0
3
2
1
4
0,1
0
6,2
10,3
0
2,2
5
5,3
1,1
0,2
4,0
6
5,1
9,3
6,1
1,2
10,2
7
4,1
2,1
6,3
11
5,0
3,1
8
9
10
7,0
11,0
6,0
10,0
9,2
9,1
10,1
11,1

Фиг. 28.

причем принято:

$$\nu_0' = \frac{1}{4} k p_0; \quad n = \frac{1}{2} k p_0$$

$$\frac{\delta_0}{\sqrt{\delta_0^2 + 2\alpha^2}} = \frac{1}{4}; \quad \delta_0 = 2^\circ$$

так что

$$\nu - \nu_0 = nt - \frac{1}{4} \operatorname{arctg}\left(4 \operatorname{tg} \frac{nt}{2}\right)$$

На этом чертеже толстою линией 0, 1, 2, 3, . . . представлен след оси снаряда на плоскости, перпендикулярной к касательной, подобно тому как на фиг. 24, причем точки 0, 1, 2, 3, . . . представляют положение этого следа в моменты времени t, при которых

$$nt = 0, \quad \frac{\pi}{8}, \quad 2\frac{\pi}{8}, \quad 3\frac{\pi}{8}$$

и т. д. Тонкая, состоящая из многих завитков линия представляет след на той же плоскости вектора, изображающего главные моменты количества движения, причем точки на каждом из таких завитков, помеченные 0; 1.0; 2.0; 3.0; . . . и т. д., соответствуют вышеуказанным моментам, а значит, и положениям оси снаряда, помеченным через 0, 1, 2, . . .; точки же, помеченные, напр., 1.1; 1.2; 1.3, соответствуют промежуточным моментам между $\frac{\pi}{8}$ и $2\frac{\pi}{8}$, когда ось снаряда занимает положение, отмеченное на описываемой ею линии поперечными черточками.

Из этого чертежа видно, что в то время как ось снаряда переходит, напр., из положения 1 в положение 2, т. е. на небольшой угол, главный момент количества движения описывает полный завиток своей спирали, т. е. движется, примерно, в 20 раз быстрее, иными словами с периодом в *20 раз меньшим*, нежели период изменяемости положения (период конических колебаний) оси снаряда.

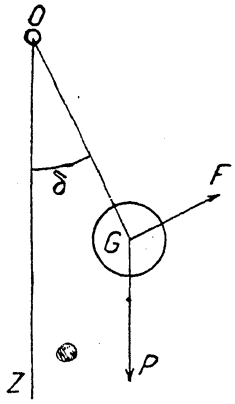
Вот в этом-то обстоятельстве и кроется вся сущность и весь интерес данного Noether'ом решения, хотя он об этом нигде не говорит — напротив, своим допущением третьим вводит читателя в заблуждение.

В самом деле, движение оси снаряда представляет характер вынужденных колебаний, а из общей теории таких колебаний известно, что эффект, производимый периодической возмущающей силой или парой, пропорционален величине

$$\frac{\tau^2}{T^2 - \tau^2}$$

где τ есть период возмущающей силы, а T есть период свободных колебаний системы. При малом отношении $\frac{\tau}{T}$ предыдущая дробь приблизительно равна $\frac{\tau^2}{T^2}$, поэтому, если период возмущающей силы составляет $\frac{1}{20}$ периода свободных колебаний, то эта сила вызовет «возмущение», амплитуда которого составит всего $\frac{1}{400}$ от того отклонения, которое сила произвела бы, действуя *статически*.

Чтобы не прибегать к длинным выкладкам, возьмем пример маятника, колебаниям коего аналогичны колебания оси снаряда,—недаром их немцы называют «Pendelungen» (маятникообразные колебания), и пусть на этот маятник действует периодическая возмущающая сила малого, по сравнению со свободными колебаниями, маятника периода.



Фиг. 29.

Обозначим через I — момент инерции маятника относительно оси подвеса, расстояние центра тяжести маятника до оси $OG = l$, и пусть возмущающая перпендикулярная к OG сила (фиг. 29)

$$F = hP \sin kt$$

где h — численный коэффициент, скажем $\frac{1}{4}$, P — вес маятника.

Очевидно, что если бы приложить постоянную, статически действующую силу

$$F_0 = hP = \frac{1}{4}P$$

то маятник отклонился бы на угол δ_0, такой, что

$$\sin \delta_0 = \frac{F_0}{P} = \frac{1}{4}$$

или кругло

$$\delta_0 = 15^\circ$$

Уравнение движения маятника для малых колебаний в нашем случае будет

$$I \frac{d^2\delta}{dt^2} + Pl \cdot \delta = hlP \sin kt$$

или, полагая $\frac{Pl}{I} = n^2$,

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + n^2 \delta = hn^2 \sin kt \tag{1}$$

Положим, что при $t = 0$

$$\delta = \alpha \quad \text{и} \quad \delta' = 0$$

тогда решение уравнения (1) есть

$$\delta = \alpha \cos nt + \frac{n^2}{n^2 - k^2} h \sin kt$$

Периоды будут:

$$T = \frac{2\pi}{n}; \quad \tau = \frac{2\pi}{k}$$

подставляя, имеем

$$\frac{n^2}{n^2 - k^2} = -\frac{\tau^2}{T^2 - \tau^2} \approx \frac{\tau^2}{T^2}$$

в нашем, напр., случае $T = 20\tau$, и значит, «возмущение» составит всего

$$\frac{1}{400 - 1} h \cdot \sin kt = \frac{1}{399} h \sin kt$$

т. е., вместо 15°, составит меньше $\frac{1^\circ}{25}$.

Отсюда ясно, что если бы мы имели систему и вместо истинного «восстановляющего» момента $Pl\delta$ взяли возмущенный

$$Pl\delta + Plh \sin kt$$

то хотя в каждое отдельное мгновение погрешность в величине момента была бы велика, но в результате эта погрешность бы *не проявилась*.

Обыкновенно при приближенных решениях отбрасывают в самом дифференциальном уравнении члены «малые» по сравнению с удерживаемыми, делая допущение, которое не всегда верно, что и в самом решении тогда будут отброшены тоже «малые» величины.

В нашем случае добавляются или отбрасываются члены, которые в каждый отдельный момент могут быть даже *больше* удержанных, но это можно сделать с уверенностью, что на результате это скажется ничтожною погрешностью.

Все, что сказано о маятнике, целиком относится к снаряду, стоит только вообразить, что наше уравнение написано в форме векториальной; сколь это ни кажется странным, что вместо кривой 1, 2, . . . 16, изображающей величины δ и ν, а значит, и ось опрокидывающей пары (повернутой на 90°), берется обвивающая ее спираль, между тем такая замена вполне дозволительна и на результате не сказывается.

Вот в этой-то замене и состоит вся сущность данного Sommerfeld'ом и Noether'ом решения, хотя эта сущность ими не только не выяснена, но, напротив того, тщательно замаскирована неверными утверждениями и допущениями.

§ **47.** Является другой вопрос: зная главные моменты количества движения, найти положение оси снаряда во всякий момент времени.

Из предыдущего объяснения видно, что во вторых частях тех дифференциальных уравнений, которыми определяется движение главного момента количества движения, к истинному моменту опрокидывающей пары присоединены члены «малого» периода, т. е. периода $\frac{2\pi}{p_0}$, где p_0 есть угловая скорость вращения снаряда около своей оси: эти члены производят «малые» возмущения, которые можно бы отбросить в решении или которые в нем сами собою пропадут, но это было бы равносильно тому, что были бы отброшены эти члены в самих дифференциальных уравнениях, но они происходят только от q и r, в состав которых входят члены

$$\nu' \sin\delta \sin\omega t \quad \text{и} \quad \nu' \sin\delta \cos\omega t$$

а это равносильно тому, что q и r считались бы равными нулю, а тогда вектор N совпадает с осью снаряда, и значит, полученное таким образом решение, дающее, так сказать, среднее невозмущенное положение вектора N, доставляет именно положение оси снаряда.

Если бы мы хотели затем в каждый момент времени найти соответствующее значение N, то по формуле § 27 надо бы вычислить q и r и по ним N.

§ **48.** Во всем исследовании имеет, как мы видели, важное значение та постоянная, которую мы обозначим через η и которая у Noether'а обозначена через λ, а именно:

$$\eta = \frac{Cv_s^3}{N_0 g}$$

где v_s есть скорость снаряда в вершине траектории, $N = Ap_0$, g — ускорение силы тяжести, C — множитель, входящий в выражение момента опрокидывающей пары, который Noether пишет так:

$$K = C\vartheta^2 \sin\delta$$

Сличая это выражение с выражением Майевского

$$K = hR\rho \sin\delta$$

видим, что

$$C = \frac{hR\rho}{v^2}$$

Но, по исследованиям Н. А. Забудского, сопротивление воздуха представляется достаточно удовлетворительно формулами:

для $v > 400$ $\quad \rho = 0.039\pi R^2 v^2 = 0.12 R^2 v^2$

» $v < 240$ $\quad \rho = 0.014\pi R^2 v^2 = 0.04 R^2 v^2$

где попрежнему R — полукалибр в метрах, скорость v — в метрах в секунду, ρ — в килограммах.

Чтобы снаряд следил за касательной, необходимо, чтобы η было значительно больше 1, напр. 10 или более.

Пользуясь формулами Забудского, будем иметь для $v_s > 400$ м:

$$\eta = \frac{hR\rho}{v^2} \cdot \frac{v_s^3}{Ap_0 g} \geqslant 1$$

но

$$A \approx 6000 R^5; \; g \approx 10$$

тогда

$$\eta = \frac{0.12\, h \cdot v_s^3}{6000\, R^2 \cdot g} = 2.10^{-6} \cdot \frac{v_s^3}{R^2} \cdot h$$

и для $v_s < 240$ будет

$$\eta = 6.7 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{v_s^3}{R^2}$$

Эта величина и должна быть значительно больше единицы.

Пусть, напр., $R = 0.1$ м (8-дюймовый снаряд), $p_0 = 1000$ и скорость $v_s = 400$ м, тогда

$$\eta = \frac{2.10^{-6} \cdot 400 \cdot 400 \cdot 400}{0.1 \cdot 0.1 \cdot 1000} h = 12.8h$$

так как h около 10, то

$$\eta \geqslant 1$$

Значит снаряд будет следить за касательной.

Если $v_s = 200$, тогда

$$\eta = 6.7 \cdot 10^{-7} (200)^3 \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{(0.1)^2} \cdot h \approx 0.5h$$

т. е. при такой скорости в вершине снаряд уже будет на пределе и может оказаться чрезмерно устойчивым.

Таким образом, избрав такую крутизну нарезов, которая обеспечивает начальную устойчивость снаряда, следует проверить, не является ли эта крутизна избыточной и будет ли снаряд следить за касательной и на нисходящей ветви траектории.

§ **49.** При современных начальных скоростях и углах возвышения, даже при стрельбе из пушек, приходится принимать во внимание изменение плотности воздуха в зависимости от высоты, на которой в рассматриваемое мгновение снаряд находится.

В этом общем случае уравнения движения центра тяжести снаряда, даже для простейшего квадратичного закона сопротивления воздуха, не интегрируются ни в конечном виде, ни в квадратурах: расчет траектории приходится вести по методам приближенного численного интегрирования, в результате которого получается не аналитическое выражение искомых величин, а таблицы их значений, расположенные по изменяемости какого-либо элемента.

Спрашивается, можно ли обобщить методу Noether'a и на этот случай, видоизменив ее должным образом.

Возьмем уравнения $(4'')$ § 41, но только в них, вместо Cv^2, надо теперь писать величину

$$hR\rho\frac{\Pi}{\Pi_0} = hR\cdot\rho_y$$

где Π есть плотность воздуха на уровне y.

Когда траектория вычисляется, напр., так, как показано в Прибавлении I, то попутно получаются значения сопротивления ρ_y, и следовательно, можно составить таблицу или кривую, показывающую изменяемость этой величины в функции времени t.

Пусть будет

$$hR\rho_y = \sigma(t)$$

тогда уравнения $(4'')$ напишутся:

$$\frac{dS}{dt} = -T\cdot\frac{d\theta}{dt} - \sigma(t)\cdot\frac{Z}{N}$$

$$\frac{dT}{dt} = S\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dZ}{dt} = \sigma(t)\cdot\frac{S}{N}$$

Мы видели, что проекция главного момента количества движения на ось Ox или близкую к ней (предполагая δ малым) сохраняет почти постоянную величину, равную N_0; положив поэтому

$$T = N_0$$

напишем второе и третье из этих уравнений так:

$$\frac{dS}{dt} = N_0 \cdot \frac{d\theta}{dt} - \sigma(t)\frac{Z}{N_0}$$

$$\frac{dZ}{dt} = \sigma(t) \cdot \frac{S}{N_0}$$

Разделив обе части этих уравнений на $\sigma(t)$ и положив

$$\sigma(t) \cdot dt = du$$

будем иметь уравнения:

$$\frac{dS}{du} = -N_0 \frac{d\theta}{du} - \frac{Z}{N_0}$$

$$\frac{dZ}{du} = \frac{S}{N_0}$$

Отсюда следует

$$\frac{dS}{du} = N_0 \frac{d^2Z}{du^2}$$

Подставляя, имеем

$$\frac{d^2Z}{du^2} + \frac{1}{N_0^2} Z = -\frac{d\theta}{du} = \frac{d\varphi}{du}$$

Общий интеграл этого уравнения, в котором

$$\frac{d\varphi}{du} = \varphi'(u)$$

заданная функция от u, есть

$$\frac{Z}{N_0} = C_1 \cos\frac{u}{N_0} + C_2 \sin\frac{u}{N_0} + \int_0^u \varphi'(\xi) \sin\frac{u-\xi}{N_0} \cdot d\zeta$$

После того как Z найдено, получится и S по формуле

$$\frac{S}{N_0} = \frac{dZ}{du} = -C_1 \sin\frac{u}{N_0} + C_2 \cos\frac{u}{N_0} + \int_0^u \varphi'(\xi) \cos\frac{u-\xi}{N_0}\, d\xi$$

Мы определили переменную u уравнением

$$u = hR \int_0^t \rho\, dt$$

в § 39 мы имели переменную

$$s = \frac{hR}{Ap_0}\int_0^t \rho\, dt$$

а так как

$$Ap_0 = N_0$$

то, очевидно,

$$u = s \cdot N_0$$

Соответственно этому, полагая

$$\xi = N_0 z$$

получим:

$$\int_0^u \varphi'(\xi) \sin\frac{u-\xi}{N_0}\, d\xi = \int_0^s \varphi'(z) \sin(s-z)\, dz$$

$$\int_0^u \varphi'(\xi) \cos\frac{u-\xi}{N_0} \cdot d\xi = \int_0^s \varphi'(z) \cos(s-z)\, dz$$

на основании формулы (12) и (13) (§ 40) будет:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{Z}{N_0} &= C_1 \cos s + C_2 \sin s + \varphi'(s)(1-\cos s) \\ \frac{S}{N_0} &= -C_1 \sin s + C_2 \cos s + \varphi'(s) \sin s \end{aligned}$$

Сличая эти формулы с формулами (8) § 40, видим, что

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{Z}{N_0} &= \Delta_2 = \delta \sin \nu \\ \frac{S}{N_0} &= \Delta_1 = \delta \cos \nu \end{aligned}$$

Составив чертеж (фиг. 30), видим, что при предположении малости угла δ, так что

$$\sin\delta = \delta = \operatorname{tg}\delta$$

равенства (2) становятся очевидными.

§ **50.** При выводе формулы (1) предположено, что

$$T = N_0$$

Если этого предположения не делать, то мы имели бы уравнения:

$$\frac{dS}{du} = T\frac{d\varphi}{du} - \frac{Z}{N_0}$$

$$\frac{dZ}{du} = \frac{S}{N_0}$$

из которых следует

$$\frac{d^2Z}{du^2} + \frac{Z}{N_0^2} = T\frac{d\varphi}{du}$$

и значит, будет:

$$\frac{Z}{N_0} = C_1\cos\frac{u}{N_0} + C_1\sin\frac{u}{N_0} + \int_0^u \frac{T}{N_0}\varphi'(\xi)\sin\frac{u-\xi}{N_0}\,d\xi$$

$$\frac{S}{N_0} = -C_1\sin\frac{u}{N_0} + C_2\cos\frac{u}{N_0} + \int_0^u \frac{T}{N_0}\varphi'(\xi)\cos\frac{u-\xi}{N_0}\,d\xi$$

Но

$$T = N_0\left[1 - \frac{S^2+Z^2}{N_0^2}\right]^{\frac{1}{2}} = N_0\left[1 - \frac{1}{2}\frac{S^2+Z^2}{N_0^2}\right]$$

Рассматривая формулу (1) как первое приближение, мы имеем

$$\frac{1}{2}\frac{S^2+Z^2}{N_0^2} = \frac{1}{2}\left[\delta_0^2 + 2\delta_0\varphi'(s)\cos s + 2\varphi'^2(s)(1-\cos s)\right]$$

Для нашего численного примера:

$$\delta_0 < \frac{1}{6}; \qquad \varphi'(s) \leqq \frac{1}{20}$$

тогда окажется

$$\frac{1}{2}\frac{S^2+Z^2}{N_0^2} < 0.03$$

и следовательно, абсолютной величине

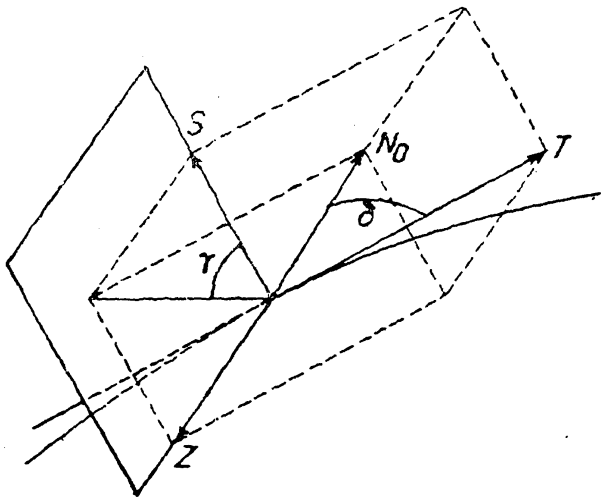
$$\left|\frac{T}{N_0} - 1\right| < 0.03$$

т. е. сделанное приближение внесло погрешность в вычисление влияния понижения касательной менее 3% от этой величины, т. е. менее $^1/_{10}$ в величине δ, таким образом нет надобности развивать второе приближение.

Недостаток этого решения тот же, как и решения де Спарра: угол нутации при $\varphi(s) = 0$, т. е. на прямолинейной части траектории, *считается*

постоянным. Это вошло неявно вследствие самого метода анализа и вследствие предположения $N = N_0$, между тем мы видели, что угол нутации на прямолинейной части траектории колеблется в весьма широких пределах, если этот угол считать *от касательной* к траектории, поэтому необходимо освободиться от этого ограничения.

Мы этого достигнем в следующих параграфах, где дается полное решение вопроса о вращательном движении снаряда для настильной траек-



Фиг. 30.

тории,[1] точнее говоря для всякой траектории, для которой приложима формула Майевского

$$K = hR\rho \sin\delta = hR\rho\delta$$

§ 51. Мы рассматривали движение снаряда, пользуясь для определения положения его оси углами δ и ν, т. е. углом нутации и углом прецессии.

Даже в том случае, когда снаряд мало уклоняется от касательной к траектории, один только угол δ остается малым, угол же ν изменяется в круговую, между тем всегда выгодно иметь в уравнениях такие переменные, которые или оставались бы малыми, или изменялись в тесных пределах.

Так, в нашем случае будем определять положение снаряда следующим образом: пусть OA есть отвесная линия и плоскость $DA\xi\zeta$ параллельна плоскости стрельбы, $o\xi$ — направление касательной к траектории,

[1] Это решение было мною доложено 9-го мая 1928 г. в заседании Отделения физико-математических наук Академии Наук и помещено в томе III «Известий Физико-математического института имени В. А. Стеклова» (1930).

которое мы зададим углом φ, составляемым касательною с отвесною линией. Положение оси снаряда определим углами (фиг. 31)

$$\xi ON = \beta \quad \text{и} \quad NOx = \alpha$$

причем ON есть проекция оси ox на плоскость $OA\xi$, т. е. плоскость стрельбы, ось oy возьмем в плоскости NOx перпендикулярно к ox, ось oz возьмем перпендикулярно к плоскости xoy. Оси oy и oz, хотя и будут в снаряде осями подвижными, но будут всегда главными осями инерции.

Заметив, что угол

$$\xi Nx = \frac{\pi}{2}$$

при всяких значениях α и β, получаем следующую таблицу косинусов углов между осями:

	x	y	z
ξ	$\cos\alpha\cos\beta$	$-\sin\alpha\cos\beta$	$\sin\beta$
η	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	0
ζ	$-\cos\alpha\sin\beta$	$\sin\alpha\sin\beta$	$\cos\beta$

Обозначая через α', β', φ' — производные по времени углов α, β, φ, получаем следующие выражения проекций угловой скорости:

на ось ox: $\quad p = \omega' + (\beta' + \varphi')\sin\alpha$

» » oy: $\quad q = (\beta' + \varphi')\cos\alpha$

» » oz: $\quad r = \alpha'$

Причем ω' есть угловая скорость вращения снаряда около оси ox, сообщенная ему нарезами.

Для составления уравнений движения воспользуемся их второй Лагранжевой формой.

Живая сила вращательного движения снаряда будет

$$2T = A[\omega' + (\beta' + \varphi')\sin\alpha]^2 + B(\beta' + \varphi')^2\cos^2\alpha + B\alpha'^2 =$$
$$= A\omega'^2 + 2A\omega'(\beta' + \varphi')\sin\alpha + A(\beta' + \varphi')^2 +$$
$$+ (B - A)(\beta' + \varphi')^2\cos^2\alpha + B\alpha'^2$$

Опрокидывающая пара, принимая гипотезу Майевского, изображается вектором OK, перпендикулярным к осям ox и $o\xi$, т. е. к плоскости $xo\xi$ и равным

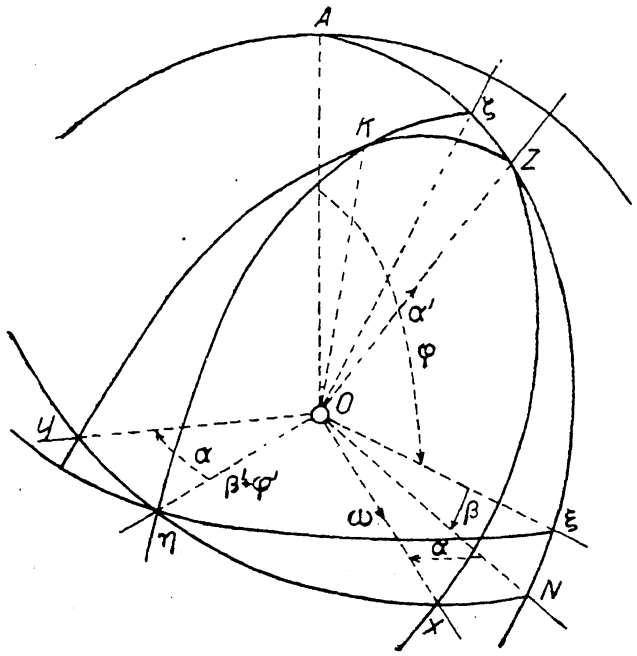
$$K = hR\rho \sin\delta$$

где

$$\delta = \xi ox$$

так что

(*) $$\cos\delta = \cos\alpha \cos\beta$$



Фиг. 31.

Элементарная работа этой пары есть

$$K \cdot d\delta = hR\rho \sin\delta \cdot d\delta$$

но из формулы (*) следует

$$\sin\delta \cdot d\delta = \cos\beta \sin\alpha \cdot d\alpha + \cos\alpha \sin\beta \cdot d\beta$$

следовательно в выражении элементарной работы

$$dU = Q_1 d\alpha + Q_2 d\beta$$

будет:

(**) $$Q_1 = hR\rho \sin\alpha \cdot \cos\beta; \quad Q_2 = hR\rho \sin\beta \cdot \cos\alpha$$

Таким образом имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial \omega'} = A[\omega' + (\beta' + \varphi')\sin\alpha]$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega} = 0; \quad Q = 0$$

и первое уравнение будет

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega'}\right) = \frac{d}{dt}\{A[\omega' + (\beta' + \varphi')\sin\alpha]\} = 0$$

откуда следует

$$\omega' + (\beta' + \varphi')\sin\alpha = p_0 = \text{const} \tag{1}$$

Второе уравнение получим по схеме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q_1$$

но

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha'} = B\alpha'; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha'}\right) = B\alpha''$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = A[\omega' + (\beta' + \varphi')\sin\alpha](\beta' + \varphi')\cos\alpha - B(\beta' + \varphi')^2 \sin\alpha\cos\alpha$$

и мы получим, воспользовавшись (1):

$$B\alpha'' - Ap_0(\beta' + \varphi')\cos\alpha + B(\beta' + \varphi')^2 \sin\alpha\cos\alpha = hR\rho\sin\alpha\cos\beta \tag{2}$$

Совершенно так же по схеме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \beta'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \beta} = Q_2$$

имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial \beta'} = A[\omega' + (\beta' + \varphi')\sin\alpha]\sin\alpha + (\beta' + \varphi')B\cos^2\alpha =$$

$$= Ap_0\sin\alpha + B(\beta' + \varphi') - B(\beta' + \varphi')\sin^2\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \beta'}\right) = B(\beta'' + \varphi'') - B(\beta'' + \varphi'')\sin^2\alpha +$$

$$+ Ap_0\cos\alpha\cdot\alpha' - 2B(\beta' + \varphi')\alpha'\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\frac{\partial T}{\partial \beta} = 0$$

Значит, будет

$$B(\beta'' + \varphi'') - B(\beta'' + \varphi'')\sin^2\alpha +$$

$$+ Ap_0\cos\alpha\cdot\alpha' - 2B(\beta' + \varphi')\alpha'\sin\alpha\cos\alpha = hR\rho\cos\alpha\cdot\sin\beta \tag{3}$$

В первом приближении и для прямолинейного участка траектории:

$$\varphi' = 0; \quad \rho = \rho_0 = \text{const}$$

вместе с тем α, β, α', β' можно считать величинами малыми и ограничиваться членами первого порядка, тогда получим:

$$\begin{aligned} B\alpha'' - Ap_0\beta' - hR\rho_0\alpha &= 0 \\ B\beta'' + Ap_0\alpha' - hR\rho_0\beta &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

или иначе:

$$\begin{aligned} \alpha'' - l\alpha - m\beta' &= 0 \\ m\alpha' + \beta'' - l\beta &= 0 \end{aligned} \tag{4'}$$

причем

$$l = \frac{hR\rho_0}{B} = \frac{H}{B}; \quad m = \frac{Ap_0}{B}.$$

Ищем для этих уравнений частное решение вида:

$$\alpha = C\cos(\lambda t + \varepsilon); \quad \beta = C\sin(\lambda t + \varepsilon)$$

где C и ε — произвольные постоянные.

Подставляя, видим, что эти величины удовлетворяют системе (4'), если λ удовлетворяет уравнению

$$\lambda^2 + m\lambda + l = 0 \tag{5}$$

откуда

$$\lambda = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - l}$$

или, подставляя вместо m и l их значения:

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_1 &= -\frac{Ap_0 + \sqrt{A^2p_0^2 - 4HB}}{2B} \\ \lambda = \lambda_2 &= -\frac{Ap_0 - \sqrt{A^2p_0^2 - 4HB}}{2B} \end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом получаем:

1°) условие устойчивости, которое мы имели и раньше,

$$A^2p_0^2 - 4HB > 0 \tag{7}$$

иначе

$$A^2p_0^2 > 4hR\rho B \tag{7}$$

2°) и, если это условие выполнено, то

$$\begin{aligned} \alpha &= C_1\cos(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + C_2\cos(\lambda_2 t + \varepsilon_2) \\ \beta &= C_1\sin(\lambda_1 t + \varepsilon_1) + C_2\sin(\lambda_2 t + \varepsilon_2) \end{aligned} \tag{8}$$

где C_1, C_2, ε_1 и ε_2 — постоянные произвольные, которые определяются по начальным условиям.

Заметим, что при сделанном приближении формула

$$\cos\delta = \cos\alpha\cos\beta$$

равносильна формуле

$$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

так что будет

$$\delta^2 = C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2\cos[(\lambda_1 - \lambda_2)t + \varepsilon_1 - \varepsilon_2]$$

но, при сделанном нами в § 28, формула (13′), обозначении,

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\sqrt{A^2p_0^2 - 4HB}}{B} = n$$

поэтому, положив

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \gamma$$

получим

$$\delta^2 = C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2\cos(nt + \gamma)$$

Из этой формулы очевидно, что наибольшая величина δ есть

$$\delta_{max} = C_1 + C_2$$

и наименьшая

$$\delta_{min} = C_1 - C_2$$

причем δ совершает между этими величинами простые гармонические колебания с периодом

$$\tau = \frac{2\pi}{n}$$

т. е. мы вновь получили тот результат, который имели в § 28.

Эти формулы имеют, однако, то значение, что пользуясь ими легко анализировать результаты опытов над вращательным движением снаряда, стреляя по картонным мишеням, как то будет описано в главе III.

В самом деле, по виду пробоин получатся величины δ_{max} и δ_{min}, и по положению мишеней и скорости снаряда получается время, протекшее от max до min; по этим данным сейчас же найдем C_1 и C_2, а также n, ибо промежуток от max до min равен полупериоду $\frac{\tau}{2}$, т. е. $\frac{\tau}{n}$.

Так как Ap_0 и B известны, то из уравнения

$$n^2 = \frac{A^2p_0^2 - 4hR\rho_0B}{B^2}$$

найдется $hR\rho_0$, и если по потере скорости определять и ρ_0, то найдется h.

Зная n и $\frac{Ap_0}{B}$, найдем в отдельности λ_1 и λ_2, тогда в формулах (8) C_1, C_2, λ_1 и λ_2 будут известны, и по паре наблюденных значений α и β найдутся ε_1 и ε_2; когда для данного выстрела имеется целый ряд значений α и β, то, сличая вычисленные величины с наблюденными, получим суждение о том, в какой мере сделанные предположения, т. е. формула

$$K = hR\rho_0 \sin\delta$$

соответствует действительности.

Таким образом введение углов α и β вместо δ и ν, доставляя простоту и симметрию формул для прямолинейной части траектории, дает вместе с тем и условие устойчивости снаряда; для движения по криволинейной траектории, как мы увидим далее, преимущество этой методы еще более существенно.

§ **52.** Перейдем теперь к рассмотрению движения снаряда на криволинейной части траектории.

При тех же допущениях относительно малости величин

$$\alpha,\ \beta,\ \alpha',\ \beta',\ \varphi'$$

ограничиваясь членами первого порядка, будем иметь:

$$\begin{aligned} &B\beta'' - hR\rho\cdot\beta + Ap_0\alpha' = -B\varphi'' \\ &-Ap_0\beta' + B\alpha'' - hR\rho\alpha = Ap_0\varphi' \end{aligned} \tag{1}$$

Разделим эти уравнения на $hR\rho_0$ и введем вместо переменной t переменную s, определяемую уравнением

$$t\cdot\sqrt{\frac{hR\rho_0}{B}} = s \tag{2}$$

Эта переменная s будет отвлеченным числом, не зависимым от выбора единиц, положив

$$2k = \frac{Ap_0}{\sqrt{hR\rho_0 B}}$$

так что

$$\frac{1}{2k}\cdot\frac{Ap_0}{B}\cdot t = s \tag{2'}$$

мы видим, что наши уравнения будут:

$$\begin{aligned} &\beta'' - \frac{\rho}{\rho_0}\beta + 2k\alpha' = -\varphi'' \\ &-2k\beta' + \alpha'' - \frac{\rho}{\rho_0}\alpha = 2k\varphi' \end{aligned} \tag{1'}$$

причем значками обозначены производные, взятые по переменной s.

Заметим здесь же, что $k \approx \frac{\sqrt{5}}{2} = 1.1$ и $\frac{\rho}{\rho_0}$ изменяется в приведенном ниже примере от 1 до 0.05.

Положим

(3) $$z = \alpha + i\beta$$

тогда наша система заменится одним уравнением

(4) $$z'' + 2ikz' - \frac{\rho}{\rho_0} z = 2k\varphi' = i\varphi''$$

Сделаем

(5) $$z = e^{-iks} \cdot u$$

тогда будет:

$$z'' = (u'' - 2iku' - k^2 u)\, e^{-iks}$$
$$z' = (u' - iku)\, e^{-iks}$$

и, по подстановке, предыдущее уравнение будет

(6) $$u'' + \left(k^2 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) u = e^{-iks} [2k\varphi' - i\varphi''|$$

Заметив, что

$$e^{iks} = \cos ks + i \sin ks$$

и положив

(7) $$u = v_1 + iw_1$$

(8)
$$2k\varphi' \cos ks + \varphi'' \sin ks = f(s)$$
$$2k\varphi' \sin ks - \varphi'' \cos ks = g(s)$$

мы получим для определения функций v_1 и w_1 уравнения:

(9)
$$v_1'' + \left(k^2 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) v_1 = f(s)$$
$$w_1'' + \left(k^2 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) w_1 = g(s)$$

Как видно, оба уравнения линейные, но величина $k^2 - \frac{\rho}{\rho_0}$, хотя и остается все время положительной, но не есть постоянная, а некоторая функция от s, заданная таблично или графически на основании результатов вычисления траектории снаряда.

Так как оба уравнения совершенно одинакового вида, то достаточно рассмотреть одно из них, напр.:

(9′) $$v_1'' + \mu^2 v_1 = f(s)$$

причем понятно, что

$$\mu^2 = k^2 - \frac{\rho}{\rho_0} \tag{10}$$

Соответствующее уравнению (9′) уравнение без последнего члена есть

$$v'' + \mu^2 v = 0 \tag{10′}$$

Положим, что для него найден общий интеграл, который будет вида

$$v = C_1 q_1 + C_2 q_2 \tag{11}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные и q_1 и q_2 — частные решения уравнения (10).

Общий интеграл уравнения (9′) с последним членом, после того как известен общий интеграл (11) уравнения (10), находится по так называемому способу изменения произвольных постоянных.

Этот способ уже был нами объяснен в § 26 для линейных уравнений с постоянными коэффициентами, но он прилагается и для линейных уравнений с коэффициентами переменными, таким образом для уравнения (9′) ищется решение вида

$$v_1 = C_1 q_1 + C_2 q_2 \tag{12}$$

в котором C_1 и C_2 уже не постоянные, а функции переменной s. Так как этих неизвестных функций *две*, а уравнение, которому v должно удовлетворять, *одно*, то функции C_1 и C_2 можно подчинить еще какому угодно одному условию. Лагранж это условие выбрал так, чтобы первая производная от v при переменных C_1 и C_2 выражалась бы так же, как и при C_1 и C_2 постоянных, но эта производная есть

$$v_1' = C_1 q_1' + C_2 q_2' + C_1' q_1 + C_2' q_2 \tag{13}$$

следовательно добавочное условие, поставленное Лагранжем, есть

$$C_1' q_1 + C_2' q_2 = 0 \tag{14}$$

тогда будет

$$v_1' = C_1 q_1' + C_2 q_2'$$

Значит,

$$v_1'' = C_1 q_1'' + C_2 q_2'' + C_1' q_1' + C_2' q_2'$$

Подставляя в предложенное уравнение (9′), которому v должно удовлетворять, получаем

$$C_1 (q_1'' + \mu^2 q_1) + C_2 (q_2'' + \mu^2 q_2) + C_1' q_1' + C_2' q_2' = f(s)$$

Но q_1 и q_2 суть частные решения уравнения (10), следовательно

$$q_1'' + \mu^2 q_1 = 0$$
$$q_2'' + \mu^2 q_2 = 0 \tag{10'}$$

и у нас остается

$$C_1' q_1' + C_2' q_2' = f(s) \tag{15}$$

Присоединяя это уравнение к уравнению (14) и решая относительно C_1' и C_2', рассматриваемых как неизвестные, получим:

$$C_1' = \frac{q_2}{q_1 q_2' - q_1' q_2} f(s)$$
$$C_2' = -\frac{q_1}{q_1 q_2' - q_1' q_2} f(s) \tag{16}$$

Нетрудно показать, что величина

$$D = q_1 q_2' - q_1' q_2$$

есть постоянная, значение которой мы определим ниже.

В самом деле, из уравнения (10) следует

$$q_2'' q_1 - q_1'' q_2 = 0$$

но

$$q_2'' q_1 - q_1'' q_2 = [q_2' q_1 - q_1' q_2]'$$

следовательно

$$(q_2' q_1 - q_1' q_2)' = 0$$

значит

$$D = q_1 q_2' - q_1' q_2 = \text{const}$$

Из уравнений (15) имеем:

$$C_1 = A_1 + \frac{1}{D}\int_0^s q_2(\xi) f(\xi)\, d\xi$$
$$C_2 = B_1 + \frac{1}{D}\int_0^s q_1(\xi) f(\xi)\, d\xi \tag{17}$$

причем A_1 и B_1 — произвольные постоянные.

Таким образом будет

$$y_1 = A_1 q_1 + B_1 q_2 + \frac{1}{D} q_1 \int_0^s q_2(\xi) f(\xi)\, d\xi - \frac{1}{D} q_2 \int_0^s q_1(\xi) f(\xi)\, d\xi \tag{18}$$

Совершенно так же будем иметь

$$(18)\quad w_1 = A_2 q_1 + B_2 q_2 + \frac{1}{D} q_2 \int_0^s q_2(\xi) g(\xi)\, d\xi - \frac{1}{D} q_2 \int_0^s q_1(\xi) g(\xi)\, d\xi$$

т. е. вопрос приведем к квадратурам.

После того как v_1 и w_1 будут найдены, α и β найдутся на основании уравнения

$$\alpha + \beta i = z = u \cdot e^{-iks} = (v_1 + w_1 i)\, e^{-iks}$$

Заметив, что

$$e^{-iks} = \cos ks - \sin ks$$

будем иметь:

$$\alpha = v_1 \cos ks + w_1 \sin ks$$
$$\beta = -v_1 \sin ks + w_1 \cos ks$$

Входящие же в состав v_1 и w_1 постоянные произвольные определяются по начальным условиям.

§ **53.** Линейным дифференциальным уравнениям вообще и в частности уравнениям вида

$$(1)\quad v'' + [k^2 - p(s)]\, v = 0$$

посвящено множество исследований знаменитейших математиков.

В этих исследованиях, весьма общих, обыкновенно предполагается, что функция $p(s)$ задана аналитически и что переменная независимая s изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ или даже что эта переменная комплексная и изменяется или неограниченно, или по данному контуру на комплексной плоскости.

Наша задача совершенно иного рода: функция

$$\frac{\rho}{\rho_0} = p(s)$$

задана таблично или графически, область изменения величины s ограничена кратким временем полета снаряда, но зато нам надо получить простой и достаточно точный способ вычисления значений функции v в данном промежутке изменяемости s.

Для такого решения уравнения

$$(1)\quad v'' + \left(k^2 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) v = 0$$

прежде всего, на основании вычисления плоской траектории снаряда, построим кривую

$$\mu^2(s) = k^2 - \frac{2}{\rho_0} \tag{2}$$

Подразделим заданный промежуток изменяемости s на несколько равных или неравных частей и отметим на кривой (2) точки, соответствующие абсциссам:

$$0,\ s_1,\ s_2,\ \ldots\ s_n$$

точек деления, и впишем в эту кривую ломаную, ординаты которой при достаточном числе точек деления будут мало разниться от соответствующих ординат кривой.

Очевидно, что в каждом участке, вместо функции $\mu^2(s)$, можно брать соответствующую сторону ломаной, иными словами заменить функцию $\mu^2(s)$ прямою $a + bs$, причем для рассматриваемого участка a и b — *постоянные*, но при переходе к следующему участку эти постоянные получают новые значения.

Таким образом для каждого участка уравнение (1) будет вида

$$y'' + (a + bs)\, y = 0 \tag{1'}$$

Это уравнение принадлежит к типу уравнений, решение которых выражается через так называемые *функции Бесселя*.

Мы не будем входить в рассмотрение свойств этих функций, а тем более в доказательства этих свойств, ограничимся только замечанием, что для этих функций составлены подробные таблицы, пользование которыми столь же просто, как всякою одновходною таблицею, вместе с тем для больших значений аргумента, которые только нам и понадобятся, функции Бесселя выражаются через функции тригонометрические.

В числе уравнений, решение которых выражается через функции Бесселя, есть уравнение

$$y'' + cxy = 0 \tag{3}$$

общий интеграл коего есть

$$y = C_1 \sqrt{x}\, J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2\sqrt{c}}{3} x^{\frac{3}{2}}\right) + C_2 \sqrt{x} J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2\sqrt{c}}{3} x^{\frac{3}{2}}\right) \tag{4}$$

для функций

$$J_{\frac{1}{3}}(\alpha) \quad \text{и} \quad J_{-\frac{1}{3}}(\alpha)$$

имеются готовые таблицы, которые были составлены профессором Екатеринославского горного института А. Н. Диннчком.

Положив в уравнении (3)

$$x = \alpha + bs \tag{5}$$

мы получим уравнение

$$\frac{d^2y}{ds^2} + b^2 c\,(a + bs)\,y = 0$$

очевидно, что стоит только взять

$$c = \frac{1}{b^2} \tag{6}$$

и это уравнение примет вид

$$\frac{d^2y}{ds^2} + (a + bs)\,y = 0$$

т. е. наше уравнение (1′).

На основании формул (4), (5), (6), решение этого уравнения будет:

$$v = C_1 \sqrt{a + bs}\, J_{\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3b}(a + bs)^{\frac{3}{2}}\right] + C_2 \sqrt{a + bs}\cdot J_{-\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3b}(a + bs)^{\frac{3}{2}}\right] \tag{7}$$

причем для всякого промежутка b есть величина постоянная, C_1 и C_2 — постоянные произвольные, но при переходе от одного промежутка к следующему эти постоянные принимают *новые* значения.

Так как в рассматриваемом промежутке

$$a + bs = \mu^2(s) = k^2 - \frac{\rho}{\rho_0}$$

то для каждого промежутка можно писать эту формулу так:

$$v = C_1 \mu(s) J_{\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3b}\cdot \mu^3(s)\right] + C_2 \mu(s) J_{-\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3b}\mu^3(s)\right] \tag{7'}$$

Положим, что при $s = 0$ нам даны начальные значения v_0 и v_0' самой функции v и ее производной.

Нетрудно проверить, что частное решение

$$V = \frac{1}{D}\left[q_1 \int_0^s q_2(\xi) f(\xi)\, d\xi + q_2 \int_0^s q_1(\xi) f(\xi)\, d\xi\right]$$

которое надо прибавить к вышенаписанному, чтобы получить интеграл уравнения с последним членом, таково, что как оно само, так и его производная при $s = 0$ обращаются в нуль, поэтому для определения постоянных произвольных для *первого* участка послужат уравнения:

$$v_0 = C_1 \mu(0) \cdot J_{\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3b}\mu^3(0)\right] + C_2 \mu(0) J_{-\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3b}\mu^3(0)\right]$$

$$v_0' = C_1\left[\mu(0) J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}b\mu_3(0)\right)\right]' + C_2\left[\mu(0) J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}b\mu^3(0)\right)\right]'$$

Эти значения постоянных произвольных сохраняются для промежутка от $s = 0$ до $s = s_1$.

Во втором промежутке будет

$$\mu^2(s) = a_1 + b_1 s$$

т. е. величины a и b изменятся, и надо будет определить и новые значения постоянных произвольных по условию, что значения v_1 и v_1' для конца первого промежутка являются начальными для второго. Таким образом надо переходить от промежутка к промежутку, причем самые подробности вычисления затруднений не представляют.

§ **54.** Само собою понятно, что нет надобности заменять кривую $\mu^2(s)$ ломаной, можно заменять части ее близко подходящей кривой, выбирая уравнение этой кривой так, чтобы уравнение

$$v'' + \mu^2(s) v = 0$$

легко интегрировалось и давало бы простые формулы для численных вычислений.

В этом смысле удобно брать в отдельных промежутках

$$\mu^2(s) = \frac{1}{(a - bs)^2}$$

при этом вычисления оказываются проще, нежели при замене $\mu^2(s)$ прямыми линиями в отдельных промежутках.

Прежде чем перейти к численному примеру, разовьем те формулы, которые нам понадобятся.

Очевидно, что когда

$$\mu^2(s) = \frac{1}{(a - bs)^3}$$

то

$$\frac{1}{\mu(s)} = a - bs$$

поэтому, вычертив кривую $\frac{1}{\mu(s)}$ как функцию s, мы тотчас же можем выбрать участки и получить требуемое представление нашей функции. Так в примере, приводимом ниже, будет:

№ промежутка	Значение s		a	b	$\frac{1}{\mu} = a - bs$
	от	до			
1	0	10.00	2.540	0.04150	2.540—0.04150.s
2	10.00	28.15	2.325	0.02035	2.325—0.02035.s
3	28.15	47.30	2.034	0.01002	2.034—0.01002.s
4	47.30	73.00	1.860	0.00631	1.860—0.00631.s
5	73.00	105.0	1.675	0.00374	1.675—0.00374.s
6	105.0	162.5	1.501	0.00207	1.501—0.00207.s
7	162.5	213.5	1.362	0.00122	1.362—0.00122.s
8	213.5	388.5	1.213	0.000520	1.213—0.000520.s
9	388.5	980.0	1.047	0.0000930	1.047—0.0000930.s
10	980.0	1495.0	0.868	—0.0000874	0.868—0.0000874.s

На каждом из этих участков уравнение (9′) принимает вид

$$v_1'' + \frac{1}{(a - bs)^2} v_1 = f(s) \tag{1}$$

или

$$(a - bs)^2 v_1'' + v_1 = (a - bs)^2 f(s) \tag{1'}$$

Положим

$$a - bs = e^x$$

тогда будет:

$$ds = -\frac{1}{b} e^x dx$$

$$\frac{dv_1}{ds} = -be^{-x} \cdot \frac{dv_1}{dx} = -be^{-x} \cdot v_1'$$

$$\frac{d^2 v_1}{ds^2} = -be^{-x} \frac{d}{dx}(-be^{-x} \cdot v_1') = b^2 e^{-2x}(v_1'' - v_1')$$

и наше уравнение обратится в такое:

$$v_1'' - v_1' + \frac{1}{b^2} v_1 = \frac{1}{b^2} e^{2x} \cdot F(x) \tag{2}$$

где через $F(x)$ обозначена та функция, в которую обратится $f(s)$, когда s будет заменено его величиною $\frac{e^x - a}{b}$, иными словами, это есть та же функция $f(s)$, но выраженная через переменную независимую x.

Положив в уравнении (2)

$$v_1 = e^{\frac{1}{2}x} u$$

имеем:

$$v_1' = e^{\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{2}u + u'\right)$$

$$v_1'' = e^{\frac{1}{2}x}\left(u'' + u' + \frac{1}{4}u\right)$$

и уравнение (2) примет вид

$$v'' + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{4}\right)u = \frac{1}{b^2}\, e^{\frac{3}{2}x} F(x) \tag{3}$$

Наименьшее значение $\frac{1}{b^2}$ в нашем примере есть 580, поэтому с тою степенью точности, с которою расчеты наши производятся, можно вместо $\frac{1}{}-\frac{1}{4}$ брать $\frac{1}{b^2}$ и вместо уравнения (3) рассматривать уравнение

$$u' + \frac{1}{b^2}u = \frac{1}{b^2} e^{\frac{3}{2}x} F(x) \tag{4}$$

Общий интеграл этого уравнения есть (см. § 26)

$$u = C_1 \cos\frac{x}{b} + C_2 \sin\frac{x}{b} - \frac{1}{b}\int_0^x e^{\frac{3}{2}\xi} F(\xi) \sin\frac{\xi - x}{b} \cdot d\xi \tag{5}$$

следовательно будет

$$v_1 = e^{\frac{1}{2}x}\left[C_1 \cos\frac{x}{b} + C_2 \sin\frac{x}{b}\right] - \frac{1}{b} e^{\frac{1}{2}x} \int_0^x e^{\frac{3}{2}\xi} F(\xi) \sin\left(\frac{\xi - x}{b}\right) d\xi \tag{6}$$

Положив

$$K_1 = \frac{1}{b}\int_0^x e^{\frac{3}{2}\xi} F(\xi) \cos\frac{\xi}{b}\, d\xi$$

$$K_2 = \frac{1}{b}\int_0^x e^{\frac{3}{2}\xi} F(\xi) \sin\frac{\xi}{b}\, d\xi \tag{7}$$

напишем предыдущую формулу так:

$$v_1 = e^{\frac{1}{2}x}\left[C_1 \cos\frac{x}{b} + C_2 \sin\frac{x}{b}\right] + e^{\frac{1}{2}x}\left(K_1 \sin\frac{x}{b} - K_2 \cos\frac{x}{b}\right) \tag{8}$$

Совершенно так же, положив

$$L_1 = \frac{1}{b}\int_0^x e^{\frac{3}{2}\xi} G(\xi)\cos\frac{\xi}{b}\cdot d\xi$$

(7′)

$$L_2 = \frac{1}{b}\int_0^x e^{\frac{3}{2}\xi} G(\xi)\sin\frac{\xi}{b}\cdot d\xi$$

будем иметь

$$w_1 = e^{\frac{3}{2}x}\left[C_3\cos\frac{x}{b} + C_4\sin\frac{x}{b}\right] +$$

(8′)

$$+\left(L_1\sin\frac{x}{b} - L_2\cos\frac{x}{b}\right)e^{\frac{1}{2}x}$$

Постоянные произвольные C_1, C_2, C_3, C_4 определяются по начальным условиям для каждого участка в отдельности, подобно тому как это было пояснено выше; таким образом все дело свелось к вычислению интегралов K_1, K_2, L_1 и L_2.

Прежде чем выполнить это вычисление, необходимо обратить внимание, что к этим интегралам нельзя применять непосредственно формул (9) и (10) § 40, ибо при выводе этих формул предположено, что функция $\varphi(\xi)$ изменяется все время в одну сторону и медленно, так что на протяжении промежутка, равного 2π изменения переменной ξ, эта функция может быть заменена прямою линией.

В нашем же случае функции $F(\xi)$ и $G(\xi)$ произошли от преобразования функций:

$$f(s) = 2k\varphi'(s)\cos ks + \varphi''(s)\sin ks$$

(9)

$$g(s) = 2k\varphi'(s)\sin ks - \varphi''(s)\cos ks$$

и множители $\cos ks$ и $\sin ks$ имеют своим периодом величину, близкую к периоду $\cos\frac{\xi}{b}$ и $\sin\frac{\xi}{b}$, так что преобразование § 40 к этим функциям было бы не приложимо.

Величина $\varphi''(s)$ весьма малая по сравнению с $2k\varphi'(s)$, поэтому, чтобы не усложнять напрасно формул, мы можем положить

$$\varphi''(s) = 0$$

так что будет:

$$f(s) = 2k\varphi'(s)\cos ks$$

(10)

$$g(s) = 2k\varphi'(s)\sin ks$$

Возьмем для примера интеграл

$$K_1 = \frac{1}{b}\int_0^x e^{\frac{3}{2}\xi} F(\xi)\cos\frac{\xi}{b}\cdot d\xi$$

положив

$$\frac{\xi}{b} = \eta$$

имеем

$$K_1 = \int_0^{\frac{x}{b}} e^{\frac{3}{2}b\eta} F(b\eta)\cos\eta\cdot d\eta$$

и преобразуем этот интеграл обратно к переменной σ, связанной с переменной η уравнением

$$a - b\sigma = e^{b\eta}$$

а так как

$$e^x = a - bs$$

то при

$$\eta = \frac{x}{b}$$

переменная σ принимает значение s, и значит, пределами интеграла будут 0 и s.

Функция $F(b\eta)$ произошла от преобразования функции

$$f(\sigma) = 2k\,\varphi'(\sigma)\cos k\sigma$$

следовательно и обратно $F(b\eta)$ обратится в

$$2k\,\varphi'(\sigma)\cos k\sigma$$

когда мы вернемся к переменной σ, наконец

$$\eta = \frac{\log(a - b\sigma)}{b}$$

$$d\eta = -\frac{d\sigma}{a - b\sigma}$$

Значит, будет

$$K_1 = -2k\int_0^s (a - b\sigma)^{\frac{1}{2}}\varphi'(\sigma)\cos k\sigma\cdot\cos\left[\frac{\log(a - b\sigma)}{b}\right]\cdot d\sigma$$

Но

$$2\cos k\sigma\cdot\cos\left[\frac{\log(a-b\sigma)}{b}\right]=\cos\left[k\sigma+\frac{1}{b}\log(a-b\sigma)\right]+$$
$$+\cos\left[k\sigma-\frac{1}{b}\log(a-b\sigma)\right]$$

следовательно будет

$$(11)\qquad -K_1=k\int_0^s(a-b\sigma)^{\frac{1}{2}}\varphi'(\sigma)\cos\left[k\sigma+\frac{1}{b}\log(a-b\sigma)\right]d\sigma$$
$$+k\int_0^s(a-b\sigma)^{\frac{1}{2}}\varphi'(\sigma)\cos\left[k\sigma-\frac{1}{b}\log(a-b\sigma)\right]d\sigma$$

Положим в первом из этих интегралов

$$(12)\qquad k\sigma+\frac{1}{b}\log(a-b\sigma)=\omega$$

и обозначим через $\Phi(\omega)$ — ту функцию, в которую обратится

$$(a-b\sigma)^{\frac{1}{2}}\varphi'(\sigma)$$

когда переменная σ будет заменена через ω, и пусть

$$ks+\frac{1}{b}\log(a-bs)=q$$

есть значение переменной ω, соответствующее значению s переменной σ, и

$$q_0=\frac{1}{b}\log a$$

— ее значение, соответствующее значению $\sigma=0$.

Из уравнения (12) следует:

$$\left(k-\frac{1}{a-b\sigma}\right)d\sigma=d\omega=\frac{(ak-1)-kb\sigma}{a-b\sigma}d\sigma$$
$$d\sigma=\frac{(a-b\sigma)}{(ak-1)-kb\sigma}\cdot d\omega=p(\omega)\,d\omega$$

и значит, первый из интегралов правой части формулы (11) принял бы вид

$$\mathrm{I}=k\int_{q_0}^{q}\Phi(\omega)p(\omega)\cdot\cos\omega\cdot d\omega=$$
$$=k\int_0^q\Phi(\omega)p(\omega)\cos\omega\,d\omega-k\int_0^{q_0}\Phi(\omega)p(\omega)\cos\omega\,d\omega$$

В этом виде к обоим этим интегралам приложима формула (9) § 40, на основании которой будет

$$\mathrm{I} = k \cdot \Phi(q) \cdot p(q) \cdot \sin q - k\,\Phi(q_0) p(q_0) \sin q_0$$

и вернувшись от переменной q к переменной s, получим

$$\mathrm{I} = \frac{k(a-bs)^{\frac{3}{2}}}{k(a-bs)-1} \cdot \varphi'(s) \cdot \sin\left[ks + \frac{1}{b}\log(a-bs)\right] \tag{13}$$

Ибо второй член будет заключать множитель $\varphi'(0)$, величина коего весьма малая, поэтому все члены, где этот множитель входит, будем отбрасывать.

Понятно, что совершенно таким же образом нашли бы для второго интеграла формулы (11):

$$\mathrm{II} = \frac{k(a-bs)^{\frac{3}{2}}}{k(a-bs)+1} \cdot \varphi'(s) \cdot \sin\left[ks - \frac{1}{b}\log(a-bs)\right] \tag{14}$$

и значит, будет

$$-K_1 = \mathrm{I} + \mathrm{II} \tag{15}$$

Интеграл K_2 будет

$$K_2 = -2k\int_0^s (a-b\sigma)^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi'(\sigma) \cos k\sigma \sin\left[\frac{\log(a-b\sigma)}{b}\right] d\sigma$$

но

$$2\cos k\sigma \sin\left[\frac{\log(a-b\sigma)}{b}\right] = \sin\left[k\sigma + \frac{1}{b}\log(a-b\sigma)\right] - \sin\left[k\sigma - \frac{1}{b}\log(a-b\sigma)\right]$$

так что

$$K_2 = k\int_0^s (a-b\sigma)^{\frac{1}{2}} \varphi'(\sigma) \sin\left[k\sigma - \frac{1}{b}\log(a-b\sigma)\right] d\sigma$$

$$-k\int_0^s (a-b\sigma)^{\frac{1}{2}} \varphi'(\sigma) \sin\left[k\sigma + \frac{1}{b}\log(a-b\sigma)\right] d\sigma$$

обозначая первый из интегралов правой части через III и второй через IV получим на основании формулы (9) § 40:

$$\mathrm{III} = \frac{k(a-bs)^{\frac{3}{2}}}{k(a-bs)+1} \cdot \varphi'(s)\left[1 - \cos\left(ks - \frac{1}{b}\log(a-bs)\right)\right] \tag{16}$$

$$\mathrm{IV} = \frac{k\cdot(a-bs)^{\frac{3}{2}}}{k(a-bs)-1} \varphi'(s)\left[1 - \cos\left(ks + \frac{1}{b}\log(a-bs)\right)\right] \tag{17}$$

и

$$K_2 = \text{III} - \text{IV} \tag{18}$$

Интеграл L_1 будет

$$L_1 = -2k\int_0^s (a-b\sigma)^{\frac{1}{2}}\varphi'(\sigma)\sin k\sigma\cdot\cos\left[\frac{\log(a-b\sigma)}{b}\right]d\sigma =$$

$$= -k\int_0^s (a-b\sigma)^{\frac{1}{2}}\cdot\varphi'(\sigma)\sin\left[k\sigma+\frac{1}{b}\log(a-b\sigma)\right]\cdot d\sigma$$

$$-k\int_0^s (a-b\sigma)^{\frac{1}{3}}\cdot\varphi'(\sigma)\cdot\sin\left[k\sigma-\frac{1}{b}\log(a-b\sigma)\right]d\sigma$$

и на основании сделанных выше обозначений получим

$$-L_1 = \text{III} + \text{IV} \tag{19}$$

Наконец, интеграл L_2 будет:

$$L_2 = -2k\int_0^s (a-b\sigma)^{\frac{1}{2}}\cdot\varphi'(\sigma)\sin k\sigma\sin\left[\frac{\log(a-b\sigma)}{b}\right]d\sigma =$$

$$= k\int_0^s (a-b\sigma)^{\frac{1}{2}}\cdot\varphi'(\sigma)\cos\left[k\sigma+\frac{1}{b}\log(a-b\sigma)\right]d\sigma$$

$$-k\int_0^s (a-b\sigma)^{\frac{1}{2}}\varphi'(\sigma)\cos\left[k\sigma-\frac{\log(a-b\sigma)}{b}\right]d\sigma$$

$$L_2 = \text{I} - \text{II} \tag{20}$$

В состав выражений (8) и (8′) для v_1 и w_1 входят комбинации:

$$P = e^{\frac{1}{2}x}\left[K_1\sin\frac{x}{b} - K_2\cos\frac{x}{b}\right]$$

и

$$Q = e^{\frac{1}{2}x}\left[L_1\sin\frac{x}{b} - L_2\cos\frac{x}{b}\right]$$

Заметив, что

$$\frac{x}{b} = \frac{1}{b}\log(a-bs)$$

и

$$e^{\frac{1}{2}x} = (a-bs)^{\frac{1}{2}}$$

и положив для сокращения:

$$\frac{k(a-bs)^2}{k(a-bs)+1}\varphi'(s)=M \tag{21}$$

$$\frac{k(a-bs)^2}{k(a-bs)-1}\varphi'(s)=N \tag{22}$$

мы получим:

$$\begin{aligned} P&=(N-M)\left(\cos\frac{x}{b}-\cos ks\right)\\ Q&=-(N-M)\sin ks-(N+M)\sin\frac{x}{b}\end{aligned} \tag{23}$$

Но в состав выражений α и β входят комбинации:

$$P\cos ks+Q\sin ks$$

и

$$-P\sin ks+Q\cos ks$$

На основании предыдущих формул будет:

$$\begin{aligned} P\cos ks+Q\sin ks&=-(N-M)+\\ &\quad+N\cos\left(ks+\frac{x}{b}\right)-M\cos\left(ks-\frac{x}{b}\right)\\ -P\sin ks+Q\cos ks&=-N\sin\left(ks+\frac{x}{b}\right)+\\ &\quad+M\sin\left(ks-\frac{x}{b}\right)\end{aligned} \tag{24}$$

Таким образом будет:

$$\begin{aligned} v_1&=e^{\frac{1}{2}x}\left[C_1\cos\frac{x}{b}+C_2\sin\frac{x}{b}\right]+P\\ w_1&=e^{\frac{1}{2}x}\left[C_3\cos\frac{x}{b}+C_4\sin\frac{x}{b}\right]+Q\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \alpha&=v_1\cos ks+w_1\sin ks\\ \beta&=-v_1\sin ks+w_1\cos ks\end{aligned} \tag{26}$$

Введем, вместо постоянных C_1, C_2, C_3, C_4, постоянные A_1, B_1, A_2, B_2 уравнениями:

$$C_1=A_1+A_2;\quad C_4=A_1-A_2.$$
$$C_2=B_2-B_1;\quad C_3=B_2+B_1$$

тогда будет:

$$\alpha = e^{\frac{1}{2}x}\left[A_1\cos\left(ks-\frac{x}{b}\right)+B_1\sin\left(ks-\frac{x}{b}\right)+\right.$$

$$\left.+A_2\cos\left(ks+\frac{x}{b}\right)+B_2\sin\left(ks+\frac{x}{b}\right)\right]+ \tag{27}$$

$$+N\cos\left(ks+\frac{x}{b}\right)-M\cos\left(ks-\frac{x}{b}\right)-(N-M)$$

$$\beta = e^{\frac{1}{2}x}\left[-A_1\sin\left(ks-\frac{x}{b}\right)+B_1\cos\left(ks-\frac{x}{b}\right)-\right.$$

$$\left.-A_2\sin\left(ks+\frac{x}{b}\right)+B_2\cos\left(ks+\frac{x}{b}\right)\right]+ \tag{28}$$

$$+M\sin\left(ks-\frac{x}{b}\right)-N\sin\left(ks+\frac{x}{b}\right)$$

Члены, содержащие множителей A_1, B_1, A_2, B_2, представляют «свободные» колебания снаряда, зависящие от начальных условий; члены с множителями M и N представляют «вынужденные» колебания, т. е. те колебания, которые образуются *независимо* от начальных условий и происходят вследствие постепенного понижения касательной к траектории центра тяжести снаряда.

Вышеприведенными формулами вопрос о вращательном движении снаряда *решается вполне*, ибо эти формулы дают возможность *вычислять*, при помощи вполне определенного процесса, положение оси снаряда в отношении касательной к траектории для любой точки этой траектории, как то будет показано на численном примере.

§ **55.** Уже было упомянуто, что влияние понижения касательной к траектории дает в составе углов α и β члены:

$$\alpha_1 = N\cos\left(ks+\frac{x}{b}\right)-M\cos\left(ks-\frac{x}{b}\right)-(N-M)$$

$$\beta_1 = M\sin\left(ks-\frac{x}{b}\right)-N\sin\left(ks+\frac{x}{b}\right) \tag{1}$$

которые от начальных обстоятельств движения не зависят и для всех выстрелов, произведенных из того же орудия одинаковыми снарядами и под одинаковым углом возвышения, остаются без изменения.

Само собою понятно, что эти члены, являющиеся наиболее характеристичными, должны быть вычисляемы особо и прежде всего.

Мы имеем формулы

$$k^2 - \frac{\rho}{\rho_0} = \mu^2(s) = \frac{1}{(a - bs)^2}$$

для каждого отдельного участка, на которые мы разбили кривую $\mu^2(s)$; отсюда следует

$$a - bs = \frac{1}{\mu}$$

Вообразим или лучше построим действительно кривую $\frac{1}{\mu}$, и положим, что число участков, на которое мы эту кривую разбиваем, неопределенно увеличивается, тогда соответствующая хорда будет приближаться к касательной к кривой $\frac{1}{\mu}$, и мы получим

$$b = \frac{\mu'}{\mu^2} \tag{2}$$

причем, само собою разумеется, производная берется по переменной s.

Таким образом во всех наших формулах мы можем заменить

$$a - bs \text{ через } \frac{1}{\mu}$$

и

$$b \text{ через } \frac{\mu'}{\mu^2}$$

после такой замены будет:

$$M = \frac{k}{\mu^2 + k\mu}\varphi'(s)$$
$$N = -\frac{k}{\mu^2 - k\mu}\cdot\varphi'(s) \tag{3}$$

Затем мы имеем

$$x = \log(a - bs)$$

следовательно будет

$$x = \log\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

и

$$\frac{x}{b} = \frac{\mu^2}{\mu'}\log\left(\frac{1}{\mu}\right) \tag{4}$$

таким образом вышеуказанные члены выразятся *независимо* от принятого подразделения кривой $\frac{1}{\mu}$ на прямолинейные участки.

Выражениям (1), которые мы обозначим, соответственно, через α_1 и β_1, можно придать другой вид, положив:

$$N = H + G$$
$$M = H - G$$

тогда будет:

$$\alpha_1 = -2G + H\left[\cos\left(ks + \frac{x}{b}\right) - \cos\left(ks - \frac{x}{b}\right)\right] +$$
$$+ G\left[\cos\left(ks + \frac{x}{b}\right) + \cos\left(ks - \frac{x}{b}\right)\right] =$$
$$= -2G - 2H\sin\frac{x}{b}\cdot\sin ks + 2G\cos\frac{x}{b}\cos ks$$

(5)

$$\beta_1 = -H\left[\sin\left(ks - \frac{x}{b}\right) + \sin\left(ks + \frac{x}{b}\right)\right] +$$
$$+ G\left[-\sin\left(ks - \frac{x}{b}\right) + \sin\left(ks + \frac{x}{b}\right)\right] =$$
$$= -2H\cos\frac{x}{b}\cdot\sin ks - 2G\sin\frac{x}{b}\cdot\cos ks$$

На основании формулы (3) имеем:

$$2G = N - M = -\frac{2k}{\mu^2 - k^2}\varphi'(s)$$

(6)

$$2H = N + M = -\frac{1}{\mu}\cdot\frac{2k^2}{\mu^2 - k^2}\varphi'(s)$$

Но мы имели:

$$\mu^2 = k^2 - \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$s = \frac{1}{2k}\frac{Ap_0}{B}\cdot t$$

$$Ap_0 = 2k\sqrt{hR\rho_0 B}$$

Заметив, что

$$\varphi'(s) = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{2kB}{Ap_0}\cdot\frac{d\varphi}{dt} \quad (7)$$

мы получим

$$-\frac{2k}{\mu^2 - k^2}\cdot\varphi'(s) = \frac{2k\cdot\rho_0}{\rho}\cdot\frac{d\varphi}{ds} = \frac{4k^2B\cdot\rho_0}{\rho\cdot Ap_0}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Ap_0}{hR\rho}\cdot\frac{d\varphi}{dt} \quad (8)$$

Введем далее в рассмотрение переменную q уравнением

$$q = \frac{hR}{Ap_0} \int_0^t \rho\, dt$$

так что

$$dq = \frac{hR}{Ap_0} \cdot \rho\, dt$$

следовательно будет

$$\frac{Ap_0}{hR\rho} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dq} = \varphi'(q) \tag{9}$$

Таким образом имеем

$$2H = N + M = \frac{k}{\mu} \varphi'(q) \tag{10}$$

Совершенно так же получим

$$2G = N - M = \varphi'(q) \tag{11}$$

и мы получим:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\varphi'(q) - \frac{k}{\mu} \varphi'(q) \cdot \sin\frac{x}{b} \sin ks + \varphi'(q) \cos\frac{x}{b} \cos ks \\ \beta_1 &= -\varphi'(q) \cos\frac{x}{b} \sin ks - \frac{k}{\mu} \varphi'(q) \sin\frac{x}{b} \cdot \cos ks \end{aligned} \tag{12}$$

причем

$$ks = \frac{Ap_0}{2B} \cdot t \tag{13}$$

$$\frac{x}{b} = \frac{\mu^2}{\mu'} \log\left(\frac{1}{\mu}\right) \tag{14}$$

и

$$\mu' = \frac{d\mu}{ds} = \frac{2kB}{Ap_0} \cdot \frac{d\mu}{dt} \tag{15}$$

Формулам (12) можно придать еще один вид, из которого можно получить более наглядное представление о характере движения оси снаряда, определяемого уравнениями (12).

Для этого положим в первом из уравнений (12):

$$\frac{k}{\mu} \varphi'(q) \sin\frac{x}{b} = T \sin\omega$$

$$\varphi'(q) \cos\frac{x}{b} = T \cos\omega$$

тогда будет

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{k}{\mu}\operatorname{tg}\frac{x}{b}$$

и

$$T = \frac{\varphi'(q)}{\mu}\cdot\sqrt{k^2\sin^2\frac{x}{b} + \mu^2\cos^2\frac{x}{b}} =$$

$$= \frac{\varphi'(q)}{\mu}\sqrt{k^2 - (k^2-\mu^2)\cos^2\frac{x}{b}} =$$

$$= \frac{\varphi'(q)}{\mu}\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}\frac{\rho}{\rho_0}\left(1+\cos\frac{2x}{b}\right)} =$$

$$= \frac{k}{\mu}\varphi'(q)\sqrt{1 - \frac{1}{2k^2}\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{1}{2k^2}\frac{\rho}{\rho_0}\cos\frac{2x}{b}}$$

после чего имеем:

(16) $$\alpha_1 = -\varphi'(q) + \frac{k}{\mu}\varphi'(q)\cdot S\cdot\cos(ks+\omega)$$

(17) $$\beta_1 = -\frac{k}{\mu}\varphi'(q)\cdot S\cdot\sin(ks+\omega)$$

причем

$$S = \sqrt{1 - \frac{1}{2k^2}\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{1}{2k^2}\frac{\rho}{\rho_0}\cos\frac{x}{b}}$$

Величина корня S в формулах (16) и (17) изменяется от наибольшего своего значения 1 до наименьшего

$$\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}\frac{\rho}{\rho_0}}$$

вместе с тем для большей части траектории $\frac{k}{\mu}$ близко к 1, следовательно первый член почти все время преобладает над вторым, так что не только среднее значение угла α_1, но и самый угол α_1 остается почти все время *отрицательным*, лишь изредка обращаясь в нуль. Это показывает, что колебания оси снаряда, происходящие от понижения касательной к траектории, таковы, что ось остается все время по одну сторону от плоскости стрельбы.

Отсюда ясно, что горизонтальная проекция боковой слагающей сопротивления воздуха, которая в первом приближении пропорциональна углу α, будет состоять из постоянного по знаку и медленно изменяющегося члена, пропорционального $\varphi'(q)$, и быстро изменяющихся периодических членов. За сколь-нибудь длительный промежуток времени суммарный эффект этих периодических членов уничтожается, от первого же члена все время

возрастает, т. е. центр тяжести снаряда будет относиться в ту сторону от плоскости стрельбы, куда уклонена ось снаряда; в этом относе или отклонении от плоскости стрельбы и состоит деривация снаряда.

В первом приближении естественно принять, что непериодическая часть силы бокового сопротивления пропорциональна полному сопротивлению и непериодической части угла α, т. е. будет

$$Y = f \cdot \rho \cdot \varphi'(q)$$

где f — некоторый постоянный множитель. Но мы видели, что

$$\varphi'(q) = \frac{Ap_0}{hR\rho} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

следовательно

$$\rho\varphi'(q) = \frac{Ap_0}{hR} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

значит будет

$$\frac{P}{g} \cdot \eta = \int_0^t dt \int_0^t Y\,dt = f \cdot \frac{Ap_0}{hR} \cdot \int_0^t dt \int_0^t \frac{d\varphi}{dt} \cdot dt =$$

(18)

$$= f \cdot \frac{Ap_0}{hR} \cdot \int_0^t \varphi(t)\,dt$$

Зависимость угла наклонения касательной от времени полета получается попутно при вычислении траектории, поэтому вычисление деривации по формуле (18) не представляет никаких затруднений и может быть произведено как показано ниже на численном примере. Для получения же множителя f достаточно знать по пристрелке на полигоне деривацию при каком-либо одном угле возвышения, но расчет деривации снаряда не относится к предмету настоящего исследования и, требуя более обстоятельного изучения, будет дан в другом месте, здесь же мы ограничимся этим попутным замечанием.

§ 56. Мы уже упоминали в § 36 про наглядное изображение движения оси снаряда по ее следу на плоскости, перпендикулярной к касательной к траектории во всякий момент и движущейся вместе со снарядом.

Если вообразить, что расстояние этой плоскости до центра тяжести снаряда (как принято при составлении нашего чертежа) равно 43 см, то каждый градус углов α, β и δ изображается на этом чертеже длиною в 7.5 мм и будет

$$\delta^2 = \alpha_1^2 - \beta_1^2$$

с точностью до членов второго порядка, как это следует из формул

$$\cos\delta_1 = \cos\alpha_1 \cos\beta_1$$

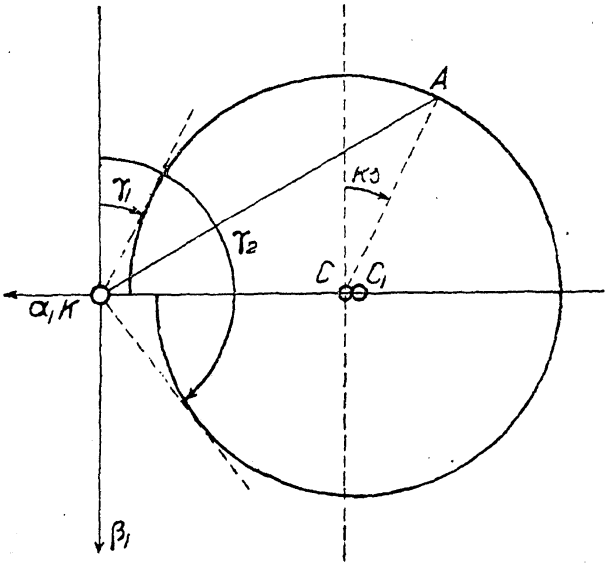
Это изображение будет еще нагляднее, если, воспользовавшись формулами (12) для α_1 и β_1, мы составим выражение

$$(\alpha_1 + \varphi'(q))^2 + \beta_1^2$$

которое, на основании формул (16) и (17), будет

$$(\alpha_1 + \varphi'(q))^2 + \beta_1^2 =$$

$$= \frac{k^2}{\mu^2} \cdot (\varphi'(q))^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2k^2}\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{1}{2k^2}\frac{\rho}{\rho_0}\cos\frac{2x}{b}\right). \tag{19}$$



Фиг. 32.

Рассматривая α_1 и β_1 на нашем чертеже (фиг. 32) как текущие координаты точки A, изображающей след оси GA, и точку C как след касательной GC, мы видим, что если бы все остальные, входящие в формулу (19) величины сохраняли постоянное значение, то геометрическое место точек A был бы круг, центр которого C имеет координаты $(-\varphi'(q)$ и $0)$; но в течение промежутка времени, соответствующего изменению аргумента $(ks + \omega)$ в формуле (19) на 2π, величины $\frac{k}{\mu}\varphi'(q)$, μ и $\frac{\rho}{\rho_0}$ изменятся весьма мало, поэтому кривая, описываемая точкою A, оставаясь близкой к сказанному кругу, не замкнется и представит завиток спирали, за которым последует другой несколько изменившихся размеров и т. д., как будет показано на численном примере.

Таким образом ось снаряда GA описывает около прямой GC, медленно изменяющей свое положение относительно касательной к траектории, почти круговую быструю $\left(\text{с частотою } \frac{Ap_0}{2B}\right)$ прецессию при сравнительно малой относительно этой прямой GC нутации, т. е. малом изменении за время каждого оборота угла AGC.

Между тем угол δ между осью снаряда и касательной, изображаемый на нашем чертеже отрезком KA, изменяется в широких пределах.

Вместе с тем, вращение точки A около точки C, а значит, и оси снаряда вокруг прямой GC, совершается почти равномерно, тогда как это вращение относительно точки K, определяемое изменяемостью угла ν, представляется весьма неравномерным.

Рассмотрим теперь несколько ближе, какое динамическое значение имеет прямая GC при каждом своем мгновенном, медленно изменяющемся положении.

Мы видели, что точка C — след этой прямой на нашей плоскости проекций — определяется координатами:

$$\alpha_1^{\,0} = -\varphi'(q)$$

$$\beta_1^{\,0} = 0$$

причем

$$\varphi'(q) = \frac{Ap_0}{hB\rho} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Обращаясь к уравнениям (1) § 52, т. е. дифференциальным уравнениям движения оси снаряда, мы видим, что в предположении

$$\varphi''(t) = 0$$

значения

$$\alpha_1^{\,0} = -\frac{Ap_0}{hB\rho} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

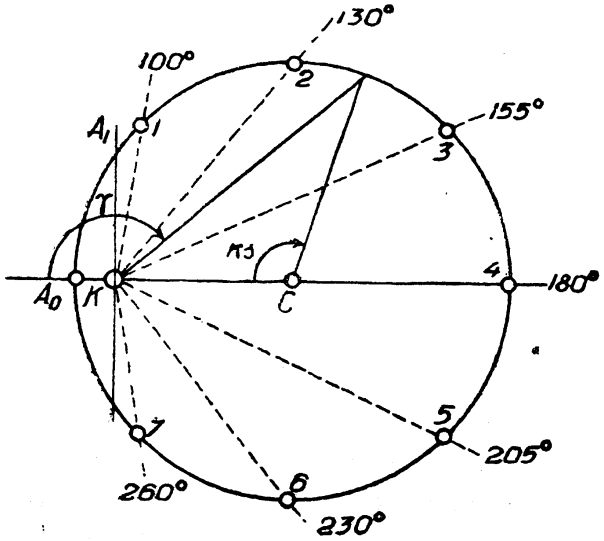
$$\beta_1^{\,0} = 0$$

определяют как раз *мгновенное положение динамического равновесия оси снаряда.*

Выяснив таким образом динамический смысл прямой GC или ее следа C, мы видим, что *«вынужденные» колебания*, т. е. происходящие независимо от начальных условий вследствие постепенного понижения касательной, состоят в том, что ось снаряда описывает около мгновенного положения своего динамического равновесия почти правильную коническую прецессию

с медленно изменяющимся углом растворения и небольшой быстрой периодической нутацией. При этом проекция прямой GC (положение динамического равновесия оси) на плоскость стрельбы практически совпадает с касательной к траектории, проекция же ее на плоскость, перпендикулярную к плоскости стрельбы все время полета, располагается по одну сторону от плоскости стрельбы, составляя с нею угол

$$\alpha_1^0 = -\varphi'(q) = -\frac{Ap_0}{hB\rho} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$



Фиг. 33.

Так как $\frac{d\varphi}{dt}$ остается все время положительным, то знак этого угла определяется знаком угловой скорости p_0, сообщенной снаряду нарезами, и знак угла α_1^0 всегда обратный знаку p_0.

В главе III приведены чертежи (фиг. 43 и 44), представляющие изменения угла нутации и угла прецессии относительно касательной к траектории в функции времени. Составим для примера такой (фиг. 33а) чертеж для движения оси, изображенного на фиг. (33), предположив для простоты, что изменения нутации относительно оси GC за один полный период прецессии оси снаряда настолько малы, что ими можно пренебречь, тем более, что из описанных в главе III наблюдений эти малые изменения и определить невозможно. Таким образом мы получим круг A_0 1, 2, 3, . . . 7 с центром C. Положение касательной отмечено точкою K. Снимая расстояния точек этого круга до точки K и углы ν, мы построим чертеж (фиг. 33а), на котором время, или, что то же, аргумент ks, принято за абсциссы, тогда углы $\delta = K1, K2, \ldots$ изобразятся правильною, напоминающею синусоиду,

кривою $\delta\delta$, углы же прецессии ν—кривою $\nu\nu$. Эта кривая, как видно, состоит из почти прямолинейных участков, соответствующих части 1, 2, . . . 7 круга, для которых угол ν изменяется почти пропорционально углу ks, т. е. времени, и переходных крутых криволинейных частей, соответствующих дугам $A_0 1$ и $A_1 7$ круга, на которых изменения угла ν совершаются весьма быстро.

Сличая наш чертеж с чертежом на фиг. 43, мы видим почти полное их совпадение.

§ **57.** Докажем теперь на численном примере подробности всех вычислений, которыми определяется вращательное движение снаряда, при этом мы ограничимся только теми колебаниями, которые не зависят от *начальных условий* и присущи данному снаряду при полете его по заданной траектории, которая, в свою очередь, определяется начальною скоростью и углом возвышения.

Вычисление этих колебаний имеет также весьма существенное практическое значение, ибо от них и только от них зависит деривация снаряда.

Для этого численного примера воспользуемся теми результатами, которые приведены в моей статье «О применении метода численного интегрирования уравнений к вычислению траектории снаряда» (см. Прибавление I).

Пример, приведенный в этой статье, не относится к какому-нибудь действительно существующему снаряду, снаряд взят условный, примерно такой, какие были еще много лет тому назад, со сравнительно тупою головною частью, на него сопротивление воздуха будет велико и при вычислении с большею ясностью проявятся все особенности, с которыми можно встретиться. Так и здесь для расчета вращательного движения взят такой же условный снаряд, для которого нагляднее проявляются все особенности расчета.

Приведем сперва сводку всех численных данных и формул, которые нам понадобятся.

Вес снаряда $P = 360$ кг

Полукалибр $R = 0.152$ м

Начальная скорость $v_0 = 800$ м/сек.

Моменты инерции:

$$A = \gamma \frac{P}{g} R^2; \quad \gamma = 0.54$$

$$B = 11A$$

$$A = 0.4603; \quad B = 5.063$$

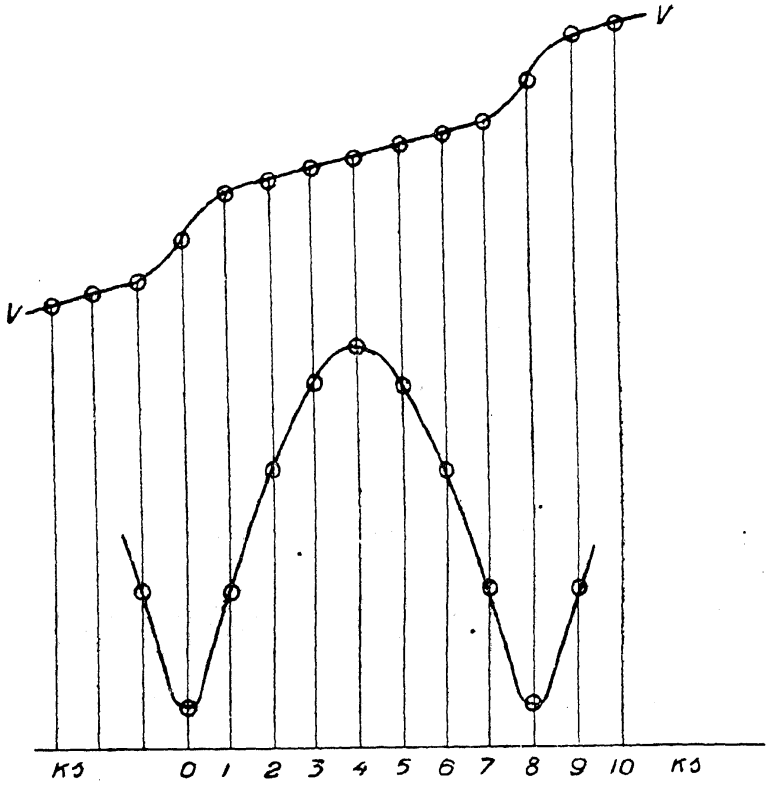
Сопротивление воздуха:

$$\rho = \pi R^2 v^2 K(v) \cdot f(y)$$

$$\rho_0 = \pi R^2 v_0^2 K(v_0); \quad \rho_1 = \pi R^2 v_1^2 K(v_1) f(y_1)$$

(ρ_0 наибольшее сопр.; ρ_1 — наименьшее)

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{v^2 K(v) f(y)}{v_0^2 K(v_0)}; \quad \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{v^2 K(v) f(y)}{v_1^2 K(v_1) f(y_1)}$$



Фиг. 33а.

Момент количества движения:

$$Ap_0 = 2.15 \sqrt{hR\rho_0 B} \qquad (2k = 2.15)$$

$$h = 11, \quad \rho_0 = 1644$$

$$\log Ap_0 = 2.4048$$

$$\log p_0 = 2.7418; \quad p_0 = 552$$

$$s = t \cdot \sqrt{\frac{hR\rho_0}{B}} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{Ap_0}{B} \cdot t = 23.35t$$

$$q = \frac{hR}{Ap_0} \int_0^t \rho\, dt = \frac{hR\rho_0}{Ap_0} \int_0^t \frac{\rho}{\rho_0} \cdot dt = 10.87 \cdot \int_0^t \frac{\rho}{\rho_0} dt =$$

$$= \frac{hR\rho_1}{Ap_0} \int_0^t \frac{\rho}{\rho_1} dt = 0.579 \int_0^t \frac{\rho}{\rho_1} dt$$

$$2k = 2.15; \quad 4k^2 = 4.62; \quad k^2 = 1.155$$

$$\mu^2 = k^2 - \frac{\rho}{\rho_0}$$

(μ^2 есть отвлеченное число, от выбора единиц не зависящее.)

$$\frac{d\varphi}{dq} = \varphi'(q) = \frac{gAp_0}{hR\rho v}\sin\varphi = \frac{gAp_0}{hR\rho_1}\cdot\frac{\sin\varphi}{\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)v}.$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dq}\cdot\frac{dq}{ds} = \frac{1}{2k}\frac{\rho}{\rho_0}\cdot\frac{d\varphi}{dq}$$

$$dq = \frac{hR\rho_0}{Aq_0}\cdot\frac{\rho}{\rho_0}dt = \frac{1}{2k}\cdot\frac{\rho}{\rho_0}\cdot ds$$

$$ks = \frac{Ap_0}{2B}\cdot t$$

$$\frac{x}{b} = \frac{\mu^2}{\mu^1}\log\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

$$\mu' = \frac{d\mu}{ds} = \frac{2kB}{Ap_0}\cdot\frac{d\mu}{dt}$$

$$\alpha_1 = -\varphi'(q) - \frac{k}{\mu}\varphi'(q)\sin\frac{x}{b}\cdot\sin ks + \varphi'(q)\cos\frac{x}{b}\cos ks$$

$$\beta_1 = -\varphi'(q)\cos\frac{x}{b}\sin ks - \frac{k}{\mu}\varphi'(q)\sin\frac{x}{b}\cos ks$$

$$(19) \quad [\alpha_1 + \varphi'(q)]^2 + \beta_1^2 = \frac{k^2}{\mu^2}\cdot[\varphi'(q)]^2\left(1 - \frac{1}{2k^2}\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{1}{2k^2}\frac{\rho}{\rho_0}\cos\frac{2x}{b}\right)$$

Вместо этой формулы, можно брать приближенно:

$$(19') \quad [\alpha_1 + \varphi'(q)]^2 + \beta_1^2 = \frac{k^2}{\mu^2}\cdot[\varphi'(q)]^2$$

ибо на первой части восходящей ветви траектории, где отношение $\frac{\rho}{\rho_0}$ близко к 1, величина $\varphi'(q)$ весьма малая, на дальнейшей части траектории величина $\frac{\rho}{\rho_0}$ малая $\left(\text{меньше } \frac{1}{10}\right)$, а так как формула (19) служит для наглядного изображения кривой, описываемой следом оси на плоскости проекций, то и достаточно формулы (19).

Самое вычисление произведено в прилагаемой табл. II.

Таблица эта состоит из двух частей: первая — стлб. 1 — 20 и вторая — стлб. 21 — 25.

В первой части таблицы аргументом, т. е. переменной, изменяющейся через равномерные, выражающиеся круглыми числами промежутки, служит угол наклонения касательной к траектории φ, считаемый от *отвесной* линии;

с этим аргументом произведено основное вычисление плоской траектории, результатами которого мы и пользуемся.

В первых 6 столбцах произведено вычисление отношения $\frac{\rho}{\rho_1}$; где ρ_1 есть *наименьшее* значение сопротивления воздуха. Сами эти значения вписаны в стлб. 7 таблицы. В стлб. 8 вписаны соответствующие значениям аргумента φ значения времени полета t, взятые прямо из основных вычислений.

В стлб. 9—14 произведено вычисление величины $\frac{d\varphi}{dq} = \varphi'(q)$. Самые величины $\varphi'(q)$ показаны в стлб. 14.

В стлб. 15—20 вычислены величины $k^2 \frac{\rho}{\rho_0}$, $\frac{1}{\mu}$ и $\frac{k}{\mu}\varphi'(q)$. Вычисление произведено при помощи логарифмической линейки 50 см длины.

По данным стлб. 8 и 7 построена была кривая, показывающая зависимость отношения $\frac{\rho}{\rho_1}$ от времени t. С этой кривой сняты затем величины $\frac{\rho}{\rho_1}$, соответствующие значениям аргумента t, показанным в стлб. 21, и затем обычным приемом («суммы попарно» «суммы сверху») вычислена величина интеграла

$$q = \frac{hR\rho_1}{Ap_0}\int_0^t \frac{\rho}{\rho_1}dt = 0.579\int_0^t \frac{\rho}{\rho_1}dt$$

Значения переменной q вписаны в стлб. 25.

Таким образом в этой таблице показаны все те величины, которые необходимы, чтобы построить нижеописанный чертеж, наглядно представляющий движение оси снаряда, *вызываемое независимо от начальных условий* постепенным понижением касательной, т. е. изменением угла φ.

Этот чертеж построен так: вообразим сферу, радиус которой возьмем равным 57.3 см, тогда дуга в один градус будет изображаться длиною в 1 см.

Вертикальной плоскости стрельбы соответствует на этой сфере большой круг (фиг. 34). Опишем цилиндр, касающийся сферы по этому кругу, и отметим на нем точки 0, 1°, 2°, . . ., соответствующие положению следа касательной к траектории в те моменты, когда ее понижение составляет 0°, 1°, 2°, . . .; вообразим, что через центр сферы проводится во всякий момент прямая, параллельная оси снаряда. След этой прямой опишет на нашем цилиндре ряд завитков, расположенных между плоскостью стрельбы и кривою $\frac{2k}{\mu}\varphi'(q)$.

Вычисление элементов, определяющих

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
№ n	Аргум. φ	$\log r^2 K(r)$	$\log f(\varepsilon)$	3 + 4	$\log \frac{\rho}{\rho_1}$	$\frac{\rho}{\rho_1}$	t	$\log r$	$\log \frac{rp}{c_1}$	$\log \frac{g\Delta p_0}{hR'c_1}$ — (10)	$\lg \sin \varphi$	(11) + (12) = $= \log \varphi'(q)$	$\varphi'(q)$
0	55°00′	4.3527	0.0000	4.3527	1.2730	18.75	0ˢ00	2.9031	4.1761	$\bar{2}$.8112	1.9134	$\bar{2}$.7246	0°053
2	55 30	.3149	1.9826	.2975	1.2178	16.51	0.84	.8808	4.0986	.8887	.9160	.8047	.064
4	56	.2811	.9669	.2480	1.1683	14.73	1.64	.8608	4.0291	$\bar{2}$.9582	.9186	$\bar{2}$.8768	.075
7	57	.2224	.9400	.1624	1.0827	12.10	3.13	.8262	3.9089	$\bar{1}$.0784	.9236	1.0020	.100
9	58	.1728	.9143	.0901	1.0104	10.24	4.50	.7970	.8074	.1899	.9284	.1183	.131
11	59	.1302	.8978	4.0280	0.9483	8.88	5.76	.7718	.7201	.2672	.9331	.2003	.159
13	60	.0906	.8810	3.9716	.8919	7.80	6.95	.7495	.6414	.3459	.9375	.2834	.192
15	62	4.0189	.8530	.8719	.7922	6.20	9.14	.7119	.5141	.4732	.9459	.4191	.263
17	64	3.9569	.8308	.7877	.7080	5.10	11.12	.6807	.3887	.5986	.9537	.5523	.357
19	66	.9041	.8127	.7168	.6371	4.34	12.95	.6543	.2914	.6961	.9607	.6568	.454
20	68	.8589	.7981	.6570	.5773	3.78	14.64	.6317	.2090	.7783	.9672	.7455	.557
21	70	.8087	.7859	.5946	.5149	3.27	16.24	.6119	.1268	.8605	.9730	.8335	.682
22	72	.7581	.7757	.5338	.4541	2.85	17.75	.5950	3.0491	1.9382	.9782	.9164	.825
23	74	.7124	.7674	.4798	.4001	2.51	19.19	.5803	2.9804	0.0069	.9828	1.9897	0°977
24	76	.6618	.7598	.4216	.3419	2.20	20.57	.5670	.9089	.0784	.9869	0.0653	1.162
25	78	.6091	.7544	.3635	.2838	1.92	21.90	.5557	.8395	.1478	.9904	.1382	1.374
26	80	.5586	.7498	.3084	.2287	1.69	23.18	.5459	.7746	.2127	.9934	.2061	1.607
27	82	.5152	.7463	.2615	.1818	1.52	24.44	.5375	.7191	.2682	.9958	.2640	1.836
28	84	.4780	.7436	.2216	.1419	1.39	25.66	.5303	.6722	.3151	.9976	.3127	2.055
29	86	.4458	.7417	.1875	.1078	1.28	26.86	.5240	.6318	.3555	.9989	.3544	2.262
30	88	.4180	.7404	.1584	.0787	1.20	28.05	.5185	.5972	.3901	1.9997	.3898	2.450
31	90	.3948	.7400	.1348	.0551	1.14	29.22	.5139	.5690	.4183	0.0000	.4183	2.620
32	92	.3760	.7403	.1163	.0364	1.09	30.37	.5101	.5465	.4408	1.9997	.4405	2.758
34	96	.3474	.7432	.0906	.0109	1.03	32.66	.5044	.5153	.4720	.9976	.4696	2.948
36	100	.3312	.7485	.0797	0.0000	1.00	34.95	.5011	.5011	.4872	.9934	.4806	3.024
38	104	.3258	.7565	.0823	.0026	1.00	37.25	.5000	.5026	.4847	.9869	.4716	2.952
40	108	.3310	.7670	.0980	.0183	1.04	39.60	.5010	.5193	.4680	.9782	.4462	2.794
42	112	.3438	.7805	.1243	.0446	1.11	42.00	.5036	.5482	.4391	.9672	.4063	2.549
44	116	.3646	.7971	.1617	.0820	1.21	44.50	.5078	.5898	.3975	.9537	.3512	2.245
46	120	.3922	.8172	.2194	.1397	1.38	47.11	.5134	.6531	.3342	.9375	.2717	1.870
48	124	.4246	.8415	.2661	.1864	1.54	49.87	.5198	.7062	.2811	.9186	.1997	1.584
50	128	.4596	.8697	.3293	.2496	1.78	52.81	.5267	.7763	.2110	.8965	.1075	1.281
52	132	.4950	.9032	.3982	.3185	2.08	55.96	.5336	.8521	.1352	.8711	.0063	1.014
54	136	.5264	.9426	.4690	.3893	2.45	59.37	.5397	2.9290	0.0583	.8418	1.9001	0.795
56	140	3.5483	1.9876	3.5359	0.4562	2.86	63.07	2.5443	3.0005	1.9868	1.8081	1.7949	0.624

Развернув цилиндр на плоскость, и получим прилагаемый чертеж (фиг. 34а), на котором кривая $\frac{k}{\mu}\varphi'(q)$ вычерчена полностью, а из завитков лишь некоторые, причем для ясности показана их нумерация, пользуясь шкалою времени t, помещенной рядом со шкалою углов φ.

Эти чертежи (фиг. 34а и 34б) настолько наглядны, что никаких дальнейших пояснений не требуют.

Таблица II

вращательное движение снаряда

15	16	17	18	19	20
$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\mu^2 = k^2 - \frac{\rho}{\rho_0}$	μ	$\frac{1}{\mu}$	$\frac{k}{\mu}$	$\frac{k}{\mu}\varphi'(q)$
1.000	0.155	0.394	2.54	2.73	0°145
0.880	.275	.524	1.91	2.06	.132
.786	.369	.607	1.65	1.77	.133
.646	.509	.713	1.40	1.50	.150
.546	.609	.780	1.28	1.38	.181
.474	.681	.825	1.21	1.30	.207
.416	.739	.860	1.16	1.25	.240
.331	.824	.908	1.10	1.18	.310
.272	.883	.940	1.06	1.14	.407
.232	.923	.961	1.04	1.12	.510
.202	.953	.976	1.024	1.10	615
.174	0.981	.990	1.01	1.09	.745
.152	1.003	1.001	0.999	1.074	.887
.134	1.021	1.010	0.990	1.065	1.04
.117	1.038	1.019	.981	1.055	1.17
.102	1.053	1.025	.976	1.050	1.44
.091	1.064	1.032	.969	1.044	1.67
.084	1.071	1.035	.966	1.0 0	1.91
.074	1.081	1.040	.962	1.036	2.12
.068	1.087	1.043	.959	1.030	2.33
.064	1.091	1.044	.958	1.030	2.52
.061	1.094	1.046	.956	1.025	2.68
.058	1.097	1.047	.955	1.025	2.83
.055	1.100	1.049	.953	1.024	3.02
.053	1.102	1.050	.952	1.023	3.09
.053	1.102	1.050	.952	1.023	3.02
.055	1.100	1.049	.953	1.024	2.86
.059	1.096	1.048	.954	1.024	2.61
.065	1.090	1.044	.958	1.030	2.32
.073	1.082	1.041	.960	1.035	1.94
.082	1.073	1.036	.965	1.040	1.65
.095	1.060	1.030	.971	1.046	1.34
.111	1.044	1.022	.978	1.053	1.07
.131	1.024	1.012	.988	1.063	0.84
0.152	1.003	1.001	.999	1.074	0.67

21	22	23	24	25
Arg. t	$\frac{\rho}{\rho_1}$	Суммы (22) попарно	Суммы (23) сверху	$\int_0^t \frac{\rho}{\rho_1} dt = q$
0.0	18.75	32.81	0.00	0.00
2.0	14.06	24.91	32.81	19.00
4.0	10.85	19.50	57.72	34.4
6.0	8.65	15.73	77.22	44.7
8.0	7.08	12.86	92.95	53.8
10.0	5.78	10.51	105.81	61.2
12.0	4.73	8.71	116.32	67.4
14.0	3.98	7.33	125.03	72.3
16.0	3.35	6.17	132.36	76.5
18.0	2.82	5.14	138.53	80.1
20.0	2.32	4.12	143.67	83.1
22.0	1.90	3.50	147.79	85.5
24.0	1.60	3.00	151.29	87.5
26.0	1.40	2.60	154.29	89.2
28.0	1.20	2.30	156.89	90.8
30.0	1.10	2.15	159.19	92.2
32.0	1.05	2.05	161.34	93.4
34.0	1.00	2.00	163.39	94.6
36.0	1.00	2.02	165.39	95.8
38.0	1.02	2.08	167.41	97.0
40.0	1.06	2.16	169.49	98.2
42.0	1.10	2.30	171.65	99.5
44.0	1.20	2.55	173.95	100.8
46.0	1.35	2.82	176.50	102.0
48.0	1.47	3.07	179.32	103.8
50.0	1.60	3.30	182.39	105.5
52.0	1.70	3.60	185.69	107.5
54.0	1.90	3.91	189.29	109.5
56.0	2.01	4.31	193.20	112.0
58.0	2.30	4.80	197.51	114.2
60.0	2.50	5.20	202.31	117.2
62.0	2.70	5.60	207.51	120.0
64.0	2.90		213.11	123.5

§ 58. Для примера приложения формул (18) § 55 вычислена в табл. III деривация и попутно горизонтальная проекция той траектории, которою мы все время пользовались.

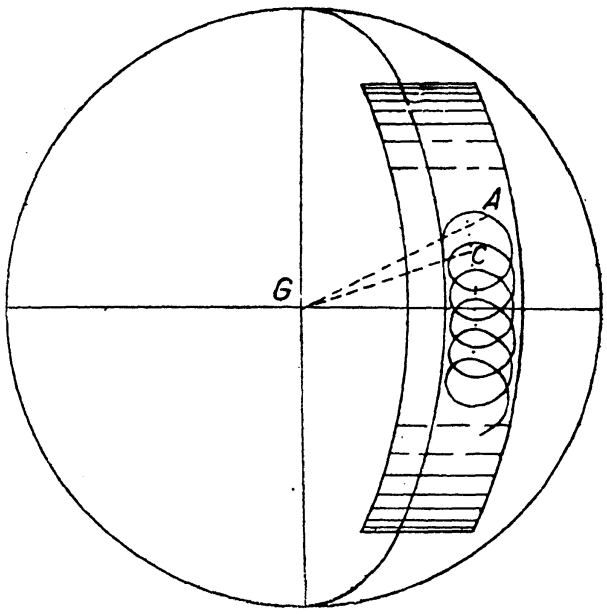
Так как интегрирование производится по времени, то эта переменная и взята за аргумент.

По данным, взятым из вычисления основной траектории (см. Прибавление I), строим кривую углов $\varphi = \varphi_1 - 55°$ понижения касательной и

снимаем ее ординаты, соответствующие показанным в стлб. 1 табл. 2 значениям времени t, и выписываем их в стлб. 2 этой таблицы, затем по правилу трапеций интегрируем. Полученные значения интеграла

$$\int_0^t \varphi \cdot dt$$

пропорциональны ординатам η.



Фиг. 34.

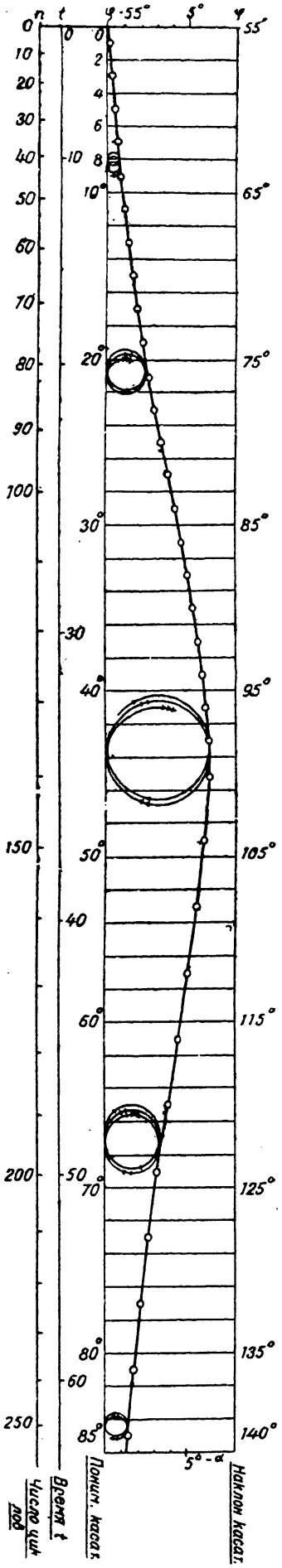
Чтобы найти коэффициент пропорциональности, положим, что по опытам стрельбы известна деривация для точки падения, напр., 400 м, тогда коэффициент пропорциональности будет $\frac{400}{2614.5}$, пользуясь которым и получим ординаты η траектории.

Этот же коэффициент может служить для расчетов деривации и горизонтальной проекции траектории при других углах возвышения.

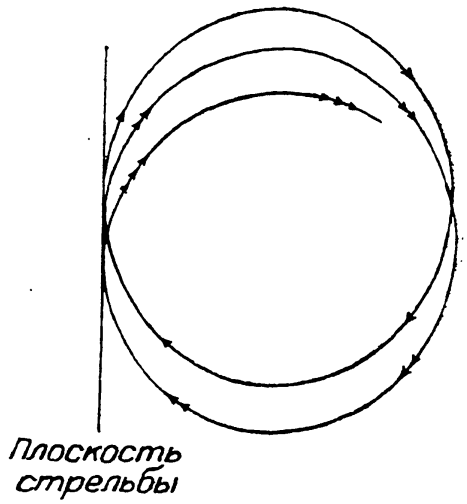
В настоящее время при стрельбе по воздушным целям необходимо знать не только деривацию для точки падения, но и ординаты η для любой точки траектории, поэтому простой способ вычисления их имеет немаловажное практическое значение.

Вопрос этот, по своей важности и обширности, требует подробного изучения, в которое мы здесь вдаваться не можем.

Кроме того, необходимо отметить, что установление надежного способа вычисления деривации и ординат η доставит весьма значительную



Фиг. 34а.



Фиг. 34б.

Таблица III

Вычисление дериваций и горизонтальной проекции траектории

1	2	3	4	5
Аргумент t	$\varphi(t)$	Суммы (5) попарно	Суммы (5) сверху	η
0.0	$0^{c}.0$		0.0	$0^{m}.0$
		1.2		
2.0	1.2		1.2	0.2
		3.9		
4.0	2.7		5.1	0.8
		7.0		
6.0	4.3		12.1	1.8
		10.3		
8.0	6.0		22.4	3.4
		13.9		
10.0	7.9		36.3	5.5
		17.8		
12.0	9.9		54.1	8.2
		22.2		
14.0	12.3		76.3	11.7
		27.0		
16.0	14.7		103.3	15.8
		32.1		
18.0	17.4		135.4	20.7
		37.6		
20.0	20.2		173.0	26.5
		43.4		
22.0	23.2		216.4	33.1
		49.6		
24.0	26.4		266.0	40.6
		56.0		
26.0	29.6		322.0	49.2
		62.7		
28.0	33.1		384.7	59.0
		69.6		
30.0	36.5		454.3	69.5
		76.5		
32.0	40 0		530.8	81.5
		83.4		
34.0	43.4		614.2	94.0
		90.2		
36.0	46.8		704.4	107.8
		97.1		
38.0	50.3		801.5	122.5
		104.0		
40.0	53.7		905.5	138.5
		110.7		
42.0	57.0		1016.2	155.5
		117.2		
44.0	60.2		1133.4	173.5
		123.5		
46.0	63.3		1257.9	192.5
		129.6		
48.0	66.3		1387.5	212.3
		135.5		
50.0	69.2		1523.0	233.0
		141.2		
52.0	72.0		1664.2	254.8
		146.6		
54.0	74.6		1810.8	277.2
		151.6		
56.0	77.0		1962.4	301.0
		156.4		
58.0	79.4		2118.8	323.0
		161.1		
60.0	81.7		2279.9	349.0
		165.6		
62.0	83.9		2445.5	374.2
		169.0		
64.0	85.1		2614.5	400.0

экономию в расходах на ее определение пристрелкою для составления таблиц стрельбы, ибо достаточно будет определить деривацию для какой-либо одной дистанции, — для всех прочих она найдется расчетом.

Наш пример приведен лишь в пояснение того, как пользоваться формулой (*) § 55; само собою разумеется, что предлагаемый способ вычисления деривации надлежит проверить по имеющимся таблицам стрельбы, составленным на основании действительных испытаний.

На этом мы и закончим теоретическую часть нашего исследования и перейдем к изложению новейших опытов, произведенных над определением вращательного движения снаряда.

ГЛАВА III

Новейшие произведенные в Англии опыты для исследования вращательного движения снаряда

В Записках Лондонского королевского общества (Philosophical Transactions of the Royal Society of London, ser. A, vol. 221 a. 222, 1921—1922) помещена статья: «The Aerodynamics of a Spinning Shell» by R. H. Fowler, E. G. Gallop; C. H. Lock и H. W. Richmond, F. R. S., заключающая исследование вращательного движения снаряда опытами и составленную ими теорию этого движения.

В настоящей главе приводится почти полный перевод экспериментальной части этой статьи, с изменением в ней лишь некоторых обозначений и начертаний формул так, чтобы они соответствовали принятым в предыдущих главах и употребительным у нас, вместе с тем изменена и нумерация параграфов так, чтобы она составляла продолжение принятой в предыдущих главах. Теоретическая часть статьи опущена, ибо она покрывается изложенным в главах I и II, в которых главнейшие результаты исследования английских авторов получены гораздо более простым путем.

ЧАСТЬ I

Аэродинамика вращающегося снаряда

§ 59. Статья эта содержит результаты теоретического и опытного исследования, произведенного, по предложению английского Артиллерийского

комитета, авторами в бытность их на службе отдела изобретений Департамента боевого снабжения.

Ныне дано разрешение опубликовать те части этой работы, которые представляют общий интерес, так что эта статья печатается с согласия Артиллерийского комитета и Директора Артиллерии.

Самые опыты были произведены на опытном поле с корабля «Excellent» в Портсмуте, при участии офицеров этого корабля.

Аэродинамические опыты были произведены в воздушной трубе Национальной физической лаборатории.

Предметом статьи служит исследование движения вращающегося снаряда в воздухе со скоростями как бо́льшими, так и меньшими скорости звука. Сперва мы делаем попытку определить движение вращающегося снаряда, рассматриваемого как твердое тело, под действием силы тяжести и сопротивления воздуха, причем это последнее предполагается выраженным в зависимости от положения и скорости снаряда и состояния атмосферы. Таким образом мы ограничиваемся рассмотрением «аэродинамической» задачи о движении только самого снаряда, оставляя в стороне общую «гидродинамическую задачу» о движении снаряда и воздуха.

Движение снаряда, определяемое таким образом, сравнивается затем с результатами опытов, и наиболее важные составляющие системы сил, происходящих от сопротивления воздуха, определяются численно в зависимости от некоторых переменных, таких, как, напр., скорость центра тяжести снаряда.

Самые опыты состояли в определении движения снаряда на начальной части его траектории, главным образом в определении угловых перемещений оси симметрии снаряда. Скорость изменялась от 40 фут/сек. (в воздушной трубе при неподвижном снаряде; наименьшая скорость при стрельбе была 880 фут/сек. до 2300 фут/сек., т. е. в пределах от 0.04 до 2.1 от скорости звука.

Пользуясь определенными таким образом составляющими сопротивления, движение снаряда может быть рассчитано с достаточною уверенностью для более общих случаев, недоступных непосредственному и подробному наблюдению.

Как уже указано выше, мы не делаем попытки решить гидродинамическую задачу. Такое решение, вероятно, теперь еще невозможно. Однако получением точных данных о системе сил, происходящих от действия воздуха, а также о распределении давлений по поверхности снаряда, накопляется материал, на котором в будущем, может быть, будет основана

попытка решения гидродинамической задачи. В настоящей статье доставляются первоначальные сведения о сказанной системе сил. Есть надежда, что будут даны сведения и о распределении давлений в другом месте (см. Прибавление II к этой книге).

Исследуемая задача отнюдь не является новой. В более ранних работах, приведенных у Cranz'a, способ решения уравнений движения вызывал во многом сомнения, в виду недостаточного обоснования делаемых приближений. Классические теоретические результаты, в роде данных Майевским уравнений, определяющих деривацию, до сих пор, и по справедливости, не внушали большого доверия. Кроме того, исследование, по необходимости, основывается на *априорном* допущении о системе действующих сил, и пока результаты этих допущений не подвергнуты проверке подробными опытами, самые допущения должны рассматриваться как недоказанные. *Необходимо, однако, отметить, что теория и опыты, описанные в этой статье, подтверждают классические теоретические выводы.*

Опыты самого Cranz'a имели как раз целью обнаружить ложность мнения, что ось снаряда в установившемся движении совершает правильную прецессию вокруг касательной к траектории центра тяжести. В этом они были успешны, но они были произведены лишь при малых скоростях и дали мало количественных результатов. Единственное действительное сличение теории и опыта, произведенное до сих пор, состоит в сопоставлении вычисленных и наблюденных величин деривации (но надо заметить, что главный член рассчитанной величины деривации зависит от отношения двух слагающих системы сил, а не от их абсолютной величины). Кроме того, наблюденная величина деривации представляет суммарный эффект действия возмущающих сил, и лишь с трудом может быть выделена от сноса вследствие бокового ветра. Таким образом наблюденная деривация не может служить для определения самой системы действующих сил, хотя и может служить для проверки их значений, определенных иными способами.

Вообще, можно сказать, что до сих пор не известна система сил, действующих на снаряд при больших скоростях, исключая случай, когда снаряд летит «прямо носом вперед», т. е. когда его ось совпадает с направлением движения, и система сил сводится практически к одной составляющей, направленной в сторону, противоположную движению. Эту слагающую будем называть «*лобовым сопротивлением*», следуя термину, принятому в аэродинамике.

Cranz и Charbonnier внесли мало в способы решения уравнений движения. Prescott[1] сделал заметный шаг вперед в смысле приведения общих уравнений движения к более удобному виду, и притом не слишком ограниченному в приложениях, и дал точное решение приведенных уравнений в простейшем случае, когда все слагающие системы сил пропорциональны квадрату скорости.

В настоящей статье мы имеем намерение дать, в части II, подробный отчет об уравнениях движения в воздухе вращающегося снаряда и, по возможности, обосновать приведение этих уравнений к различным удобным приближенным видам; некоторые из них являются классическими. Чтобы этого достигнуть, очевидно необходимо начать с некоторых априорных допущений о составе полной системы сил. Эти предположения, которые налагают гораздо меньшие ограничения, нежели те, которые делались до сих пор, тщательно разбираются, по мере их введения.

Затем, в части III, мы подвергаем теоретические результаты, таким образом полученные, проверке опытами, описанными в части I, и таким образом получаем возможность до некоторой степени обосновать наши допущения и получить достаточно точные численные данные о главных силах системы, действующей на снаряд в общем случае. Эти численные данные, а также общее описание действительного движения снаряда, приведены в §§ 60—72.

Мы уже упоминали, что данные, которые можно получить сличая рассчитанную и наблюденную величину деривации, имеют весьма ограниченное значение. Имелась возможность воспользоваться двумя другими способами, что и сделано в этой статье:

1°) Определяется полная система сил, действующих на находящуюся в покое модель снаряда, помещенную в аэродинамической трубе в равномерном потоке воздуха.

2°) Некоторые из составляющих системы сил, действующих на снаряд при больших скоростях, могут быть найдены по наблюдению колебательного его движения в небольшом удалении от дула.

Наибольшая скорость, достижимая теперь при первом способе, есть 80 фут/сек., но по закону «подобия» результаты могут быть распространены до скорости в 700 фут/сек. Для более высоких скоростей необходимо прибегать ко второму способу, который и составляет главное содержание этой статьи.

---

[1] Philos. Mag., ser. 6, vol. 34, p. 332.

Для этой цели снарядом производится выстрел через ряд картонных щитов, таких, которыми пользуются, чтобы определить «угол вылета» при выстреле. По виду полученных пробоин можно определить действительное движение оси снаряда. Начальные возмущения при вылете производят такие колебания снаряда при дальнейшем его полете, которые могут быть точно обмерены. Эти колебания подобны колебаниям оси вращающегося волчка под действием силы тяжести. Если для первого приближения принять, что центр тяжести снаряда движется равномерно и прямолинейно на протяжении участка с картонными щитами, то движение снаряда и волчка между собою тождественны, если пренебречь в обоих случаях трением и предположить: 1°) что волчок и снаряд обладают одинаковою угловою скоростью вокруг их оси симметрии и одинаковым моментом инерции, 2°) что момент инерции волчка относительно поперечной оси, проведенной через его точку опоры, равен моменту инерции снаряда относительно поперечной оси, проведенной через его центр тяжести, 3°) что момент веса волчка относительно его точки опоры равен моменту сил, действующих на снаряд, относительно центра тяжести его.

В этом приближенном случае формальное решение обеих задач одинаково. Как показано в § 68, по периоду колебания оси волчка или снаряда можно определить момент опрокидывающей пары и наоборот. Точно так же погашение колебаний даст суждение о величине «успокаивающей» пары.

§ 60. Классическая теория плоской траектории. По классической теории предполагается, что снаряд движется в сопротивляющейся среде подобно материальной точке, подверженной действию силы тяжести и сопротивления среды, причем это последнее направлено по касательной к траектории в сторону, обратную движению, и величина его зависит только от скорости точки и плотности невозмущенной среды. В таком случае траектория точки располагается в вертикальной плоскости и называется «плоскою траекторией».

Эта теория была бы точной, если бы направление оси снаряда постоянно совпадало с касательною к траектории его центра тяжести. В этом случае действие воздуха на снаряд состояло бы только из одной силы, называемой лобовым сопротивлением, направленной по касательной к траектории центра тяжести и зависящей только от скорости и формы снаряда и состояния среды.

Уравнения движения, даже при таком упрощенном предположении, не интегрируются в конечном виде для действительного закона сопротивления воздуха; на практике они могут быть решены численными приближениями

с любою точностью, если только лобовое сопротивление известно достаточно точно.

Чтобы определить вполне лобовое сопротивление, необходимо тщательно рассмотреть, от каких переменных оно может зависеть. Этот вопрос до сих пор еще не вполне разрешен, и некоторые из наиболее важных соображений изложены ниже, в § 61.

Этот факт, однако, не имеет для нас особенно важного значения; неполный перечень переменных, от которых зависит лобовое сопротивление или, в общем случае, полная система действующих на снаряд сил, может сказаться на результатах наблюдений при попытке приложить их к весьма различным условиям состояния среды или движения снаряда, но эта неполнота не окажет влияния, когда опыты производятся при близких между собою условиях.

Можно принять, что лобовое сопротивление при таком правильном движении снаряда выражается формулой

$$\rho = \Delta R^2 v^2 f_\rho\left(\frac{v}{a}\right)$$

где Δ — плотность воздуха, R — радиус снаряда, v — скорость снаряда, a — скорость звука в невозмущенном воздухе; само собою разумеется, что все величины должны быть выражены в каких-либо определенных единицах: в этой статье принята система — фут, фунт, секунда.

Так как $\Delta R^2 v^2$ имеет размерность силы (Δ — плотность есть *масса* единицы объема), то функция f_ρ есть *отвлеченное* число, не зависимое от принятой системы единиц; будем его называть «коэффициентом лобового сопротивления». Существующие определения этого коэффициента в функции $\frac{v}{a}$ с научной точки зрения весьма не совершенны; теперь могли бы быть произведены более удовлетворительные. Мы не будем здесь касаться этих определений, так как для анализа наших опытов нам понадобится знать этот коэффициент лишь с грубым приближением. Мы можем поэтому рассматривать, что f_ρ известно для всех значений аргумента в пределах от 0 до 3 для снарядов той формы, которая нами применялась при полете их через сухой (или не слишком близкий к насыщению) воздух при температуре, не слишком далекой от 0° С.

§ 61. Функциональная форма коэффициента лобового сопротивления. Тщательное рассмотрение вида функции f_ρ, с точки зрения кинетической теории газов и теории размерности, указывает, что наряду

с $\frac{v}{a}$ аргументами в эту функцию могут входить: γ — отношение теплоемкостей, $\frac{l}{R}$ и $\frac{\sigma}{R}$, где l есть средняя длина свободного пути, σ — диаметр частиц газа. Величину $\frac{l}{R}$ можно заменить более обычным коэффициентом вязкости $\frac{vR}{\nu}$, где ν есть кинематический коэффициент вязкости. Опыты в аэродинамических трубах показывают, что аргумент $\frac{vR}{\nu}$ имеет большое значение при малых скоростях, но при скоростях, близких всего лишь к 75 фут/сек., это значение уже исчезает. Rayleigh[1] нашел выражение давления на поршень при движении его в трубе; это выражение показывает, как могут входить в рассматриваемую функцию γ и $\frac{v}{a}$. На практике, однако, изменения γ весьма малы. Тем не менее, имеется указание опытов, что помимо $\frac{v}{a}$ или γ есть какая-то переменная, от которой зависит в практически заметной степени f_ρ, и что эта переменная не есть коэффициент вязкости. Нет возможности углублять этот вопрос здесь или приводить детали опытов, обнаруживающих это явление, об этом есть данные в изданиях Комитета.

Пока струйные линии потока (при относительном движении) воздуха, обтекающего снаряд, остаются без изменения при переменах скорости, движение следует закону динамического подобия, лобовое сопротивление пропорционально квадрату скорости и коэффициент f_ρ сохраняет постоянное значение — то говорят, что сопротивление следует квадратичному закону.

Опыты над воздушными винтами с большою скоростью, повидимому, показывают, что до значений $\frac{v}{a}$, достигающих 0.7, нет значительных уклонений от квадратичного закона после того, как скорость достаточно велика, чтобы влияние вязкости было несущественно; это имеет место и для снарядов, так как сказанная наименьшая скорость составляет около 50 фут/сек. Так как в баллистике скорости меньше 100 фут/сек. не имеют значения, то обыкновенно принимают, что лобовое сопротивление следует квадратичному закону до скоростей, близких к $0.7a$. Для всех таких скоростей система струйных линий остается без изменений и движение следует закону механического подобия.

---

[1] Aerial Plane Waves of Finite Amplitude. Sci. Pap., vol. V.

При скоростях свыше $0.7a$ влияние сжимаемости воздуха приобретает быстро большое значение, и когда скорость v достигает значения a — скорости звука, и затем превышает таковое, то весь характер обтекания изменяется. Это влияние обнаруживается изменением f_ρ рассматриваемой как функция $\frac{v}{a}$. Хороший типический образец этого изменения дан Cranz'ом. Другой пример показан ниже на чертеже (фиг. 38).

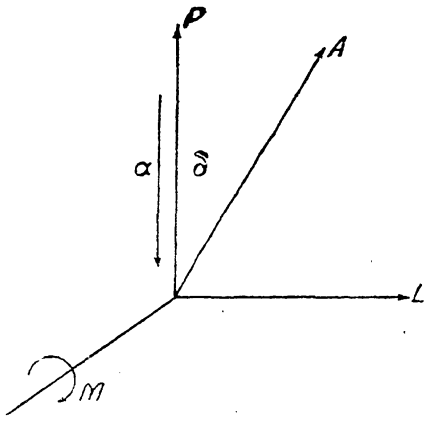
До сих пор мы не обращали внимания на то, что снаряд вращается около своей оси симметрии. Не существует указаний на то, что при совпадении оси и касательной лобовое сопротивление в заметной мере зависит от вращения снаряда, почему и можно в этом случае вращения не рассматривать.

Более важным является вопрос о сделанном без оговорки допущении, что лобовое сопротивление не находится в заметной зависимости от ускорения снаряда. Что касается ускорения при малых скоростях, то, как известно, его влияние проявляется в кажущемся увеличении массы тела на величину порядка массы вытесненного воздуха. Это увеличение таким образом порядка $\frac{1}{2000}$ и может быть отброшено. При больших скоростях и в общем случае опытных данных, к сожалению, не имеется. Однако, рассуждая теоретически, вообще трудно себе представить, чтобы предшествующие обстоятельства могли иметь *существенное* влияние на испытываемое снарядом в каждый момент сопротивление, и результаты опытов показывают, в общем, на такую его независимость, за исключением, может быть, небольшого промежутка значений скорости, близких к a, т. е. скорости звука.

§ 62. Система сил, действующих на снаряд. В теории, излагаемой в этой статье, снаряд рассматривается как твердое тело вращения, так что его ось симметрии есть одна из главных осей инерции; задача этой теории — определить как точное вращательное движение снаряда, так и движение центра тяжести его. Наша теория подтверждает классическую теорию (в согласии с результатами опытов) плоской траектории, показывая, что отклонения оси снаряда от касательной вообще малы, но, кроме того, в нашей теории имеется в виду определить величину и влияние этих отклонений.

В этом общем случае определение действующих на снаряд сил должно быть более полным, нежели в классической теории. Мы будем обозначать угол между осью снаряда и касательной к траектории буквою δ и называть его углом нутации. В том случае (фиг. 35), когда мгновенное положение

оси OA снаряда составляет с касательной OP угол δ, и мы вообразим, что снаряд не вращается и ось по отношению к касательной занимает неизменное положение, тогда по симметрии система действующих сил может быть представлена как показано на чертеже:



Фиг. 35.

1°) *Лобовое сопротивление* ρ, приложенное к центру тяжести O и направленное по OP в сторону, обратную движению.

2°) Слагающая L, перпендикулярная ρ, приложенная к центру тяжести O и лежащая в плоскости POA. Эта сила называется *боковым сопротивлением.*

3°) Опрокидывающая пара M, ось которой перпендикулярна плоскости POA и которая считается положительной, когда она стремится увеличить угол нутации δ.

По аналогии со сказанным в § 60, мы принимаем для ρ, L и M следующие выражения:

$$\rho = \Delta R^2 v^2 f_\rho\left(\frac{v}{a}, \delta\right) \tag{1}$$

$$L = \Delta R^2 v^2 \sin\delta \cdot f_L\left(\frac{v}{a}, \delta\right) \tag{2}$$

$$M = \Delta R^2 v^2 \sin\delta\, f_M\left(\frac{v}{a}, \delta\right) \tag{3}$$

Эти выражения представляются наиболее естественными и такими, что f_ρ, f_L, f_M будут отвлеченными числами, не имеющими размерности. Так как L и M по симметрии уничтожаются, когда $\delta = 0$, то введен множитель $\sin\delta$.

Мы будем просто писать

$$f_\rho\left(\frac{v}{a}\right), \quad f_L\left(\frac{v}{a}\right) \quad \text{и} \quad f_M\left(\frac{v}{a}\right)$$

вместо

$$f_\rho\left(\frac{v}{a}, 0\right); \quad \lim_{\delta \to 0} f_L\left(\frac{v}{a}, \delta\right) \quad \text{и} \quad \lim_{\delta \to 0} f_M\left(\frac{v}{a}, \delta\right)$$

и в тех случаях, когда не может возникать сомнений, будем опускать аргумент $\frac{v}{a}$.

На основании сказанного в § 61, мы можем с уверенностью ожидать, что для всех значений δ все три коэффициента будут почти не зависимы от $\frac{v}{a}$ в промежутке

$$0.1 \leqq \frac{v}{a} \leqq 0.7$$

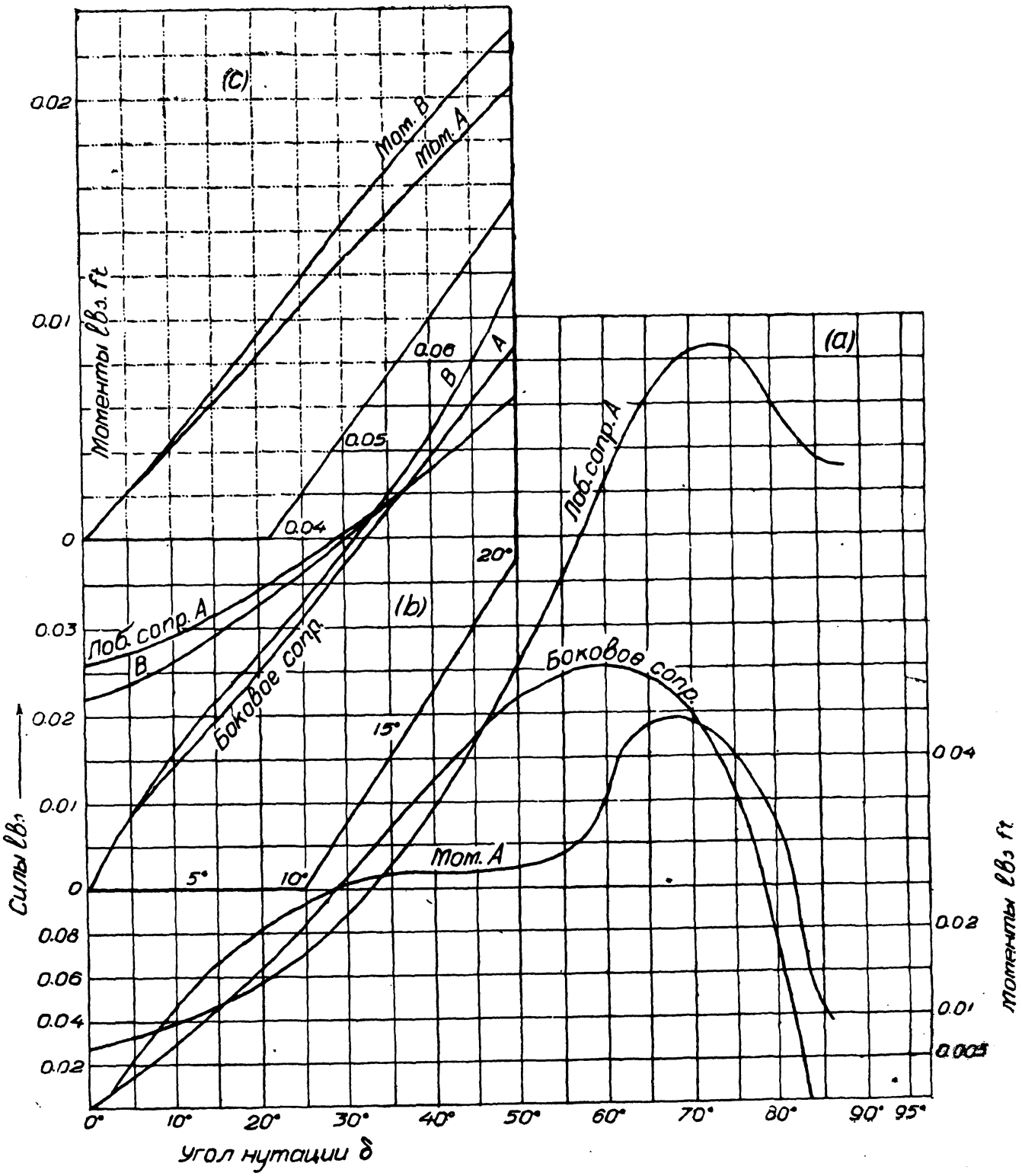
и, когда понадобится, будем принимать эту независимость за абсолютную, пока $\frac{v}{a} \leqq 0.7$. Что касается их зависимости от угла δ, то в отношении к f_ρ мы не имеем опытных данных. Для анализа результатов наших опытов, для которого требуется знать f_ρ лишь с сравнительно грубым приближением, мы примем, что $f_\rho\left(\frac{v}{a}, \delta\right)$ для малых значений δ не зависит от δ.

Для обычного положения центра тяжести снаряда значения f_M при малых скоростях замечательно близки к независимости от угла δ, когда этот угол меньше 10°; после того как δ переходит за эту границу, f_M убывает. С другой стороны, при малых скоростях и малых значениях δ, f_L изменяется по странному закону, поэтому опыты в трубе не дают надежных значений для этой функции. Типичные кривые, представляющие f_0, f_ρ и f_M в функции угла δ при малых скоростях, показаны на фиг. 36. Главная задача опытов, указанных в этой статье, состоит в определении величин

$$f_L\left(\frac{v}{a}\right) \quad \text{и} \quad f_M\left(\frac{v}{a}\right)$$

в функции $\frac{v}{a}$, когда $\frac{v}{a} > 0.7$.

§ 63. Влияние вращательного движения оси снаряда. В действительности направление оси снаряда относительно касательной изменяется довольно быстро. По аналогии с аэропланом, мы допустим, что силы ρ, L и пара M не зависят от угловой скорости перемещения оси,

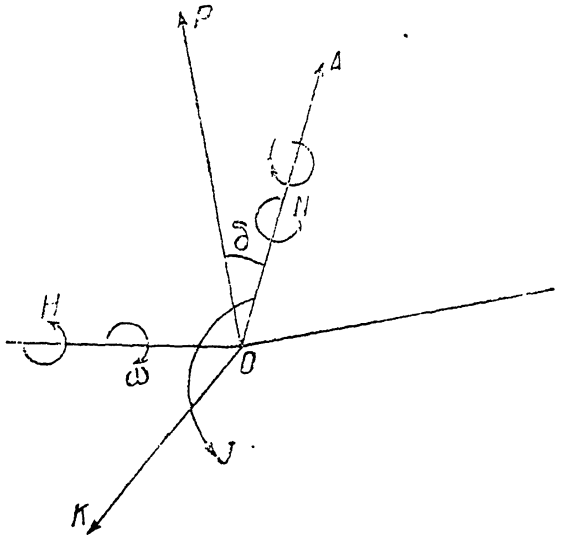

(c)
Мом. B
Мом. A
Моменты lвз. ft
0.02
0.01
0
0.06
0.05
0.04
B
A
(a)
Лоб. сопр. A
20°
(b)
Лоб. сопр. A
B
Боковое сопр.
Боковое сопр.
15°
0.03
0.02
0.01
0
Силы lвз
5°
10°
Мом. A
0.08
0.06
0.04
0.02
0.04
0.02
0.01
0.005
Моменты lвз ft
0°
10°
20°
30°
40°
50°
60°
70°
80°
90°
95°
Угол нутации δ

Фиг. 36.

но что это перемещение вызывает добавочную пару H, которую называют «*нутационною парою*» и которая выражается формулой

$$H = \Delta v\, \omega R^4 f_H\left(\frac{v}{a}\right)$$

где ω есть угловая скорость перемещения оси снаряда (фиг. 37).



Фиг. 37.

Пара H действует в сторону уменьшения угловой скорости ω, так что ось этой пары совпадает с вектором, изображающим угловую скорость ω, но направлена в противуположную сторону. На основании анализа опытов, мы будем в состоянии получить приближенные значения f_H, также и подтверждение того, что L и M не зависят от угловой скорости перемещения оси, но это приближение слишком грубо, чтобы можно было судить об изменяемости f_H в зависимости от какого-либо аргумента.

По аналогии с парою H, можно было бы предполагать, что, вследствие вращения снаряда около его оси, еще показанные на фиг. 37 пары I, J и сила K выражаются формулами:

$$I = \Delta v\, \Omega R^4 f_I$$

$$J = \Delta v\, \Omega R^4 \sin\delta f_J$$

$$K = \Delta v\, \Omega R^3 \sin\delta f_K$$

где $\Omega = \frac{Ap_0}{B}$, но опыты таких пар и силы не обнаруживают.

§ 64. Соотношения между силами, действующими на снаряд. Вышеприведенные коэффициенты зависят от формы снаряда, результаты, полученные для какой-либо формы, не приложимы к снарядам другого очертания. Однако для снарядов данного очертания при данном их движении силы ρ и L, т. е. лобовое и боковое сопротивления, не зависят от положения O центра тяжести снаряда, тогда как опрокидывающая пара изменяется вместе с изменением положения центра тяжести.

Пусть M_1 и M_2 — значения моментов этой пары, соответствующие положениям O_1 и O_2 центра тяжести, тогда

$$M_1 = M_2 + (L\cos\delta + \rho\sin\delta)\cdot O_1O_2$$

причем O_1O_2 считается положительным, когда O_1 ближе к дну снаряда, нежели O_2. Пользуясь формулами и предполагая, что угол δ малый, получим

$$f_{M_1} = f_{M_2}(f_L + f_\rho)\cdot\frac{O_1O_2}{r}$$

Это соотношение имеет практическое значение, ибо оно дозволяет находить f_L по значениям f_M, соответствующим двум различным положениям центра тяжести снаряда, тогда как непосредственного определения f_L не существует.

Мы увидим, что для практических приложений выгодно ввести в рассмотрение слагающую, перпендикулярную к оси снаряда и лежащую в плоскости, проходящей через ось и касательную; легко видеть, что при малых углах δ соответствующий этой силе коэффициент f_N будет

$$f_N = f_R + f_L$$

и что этот коэффициент определяется непосредственно по изменяемости f_M.

Других соотношений между этими коэффициентами нет, и применяемые при вычислении деривации допущения о виде функций f_L и f_M произвольны, так же как и допущения о независимости отношений:

$$f_\rho\left(\frac{v}{a},\delta\right):f_\rho\left(\frac{v}{a},0\right);\quad f_L\left(\frac{v}{a},\delta\right):f_\rho\left(\frac{v}{a},\delta\right)$$

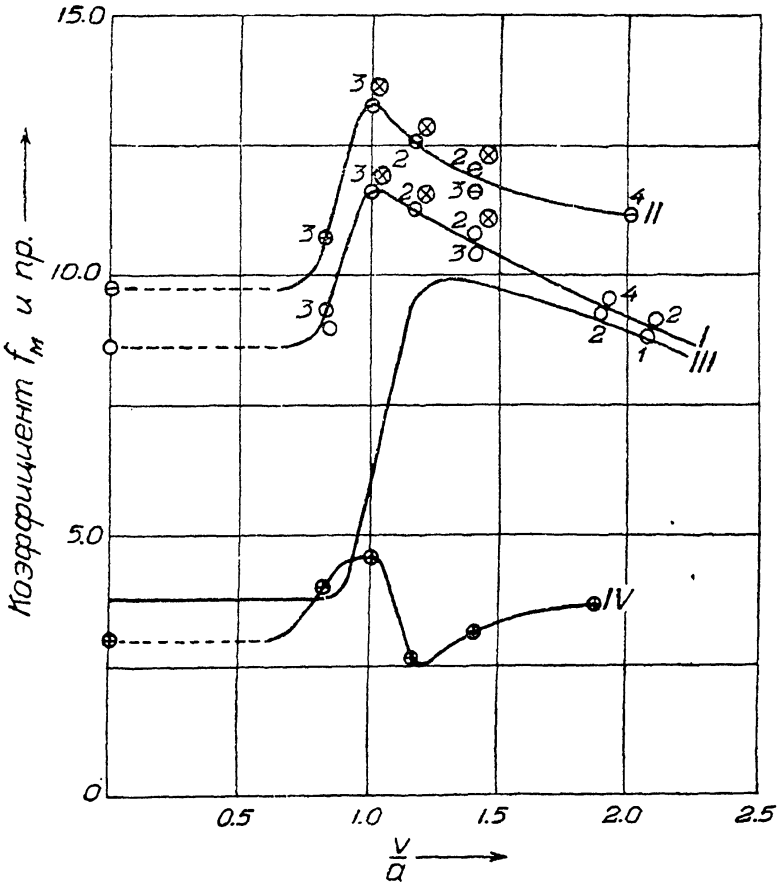
$$f_M\left(\frac{v}{a},\delta\right):f_\rho\left(\frac{v}{a},0\right)$$

Cranz,[1] делая эти допущения, составил таблицы значений этих отношений на основании опытов, произведенных Kummer'ом. Когда необходимо знать f_ρ, f_L и f_M для снаряда заданной формы, то единственная возможность определять их это опытным путем.

[1] Ztschr. f. Math. u. Phys., Bd. XLIII, p. 184.

§ 65. Численные результаты опытов. Мы приведем теперь численные результаты, полученные из анализа произведенных испытаний.

На фиг. 38 нанесены по аргументу $\frac{v}{a}$ значения коэффициентов f_M и f_L для снаряда очертания А (фиг. 40) (это очертание можно характеризовать так: длина 3.84 калибра, дно цилиндрическое, головная часть ожи-



Фиг. 38.

вальная — радиус 2 калибра, центр тяжести в расстоянии 1.577 калибра от дна).

На этом чертеже кривые имеют следующее значение:

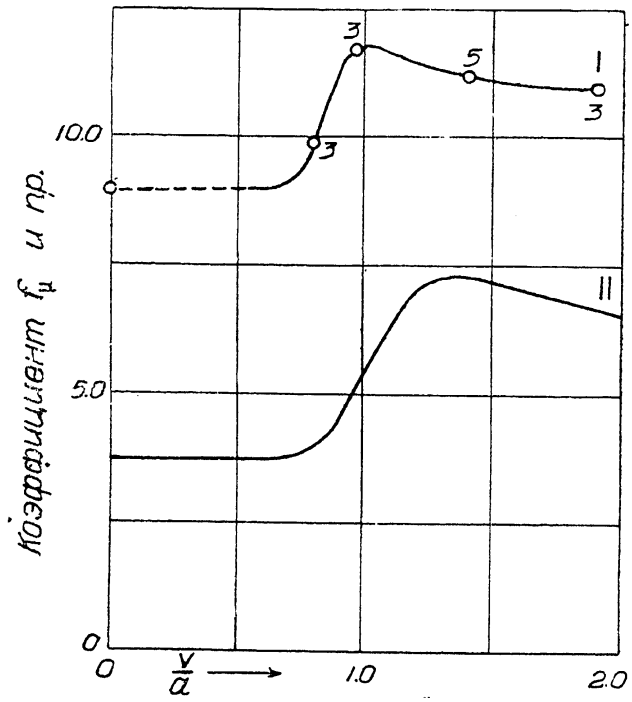
Кривая I. Коэффициент $f_M\left(\frac{v}{a}\right)$ для 3-дюймового снаряда, когда центр тяжести в расстоянии 4.73 дюйма от дна.

Кривая II. То же для расстояния 4.20 дюйма от дна.

Кривая III. Коэффициент $f_\rho\left(\frac{v}{a}\right)$ в удесятеренном масштабе для сравнения.

Кривая IV. Коэффициент бокового сопротивления $f_L\left(\frac{v}{a}\right)$.

Точки, помеченные ⊙ △ ⊡, указывают наблюденные величины, числа при них — число испытаний, средний результат коих нанесен на чертеж. Звездочкою отмечены испытания, когда стрельба велась из орудия с крутизною нарезов в 30 калибров, все прочие испытания были произведены при крутизне нарезов в 40 калибров.



Фиг. 39.

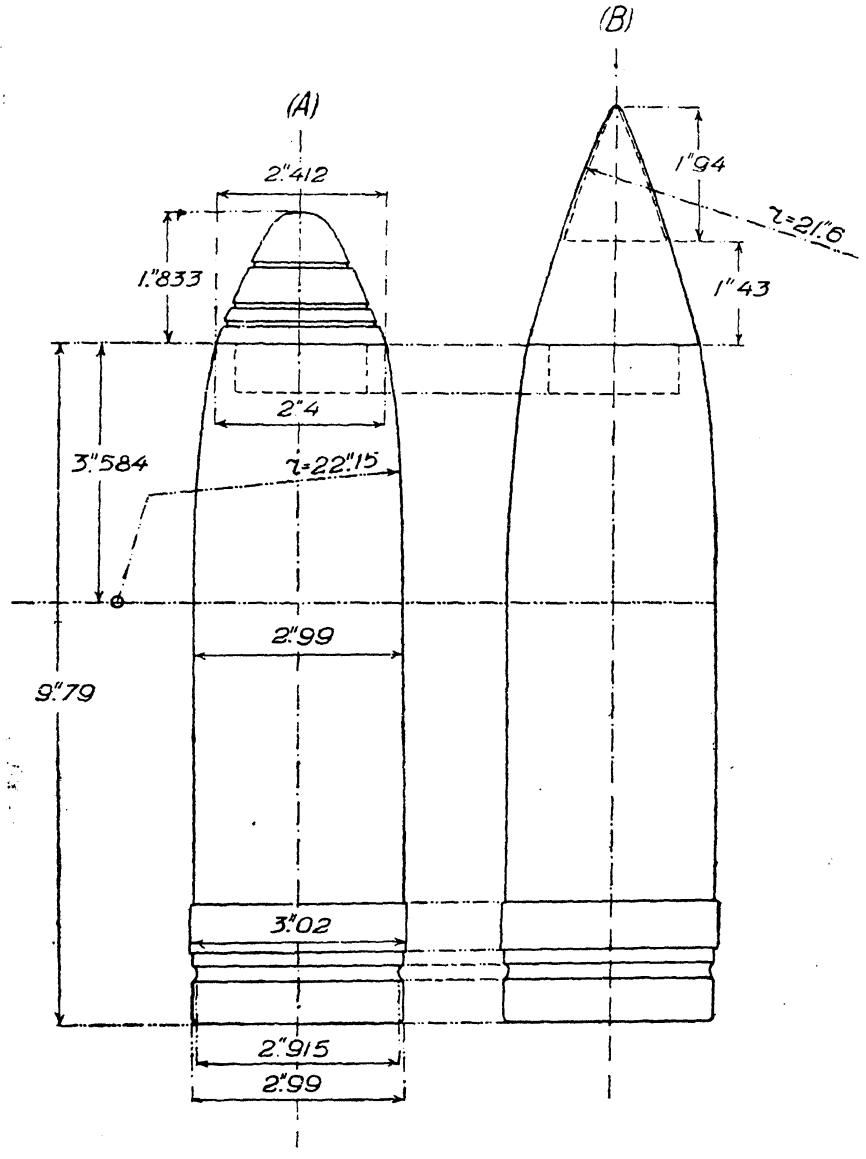
Значения f_M даны для расстояния 4.73 дюйма центра тяжести от дна.

Для сравнения приведены также значения f_ρ. На фиг. 39 даны значения f_M и f_ρ для снаряда формы B (см. фиг. 40, форма B характеризуется такими нормальными данными: длина 4.34 калибра, основание цилиндрическое, голова оживальная — радиус 6 калибров, центр тяжести 1.665 калибра от дна) при положении центра тяжести в расстоянии 4.965 дюйма от дна.

Результаты испытаний исправлены от эффекта, производимого пробиванием щитов, и проведены согласные кривые по наблюденным точкам.

На фиг. 39 кривые имеют следующее значение:

Кривая I. Коэффициент $f_M\left(\frac{v}{a}\right)$ для 3-дюймового снаряда B, при положении центра тяжести 4.965 дюйма от дна.



Фиг. 40.

Кривая II. Коэффициент лобового сопротивления в удесятеренном масштабе.

Пользуясь этими кривыми, составлены следующие таблицы величин

$$f_M\left(\frac{v}{a}\right), \quad f_N\left(\frac{v}{a}\right) \text{ и } f_L\left(\frac{v}{a}\right)$$

для снарядов формы A и величин $f_M\left(\frac{v}{a}\right)$ для формы B.

Таблица IV

Наблюденные величины коэффициентов сопротивления воздуха для снарядов типа А и типа В (фиг. 40)

$\frac{v}{a}$	Снаряд формы А			Формы В
	$f_M\left(\frac{v}{a}\right)$	$f_N\left(\frac{v}{a}\right)$	$f_L\left(\frac{v}{a}\right)$	$f_M\left(\frac{v}{a}\right)$
Аэр. труб.	8.57	3.34 *	3.0 *	8.95
0.7	8.60	—	—	9.05
0.8	9.05	4.3	3.9	9.75
0.9	10.35	—	—	11.15
1.0	11.55	5.2	4.6	11.70
1.1	11.40	—	—	11.60
1.2	11.10	3.5	2.6	11.35
1.3	10.80	—	—	11.15
1.4	10.55	4.1	3.1	11.05
1.5	10.30	—	—	11.00
1.6	10.05	4.3	3.35	11.00
1.7	9.85	—	—	10.95
1.8	9.65	4.5	3.6	10.95
1.9	9.40	—	—	10.90
2.0	9.15	—	—	—

Числа этой таблицы представляют главные результаты опытов.

Вероятная погрешность значений f_M меньше $2^0/_0$, величин f_L — около $10^0/_0$.

Различие кривых f_ρ, f_L, f_M весьма поучительно, оно показывает невозможность считать, напр., отношение $\frac{f_\rho}{f_M}$ не зависящим от $\frac{v}{a}$ при значительных изменениях этого аргумента (это означает, что множитель, обозначенный в формулах Майевского и Забудского через h, не может считаться постоянным и не зависимым от скорости).

В отличие от f_ρ, значения f_M сравнительно мало изменяются в смежности со скоростью звука, увеличение составляет всего около $35^0/_0$ и то лишь для тесного промежутка вблизи $\frac{v}{a}=1$, тогда как f_ρ увеличивается в $2^1/_2$ раза и сохраняет это увеличенное значение при больших скоростях.

---

* Ненадежно.

Как уже было упомянуто, значения f_L, определяемые при малых скоростях в аэродинамической трубе, не вполне надежны. Представляется, что эта величина имеет минимум при скорости, немного большей скорости звука, и затем возрастает. Такой вид кривой является неожиданным, и желательно повторение опытов для подтверждения этого факта. Мы опять обращаем внимание, что отношение $f_L : f_\rho$ также не может почитаться постоянным и претерпевает значительные изменения.

§ 66. Составляющая f_H и прочие силы. Мы приведем здесь те данные, которые доставляются наблюдениями погашения колебаний оси.

Когда f_L известно, то можно получить численные значения двух количеств, именно f_H и $f_H + \varepsilon$, где ε зависит от f_J и f_I и, как можно думать, едва ли сравнимо по своей величине с f_H. Данные, полученные из произведенных опытов, очень грубы, но могут быть пополнены и уточнены дальнейшими опытами.

Имеющиеся результаты разнятся весьма значительно при одинаковых выстрелах; значение ε получилось гораздо большим, нежели ожидалось, и обратного знака. Общий же характер погашения (см. ниже фиг. 43 и 44) ясен и качественно правдоподобен.

Мы можем утверждать, что приводимые в табл. V значения f_H — надлежащего порядка и их погрешность, вероятно, не свыше 50%.

При попытке определить f_H в аэродинамической трубе получено значение 22.

Любопытною особенностью погашения является, что при скорости около 900 фут/сек. *нутация проявляет заметное возрастание с течением времени* (вместо убывания). *Это имеет место для всех четырех типов снарядов*. Происходит ли это действительно от сопротивления воздуха, или от удара о щиты, еще не выяснено. Физически возможно, что f_H может быть отрицательным при этих скоростях.

Эти выстрелы не включены в таблицу, и дальнейшие подробности даны в части III этой статьи.

§ 67. Общая характеристика вращательного движения оси снаряда. Численные значения величин f_ρ, f_L, f_M, приведенные выше, а также приближенные величины f_L дают возможность, пользуясь началами динамики, рассчитать движение снаряда, предполагая, что значения $\frac{v}{a}$ и угла δ не выходят из пределов, для которых имеются опытные данные.

Вместе с тем необходимо составить и решить уравнения движения по заданным силам, чтобы иметь возможность решать обратную задачу

Таблица V

Значения f_H для различных групп выстрелов. Группы I, II, III для снарядов формы A; группа IV для формы B

(Положение ц. тяж. см. табл. VI)

Группа нач. скор.	f_H	Группа нач. скор.	f_H	Группа нач. скор.	f_H
I. 22—24 1119	80	II. 24 1292	70	III. 1—4 2025	70
I. 25.26 1326	70	II. 5—7 22—23 * 1587	75	IV. 13—15 1078	55
I. 27.28 1563	60	II. 1—4 2024	60	IV. 16—18 1547	75
I. 1—4 2167	35	III. 17—19 1119	40	IV. 24—26 2120	80
I. 19—21 2320	30	III. 20—21 1292	70		
II. 17—19 1119	90	III. 22.23 1567	60		

о нахождении действующих на снаряд сил по известному движению его. Сперва, однако, полезно дать общее качественное описание характера движения снаряда, прежде чем переходить к количественному определению его.

§ 68. **Аналогия с волчком.** Уже было указано на аналогию между движением оси снаряда и оси вращающегося волчка. При сделанных там ограничениях это подобие полное, пока f_M не зависит от δ. Уравнения движения устойчивого снаряда представляют обобщение уравнений малых колебаний волчка около вертикали. Для общего случая устойчивого или неустойчивого движения, когда нутация не остается малой, можно отчасти пользоваться точными решениями уравнений движения волчка.

В частности, условие *устойчивости* для снаряда тождественно с таким же условием для волчка. Условие устойчивости движения снаряда выражается неравенством

$$A^2 p_0^2 > 4B\mu$$

где A и B — моменты инерции снаряда, p_0 — угловая скорость его вращения вокруг оси симметрии и $\mu \cdot \sin\delta = M$, где M есть момент опрокидывающей

* При стрельбе из орудий с разною крутизною нарезов. Результаты — согласные.

пары. Удобно ввести в рассмотрение величину s — «коэффициент устойчивости», определяемую равенством

$$s = \frac{A^2 p_0^2}{4B\mu}$$

Когда s значительно превосходит единицу, то как для снаряда, так и для волчка возможно движение, представляющее малое колебание с периодическими членами двух различных периодов. Величины этих периодов определяются значением $\frac{Ap_0}{B}$; обратно, по значениям этих периодов определяется μ, а значит, и f_M. Главное назначение опытов с определением вида пробоин в картонных щитах и есть нахождение сказанных периодов и по ним f_M. Производя выстрелы с различными начальными скоростями, имеем возможность изучать зависимость f_M от $\frac{v}{a}$.

§ 69. Весь успех таких опытов зависит от случайных возмущений при вылете снаряда из дула орудия. Надо, чтобы происходящие от этих возмущений колебания снаряда были достаточно велики для возможности точного обмера. Способы наблюдений были достаточно точны, предполагая, что угол нутации не менее 1°. При испытаниях не было ни одного выстрела, при котором этот угол был бы меньше 2°, и весьма вероятно, что начальное возмущение настолько велико, что опыты этого рода могут быть произведены с любым типом снарядов.

Необходимо отметить, что при данном начальном возмущении амплитуда колебаний тем больше, чем меньше s, и наконец, когда s становится меньше единицы, то амплитуда весьма быстро возрастает. По этой причине сперва было признано предпочтительным пользоваться таким орудием, для которого s было лишь весьма немногим больше единицы, однако опыты, описанные в этой статье, показывают, что наилучшие результаты получались, когда s было близко к 1.5.

Можно ожидать a priori, что начальный угол нутации при вылете мал — это подтверждается опытами — и что колебания снаряда происходят, главным образом, от начальной угловой скорости около поперечной оси. Снаряд под действием весьма значительного давления пороховых газов на его дно совершенно не устойчив, и как только он вылетит из дула орудия, он получает некоторое возмущение или отклонение от своего прямого положения; величина и направление этого отклонения зависят от чисто случайных причин. По всей вероятности, пороховые газы продолжают действовать на снаряд в течение весьма короткого промежутка времени после вылета,

таким образом это действие можно уподобить некоторому вращательному импульсу около поперечной оси.

Вращательное движение снаряда, поэтому, на некотором протяжении от дула уподобляется тому движению волчка, которое называется «движение розеткой», где ось волчка периодически проходит через вертикаль.

§ 70. Различие между движением снаряда и движением волчка. Мы постараемся перечислить те причины, вследствие которых движение снаряда отличается от движения волчка.

1) Действие бокового сопротивления, которое заставляет центр тяжести описывать кривую, подобную винтовой линии.

2) Действие сил, обозначенных в § 64 через H, J и K.

3) Уменьшение поступательной скорости, производимое лобовым сопротивлением.

4) Действие силы тяжести.

Мы рассмотрим эти влияния поочередно.

1°) Угловые перемещения снаряда являются источником бокового сопротивления, изменяющегося по величине и направлению вместе с изменением угла нутации и прецессии, вследствие этого центр тяжести снаряда уклоняется из вертикальной плоскости стрельбы и его траектория принимает вид, напоминающий винтовую линию. Если бы было возможно точно наблюсти это винтообразное движение, то получились бы ценные данные для определения бокового сопротивления, иначе — коэффициента f_L; к несчастию, амплитуда этих колебаний слишком мала, чтобы быть измеренной с достаточною точностью. Поэтому, с точки зрения наших испытаний, наиболее важна реакция этих боковых колебаний центра тяжести на вращательное движение снаряда, иначе — угловые его колебания. Эта реакция способствует погашению сказанных колебаний.

2°) Нутационная пара H производит такое же погашение колебаний, ибо она всегда противоположна поперечной угловой скорости. В то время как предыдущий фактор погашал колебания медленного периода, этот последний имеет как раз обратное действие. Совокупным своим влиянием они погашают оба рода колебаний.

Для 3-дюймовых снарядов, которыми пользовались при опытах, нутационное погашение преобладает, и его действие проявляется в том, что величина угла нутации уменьшается, вместе с тем быстрая прецессия постепенно переходит в медленную. Сила, обозначенная через J, происходящая от вращения снаряда около оси симметрии, не оказывает заметного

влияния на вращательное движение, но пара K может оказывать погашающее колебания действие.

3°) Скорость снаряда, вследствие лобового сопротивления и действия силы тяжести, постепенно убывает на всей восходящей ветви траектории и на некотором протяжении за вершиною; вследствие этого коэффициент устойчивости s возрастает, ибо μ убывает. Изменения величины s уменьшают колебания и ограничивают их амплитуду, способствуя, таким образом, погашению колебаний.

4°) Действие силы тяжести проявляется на вращательном движении снаряда тем, что вызывает кривизну траектории. Для расчета влияния силы тяжести необходимо отнести движение снаряда к подвижным осям, вращающимся вместе с касательной к траектории. В произведенных испытаниях, в виду ничтожности использованной дистанции, действие силы тяжести не проявлялось сколь-нибудь заметно, но при стрельбе на большие дистанции оно приобретает важное значение и от него зависит деривация.

§ 71. Пояснение влияния силы тяжести. Вообразим, что центр тяжести снаряда вынужден двигаться в воздухе с постоянною скоростью v по кругу, расположенному в вертикальной плоскости; обозначим через θ — наклонение касательной к горизонту в рассматриваемый момент; очевидно, что $\frac{d\theta}{dt}$ будет постоянно, ибо v есть постоянная. Существует такое установившееся движение (динамическое равновесие), при котором ось OA лежит в плоскости, проходящей через OP и перпендикулярной к плоскости траектории, причем угол $AOP = \delta$ постоянный. Пара M, стремящаяся увеличить угол δ, также постоянная, и таким образом рассматриваемое движение подобно движению волчка, ось коего была бы наклонена на угол $\frac{\pi}{2} + \delta$ к вертикали, т. е. так же, как ось снаряда к нормали к плоскости траектории. Угловая скорость оси около этой нормали есть $-\theta'$, значение угла δ в этом случае получится из уравнения

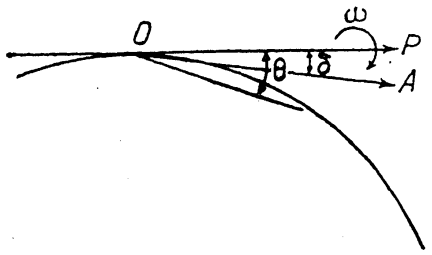
$$(*) \qquad -Ap_0\theta'\cos\delta + B\theta'^2\sin\delta\cos\delta = M = \mu\sin\delta$$

Если θ' не слишком велико и если μ не слишком мало, это уравнение имеет малый корень δ; рассматривая μ как независимую от δ величину, отбрасывая величины порядка δ^3, получим

$$\delta = -\frac{Ap_0\theta'}{\mu}$$

При свободном движении снаряда угловая скорость θ' возрастает, и скорость v убывает до некоторой точки, лежащей немного за вершиной траектории. Если начальное движение было тождественно с вышепринятым установившимся, то пара M будет убывать, и ось снаряда отстанет от того положения, которое она занимала бы при установившемся движении. Это отставание производит увеличение угла δ, пока не получится новое состояние динамического равновесия, но вследствие отставания угол δ будет несколько меньше этого значения, соответствующего равновесию, и проекция оси на плоскость стрельбы расположится несколько выше касательной OP.

Когда скорость большая, угловая же скорость вращения снаряда p_0 не слишком велика, то момент M большой, и истинное положение оси близко к положению равновесия. В самом деле, оказывается, что при предположении, что OA лежит в одном уровне с OP и что величина δ определяется уравнением (*), получается такая величина деривации, которая достаточно верна для углов возвышения, меньших 30°. Деривация производится боковым сопротивлением, происходящим от вышеуказанного расположения оси относительно касательной.



Фиг. 41.

Вблизи вершины траектории, при навесной стрельбе как скорость, так и пара M становятся весьма малыми, так что угол δ становится большим. Численным интегрированием были рассчитаны вращательное движение и деривация снаряда, выстреленного при угле возвышения в 70°. Немного далее вершины амплитуда нутации достигает 60°, и ось отклоняется от касательной больше, чем на 45°.

§ **72**. Действие силы тяжести заканчивает перечень сил, влияющих на вращательное движение снаряда, остается рассмотреть их совокупное влияние. Оказывается, что движение оси устойчивого снаряда определяется с достаточною точностью, когда нутация не слишком велика, линейным дифференциальным уравнением второго порядка (свободные колебания). Действие силы тяжести образует движение, происходящее от постепенного понижения касательной, которое можно считать независимо от первого, если только начальные значения угла нутации и его производной достаточно малы. Полное движение получается, если наложить вышеупомянутые свободные колебания на вынужденные, происходящие от силы тяжести. Сво-

бодные колебания постепенно погашаются, и окончательно остаются вышеописанные вынужденные.

Начальные обстоятельства движения влияют и на движение центра тяжести, поскольку от них зависят боковые отклонения оси снаряда, а также и увеличение лобового сопротивления, но количественно это влияние еще не определено.

Примеры действительно наблюденного движения оси снаряда даны ниже, на фиг. 45, 46, 47.

ЧАСТЬ II

Подробности обстановки опытов и производства их

§ 73. Общее описание. Мы имеем в виду в этой части нашей статьи объяснить подробности произведенных испытаний в такой мере, чтобы читатель мог себе представить примененный способ и оценить достигнутую или вообще достижимую при их производстве степень точности.

Опыты были произведены в январе и в феврале 1919 г., причем стрельбы производились четырьмя типами 3-дюймовых снарядов, при различных начальных скоростях, из двух орудий, имевших различную крутизну нарезов.

Данные о снарядах приведены в следующей таблице.

Таблица VI

Средние значения динамических элементов снарядов, определенные до стрельбы

Тип снаряда	Длина, дм.	Вес, lbs.	Отст. ц. тяж. от дна	Мом. инерц. A lbs. inch.^{2}	Попер. мом. ин. B lbs. inch.^{2}	$\frac{B}{A}$
I. Норм.	11.53	14.09	4.727	18.37	143.9	7.83 (5)
II. Ц. тяж. впереди норм.	11.53	16.31	5.124	19.20	165.0	8.59
III. Ц. тяж. позади норм. .	11.53	16.48	4.203	18.93	129.5	6.84
IV. Сн. с заостр. окончанием	13.15	14.62	4.965	18.71	166.2	8.89

Данные о стрельбах приведены в следующей таблице.

Таблица VII.

Произведенные стрельбы. Типы снарядов помечены I, II, III, IV; №№ выстрелов числами 1, 2, 3, . . . в том порядке, как они производились.

Орудие с крутизною нарезов 40 калибров

Группа выстр.	Средняя начальн. скорость, фут/сек.	Примечание	Группа выстр.	Средняя начальн. скорость, фут/сек.	Примечание
Тип I. Снаряд формы A. Ц. тяж. нормально					
I. 11—14	922	Устойч.	I. 15—16	2130	Устойч.[1]
I. 8—10	1072	Неустойч.	I. 1—4	2167	»
I. 17—18	1312	»	I. 19	2272	»
I. 5—7	1565	На пред. уст.	I. 20—21	2346	»
Тип II. Снаряд формы A. Ц. тяж. впереди нормы					
II. 8—10	934	Устойч.	II. 5—7	1585	Устойч.
II. 11—13	1107	Неустойч.	II. 1—4	2024	»
II. 14—16	1334	»			
Тип III. Снаряд формы A. Ц. тяж. позади нормы					
III. 8—10	931	Устойч.	III. 5—7	1583	На пред. уст.
III. 11—13	1077	Неустойч.	III. 1—4	2025	Устойч.
III. 14—16	1312	»			
Тип IV. Снаряд формы B. Ц. тяж. нормально					
IV. 10—12	884	Весьма неустойч.	IV. 1—6	2130	Весьма неустойч.
IV. 7—9	1553	То же			

[1] Эти выстрелы произведены по мишеням на дальнем щите, чтобы выделить влияние пробивания мишеней.

(Продолжение)

Орудие с крутизною нарезов 30 калибров. Все снаряды устойчивы

Группа	Начальн. скорость, фут/сек.	Группа	Начальн. скорость, фут/сек.	Группа	Начальн. скорость, фут/сек.
Тип I					
I. 22—24	1119	I. 25—26	1326	I. 27, 28	1563
Тип II					
II. 17—19	1119	II. 24	1292	II. 22, 23	1589
Тип III					
III. 17—19	1119	III. 20—21	1292	III. 22, 23	1567
Тип IV					
IV. 21—23 IV. 13—15	900 1078	IV. 16—18 IV. 19—20[1]	1547 1547	IV. 24, 26	2121

Свободное пространство между батареей и морем в Портсмуте, которое можно было использовать при производстве этих опытов, немного менее 600 футов. Движение снаряда определялось на этом протяжении, которое настолько мало, что действием силы тяжести можно пренебречь и считать траекторию снаряда прямолинейной.

Чтобы записать движение снаряда, на пути снаряда ставится ряд картонных квадратных пистолетных мишеней по 2 фута сторона, толщиною около $^1/_{20}$ дюйма. Мишени укреплялись перпендикулярно к пути снаряда, в надлежащем расстоянии от дула. Для орудия с крутизною нарезов 40 калибров ставилось 10 мишеней, приблизительно через 60 футов одна от другой, первая мишень в 50 футах от дула. Для орудия с нарезкою 30 калибров ставилось 12 мишеней, первые 7 через 30 футов одна от другой, остальные через 60. Расстояние мишеней от дула обмерялось с точностью около 1 дюйма.

[1] Выстрелы произведены по мишеням, поставленным лишь у дальнего щита, чтобы по сравнению определить влияние пробивания мишеней.

Плоскость мишеней тщательно выверялась и, по всей вероятности, ни в одном случае уклонение от перпендикулярности к пути снаряда не превышало 2 градусов. Так как погрешность даже в 4 градуса не оказывает влияния на вид и положение пробоин, по которым определяется положение оси и центра тяжести снаряда в момент попадания в мишень, то можно считать, что во всех случаях направление касательной к траектории центра тяжести было перпендикулярно к плоскости мишеней. Угловые перемещения оси снаряда настолько медленны по сравнению с его поступательным движением, что за время прохождения снаряда через щит угол прецессии изменяется не более, как на $3^1/_2{}^\circ$, угол же нутации — не более, как на 8 минут, для тех снарядов, коими пользовались для этих опытов. Эти величины не превышают погрешности наблюдений, и ими можно пренебречь.

Таким образом, в смысле пробивания мишени, снаряд можно рассматривать равнозначущим с описанным около него цилиндром, коего производящие параллельны направлению движения центра тяжести снаряда.

Если бы направление движения в момент удара было перпендикулярно к плоскости мишени, то снаряд произвел бы пробоину, представляющую по своей форме сечение сказанного цилиндра плоскостью мишени. Но если вообразить, что мишень наклонена на небольшой угол τ к этому нормальному положению, то пробоина, произведенная снарядом, будет отличаться от предыдущей членами порядка $a(1 - \cos\tau)$, где a — размер пробоины. Такого рода члены второго порядка при $\tau < 4^\circ$ совершенно ничтожны, поэтому и можно принимать, что вид пробоины, произведенной снарядом, такой, как для мишени, плоскость которой в точности нормальна к траектории.

Таким образом по виду пробоины определяются угол нутации и его ориентация, т. е. угол прецессии в момент удара снаряда о мишень.

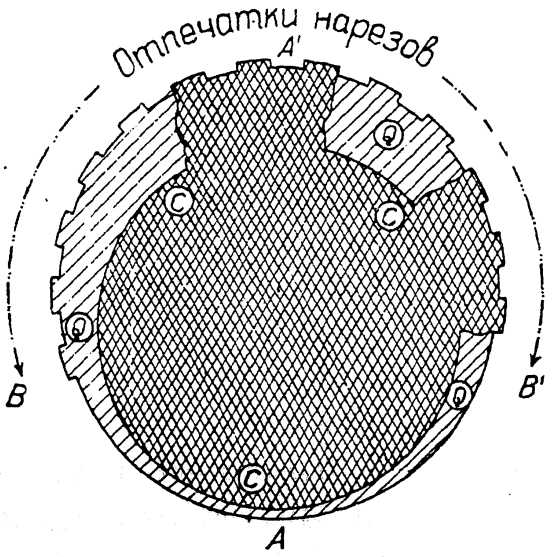
На каждой мишени отмечались направление отвесной линии и марка, по которой можно было судить о точке прицеливания при каждом выстреле. Вероятная погрешность в отметке вертикали была ничтожна по сравнению с погрешностью наблюдений. Вероятная ошибка в координатах точки прицеливания не превышала 0.2 дюйма.

Время полета до каждой мишени не наблюдалось непосредственно, но средняя скорость снаряда определялась при каждом выстреле, как обыкновенно, двумя хронографами Буланже. Этими последними пользовались иногда совместно, и тогда их показания согласовывались, иногда же — раздельно, в начале и в конце дистанции, чтобы судить о потере скорости и о величине лобового сопротивления. По этим данным определялась начальная скорость

и время полета до каждого щита с расчетною точностью до 1 фут/сек. и 0.0001 секунды.

Представляется совершенно невероятным, чтобы погрешность которой-либо из этих величин могла оказать влияние на остальные результаты опытов. Проверка рассчитанной начальной скорости доставляется самими наблюдениями, о чем указано подробнее в § 77.

§ 74. Обмер пробоин в мишенях. Покажем теперь, каким образом по положению и виду пробоины в мишени находится положение оси и центра тяжести снаряда в момент удара. Это может быть сделано



Фиг 42.

с значительной степенью точности. Оказалось, что при всех скоростях, меньших 1600 фут/сек., а часто и при больших скоростях, пробоина имела вид, изображенный схематически на фиг. 42.

Внутрь наружной окружности пробоины $ABA'B'$ загнут край QQQ частью оборванного картона. Оказывается, что если этот загнутый край распрямить, то очерчивается довольно точно круг, диаметром 2.40 дюйма. В эту пробоину можно всегда пригнать вырезанный из плотного картона кружок так, что положение его центра определяется с точностью до 0.01 или 0.02 дюйма.

Наружное очертание снарядов, которыми пользовались при этих опытах, показано выше, на фиг. 40.

Необходимо обратить внимание, что в месте соединения снаряда с трубкою есть режущий плоский уступ, диаметром 2.402 дюйма, таким образом очевидно, что при ударе чисто вырезается кружок картона, диаметром около 2.40 дюйма; значительная часть этого внутреннего круга

обыкновенно обрывается при проходе тела снаряда, которое и делает полную пробоину, но остается достаточно уцелевшего места, если угол нутации не слишком велик.

На фиг. 42 схематического изображения пробоины, при угле нутации от 1 до 4° и средних скоростях, сделаны следующие обозначения.

CCC — внутренний круг, диаметром 2.40 дюйма,

$ABA'B'$ — наружное очертание пробоины.

AA' — ось симметрии или наибольший диаметр пробоины.

$BA'B'$ — следы от выступов, образованных нарезами на ведущем пояске.

BAB' — часть, вырезанная головою или гладкою частью снаряда.

Значения угла нутации на этом чертеже определяются по наибольшему диаметру AA' (3.16 дюйма) на чертеже и по расстоянию точки A' до центра круга CCC (1.80 дюйма) и дают 1°.6 и 1°.8 — среднее 1°.7.

Чтобы выполнить эти определения, необходимо заметить, что между углом δ и наибольшим диаметром снаряда и упомянутым расстоянием есть определенное соотношение, поэтому можно заготовить таблицы, где по этим величинам прямо получается значение угла нутации.

Чтобы определить угол прецессии ν, т. е. наклонение плоскости, проведенной через ось снаряда и касательную к вертикальной плоскости стрельбы, надо обмерять угол между направлением диаметра AA' и помеченной на мишени отвесной линией.

Оказалось, что точность этих обмеров для угла нутации составляет до 0°.2 (вероятная ошибка). Для углов прецессии точность обмеров, если угол нутации не был меньше 0°.8, составляла около $2^1/_2°$.

По этим обмерам для каждого выстрела составлялась табличка, в которую и заносились значения углов δ, ν и соответствующих моментов времени.

Для контроля, по найденному значению угла нутации и по известному положению центра тяжести снаряда на оси вычислялось его положение на прямой AA' и сличалось с точкою прицеливания. Результатов этих сличений мы не приводим.

§ 75. Определение динамических элементов снаряда.

Каждый снаряд перед выстрелом взвешивался и определялась полная длина его.

Отступления от средних значений были малые, и приведенные в таблицах средние данные достаточно точны для предмета наших исследований. При выстреле эти элементы едва ли претерпевают какие-либо изменения.

Моменты инерции определялись перед выстрелами, примерно, для 25% общего числа снарядов каждого типа. Вероятная ошибка одного определения не превышала $\frac{1}{2000}$. Средние величины даны в таблице.

Наибольшие отклонения от среднего для поперечного момента инерции составляло 1.8%, для осевого — 0.8%.

Такая погрешность могла бы быть заметной, если бы для отдельного выстрела заменить истинную величину моментов инерции их средними значениями, но на окончательных средних результатах она не сказывается. В общем точность опытов оказалась, против ожидания, настолько большою, что стоило бы затрачивать труд и определять моменты инерции снаряда для каждого отдельного выстрела.

Положение центра тяжести определялось для тех же снарядов, как и моменты инерции, среднее расстояние центра тяжести от дна показано в таблице. Определение делалось с точностью до 0.003 дюйма, значения для каждого типа хорошо согласовались между собою, наибольшее уклонение от средней составляло всего 0.022 дюйма.

Нельзя быть наперед уверенным, что значения A и B моментов инерции и положение центра тяжести не претерпевают при выстреле заметных изменений вследствие испытываемых снарядом напряжений.

Нет оснований предполагать, что какие-либо изменения могли иметь место для незаполненных снарядов типов I и IV; можно быть уверенным, что напряжения в них не достигали предела упругости, но при заполнении полости свинцом и деревом, как то делалось для типов II и III, такой уверенности нет. Для проверки по два таких снаряда типов II и III было выпущено после определения их динамических элементов, в поле подняты, и их элементы вновь определены. Для снаряда типа III, где свинец был со стороны дна, а дерево со стороны головной части, заметных изменений не было. Для снарядов типа II, где свинец расположен впереди, а дерево сзади, как и следовало ожидать, деревянную болванку раздавило и свинец продвинулся назад приблизительно на 3 дюйма для случая большой скорости (1950 фут/сек.) и на 1 дюйм — при малой (1530 фут/сек.). Осевой момент инерции, само собою разумеется, не изменился, но положение центра тяжести и поперечного момента инерции претерпели чувствительные изменения. Поверка показала, что эти изменения произошли от перемещения свинца, вес которого был 1.9 lbs. Когда центр тяжести снаряда типа II отстоит на 4.727 дюйма от дна, так что он совпадает с центром тяжести снаряда типа B, то значение B есть 145.7 lbs (inch.).[2]

Пренебрегая массою дерева, допустим, что свинцовый груз продвинулся на x дюймов вперед, в таком случае

$$B = 145.7 + 1.9\,x^2$$

Затем, если l есть расстояние центра тяжести от дна в дюймах, то

$$l = 4.727 + 0.117x$$

Измененное положение центра тяжести может, таким образом, быть найдено по расчету, если момент инерции B будет определен из наблюдений. Так оно и было на деле, и даже для снарядов типа B динамические элементы снаряда после выстрела известны с достаточною точностью.

§ **76. Возможные возмущающие влияния.** Кроме вышеупомянутых, есть еще два возможных источника ошибок: 1) ветер, 2) импульсы реакции при ударах о мишени.

Так как мы изучаем движение снаряда под действием сил, происходящих от воздуха, то нам необходимо считаться только с движением снаряда *относительно воздуха*; наблюдения помощью мишеней дают движение снаряда *относительно земной поверхности*. Чтобы исключить влияние ветра, все стрельбы производились при тихой погоде, когда скорость ветра не превышала 5 или 6 фут/сек., на высоте 20 футов над землей, лишь при трех выстрелах эта скорость достигала 10 футов.

Когда начали производить испытания, то не ожидали, что влияние мишеней превзойдет случайные погрешности наблюдений, но на деле оказалось, что такое влияние более значительно, чем ожидалось.

Небольшое число данных для определения настоящих поправок было получено по тем поверительным выстрелам, которые производились только по дальним мишеням. Если бы указанное влияние было обнаружено ранее, то такие проверочные выстрелы включались бы в каждую группу. Полученные данные были тщательно проанализированы и пополнены, по окончании опытов, определением величины импульса при ударе о мишень по происходящей при этом потере скорости снарядом.

Величина такого импульса при пробивании одной мишени, если угол нутации не слишком велик, составляет

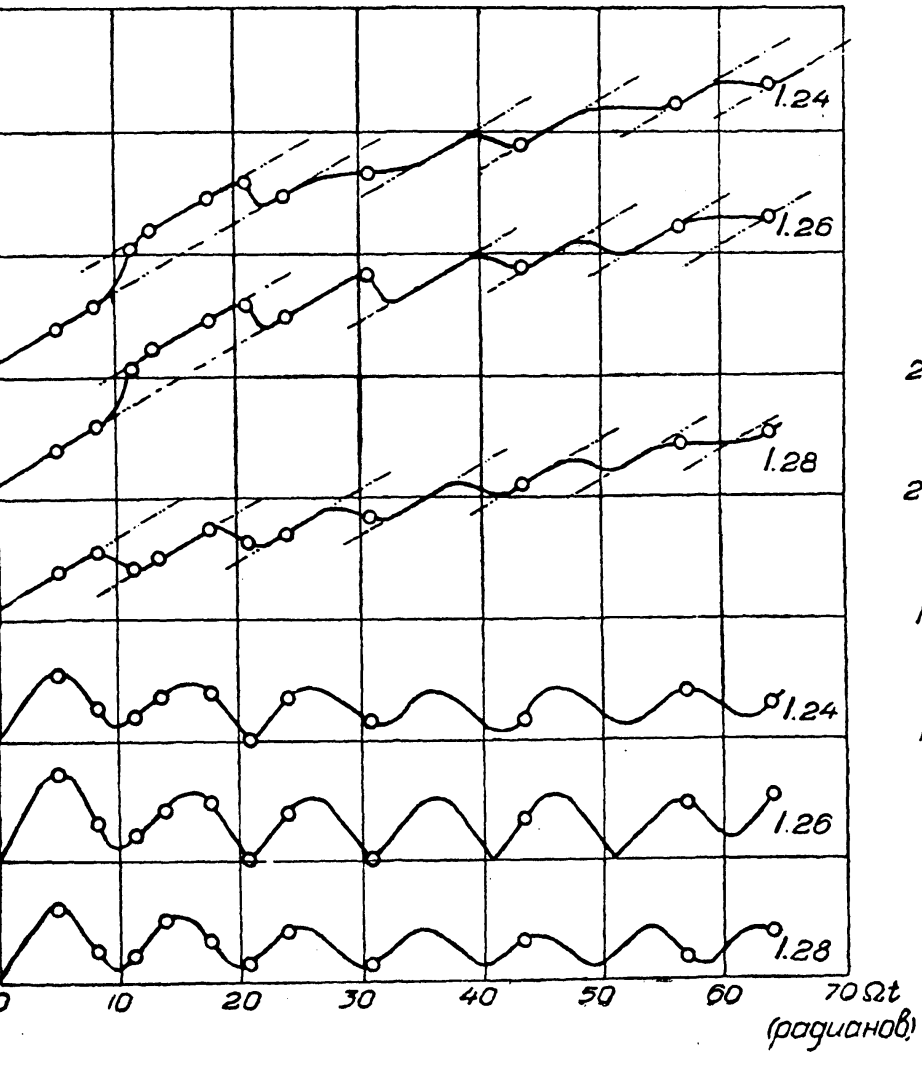
14.3 футо-фунталов[1] при 2470 фут/сек.

и

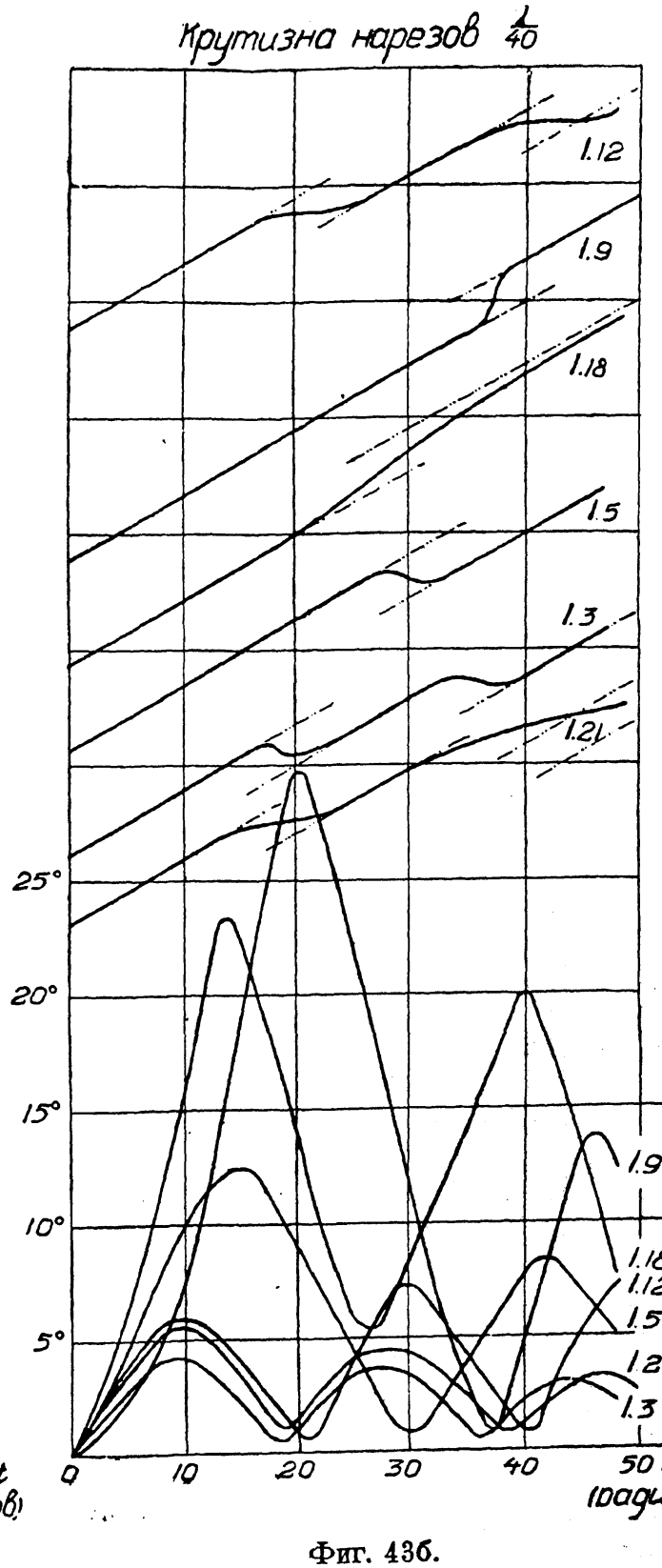
8.9 » » » 1140 »

---

[1] Фунтал есть сила, сообщающая массе в 1 англ. фут ускорение в 1 фут в секунду, т. е. $\frac{1}{32.2}$ веса англ. фута или около 14 г.

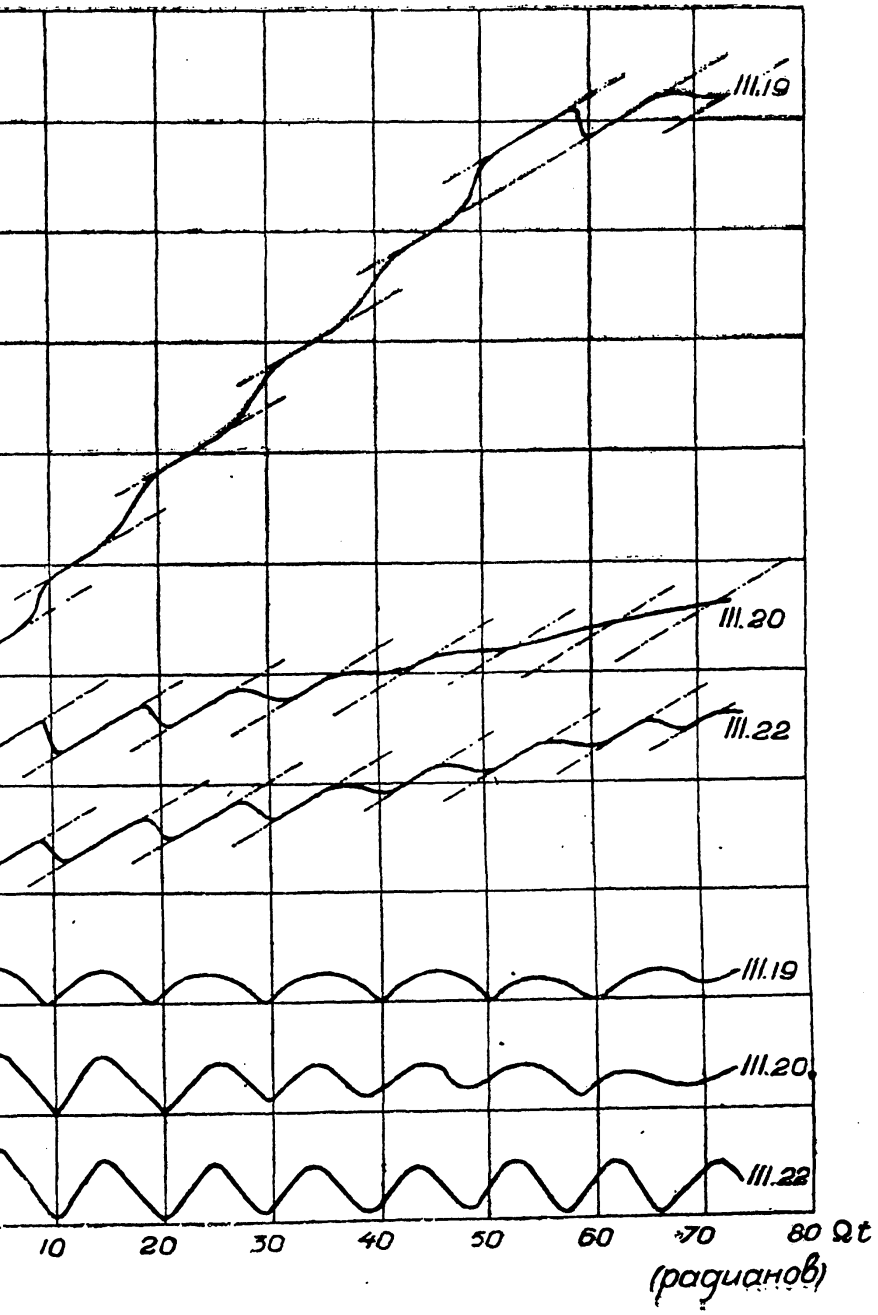


Фиг. 43а.

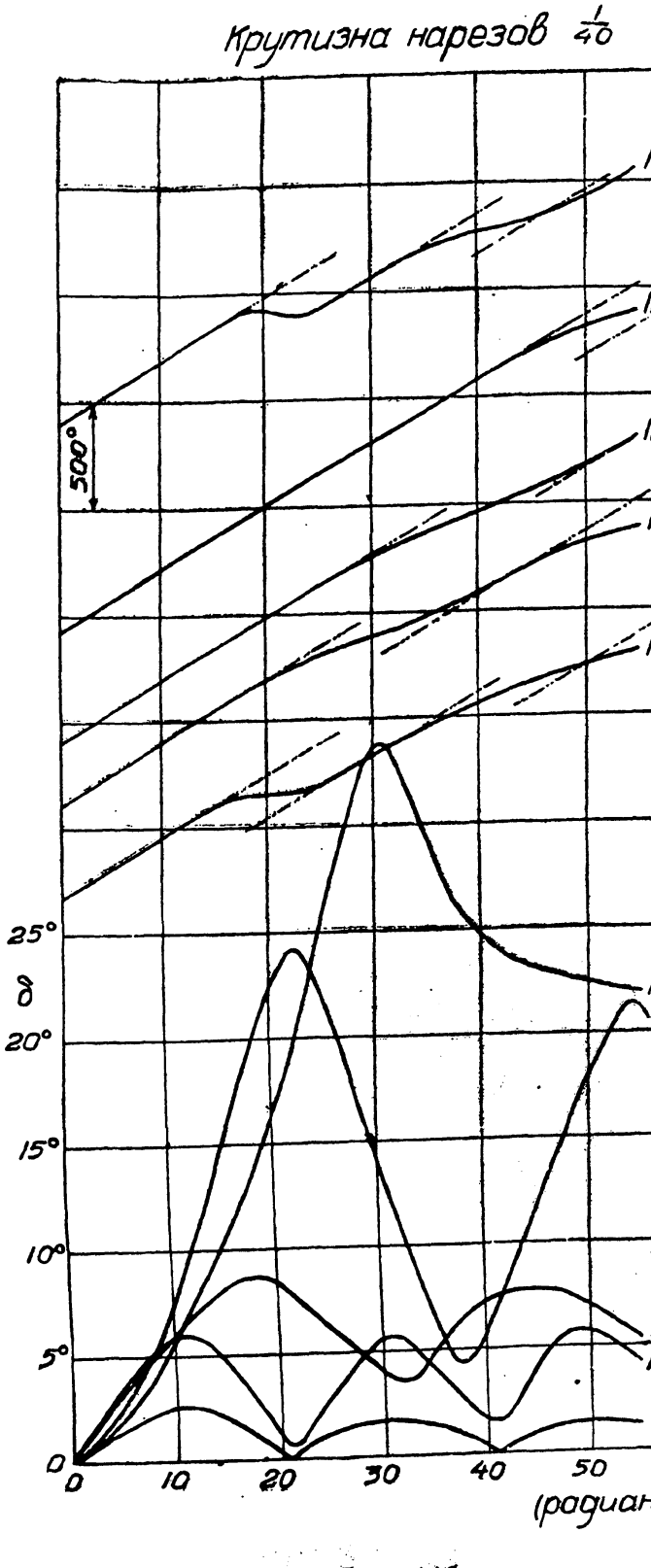


Фиг. 43б.

Тип. тр. А. Н. Крылова, т. IV



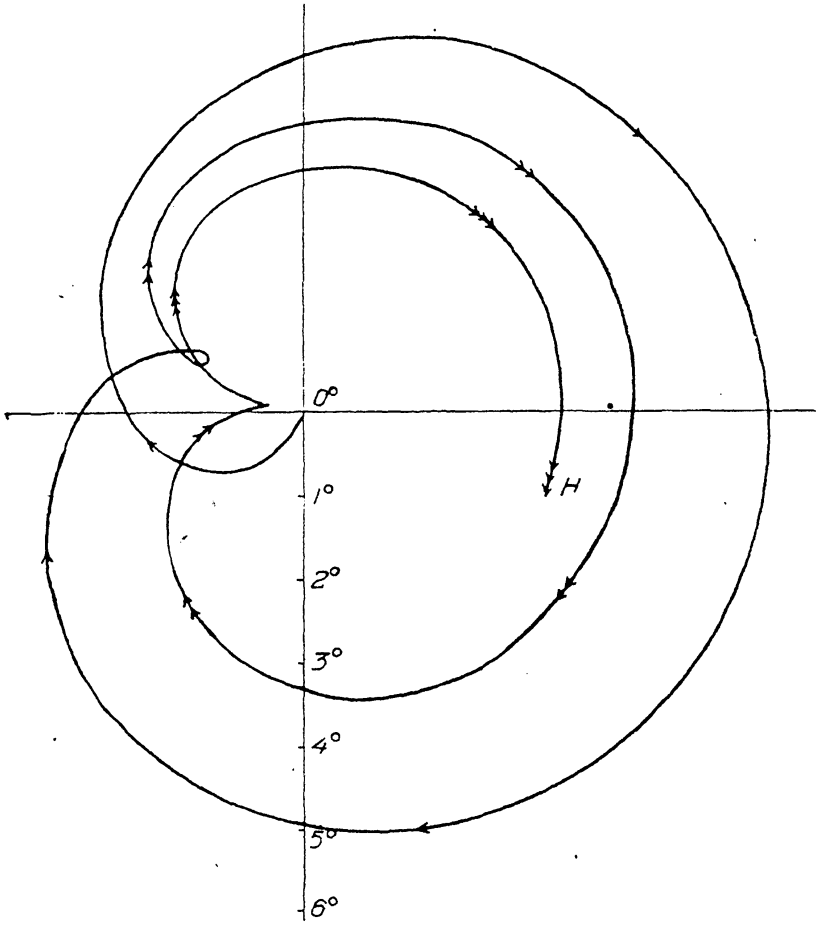
Фиг. 44а.



Фиг. 44б.

Для прочих скоростей можно получить приближенные значения по пропорциональности.

Было также вычислено влияние на движение оси указанных ударов, и оказалось, что приближенные величины его могли быть определены. Вычисляя полный эффект на наблюденную величину s, заметили, что поправка составляла от $2^1/_2$ до $4^1/_2\%$ в различных группах. Эта поправка



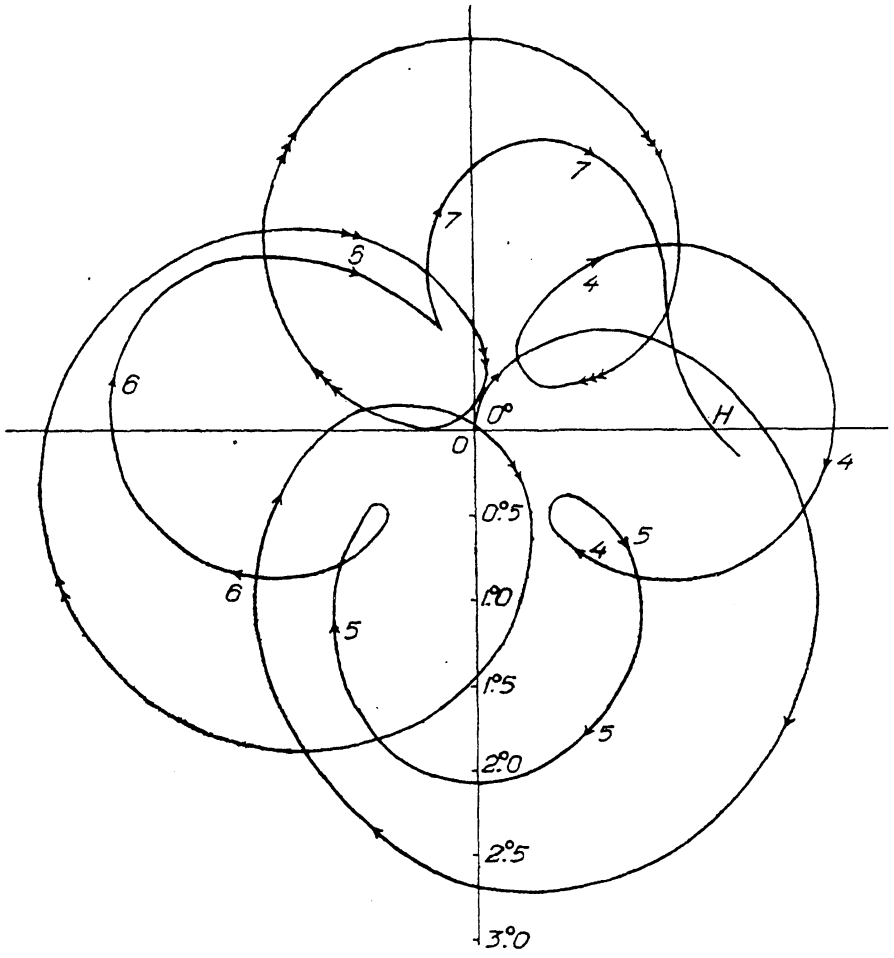
Фиг. 45.

принималась во внимание при составлении табл. IV и фиг. 38 и 39. Числа табл. V такой поправке не подвергались, так как из-за малой их точности этого не стоило делать.

§ 77. Анализ результатов опытов.

В таблицах, приводимых ниже, даны результаты произведенных испытаний. Анализ этих испытаний производится графически: по наблюденным величинам δ и ν строились две отдельные диаграммы, подобные показанным для примера на фиг. 43 и 44, причем за абсциссу принималась величина Ωt, где $\Omega = \frac{Ap_0}{B}$, чтобы эта абсцисса выражалась отвлеченными числами

независимо от выбора единиц. Величину Ω или соответствующий ей период прецессии можно было определять по этим диаграммам двумя способами, дававшими согласные результаты, т. е. или по промежутку между последовательными наибольшими, или наименьшими значениями угла δ, или по уклону прямолинейной части диаграмм, изображающих угол ν (прецессии).



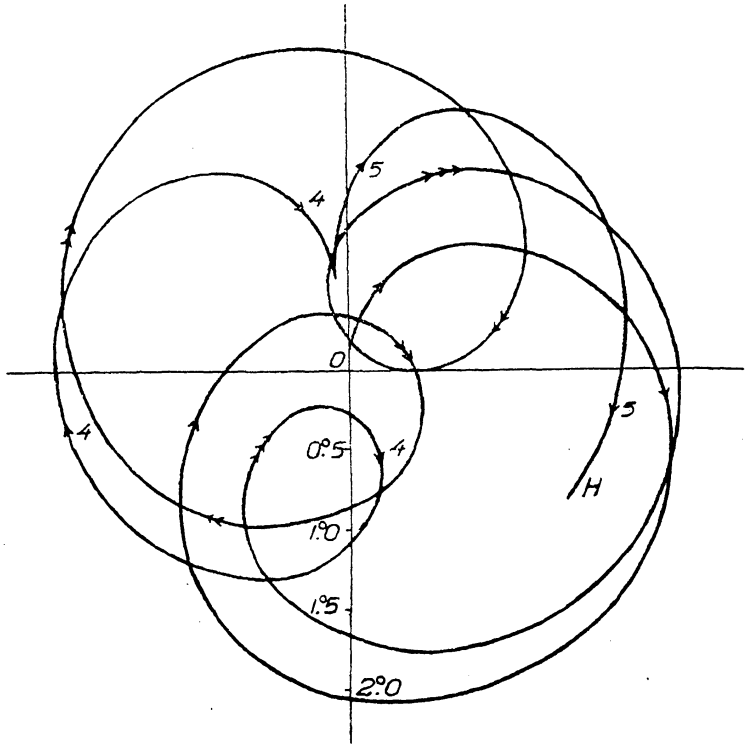
Фиг. 46.

По этим же диаграммам вычерчены для примера и кривые, представляющие путь, описываемый следом оси на плоскости нормалей к траектории; на фиг. 45, 46, 47 приведены для образца типы полученных кривых.

Сводка результатов наблюдений дана, как уже сказано, в следующих таблицах.

Заголовки показанных чисел не требуют пояснений, заметим лишь, что в стлб. 5 даны периоды нутации, т. е. промежутки времени между двумя последовательными минимумами величины δ, изредка между двумя последовательными максимумами. Эти периоды выражены в $\frac{1}{1000}$ долях секунды

с точностью до $\frac{1}{2}$ единицы последнего знака $\left(\frac{1}{2000}\right.$ секунды$\left.\right)$, хотя во многих случаях возможная погрешность и превышает эту величину, но, главным образом, для сравнительно длинных периодов, когда эта погрешность не имеет существенного значения.



Фиг. 47.

Экспликация к табл. VIII

Стлб. 1. № выстрела.

Стлб. 2. Начальная скорость для данного выстрела, в футах в секунду.

Стлб. 3. Плотность воздуха в фунтах на кубический фут и температура в $^\circ F$.

Стлб. 4. Скорость прецессии $\nu' = \frac{1}{2}\Omega = \frac{1}{2}\frac{Ap_0}{B}$, в градусах в секунду.

Верхние числа — вычисленная.

Нижние числа — наблюденная.

Когда показано лишь одно число, то это значит, что разность между вычисленной и наблюденной величиной ничтожно мала.

Стлб. 5. Время T между двумя последовательными наименьшими значениями δ в $\frac{1}{1000}$ секунды.

Стлб. 6. Наибольшие величины угла δ, в градусах.

Стлб. 7. Среднее значение ΩT для каждого выстрела при средней скорости снаряда, показанной в том же столбце.

Стлб. 8. Наименьшие величины углов δ, в градусах.

Стрельбы производились из орудий с кривизною нарезов в 30 и 40 калибров и при скорости в 1589 фут/сек. из обоих.

Таблица VIII

Сводка результатов опытов стрельбы по картонным щитам

1	2	3	4	5	6	7	8
Крутизна нарезов 40 калибров. Тип снаряда I							
I. 11	918	0.0792 43°	2108	252 267 —	2.1 2.5 2.1 (?)	19.10 905	0.0 —
I. 12	918	0.0792 43°	2108	276 262 —	6.1 6.9 7.5	19.79 905	0.4 0.6 —
I. 14	920	0.0807 42°	2113	296 289	7.2 6.4	21.60 905	0.9 1.5(?)
I. 13	931	0.0807 42°	2139	234 260 —	1.5 3.1 5.5	18.44 919	1.0 2.4(?)
I. 5	1565	0.0782 45°	3595	230 —	12.2 8.5	28.85 1539	0.9
I. 6	1565	0.0782 45°	3595	227	13.7 9.5	28.49 1540	0.0
I. 7	1565	0.0782 45°	3595 3375	354	10.5	41.71 1526	2.3
I. 15	2130	0.0807 42°	4892	$2T=$ 213	— 7.5 ? 5.5	18.19 2082	0.4
I. 16	2130	0.0807 42°	4892	$2T=$ 203	— 7.5 ? 5.7	17.33 2085	0.6
I. 1	2167	0.0786 42°	4977	$93^1/_2$ 92 $90^1/_2$	4.5 4.1 3.7	15.98 2104	1.0 0.6 0.6
I. 2	2167	0.0786 42°	4977	112 105 —	7.5 6.3 5.3	18.85 2117	0.0 0.2(?)
I. 3	2167	0.0786 42°	4977	107 $99^1/_2$	4.5 3.5 3.1	17.94 2120	0.3 0.4
I. 4	2167	0.0786 42°	4977	118 $121^1/_2$	4.1 3.0	20.81 2113	0.4 1.4(?)
I. 19	2272	0.0812 40°	5217	$98^1/_2$ $90^1/_2$ —	5.0 4.3 3.0	17 20 2217	0.2 0.3
I. 20	2346	0.0812 40°	5388 5250	$96^1/_2$ $94^1/_2$ —	8.7 7.9 7.1	17.96 2288	0.4 1.0
I. 21	2346	0.0812 40°	5388	99 99 —	5.6 4.0 3.3	18.03 2282	1.0 0.6

(Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8
Тип. II. Форма А. Ц. тяж. впереди							
II. 8	934	0.0807 42°	1960 2020	210 224 —	1.6 3.2 3.8	15.30 928	0.9 0.5
II. 9	934	0.0807 42°	1960	246 228 —	4.5 4.0 4.7	16.22 922	0.3 1.2
II. 10	934	0.0780 46°	1960	254 256 —	6.7 6.8 8.1	17.45 921	0.8 0.5
II. 5	1585	0.0780 46°	3541	147½ 145½ —	4.9 3.7 2.4	18.11 1554	0.7 0.7
II. 6	1585	0.0807 42°	3541	144½ 145½ —	1.2 1.2 1.0	17.92 1555	0.5 ? 0.5 ?
II. 7	1585	0.0780 46°	3541	187 170	3.1 2.2	22.07 1548	0.4 0.3 ?
II. 1	2024	0.0786 42°	4795 4530	99 89½ 91½	3.2 2.5 2.3	14.76 1983	0.7 0.8 0.7
II. 2	2024	0.0786 42°	4795 4625	103 95 87	3.0 2.3 1.9	15.34 1982	0.0 0.1 0.5
II. 3	2024	0.0786 42°	4795 4435	96 89 92	2.9 2.6 2.3	14.29 1984	0.2 0.2 0.2
II. 4	2024	0.0786 42°	4795	98½ 81 85	1.9 1.7 1.8	14.75 1985	0.0 0.0 0.0
Тип. III. Форма А. Ц. тяж. позади							
III. 8	931	0.0807 42°	2450	247 226 —	5.7 5.5 5.8	20.23 919	0.4 1.5
III. 9	931	0.0807 42°	2450	254 216 —	5.0 5.5 4.3	20.00 919	0.4 1.3
III. 10	931	0.0807 42°	2450	232 224 —	5.2 5.5 7.8	19.50 920	0.3 1.5

(Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8
III. 5	1583	0.0780 46°	4166 4100	217 —	8.7 7.8	31.06 1556	3.7
III. 6	1583	0.0780 46°	4166	196 —	9.0 8.2	28.52 1558	3.6
III. 7	1583	0.0780 46°	4166 3980	237 —	5.5 6.3	32.93 1553	2.9
III. 1	2025	0.0785 43°	5331	125 97 —	1.5 1.2 0.8	20.66 1994	— —
III. 2	2025	0.0785 43°	5331	113 97 —	3.7 3.4 3.4	19.54 1995	0.7 1.5
III. 3	2025	0.0785 43°	5331	109 107 —	2.4 1.8 1.3	20.10 1994	0.2 ? 0.5 ?
III. 4	2025	0.0785 43°	5331	106 102 —	2.9 2.1 1.8	19.36 1994	0.0 0.8
Крутизна нарезов 30 калибров. Тип I. Форма А. Снаряд пустой							
I. 22	1119	0.0811 38°	3429	91½ 86½ 82 86 79½ 87	2.1 1.9 1.9 — 1.9 2.0	10.07 1089	0.1 0.0 0.3 ? — 0.2 —
I. 23	1119	0.0811 38°	3429	79 91 87 86 83½ 84½	3.0 2.4 2.2 — 2.0 1.8	10.34 1090	0.4 0.1 0.4 — 0.4 —
I. 24	1119	0 0811 38°	3459	85 90 86 84½ 84½ 84	2.8 2.4 2.2 — 2.1 2.1	10.27 1090	0.4 0.2 0.4 — 0.6 0.9 (?)
I. 25	1326	0.0811 38°	4061	74½ 71 69 68½ 71 70 —	2.0 1.8 1.9 — 1.6 1.4 2.0	9.91 1280	0.0 0.0 0.0 — 0.0 0.8 ?

(Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8
I. 26	1326	0.0811 38°	4061	71 74 71 73 66½ 69½	3.6 2.8 2.6 — 2.6 2.2	10.04 1285	0.4 0.1 0.0 — 0.1 0.8
I. 27	1563	0.0805 36°	4786	60½ 55½ 59 60½ 55½ 56½ —	3.8 3.7 3.5 — 2.9 3.3 2.5	9.59 1515	0.3 0.3 ? 0.2 — 0.5 0.8
I. 28	1563	0.0805 36°	4786	59 59 59 59 57½ 54½ —	3.1 2.6 2.1 — 1.9 2.0 2.1	9.66 1515	0.4 0.4 0.3 — 0.2 0.5 ?
				Тип. II. Форма A. Ц. тяж. впереди			
II. 17	1119	0.0811 38°	3168 3128	92½ 90 88½ 91 91½ —	2.8 2.75 2.6 — 2.0 1.7	9.85 1092	0.0 0.0 0.6 0.5 0.7 —
II. 18	1119	1.0811 38°	3168 3128	88 94½ 87½ 89 91 —	3.3 2.8 2.6 — 2.3 2.2	9.88 1093	0.1 0.0 0.6 0.7 0.7 —
II. 19	1119	0.0811 38°	3168 3128	88 89 89½ 90 89½ 91½	2.9 2.4 2.0 — 2.0 2.1	9.82 1088	0.1 0.0 0.3 0.4 0.5 0.5
II. 24	1292	0.0805 36°	3709	76 74 72 76 75 76	2.7 2.9 2.7 — 2.4 3.0	9.70 1259	0.15 0.3 0·2 0.3 0.7 0.5

(Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8
II. 22	1589	0.0819 36°	4738	52 51 54½ 56½ 54½ 52 55½	2.1 1.9 1.4 1.4 — 1.1 1.4	8.93 1543	0.5 0.1 ? — — 0.5 — 0.1
II. 23	1589	0.0819 36°	4738	54: пять периодов в 276 секунд	2.3 2.1 — — — 1.9 1.6	9.13 1548	0.3 0.1 — — — — 0.1
Тип. III. Форма A. Ц. тяж. позади							
III. 17	1119	0.0801 38°	3928	67 75 71 73 71 74 77	1.8 1.8 2.2 2.2 — 1.8 1.7	10.08 1091	0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
III. 18	1119	0.0811 38°	3928	63 71 75 77 72 71½ 67	1.4 1.4 1.4? 1.8 — 1.4 1.3	9.91 1091	0.2 — 0.1 — 0.2 0.1 0.1
III. 19	1119	0.1811 38°	3928	64 72 77 74 74 71 77	1.6 1.4 1.3 1.4 — 1.1 1.1	10.17 1091	0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 —
III. 20	1292	0.0805 36°	4534	62 59 62 58 63 63 60 —	2.7 2.7 2.2 2.2 — 2.0 1.6 1.6	9.63 1261	0.0 0.1 0.5 — 1.0 0.5 0.9
III. 21	1292	0.0805 36°	4534	60 62 59 59 61 59 60	3.6 3.2 2.7 2.6 — 2.3 2.1	9.50 1262	0.0 0.0 0.2 — 0.7 0.5 0.6

(Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8
III. 22	1567	0.0805 36°	5501	42 50 49 49 50 49 46 —	3.5 2.9 2.8 2.4 — 2.6 — 2.3	9.38 1525	0.1 0.2 0.4 — 0.4 0.3 0.3
III. 23	1567	0.0805 36°	5501	51 ? 42 51 47 48? 51? 49?	1.7? 1.6 1.4 1.0 — 1.0 — 1.0	9.22 1526	0.0 0.0 0.0 — — 0.0 0.0 0.0
Тип. IV. Форма B.							
IV. 21	900	0.0811 38°	2431	116 120 122 116 126 —	1.7 2.8 2.3 — 2.7 3.5	10.27 884	0.6 1.5 — 1.0 2.0 ?
IV. 22	900	0.0811 38°	2431	124 128 119 110 119 —	3.0 2.8 1.9 — 2.3 3.0	10.10 884	0.3 0.2 — 0.4 0.7
IV. 23	900	0.0811 38°	2431	— 112 120 114 118 —	1.7 ? 1.7 2.6 — 2.0 2.0	9.84 884	0.2 0.8 — 0.8 1.0 —
IV. 13	1078	0.0811 38°	2911	113 128 125 113 —	2.0 1.8 1.5 ? 1.6 2.0	12.39 1059	0.3 0.4 0.6 0.9
IV. 14	1078	0.0811 38°	2911	109 123 110 105 —	1.6 1.5 1.8 1.6 1.7	11.45 1060	0.2 0.3 — 0.3
IV. 15	1078	0.0811 38°	2911	107 121 118 108 —	2.2 2.1 2.2 1.7 1.8	11.76 1060	0.3 0.1 — 0.5

(Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8
IV. 16	1547	0.0811 38°	4178	82 78 67 75 74	1.6 1.6 1.4 1.0 0.9	10.72 1503	0.1 0.0 — 0.0 0.1
IV. 17	1547	0.0811 38°	4178	83 75 75 73 71	3.5 3.2 2.8 1.9 2.6	10.72 1503	0.1 0.0 ? — 1.2 0.9 ?
IV. 18	1547	0.0811 38°	4178	83 80 75 73 —	4.2 3.9 3.3 3.2 3.1	11.09 1509	0.1 0.0 — 0.4 1.1
IV. 19	1547	0.0811 38°	4178	77 75 73	4.0 3.4 3.4	10.96 1496	
IV. 20	1547	0.0811 38°	4178	73 75 72	3.3 2.5 2.2	10.69 1497	
IV. 24	2101	0.0805 36°	5675	55 57 51 55 53	4.6 3.8 3.5 3.5 3.4	10.70 2045	0.2 0.3 — 0.5 1.0
IV. 25	2112	0.0805 36°	5705	56 55 52 55 54	2.2 2.2 1.3 1.2 1.3	10.70 2073	0.0 ? 0.0 — 0.0 ? 0.8
IV. 26	2149	0.0805 36°	5805	50 53 54 53 54	2.4 2.0 2.0 1.7 1.2	10.60 2093	0.1 0.0 — — 0.3

На основании обработки приведенных в этой таблице результатов стрельб составлена табл. IX (стр. 250), в которой приведены значения коэффициента устойчивости и опрокидывающей пары, пользуясь следующими формулами и обозначениями:

Опрокидывающая пара $\mu \sin \delta$.

Коэффициент устойчивости $s = \frac{\Omega^2 B}{4\mu}$.

v — средняя скорость, в футах в секунду.

Δ — плотность воздуха, в фунтах на куб. фут.

a — скорость звука, в футах в секунду.

$f_n\left(\frac{v}{a}\right) = \frac{\mu}{\Delta \cdot v^2 \cdot R^3}$ = коэффициент опрокидывающей пары.

Стлб. 1. № выстрела или группы выстрелов.

Стлб. 2. Крутизна нарезов.

Стлб. 3. Величина s, выведенная из наблюдений.

Стлб. 4. Среднее значение v, соответствующее значениям s.

Стлб. 5. Значения μ.

Стлб. 6. Значения $f_n\left(\frac{a}{a}\right)$.

Стлб. 7. Значения $\frac{v}{a}$.

Стлб. 8. Полное процентное среднее отклонение значений s и μ в группе.

Коэффициент устойчивости $s = \frac{\Omega^2 B}{4\mu}$ связан с коэффициентом k формулы

$$Ap_0 = 2k\sqrt{hR\rho B}$$

соотношением

$$s = k^2$$

ибо $\Omega = Ap_0$ и $\mu = hR\rho$, следовательно по значениям s сейчас же получаем значения коэффициента k, пользуясь которыми можно определить и множитель h.

Для вычисления деривации, пользуясь полученными результатами, авторы выводят довольно сложную формулу, при помощи которой по элементам плоской траектории, коэффициенту устойчивости снаряда во всякий данный момент и производной по времени от угла наклонения касательной вычисляется деривация.

Не приводя этой формулы, дадим таблицы: X — в которой приведены элементы плоской траектории, и XI — соответствующей деривации, а затем по данным этих таблиц рассчитаем деривацию по нашей формуле и сличим полученные результаты.

Эти таблицы следующие:

Таблица IX

Значения коэффициента устойчивости снаряда и опрокидывающей пары, выведенные по анализу движения *устойчивых* снарядов

1	2	3	4	5	6	7	8
I. 11. 12		1.113	905	1220	9.58	0.824	
I. 14	1/40	1.087	906	1250	9.71	0.825	4.1
I. 13		1.131	919	1230	9.26	0.837	
I. 22—24	1/30	1.61	1090	2230	11.85	0.996	3.2
I. 25—26	1/30	1.66	1283	3030	11.62	1.173	1.7
I. 27 · 28	1/30	1.74	1515	4000	11.09	1.388	1.1
I. 5 · 7	1/40	1.005	1535	3920	10.89	1.394	0.9
I. 15 · 16		1.137	2084	6410	9.36	1.897	
I. 1	1/40	1.180	2104	6390	9.40	1.916	6.7
I. 2— 4		1.118	2117	6750	9.80	1.927	
I. —19	1/40	1.152	2217	7190	9.22	2.023	1.9
I. 20 · 21		1.133	2285	7800	9.41	2.085	
II. 8—10	1/40	1.172	922	1170	8.71	0.840	4.9
II. 17—19	1/30	1.69	1091	2000	10.46	0.997	0.8
II. 24	1/30	1.72	1259	2700	10.86	1.153	—
II. 5— 7	1/30	1.21	1553	3680	9.98	1.408	4.7
II. 22 · 23	1/30	1.94	1546	3800	9.95	1.416	3.8
II. 1		1.216	1983	5506	9.12	1.804	
II. 2	1/40	1.200	1982	5689	9.42	1.803	
II. 3		1.232	1984	5320	8.80	1.805	
II. 4		1.220	1985	5809	9.59	1.806	
III. 8—10	1/40	1.107	919	1520	11.41	0.837	0.9
III. 17—19	1/30	1.64	1091	2570	13.66	0.997	3.3
III. 20 · 21	1/30	1.76	1262	3200	12.79	1.156	2.1
III. 22 · 23	1/30	1.84	1526	4500	12.32	1.398	2.9
III. 5 · 7	1/40	1.035	1556	4410	11.96	1.411	0.6
III. 1— 4	1/40	1.109	1994	7020	11.52	1.814	1.4
IV. 21—23		1.64	884	1270	10.25	0.808	2.6
IV. 13—15	1/30	1.39	1060	2140	12.06	0.969	5.0
IV. 16—20		1.505	1502	4070	11.41	0.373	3.7
IV. 24		1.525	2045	7420	11.29	1.874	
IV. 25	1/30	1.525	2075	7500	11.11	1.899	1.0
IV. 26		1.54	2093	7680	11.16	1.917	

Основные данные к табл. X

Начальная скорость 2000 фут/сек.
Центр тяжести 4.88 дюйма от дна.
Вес снаряда 16.02 *lb*.
Момент инерции { *A* . . . 0.1329 *lb*·*ft*²
B . . . 1.1555 »
Ω { при крутизне $^1/_{30}$ . . . 192.7 в секунду
» » $^1/_{40}$ . . . 144.5 »
Баллистический коэффициент 1.75.
Стлб. 1. Время *t*, в секундах
Стлб. 2. Скорость v_1, в футах в секунду.
Стлб. 3. Наклонение траектории θ_1 градусов.
Стлб. 4. Горизонтальное расстояние *X* футов.
Стлб. 5. Высота *Y* футов.

Таблица X

Элементы плоских траекторий для снарядов типа А при углах возвышения 50° и 30°

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Угол возвыш. 50°					Угол возвыш. 30°				
0	2000	50° 0′	0	0	0	2000	30° 0′	0	0
1	1720	49 21	1199	1413	1	1726	29 8	1614	917
2	1506	48 36	2254	2628	2	1515	28 8	3033	1692
3	1342	47 44	3201	3686	3	1352	26 59	4300	2354
4	1218	46 45	4068	4624	4	1230	25 42	5454	2926
6	1059	44 28	5648	6241	6	1075	22 45	7538	3867
8	959	41 48	7116	7619	8	985	19 24	9455	4608
10	877	38 43	8514	8805	10	916	15 42	11264	5182
12	807	35 13	9857	9819	12	860	11 40	12988	5603
14	746	31 15	11155	10671	14	816	7 19	14639	5881
16	693	26 45	12411	11369	16	780	2 43	16227	6021
18	647	21 44	13631	11921	18	751	— 2 7	17755	6030
20	609	16 10	14817	12330	20	728	— 7 5	19228	5912
24	557	3 40	17098	12738	24	703	—17 11	22017	5314
28	537	— 9 50	19266	12624	28	700	—26 55	24608	4261
32	547	—22 50	21331	12013	32	712	—35 51	27011	2790
36	579	—34 25	23293	10930	36	735	—43 40	29228	938
40	627	—43 54	25151	9403					
44	681	—51 30	16902	7466					
48	735	—57 32	28539	5157					
52	786	—62 23	30057	2521					
55	818	—65 25	31114	359					

Таблица XI

Деривация при углах возвышения 50° и 30° и крутизне нарезов $^1/_{30}$

Стлб. 1. Время, в секундах.
Стлб. 2. Коэффициент устойчивости s.
Стлб. 3. $-4s \cdot \frac{\theta_1'}{\Omega}$
Стлб. 4. Деривация Z футов.
Стлб. 5. Азимут $A = \operatorname{arctg}\frac{Z}{X}$.

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Угол возвышения 50°					Угол возвышения 30°				
0	1.945	0.00042	0.0		0	1.945	0 00056	0.0	
1	2.598	62	0.2		1	2.55	86	—	
2	3.334	98	0.8		2	3.21	122	1.1	
3	4.189	139	1.8		4	4.79	234	4.1	
4	5.129	192	3.1		6	8.43	368	9.5	
6	7.123	321	7.5	0° 5′	8	9.11	581	19.2	0° 7′
8	10.95	569	15.9		10	11.16	785	34.4	
10	14.60	868	29.1	0°12′	12	14.01	1063	55.3	0°15′
12	18.39	1240	47.3	0°16′	14	15.75	1276	82.0	
14	22.20	0.01693	70.4		16	17.48	1495	114.3	0°24′
16	26.33	0.0227	98.6	0°27′	18	18.85	1671	152.0	
18	30.88	297	133		20	19.92	0.01810	195.0	0°35′
20	35.16	372	173		24		0.0191	297	0°46′
24	42.63	511	276	0°55′	28		0.0174	419	0°59′
28	45.87	562	409	1°13′	32		0.0143	557	1°11′
32	43.24	486	573	1°32′	36		0.0110	708	1°23′
36	37.11	353	762						
40	30.11	231	971	2°12′					
44	24.02	0.0147	1190						
48			1415						
52			1637						

Для вычисления деривации снаряда главнейшею данною является отношение $f_L : f_M$, выраженное в функции $\frac{v}{a}$. Это отношение для значений $\frac{v}{a} < 0.7$ получено из наблюдений, произведенных в воздушной трубе, для значений $\frac{v}{a} > 0.7$ — по опытам стрельбы по картонным щитам.

Полученные результаты представлены графически на фиг. 48.

Воспользуемся приведенными в табл. X и XI данными и рассчитаем деривацию по формуле

$$z = k \int_0^t \varphi dt$$

данной мною в § 55.

Вычисление по этой формуле располагается как показано в табл. XII и XIII.

Таблица XII

1	2	3	4	5	6
t	φ	Суммы (2) попарно	Суммы (3) сверху	$z = k.$ (4)	z по табл. XI
0	0°00′		0°0′	0.0	0.0
		3°15′			
4	3 15		3 15	3.8	3.1
		11 27			
8	8 12		14 42	17	15.0
		22 59			
12	14 47		37 41	44	47.3
		38 02			
16	23 15		75 43	88	98.6
		57 05			
20	33 50		132 48	154	173
		80 10			
24	46 20		212 58	247	276
		106 10			
28	59 50		319 08	370	409
		132 45			
32	72 55		451 53	524	573
		157 20			
36	84 25		609 13	707	762
		178 19			
40	93 54		787 32	913	971
		194 24			
44	101 30		981 56	1125	1190
		209 02			
48	107 32		1190 58	1382	1415
		219 55			
52	112 23		1410 53	1637	1637

$$k = \frac{1637}{1410.9} = 1.161$$

Таблица XIII

1	2	3	4	5	6
t	φ	Суммы (2) по парно	Суммы (3) сверху	$z = k.$ (4)	z по табл. XI
0	0°00′		0°00′	0.0	0.0
		4°18′			
4	4 18		4 18	5.0	4.1
		14 54			
8	10 36		19 12	22.4	19.2
		28 56			
12	18 20		48 08	56.2	55.3
		45 37			
16	27 17		93 45	109	114.3
		64 22			
20	37 05		158 07	184	195
		84 16			
24	47 11		242 23	282	297
		104 06			
28	56 55		346 29	403	419
		122 46			
32	65 51		469 15	545	557
		139 31			
36	73 40		608 46	708	708

$$k = \frac{708}{608.8} = 1.163$$

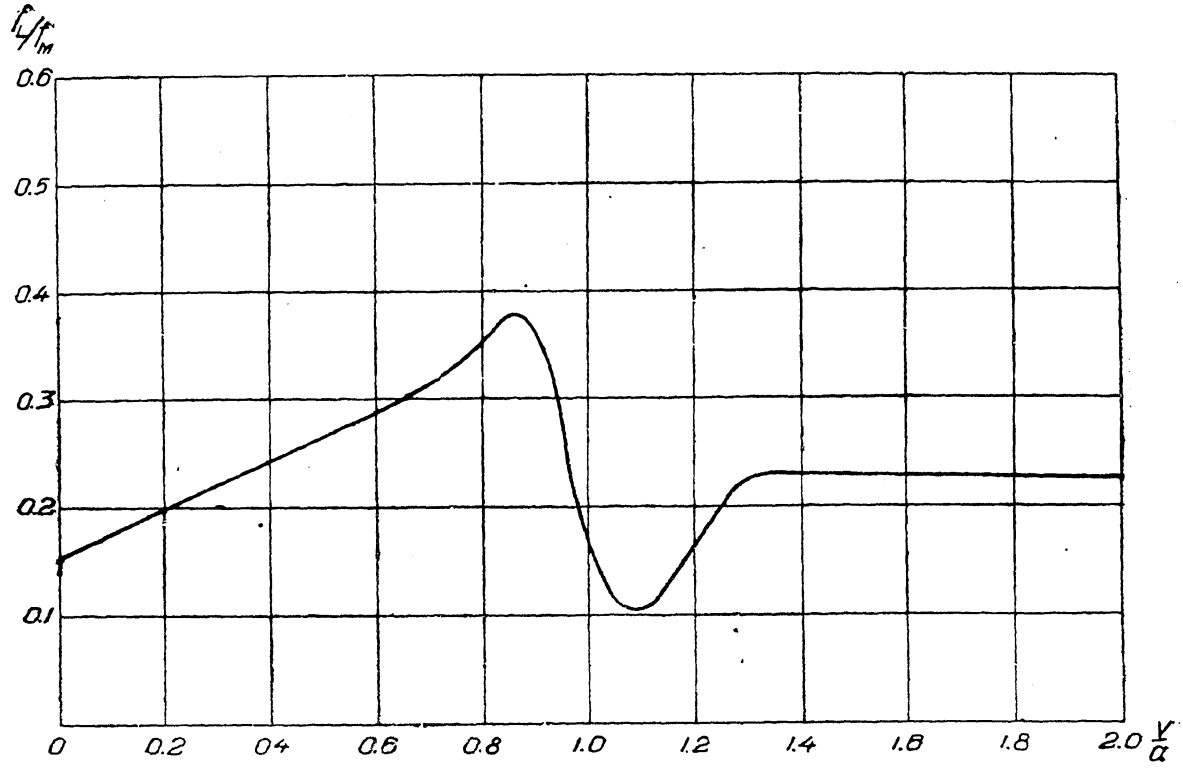
Сличение чисел стлб. 5 и 6 этих таблиц показывает наглядно степень точности нашей простой формулы — погрешность деривации, по ней рассчитанной, не превышает 0.002 дистанции в рассматриваемых двух примерах, но едва ли и самая английская формула, с которою мы сравниваем нашу, может считаться абсолютно точной.

Этот результат показывает еще раз в какой мере изложенная в главах I и II теория наша подтверждается английскими опытами.

В статье английских авторов приведено также следующее сличение наблюденной величины азимутов и вычисленной для орудия с крутизною нарезов в 30 и в 40 калибров.

Это сличение показывает, насколько велики случайные разности (главным образом вследствие ветра) вычисленных и наблюденных значений азимута. Как видно, эти отклонения в несколько раз превышают разницы между расчетом по данной мною формуле и по английской, следовательно наша формула столь же пригодна для практических расчетов, как и английская, но зато наша гораздо проще.

На основании всего вышеизложенного можно высказать следующие общие заключения.



Фиг. 48.

Таблица XIV

Крутизна 30 калибров

Угол возвышения	Среднее время полета, сек.	Набл. азимут	Вычисл. азимут
		минуты дуги	
50°	10.9	15′9	13′8
	23.9	53 6	54 8
	33.3	96 4	95 0
	41.3	130 5	138 6
50°	6.99	31 8	6 0
	15.03	25 2	24 7
	26.08	51 9	64 2
30°	10.04	9 8	10 0
	20.6	32 5	36 5
	27.9	58 3	57 5
30°	13.2	18 5	17 4
	22.52	30 7	41 9

Крутизна 40 калибров

Угол возвышения	Среднее время полета, сек.	Набл. азимут	Вычисл. азимут
		минуты дуги	
50°	10.2	12′0	9′2
	22.9	29 8	38 0
	31.0	60 5	65 1
	39.1	78 2	95 4
50°	6.33	22 8	4 0
	14.07	19 7	16 6
	24.93	42 5	53 8
30°	9.58	15 6	7 6
	19.35	15 5	24 8
	25.95	27 0	38 9
30°	13.02	22 5	13 0
	22.05	27 6	30 4

Общие заключения

Изложенное в главе III исследование вращательного движения снаряда опытами, произведенными в Англии, вполне подтверждает теорию этого движения, изложенную в главах I и II, и приводит к таким заключениям:

1°) Условие устойчивости снаряда, выражаемое неравенством

$$Ap_0 > \sqrt{4hR\rho B}$$

хорошо оправдывается опытами.

2°) Чтобы снаряд «следил осью» за касательной к траектории, ему не следует придавать избыточную устойчивость, а лишь достаточную, так что крутизну нарезов надо определять исходя из формулы

$$Ap_0 = 2k\sqrt{hR\rho B}$$

и брать величину k около 1075.

3°) При производстве расчета плоской траектории, если применять общую методу приближенного интегрирования уравнений, можно получить попутно, без всякой затраты лишнего труда, все элементы, необходимые для расчета отклонений оси снаряда от касательной к траектории, происходящих от постепенного понижения касательной.

По этим элементам полезно делать поверительный расчет того, в какой мере «ось снаряда следит за касательной».

4°) По тем же элементам рассчитывается деривация во все время полета, по весьма простой формуле.

5°) Желательно произвести опыты стрельбою по картонным щитам, чтобы определить величину h, входящую в выражение опрокидывающей пары, для снарядов принятых у нас типов.

6°) Желательно, наблюдая азимуты разрывов теодолитом, проверить расчетную величину деривации, чтобы убедиться, в какой мере существующие и вновь предложенный мною способы расчета деривации согласуются с действительностью, и определить необходимые коэффициенты.

7°) Желательно изучить в аэродинамической трубе, напр. ЦАГИ, систему сил, действующих на снаряд во время полета, когда его ось не совпадает с касательной. Это исследование даст все необходимые элементы для расчета вращательного движения снаряда при скоростях его полета, меньших скорости звука, т. е. при больших углах возвышения для частей траектории, смежных с ее вершиною, т. е. именно там, где ось снаряда больше всего отходит от касательной и где непосредственное наблюдение невозможно.

ПРИБАВЛЕНИЕ I

Вычисление траекторий

Разрабатывая методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, я взял, как один из примеров, вычисление траектории снаряда.

В июле 1920 г. я доложил предложенный мною способ вычисления в одном из заседаний Артиллерийского отдела НТК и 8 сентября того же года в заседании Академии Наук.

Этот способ, в несколько переработанном виде, вошел и в изданное Российской железнодорожной миссией в 1923 г. в Берлине отдельною книжкою мое исследование «Приближенное численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений».

В 1927 г. я имел случай беседовать по вопросу о численном интегрировании уравнений с одним из знаменитейших современных математиков M. J. Hadamard'ом, который, ознакомясь с моим изложением этого вопроса, пожелал ввести его в читаемый им курс анализа в École Polytechnique в Париже, перевод же этой работы представил для напечатания в «Mémorial de l'Artillérie Française».

Так как все эти издания сравнительно мало доступны, вычисление же траектории снаряда тесно связано с предметом настоящего исследования, то я привожу здесь в несколько дополненном виде тот доклад, который был мною сделан в Академии Наук.

В числе примеров на приближенное численное интегрирование дифференциальных уравнений я даю, между прочим, расчет формы капли. Я взял этот пример потому, что именно в применении к этому вопросу знаменитый астроном Дж. К. Адамс (вычислениями открывший, независимо от Леверрье, — Нептуна) развил в 1855 г. ту методу, которую затем, через 50 лет, вновь развил Штёрмер, не зная о работе Адамса.

Я позволю себе привести и еще некоторые исторические подробности, имеющие интерес для артиллеристов. Эта статья Адамса не вошла в собрание его сочинений, а составляет часть отдельно изданной книги под следующим обстоятельным заглавием: «An attempt to test the theories of capillary action by comparing the theoretical and measured forms of drops of fluid by Francis Bashforth, B. D. late professor of applied mathematics to the advanced class of Royal Artillery officers, Woolwich, and formerly Fellow of St. John's College, Cambridge, with an explanation of the method of integration employed in constructing the tables which give

the theoretical forms of such drops by J. C. Adams, M. A. F. R. S. fellow of Pembroke College and Lowndean professor of Astronomy and Geometry in the University of Cambridge» (Cambridge at the University Press, 1883).

Тот экземпляр этого сочинения, которым я пользовался, поднесен самим Адамсом нашей Академии Наук и находился в открытом для общего пользования II отделении ее Библиотеки с 1883 г., — когда я взял его для прочтения в 1918 г., он оказался *неразрезанным*.

Я нарочно выписал заглавие полностью, чтобы показать, что оба автора суть именно те самые лица, о которых я говорю далее.

Francis Bashforth, B. D., т. е. Bachelor of Divinity — кандидат богословия, с каковым званием сопряжен титул «Reverend» — «Досточтимый», есть тот самый Rev. Bashforth, который изобрел известный многоотметчатый хронограф, с которым он с 1866 по 1869 гг. произвел свои замечательные опыты над сопротивлением воздуха движению артиллерийских снарядов. Эти опыты, по своей полноте и обстоятельности, не превзойдены и доселе и служат основою в этом деле, если доходить до первоисточников. Затем у Башфорта возникли пререкания с O. S. C., т. е. с Ordnance Select Commitee. Для разбора этих пререканий была образована комиссия из «eminent mathematicians»: королевского астронома Д. Б. Эри, проф. Стокса, проф. Адамса и известного исследователя порохов кап. Нобля. Комиссия после 2-летней работы дала высокую оценку хронографу и всей совокупности трудов Башфорта; O. S. C. был упразднен английским способом, т. е. Парламент сократил, при утверждении бюджета, на несколько шиллингов или пенсов содержание его членов, но затем по распоряжению военного министра та же участь постигла и Башфорта. Он оставил Вульвич и от исследования полета снарядов 17-дюймовой стотонной пушки обратился к обмеру до $\frac{1}{10000}$ долей дюйма размеров различных сечений капелек ртути для точного установления их формы, т. е. к продолжению своих работ 1855 г. Наибольшая из этих капелек весила 24 грана (1.5 г), и наибольший радиус ее горизонтального сечения был 0.15825 дюйма и высота 0.11778 дюйма, наименьшая весила 4 грана при радиусе 0.07531 дюйма и высоте 0.08890 дюйма.

Сопоставление обмеренных форм с вычисленными давало величину капиллярной постоянной и служило поверкою теории; скажем здесь же, что согласие получилось изумительное.

Вот формулы для производства этих громадных расчетов и общую методу для численного интегрирования уравнений задачи и развил Адамс.

Ознакомление с этим трудом Башфорта лучше всего характеризует его как превосходнейшего экспериментатора, обладавшего необычайною настойчивостью и тщательностью при производстве измерений, обработка же их свидетельствует об его умении истинно научным образом проверять физические законы; вот почему его опыты над сопротивлением воздуха и их обработка им же самим заслуживают особенного внимания. Фр. Башфорт скончался в 1922 г., в глубокой старости.

Участие Адамса в Комиссии, упомянутой выше, вероятно послужило поводом к тому, что под № 59 в собрании его сочинений находится работа «On Certain Approximate Formulae for Calculating the Trajectories of Shot», т. е. «О некоторых приближенных формулах для вычисления траекторий снарядов». Необходимо заметить, что Адамс был не только знаменитым знатоком и творцом в труднейших областях небесной механики, но и необыкновенным вычислителем, и словам «точный» и «приближенный» он придавал значение иное, нежели мы, техники. Так, вычислив Бернуллиевы числа от 31-го до 62-го, которые выражаются простыми дробями, т. е. с целым числителем и с целым знаменателем, он вычисляет *все* цифры от первой до последней, хотя в наименьшем из числителей их 38, а в наибольшем 133. Он производит затем ряд поверок и, убедившись, что они удовлетворены, он утверждает, что все цифры *верны* и вычисление произведено *точно*, когда же, воспользовавшись этими числами, он вычислил Эйлерову постоянную, а также нужные для ее получения натуральные логарифмы 2, 3, 5, 7, 10 с 273 знаками после запятой, и, произведя проверку, заметил несогласие с 263 цифры, то он этим «*приближением*» не довольствуется, а ищет ошибку, находит и исправляет ее и дает «исправленное» значение модуля логарифмов с 278 знаками, из «которых наверное 272, а вероятно 273, верны».

Сколь ни обширны эти вычисления, но они составляют малую долю тех, которые произведены знаменитым астрономом для установления распределения земного магнетизма, принимая во внимание эллипсоидальный вид земли и разные другие обстоятельства. Результаты этих вычислений занимают большую часть громадного второго тома его сочинений, причем работа эта производилась им около сорока лет.

Сочинения Адамса не пользуются, в виду их специального характера, большим распространением, и вряд ли часто попадаются в руки артиллеристов.

Для полноты характеристики тех лиц, которые упоминаются в настоящем докладе, укажу вкратце и на работы проф. К. Штёрмера.

Профессор университета в Христиании (Осло) К. Штёрмер разработал в ряде статей (свыше 50) математическую теорию северных сияний, в которой все наблюдаемые явления, т. е. вид сияний, место и время их появлений, производимые ими магнитные возмущения и связь с солнечными пятнами, объясняются тем, что сияния представляют собою потоки выбрасываемых солнцем в области пятен частиц электричества, летящих со скоростями, составляющими до $\frac{1}{2}$ скорости света; под действием магнитного поля земли эти частицы попадают в верхние разреженные слои атмосферы, где и вызывают свечение, производя в то же время, подобно электрическому току, вследствие своего движения, и магнитные возмущения.

Для установления этой теории, Штёрмер предпринял громадную вычислительную работу — определение вида траекторий, описываемых в магнитном поле земли частицами электричества, выброшенными солнцем, и нахождение условий их «попадания» в область земной атмосферы. Как видно, это — чисто артиллерийский вопрос. Для этих вычислений Штёрмер развил особый прием численного интегрирования дифференциальных уравнений; по этому приему им самим и его ассистентами вычислено до 150 траекторий по 100 и 120 точек на каждой, что потребовало в течение 2 лет около 5000 рабочих часов и составило около 7500 листов вычислений. Замечу, что некоторые траектории весьма сложного вида — винтовые спирали с несколькими завитками.

Но движение электрических частиц происходит в «эфире» без сопротивления, и метода Штёрмера развита для уравнений второго порядка соответствующего вида, т. е. не содержащих первых производных неизвестных функций, но если ее видоизменить так, чтобы она была применена и вообще, то само собою получается та метода, которую еще за 55 лет перед тем развил Адамс для работы Башфорта.

§ 2. В применении к вычислению траектории снарядов методою Адамса — Штёрмера, в том виде как она изложена в моих статьях, воспользовался В. М. Трофимов в своем докладе Артиллерийской комиссии о вычислении траектории при стрельбе на весьма большие дистанции.

В. М. Трофимов принял при интегрировании за переменную независимую длину дуги траектории, но вычисления становятся проще и симметричнее, если принять за переменную независимую угол наклонения траектории, считаемый от вертикали.

В самом деле, основные уравнения баллистики для «плоской» траектории суть:

$$\frac{P}{g}\frac{du}{dt} = -\rho \sin\varphi \tag{1}$$

$$\frac{P}{g}\cdot\frac{v^2}{r} = P\sin\varphi \tag{2}$$

$$v = \frac{r\,d\varphi}{dt} \tag{3}$$

$$dx = r\sin\varphi\,d\varphi \tag{4}$$

$$dy = r\cos\varphi\,d\varphi \tag{5}$$

где P есть вес снаряда, g — ускорение силы тяжести, v — скорость в момент времени t, r — радиус кривизны траектории в точке (x, y), ρ — сопротивление воздуха, $u = v\cdot\sin\varphi$ — горизонтальная проекция скорости.

Приняв угол φ за переменную независимую и обозначая производные значками, мы имеем:

$$u' = -\frac{\rho}{P}\frac{u}{\sin\varphi} \tag{6}$$

$$x' = \frac{1}{g}\left(\frac{u}{\sin\varphi}\right)^2 \tag{7}$$

$$y' = \frac{1}{g}\left(\frac{u}{\sin\varphi}\right)^2 \operatorname{cotg}\varphi \tag{8}$$

$$t' = \frac{1}{g}\frac{u}{\sin\varphi}\cdot\operatorname{cosec}\varphi \tag{9}$$

Величина ρ выражается формулой

$$\rho = AK(v)\cdot v^2\cdot f(y) \tag{10}$$

причем

$$A = \lambda\pi R^2$$

есть постоянная для данного снаряда величина, R — полукалибр, λ — коэффициент формы, $f(y)$ — относительная плотность воздуха; $K(v)$ и $f(y)$ даются таблицами, выдержка из которых приведена ниже.

Начальные условия таковы: при $\varphi = \varphi_0$ должно быть:

$$\left(\frac{u}{\sin\varphi}\right)_0 = v_0;\quad (x)_0 = 0;\quad (y)_0 = 0;\quad (t)_0 = 0 \tag{11}$$

Для упрощения последующих вычислений напишем уравнения (6) так:

$$\frac{u'}{u} = -\frac{\rho}{P}\operatorname{cosec}\varphi$$

и, обозначая через

$$M = 0.43429$$

модуль обыкновенных логарифмов, положим

$$q = M \log \frac{u_0}{u} = \log_{10} \frac{u_0}{u} \tag{12}$$

тогда

$$q' = -M \frac{u'}{u}$$

и предыдущее уравнение будет

$$q' = \frac{M\varrho}{P} \operatorname{cosec} \varphi \tag{6'}$$

Таким образом система уравнений (6—9) будет:

$$q' = C \cdot K(v) v^2 \cdot f(y) \operatorname{cosec} \varphi \tag{13}$$

$$y' = \frac{1}{g} v^2 \operatorname{cotg} \varphi \tag{14}$$

$$x' = \frac{1}{g} \left(\frac{u}{\sin \varphi} \right)^2 \tag{15}$$

$$t' = \frac{1}{g} \frac{u}{\sin \varphi} \operatorname{cosec} \varphi \tag{16}$$

Эта система сама собою распадается на две: 1) уравнения (13) и (14), содержащие переменную независимую φ и неизвестные функции y и v, причем

$$v = u \operatorname{cosec} \varphi$$

$$q = \log \frac{u_0}{u}$$

так что

$$\log u = \log u_0 - q$$

и 2) уравнения (15) и (16), которые интегрируются сразу в квадратурах после того как u найдено.

Таким образом по методе Адамса—Штёрмера, которая предполагается известной, нам придется интегрировать систему (13) и (14), квадратуры же найдем по более простому приему.

§ **3.** Прежде чем приступить к этому интегрированию, приведем таблицу значений логарифмов функции $K(v)$ и $f(y)$, основываясь на данных «Внешней баллистики» Забудского и труда В. М. Трофимова, сгладив в первой несколько неправильный ход разностей, чтобы облегчить контроль вычислений. Для этого сглаживания мы пользовались частью графической интерполя-

цией, составив чертеж в крупном масштабе, частью таблицами Круппа и таблицею Башфорта.

Таблица I

Log $K(v)$ (скорость v в метрах в секунду, сопротивление ρ — в килограммах)

v	Log $K(v)$	v	Log $K(v)$	v	Log $K(v)$	v	Log $K(v)$	v	Log $K(v)$
1100	$\bar{2}.4843$	720	$\bar{2}.5605$	580	$\bar{2}.5889$	440	$\bar{2}.5955$	365	$\bar{2}.5169$
1050	.4952	710	.5623	570	.5905	430	.5955	360	.4996
1000	.5062	700	.5642	560	.5919	425	.5955	355	.4806
950	.5169	690	.5661	550	.5930	420	.5937	350	.4609
900	.5273	680	.5680	540	.5938	415	.5900	345	.4410
850	.5372	670	.5700	530	.5944	410	.5853	340	.4210
800	.5465	660	.5720	520	.5949	405	.5802	335	.4010
790	.5482	650	.5740	510	.5953	400	.5749	330	.3810
780	.5499	640	.5761	500	.5955	395	.5696	325	.3610
770	.5516	630	.5782	490	.5955	390	.5643	320	.3410
760	.5533	620	.5803	480	.5955	385	.5583	315	.3210
750	.5551	610	.5824	470	.5955	380	.5511	310	$\bar{2}.3010$
740	.5569	600	.5846	460	.5955	375	.5421		
730	$\bar{2}.5587$	590	$\bar{2}.5869$	450	$\bar{2}.5955$	370	$\bar{2}.5306$		

Таблица II

Log $f(y)$ (y в километрах)

y	Log $f(y)$	y	Log $f(y)$	y	Log $f(y)$	y	Log $f(y)$	y	Log $f(y)$
0	0.0000	5	$\bar{1}.7551$	10	1.4772	15	$\bar{1}.1430$	20	$\bar{2}.7993$
1	$\bar{1}.9533$	6	.7024	11	.4150	16	$\bar{1}.0719$	21	.7324
2	.9053	7	.6484	12	.3502	17	$\bar{1}.0000$	22	.6744
3	.8561	8	.5933	13	.2833	18	$\bar{2}.9294$	23	.5964
4	$\bar{1}.8062$	9	$\bar{1}.5366$	14	$\bar{1}.2148$	19	$\bar{2}.8633$	24	$\bar{2}.5284$

§ 4. Метода численного интегрирования дифференциальных уравнений, развитая Адамсом, состоит в применении следующего процесса.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y)$$

и начальные условия: при $x = a_0$ должно быть $y = b_0$.

Задача численного интегрирования состоит в том, чтобы, задав какой-либо достаточно малый табличный промежуток h и соответственно ему значения аргумента x, равные:

$$a_0,\ a_0 + h = a_1;\ a_0 + 2h = a_2; \ldots a_0 + nh = a_k; \ldots$$

составить таблицу соответствующих им значений неизвестной функции y:

$$b_0, b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$$

Введем вспомогательную величину

$$\eta_n = f(a_n, b_n) \cdot h$$

и будем составлять следующую таблицу:

n	x	y	Δy	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$
. .							
$n-3$	a_{n-3}	b_{n-3}	Δb_{n-3}	η_{n-3}	$\Delta\eta_{n-3}$	$\Delta^2\eta_{n-4}$	$\Delta^3\eta_{n-4}$
$n-2$	a_{n-2}	b_{n-2}	Δb_{n-2}	η_{n-2}	$\Delta\eta_{n-2}$	$\Delta^2\eta_{n-3}$	$\Delta^3\eta_{n-3}$
$n-1$	a_{n-1}	b_{n-1}	Δb_{n-1}	η_{n-1}	$\Delta\eta_{n-1}$	$\Delta^2\eta_{n-2}$	
n	a_n	b_n		η_n			
$n+1$	a_{n+1}						
. . .							

и положим, что при составлении этой таблицы мы дошли до значения аргумента $x = a_n$ и соответствующего ему $y = b_n$.

По этим значениям по формуле

$$\eta_n = f(a_n, b_n) \cdot h$$

вычислили η_n, вписали его в свое место и заполнили нижнюю косую строку разностей, т. е. вписали в свое место числа:

$$\Delta\eta_{n-1},\ \Delta^2\eta_{n-2},\ \Delta^3\eta_{n-3}$$

Само собою разумеется, что эти разности вычисляются как обыкновенно по формулам:

$$\Delta\eta_{n-1} = \eta_n - \eta_{n-1}$$
$$\Delta^2\eta_{n-1} = \Delta\eta_{n-1} - \Delta\eta_{n-2}$$
$$\Delta^3\eta_{n-3} = \Delta^2\eta_{n-2} - \Delta^2\eta_{n-3}$$

причем всякая разность вписывается в промежутке между тех строк, где вписаны те числа, которые для образования этой разности послужили.

Весь вопрос свелся теперь к тому, каким образом приписать в обеих таблицах по одной косой строке снизу. Мы этого достигли бы, если бы каким-нибудь образом вычислили величину Δb_n, ибо тогда, вписав ее в свое место, мы получили бы

$$b_{n+1} = b_n + \Delta b_n$$

затем вычислили бы

$$\eta_{n+1} = f(a_{n+1}, b_{n+1}) \cdot h$$

вписали бы эту величину в свое место, после чего и заполнили бы нижнюю косую строку второй таблицы.

Затем перешли бы к указателю $n + 2$ и т. д.

Для вычисления величины Δb_n служит следующая формула:

$$(*) \qquad \Delta b_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3}$$

причем предполагается, что табличный промежуток h взят столь малым, что разности, порядок коих выше третьего, настолько малы, что при принятой для составления таблиц точности не оказывают влияния на последнюю значущую цифру, помещаемую в таблицах.

Этой формулы (*) выводить не будем, а также лишь на численном примере покажем, каким образом «начинать» составление таблиц, ибо в предыдущем показано лишь как их «продолжать».

Известно, что всякая система обыкновенных дифференциальных уравнений может быть приведена к системе уравнений первого порядка.

Итак, положим, что мы имеем систему двух уравнений первого порядка вида:

$$y' = f(x, y, z)$$
$$z' = \varphi(x, y, z)$$

и начальные условия: при $x = a_0$ должно быть:

$$y = b_0$$
$$z = c_0$$

тогда для численного интегрирования этих уравнений надо ввести вспомогательные величины:

$$\eta_n = f(a_n, b_n, c_n) \cdot h$$
$$\zeta_n = \varphi(a_n, b_n, c_n) \cdot h$$

при понятном обозначении и подобно предыдущему составлять две группы таблиц, — первая группа будет содержать значения:

$$a_n,\ b_n,\ \Delta b_n;\quad \eta_n,\ \Delta\eta_n,\ \Delta^2\eta_n,\ \Delta^3\eta_n$$

вторая группа значения:

$$a_n,\ c_n,\ \Delta c_n;\quad \zeta_n,\ \Delta\zeta_n,\ \Delta^2\zeta_n,\ \Delta^3\zeta_n$$

причем разности Δb_n и Δc_n вычисляются по формулам:

$$\Delta b_n = \eta_n + \frac{1}{2}\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^2\eta_{n-3}$$

$$\Delta c_n = \zeta_n + \frac{1}{2}\zeta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\zeta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\zeta_{n-3}$$

Само собою понятно, каким образом надо поступать при бо́льшем числе неизвестных.

Все подробности вычисления мы поясним на численном примере.

§ **5.** Для этого примера мы возьмем вычисление траектории 12-дюймового (304.8 мм) снаряда, брошенного под углом возвышения 35° ($\varphi_0 = 55°$), с начальною скоростью $v_0 = 800$ м/сек. Мы примем, что снаряд легкий (вес $P = 360$ кг) и с тупой головной частью ($\lambda = 1$), чтобы влияние сопротивления воздуха было возможно большое и все особенности вычисления обнаружились бы с бо́льшею ясностью.

Итак, для нашего расчета имеем:

1°) *Данные:*

$$P = 360;\ v_0 = 800;\ g = 9.81;\ R = 0.1524$$

2°) *Формулы:*

$$\rho = \lambda\pi R^2 K(v)\, v^2 f(y)$$

$$v = u\operatorname{cosec}\varphi$$

$$q = \log\frac{u_0}{u}$$

$$\omega = q' \cdot h = \frac{M\rho h}{P}\operatorname{cosec}\varphi = A \cdot K(v)\, v^2 \cdot f(y)\operatorname{cosec}\varphi$$

$$\eta = hy' = \frac{h}{g}v^2\operatorname{cotg}\varphi$$

$$\Delta q_n = \omega_n + \frac{1}{2}\Delta\omega_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\omega_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\omega_{n-3}$$

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3}$$

Табличный промежуток h берется настолько малым, чтобы член

$$\frac{3}{8}\Delta^3\omega_{n-3}$$

не превосходил 10 единиц 5-го знака $\log u$, величина же

$$\frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3}$$

не превосходила бы 1 м; точность при таком выборе получается более чем достаточная для практики.

Чтобы начать составление таблиц, мы применим способ последовательных приближений.

Имеем начальные значения:

$$\varphi_0 = 55°00'; \quad v_0 = 800; \quad R = 0.1524$$
$$\log u_0 = \log v_0 \sin\varphi_0 = 2.81645$$

Берем в начале:

$$h = 0°15' = 0.0043633$$

тогда имеем для постоянных:

$$A = \frac{\pi R^2 h}{P}\cdot M \qquad B = \frac{h}{g}$$

$\log\pi = 0.49715$	$\log h = \bar{3}.63982$
$2\log R = \bar{2}.36596$	$\operatorname{colog} g = \bar{1}.00833$
$\log M = \bar{1}.63772$	$\log B = \bar{4}.64815$
$\log h = \bar{3}.63982$	
$\operatorname{colog} P = \bar{3}.44370$	
$\log A = \bar{7}.58435$	

или, округляя:

$$\log A = \bar{7}.5844; \quad \log B = \bar{4}.6481$$

Затем заготовляем табличку значений

$$\log A \operatorname{cosec}\varphi \quad \text{и} \quad \log B \operatorname{cotg}\varphi$$

n	φ	log cosec φ	log cotg φ	log A cosec φ	log B cotg φ
0	50°00′	0.08664	$\bar{1}$.8452	7.6710	$\bar{4}$.4933
1	15′	.08531	.8412	.6697	.4893
2	30′	.08401	.8371	.6684	.4852
3	55°45′	0.08271	1.8331	7.6671	$\bar{4}$.4812

и вычисляем ω_0 и η_0:

$$\log A \operatorname{cosec} \varphi_0 = \bar{7}.6710 \qquad \log B \operatorname{cotg} \varphi_0 = \bar{4}.4933$$
$$\log K(v_0) = \bar{2}.5465 \qquad 2 \log v_0 = 5.8062$$
$$2 \log v_0 = 5.8062 \qquad \log \eta_0 = 2.2995$$
$$\log f(y) = 0.0000$$
$$\log \omega_0 = \bar{2}.0237 \qquad \eta_0 = 199.3$$
$$\omega_0 = 0.01056$$

1-е приближение

$$\Delta q_0 = \omega_0 \qquad \Delta y_0 = \eta_0$$
$$\Delta q_0 = \omega_0 = 0.01056 \qquad \Delta y_0 = \eta_0 = 199.3$$
$$q_0 = 0.00000 \qquad y_0 = 0.0$$
$$q_1 = q_0 + \Delta q_0 = 0.01056 \qquad y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 199.3$$
$$\log u_0 = 2.81645$$
$$\log u_1 = \log u_0 - q_1 = 2.80589$$
$$\log \operatorname{cosec} \varphi_0 = 0.08531$$
$$\log v_0 = 2.89120$$
$$v_1 = 778.4$$

2-е приближение

Пользуясь значениями v_1 и y_1, вычисляем ω_1 и η_1, а именно:

$$\log A \operatorname{cosec} \varphi_1 = \bar{7}.6697 \qquad \log B \operatorname{cotg} \varphi_1 = \bar{4}.4893$$
$$\log K(v_1) = \bar{2}.5502 \qquad 2 \log v_1 = 5.7824$$
$$2 \log v_1 = 5.7824 \qquad \log \eta_1 = 2.2717$$
$$\log f(y_1) = \bar{1}.9906 \qquad \eta_1 = 187.0$$
$$\log \omega_1 = \bar{3}.9929$$
$$\omega_1 = 0.00984$$

по этим значениям составляем разности:

$$\Delta\omega_0 = \omega_1 - \omega_0 = -0.00072 \qquad \Delta\eta_0 = \eta_1 - \eta_0 = -12.3$$

и берем затем:

$$\Delta q_0 = \omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega_0 = 0.01056 - 0.00036 = 0.01020$$

$$\Delta q_1 = \omega_1 + \frac{1}{2}\Delta\omega_0 = 0.00984 - 0.00036 = 0.00948$$

$$\Delta y_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 = 199.3 - 6.2 = 193.1$$

$$\Delta y_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\omega_0 = 187.0 - 6.2 = 180.8$$

после чего имеем:

$$q_1 = q_0 + \Delta q_0 = 0.01020$$

$$\log u_1 = \log u_0 - q_1 = 2.80625;\ \log v_1 = 2.89156;\ v_1 = 779.0$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 193.1$$

Значения

$$v_1 = 779.0 \quad \text{и} \quad y_1 = 193.1$$

представляют *второе* приближение для v_1 и y_1.

Затем имеем:

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 193.1 + 180.8 = 373.9$$
$$q_2 = q_1 + \Delta q_1 = 0.01020 + 0.00948 = 0.01968$$

$$\log u_2 = \log u_0 - q_2 = 2.79677;\ \log v_2 = 2.88078;\ v_2 = 760.0$$

Полученные значения

$$v_1 = 779.0 \quad \text{и} \quad y_1 = 193.1$$

представляют второе приближение для v_1 и y_1, значения

$$v_2 = 760.0 \quad \text{и} \quad y_2 = 373.9$$

составляют первое приближение для v_2 и y_2.

3-е приближение

По полученным значениям v_1 и y_1 перевычисляем ω_1 и η_1, и по значениям v_2 и y_2 вычисляем вновь ω_2 и η_2:

$$\log A \operatorname{cosec} \varphi_1 = \bar{1}.6697$$
$$\log K(v_1) = \bar{2}.5502$$
$$2 \log v_1 = 5.7831$$
$$\log f(y_1) = \bar{1}.9910$$
$$\log \omega_1 = \bar{3}.9940$$
$$\omega_1 = 0.00986$$

$$\log B \operatorname{cotg} \varphi_1 = \bar{4}.4893$$
$$2 \log v_1 = 5.7831$$
$$\log \eta_1 = 2.2724$$
$$\eta_1 = 187.2$$

$$\log A \operatorname{cosec} \varphi_2 = \bar{7}.6684$$
$$\log K(v_2) = \bar{2}.5533$$
$$2 \log v_2 = 5.7616$$
$$\log f(y_2) = \bar{1}.9826$$
$$\log \omega_2 = \bar{3}.9659$$
$$\omega_2 = 0.00925$$

$$\log B \operatorname{cotg} \varphi_2 = \bar{4}.4852$$
$$2 \log v_2 = 5.7616$$
$$\log \eta_2 = 2.2468$$
$$\eta_2 = 176.5$$

Таким образом получается таблица:

n	ω	$\Delta\omega$	$\Delta^2\omega$
0	0.01056		
		—70	
1	986		+9
		—61	
2	925		

η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$
199.3		
	—12.1	
187.2		+1.4
	—10.7	
176.5		

Для вычисления исправленных значений Δq_0 и Δy_0 служат формулы:

$$\Delta q_0 = \omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\omega_0$$

$$\Delta y_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_0$$

следовательно будет:

$$\Delta q_0 = 0.10056 - \frac{1}{2}\cdot 70 - \frac{1}{12}\cdot 9 = 0.01020$$

$$\Delta y_0 = 199.3 - \frac{1}{2}\cdot 12.1 - \frac{1}{12}\cdot 1.4 = 193.1$$

$$q_1 = q_0 + \Delta q_0 = 0.01020$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 193.1$$

$$\log u_1 = \log u_0 - q_1 = 2.80625$$

Эти величины не отличаются практически от предыдущих, следовательно в дальнейших поправках для них нет надобности.

Чтобы получить следующее приближение для v_2 и y_2, следует принять, что вторые разности постоянны и применить формулы:

$$\Delta q_1 = \omega_1 + \frac{1}{2}\Delta\omega_1 - \frac{1}{12}\Delta^2\omega_0$$

$$\Delta y_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\eta_1 - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_0$$

таким образом будет:

$$\Delta q_1 = 0.00986 - \frac{1}{2}61 - \frac{1}{12}\cdot 9 = 0.00985$$

$$\Delta y_1 = 187.2 - \frac{1}{2}10.7 - \frac{1}{12}\cdot 1.4 = 181.7$$

$$q_2 = q_1 + \Delta q_1 = 0.01975$$

$$\log u_2 = \log u_0 - q_2 = 2.79670$$

$$\log v_2 = 2.88071;\ v_2 = 759.8$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 374.8$$

Затем, при том же предположении постоянства вторых разностей, имеем формулы:

$$\Delta q_2 = \omega_2 + \frac{1}{2}\Delta\omega_1 + \frac{5}{12}\Delta^2\omega_0$$

$$\Delta y_2 = \eta_2 + \frac{1}{2}\Delta\eta_1 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_0$$

по которым получаем:

$$\Delta q_2 = 0.00925 - \frac{1}{2}61 + \frac{5}{12}\cdot 9 = 0.00898$$

$$\Delta y_2 = 176.5 - \frac{1}{2}\cdot 107 + \frac{5}{12}1.4 = 171.7$$

$$q_3 = q_2 + \Delta q_2 = 0.01975 + 0.00898 = 0.02873$$

$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = 374.8 + 171.7 = 546.5$$

$$\log u_3 = \log u_0 - q_3 = 2.78772$$

$$\log v_3 = 2.87043;\ v_3 = 742.1$$

Пользуясь найденными значениями v_3 и y_3, вычисляем ω_3 и η_3:

$$\log A\operatorname{cosec}\varphi_3 = \bar{7}.6671$$
$$\log K(v_3) = \bar{2}.5565$$
$$2\log v_3 = 5.7410$$
$$\log f(z_3) = \bar{1}.9745$$
$$\log\omega_3 = \bar{3}.9391$$
$$\omega_3 = 0.00869$$

$$\log B\operatorname{cotg}\varphi_3 = \bar{4}.4812$$
$$2\log v_3 = 5.7410$$
$$\log\eta_3 = 2.2222$$
$$\eta_3 = 166.8$$

таким образом начальная часть таблиц для вычисления будет:

n	ω	$\Delta\omega$	$\Delta^2\omega$	Δq	$\log u$	$\log v$	v	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	Δy	y
0	0.01056				2.81645	2.90309	800.0	199.3				0.0
		−70		1020					−12.1		193.1	
1	986		+9		2.80625	2.89156	779.0	187.2		+1.4		193.1
		−61		955					−10.7		181.7	
2	925		5		2.79670	2.88071	759.8	176.5		1.0		374.8
		−56		898					− 9.7		171.7	
3	869				2.78772	2.87043	742.1	166.8				546.5

Примечание. Разности Δq и Δz вычислены так:

$$\Delta q_0 = 1056 - \frac{1}{2}70 - \frac{1}{12}\cdot 9 = 1020 \qquad \Delta y_0 = 199.3 - \frac{1}{2}\cdot 12.1 - \frac{1}{12}\cdot 1.4 = 193.1$$

$$\Delta q_1 = 986 - \frac{1}{2}61 - \frac{1}{12}\cdot 5 = 955 \qquad \Delta y_1 = 187.2 - \frac{1}{2}\cdot 10.7 - \frac{1}{12}\cdot 1.0 = 181.7$$

$$\Delta q_2 = 925 - \frac{1}{2}61 + \frac{1}{12}\cdot 9 = 898 \qquad \Delta y_2 = 176.5 - \frac{1}{2}\cdot 10.7 - \frac{5}{12}\cdot 1.4 = 171.7$$

После этого вычисление может быть продолжено, как показано в таблицах ниже.

§ **6.** Выше объяснено, как начинать вычисление, применяя методу последовательных приближений; можно достигнуть той же цели иначе, воспользовавшись разложением в ряды.

В применении к нашему примеру эту методу можно представить так: при скоростях v от 800 до 700 м/сек. величина K_v, со всею точностью таблиц Забудского, может быть выражена формулою

$$K(v) = 0.0352 + 0.000014v$$

и величина $f(y)$ — формулою

$$f(y) = 1 - 0.102y^{\text{килом.}} = 1 - 0.000102y^{\text{метр.}}$$

Мы будем писать эти формулы, для сокращения и общности, так:

$$K_v = a + bv;\ f(y) = 1 - \alpha y$$

следовательно будет:

$$q' = C(a + bv)v^2 \cdot (1 - \alpha y) \cdot \frac{1}{\sin\varphi}$$

$$y' = \frac{1}{g}v^2 \operatorname{cotg}\varphi$$

откуда следует, взяв логарифмическую производную:

(1) $$\frac{q''}{q'} = \left(\frac{b}{a+bv} + \frac{2}{v}\right)v' - \frac{\alpha y}{1-\alpha y} - \operatorname{cotg}\varphi$$

$$\frac{y''}{y'} = \frac{2}{v}v' - \operatorname{tg}\varphi - \operatorname{cotg}\varphi$$

но

$$v = \frac{u}{\sin\varphi}$$

значит,

$$\frac{v'}{v} = \frac{u'}{u} - \operatorname{cotg}\varphi = -\frac{1}{M}q' - \operatorname{cotg}\varphi = 2.3026q' - \operatorname{cotg}\varphi$$

и следовательно,

(2) $$\frac{y''}{y'} = -\left[\frac{2}{M}q' + \operatorname{tg}\varphi + 3\operatorname{cotg}\varphi\right] =$$

$$= -[4.605q' + \operatorname{tg}\varphi + 3\operatorname{cotg}\varphi]$$

Взяв величину h настолько малой, чтобы можно было принимать с требуемой степенью точности:

$$q_1 = q_0 + q_0' h + \frac{1}{2} q_0'' h^2$$

$$y_1 = y_0 + y_0' h + \frac{1}{2} y_0'' h^2$$

и

$$q_2 = q_1 + q_1' h + \frac{1}{2} q_1'' h^2$$

$$y_2 = y_1 + y_1' h + \frac{1}{2} y_1'' h^2$$

располагаем это вычисление следующим образом:

Формулы:

$$q' = CK(v) v^2 f(y); \quad y' = \frac{1}{g} v^2 \operatorname{cotg} \varphi; \quad \log C = \bar{5}.9446$$

$$\frac{v'}{v} = -2.30\, q' - \operatorname{cotg} \varphi; \quad \frac{q''}{q'} = \frac{bv'}{a + bv} + \frac{2v'}{v} - \frac{\alpha y'}{1 - \alpha y} - \operatorname{cotg} \varphi$$

$$\frac{y''}{y} = \frac{2v'}{v} - \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{cotg} \varphi; \quad q_{n+1} = q_n + h q_n' + \frac{h^2}{2} \cdot q_n''$$

$$y_{n+1} = y_n + h y_n' + \frac{h^2}{2} y_n''; \quad h = 0.004363; \quad \frac{h^2}{2} = 0.0000095$$

§ 7. Приведем некоторые необходимые пояснения к таблицам, в которых показано вычисление траектории.

1°) После того как по приведенным в §§ 5 и 6 способам (следует для контроля применять оба) заполнены первые четыре строки табл. III ($n = 0, 1, 2, 3$), дальнейшее вычисление ведется как объяснено в § 4 и как показывает схема.

2°) Это вычисление сейчас же обнаруживает, что при значении промежутка $h = 0°15'$ вторые разности настолько малы, что без ущерба для точности результата промежуток h можно увеличить. Это увеличение делается *удвоением* промежутка, как показано в дополнительной таблице.

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$\log C \operatorname{cosec} \varphi$	$\bar{4}.0312$	$\bar{4}.0299$	$\bar{4}.0286$	$\bar{4}.0273$
$2 \log v$	5.8062	5.7833	5.7618	5.7414
$\log K(v)$	$\bar{2}.5465$	$\bar{2}.5502$	$\bar{2}.5534$	$\bar{2}.5565$
$\log f_y$	0.0000	$\bar{1}.9910$	$\bar{1}.9825$	$\bar{1}.9745$
$\log q_n'$	0.3839	0.3544	0.3263	0.2997
q_n'	2.420	2.260	2.119	1.993
$q_n' h$	0.01056	0.00985	0.00923	0.00870
$-2.30\, q_n'$	— 5.70	— 5.20	— 4.87	— 4.58
$-\operatorname{cotg} \varphi_n$	— 0.70	— 0.69	— 0.69	— 0.68
$v_n' : v_n$	— 6.27	— 5.89	— 5.66	— 5.26
v_n'	— 5020	— 4590	— 4230	— 3905
$bv_n' : (a + bv_n)$	— 1.52	— 1.40	— 1.30	— 1.23
$2v_n' : v_n$	— 12.54	— 11.78	— 11.12	— 10.52
$-\alpha y' : (1 - \alpha y)$	— 4.65	— 4.40	— 4.29	— 4.12
$-\operatorname{cotg} \varphi_n$	— 0.70	— 0.69	— 0.69	— 0.68
$q_n'' : q_n'$	— 19.41	— 18.27	— 17.40	— 16.55
q_n''	— 47.0	— 41.3	— 36.8	— 32.9
$\frac{1}{2} q_n'' h_2$	— 0.00045	— 0.00039	— 0.00033	— 0.0003
$q_{n+1} - q_n$	0.0101	0.0095	0.0089	0.0084
$\log u_n$	2.8165	2.8064	2.7969	2.7885
$\log \operatorname{cosec} \varphi$	0.0866	0.0853	0.0840	0.0827
$\log v$	2.9031	2.8917	2.8809	2.8712
v	800.0	779.3	760.1	743.3

Сличая эти величины v и y_n с предыдущими, видим, что согласие вполн

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$\log \frac{1}{g} \operatorname{cotg} \varphi$	$\bar{2}.8535$	$\bar{2}.8495$	$\bar{2}.8454$	$\bar{2}.8414$
$2 \log v$	5.8062	5.7833	5.7618	5.7414
$\log y_n'$	4.6597	4.6328	4.6072	4.5828
y_n'	45680	42930	40460	38250
$\log y_n'h$	2.2995	2.2726	2.2470	2.2226
$y_n'h$	199.3	187.3	176.6	166.9
$-\operatorname{cotg} \varphi$	— 0.70	— 0.69	— 0.69	— 0.68
$2 v_n' : v_n$	— 12.54	— 11.78	— 11.12	— 10.52
$-\operatorname{tg} \varphi$	— 1.43	— 1.44	— 1.45	— 1.47
$y_n'' : y_n'$	— 14.67	— 13.91	— 13.26	— 12.67
y_n''	— 671000	— 598000	— 537000	— 484900
$\frac{1}{2} y_n'' \cdot h^2$	— 6.4	— 5.6	— 5.1	— 4.6
$y_{n+1} - y_n$	192.9	181.7	171.5	162.3
y_n	0.0	192.9	374.6	546.1

удовлетворительно.

Вычисление

Интегрирование ура

$$dq = C \cdot K(v)\, v^2 f(y)\, \operatorname{cosec} \varphi\, d\varphi;$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	φ	$2 \log v$	$\log K(v)$	$\log f(y)$	$\log \operatorname{cosec} \varphi$	$\log \operatorname{cotg} \varphi$	$\log \omega = (3)+(4)+(5)+(6)+A$	$\log \eta$	η
0	55°00′	5.8062	$\bar{2}$.5465	0.0000	0.0866	$\bar{1}$.8452	$\bar{2}$.0237	2.2995	199.3
1	55 15	5.7832	$\bar{2}$.5502	$\bar{1}$.9910	853	$\bar{1}$.8412	$\bar{3}$.9941	2.2725	187.2
2	55 30	5.7616	$\bar{2}$.5533	$\bar{1}$.9826	840	$\bar{1}$.8371	$\bar{3}$.9659	2.2468	176.5
3	55 45	5.7410	$\bar{2}$.5565	1.9745	827	$\bar{1}$.8331	$\bar{3}$.9391	2.2222	166.8
4	56 00	5.7216	$\bar{2}$.5595	$\bar{1}$.9669	814	$\bar{1}$.8290	$\bar{3}$.9138	2.1987	158.0
5	56 15	5.7032	$\bar{2}$.5622	$\bar{1}$.9598	802	$\bar{1}$.8249	$\bar{3}$.8898	2.1762	150.0
6	56 30	5.6854	$\bar{2}$.5649	$\bar{1}$.9529	789	$\bar{1}$.8208	$\bar{2}$.1675	2.4553	285.3
7	57 00	5.6524	2.5700	$\bar{1}$.9400	764	$\bar{1}$.8125	$\bar{2}$.1242	2.4140	259.4
8	57 30	5.6222	$\bar{2}$.5746	$\bar{1}$.9282	740	$\bar{1}$.8042	$\bar{2}$.0844	2.3755	237.4
9	58 00	5.5940	$\bar{2}$.5788	$\bar{1}$.9173	716	$\bar{1}$.7958	$\bar{2}$.0471	2.3389	218.2
10	58 30	5.5678	$\bar{2}$.5828	$\bar{1}$.9071	692	$\bar{1}$.7873	$\bar{2}$.0121	2.3042	201.5
11	59 00	5.5436	$\bar{2}$.5866	$\bar{1}$.8978	669	$\bar{1}$.7788	$\bar{3}$.9803	2.2715	186.9
12	59 30	5.5206	2.5898	$\bar{1}$.8891	647	$\bar{1}$.7701	$\bar{3}$.9496	2.2398	173.7
13	60 00	5.4990	$\bar{2}$.5916	$\bar{1}$.8810	625	$\bar{1}$.7614	$\bar{2}$.2205	2.5105	324.0
14	61 00	5.4594	$\bar{2}$.5940	$\bar{1}$.8661	582	$\bar{1}$.7438	$\bar{2}$.1641	2.4533	284.0
15	62 00	5.4238	$\bar{2}$.5951	$\bar{1}$.8530	541	$\bar{1}$.7257	$\bar{2}$.1124	2.3996	251.0
16	63 00	5.3912	$\bar{2}$.5955	$\bar{1}$.8412	501	$\bar{1}$.7072	$\bar{2}$.0644	2.3495	223.1
17	64 00	5.3614	$\bar{2}$.5955	$\bar{1}$.8308	463	$\bar{1}$.6882	2.0203	2.2997	199.4
18	65 00	5.3338	$\bar{2}$.5955	$\bar{1}$.8213	427	$\bar{1}$.6687	$\bar{3}$.9797	2.2526	178.9
19	66 00	5.3086	$\bar{2}$.5955	$\bar{1}$.8127	393	$\bar{1}$.6486	$\bar{3}$.9425	2.2073	161.2
20	68 00	5.2634	$\bar{2}$.5955	$\bar{1}$.7981	328	$\bar{1}$.6064	$\bar{2}$.1762	2.4209	263.6
21	70 00	5.2238	$\bar{2}$.5849	$\bar{1}$.7859	270	$\bar{1}$.5611	$\bar{2}$.1090	2.3360	216.8
22	72 00	5.1900	$\bar{2}$.5681	$\bar{1}$.7757	218	$\bar{1}$.5118	$\bar{2}$.0430	2.2529	179.0
23	74 00	5.1606	$\bar{2}$.5518	$\bar{1}$.7674	172	$\bar{1}$.4575	$\bar{3}$.9844	2.1692	147.6
24	76 00	5.1340	$\bar{2}$.5278	$\bar{1}$.7598	131	$\bar{1}$.3968	$\bar{3}$.9221	2.0819	120.8
25	78 00	5.1114	$\bar{2}$.4977	$\bar{1}$.7544	96	$\bar{1}$.3275	$\bar{3}$.8605	1.9900	97.7

Таблица III

траектории

внений годографа

$$dy = \frac{1}{g} v^2 \operatorname{cotg} \varphi \, d\varphi$$

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$	Δy	y	ω	$\Delta\omega$	$\Delta^3\omega$	Δq	$\log u$	$\log v = (20) + (6)$	v
					0.0			0.0			
—	+	—				—	+				
12.1			193.1	0.0	1056	70		102	2.8165	2.9031	800.0
	1.4						9				
10.7		0.4	181.7	193.1	986	61		95	2.8063	2.8916	779.1
	1.0						5				
9.7		0.1	171.7	374.8	925	56		90	2.7968	2.8808	760.0
	0.9						7				
8.8		0.1	162.4	546.5	869	49		84	2.7878	2.8705	742.2
	0.8						5				
8.0		0.1	154.0	708.9	820	44		80	2.7794	2.8608	725.8
	0.8						5				
8.0		0.1	146.3	862.9	776	44		76	2.7714	2.8516	710.5
	0.8						5				
25.9		0.1	271.6	1009.3	1471	140		140	2.7638	2.8427	696.1
	3.9						24				
22.0		1.1	248.1	1280.8	1331	116		127	2.7498	2.8262	670.2
	2.8						16				
19.2		0.3	227.3	1528.9	1215	100		117	2.7371	2.8111	647.3
	2.5						13				
16.7		0.4	209.4	1756.2	1115	87		107	2.7254	2.7970	626.6
	2.1						15				
14.6		0.7	194.1	1965.6	1028	72		98	2.7147	2.7839	608.0
	1.4						7				
13.2		0.7	180.5	2159.7	956	65		93	2.7049	2.7718	591.3
	1.4						7				
13.2		0.7	167.5	2340.2	891	65		86	2.6956	2.7603	575.9
	1.4						7				
40.0		0.7	302.7	2507.7	1662	203		155	2.6870	2.7495	561.7
	7.0						39				
33.0		1.9	266.9	2810.4	1459	164		137	2.6715	2.7297	536.7
	5.1						29				
27.9		0.9	236.5	3077.3	1295	135		123	2.6578	2.7119	515.1
	4.2						23				
23.7		1.0	210.4	3313.8	1160	112		111	2.6455	1.6956	496.2
	3.2						18				
20.5		0.4	188.3	3524.2	1048	94		102	2.6344	2.6807	479.4
	2.8						16				
17.7		0.4	169.7	3712.5	954	78		92	2.6242	2.6669	464.4
	2.8						16				
17.7		0.4	292.0	3882.2	876	78		161	2.6150	2.6543	451.1
	2.8						16				
46.8		0.4	239.3	4174.2	1500	215		140	2.5989	2.6317	428.3
	9.0						34				
37.8		2.6	196.3	4413.5	1285	181		117	2.5849	2.6119	409.2
	6.4						42				
31.4		1.8	162.7	4609.8	1104	139		101	2.5732	2.5950	393.6
	4.6						10				
26.8		0.9	143.5	4772.5	965	129		92	2.5631	2.5803	380.5
	3.7						18				
23.1		0.8	108.2	4916.0	836	111		78	2.5039	2.5670	369.0
	2.9						21				
20.2		0.8	87.3	5024.6	725	90		68	2.5461	2.5557	359.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	φ	$2 \log v$	$\log K(v)$	$\log f(y)$	$\log$ cosec φ	$\log$ cotg φ	$\log \omega = (3)+(4)+(5)+(6)+A$	$\log \eta$	η
26	80°00′	5.0918	$\bar{2}.4668$	$\bar{1}.7498$	0.0066	$\bar{1}.2463$	$\bar{3}.8024$	1.8892	77.5
27	82 00	5.0750	$\bar{2}.4402$	$\bar{1}.7463$	42	$\bar{1}.1478$	$\bar{3}.7531$	1.7735	59.4
28	84 00	5.0606	$\bar{2}.4174$	$\bar{1}.7436$	24	$\bar{1}.0216$	$\bar{3}.7114$	1.6333	43.0
29	86 00	5.0480	$\bar{2}.3978$	$\bar{1}.7417$	11	$\bar{2}.8446$	$\bar{3}.6760$	1.4437	27.8
30	88 00	5.0370	$\bar{2}.3810$	$\bar{1}.7404$	3	$\bar{2}.5431$	$\bar{3}.6461$	1.1312	13.5
31	90 00	5.0278	$\bar{2}.3670$	$\bar{1}.7400$	0	$-\infty$	$\bar{3}.6222$	$-\infty$	0.0
32	92 00	5.0202	$\bar{2}.3558$	$\bar{1}.7403$	3	$\bar{2}.5431$	$\bar{3}.6040$	1.1144	—13.0
33	94 00	5.0138	$\bar{2}.3462$	$\bar{1}.7418$	11	2.8446	$\bar{3}.5903$	1.4095	25.7
34	96 00	5.0088	$\bar{2}.3386$	$\bar{1}.7432$	24	$\bar{1}.0216$	$\bar{3}.5802$	1.5813	38.1
35	98 00	5.0050	2.3334	$\bar{1}.7456$	42	$\bar{1}.1478$	$\bar{3}.5756$	1.7039	50.6
36	100 00	5.0022	$\bar{2}.3290$	$\bar{1}.7485$	66	$\bar{1}.2468$	$\bar{3}.5737$	1.8001	63.1
37	102 00	5.0006	$\bar{2}.3266$	$\bar{1}.7522$	96	$\bar{1}.3275$	$\bar{3}.5764$	1.8792	75.7
38	104 00	5.0000	$\bar{2}.3258$	$\bar{1}.7565$	131	$\bar{1}.3968$	$\bar{3}.5828$	1.9479	88.7
39	106 00	5.0006	$\bar{2}.3266$	$\bar{1}.7614$	172	$\bar{1}.4575$	$\bar{3}.5932$	2.0092	102.1
40	108 00	5.0020	$\bar{2}.3290$	$\bar{1}.7670$	218	$\bar{1}.5118$	$\bar{3}.6072$	2.0649	116.1
41	110 00	5.0042	$\bar{2}.3322$	$\bar{1}.7733$	270	2.5611	$\bar{3}.6241$	2.1164	130.7
42	112 00	5.0072	$\bar{2}.3366$	$\bar{1}.7805$	328	$\bar{1}.6064$	$\bar{3}.6445$	2.1647	146.1
43	114 00	5.0112	$\bar{2}.3422$	$\bar{1}.7884$	393	$\bar{1}.6486$	$\bar{3}.6685$	2.2109	162.5
44	116 00	5.0156	$\bar{2}.3490$	$\bar{1}.7971$	463	$\bar{1}.6882$	$\bar{3}.6954$	2.2549	178.8
45	118 00	5.0210	$\bar{2}.3570$	$\bar{1}.8067$	541	$\bar{1}.7257$	$\bar{3}.7262$	2.2978	198.5
46	120 00	5.0268	$\bar{2}.3654$	$\bar{1}.8172$	625	$\bar{1}.7614$	$\bar{3}.7593$	2.3393	218.4
47	122 00	5.0330	$\bar{2}.3750$	1.8288	716	$\bar{1}.7958$	$\bar{3}.7958$	2.3799	239.8
48	124 00	5.0396	$\bar{2}.3850$	$\bar{1}.8415$	814	$\bar{1}.8290$	$\bar{3}.8349$	2.4197	262.9
49	126 00	5.0464	$\bar{2}.3954$	$\bar{1}.8550$	920	$\bar{1}.8613$	$\bar{3}.8762$	2.4588	287.6
50	128 00	5.0534	$\bar{2}.4062$	$\bar{1}.8697$	0.1035	$\bar{1}.8928$	$\bar{3}.9202$	2.4973	314.3
51	130 00	5.0606	$\bar{2}.4174$	$\bar{1}.8858$	0.1158	$\bar{1}.9238$	$\bar{3}.9670$	2.5355	343.2
52	132 00	5.0672	$\bar{2}.4278$	$\bar{1}.9032$	0.1289	$\bar{1}.9544$	$\bar{2}.0145$	2.5727	373.6
53	134 00	5.0738	$\bar{2}.4382$	$\bar{1}.9219$	0.1431	$\bar{1}.9848$	$\bar{2}.0644$	2.6097	407.1
54	136 00	5.0794	$\bar{2}.4470$	$\bar{1}.9426$	0.1582	0.0152	$\bar{2}.1146$	2.6457	442.3
55	138 00	5.0844	$\bar{2}.4549$	$\bar{1}.9644$	0.1745	0.0456	$\bar{2}.1656$	2.6811	479.8
56	140 00	5.0866	$\bar{2}.4617$	$\bar{1}.9876$	0.1919	0.0762	$\bar{2}.2171$	2.7159	519.9
57	142 00	5.0866	$\bar{2}.4617$	$\bar{1}.9876$	0.1919	0.0762	$\bar{2}.2172$	2.7159	519.9

(Продолжение)

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$	Δy	y	ω	$\Delta\omega$	$\Delta^3\omega$	Δq	$\log u$	$\log v = (20) + (6)$	v
—	+	—				—	+				
18.1	2.1	0.4	68.2	5111.9	635	69	21	60	2.5393	2.5459	351.5
16.4	1.7	0.5	51.9	5180.1	566	51	18	54	2.5333	2.5375	344.8
15.2	1.2	0.3	35.4	5232.0	515	41	10	50	2.5279	2.5303	339.1
14.3	0.9	0.1	20.6	5267.4	474	31	10	47	2.5229	2.5240	334.2
13.5	0.8	0.3	6.6	5288.0	443	24	7	43	2.5182	2.5185	330.0
13.0	0.5	0.2	6.4	5294.3	419	17	7	41	2.5139	2.5139	326.5
12.7	0.3	0.2	19.4	5287.9	402	13	4	40	2.5098	2.5101	323.7
12.4	0.3	0.2	32.0	5268.5	389	9	4	38	2.5058	2.5069	321.3
12.5	0.1	0.2	44.2	5236.5	380	4	5	37	2.5020	2.5044	319.4
12.5	0.0	0.2	56.8	5192.3	376	— 1	3	38	2.4983	2.5025	318.1
12.6	0.1	0.2	69.4	5135.5	375	+ 2	3	38	2.4945	2.5011	317.0
13.0	0.4	0.2	82.0	5066.1	377	5	3	38	2.4907	2.5003	316.4
13.4	0.4	0.2	95.3	4984.1	382	10	5	38	2.4869	2.5000	316.2
14.0	0.6	0.2	108.8	4888.8	392	13	3	39	2.4831	2.5003	316.4
14.6	0.6	0.2	123.4	4780.0	405	16	3	41	2.4792	2.5010	317.0
15.4	0.8	0.2	138.3	4656.6	421	20	4	43	2.4751	2.5021	317.8
16.4	1.0	0.2	154.1	4518.0	441	25	5	45	2.4708	2.5036	318.9
17.3	0.9	0.2	171.1	4364.2	466	30	5	48	2.4663	2.5056	320.3
18.7	1.4	0.2	188.9	4193.1	496	36	6	51	2.4615	2.5078	322.0
19.9	1.2	0.2	208.5	4004.2	532	43	7	55	2.4564	2.5105	324.0
21.4	1.5	0.2	228.9	3795.7	575	50	7	60	2.4509	2.5134	326.1
23.1	1.7	0.2	251.1	3566.8	625	59	9	65	2.4449	2.5165	328.5
24.7	1.6	0.2	275.2	3315.7	684	68	9	72	2.4384	2.5198	331.9
26.7	2.0	0.2	300.6	3040.5	752	80	12	79	2.4312	2.5232	333.6
28.9	2.2	0.2	328.5	2739.9	832	95	15	88	2.4233	2.5267	336.3
30.6	1.7	0.2	358.7	2411.4	927	107	12	98	2.4145	2.5303	339.1
33.3	2.7	0.2	389.8	2052.7	1034	126	19	109	2.4047	2.5336	341.7
35.2	1.9	0.2	424.9	1662.9	1160	142	16	123	2.3938	2.5369	344.3
37.5	2.3	0.2	460.7	1238.9	1302	162	20	138	2.3815	2.5397	346.5
40.1	2.6	0.2	499.5	777.3	1464	185	23	153	2.3677	2.5422	348.5
40.1	2.6	0.2	541.1	277.8	1649	185	23	175	2.3524	2.5443	350.2
	2.6			—263.3			23		2.3349	2.5456	351.2

Вычисление

Вычисление координат x, y

$$dx = \frac{v^2}{g}\, d\varphi; \qquad dy = \frac{v^2}{g} \operatorname{cotg} \varphi\, d\varphi;$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	φ	v	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	Δy	y	$\log \xi$	ξ
				—	+				
0	55°00′	800.0	199.3				0.0	2.4543	284.7
				12.1		193.1			
1	55 15	779.1	187.2		1.4		193.1	2.4313	270.0
				10.7		181.7			
2	55 30	760.0	176.5		1.0		374.8	2.4097	256.9
				9.7		171.6			
3	55 45	742.2	166.8		0.9		546.4	2.3891	245.0
				8.8		162.3			
4	56 00	725.8	158.0		0.8		708.7	2.3697	234.3
				8.0		154.0			
5	56 15	710.5	150.0		0.8		862.7	2.3513	224.5
				8.0		146.3			
6	56 30	696.1	285.3		0.8		1009.0	2.6345	431.0
				25.9		272.0			
7	57 00	670.2	259.4		3.9		1281.0	2.6015	399.5
				22.0		248.2			
8	57 30	647.3	237.4		2.8		1529.2	2.5713	372.7
				19.2		228.0			
9	58 00	626.6	218.2		2.5		1757.0	2.5431	349.2
				16.7		209.7			
10	58 30	608.0	201.5		2.1		1966.7	2.5169	328.8
				14.6		194.1			
11	59 00	591.3	186.9		1.4		2160.8	2.4927	311.0
				13.2		180.5			
12	59 30	575.9	173.7		1.4		2341.3	2.4697	294.9
				13.2		167.7			
13	60 00	561.7	324.0		1.4		2509.0	2.7491	561.4
				40.0		303.4			
14	61 00	536.7	284.0		7.0		2812.3	2.7095	512.3
				33.0		267.1			
15	62 00	515.1	251.0		5.1		3079.5	2.6739	472.0
				27.9		236.7			
16	63 00	496.2	223.1		4.2		3316.2	2.6413	437.8
				23.7		211.0			
17	64 00	479.4	199.4		3.2		3527,0	2.6115	408.8
				20.5		188.9			
18	65 00	464.4	178.9		3.2		3715.9	2.5839	383.6
				20.5		170.0			
19	66 00	451.1	322.4		3.2		3885.9	2.8597	724.0
				58.0		292.0			
20	68 00	428.3	263.6		12.0		4177.9	2.8145	652.4
				46.8		239.4			
21	70 00	409.2	216.8		9.0		4417.3	2.7749	595.5
				37.8		197.4			
22	72 00	393.6	179.0		6.4		4614.7	2.7411	551.0
				31.4		162.9			
23	74 00	380.5	147.6		4.6		4777.6	2.7117	514.9
				26.8		143.9			
24	75 00	369.0	120.8		3.7		4921.5	2.6851	484.3
				23.1		109.0			
25	78 00	359.5	97.7		2.9		5030.5	2.6625	459.7
				20.2		87.4			
26	80 00	351.5	77.5		2.1		5117.9	2.6429	439.4
				18.1		68.4			
27	82 00	344.8	59.4		1.7		5186.3	2.6261	422.8
				16.4		51.1			
28	84 00	339.1	43.0		1.2		5237.4	2.6117	409.0
				15.2		35.3			

Таблица IV

траектории

и времени полета t

$$dt = \frac{v}{g} \operatorname{cosec} \varphi \cdot d\varphi$$

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	Δx	x	$\log \tau$	τ	$\Delta\tau$	$\Delta^2\tau$	Δt	t
—	+					—	+		
			0.0	$\bar{1}$.6378	0.434				0.000
14.7	1.6	277.3	277.3	$\bar{1}$.6250	0.422	12	0	0.428	0.428
13.1	1.2	263.4	540.7	$\bar{1}$.6129	0.410	12	1	0.416	0.844
11.9	1.2	250.9	791.6	$\bar{1}$.6013	0.399	11	1	0.404	1.248
10.7	0.9	239.6	1031.2	$\bar{1}$.5903	0.389	10	1	0.394	1.642
9.8	0.9	229.4	1260.6	$\bar{1}$.5799	0.380	9	1	0.384	2.026
9.8	0.9	220.0	1480.6	$\bar{1}$.8707	0.743	9	1	0.375	2.401
31.5	4.7	415.9	1895.6	$\bar{1}$.8517	0.711	32	4	0.727	3.128
26.8	3.3	385.8	2281.4	$\bar{1}$.8342	0.683	28	2	0.697	3.825
23.5	3.1	360.7	2642.1	$\bar{1}$.8177	0.657	26	3	0.670	4.495
20.4	2.6	338.6	2980.7	$\bar{1}$.8022	0.634	23	3	0.645	5.140
17.8	1.7	319.8	3300.2	$\bar{1}$.7878	0.614	20	0	0.624	5.764
16.1	1.7	303.2	3603.7	$\bar{1}$.7741	0.594	20	0	0.604	6.368
16.1	1.7	287.5	3891.2	0.0621	1.154	20	0	0.584	9.952
48.9	8.6	536.0	4327.2	0.0380	1.092	62	8	1.122	8.074
40.3	6.1	591.7	5018.9	0.0161	1.038	54	6	1.065	9.139
34.2	5.2	454.5	5473.4	$\bar{1}$.9958	0.990	48	7	1.013	10.152
29.0	3.8	423.0	5896.4	0.9771	0.949	41	3	0.969	11.121
25.2	3.8	396.4	6292.8	$\bar{1}$.9597	0.911	38	3	0.932	12.053
25.2	3.8	372.6	6665.4	0.2447	1.757	38	3	0.893	12.946
71.6	14.5	687.0	7352.4	0.2156	1.643	114	20	1.698	14.644
56.9	12.4	622.9	7975.3	0.1900	1.549	94	17	1.595	16.239
44.5	8.4	572.5	8547.8	0.1679	1.472	77	13	1.510	17.749
36.1	5.5	532.5	9080.3	0.1486	1.408	64	9	1.439	19.188
30.6	6.0	499.1	9579.4	0.1312	1.353	55	9	1.380	20.568
24.6	4.3	471.7	10051	0.1164	1.307	46	8	1.329	21.897
20.3	3.7	449.3	10500	0.1036	1.269	38	7	1.287	23.184
16.6	2.8	430.9	10931	0.0928	1.238	31	6	1.254	24.438
13.8	2.1	415.8	11347	0.0838	1.213	25	4	1.225	25.663
11.7		403.1				21		1.202	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	ϑ	v	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	Δy	y	$\log \xi$	ξ
				—	+				
29	86°00′	334.2	27.8	14.3	0.9	20.6	5272.7	2.5991	397.3
30	88 00	330.0	13.5	13.5	0.8	6.7	5293.3	2.5881	387.4
31	90 00	326.5	13.5	13.0	0.5	6.5	5300.0	2.5789	379.2
32	92 00	323.7	—13.0	12.7	0.3	19.4	5293.5	2.5713	372.7
33	94 00	321.3	25.7	12.4	0.3	31.9	5274.1	2.5649	367.2
34	96 00	319.4	38.1	12.5	0.1	44.3	5242.2	2.5599	363.0
35	98 00	318.1	50.6	12.5	0.0	56.8	5197.9	2.5561	359.8
36	100 00	317.0	63.1	12.6	0.1	69.4	5141.1	2.5533	357.5
37	102 00	316.4	75.7	13.0	0.4	82.2	5071.7	2.5517	356.2
38	104 00	316.2	88.7	13.4	0.4	95.4	4989.5	2.5511	355.7
39	106 00	316.4	102.1	14.0	0.6	109.1	4894.1	2.5517	356.2
40	108 00	317.0	116.1	14.6	0.6	123.3	4785.0	2.5531	357.4
41	110 00	317.8	130.7	15.4	0.8	138.3	4661.7	2.5553	359.2
42	112 00	318.9	146.1	16.4	1.0	154.2	4523.4	2.5583	361.7
43	114 00	320.3	162.5	17.3	0.9	171.0	4369.2	2.5623	365.0
44	116 00	322.0	179.8	18.7	1.4	189.0	4198.2	2.5667	368.7
45	118 00	324.0	198.5	19.9	1.2	208.4	4009.2	2.5721	373.3
46	120 00	326.1	218.4	21.4	1.5	229.0	3800.8	2.5779	378.4
47	122 00	328.5	239.8	23.1	1.7	251.3	3571.8	2.5841	383.8
48	124 00	331.0	262.9	24.7	1.6	275.0	3320.5	2.5907	389.7
49	126 00	333.6	287.6	26.7	2.0	300.7	3045.5	2.5975	395.8
50	128 00	336.3	314.3	28.9	2.2	328.7	2744.8	2.6045	402.3
51	130 00	339.1	343.2	30.6	1.7	358.3	2416.7	2.6117	409.0
52	132 00	341.7	373.8	33.3	2.7	390.3	2058.4	2.6183	415.2
53	134 00	344.3	407.1	35.2	1.9	424.5	1668.1	2.6249	421.6
54	136 00	346.5	442.3	37.5	2.3	460.9	1243.6	2.6305	427.1
55	138 00	348.5	479.8	40.1	2.6	499.5	782.7	2.6355	432.0
56	140 00	350.2	519.9	40.1	2.6	541.1	283.2	2.6397	436.2
57	142 00	351.2	519.9				—257.9	2.6397	436.2

Точка падения

Наклонность $\Phi = 140° + \alpha \cdot 120' = 141°3'.9$

Скорость $V = 350.7$ м/сек.

Дальность $X = 21956 + 436\,\alpha = 22188$ м

Время полета $T = 63.075 + 1.940\,\alpha = 64.108$ сек.

(*Продолжение*)

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	Δx	x	$\log\tau$	τ	$\Delta\tau$	$\Delta^2\tau$	Δt	t
—	+					—	+		
9.9	1.8	392.3	11750	0.0762	1.192	17	4	1.183	26.865
8.2	1.7	383.1	12142	0.0699	1.175	14	3	1.168	28.048
6.5	1.7	375.9	12525	0.0650	1.161	9	5	1.156	29.216
5.5	1.0	369.9	12901	0.0615	1.152	6	3	1.149	30.372
4.2	1.3	365.2	13271	0.0591	1.146	3	3	1.144	31.521
3.2	1.0	361.5	13636	0.0579	1.143	— 1	2	1.143	32.665
2.3	0.9	358.7	13997	0.0578	1.142	+ 3	4	1.143	33.808
1.3	1.0	356.9	14356	0.0588	1.145	6	3	1.148	34.951
—0.5	0.8	356.0	14713	0.0610	1.151	8	2	1.155	36.099
+0.5	1.0	355.9	15069	0.0642	1.159	12	4	1.165	37.254
1.2	0.7	356.8	15325	0.0686	1.171	14	2	1.178	38.419
1.8	0.6	358.3	15682	0.0739	1.185	18	4	1.194	39.597
2.5	0.7	360.5	16040	0.0802	1.203	20	2	1.213	40.791
3.3	0.8	364.4	16400	0.0875	1.223	24	4	1.235	42.004
3.7	0.4	366.9	16764	0.0960	1.247	27	3	1.260	43.239
4.6	0.9	371.0	17121	0.1052	1.274	31	4	1.290	44.499
5.1	0.5	375.9	17492	0.1157	1.305	35	4	1.323	45.789
5.4	0.3	381.1	17868	0.1270	1.340	38	3	1.359	47.112
5.9	0.5	386.7	18249	0.1392	1.378	42	4	1.399	48.471
6.1	0.2	397.8	18636	0.1523	1.420	47	5	1.443	49.870
6.5	0.4	399.1	19034	0.1663	1.467	51	4	1.493	51.313
6.7	+0.2	405.6	19433	0.1813	1.518	57	6	1.546	52.806
6.2	—0.5	412.1	19839	0.1972	1.575	60	3	1.605	54.352
6.4	+0.2	418.4	20251	0.2136	1.635	68	8	1.669	55.957
5.5	—0.9	424.3	20669	0.2311	1.703	71	3	1.739	57.626
4.9	—0.6	429.5	21093	0.2490	1.774	79	8	1.814	59.365
4.2	—0.7	434.1	21552	0.2678	1.835	85	6	1.896	61.179
4.2	0.7	438.0	21956	0.2873	1.938	85	6	1.984	63.075
									65.159

$$0 = 283.2 - 541.1\alpha - 41.6\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$$

$$\alpha = 0.5326$$

Общая сводка

n	θ	v	x	y	t	n	θ	v	x	y	t
		м/сек.						м/сек.			
0	35°00′	800.0	0.0	0.0	0.000	29	4°00′	334.2	11750	5267.4	26.865
1	34 45	779.1	277.3	193.1	.428	30	2 00	330.0	12142	5288.0	28.048
2	34 30	760.0	540.7	374.8	.844	31	0 00	326.5	12525	5294.3	29.216
3	34 15	742.2	791.6	546.5	1.248	32	−2 00	323.7	12901	5287.9	30.372
4	34 00	725.8	1031.2	708.9	1.642	33	4 00	321.3	13271	5268.5	31.521
5	33 45	710.5	1260.6	862.9	2.026	34	6 00	319.4	13636	5236.5	32.665
6	33 30	696.1	1480.6	1009.2	2.401	35	8 00	318.1	13997	5192.3	33.808
7	33 00	670.2	1895.6	1280.8	3.128	36	10 00	317.0	14356	5135.5	34.951
8	32 30	647.3	2281.4	1528.9	3.825	37	12 00	316.4	14713	5066.1	36.099
9	32 00	626.6	2642.1	1756.2	4.495	38	14 00	316.2	15069	4984.1	37.254
10	31 30	608.0	2980.7	1965.6	5.140	39	16 00	316.4	15325	4888.8	38.419
11	31 00	591.3	3300.5	2159.7	5.764	40	18 00	317.0	15682	4780.0	39.527
12	30 30	575.9	3603.7	2340.2	6.368	41	20 00	317.8	16040	4656.6	40.791
13	30 00	561.7	3891.2	2507.7	6.952	42	22 00	318.9	16400	4518.3	42.004
14	29 00	536.7	4427.2	2810.4	8.074	43	24 00	320.3	16764	4364.2	43.239
15	28 00	515.1	5018.9	3077.3	9.139	44	26 00	322.0	17121	4193.1	44.449
16	27 00	496.2	5473.4	3313.8	10.152	45	28 00	324.0	17492	4004.2	45.789
17	26 00	479.4	5896.4	3524.2	11.121	46	30 00	326.1	17868	3795.7	47.112
18	25 00	464.4	6292.8	3712.5	12.053	47	32 00	328.5	18249	3566.8	48.421
19	24 00	451.1	6665.4	3882.2	12.946	48	34 00	331.0	18636	3315.7	49.870
20	22 00	428.3	7352.4	4174.2	14.644	49	36 00	333.6	19034	3040.5	51.313
21	20 00	409.2	7975.3	4413.5	16.239	50	38 00	336.3	19433	2739.9	52.806
22	18 00	393.6	8547.8	4609.8	17.749	51	40 00	339.1	19839	2411.4	54.352
23	16 00	380.5	9080.3	4772.5	19.188	52	42 00	341.7	20251	2052.7	55.957
24	14 00	369.0	9579.4	4916.0	20.568	53	44 00	344.3	20669	1662.9	57.626
25	12 00	359.5	10051	5024.6	21.897	54	46 00	346.5	21093	1238.0	59.365
26	10 00	351.5	10500	5111.9	23.184	55	48 00	348.5	21552	777.3	61.179
27	8 00	344.8	10931	5180.1	24.438	56	50 00	350.2	21956	277.8	63.075
28	6 00	339.1	11347	5232.0	25.663	57	52 00	351.2		−263.3	65.159

Дальность 22188
Угол падения 51°3′.9

Скорость 350.7 м/сек.
Время полета 64.108 сек.

Прибавление к таблице III

Удвоение промежутков

n	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$	$\Delta\gamma$	ω	$\Delta\omega$	$\Delta^2\omega$	$\Delta^3\omega$	Δq
0	398.6	—	+	—		0.02112	—	+	—	
		45.6					262			
2	353.0		8.6			1850		52		
		37.0		2.3			210		11	
4	316.0		6.3			1640		41		
		30.7		2.5			169		12	0.0140
6	285.3		4.8			1471		29		
		25.9			271.6		140			127
7	259.4					1331				
					248.1					
7	518.8	—	+			2662	—	+	—	
		82.4					432			
9	436.4		19.8			2230		114		
		62.6		7.0			318		46	
11	373.8		12.8			1912		68		
		49.8		3.0			250		21	
13	324.0		9.8			1662		47		
		40.0		2.8	302.7		203		8	155
14	284.0		7.0			1459		39		
		33.0		1.9	266.9		164		10	137
15	251.0		5.1			1295		29		
		27.9			236.5		135			123
16	223.1					1160				
					210.4					111
13	648	—	+	—		3324	—	+	—	
		146					734			
15	502		42.8			2590		240	90	
		103.2		16.0			494			
17	398.8		26.4			2096		150	58	
		76.4		9.2			344			
19	322.4		17.6			1752		92	55	
		58.8		5.6	292.0		252			161
20	263.6		12.0			1500		37	3	
		46.8		3.0	239.3		215		+	140
21	216.8		9.0			1285		34	8	
		37.8		2.6	196.3		181			117
22	179.0		6.4			1104		42		
		31.4			162.7		139			101
23	147.6					965				
					143.5					92

Такое удвоение произведено и в дальнейшем так, что значения промежутка h суть:

от $n = 0$ до $n = 6$ $\quad h = 0°15' = 0.0043633$

» $n = 6$ » $n = 13$ $\quad h = 0°30' = 0.0087266$

» $n = 13$ » $n = 19$ $\quad h = 1°00' = 0.017453$

» $n = 19$ » $n = 57$ $\quad h = 2°00' = 0.034907$

Соответственно этим значениям h, постоянные множители

$$A = \frac{\pi R^2 M}{P} \cdot h; \quad B = \frac{h}{g}$$

имеют следующие значения:

	$\log A$	$\log B$
от $n =$ 0 до 6	$\bar{7}.58435$	$\bar{4}.64815$
» $n =$ 6 » 13	$\bar{7}.88538$	$\bar{4}.94918$
» $n =$ 13 » 19	$\bar{6}.18641$	$\bar{3}.25021$
» $n =$ 19 » 57	$\bar{6}.48744$	$\bar{3}.55124$

3°) Для проверки результатов величина y вычислена в табл. IV, пользуясь формулою

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_n - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_n$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$$

аналогичною формулам:

$$\Delta x_n = \xi_n + \frac{1}{2}\Delta\xi_n - \frac{1}{12}\Delta^2\xi_n$$

$$\Delta t_n = \tau_n + \frac{1}{2}\Delta\tau_n = \frac{1}{12}\Delta^2\tau_n$$

служащим для вычисления x и τ.

Формулы:

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2}$$

$$\Delta x_n = \xi_n + \frac{1}{2}\Delta\xi_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\xi_{n-2}$$

$$\Delta t_n = \tau_n + \frac{1}{2}\Delta\tau_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\tau_{n-2}$$

применялись лишь в конце каждого частного интервала.

4°) Чтобы получить значения φ, x, V, t для точки падения ($y = 0$), произведена интерполяция для угла φ, пользуясь вторыми разностями, а для остальных величин — пользуясь найденным значением φ.

5°) Суммирование величин ξ_n и τ_n дает величины x_n и t_n, при этом поправки $\frac{1}{2}\Delta^2\xi_n$ оказываются настолько малыми, что для большей части таблиц они не превышают 1 м в значениях x и 0.001 секунды в значениях τ, т. е. их не было надобности вычислять, тем не менее следует вычислять разности:

$$\Delta\xi_n,\ \Delta^2\xi_n,\ \Delta\tau_n \text{ и } \Delta^2\tau_n$$

чтобы по правильности их хода убедиться, что в вычисление не вкралась ошибка.

6°) Когда вычислитель производит этот расчет в первый раз, то величины Δy, Δq следует составлять не в уме, а на отдельном черновом листке.

7°) В нашем примере величина q выражается четырьмя или тремя значащими цифрами, относящимися к *пятому* знаку логарифма величины u или v, которые нам только и нужны, таким образом при вычислении выигрывается один знак, иными словами точность его удесятеряется; благодаря этому, в тех случаях, когда особой точности не требуется, величины q и ω можно вычислять пользуясь логарифмической линейкой и затем u и v — по 4-значной таблице логарифмов.

ПРИБАВЛЕНИЕ II

О распределении давления на голову снаряда, движущегося с большею скоростью

В «Протоколах Лондонского королевского общества» (Proceedings of the Royal Society, ser. A, vol. 97, 1920) помещена статья под заглавием: «The pressure Distribution on the Head of a Shell Moving at High Velocities, by L. Bairstow, F. R. S., R. H. Fowler and D. R. Hartree». Эта статья имеет прямое отношение к предмету нашего исследования, в виду чего здесь дается полный ее перевод.

§ **1. Введение.** Давление в любой точке тела, движущегося в жидкости, можно рассматривать как состоящее из двух слагающих: *статическое давление*, т. е. то давление, которое имело бы место в данной точке, если бы не было движения тела относительно жидкости, и *динамическое давление*, происходящее от относительного движения.

Сумма обоих может быть названа *полным давлением* в этой точке и, само собою разумеется, всегда положительная: лишь динамическое давление, отдельно взятое, может быть отрицательным.

По предложению Артиллерийского комитета, авторами были произведены предварительные опыты для определения в функции скорости динамического давления, действующего в разных точках головной части снаряда, направление оси которого совпадает или почти совпадает с направлением движения. Результаты представляют, повидимому, и общий научный интерес, почему, с разрешения Артиллерийского комитета, и приводятся в этой статье.

Основная идея опытов состояла в использовании обыкновенной дистанционной трубки как манометра для определения давления, при котором совершается горение пороха.

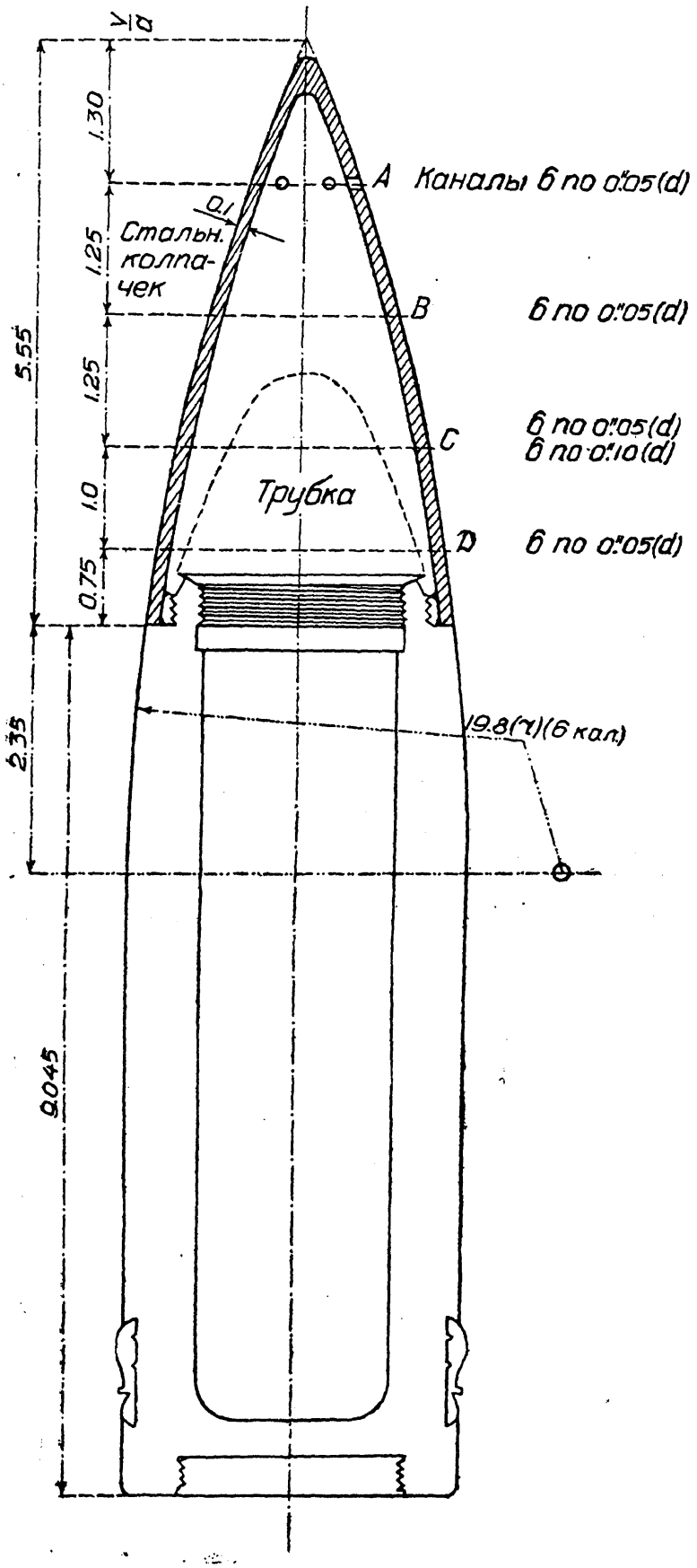
Из лабораторных опытов известно, что быстрота горения трубки зависит от полного наружного давления, имеющего место в продухах. Допустим на время, что это есть единственная причина, влияющая на быстроту горения, тогда по ряду опытов над снарядами, брошенными по той же самой траектории один за другим, определится соотношение между временем горения и длиною сгоревшей набивки трубки. Численным дифференцированием результатов опытов можно получить соотношение между быстротою горения и временем и, *следовательно, по сопоставлению с лабораторными опытами, между наружным давлением и временем.*

Если обстоятельства движения снаряда известны, то отсюда получается соотношение между динамическим давлением у продухов трубки и временем, а значит, и требуемое соотношение между динамическим давлением, скоростью снаряда и атмосферными условиями в данном месте.

Наружное давление не есть, однако, единственный фактор, от которого зависит быстрота горения. При одинаковых физических условиях быстрота горения изменяется от одной партии пороха к другой; на нее имеет значительное влияние вращение снаряда, и часто она заметно зависит от температуры набивки в трубке. Несмотря, однако, на эти влияния, по мере накопления материала становилось все яснее и яснее, что при надлежаще поставленных контрольных испытаниях для определения быстроты горения при соответствующих физических условиях дистанционная трубка может служить манометром для приближенного определения величины наружного давления при полете снаряда.

§ 2. Общая схема производства опытов. При опытах, описываемых в этой статье, снаряды снабжались колпаками, вполне закрывающими трубку; каждый колпак имел ряд дырок, просверленных в одинаковом расстоянии от носка (фиг. 49). Давление на продухи трубки есть давление внутри колпака, а это последнее практически равно давлению в том поясе, где просверлены дырки (§ 8). Поступая как сказано в § 1, мы можем получить соотношение между давлением внутри колпака и скоростью полета снаряда по данной траектории для данного расположения пояса дырок.

В предположении, что наличие отверстия имеет лишь незначительное влияние, мы можем определить соотношение между давлением и скоростью полета для ряда точек головной части, пользуясь колпаками с разным расположением дырок, и построить кривые (фиг. 50), показывающие



V/d
1.30
A
Каналы 6 по 0".05(d)
0.1
Стальн. колпачек
1.25
B
6 по 0".05(d)
5.55
1.25
C
6 по 0".05(d)
6 по 0".10(d)
Трубка
1.0
D
6 по 0".05(d)
0.75
19.8(r)(6 кал)
2.35
9.045

Фиг. 49.

изменение давления в зависимости от скорости для данной точки. Для заданной скорости мы можем построить кривые (фиг. 51), показывающие распределение динамического давления по головной части снаряда. Интегрируя это динамическое давление, мы можем получить величину, вносимую им в лобовое сопротивление снаряда. Полное сопротивление составляется из частей, происходящих: 1) от динамического давления на головную часть, 2) динамического (отрицательного) давления на дно, 3) трения о поверхность снаряда.

Если бы оказалось возможным определить полное сопротивление и первые две составные его части, происходящие от динамического давления, то, вероятно, мы сделали бы шаг вперед в понимании механизма сопротивления сжимаемой жидкости при больших скоростях.

Представляется вероятным, на основании общих соображений, что давление на самую оконечность снаряда следует формуле лорда Рэлея (Aerial Plane Waves of Finite Amplitude, Sci. Pap., vol. 5, p. 610). Колпаки с отверстием в самой оконечности не были испытаны, но имеется возможность их так сделать, и непосредственная проверка формулы Рэлея представляла бы значительный интерес.

Кривые (фиг. 50) имеют в общем тот же вид, как кривая Рэлея для оконечности, но давление падает так быстро близ оконечности, что достаточно точное сравнение на основании произведенных опытов невозможно.

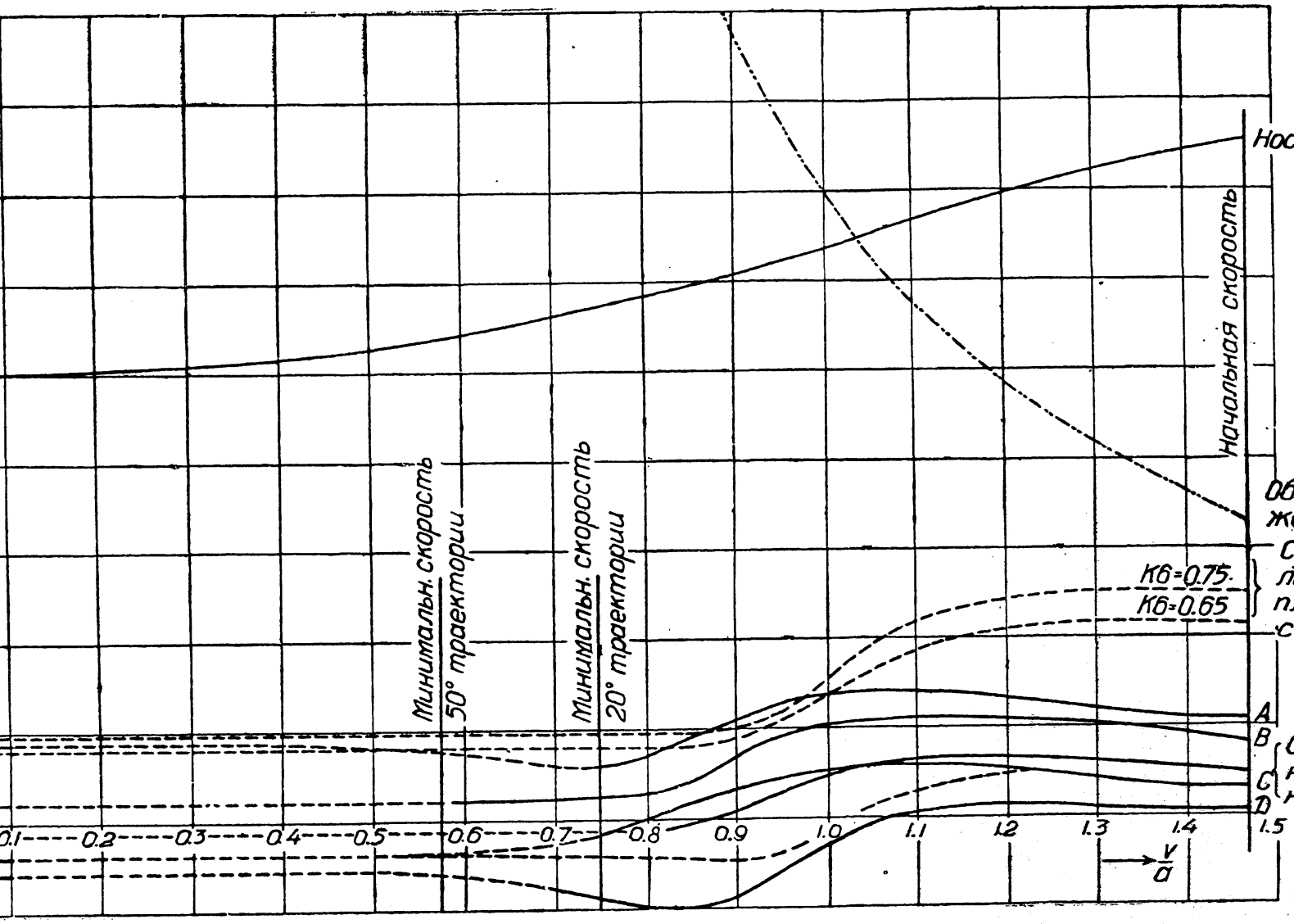
Ряд затруднений, многие из которых представятся читателю, обойдены молчанием в предыдущих параграфах — они будут рассмотрены ниже в § 8.

§ 3. Подробности стрельб. 18-фунтовое полевое орудие (калибр 3.3 дюйма), на станке для зенитной стрельбы, было взято для испытаний. Начальная скорость при опытах была 1603 фут/сек. Снаряды, которыми пользовались, представлены на фиг. 49. Колпаки были закруглены у вершины; мы обозначим термином «*острие*» положение теоретической точки — пересечения дуги, очерчивающей оживальную часть с осью снаряда.

Было испытано 5 образцов колпаков, причем на каждом было по одному поясу, содержащему 6 дырок. У 4 образцов диаметр дырок был в 0.05 дюйма, у одного — в 0.10 дюйма; эти образцы будут ниже обозначены, как показано в таблице.

Образец C(*) был взят для проверки, чтобы убедиться, имеет ли значение диаметр дырок.

Было произведено по шесть групп из пяти выстрелов в каждой серии, при установке трубок: 3, 6, 9, 12, 16, 20 и угле возвышения в 20°.

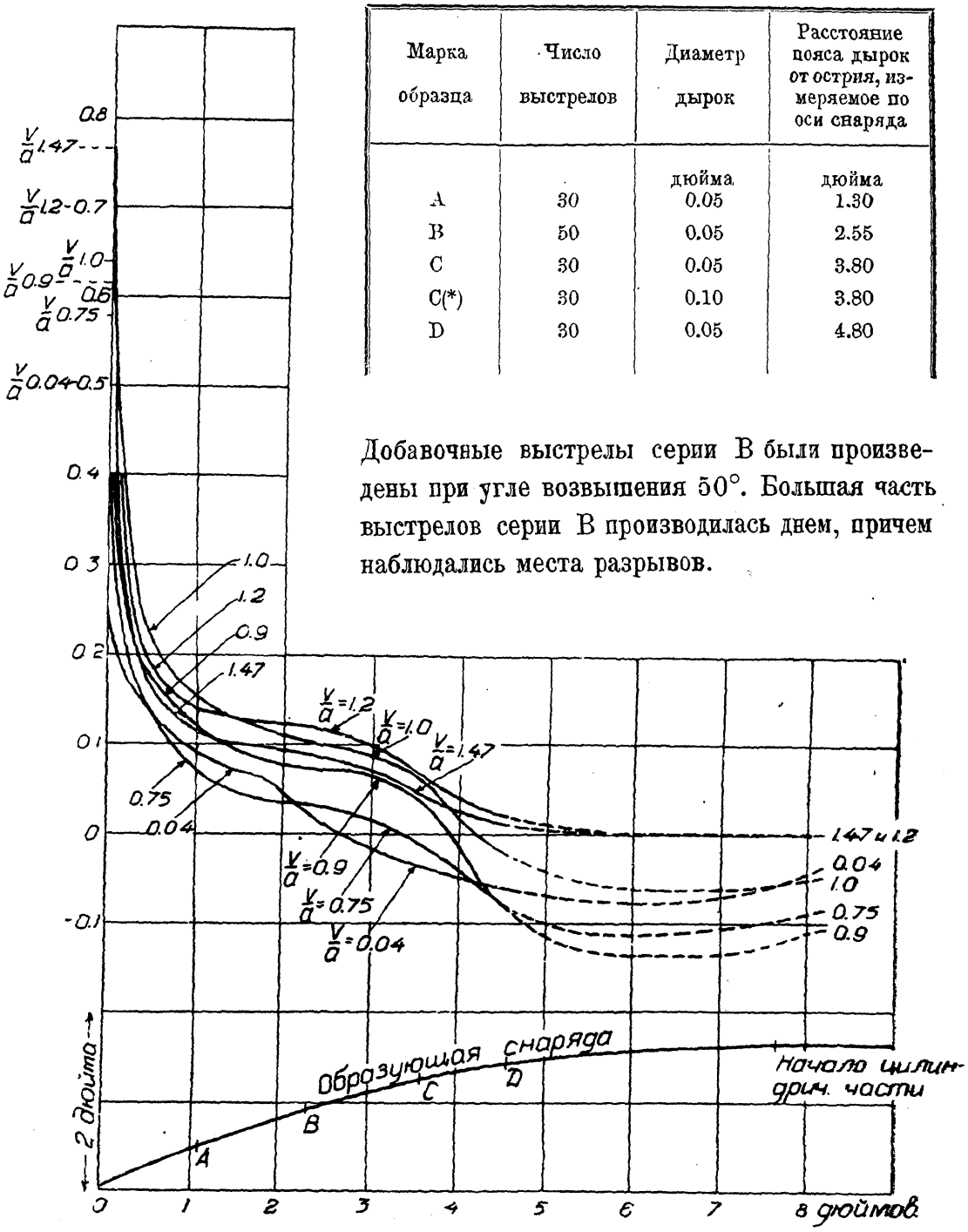

Нос
Начальная скорость
Об
же
С
л
п
се
Кб=0.75
Кб=0.65
Минимальн. скорость
50° траектории
Минимальн. скорость
20° траектории
A
B
C
D
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
V/a

Фиг. 50.

Таблица I

Марка образца	Число выстрелов	Диаметр дырок	Расстояние пояса дырок от острия, измеряемое по оси снаряда
		дюйма	дюйма
A	30	0.05	1.30
B	50	0.05	2.55
C	30	0.05	3.80
C(*)	30	0.10	3.80
D	30	0.05	4.80

Добавочные выстрелы серии B были произведены при угле возвышения 50°. Большая часть выстрелов серии B производилась днем, причем наблюдались места разрывов.



Фиг. 51.

Остальные выстрелы всех серий производились ночью. Времена горения трубки замечались для всех выстрелов, средние для каждой группы показаны в табл. II.

Таблица II

Времена горения трубки

Установка трубки	Серия A. 20°			Серия B. 20°.			Серия B. 50°		
	Перевычисленные	Наблюденные	Средние отклонения	Перевычисленные	Наблюденные	Средние отклонения	Перевычисленные	Наблюденные	Средние отклонения
3	2.41	2.47	0.15	2.48	2.42	0.04			
6	5.15	5.28	0.08	5.02	5.34	0.12			
9	8.04	8.02	0.13	8.32	8.36	0.06	9.03	9.01	0.16
12	11.07	10.90	0.21	11.48	11.47	0.35	12.85	12.73	0.08
16	15.26	15.26	0.12	15.78	15.82	0.15	18.23	18.19	0.16
20	19.47	19.50	0.12	20.07	20.16	0.12	23.82	23.68	0.27
	Серия C. 20°			Серия C.(*) 20°			Серия D. 20°		
3	2.67	2.70	0.07	2.68	2.70	0.04	2.84	2.86	0.09
6	5.68	5.65	0.12	5.79	5.72	0.15	6.02	5.97	0.17
9	8.81	8.92	0.29	9.14	9.12	0.14	9.46	9.51	0.32
12	12.04	12.02	0.18	12.57	12.57	0.08	13.02	13.08	0.22
16	16.45	16.46	0.34	17.09	17.15	0.10	17.73	17.64	0.36
20	20.84	20.87	0.29	21.53	21.38	0.31	22.28	22.31	0.17

Примечания. 1°) В столбце «средние отклонения» показаны средние величины разностей отдельных наблюдений каждой группы, от среднего значения для всей группы.

2°) Следующие ненормальные выстрелы опущены как из средних для группы, так и из средних отклонений (см. § 8).

Серия A: установка 20 : 10.10; установка 16 : 7.03; установка 12 : 8.32.

Серия B: 20° установка 12 : 5.7; установка 3 : 1.92.

Серия B: 50° установка 16 : 16.89; установка 12 : 8.03.

Серия C: установка 12 : 10.23; установка 9 : 4.62, 7.81; установка 6 : 3.98.

Серия D: установка 6 : 2.83; установка 3 : 1.84.

Время отмечалось с точностью до 0.01 секунд, но для каждого отдельного выстрела время не может считаться до такой степени точным. Опыт показал, что при благоприятных обстоятельствах, имевших место при этих опытах, и при трех или большем числе наблюдателей время для отдельного выстрела может быть определено с вероятною ошибкою в 0.04 секунды.

По наблюдениям мест разрыва была определена баллистическая кривая для снарядов. Состояние верхних слоев атмосферы было определено

по наблюдениям с аэроплана. Строение ветра также было определено. На основании этих наблюдений и обычных вычислений, которых нет надобности объяснять подробно, были определены и занесены в таблицу следующие количества, соответствующие положению снаряда в конце каждой целой секунды после выстрела:

1) Скорость снаряда по отношению к воздуху v.

2) Статическое давление воздуха p.

3) Плотность воздуха ρ.

4) Отношение $\frac{v}{a}$, где a скорость звука в воздухе.

§ 4. Лабораторное определение быстроты горения трубок. Чтобы определить быстроту горения трубок, примененных при опыте, существенно важно производство лабораторных опытов, при соответствующих физических условиях, над трубками, набитыми, при одинаковых условиях, порохом той же самой партии. Такие трубки будем называть трубками *той же самой партии.*

Быстрота горения трубок той же партии при данном давлении и температуре изменяется в весьма широких пределах вместе с угловою скоростью вращения снаряда, в особенности при низких давлениях, поэтому существенно важно производить лабораторные опыты с трубкой, вращающейся с должным числом оборотов (а иногда) и при должной температуре. Так как поступательная *скорость* движения снаряда не может оказать влияния на трубку и так как замедление (отрицательное ускорение) поступательного движения мало по сравнению с радиальным ускорением в отводных каналах пороховых газов, то физические условия, имеющие место при полете снаряда, могут быть воспроизведены в лаборатории. Начальная угловая скорость вращения снаряда при этих опытах составляла 11660 об/мин., и можно считать, что она сохраняет свою величину для сравнительно коротких промежутков времени, с которыми мы имеем дело.

В табл. III показана быстрота горения трубок, определенная при 11750 об/мин. Это определение было произведено M. Goudie при помощи разборного корпуса трубки, укрепленного на оси турбины Лаваля, в этот корпус вставлялись кольца с пороховою набивкою от настоящей трубки. Корпус вращался внутри воздухонепроницаемой коробки, в которой автоматически поддерживалось требуемое давление.

Были также произведены испытания для определения влияния изменений в быстроте вращения и в температуре. Это влияние оказалось настолько малым, что им можно пренебречь в описываемых опытах.

Градуировка, которой определяется установка трубок, шла от 0 до 22, причем длина сгорающей пороховой набивки пропорциональна этой установке. Следовательно, при постоянных внешних условиях время горения трубки есть линейная функция установки трубки, за исключением весьма малых промежутков времени.

В табл. III показано соотношение между быстротою горения трубки и давлением в отводных отверстиях для газов. Быстрота горения дана в делениях установки трубок на 1 секунду времени, давление дано в атмосферах.

Чтобы определить из наблюдений, с возможно большею точностью, кривую, показывающую зависимость времени горения от установки трубки, необходимо определить возможно точнее постоянные вышеупомянутого линейного соотношения, в особенности «место нуля», т. е. то значение установки, которое соответствует нулю времени горения; оно не совпадает с нулем установки, его положение зависит от вида внутренних соединений между пороховыми дорожками, и его необходимо определить по действительным трубкам.

Таблица III

Быстрота горения трубок при различных давлениях

Быстрота горения	Давление	Разности	Быстрота горения	Давление	Разности
0.5	0.407		1.25	1.474	
		0.057			0.107
0.55	0.464		1.3	1.581	
		58			.118
0.6	0.522		1.38	1.699	
		59			.130
0.65	0.581		1.4	1.829	
		60			.145
0.7	0.641		1.45	1.974	
		62			.163
0.75	0.703		1.5	2.137	
		64			.184
0.8	0.767		1.55	2.321	
		66			.207
0.85	0.833		1.6	2.528	
		68			.235
0.9	0.901		1.65	2.763	
		70			.267
0.95	0.971		1.7	3.030	
		73			0.305
1.0	1.044		1.75	3.335	
		76			
1.05	1.120				
		80			
1.1	1.200				
		85			
1.15	1.285				
		91			
1.2	1.376				
		0.098			

Для тех трубок, которыми пользовались, место нуля оказалось 0.24 деления установки. Принято, что место нуля не изменяется при выстреле; если бы оказалось, что это предположение не верно, то быстрота горения, наблюденная для малых промежутков, будет заключать некоторую погрешность, но для больших промежутков эта погрешность нечувствительна.

§ 5. Разбор опытов. Данные, полученные из наблюдений, описанных в §§ 3 и 4, достаточны, как показал их разбор, чтобы доставить значения динамического давления для значений $\frac{v}{a}$, лежащих между 0.7 и 1.4 (в виду некоторой неопределенности места нуля, значениям динамического давления для $\frac{v}{a}$, большего 1.2, надо приписывать меньший вес, нежели для значения 1.2 и меньших его), для всех положений отверстий в колпаке.

Нет надобности входить в подробности числовых расчетов, достаточно сказать, что после того как были получены окончательные результаты для динамических давлений, они были проверены обратным процессом интегрирования, чтобы получить по быстроте горения время горения трубки для каждой группы выстрелов. Эти вычисленные времена показаны в табл. II, и по сличению их с наблюденными видно, что для всех рядов согласие удовлетворительно, ибо разность между вычисленным и наблюденным временем меньше половины средней величины отступлений отдельных групп от среднего.

В серии B, в которой стрельбы производились как при угле возвышения 20°, так и 50°, вычисленные времена во всех случаях несколько меньше наблюденных при 50° и несколько больше при 20° для больших значений установки. Разности, однако, не больше, чем для других серий.

При обычном в аэродинамике обозначении динамическое давление может быть представлено в виде

$$\rho v^2 f_p\left(\frac{v}{a}\right)$$

где v — скорость, ρ — плотность воздуха, a — скорость звука и f_p — численный коэффициент, именуемый *коэффициентом давления*.

По теории размерности возможно, что этот коэффициент зависит и от других аргументов, кроме $\frac{v}{a}$, но мало вероятно, чтобы прочие аргументы оказывали значительное влияние при наших испытаниях. Известно, что при малых скоростях f_p приблизительно постоянно, причем это постоянство сохраняется приблизительно до $\frac{v}{a} = 0.7$. Когда давление, плотность

и скорость выражены в какой бы то ни было абсолютной системе единиц, то f_p не зависит от выбора этих единиц и представляет бо́льшее удобство для включения в таблицы, нежели самое динамическое давление, ибо не зависит от ρ. Значения f_p, определенные вышеописанными опытами, были рассчитаны по величине динамического давления и показаны в табл. IV как функция аргумента $\frac{v}{a}$; эта же таблица представлена графически на фиг. 50.

В той же таблице приведены значения коэффициентов давления, определенных в аэродинамической трубе при скорости дутья в 40 фут/сек., для тех же мест отверстий в колпаке. Из табл. IV, а также из фиг. 50 видно, что наблюденные значения $f_p(0.7)$ согласуются с данными, полученными в трубе.

Нанося значения f_p, даваемые табл. IV при заданной величине $\frac{v}{a}$, по ординатам против соответствующего положения отверстий, получаем диаграмму (фиг. 51), показывающую распределение динамического давления (коэффициентов давления) по головной части снаряда. Кривые построены для значений 1.47; 1.2; 1.0; 0.9; 0.75 и 0.04 отношения $\frac{v}{a}$. Значения давления на самое острие снаряда, приведенные в табл. IV, вычислены по формуле Рэлея.

На фиг. 51 точный вид кривых между острием и первым рядом отверстий для пояса A не вполне определенный; это не важно для целей § 6, но желательно, чтобы кривые были продолжены за пояс D на основании наблюдений.

§ 6. Интегрирование давления на головную часть снаряда. Легко показать, что если $p(y)$ есть динамическое давление в точке снаряда, расстояние которой до оси есть y, то полная сила, происходящая от динамического давления при симметричном положении снаряда, направлена по оси снаряда и равна

$$2\pi \int_0^r y\,p(y)\,dy$$

где r есть радиус снаряда. Среднее значение слагающей динамического давления в направлении оси снаряда поэтому равно

$$\frac{2}{r^2} \int_0^r y\,p(y)\,dy$$

и соответствующее ему значение коэффициента лобового сопротивления $\bar{f}_p\left(\frac{v}{a}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{f}_p\left(\frac{v}{a}\right) = \frac{2}{r^2}\int_0^r y\, f_p\left(\frac{v}{a}, y\right) dy \tag{1}$$

Этот коэффициент вычислен для различных значений $\frac{v}{a}$, и результаты даны в табл. IV и представлены графически на кривой (фиг. 50).

Если полное сопротивление на снаряд обозначить через R, то будет

$$R = A\rho v^2 f_R\left(\frac{v}{a}\right)$$

где A есть площадь поперечного сечения снаряда, и сопротивление на единицу площади поперечного сечения будет

$$\frac{R}{A} = \rho v^2 f_R\left(\frac{v}{a}\right)$$

Коэффициент $f_R\left(\frac{v}{a}\right)$ непосредственно сравним с $\bar{f}_p\left(\frac{v}{a}\right)$ — коэффициентом среднего динамического давления на головную часть, которая является одним из главных его слагаемых.

Таблица IV

$\frac{v}{a}$	Значения $f_p\left(\frac{v}{a}\right)$						$\bar{f}\left(\frac{v}{a}\right)$	$f_B\left(\frac{v}{a}\right)$	Полное лобовое сопротивление	
	Острие снаряда	Положение отверстий в колпаке снаряда								
	Вычисленное	A	B	C	C*	D			Верхний предел	Нижний пр дел
		Определено опыт м								
1.47	0.760	0.11	0.085	0.035	0.035	0.01	0.054	0.328	0.247	0.214
1.4	0.747	0.115	0.09	0.04	0.04	0.01	0.060	0.362	0.249	0.215
1.3	0.724	0.125	0.10	0.045	0.045	0.01	0.065	0.420	0.249	0.215
1.2	0.698	0.135	0.11	0.055	0.05	0.015	0.070	0.493	0.242	0.209
1.1	0.669	0.145	0.11	0.06	0.035	0.01	0.069	0.585	0.221	0.191
1.0	0.638	0.14	0.10	0.055	−0.01	−0.025	0.053	0.710	0.162	0.140
0.9	0.610	0.11	0.07	0.03	−0.04	−0.085	+0.010	0.876	0.106	0.091
0.8	0.585	0.07	0.03	0	−0.04	−0.095	—	—	—	—
0.75	0.574	0.06	0.025	−0.015	−0.04	−0.085	−0.015	1.26	0.095	0.082
0.7	0.664	—	0.025	—	—	—	—	—	—	—
0.6	0.546	—	0.025	—	—	—	—	—	—	—
По определению в аэродинамической трубе										
0.04	0.500	0.086	0.021	−0.039	−0.039	- 0.061	−0.010	—	0.094	0.081

Значения коэффициента f_K, сопротивления на единицу площади поперечного сечения, не вполне точно известны для снарядов испытанной формы, можно лишь с уверенностью утверждать, что эти значения лежат между показанными в таблице верхним и нижним их пределом и кривые фиг. 50 при больших скоростях приближаются к низшему значению и при малых скоростях к высшему.

Коэффициент давления, или лучше сказать «недавления» на дно, соответствующий абсолютной пустоте, имел бы значение

$$f_B\left(\frac{v}{a}\right) = \frac{p}{\rho v^2} = \gamma^{-1}\left(\frac{v}{a}\right)^{-2}$$

где γ — отношение теплоемкостей для газа. Значения $f_K\left(\frac{v}{a}\right)$ приведены в табл. IV и показаны на фиг. 50.

Как видно, значения $f_B\left(\frac{v}{a}\right)$ превышают значения коэффициента полного сопротивления $f_K\left(\frac{v}{a}\right)$, это указывает, что до скорости $\frac{v}{a}$, меньшей 1.5, нет абсолютной пустоты позади дна снаряда.

Определение опытом точного значения степени пустоты позади дна было бы весьма интересно, однако такое определение невозможно, пользуясь горением трубки с каналом, заполненным запрессованным порохом, ибо такая трубка совсем не будет гореть при столь малом давлении.

§ 7. Произведенные испытания доставили тот практически важный результат, что на основании их получается полное объяснение характера горения трубки. Изменения быстроты горения, которыми сопровождаются изменения начальной скорости или изменения калибра снаряда, находят качественное объяснение на основании кривых фиг. 50. В настоящее время возможно предсказать характер горения трубки с гораздо большею точностью, нежели то было достижимо до войны.

Некоторый интерес представляет сопоставление полученного распределения давления на головную часть снаряда с другими результатами, относящимися к этому предмету.

Кривые фиг. 50 показывают, что при всех испытанных скоростях наибольшее давление имеет место у самого острия снаряда. Давление быстро падает по мере того, как точка наблюдения приближается к дну, и становится отрицательным на некотором расстоянии впереди цилиндрической части.

Опытом давление у самого острия снаряда было определено лишь при малой скорости $\left(\frac{v}{a} = 0.04\right)$, причем оказалось, что оно не зависит от вязкости жидкости. При этих малых скоростях вычислением и опытом обнаруживается, что эта независимость от вязкости простирается настолько далеко, что почти покрывает всю область положительного давления. Наибольшее наблюденное давление у острия совпадает с вычисленным для идеальной (не обладающей вязкостью) жидкости, рассеяние же энергии, происходящее от вязкости, показывает увеличивающийся эффект по мере удаления точки наблюдения от острия.

Полное восстановление давления на дно, которое теоретически должно бы иметь место для идеальной жидкости, не наблюдается даже приближенно.

Приведение наблюдений для произведенных выстрелов производилось в предположении, что влиянием вязкости на давление на головную часть снаряда можно прéнебречь; результаты вполне согласуются с этим предположением. Вследствие этого можно ожидать, что давление могло бы быть приближенно рассчитано по уравнениям движения тела в идеальной сжимаемой жидкости. В случае получения решения этих уравнений произведенные наблюдения доставят проверку справедливости сделанных предположений.

С точки зрения опытного исследования движения снаряда, важность произведенных наблюдений настолько очевидна, что не требует пояснений.

§ 8. Возможные возмущающие влияния и точность результатов. В заключение полезно привести ряд трудностей, которые в начале не упомянуты.

Мы приняли, что давление в отверстиях колпака практически одинаково с давлением в выходных отверстиях находящейся под колпаком трубки. Факторы, которые можно считать нарушающими это равенство, суть: 1) центробежная сила, имеющая место вследствие вращения вместе со снарядом воздуха, находящегося внутри колпака, 2) разность давления, необходимая чтобы проталкивать продукты горения сквозь отверстия колпака с надлежащею скоростью, 3) запаздывание вначале, пока колпак заполнится газами до давления, равного наружному.

Первое влияние легко вычисляется; для второго по известному составу пороха и скорости его горения определяется наибольшая скорость истечения образующихся газов. Над типами примененных колпаков были произведены наблюдения, при которых определялась разность давлений, необходимая, чтобы обеспечить задаваемую скорость истечения. Эти наблюдения попутно определяли и третье влияние. В результате оказывается, что

полная разность давления превышает 0.01 атм лишь в течение весьма короткого промежутка времени $\left(\text{порядка } \frac{1}{20} \text{ секунды}\right)$ при начале. Поэтому этим влиянием можно пренебречь.

Гораздо серьезнее вопрос: давление в отверстиях колпака при малости этих отверстий действительно ли равно давлению на это место поверхности колпака при отсутствии отверстия? Для малых скоростей это подтверждается опытами, произведенными в аэродинамических трубах над моделями аэростатов и крыльев аэропланов, и не видно причин, почему это могло бы не иметь места и при больших скоростях. Для проверки этого предположения были произведены сравнительные испытания серии C и C*. В серии C* диаметр отверстий был вдвое больше, нежели в серии C. С ясностью обнаружилось, что определенные этими опытами динамические давления различны. Разность не заметна при больших скоростях, ибо при установке трубок 3, времена горения (табл. II) одинаковы в обоих случаях, но для скоростей $\frac{v}{a}$ между 1.1 и 0.8 давление, определяемое для C*, чувствительно ниже, нежели для C (фиг. 50). Таким образом для серии C* отверстия не суть «малые» при этих скоростях; вследствие этого возникает сомнение, могут ли они почитаться «малыми» для серий A, B, C, D. Если нет, то истинная величина динамического давления несколько выше наблюденной. Эта разность вероятно малая, но не представляется возможным указать ее наибольшее возможное значение.

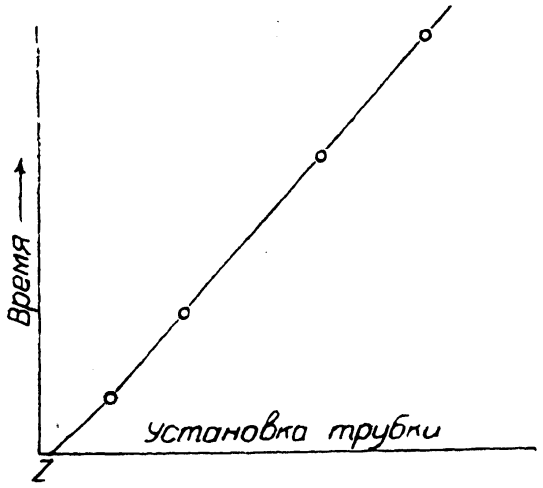
Другие причины менее важны; так, мы допустили без оговорки, что во все время движения ось симметрии снаряда и касательная к траектории его центра тяжести совпадают.

Отклонения эти остаются весьма малыми; они могут превышать 1° или 2° в начале, в течение короткого промежутка времени, для большей же части траектории они много меньше. Влияние такого отклонения на среднее давление внутри колпака было определено при малых скоростях и оказалось весьма малым. Вероятно, что этим влиянием можно пренебречь.

Наконец, мы приходим к неопределенности в самом характере горения трубки, в особенности в положении начальной точки. Все трубки, примененные при опытах, подвергались, по возможности, вполне одинаковому способу производства. Нет оснований предполагать каких-либо систематических уклонений в использованном материале; могли остаться уклонения в пределах практических «допусков»; влияние их проявилось в величине средних отклонений, показанных в табл. II. Обратим также внимание, что некото-

рое число выстрелов было отброшено и не вошло в средние результаты табл. II; но так как для всех этих выстрелов время горения ненормально «короткое» и так как они имели место для всех серий, кроме серии C* с ее большими отверстиями, то представляется вероятным, что эти ненормальные уклонения произошли от каких-либо механических причин, напр. закупорки отверстий шлаками или краской.

С другой стороны, погрешность в начальной точке произведет систематическую погрешность при больших скоростях. Это ясно видно из фиг. 52, по которой очевидно, что истинное положение начальной точки Z



Фиг. 52.

окажет значительное влияние на уклон кривой установки трубки для малых значений времени горения. Быстрота горения определяется именно уклоном подобных кривых.

Окончательные результаты приведены в таблице с точностью до 0.005 в значениях f_p. Это соответствует приблизительно давлению около $\frac{1}{200}$ атм при скорости, равной скорости звука.

Не следует, однако, считать, что это есть действительная точность полученных результатов, в особенности при скоростях $\frac{v}{a}$ выше 1.1 или 1.2, где влияние положения начальной точки значительно. Однако представляется возможным утверждать, что приведенные в таблицах и показанные на чертежах значения коэффициентов имеют истинный порядок своей величины и обнаруживают правильно тот тип изменения этих значений, который имеет место, когда скорость снаряда переходит через скорость звука в воздухе.

О НЕКОТОРЫХ ПРИЕМАХ ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ПРОДОЛГОВАТОГО СНАРЯДА

§ **1.** В сочинении Д. А. Вентцеля, Б. Н. Окунева и Я. И. Шапиро — «Внешняя баллистика» (ч. II), с большою обстоятельностью и полнотою изложено учение о вращательном движении снаряда.

Уравнения движения рассматриваются в координатных параметрах Спарра и пишутся в такой форме:

$$\delta_1'' - 2\alpha\delta_2' - \beta\delta_1 = 2\alpha\theta' \qquad (1)$$

$$\delta_2'' + 2\alpha\delta_1' - \beta\delta_2 = -\theta'' \qquad (2)$$

где:

$$2\alpha = \frac{Cr_0}{A}; \quad \beta = h\frac{d^2 \cdot 10^3}{gA} H(y)\, v^2 K_M$$

причем C есть момент инерции снаряда около его оси симметрии, A — момент инерции около экваториальной оси, r_0 — угловая скорость вращения около оси симметрии, сохраняющая постоянное значение, которое можно принимать равным скорости, сообщенной нарезами, $A\beta\delta_1$ и $A\beta\delta_2$ — моменты опрокидывающей пары, θ — угол наклонения касательной к траектории центра тяжести снаряда к горизонту, отсюда прочие обозначения сами собою понятны.

Из уравнения (2) видно, что величина β имеет размерность углового ускорения, величина α — постоянная, имеющая размерность угловой скорости, так что отношение $\frac{\beta}{\alpha^2}$ есть безразмерное отвлеченное число, являющееся известной функцией времени t, заданной таблично или графически по результатам вычисления плоской траектории снаряда.

Очевидно, что величина $\frac{\beta}{\alpha^2}$ имеет наибольшее значение при вылете, и по указаниям авторов это значение близко к половине (см. стр. 135).

Для интегрирования уравнений (1) и (2), в указанном сочинении применена метода Спарра — разложения решения по степеням параметра $\frac{1}{\alpha}$, что приводит к довольно сложным и громоздким выкладкам и к формулам, не удобным для численных вычислений.

В этой заметке я имею в виду изложить вкратце некоторые другие приемы интегрирования этих уравнений, как мне кажется более наглядные и быстрее ведущие к цели, и пояснить их численными примерами.

§ 2. Заметим, прежде всего, что значения θ' и θ'' легко находятся из уравнений движения центра тяжести снаряда по плоской траектории, в самом деле эти уравнения можно писать в таком виде:

$$\frac{P}{g}\cdot\frac{d(v\cos\theta)}{dt} = -R\cos\theta$$

$$\frac{P}{g}\cdot\frac{v^2}{r} = P\cos\theta$$

$$v = -r\frac{d\theta}{dt}$$

$$dx = -r\cos\theta\, d\theta$$

$$dy = -r\sin\theta\, d\theta$$

где P есть вес снаряда, v — скорость в момент времени t, r — радиус кривизны траектории, R — сопротивление воздуха:

$$R = GK_M(v)H(y)v^2$$

причем

$$G = \lambda\frac{\pi d^2}{4}\cdot 10^3$$

λ есть коэффициент формы, d — калибр снаряда. Из этих уравнений следует:

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta' = -\frac{g}{v}\cos\theta$$

$$\frac{\theta''}{\theta'} = \frac{v'}{v} + \theta'\operatorname{tg}\theta$$

$$\frac{P}{g}(v'\cos\theta - \theta'\sin\theta) = -R\cos\theta$$

Откуда, исключая v', получим выражения θ' и θ'' через имеемые при вычислении плоской траектории величины, но практически проще воспользоваться таблицей, показывающей зависимость между θ и t, и находить θ' и θ'' по правилам нахождения производных от функций, заданных таблично, в особенности если траектория настильная.

§ 3. Уравнения (1) и (2) — линейные, и хотя они с переменными коэффициентами, тем не менее полное их решение состоит из общего интеграла соответствующих им однородных уравнений, т. е. уравнений:

$$\gamma_1'' - 2\alpha\gamma_2' - \beta\gamma_1 = 0 \tag{1'}$$
$$\gamma_2'' + 2\alpha\gamma_1' - \beta\gamma_2 = 0 \tag{2'}$$

и частных решений Δ_1 и Δ_2, определяемых уравнениями:

$$\Delta_1'' - 2\alpha\Delta_2' - \beta\Delta_1 = 2\alpha\theta' \tag{3}$$
$$\Delta_2'' + 2\alpha\Delta_1' - \beta\Delta_2 = -\theta'' \tag{4}$$

так что

$$\delta_1 = \gamma_1 + \Delta_1 \tag{3'}$$
$$\delta_2 = \gamma_2 + \Delta_2 \tag{4'}$$

Рассмотрим сперва однородные уравнения (1') и (2'). Положим:

$$\xi = \gamma_1 \sin\alpha t + \gamma_2 \cos\alpha t \tag{5}$$
$$\eta = \gamma_1 \cos\alpha t - \gamma_2 \sin\alpha t \tag{6}$$

Тогда получим:

$$\xi'' = (\gamma_1'' - 2\alpha\gamma_2' - \alpha^2\gamma_1)\sin\alpha t + (\gamma_2'' + 2\alpha\gamma_1' - \alpha^2\gamma_2)\cos\alpha t$$
$$\eta'' = (\gamma_1'' - 2\alpha\gamma_2' - \alpha^2\gamma_1)\cos\alpha t - (\gamma_2'' + 2\alpha\gamma_2' - \alpha^2\gamma_2)\sin\alpha t$$

Отсюда очевидно, что если указанную замену сделать в уравнениях:

$$\xi'' + (\alpha^2 - \beta)\xi = 0 \tag{7}$$
$$\eta'' + (\alpha^2 - \beta)\eta = 0$$

то мы получим уравнения:

$$\begin{aligned}(\gamma_1'' - 2\alpha\gamma_2' - \beta\gamma_1)\sin\alpha t + (\gamma_2'' + 2\alpha\gamma_1' - \beta\gamma_2)\cos\alpha t = 0\\ (\gamma_1'' - 2\alpha\gamma_2' - \beta\gamma_1)\cos\alpha t - (\gamma_2'' + 2\alpha\gamma_1' - \beta\gamma_2)\sin\alpha t = 0\end{aligned} \tag{7'}$$

откуда следует:

$$\gamma_1'' - 2\alpha\gamma_2' - \beta\gamma_1 = 0 \tag{1'}$$
$$\gamma_2'' + 2\alpha\gamma_1' - \beta\gamma_2 = 0 \tag{2'}$$

Это показывает, что система уравнений (7) эквивалентна системе уравнений (1') и (2'), следовательно, после того как величины ξ и η из

уравнений (7) будут найдены, решения γ_1 и γ_2 уравнений (1′) и (2′) находятся по формулам:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \xi \sin \alpha t + \eta \cos \alpha t \\ \gamma_2 &= \xi \cos \alpha t - \eta \sin \alpha t \end{aligned} \tag{8}$$

которые следуют из уравнений (5) и (6).

Таким образом интегрирование однородных уравнений (1′) и (2′) приводится к интегрированию уравнений (7) более простого вида.

§ **4.** Очевидно, что простейший случай есть тот, когда рассматривается столь малый промежуток времени, иначе — столь малый участок траектории, что изменяемостью величины β можно пренебречь и заменить эту величину на этом участке средним ее значением, которое мы обозначим через b, тогда полагая

$$\alpha^2 - b = c^2 \tag{9}$$

получим уравнения:

$$\begin{aligned} \xi'' + c^2 \xi &= 0 \\ \eta'' + c^2 \eta &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

общие интегралы которых суть:

$$\begin{aligned} \xi &= A_1 \cos ct + B_1 \sin ct \\ \eta &= C_1 \sin ct + D_1 \cos ct \end{aligned} \tag{11}$$

где A_1, B_1, C_1, D_1 — произвольные постоянные. Чтобы представить величины γ_1 и γ_2 в более симметричном виде, полагаем:

$$\begin{aligned} \frac{A_1 + C_1}{2} &= P_1; \quad \frac{A_1 - C_1}{2} = Q_1 \\ \frac{B_1 + D_1}{2} &= M_1; \quad \frac{B_1 - D_1}{2} = N_1 \end{aligned} \tag{12}$$

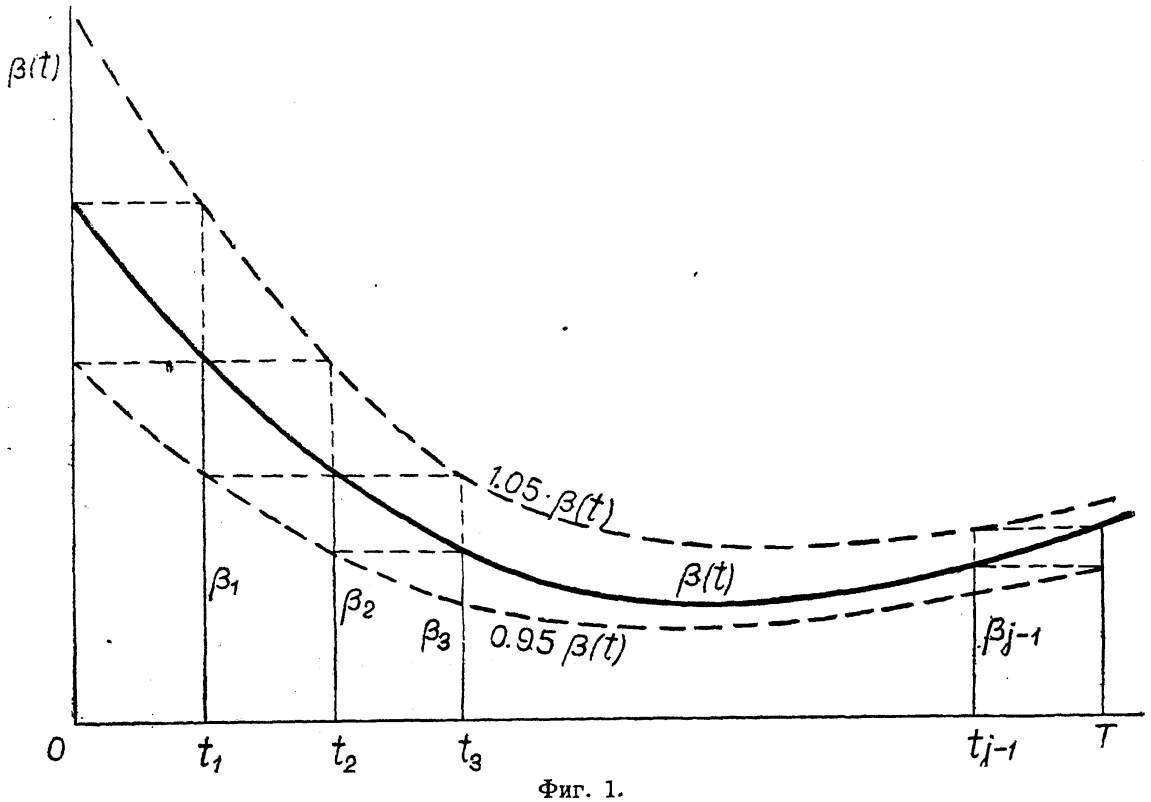
тогда, после простых преобразований, получим:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= P_1 \sin (\alpha + c) t + Q_1 \sin (\alpha - c) t + M_1 \cos (\alpha - c) t - N_1 \cos (\alpha + c) t \\ \gamma_2 &= P_1 \cos (\alpha + c) t + Q_1 \cos (\alpha - c) t - M_1 \sin (\alpha - c) t + N_1 \sin (\alpha + c) t \end{aligned} \tag{13}$$

Ясно, что P_1, Q_1, M_1 и N_1 суть такие же постоянные произвольные, как и A_1, B_1, C_1, D_1.

§ **5.** К этому простейшему может быть приведено приближенное рассмотрение и более общего случая. Пусть T есть полное время полета.

Построим на протяжении от $t = 0$ до $t = T$ график функции β. Необходимо заметить, что истинные значения этой функции, в виду входящего в нее множителя h, известны лишь с довольно грубым приближением, отношения же этих значений к одному из них, напр. начальному, известны более точно. Положим, напр., что значения β известны с относительною точностью $\pm 5\%$, тогда, приняв за исходное значение β_0, строим по нему кри-



Фиг. 1.

вую β, а также кривые 0.95β и 1.05β, получаем полосу, в которой заключаются истинные значения β. Вписываем в эту полосу ступенчатую линию, как показано схематически на фиг. 1, и отмечаем на оси Ot значения

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ \ldots\ t_{j-1},\ T$$

времени t, соответствующие концам участков, и снимаем с чертежа значения

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots\ \beta_{j-1},\ \beta_j$$

величин β, соответствующие середине каждого участка.

По этим значениям вычисляем величины $\sqrt{\alpha^2 - \beta}$, которые обозначим через

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots\ c_{j-1},\ c_j \qquad (14)$$

тогда для первого участка будет:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A_1 \cos c_1 t + B_1 \sin c_1 t + X_1 \\ \eta_1 &= C_1 \sin c_1 t + D_1 \cos c_1 t + Y_1 \end{aligned} \tag{15}$$

причем при понятном обозначении:

$$\begin{aligned} X_1 &= \Delta_{11} \sin \alpha t + \Delta_{21} \cos \alpha t \\ Y_1 &= \Delta_{11} \cos \alpha t - \Delta_{21} \sin \alpha t \end{aligned} \tag{16}$$

частные же решения Δ_{11} и Δ_{21} уравнений (1) и (2) для первого участка, т. е. при $\beta = \beta_1$, находятся как будет указано ниже.

По заданным начальным значениям $(\delta_1)_0$, $(\delta_1')_0$, $(\delta_2)_0$, $(\delta_2')_0$ находим соответствующие начальные значения постоянных произвольных A_1, B_1, C_1, D_1. Полагаем затем в формуле (15) и их производных первого порядка

$$t = t_1$$

и находим значения:

$$(\xi_1)_1,\ (\xi_1')_1,\ (\eta_1)_1,\ (\eta_1')_1 \tag{17}$$

которые будут начальными для второго участка или второй ступени.

Для этой второй ступени будем писать решения наших уравнений в таком виде:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= A_2 \cos c_2 (t - t_1) + B_2 \sin c_2 (t - t_1) + X_2 \\ \eta_2 &= C_2 \sin c_2 (t - t_1) + D_2 \cos c_2 (t - t_1) + Y_2 \end{aligned} \tag{15'}$$

причем

$$\begin{aligned} X_2 &= \Delta_{12} \sin \alpha (t - t_1) + \Delta_{22} \cos \alpha (t - t_1) \\ Y_2 &= \Delta_{12} \cos \alpha (t - t_1) - \Delta_{22} \sin \alpha (t - t_1) \end{aligned} \tag{16'}$$

Определяем постоянные произвольные по значениям (17), являющимся начальными для этой ступени. Составляем выражения ξ_2' и η_2', полагаем в них и в выражениях (15') $t = t_2$ и находим значения:

$$(\xi_2)_2,\ (\xi_2')_2;\ (\eta_2)_2,\ (\eta_2')_2$$

это будут начальные значения для третьей ступени, и продолжаем таким образом, пока не дойдем до последней.

Отбросив сперва величины X_1, Y_1, X_2, Y_2, ..., составляем для каждого участка по формулам (12) и (13) величины γ_{11}, γ_{21}; γ_{12}, γ_{22}; ... и по формулам (3') и (4') величины δ_{11}, δ_{21}; δ_{12}, δ_{22}; ..., таким образом получаем приближенное представление о вращательном движении снаряда на протяжении всей его траектории.

§ **6.** Покажем теперь, каким образом для каждой ступени или для каждого участка составляются частные решения уравнений:

$$\delta_1'' - 2\alpha\delta_2' - \beta\delta_1 = 2\alpha\theta' \tag{1}$$

$$\delta_2'' + 2\alpha\delta_1' - \beta\delta_2 = -\theta'' \tag{2}$$

Мы обозначим эти частные решения вообще через Δ_1 и Δ_2, а для участка $N^\circ k$ — через Δ_{1k} и Δ_{2k}; так как переменные ξ и η являются лишь вспомогательными, а нам надо знать величины δ_1 и δ_2, то мы и будем искать значения Δ_{1k}, Δ_{2k} для каждого участка в отдельности, т. е. значения:

$$\Delta_{11},\ \Delta_{21};\ \Delta_{12},\ \Delta_{22};\ \Delta_{13},\ \Delta_{23};\ \ldots \text{ и т. д.}$$

Положим, что указанные в предыдущем параграфе участки взяты настолько малыми, что на каждом из них можно соответствующий отрезок кривой $\theta'(t)$ заменить его хордою.

Обозначим последовательные значения величины θ' в моменты времени

$$0,\ t_1,\ t_2,\ \ldots\ t_{j-1},\ T$$

через

$$\theta_0',\ \theta_1',\ \theta_2',\ \ldots\ \theta_{j-1}',\ \theta_j'$$

тогда для этих участков значения величины $\theta'(t)$ будут:

$$\begin{aligned}
\theta_0'(t) &= \theta_0' + \frac{\theta_1' - \theta_0'}{t_1}\cdot t = p_1 + q_1\cdot t \\
\theta_1'(t) &= \theta_1' + \frac{\theta_2' - \theta_1'}{t_2 - t_1}\cdot (t - t_1) = p_2 + q_2\cdot (t - t_1) \\
\theta_2'(t) &= \theta_2' + \frac{\theta_3' - \theta_2'}{t_3 - t_2}\cdot (t - t_2) = p_3 + q_3 (t - t_2)
\end{aligned} \tag{17}$$

. . . . . .

. . . . . .

Величины θ'' будут соответственно:

$$q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots$$

При такой замене, для первого участка уравнения (1) и (2) будут:

$$\Delta_1'' - 2\alpha\Delta_2' - \beta_1\Delta_1 = 2\alpha(p_1 + q_1 t)$$

$$\Delta_2'' + 2\alpha\Delta_1' - \beta_1\Delta_2 = -q_1$$

обозначая соответствующие частные решения через Δ_{11} и Δ_{21}, получим:

$$\Delta_{11} = -\frac{2\alpha}{\beta_1}(p_1 + q_1 t)$$
$$\Delta_{21} = \frac{q_1}{\beta_1^2}(\beta_1 - 4\alpha^2) \qquad (18)$$

Совершенно так же для второго участка будет:

$$\Delta_{21} = -\frac{2\alpha}{\beta_2}(p_2 + q_2 t)$$
$$\Delta_{22} = \frac{q_2}{\beta_2^2}(\beta_2 - 4\alpha^2) \qquad (19)$$

и т. д.

Для настильной стрельбы величины Δ_{21}, Δ_{22}, Δ_{23}, ... настолько малы, что ими можно пренебречь, вместо же величин Δ_{11}, Δ_{12}, ... можно для соответствующих участков брать:

$$\Delta_{11} = -\frac{2\alpha}{\beta_1}\theta_1'(t); \quad \Delta_{12} = -\frac{2\alpha}{\beta_2}\theta_2'(t); \quad \ldots \text{ и т. д.} \qquad (20)$$

или даже:

$$\Delta_1 = -2\alpha \cdot \frac{\theta'(t)}{\beta(t)}; \quad \Delta_2 = 0 \qquad (21)$$

на всем протяжении полета снаряда, что соответствует его динамическому равновесию во всякий момент времени.

Таким образом можно на кривой $\beta(t)$ взять настолько мелкое подразделение, что формулы (18) и (19) для настильной стрельбы (21) будут достаточно точны, тогда, вычислив по ним достаточное число значений Δ_1 и Δ_2, можно будет построить кривые $\Delta_1(t)$ и $\Delta_2(t)$, которые и представят эти функции графически, независимо от того способа, который будет применен для нахождения величин γ_1 и γ_2, представляющих общие интегралы однородных уравнений (1′) и (2′).

Точность результата зависит от числа взятых участков и от того, в какой мере ступенчатая ломаная линия близка к непрерывной кривой $\beta(t)$, которая этой ступенчатой линией заменяется.

Вычисление величин Δ_1 и Δ_2 настолько просто, что не представляет никаких затруднений, разбив кривые $\theta'(t)$ и $\beta(t)$ на достаточно мелкие участки *для этого вычисления*, но было бы затруднительно брать столь большое число участков для нахождения ξ и η или γ_1 и γ_2 в виду сложности вычисления

произвольных постоянных, и является сам собою вопрос, каким образом сократить число этих участков, предполагая что Δ_1 и Δ_2 вычислены по большому числу подразделений, как указано выше.

§ 7. Сокращение числа участков, на которые надо подразделять кривую $\beta(t)$ или кривую $[n(t)]^2 = \alpha^2 - \beta(t)$, может быть достигнуто двумя способами:

1°) Заменою функций $\beta(t)$ или $[n(t)]^2$ другими функциями, которые на возможно большом протяжении близки к функциям $\beta(t)$ или $[n(t)]^2$ и выбраны так, чтобы уравнения (7), после такой замены, интегрировались в конечном виде или в квадратурах, численное вычисление которых не представляло бы затруднений.

2°) Введением в уравнения (7), вместо переменной t, новой переменной, выбираемой так, чтобы в преобразованном уравнении некоторые члены были бы настолько малы, что их можно отбросить, после чего уравнения интегрировались бы в конечном виде или в квадратурах.

Эти методы проще всего выясняются на частном численном примере, к анализу которого и перейдем, начав с нахождения величин Δ_1 и Δ_2.

§ 8. За этот численный пример возьмем тот, который приведен в моей книге «Вращательное движение продолговатого снаряда во время полета», с тою разницею, что величину h — плеча опрокидывающей пары — мы возьмем применительно к новейшим данным, а не к данным, применяемым в «Баллистике» Н. А. Забудского.

При расчете плоской траектории принято:

Элементы снаряда

Вес снаряда	$P = 360$ кг
Калибр	$d = 2R = 12$ дюймов $= 305$ мм
Начальная скорость	$v_0 = 800$ м/сек.
Начальное значение сопротивления воздуха	$\rho_0 = 1644$ кг
Момент инерции	$C = 0.4603$
» »	$A = B = 5.063$
Угловая скорость вращения .	$r_0 = 560$ (округлено)

По этим данным имеем:

$$2\alpha = \frac{Cr_0}{A} = 50.92; \quad \alpha^2 = 648$$

По Вентцелю, принимаем

$$\beta(0)=\frac{1}{2}\alpha^2=324$$

Так как плечо опрокидывающей пары h считается постоянным, то, очевидно, будет

$$\frac{\beta(t)}{\beta(0)}=\frac{\rho(t)}{\rho_0}=\frac{\rho}{\rho_0}$$

Величины же отношения $\frac{\rho}{\rho_0}$ сопротивления воздуха ρ в момент времени t к начальному его значению сейчас же получаются по данным, имеемым в расчете плоской траектории, таким образом будет

$$\beta(t)=\beta(0)\cdot\frac{\rho}{\rho_0} \qquad (22)$$

Величины $\frac{\rho}{\rho_0}$ приведены в табличке на стр. 251 указанной книги моей, так что $\beta(t)$ сейчас же вычисляется.

По этим значениям строим в крупном масштабе [именно 1 секунда = = 1 см и 0.001 для $\beta(t)=1$ мм] кривую, с которой и снимаем значения $\beta(t)$.

Совершенно так же поступаем для получения значений $\theta(t)$. По обычным формулам интерполяции вычисляем $\theta'(t)$, строим кривую этих значений в крупном масштабе, сглаживаем ее графически по лекалам (кораблестроительным) и снимаем значения $\theta'(t)$. Для проверки некоторые из этих значений вычисляем по формулам, указанным в § 2.

Что касается величин $\theta''(t)$, то из значений t и $\theta'(t)$ видно, что

$$\theta''(t)<0^\circ.045$$

соответствующие значения $\Delta_2<0^\circ.1$, так что практически можно считать

$$\Delta_2=0$$

и нет надобности вычислять ни величины $\theta''(t)$ ни Δ_2.

Таким образом получены стлб. 3 и 6 табл. I, в которой произведено вычисление величины Δ_1 по объясненному выше приему, представляющему видоизменение способа Эйлера численного интегрирования дифференциальных уравнений. Этот способ можно назвать «интегрированием уступами», при этом надо вычислять значения Δ_1, соответствующие как выходящим орди-

натам ступенчатой линии, заменяющей $\beta(t)$, так и входящим, — эти значения обозначены, соответственно, через D_i и E_i, и надо брать

$$\Delta_{1i} = \frac{1}{2}(D_i + E_i) \tag{23}$$

построив предварительно в крупном масштабе (10 см = 1°) кривые D_i и E_i и сгладив их. Очевидно, что погрешность в значении Δ_{1i} будет меньше по абсолютной величине разности $\frac{1}{2}(D_i - E_i)$. Самое вычисление приведено в табл. I.

В дальнейшем нам понадобятся величины

$$n(t) = \sqrt{\alpha^2 - \beta(t)} \quad \text{и} \quad s = \int_0^t n(t)\,dt \tag{24}$$

вычисление этих величин произведено в табл. II, причем величина s вычислена по известной схеме, следующей из правила трапеций.

Построив кривую $s(t)$, мы видим, что на протяжении от $t = 12$ до $t = 64$ эта кривая отклоняется весьма мало от прямой, уравнение которой есть

$$y = 24.81t - 38.7 \tag{25}$$

В стлб. (8), (9), (10) табл. II вычислены как ордината y, так и отклонения

$$\varepsilon = s - y.$$

Эти отклонения настолько малы, что на всем протяжении от $t = 12$ секунд до $t = 64$ секунды можно полагать

$$s = y = 24.81t - 38.7 \tag{25'}$$

На протяжении от $t = 0$ до $t = 12$ величина $n(t)$ достаточно точно представляется формулою вида

$$n(t) = a + bt + ct^2 \tag{26}$$

причем не стоит даже определять коэффициенты по методе наименьших квадратов, а взять значения $n(0)$, $n(6)$ и $n(12)$, тогда получается:

$$a = 18.00;\ b = 0.98;\ c = -0.0421$$

так что будет при $0 \leqq t \leqq 12$:

$$n(t) = 18 + 0.98t - 0.0421t^2 \tag{26'}$$

О точности этого представления можно судить по следующей таблице:

t	$n(t)$ форм. (*)	$n(t)$ табл. II	t	$n(t)$ форм. (*)	$n(t)$ табл. II	t	$n(t)$ форм. (*)	$n(t)$ табл. II
0.0	18.00	18.00	4.0	21.25	21.33	8.0	23.13	22.98
1.0	18.94	19.03	5.0	21.75	21.89	9.0	23.41	23.22
2.0	19.79	19.92	6.0	22.36	22.36	10.0	23.59	23.41
3.0	20.56	20.69	7.0	22.79	22.69	12.0	23.69	23.69

из которой видно, что отклонения не превышают 0.75%.

Из формулы (*) следует

$$(**) \qquad s = 18t + 0.49t^2 - 0.014t^2$$

о точности которой можно судить сличив величины s (12), рассчитанные по формуле (**) 262.3 и по табл. II 261.9.

На протяжении от $12 \leqq t \leqq 64$ величина $n(t)$ представляется формулою

$$n(t) = 22.37 + 0.1271t - 0.00149t^2 \tag{27}$$

соответственно чему

$$s(t) = 22.37t + 0.06355t^2 - 0.0004967t^3 \tag{28}$$

которая при $t = 64$ дает $s = 1561$, таблица же II при интегрировании по правилу трапеций дает 1550.

Эти формулы нам понадобятся ниже, когда мы введем в уравнения

$$\begin{aligned} \xi'' + [\alpha^2 - \beta(t)]\,\xi &= 0 \\ \eta'' + [\alpha^2 - \beta(t)]\,\eta &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

вместо переменной t переменную s.

§ **9.** Из различных представлений величины

$$[n(t)]^2 = \alpha^2 - \beta(t)$$

наиболее удобным оказалось такое:

$$[n(t)]^2 = \frac{a^2}{[1 + b(t-c)^2]^2} \tag{29}$$

ибо, при надлежащем подборе коэффициентов a, b и c, величина $n(t)$ представляется достаточно точно, взяв на всем протяжении от $t = 0$ до $t = 64$ всего *три* участка.

При таком представлении уравнения (7) принимают вид:

$$\begin{aligned} \xi'' + \frac{a^2}{[1 + b(t-c)^2]^2}\xi &= 0 \\ \eta'' + \frac{a^2}{[1 + b(t-c)^2]^2}\cdot\eta &= 0 \end{aligned} \tag{30}$$

Этот тип уравнений есть так называемое уравнение Стокса, которое подстановкою, указанною Буссинеском (Boussinesq) (см.: Boussinesq. Cours d'Analyse, t. I, fasc. II, p. 85, а также его «Applications des potentiels», p. 562), приводится к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0$$

причем λ есть постоянная величина, выражающаяся через a и b.

Чтобы простейшим образом вывести подстановку Буссинеска, рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0 \tag{*}$$

и положим в нем

$$y = z\cos x \tag{31}$$

тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cos x\cdot\frac{d^2z}{dx^2} - 2\sin x\cdot\frac{dz}{dx} - z\cos x$$

и, по разделении на $\cos x$, уравнение (*) будет

$$\frac{d^2z}{dx^2} - 2\operatorname{tg} x\cdot\frac{dz}{dx} + (\lambda^2 - 1)z = 0 \tag{**}$$

Положим теперь

$$\operatorname{tg} x = s, \quad \text{иначе} \quad x = \operatorname{arctg} s \tag{32}$$

и примем s за переменную независимую, тогда будет:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{ds}\cdot\frac{ds}{dx} = (1 + s^2)\frac{dz}{ds}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = (1 + s^2)\frac{d}{ds}\left[(1 + s^2)\cdot\frac{dz}{ds}\right] = (1 + s^2)^2\cdot\frac{d^2z}{ds^2} + 2s(1 + s^2)\frac{dz}{ds}$$

и, по разделении на $(1 + s^2)^2$, уравнение (**) примет вид

$$\frac{d^2z}{ds^2} + \frac{\lambda^2 - 1}{(1 + s^2)^2}\cdot z = 0 \tag{33}$$

положив в этом уравнении

$$s = \sqrt{b}\,(t - c) \quad \text{и} \quad b(\lambda^2 - 1) = a^2$$

и написав вместо буквы z буквы ξ или η, мы получим первое или второе из уравнений (7).

Ясно, что делая обратные подстановки, мы от уравнений (30) придем к уравнению

$$\frac{d^2z}{ds^2} + \lambda^2 z = 0$$

и, заменив в общем его интеграле

$$z = C_1 \cos \lambda s + C_2 \sin \lambda s$$

переменную s через ее величину

$$s = \operatorname{arctg} \sqrt{b}\,(t - c)$$

следующею из этих подстановок, мы имеем такой результат: *когда дано уравнение*

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{a^2}{[1 + b(t-c)^2]^2}\xi = 0$$

то общий его интеграл есть

$$\xi = \left\{A_1 \cos\left[\lambda \operatorname{arctg} \sqrt{b}\,(t-c)\right] + B_1 \sin\left[\lambda \operatorname{arctg} \sqrt{b}\,(t-c)\right]\right\} \sqrt{1 + b(t-c)^2} \tag{34}$$

причем

$$\lambda = \sqrt{\frac{a^2 + b}{b}}$$

и A_1 и B_1 суть произвольные постоянные.

§ **10.** Вышеупомянутые три участка и представление на них функции

$$[n(t)]^2 = \alpha^2 - \beta(t)$$

таковы:

$$0 \leqq t \leqq 10 \ \ldots \ \alpha^2 - \beta(t) = \frac{548}{\left[1 + \frac{1}{312}(t - 9.68)^2\right]^2}$$

$$10 \leqq t \leqq 34 \ \ldots \ \alpha^2 - \beta(t) = \frac{634}{\left[1 + \frac{1}{7620}(t - 33.6)^2\right]^2} \tag{35}$$

$$34 \leqq t \leqq 64 \ \ldots \ \alpha^2 - \beta(t) = \frac{630}{\left[1 + \frac{1}{31400}(t - 33.8)^2\right]^2}$$

Для первого участка постоянные определены по значениям: (0; 324), (5; 479); (10; 548), для второго — по значениям: (10; 548); (23; 613); (36; 630), для третьего — по значениям: (36; 630); (49; 621); (64; 595). О точности представления величины $\alpha^2 - \beta(t)$ можно судить по следующей таблице:

$0 \leqq t \leqq 10$			$10 \leqq t \leqq 34$			$34 \leqq t \leqq 64$		
t	$\alpha^2 - \beta(t)$ по форм.	$\alpha^2 - \beta(t)$ заданное	t	$\alpha^2 - \beta(t)$ по форм.	$\alpha^2 - \beta(t)$ заданное	t	$\alpha^2 - \beta(t)$ по форм.	$\alpha^2 - \beta(t)$ заданное
0	548	548	10	548	548	34	630	630
1	361	362	12	562	561	36	630	630
2	390	397	14	572	574	38	629.4	630
3	423	428	16	583	584	40	628.5	629
4	454	455	18	591	593	42	627.3	628
5	480	479	20	603	602	44	625.8	626
6	504	500	22	610	610	46	623.9	624
7	525	515	24	618	616	48	621.9	622
8	538	528	26	623	621	50	619.5	620
9	546	539	28	629	624	52	616.8	617
10	548	548	30	631	628	54	613.6	614
			32	632	629	56	610.6	611
			34	634	630	58	605.6	607
						60	602.4	603
						62	598.0	599
						64	593.4	595

В рассматриваемом вопросе такая точность более чем достаточна, ибо величина $\alpha^2 - \beta(t)$ известна едва ли точнее, чем с погрешностью $\pm 3\%$ от своего значения.

Таким образом все дело свелось к вычислению величин

$$\cos\left[\lambda \operatorname{arctg} \sqrt{b}(t-c)\right] \quad \text{и} \quad \sin\left[\lambda \operatorname{arctg} \sqrt{b}(t-c)\right]$$

причем

$$\lambda = \sqrt{\frac{a^2+b}{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{b}{a^2} + \ldots\right)$$

Мы видим, что значения a^2 и b суть: $\left(548 \text{ и } \frac{1}{312}\right)$; $\left(634 \text{ и } \frac{1}{7620}\right)$, и $\left(630, \frac{1}{31400}\right)$, поэтому для всех трех участков дробь $\frac{1}{2}\frac{b}{a^2}$ будет ничтожно мала по сравнению с 1, и мы получим

$$\lambda = \frac{a}{\sqrt{b}}$$

Наибольшее значение аргумента $\sqrt{b}(t-c)$ составляет для первого участка 0.5480, для второго 0.2630, для третьего 1.0029, обозначим через $g(t)$ — функцию

$$g(t)\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{b}(t-c)}{\sqrt{b}(t-c)}=\frac{1}{\psi\left[\sqrt{b}(t-c)\right]}$$

тогда будет

$$\lambda \operatorname{arctg}\sqrt{b}(t-c)=a(t-c)\cdot\frac{1}{\psi\left[\sqrt{b}(t-c)\right]} \tag{36}$$

Такое представление выгодно потому, что функция ψ в нашем случае изменяется на каждом участке медленно и в тесных пределах, а именно:

на 1-м	участке	от 1.0000	до 1.1138
» 2-м	»	» 1.0000	» 1.0237
» 3-м	»	» 1.0000	» 1.0099

Для функции $\frac{\operatorname{tg}x}{x}$ имеются таблицы (см.: Jahnke. Emde Functionentafeln, 2. Ed.), извлечение из которых здесь приводится.

При таком обозначении будет, как указано выше,

$$\lambda\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{b}(t-c)=\frac{a}{\psi\left[\sqrt{b}(t-c)\right]}(t-c) \tag{36'}$$

Величина a изменяется от $\sqrt{548}=23.41$ до $\sqrt{634}=25.18$, оставаясь на каждом участке постоянной, тогда как $\psi\left[\sqrt{b}(t-c)\right]$ изменяется от 1 до 1.1138, поэтому величину $\frac{a}{\psi\left[\sqrt{b}(t-c)\right]}$ можно принимать за мгновенное значение частоты и, обозначив ее через $\mu(t)$, писать:

$$\begin{aligned}\xi&=\left\{A_1\cos\left[\mu(t)(t-c)\right]+B_1\sin\left[\mu(t)(t-c)\right]\right\}\sqrt{1+b(t-c)^2}\\ \eta&=\left\{C_1\sin\left[\mu(t)(t-c)\right]+D_1\cos\left[\mu(t)(t-c)\right]\right\}\sqrt{1+b(t-c)^2}\end{aligned} \tag{37}$$

в соответствии с формулами (14) и (15), причем

$$\mu(t)=\frac{a}{\psi\left[\sqrt{b}(t-c)\right]} \tag{38}$$

Вычисление величины $\mu(t)$ показано в табл. III, в этой же таблице вычислены и величины

$$h(t)=\sqrt{1+b(t-c)^2} \tag{39}$$

Таблица значений функции $\psi(z)=\frac{\operatorname{tg} z}{z}$

z	$\frac{\operatorname{tg} z}{z}$	z	$\frac{\operatorname{tg} z}{z}$	z	$\frac{\operatorname{tg} z}{z}$	z	$\frac{\operatorname{tg} z}{z}$	z	$\frac{\operatorname{tg} z}{z}$
0.00	1.0000	0.20	1.0136	0.40	1.0570	0.60	1.1402	0.80	1.2870
.01	1.0000	.21	1.0150	.41	1.0601	.61	1.1458	.81	1.2969
.02	1.0001	.22	1.0165	.42	1.0633	.62	1.1515	.82	1.3070
.03	1.0003	.23	1.0180	.43	1.0666	.63	1.1573	.83	1.3174
.04	1.0005	.24	1.0197	.44	1.0700	.64	1.1633	.84	1.3281
.05	1.0008	.25	1.0214	.45	1.0735	.65	1.1696	.85	1.3392
.06	1.0012	.26	1.0232	.46	1.0771	.66	1.1759	.86	1.3506
.07	1.0016	.27	1.0250	.47	1.0808	.67	1.1825	.87	1.3624
.08	1.0021	.28	1.0270	.48	1.0846	.68	1.1892	.88	1.3746
.09	1.0027	.29	1.0290	.49	1.0885	.69	1.1961	.89	1.3872
0.10	1.0033	0.30	1.0311	0.50	1.0926	0.70	1.2033	0.90	1.4002
.11	1.0041	.31	1.0333	.51	1.0968	.71	1.2106	.91	1.4136
.12	1.0048	.32	1.0356	.52	1.1011	.72	1.2181	.92	1.4275
.13	1.0057	.33	1.0380	.53	1.1055	.73	1.2259	.93	1.4418
.14	1.0066	.34	1.0404	.54	1.1101	.74	1.2339	.94	1.4566
.15	1.0076	.35	1.0429	.55	1.1147	.75	1.2421	.95	1.4720
.16	1.0086	.36	1.0456	.56	1.1196	.76	1.2506	.96	1.4879
.17	1.0097	.37	1.0483	.57	1.1245	.77	1.2593	.97	1.5043
.18	1.0109	.38	1.0511	.58	1.1296	.78	1.2683	.98	1.5214
.19	1.0122	.39	1.0540	.59	1.1348	.79	1.2775	.99	1.5291
0.20	1.0136	0.40	1.0570	0.60	1.1402	0.80	1.2870	1.00	1.5574

Рассматривая значения величин $\mu(t)$ и $h(t)$, мы видим, что при $t=10$ как эти величины, так и значение аргумента претерпевают разрывы, между тем величины δ_1 и δ_2, очевидно, должны быть непрерывные, поэтому значения постоянных произвольных на первом и втором участках различные, их надо будет определить, приняв за начальные значения для второго участка значения δ_1, δ_2, δ_1' и δ_2', вычисленные при $t=10$ для первого участка.

Разрывы в значениях $\mu(t)$, $h(t)$ и аргумента $\sqrt{b}(t-c)$ настолько малы, что приняв при $t=34$

$$\sqrt{b}(t-c)=0.002;\ \mu(t)=25.14;\ h(t)=1.000$$

можно второй и третий участки соединить в один и при переходном значении $t=34$ новых постоянных произвольных для третьего участка не вводить.

Таким образом остается только показать, как определяются постоянные произвольные по начальным значениям для первого и для второго участков.

§ **11.** Для простоты выкладок положим, что при $t = 0$:

$$(\delta_1)_0 = m^\circ;\ (\delta_1')_0 = 0;\ (\delta_2)_0 = 0;\ (\delta_2')_0 = \omega$$

и возьмем для примера:

$$m^\circ = 3^\circ,\ \omega = 50^\circ \text{ в секунду}$$

так как

$$\xi = \delta_1 \sin \alpha t + \delta_2 \cos \alpha t;\ \eta = \delta_1 \cos \alpha t - \delta_2 \sin \alpha t$$

то при $t = 0$ будет:

$$\xi_0 = (\delta_2);\ \xi_0' = (\delta_2')_0 + \alpha(\delta_1)_0;\ \eta_0 = (\delta_1)_0;\ \eta_0' = (\delta_1')_0 - \alpha(\delta_2)_0$$

и при приведенных выше численных значениях и $\alpha = 25.46$ получим, пренебрегая величиною $(\Delta_1)_0$ и ее производной $(\Delta_1')_0$:

$$\xi_0 = 0;\ \xi_0' = 126^\circ.38;\ \eta_0 = 3^\circ;\ \eta_0' = 0$$

Полагая в выражении

$$\xi = \left\{A_1 \cos\left[\lambda \operatorname{arctg} \sqrt{b}\,(t-c)\right] + B_1 \sin\left[\lambda \operatorname{arctg} \sqrt{b}\,(t-c)\right]\right\} \sqrt{1 + b\,(t-c)^2}$$

и в производной от него $t = 0$, получим, для определения постоянных произвольных A_1 и B_1, уравнения:

$$\xi_0 = 0 = A_1 \cos\left(\lambda \operatorname{arctg} \sqrt{bc}\right) - B_1 \sin\left(\lambda \operatorname{arctg} \sqrt{bc}\right)$$

$$\xi_0' = 126^\circ.38 = A_1 \sin\left(\lambda \operatorname{arctg} \sqrt{bc}\right) + B_1 \cos\left(\lambda \operatorname{arctg} \sqrt{bc}\right) \cdot \lambda \cdot a$$

ибо

$$\lambda \cdot \sqrt{b} = a = 23.41$$

положим для краткости письма:

$$\lambda \operatorname{arctg} \sqrt{bc} = \gamma$$

тогда предыдущие два уравнения будут:

$$0 = A_1 \cos\gamma - B_1 \sin\gamma$$

$$5^\circ.35 = A_1 \sin\gamma + B_1 \cos\gamma$$

следовательно:

$$A_1 = 5^\circ.35 \sin\gamma;\ B_1 = 5^\circ.35 \cos\gamma$$

но

$$\gamma = \lambda \operatorname{arctg} \sqrt{b} \cdot c = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{bc}}{\psi(\sqrt{bc})} = \frac{ac}{\psi(\sqrt{bc})} = 21.02 = 1204^\circ.45$$

так что

$$\sin\gamma = \sin 55°33' = 0.8246;\ \cos\gamma = -\cos 55°33' = -0.5657$$

и мы получим:

$$A_1 = 4°.41;\ B_1 = -3°.03$$

Совершенно таким же образом определяются и постоянные произвольные, входящие в выражение η, и мы получим:

$$C_1 = 2°.47;\ D_1 = -1°.70$$

так что будет для первого участка:

$$\begin{aligned}\xi &= [4°.41 \cdot \cos[\mu(t)(t-c)] \\ &\qquad - 3°.03 \sin[\mu(t)(t-c)]] \cdot \sqrt{1+b(t-c)^2} \\ \eta &= [2°.47 \sin[\mu(t)(t-c)] \\ &\qquad - 1°.70 \cos[\mu(t)(t-c)]] \cdot \sqrt{1+b(t-c)^2}\end{aligned} \tag{40}$$

Полагая в этих формулах и их производных $t = 10$, получим:

$$\mu(t) = 23.41,\ t-c = 0.32;\ \sqrt{1+b(t-c)^2} = 1.000$$
$$\xi_{10} = -1°.25;\ \xi_{10}' = -123°$$
$$\eta_{10} = \quad 1°.70;\ \eta_{10}' = \quad 53°.9$$

Величины δ_1 и δ_2 должны быть непрерывны, они получаются через ξ и η умножением на непрерывные множители $\sin\alpha t$ и $\cos\alpha t$ и присоединением непрерывных величин Δ_1 и Δ_2, поэтому величины ξ и η, а также ξ' и η' должны быть непрерывны, значит в местах сопряжения двух участков, для определения новых значений постоянных произвольных, надо просто уравнивать величины ξ и η и ξ' и η' для того момента времени, который для обоих участков является общим.

Таким образом, обозначая через γ_2 — аргумент при $t = 10$ для *второго* участка и через A_2, B_2, C_2, D_2 — постоянные произвольные для этого участка, составляем уравнения:

$$\begin{aligned}-1°.25 &= [A_2\cos\gamma_2 + B_2\sin\gamma_2]\cdot 1.036 \\ -123° &= [-A_2\sin\gamma_2 + B_2\cos\gamma_2]\cdot 25.14 + (\ldots) \\ 1.70 &= [C_2\sin\gamma_2 + D_2\cos\gamma_2]\cdot 1.036 \\ 53.9 &= [C_2\cos\gamma_2 - D_2\sin\gamma_2]\cdot 25.14 + (\ldots)\end{aligned}$$

Здесь

$$1.036 = \sqrt{1 + b(t-c)^2};\ 25.14 = a$$

и в выражениях ξ' и η' отброшены малые члены, величина коих меньше $0^{\circ}.01$. Аргумент

$$\gamma_2 = -24.54 \cdot 23.6 = -580 = -92 \cdot 2\pi - 1.95$$

так что

$$\cos\gamma_2 = \cos 112^{\circ} = -0.375$$
$$\sin\gamma_2 = -\sin 120^{\circ} = -0.927$$

и мы находим:

$$A_2 = -4^{\circ}.14;\ B_2 = 2^{\circ}.96;\ C_2 = 1^{\circ}.64;\ D_2 = -2^{\circ}.14$$

Таким образом для первого участка:

$$0 \leqq t \leqq 10 \text{ секунд}$$

окончательно имеем:

$$\begin{aligned} \xi &= \{4^{\circ}.41 \cos[\mu(t)(t-c)] - 3^{\circ}.03 \sin[\mu(t)(t-c)]\} \cdot h(t) \\ \eta &= \{2^{\circ}.47 \sin[\mu(t)(t-c)] - 1^{\circ}.70 \cos[\mu(t)(t-c)]\} h(t) \end{aligned} \tag{40}$$

причем $c = 9.68$, функции же $\mu(t)$ и $h(t)$ показаны в табл. III.

Для второго и третьего участка, т. е. для $10 \leqq t \leqq 64$, имеем:

$$\begin{aligned} \xi &= \{-4^{\circ}.14 \cos[\mu(t)(t-c)] + 2^{\circ}.96 \sin[\mu(t)(t-c)]\} h(t) \\ \eta &= -\{0.72 \sin[\mu(t)(t-c)] + 2^{\circ}.59 \cos[\mu(t)(t-c)]\} h(t) \end{aligned} \tag{41}$$

причем $c = 33.7$, величины же $\mu(t)$ и $h(t)$ показаны в табл. III.

Углы δ_1 и δ_2 представляются формулами:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \xi \sin\alpha t + \eta \cos\alpha t + \Delta_1 \\ \delta_2 &= \xi \cos\alpha t - \eta \sin\alpha t + \Delta_2 \end{aligned} \tag{42}$$

причем $\alpha = 25.46$ и Δ_2 в нашем случае можно считать $= 0$. Эти последние формулы могут быть преобразованы так, как указано в § 4, хотя для численных вычислений столь же удобны и формулы (42).

§ **12.** Другой прием состоит в введении в уравнения

$$\begin{aligned} \xi'' + [n(t)]^2 \xi &= 0 \\ \eta'' + [n(t)]^2 \eta &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$[n(t)]^2 = \alpha^2 - \beta(t)$$

новой переменной s уравнением

$$s = \int_0^t n(t)\,dt \tag{43}$$

откуда следует:

$$ds = n(t)\,dt$$

$$\frac{d\xi}{dt} = n(t)\frac{d\xi}{ds}; \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = n(t)\frac{d}{ds}\left[n(t)\frac{d\xi}{ds}\right] =$$

$$= [n(t)]^2 \cdot \frac{d^2\xi}{ds^2} + n(t) \cdot \frac{n'(t)}{n(t)} \cdot \frac{d\xi}{ds} =$$

$$= [n(t)]^2 \cdot \frac{d^2\xi}{ds^2} + n'(t) \cdot \frac{d\xi}{ds}$$

и предложенные уравнения примут вид:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\xi}{ds^2} + \frac{n'(t)}{[n(t)]^2} \cdot \frac{d\xi}{ds} + \xi = 0 \\ &\frac{d^2\eta}{ds^2} + \frac{n'(t)}{[n(t)]^2} \cdot \frac{d\eta}{ds} + \eta = 0 \end{aligned} \tag{44}$$

Выгода этого преобразования состоит в том, что на протяжении всего промежутка времени $0 \leqq t \leqq 64$ секунд величина множителя $\frac{n'(t)}{[n(t)]^2}$ весьма малая, а именно:

$$0.00089 \geqslant \frac{n'(t)}{[n(t)]^2} \geqslant 0.00056$$

иначе

$$\frac{1}{1112} \geqslant \frac{n'(t)}{[n(t)]^2} \geqslant \frac{1}{1790}$$

поэтому мы можем ожидать, что величина

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{ds}$$

в которую преобразуется величина

$$\frac{1}{n^2} \cdot \frac{dn}{dt}$$

будет также малая, и к интегрированию данного уравнения можно будет применить способ последовательных приближений, для чего прежде всего надо представить величину

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{ds}$$

аналитически, в такой форме, которая для этого способа удобна.

Очевидно, что если взять представление величин n и s формулами (35), то мы опять получим для ξ и η выражения (37). В самом деле, когда

$$n(t) = \frac{a}{1 + b(t-c)^2}$$

то

$$s = \int_0^t n(t)\,dt = \frac{a}{\sqrt{b}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{b}\,(t-c) + \operatorname{arctg}\sqrt{b}\cdot c\right];$$

положим

$$g = \operatorname{arctg}\sqrt{b}\cdot c$$

тогда будет

$$\operatorname{arctg}\sqrt{b}\cdot(t-c) = \frac{\sqrt{b}}{a}s - g$$

так что

$$\sqrt{b}\cdot(t-c) = \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{b}}{a}s - g\right)$$

следовательно

$$n = \frac{a}{1 + b(t-c)^2} = a\cos^2\left(\frac{\sqrt{b}}{a}s - g\right)$$

а так как тогда

$$\frac{n'(t)}{[n(t)]^2} = \frac{1}{n(s)}\frac{dn}{ds} = -\frac{2\sqrt{b}}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{b}}{a}s - g\right)$$

то, по подстановке в первое из уравнений (35) и умножении на

$$\cos\left(\frac{\sqrt{b}}{a}s - g\right)$$

мы получим

$$\frac{d^2\xi}{ds^2}\cos\left(\frac{\sqrt{b}}{a}s - g\right) - \frac{2\sqrt{b}}{a}\sin\left(\frac{\sqrt{b}}{a}s - g\right)\cdot\frac{d\xi}{ds} + \xi\cos\left(\frac{\sqrt{b}}{a}s - g\right) = 0$$

Положим временно в этом уравнении

$$\frac{\sqrt{b}}{a}s - g = \sigma$$

тогда оно примет вид

$$\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\cos\sigma - 2\frac{d\xi}{d\sigma}\sin\sigma + \frac{a^2}{b}\xi\cos\sigma = 0$$

сделаем теперь

$$z = \xi\cos\sigma$$

тогда, по разделении на $\cos\sigma$, предыдущее уравнение будет

$$\frac{d^2z}{d\sigma^2} + \frac{a^2+b}{b}z = 0$$

Общий его интеграл есть

$$z = A_1\cos\lambda\sigma + B_1\sin\lambda\sigma$$

причем

$$\lambda^2 = \frac{a^2+b}{b}$$

следовательно будет

$$\xi = (A_1\cos\lambda\sigma + B_1\sin\lambda\sigma)\cdot\sec\sigma$$

а так как

$$\sigma = \frac{\sqrt{b}}{a}s - g = \operatorname{arctg}\sqrt{b}\,(t-c)$$

то будет

$$\xi = \left\{A_1\cos\left[\lambda\operatorname{arctg}\sqrt{b}\,(t-c)\right] + B_1\sin\left[\lambda\operatorname{arctg}\sqrt{b}\,(t-c)\right]\right\}\cdot\sqrt{1+b(t-c)^2}$$

а это есть формула (34).

Отношение $\frac{b}{a^2}$ весьма малое, поэтому будет

$$\lambda = \frac{a}{\sqrt{b}}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{b}{a^2} + \ldots\right] \approx \frac{a}{\sqrt{b}}$$

и так как

$$n(t) = \frac{a}{1+b(t-c)^2}$$

то

$$\sqrt{1+b(t-c)^2} = \sqrt{\frac{a}{n(t)}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{n(t)}} \qquad (45)$$

Очевидно, что величины $\sqrt{a}A_1$ и $\sqrt{a}B_1$ такие же производные постоянные, как A_1 и B_1, поэтому для первого участка можно писать

$$\xi_1 = (A_1\cos s + B_1\sin s)\frac{1}{\sqrt{n(t)}}$$

т. е.

$$\xi_1 = \left[A_1\cos\left(\int_0^t n(t)\,dt\right) + B_1\sin\left(\int_0^t n(t)\,dt\right)\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{n(t)}} \qquad (46)$$

и совершенно так же

$$\eta_1 = \left[C_1\sin\left(\int_0^t n(t)\,dt\right) + D_1\cos\left(\int_0^t n(t)\,dt\right)\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{n(t)}} \qquad (46)$$

Мы видели, что в нашем случае, начиная со второго участка, зависимость между величиною $s = \int_0^t n(t)\,dt$ и t можно практически принять линейной:

$$s = kt + l$$

где k и l — постоянные [в нашем примере $k = 24.81$ и $l = -38.7$ см. форм. (25′)], значит для второго участка будет:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= A_1' \cos(kt + l) + B_1' \sin(kt + l) \\ \eta_2 &= C_1' \sin(kt + l) + D_1' \sin(kt + l) \end{aligned} \tag{47}$$

ибо множитель

$$\frac{1}{n(t)} = \frac{1}{k}$$

войдет в состав произвольных постоянных A_1', B_1', C_1' и D_1'.

Сопряжение обоих участков производится совершенно так же, как указано выше.

Формулы (46) и (47), в соединении с формулами (8) и (3′) и (4′), и решают поставленный вопрос, ибо по ним для любого момента времени вычисляется положение оси снаряда относительно касательной к траектории.

Нетрудно на основании этих формул представить зависимость величин δ_1 и δ_2 от времени t графически, на чем мы останавливаться не будем.

Для практических целей достаточно знать наибольшую величину отклонения оси снаряда от касательной к траектории.

Из формул (3′), (4′) и (8) видно, что это — наибольшее значение

$$\delta = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2} + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

Из формул же (46) и (47) видно, что на первом участке наибольшее значение $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ есть

$$\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + D_1^2}$$

и на втором:

$$\sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} = \sqrt{A_1'^2 + B_1'^2 + C_1'^2 + D_1'^2}$$

и значит, как только постоянные произвольные определены, то нетрудно проследить и за изменяемостью угла δ на всем протяжении траектории.

§ 13. В предыдущих параграфах изложено два приема интегрирования уравнений вращательного движения снаряда, одинаково быстро ведущих к цели, т. е. к получению *численных* результатов. Приведем еще один прием, который почти так же быстро дает искомое решение.

Мы видели, что приняв за переменную независимую величину

$$s = \int_0^t n(t)\,dt$$

и заметив, что тогда

$$\frac{n'(t)}{[n(t)]^2} = \frac{1}{n(s)} \cdot \frac{dn}{ds}$$

мы будем иметь уравнения (44):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{ds^2} + \left[\frac{1}{n(s)} \cdot \frac{dn}{ds}\right] \cdot \frac{d\xi}{ds} + \xi = 0 \\ \frac{d^2\eta}{ds^2} + \left[\frac{1}{n(s)} \cdot \frac{dn}{ds}\right] \cdot \frac{d\eta}{ds} + \eta = 0 \end{aligned} \qquad (44')$$

причем величина $\frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{ds}$ малая. Естественно, поэтому, применить методу последовательных приближений, отбросив в исходном приближении этот малый член или ту часть его, которая препятствует интегрированию уравнений (44′) в конечном виде. Пусть это исходное приближение будет:

$$\xi = \xi_0; \quad \eta = \eta_0$$

тогда в первом приближении будем писать уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi_1}{ds^2} + \xi_1 = -\left[\frac{1}{n(s)}\frac{dn}{ds}\right] \cdot \frac{d\xi_0}{ds} \\ \frac{d^2\eta_1}{ds^2} + \eta_1 = -\left[\frac{1}{n(s)}\frac{dn}{ds}\right] \frac{d\eta_0}{ds} \end{aligned}$$

В этих уравнениях вторые части будут известны, и их интегрирование не представит затруднений, в особенности если взять удобное для этого представление функции $\frac{1}{n}\frac{dn}{ds}$ на отдельных участках.

Наиболее удобное представление в нашем случае такое:

$$n(s) = \varepsilon(a + b_1 \sin k_1 s + b_2 \sin k_2 s + \ldots) \qquad (48)$$

причем ε есть малый постоянный параметр, выбираемый так, чтобы коэффициенты $b_1, b_2, \ldots$ были не больше 1, тогда величины ξ и η будут разложены по степеням этого малого параметра и в полученных разложениях будет достаточно взять самое ограниченное число членов.

Поясним это рассуждение на нашем численном примере.

Так как, начиная с значения $s = 260$, зависимость между t и s линейная, то на всем протяжении от $s = 260$ до $s = 1560$ будет $\frac{dn}{ds} = 0$, и значит, величину $\frac{1}{n}\frac{dn}{ds}$ надо представить формулою вида (48) на протяжении от $s = 0$ до $s = l = 262$, что соответствует $t = 12$ секундам. Пользуясь числами стлб. 4 и 7 табл. II, строим кривую $n(s)$ и по ней кривую

$$f(s) = \frac{1}{n}\frac{dn}{ds}.$$

снимаем ее ординаты и вписываем их в стлб. 2 табл. IV.

Вместо гармонического анализа, производим упрощенную тригонометрическую интерполяцию последовательным выделением членов, и таким образом получаем следующее представление функции $f(s)$:

$$0 \leqq s \leqq 130$$

$$f(s) = \frac{1}{100}\left[0.302 - 0.302 \sin\frac{\pi}{2}\frac{s}{\rho} - 0.0302 \sin 2\pi\frac{s}{\rho} - 0.0075 \sin 4\pi\frac{s}{\rho}\right]$$

$$130 \leqq s \leqq 260$$

$$f(s) = \frac{1}{100}\left[0.302 - 0.302 \sin\frac{\pi}{2}\frac{s}{\rho} - 0.0151 \sin 2\pi\frac{s}{\rho}\right]$$

$$260 \leqq s \leqq 1550$$

$$f(s) = 0$$

Таким образом уравнения (44′) в нашем случае будут:

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} + 0.00302\frac{d\xi}{ds} + \xi =$$

$$= \frac{1}{100}\left[0.302 \sin\frac{\pi}{2}\frac{s}{\rho} + 0.0302 \sin 2\pi\frac{s}{\rho} + 0.0075 \sin 4\pi\frac{s}{\rho}\right]\frac{d\xi}{ds}$$

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} + 0.00302\frac{d\eta}{ds} + \eta =$$

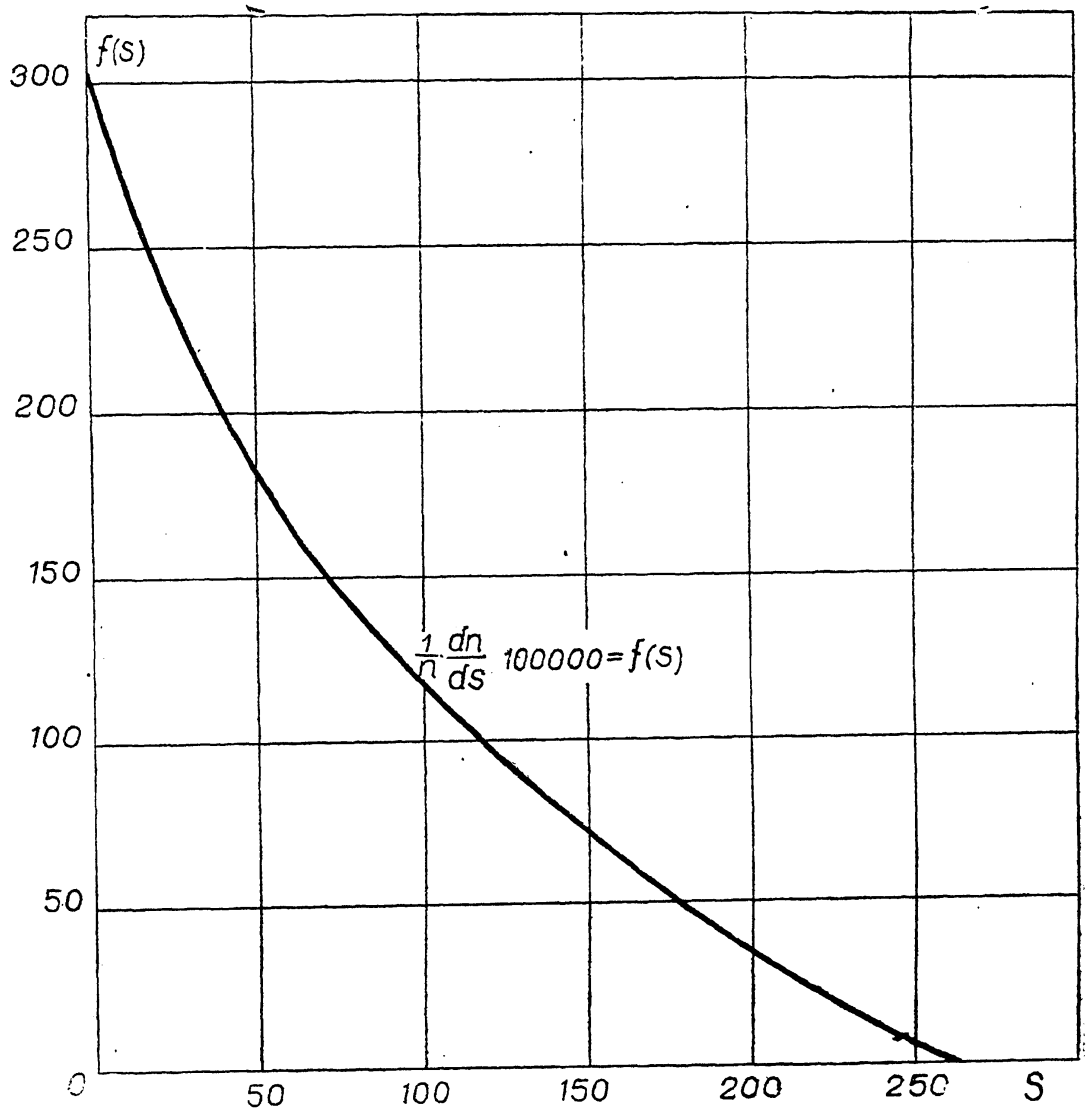
$$= \frac{1}{100}\left[0.302 \sin\frac{\pi}{2}\frac{s}{\rho} + 0.0302 \sin 2\pi\frac{s}{\rho} + 0.0075 \sin 4\pi\frac{s}{\rho}\right]\frac{d\eta}{ds}$$

для первого участка и

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} + 0.00302\frac{d\xi}{ds} + \xi = \frac{1}{100}\left[0.302 \sin\frac{\pi}{2}\frac{s}{\rho} + 0.0151 \sin\frac{2\pi s}{\rho}\right]\frac{d\xi}{ds}$$

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} + 0.00302\frac{d\eta}{ds} + \eta = \frac{1}{100}\left[0.302 \sin\frac{\pi}{2}\frac{s}{\rho} + 0.0151 \sin 2\pi\frac{s}{\rho}\right]\frac{d\eta}{ds}$$

для второго.



Фиг. 2.

Для исходного приближения имеем:

$$\frac{d^2\xi_0}{ds^2} + 0.00302\,\frac{d\xi_0}{ds} + \xi_0 = 0$$

$$\frac{d^2\eta_0}{ds^2} + 0.00302\,\frac{d\eta_0}{ds} + \eta_0 = 0$$

Так как

$$\sqrt{1-(0.00151)^2} = 1 - \frac{1}{2}\cdot(0.00151)^2 = 1 - 0.0000011 \approx 1$$

то, положив для простоты письма $h = 0.00151$, имеем:

$$\xi_0 = e^{-hs}[A_1 \cos s + B_1 \sin s]$$

$$\eta_0 = e^{-hs}[C_1 \sin s + D_1 \cos s]$$

Составляем выражения

$$\frac{d\xi_0}{ds} \quad \text{и} \quad \frac{d\eta_0}{ds} \qquad (*)$$

тогда при само собою понятном обозначении имеем для определения первого приближения на первом участке:

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} + 0.00302\,\frac{d\xi_1}{dt} + \xi_1 = \frac{1}{100}\,\varphi_1(s)\,\frac{d\xi_0}{ds}$$

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} + 0.00302\,\frac{d\eta_1}{dt} + \eta_1 = \frac{1}{100}\,\varphi_1(s)\,\frac{d\eta_0}{ds}$$

По подстановке в эти уравнения выражений (*), развиваем правые части уравнений, заменяя произведения синусов и косинусов через суммы синусов и косинусов, после чего интегрирование уравнений, пользуясь методою неопределенных коэффициентов, никаких затруднений не представит. Это первое приближение будет отличаться от исходного весьма мало и может быть принято за окончательное. После этого по начальным условиям определяются постоянные произвольные для каждого участка, как о том сказано выше. Так как эти выкладки никаких затруднений не представляют, то приводить их здесь нет надобности.

Упоминаемые в этой статье вычисления сведены для удобства набора и верстки в следующие таблицы.

Таблица I

Вычисление величины Δ_1

Формулы: $D_i = -\frac{2\alpha}{\beta(t_i)} \cdot \Theta'$; $E_i = -\frac{2\alpha}{\beta(t_{i+1})} \cdot \Theta'$

$\Delta_{1i} = \frac{1}{2}(D_i + E_i)$; $|E_i| = \frac{1}{2}|(D_i - E_i)|$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
NN° i	Время t_i сек.	$\beta(t_i)$	$\frac{2\alpha}{\beta(t_i)}$	Θ_i'	D_i	E_i	$\Delta_1 = \frac{1}{2}[(6)+(7)]$	$\varepsilon_i = \frac{1}{2}\|(6)-(7)\|$
0	0.0	324	0.1570	—0°575	+0°090	+0°096	+0°093	0°003
1	0.5	305	1673	597	100	107	104	003
2	1.0	286	1780	619	110	117	114	003
3	1.5	269	1892	641	121	129	125	004
4	2.0	251	2022	663	134	144	139	005
5	3.0	220	231	707	163	182	173	009
6	4.0	193	264	751	198	227	212	015
7	5.0	169	302	795	240	273	256	018
8	6.0	148.2	343	839	288	325	307	018
9	7.0	133.0	385	883	350	374	362	012
10	8.0	120.0	424	927	393	432	411	021
11	9.0	109.0	466	971	452	492	472	020
12	10.0	100.4	507	1°015	514	555	535	020
13	12.0	87.2	586	103	647	766	706	060
14	14.0	73.6	693	191	826	941	884	057
15	16.0	64.4	790	279	1°02	1°21	1°12	09
16	18.0	54.6	0.932	367	1°28	1°52	1°40	12
17	20.0	46.0	1.103	455	1°61	1°92	1°76	16
18	22.0	38.5	1.320	546	2°05	2°41	2°23	18
19	24.0	32.2	1.58	604	2°58	3°00	2°79	21
20	26.0	27.0	1.88	660	3°13	3°67	3°40	27
21	28.0	23.0	2.21	702	3°76	4°31	4°04	27
22	30.0	20.1	2.53	733	4°39	4°80	4°60	20
23	32.0	18.4	2.77	750	4°85	5°01	4°93	08
24	34.0	17.8	2.86	755	5°03	4°97	5°00	03
25	36.0	18.0	2.83	747	4°93	4°81	4°87	06
26	38.0	18.5	2.75	727	4°75	4°55	4°60	05
27	40.0	19.3	2.63	693	4°46	4°22	4°34	12
28	42.0	20.4	2.49	648	4°11	3°84	3°97	13
29	44.0	21.8	2.33	588	3°71	3°41	3°53	09
30	46.0	23.6	2.16	527	3°30	3°06	3°18	12
31	48.0	25.6	1.99	467	2°92	2°67	2°80	13
32	50.0	28.0	1.81	408	2°55	2°34	2°45	09
33	52.0	30.7	1.66	348	2°24	2°04	2°14	10
34	54.0	33.7	1.51	288	1°95	1°77	1°86	09
35	56.0	37.1	1.37	228	1°68	1°52	1°60	08
36	58.0	41.0	1.24	169	1°45	1°33	1°39	06
37	60.0	44.6	1.14	109	1°24	1°15	1°20	05
38	62.0	49.0	1.04	049	1°09	1°00	1°05	05
39	64.0	53.5	0.95	—0°989	0°94	0°84	0°89	0°05

Таблица II

Вычисление величин $n(t)$ и $S(t)$

Формулы: $n(t) = \sqrt{\alpha^2 - \beta(t)}$; $S = \int_0^t n(t)\,dt$

$y = 24.81t - 38.7$; $\varepsilon = S - y$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
NN° i	t_i	$\alpha^2 - \beta(t)$	$n(t)$	Сумма (4) попарно	Сумма (5) сверху	S	24.81 t	y	$\varepsilon=(7)-(9)$
0	0.0	324	18.00		0.00	0.00	0.00	— 38.7	+38.7
				36.52					
1	0.5	343	18.52		36.52	9.13	12.40	— 26.3	35.4
				37.55					
2	1.0	362	19.03		74.07	18.52	24.81	— 13.9	32.4
				38.50					
3	1.5	379	19.47		112.57	28.14	37.21	— 1.5	29.4
				39.39					
4	2.0	397	19.92		151.96	37.99	49.62	+ 10.9	27.1
4	2.0	397	19.92		75.98	37.99	49.62	+ 10.9	27.1
				40.61					
5	3.0	428	20.69		116.59	58.30	74.43	+ 35.7	23.6
				42.02					
6	4.0	455	21.33		158.61	79.30	99.24	60.5	18.8
				43.28					
7	5.0	479	21.89		201.83	100.91	124.0	85.3	15.6
				44.25					
8	6.0	500	22.36		246.08	123.04	148.8	110.1	12.9
				45.05					
9	7.0	515	22.69		291.13	145.56	173.6	134.9	10.7
				45.67					
10	8.0	528	22.98		336.80	168.40	198.4	159.7	8.7
				46.20					
11	9.0	539	23.22		383.00	191.50	223.2	184.5	7.0
				46.63					
12	10.0	548	23.41		429.63	214.82	248.1	209.4	5.4
12	10.0	548	23.41		214.82	214.8	248.1	209.4	5.4
				47.10					
13	12.0	561	23.69		261.92	291.9	297.7	259.0	2.9
				47.67					
14	14.0	574	23.96		309.58	309.6	347.3	308.6	1.0
				48.13					
15	16.0	584	24.17		357.70	357.7	396.9	356.2	+ 1.5
				48.52					
16	18.0	593	24.35		406.22	406.2	446.5	407.8	— 1.6
				48.89					
17	20.0	602	24.54		455.11	455.1	496.2	457.5	2.4
				49.24					
18	22.0	610	24.70		504.35	504.4	545.8	507.1	2.7
				49.52					
19	24.0	616	24.82		553.87	553.9	595.4	556.7	2.8
				49.74					
20	26.0	621	24.92		603.61	603.6	645.0	606.3	2.7
				49.90					
21	28.0	624	24.98		653.51	653.5	694.6	655.9	2.4
				50.04					
22	30.0	628	25.06		703.55	703.6	774.2	705.5	1.9
				50.16					
23	32.0	630	25.10		753.71	753.7	793.8	755.1	1.4
				50.20					
24	34.0	630	25.10		803.91	803.9	843.4	804.7	— 0.8
				50.20					
25	36.0	630	25.10		854.11	854.1	893.0	854.3	+ 0.2
				50.20					
26	38.0	630	25.10		904.31	904.3	942.6	904.1	0.2
				50.18					
27	40.0	629	25.08		954.49	954.5	992.3	953.6	0.9
				50.14					
28	42.0	628	25.06		1004.53	1004.5	1041.9	1003.2	1.3
				50.08					
29	44.0	626	25.02		1054.61	1054.6	1091.5	1052.8	1.8
				50.00					
30	46.0	624	24.98		1104.61	1104.6	1141.1	1102.4	2.2
				49.92					
31	48.0	622	24.94		1154.53	1154.5	1190.7	1152.0	2.5
				49.84					
32	50.0	620	24.90		1204.37	1204.4	1240.4	1201.7	2.7
				49.74					
33	52.0	617	24.84		1254.11	1254.1	1290.0	1251.3	2.8
				49.62					
34	54.0	614	24.78		1303.73	1303.7	1339.6	1300.9	2.8
				49.50					
35	56.0	611	24.72		1353.23	1353.2	1389.2	1350.5	2.7
				49.36					
36	58.0	607	24.64		1402.59	1402.6	1438.8	1400.1	1.5
				49.20					
37	60.0	603	24.56		1453.79	1451.8	1488.5	1449.8	2.0
				49.03					
38	62.0	599	24.47		1500.82	1500.8	1538.1	1499.4	+ 1.6
				48.86					
39	64.0	595	24.39		1549.68	1549.7	1587.7	1550.0	— 0.3

Таблица III

Вычисление величин $\mu(t)$ и $h(t)$

Формулы: $\mu(t)=\dfrac{a}{\psi\left[\sqrt{b}\,(t-c)\right]}$; $\psi(z)=\dfrac{\operatorname{tg} z}{z}$; $h(t)=\sqrt{1+b\,(t-c)^2}$

	t	$t-c$	$\sqrt{b}\,(t-c)$	$\psi\left[\sqrt{b}\,(t-c)\right]$	$\mu(t)$	$b\,(t-c)^2$	$h(t)$
Первый участок	0.0	— 9.68	0.548	1.114	21.02	0.3003	1.140
	0.5	9.18	520	101	21.25	2704	127
$a=23.41$	1.0	8.68	492	089	21.50	2421	145
$\sqrt{b}=0.05662$	1.5	8.18	463	078	21.74	2144	102
$c=9.68$	2.0	7.68	435	068	21.92	1892	090
	3.0	6.68	378	042	22.46	1429	069
	4.0	5.68	321	035	22.62	1030	050
	5.0	4.68	265	024	22.85	0702	035
	6.0	3.68	208	015	23.07	0432	021
	7.0	2.68	157	008	23.20	0246	012
	8.0	1.68	095	003	23.40	0090	004
	9.0	— 0.68	038	000	23.41	0014	001
	10.0	+ 0.32	018	000	23.41	0003	000
Второй участок	10.0	—23.6	0.270	1.025	24.54	0.0729	1.036
	12.0	21.6	247	021	24.65	0610	031
$a=25.18$	14.0	19.6	224	017	24.75	0506	025
$\sqrt{b}=0.01146$	16.0	17.6	201	014	24.83	0404	020
$c=33.6$	18.0	15.6	178	011	24.90	0317	016
	20.0	13.6	155	008	24.98	0240	012
	22.0	11.6	132	006	25.03	0174	009
	24.0	9.6	109	003	25.10	0119	006
	26.0	7.6	086	002	25.13	0074	004
	28.0	5.6	063	001	25.16	0040	002
	30.0	3.6	040	000	25.18	0016	001
	32.0	— 1.6	018	000	25.18	0003	000
	34.0	+ 0.4	004	000	25.18	0000	000
Третий участок	34.0	0.2	0.000	1.0000	25.10	0.0000	1.0000
	36.0	2.2	012	0000	25.10	0001	0000
$a=25.10$	38.0	4.2	024	0001	25.10	0006	0003
$b=0.00564$	40.0	6.2	035	0003	25.09	0012	0006
$c=33.8$	42.0	8.2	046	0006	25.08	0021	0010
	44.0	10.2	057	0011	25.07	0032	0016
	46.0	12.2	069	0016	25.06	0048	0024
	48.0	14.2	080	0021	25.05	0064	0032
	50.0	16.2	091	0028	25.03	0083	0042
	52.0	18.2	103	0035	25.01	0106	0053
	54.0	20.2	114	0044	24.99	0130	0065
	56.0	22.2	125	0053	24.97	0156	0078
	58.0	24.2	137	0063	24.95	0188	0094
	60.0	26.2	148	0074	24.92	0219	0110
	62.0	28.2	159	0085	24.89	0253	0126
	64.0	30.2	170	0098	24.85	0289	0145

Таблица IV

Аналитическое представление функции $f(s)=\frac{1}{n}\cdot\frac{dn}{ds}$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S	$f(s)$ с чертежа	$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{S}{l}$	$\sin\frac{\pi}{2}\frac{S}{l}$	$302\cdot(3)$	$30\cdot\sin\frac{2\pi S}{l}$ $15\cdot\sin\frac{2\pi S}{l}$	$7.5\sin\frac{4\pi S}{l}$ 0	(4)+(5)+(6)	$f(s)=$ 302—(8)	(2)—(9)
0	302	0°00′	0.000	0.0	0.0	0.0	0.0	302.0	0.0
10	270	3 27	060	18.1	7.2	3.6	28.8	273.1	—3.1
20	244	6 55	120	36.2	14.0	6.2	56.4	245.6	—1.6
30	220	10 23	180	54.4	20.0	7.5	81.9	220.1	—0.1
40	200	13 50	239	72.2	24.8	7.1	104.1	197.9	+2.1
50	183	17 18	297	89.7	28.2	5.0	122.9	179.1	+3.9
60	167	20 46	355	107.2	30.0	1.8	139.0	163.0	+4.0
70	152	24 13	410	123.7	30.0	—1.8	151.9	150.1	+1.9
80	140	27 41	465	140.3	28.2	—5.0	163.0	139.0	+1.0
90	128	31 08	517	156.0	24.8	—7.1	173.1	128.9	—0.9
100	117	34 36	668	171.5	20.0	—7.5	184.0	118.0	—1.0
110	107	38 04	617	186.4	14.0	—6.2	194.2	107.8	—0.8
120	98	41 32	663	200.0	7.2	—3.6	203.6	98.4	—0.4
130	89	45 00	707	213.5	0.0	0.0	213.5	88.5	+0.5
140	80	48 27	748	226.0	— 3.6	1	222.4	79.6	+0.6
150	71	51 55	787	237.3	— 7.0	1	230.7	71.3	—0.3
160	63	55 23	823	247.5	—10.0	1	237.5	64.5	—1.5
170	56	58 50	856	258.2	—12.4	1	245.8	56.2	—0.2
180	48	62 18	885	267.0	—14.1	1	252.9	49.1	—1.1
190	41	65 46	912	276.2	—15.0	1	261.2	40.8	+0.2
200	35	69 13	935	282.0	—15.0	1	267.0	35.0	0.0
210	28	72 41	955	288.0	—14.1	1	273.9	26.1	+1.9
220	22	76 08	971	293.0	—12.4	1	280.6	21.4	+0.6
230	17	79 36	984	297.0	—10.0	1	287.0	15.0	+2.0
240	11	83 04	993	300.0	— 7.0	1	293.0	9.0	+2.0
250	6	86 32	998	302.0	— 3.6	1	298.4	3.6	+2.4
260	0	90°00′	1.000	302.0	0.0	1	302.0	0.0	0.0

Масштаб подлинного чертежа 1 мм = 0.00001

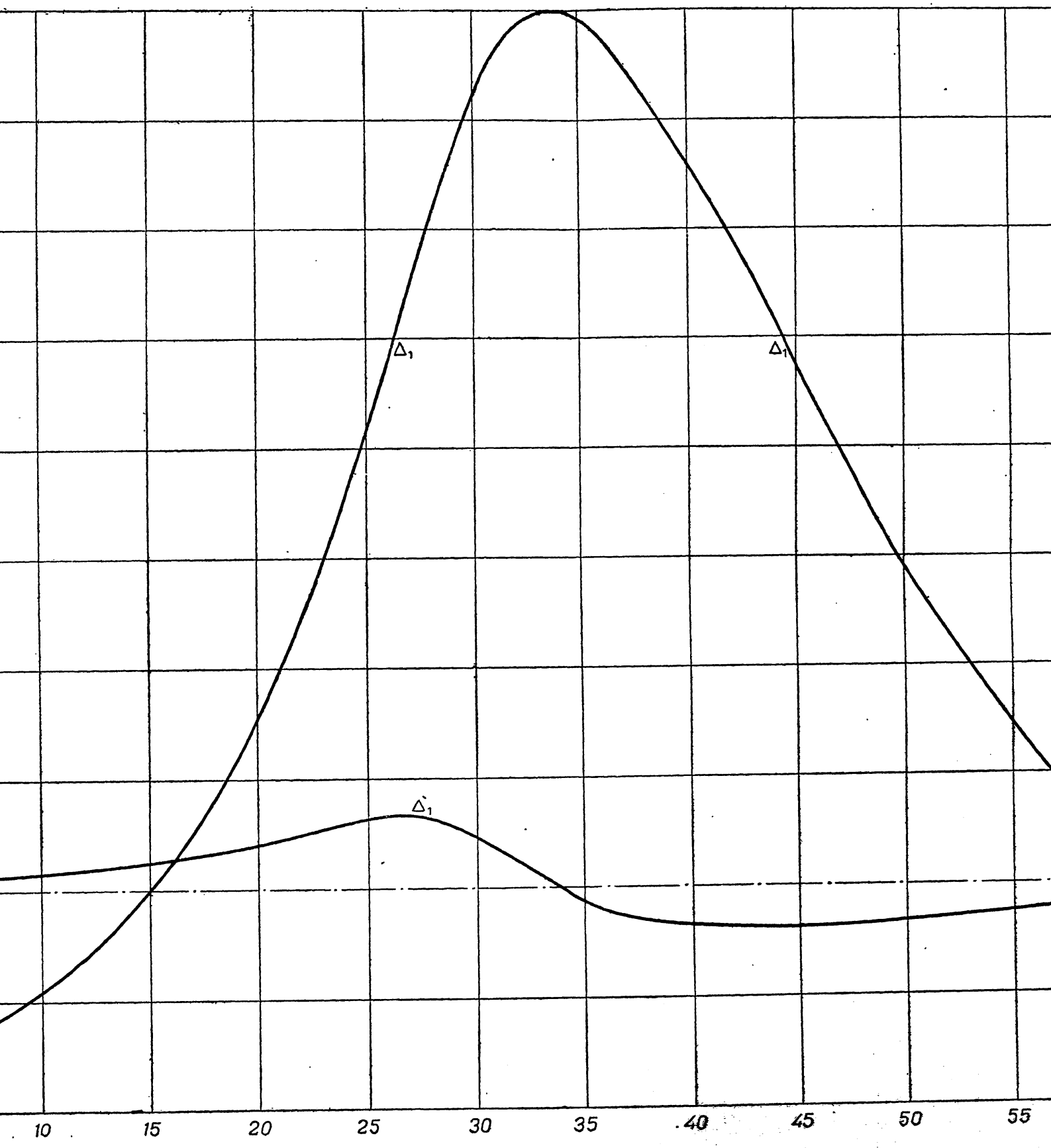
Представление функции $f(s)$

I) $0\leqslant s\leqslant 130\ .\ .\ .\ f(s)=\frac{1}{100}\left[0.302-0.302\sin\frac{\pi}{2}\frac{S}{l}-0.0302\sin 2\pi\frac{S}{l}-\right.$

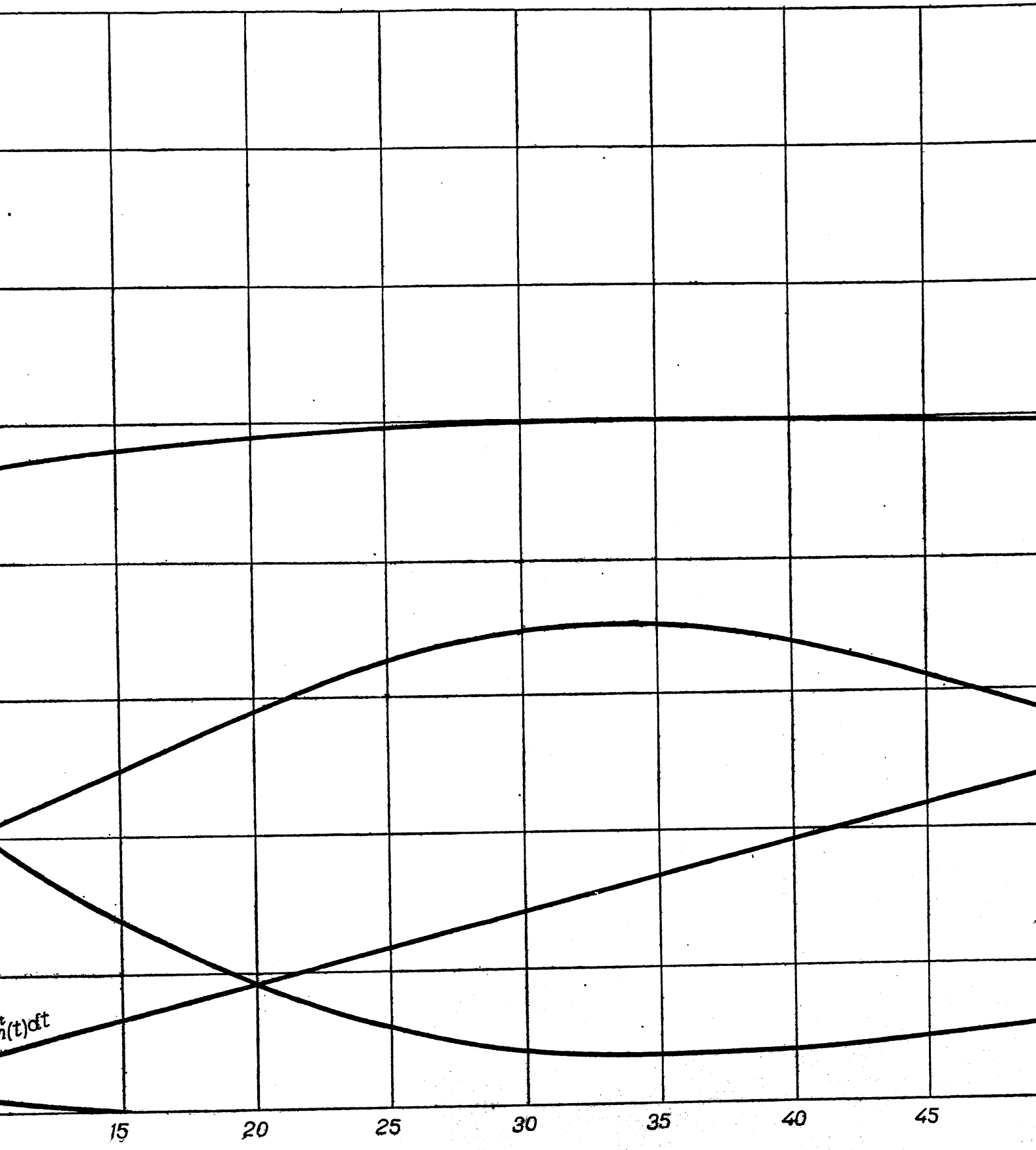
$\left.-0.0075\sin 4\pi\frac{S}{l}\right]$,

II) $130\leqslant s\leqslant 260\ .\ .\ .\ f(s)=\frac{1}{100}\left[0.302-0.302\sin\frac{\pi}{2}\frac{S}{l}-0.0151\sin 2\pi\frac{S}{l}\right]$,

III) $260\leqslant s\leqslant 1550\qquad f(s)=0$.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

ЗАМЕТКИ ПО БАЛЛИСТИКЕ

Эти заметки были написаны в 1923—1924 гг. в Бергене или на пароходах во время частых моих поездок из Ньюкестля в Берген и обратно.

В это время я, будучи в заграничной командировке, состоял представителем от нашей Лондонской торговой делегации, в составе правления тогда вновь основанного Русско-Норвежского пароходного общества.

Место пребывания правления было в Лондоне. В мою обязанность входили осмотр предлагаемых Обществу к покупке пароходов и определение пригодности их для перевозки лесных грузов, а также наблюдение за постройкою заказанных Обществом пароходов-лесовозов, из которых четыре строились в Бергене и два — во Франции, близ Руана.

Во все время постройки, продолжавшейся около двух лет, мне каждые три недели приходилось делать круговую поездку: Лондон — Ньюкестль — Берген — Ньюкестль — Лондон — Руан — Лондон и т. д.

В Бергене из 365 дней в году, кажется, 360 дней дождливых. На переходе Ньюкестль — Берген в осенние и зимние месяцы обыкновенно бывало настолько свежо, что все пассажиры прятались по каютам и роскошный салон пустовал, и в нем было весьма удобно заниматься. Я всегда брал с собою таблицу логарифмов и краткую табличку сопротивления воздуха полету снаряда, и как на пароходе, так и по вечерам в Бергене, после осмотра построек, занимался или вычислением траекторий снаряда, для сравнения разных методов, или же вычислением элементов объектива в 42 дюйма отверстием, заказанного фирме Парсонс для Пулковской обсерватории. Мне было поручено нашей Торговой делегацией разработать проект договора с указанной фирмой и проект технических условий к нему, а для этого необходимо было произвести предварительный расчет объектива, чтобы выяснить, какие требования ставить фирме.

I. О вычислении траекторий

§ 1. В курсах внешней баллистики излагается множество различных приемов и приводится множество таблиц для вычисления траектории снаряда, которое, при помощи этих приемов и этих таблиц, сводится к весьма простым действиям.

Все эти приемы основаны, однако, на разного рода допущениях, оценить влияние которых на точность получаемых разультатов, прямым теоретическим путем, не представляется возможным.

Есть приемы как бы последовательных приближений, но сходимость предлагаемых процессов обыкновенно не доказывается, и возникает сомнение, возможно ли при помощи этих приемов довести точность результатов до любой величины, тем более, что при самом вычислении не видно, каков предел погрешности.

Здесь, прежде всего, надо условиться в том, что мы будем разуметь под словом «точность» результата.

При вычислении движения снаряда главным фактором является сопротивление воздуха, величина которого известна лишь с ограниченною степенью точности, следовательно результат вычисления по существу не может быть «вполне точным». Но то понятие, которое мы имеем в виду в этой заметке, относится единственно к самому процессу вычисления: надо, чтобы вычисление не вносило добавочных погрешностей, превосходящих наперед назначенный предел, т. е. чтобы результат вычисления соответствовал принятому закону сопротивления воздуха, как будто бы этот закон был вполне точный.

Понятно, что лишь при таком условии всякое несогласие вычисленных результатов и наблюденных при стрельбе (предполагая, что начальная скорость определяется с надлежащею точностью) может быть относимо к несоответствию принятого закона сопротивления воздуха действительности, а не к неточности вычислений.

§ 2. В числе различных способов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений метода Пикара является одною из наиболее полно обоснованных, и сходимость ее доказана.

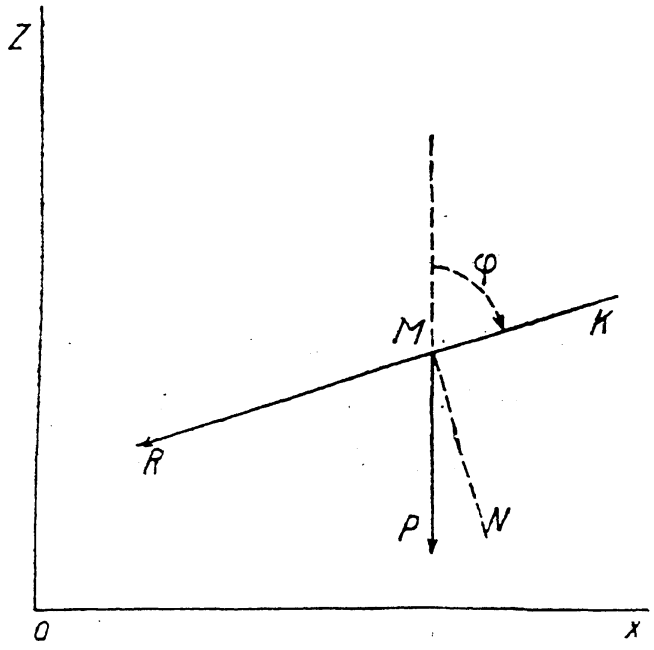
Другою методою является применение к вычислению траектории способов численного интегрирования, напр. способа Адамса—Штёрмера, как это развито в моих статьях. В этой методе, при самом процессе вычисления, можно так распоряжаться табличным промежутком, чтобы возможная погрешность не превосходила заданного предела.

В этой заметке я имею в виду показать применение методы последовательных приближений Пикара и сличать результаты, получаемые по другим методам, с результатом, полученным по методе Пикара.

§ **3.** Рассмотрим сперва случай *весьма настильной* стрельбы, т. е. когда наклонение траектории не превышает приблизительно 20°.

Пусть в момент времени t точка M есть место центра тяжести снаряда, вес которого P, прямая MK — касательная в точке M к траектории, MN — нормаль к траектории, которая предполагается плоской и лежащей в вертикальной плоскости стрельбы.

Направление касательной, следуя Остроградскому,[1] будем определять углом φ, считаемым не от горизонтальной плоскости, а от отвесной линии.



Фиг. 1.

Сопротивление воздуха выражается формулою вида

$$R = \lambda \cdot \pi r^2 \cdot \frac{\delta}{\delta_0} \cdot f(z) \cdot F(v) \qquad (1)$$

при обычно принятых обозначениях. Значения функций $F(v)$ и $f(z)$ даются специальными таблицами, вес куб. метра воздуха δ_0 на уровне моря и при «нормальном» состоянии атмосферы принимается равным 1.206 кг;

[1] Остроградский в своей статье: «Tables pour faciliter le calcul de la trajectoire que décrit un mobile dans un milieu résistant», читанной в Академии Наук 20 декабря 1839 г. и напечатанной в «Mémoires de l'Académie» (VI série, Sci. math. et phys., t. V, p. 437), говорит: «on se sert de l'angle que fait l'horizon avec la direction du mouvement; mais l'angle que celle ci fait avec la verticale me parait préférable; car d'abord la variable indépendante sera toujours croissante, et puis on ne sera pas obligé de considérer comme négatif un angle que deux droites font entre elles».

вес δ куб. метра воздуха, при заданной высоте барометра, температуре и влажности, вычисляется пользуясь соответствующими формулами и таблицами, которые нам не понадобятся, ибо для нашей цели можно довольствоваться таблицей В. М. Трофимова (см. стр. 263).

Уравнения движения снаряда возьмем в форме Эйлера:

$$\frac{P}{g}\cdot\frac{dv}{dt} = -R - P\cos\varphi \tag{2}$$

$$\frac{P}{g}\cdot\frac{v^2}{\rho} = P\sin\varphi \tag{3}$$

$$v\cdot dt = \rho\cdot d\varphi \tag{4}$$

$$dz = \rho\cos\varphi\cdot d\varphi \tag{5}$$

$$dx = \rho\sin\varphi\cdot d\varphi \tag{6}$$

§ **4.** При методе последовательных приближений за исходное приближение можно принимать и весьма грубое, так как оно затем исправляется самим процессом вычисления, но этот процесс тем быстрее ведет к цели, чем исходное приближение точнее, т. е. ближе к окончательному.

При весьма настильной траектории угол φ будет близок к 90°, поэтому можно принять за исходное то приближение, которое получится, когда во вторых частях вышеприведенных уравнений положить:

$$\sin\varphi = 1,\ \cos\varphi = 0;\ f(z) = 1$$

При таком предположении (весьма грубом) уравнения (2), (3), (4) примут вид:

$$\frac{P}{g}\cdot\frac{dv}{dt} = -R \tag{2'}$$

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{v^2}{\rho} = P \tag{3'}$$

$$v\cdot dt = \rho\cdot d\varphi \tag{4'}$$

Из этих уравнений следует

$$d\varphi = -\frac{P}{R}\cdot\frac{dv}{v}$$

положив

$$\frac{\lambda\pi r^2}{P} = a \tag{7}$$

получим

$$d\varphi = -\frac{1}{a}\cdot\frac{dv}{vF(v)} \tag{8}$$

Имеются готовые таблицы функции

$$\alpha(v) = \int_{v}^{V} \frac{dv}{v\sqrt{F(v)}}$$

поэтому, обозначая через v_0 — начальную скорость и через φ_0 — начальное значение угла φ, получим

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{a}[\alpha(v) - \alpha(v_0)] \tag{9}$$

откуда следует

$$\alpha(v) = \alpha(v_0) + a(\varphi - \varphi_0) \tag{I}$$

по этой формуле, задаваясь значениями

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$$

и пользуясь упомянутой таблицей [см.: C. Cranz. Lehrbuch der Ballistik, Bd. IV, 1918, Tafel № 8, столбец, озаглавленный 1000 $J'(u)$], находим соответствующие значения:

$$v_0, v_1, v_2, \ldots v_n$$

которые и послужат для исходного приближения.

§ 5. Чтобы по этому исходному приближению получить первое, вычисляем по формуле

$$\rho = \frac{v^2}{g}\operatorname{cosec}\varphi \tag{3'}$$

для избранных значений угла φ соответствующие им значения ρ, которые пусть будут:

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$$

по ним по формуле

$$z = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho \cos\varphi \, d\varphi$$

вычисляем величины:

$$z_1, \ldots z_n$$

и затем по формуле

$$R = aPF(v)f(z)$$

— величины:

$$R_0, R_1, R_2, \ldots R_n$$

сопротивления воздуха — более близкие к истинным, нежели в исходном приближении.

Из уравнений (2) и (4) следует

$$\frac{P}{g} v\,dv = -Rv\,dt - P\cos\varphi \cdot v\,dt$$

иначе

$$\frac{P}{g} v\,dv = -R\rho\,d\varphi - P\,dz$$

и, по интегрировании,

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = -g\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{R}{P}\rho\,d\varphi - g(z - z_0)$$

иначе

$$v^2 = v_0^2 - 2g\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{R}{P}\rho\,d\varphi - 2gz \qquad \text{(II)}$$

ибо в начальный момент $z_0 = 0$. Формула (II) доставит более точные значения

$$v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_n$$

скорости, соответствующей избранным значениям углов

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots\ \varphi_n$$

по начальному значению $v = v_0$, соответствующему значению $\varphi = \varphi_0$.

§ **6.** Для получения следующего приближения надо повторить процесс, изложенный в § 5, т. е. по формуле

$$\rho = \frac{v^2}{g}\operatorname{cosec}\varphi$$

вычислить новые значения ρ, по ним по формуле

$$z = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho\cos\varphi\,d\varphi$$

вычислить новые значения z, затем по формуле

$$R = aPF(v)f(z)$$

— новые значения R и, наконец, по формуле

$$v^2 = v_0^2 - 2g\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{R}{P}\rho\,d\varphi - 2gz$$

— исправленные значения v и продолжать действовать таким образом, пока разность двух последовательных приближений станет достаточно малой, т. е. будет лежать в пределах требуемой от вычисления точности. Когда это будет достигнуто, то, не перевычисляя вновь ρ, по формулам

$$x = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho \sin\varphi \, d\varphi \tag{10}$$

$$t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\rho}{v} \cdot d\varphi \tag{11}$$

вычисляем абсциссы x и время полета t.

Все квадратуры выполняем по формуле трапеций. Как видно, все вычисление производится «по столбцам», а не по «строкам», и является, таким образом, более простым, нежели численное интегрирование.

Подробности производства этого вычисления показаны в табл. 1, в которой оно произведено для следующего примера.

Пример

Данные:

$$2r = 15.24 \text{ см}; \quad P = 55.5 \text{ кг}; \quad \lambda = 1$$
$$v_0 = 900 \text{ м/сек.}; \quad \varphi_0 = 80°; \quad g = 9.81 \text{ м/сек.}^2$$

Имеем:

$$a = \frac{\pi r^2}{P}; \quad b = \frac{1000}{57.30}$$

$\pi r^2 = 182.41$ см^2

$\log \pi r^2 =$	2.26104	$\log 1000 =$	3.00000
$\operatorname{colog} P =$	$\bar{2}.25571$	$\log a =$	0.51675
$\log a =$	0.51675	$\operatorname{colog} 57.3 =$	$\bar{2}.24188$
		$\log b =$	1.75863

$a = 3.2866$ $\qquad$ $b = 57.36$

Дальнейшие приближения составлены в табл. 2 и 3.

§ 7. Прежде чем производить окончательную часть вычисления, выполним, для сравнения, его первую часть по иным формулам.

Мы имеем уравнения:

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = -R - P\cos\varphi \tag{2}$$

$$\frac{1}{g}\frac{v^2}{\rho} = \sin\varphi \tag{3}$$

$$v \cdot dt = \rho \cdot d\varphi \tag{4}$$

Отсюда следует

$$\frac{P}{g}\cdot\frac{dv}{dt}=\frac{P}{g}\cdot\frac{v\cdot dv}{\quad}=P\cdot\frac{dv\sin\varphi}{v\,d\varphi}$$

подставив в уравнение (2), получим по разделении на P:

$$\frac{dv}{v\,d\varphi}\cdot\sin\varphi=-\frac{R}{P}-\cos\varphi$$

иначе

$$\sin\varphi\cdot dv+v\cos\varphi\cdot d\varphi=-\frac{R\cdot v}{P}\cdot d\varphi$$

положим

$$v\sin\varphi=u \tag{12}$$

тогда предыдущее уравнение дает

$$\frac{du}{u}=-\frac{R}{P}\cdot\frac{d\varphi}{\sin\varphi} \tag{13}$$

откуда, по интегрировании, имеем

$$\log u=\log u_0-\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{R}{P}\operatorname{cosec}\varphi\cdot d\varphi \tag{III}$$

Значит, вместо того чтобы вычислять v по формуле (II), можно воспользоваться формулой (III) и зависимостью

$$v=u\operatorname{cosec}\varphi \tag{14}$$

Еще более простая схема для вычисления получится, если уравнение (13) писать так:

$$du=-\frac{R}{P}v\cdot d\varphi$$

из которого, по интегрировании, имеем

$$u=u_0-\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{R}{P}v\cdot d\varphi \tag{IV}$$

и затем

$$v=u\operatorname{cosec}\varphi$$

§ 8. Вычисление по формуле (III) предпочтительнее по следующей причине: в стоящей под знаком интеграла величине погрешность от неточности значений v заключается только в величине R, при вычислении же по формуле (IV) к этой погрешности в R присоединяется еще погрешность

самого v; при вычислении по формуле (II) к погрешности в R присоединяется еще погрешность в v^2, т. е. удвоенная относительная погрешность в v, но зато относительная погрешность делится на два, ибо для получения v извлекается квадратный корень.

Итак, если мы положим

$$\varepsilon = \frac{\delta v}{v}; \quad \eta = \frac{\delta R}{R} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dv} \cdot \delta v$$

то будет:

для формулы (III) погрешность . . . η

» » (IV) » $\eta + \varepsilon$

» » (II) » $\frac{1}{2}\eta + \varepsilon$

проследив по таблице значений $F(v)$ изменяемость этой функции, мы увидим, что при $\varepsilon = 0.01 = 1\%$ будет:

Таблица I

v (м/сек.)	η (%)	v (м/сек.)	η (%)
900	1.7	450	2.2
800	1.7	400	3.0
700	1.6	350	10.0
600	1.7	325	10.0
500	2.0	300	3.5

Отсюда видно, что пока v меньше 500 м/сек., то формула (II) есть наиболее точная, когда же v больше 500 м/сек., то формула (III) точнее, хотя разница в точности ничтожна, ибо будет:

$$\frac{1}{2}\eta + \varepsilon = 0.85 + 1.0 = 1.85$$

$$\eta = 1.7$$

Для значений же, близких к 330 м/сек., будет:

$$\frac{1}{2}\eta + \varepsilon = 5 + 1 = 6$$

$$\eta = 10$$

В табл. 4 и 5 показано применение формулы (III) для вычисления 2-го, 3-го и 4-го приближений, причем, само собою разумеется, нет

надобности перевычислять все значения v, а лишь те из них, разность которых от предыдущего приближения чувствительна.

После того как величины v вычислены с требуемою точностью, вычисляем ординаты z, абсциссы x и время полета t.

Это вычисление показано в табл. 6, причем интегрирование производится по правилу трапеций.

Вычисление надо доводить до первого отрицательного значения z, чтобы интерполируя найти горизонтальную дальность полета X и полное время полета, соответствующие значению $z = 0$.

В табл. 7 произведено для проверки вычисление величины z, принимая во внимание при суммировании вторые разности.

Как видно, разница настолько ничтожна, что можно ограничиваться вычислением по формуле трапеций.

§ 9. Чтобы получить суждение о точности, доставляемой вычислением траектории численным интегрированием по методе Адамса—Штёрмера, рассчитаем ту же траекторию по этой методе, пользуясь формулами и приемами, изложенными в прибавлении I к статье «О вращательном движении снаряда».

Данные:

$$\varphi_0 = 80^\circ; \quad v_0 = 900 \text{м/сек.}; \quad z_0 = 0$$

Затем имеем для начала вычисления:

$F(v_0) =$	2.745	$\log \frac{1}{4} =$	$\bar{1}.39794$
$\log F(v_0) =$	0.4385	$\operatorname{colog} g =$	$\bar{1}.00833$
$\log \frac{h}{P} \operatorname{cosec} \varphi_0 =$	$\bar{1}.8010$	$\operatorname{colg} 57.3 =$	$\bar{2}.24188$
$\log \sigma_0 =$	$\bar{2}.2395$	$\log h =$	$\bar{4}.64815$
$\sigma_0 =$	0.0174	$2 \log v_0 =$	5.9085
$\log u_0 =$	2.9476	$\log \operatorname{cotg} \varphi_0 =$	$\bar{1}.2463$
$\log u_1 =$	2.9302	$\log \zeta_0 =$	1.8030
$\log \operatorname{cosec} \varphi_0 =$	0.0064	$\zeta_0 =$	63.5 м
$\log v_1 =$	2.9366	$z_1 =$	63.5

$v_1 = 864.1$ м/сек.

$$F(v_1) = 2.568$$
$$\log F(v_1) = 0.4096$$
$$\log f(z_1) = \bar{1}.9974$$
$$\log \frac{h}{P} \operatorname{cosec} \varphi = \bar{3}.8007$$
$$\log \sigma_1 = \bar{2}.2077$$
$$\sigma_1 = 0.0161$$

Таблица II

n	σ	$\Delta\sigma$
0	174	−13
1	161	

$$q_0 = 174 - 6 = 168$$

$$\log u_0 = 2.9476$$
$$q_0 = 168$$
$$\log u_1 = 2.9308$$
$$\log \operatorname{cosec} \varphi_1 = 64$$
$$\log v_1 = 2.9372$$
$$v_1 = 865.3$$

$$2 \log v_1 = 5.8744$$
$$\log h = \bar{4}.6482$$
$$\log \operatorname{cotg}(80°15') = \bar{1}.2351$$
$$\log \zeta_1 = 1.7577$$
$$\zeta_1 = 57.2$$

Таблица III

n	σ	$\Delta\sigma$	ζ	$\Delta\zeta$
0	174	−12	63.5	−6.3
1	162		57.2	

$$\log F(v_1) = 0.4106$$
$$\log f(z_1) = \bar{1}.9974$$
$$\log \frac{h}{P} \operatorname{cosec} \varphi = \bar{3}.8007$$
$$\log \sigma_1 = \bar{2}.2087$$
$$\sigma_1 = 0.0162$$
$$q_0 = 174 - 6 = 168$$
$$q_1 = 162 - 6 = 156$$
$$\Delta z_0 = 63.5 - 3.1 = 60.4$$
$$\Delta z_1 = 57.2 - 3.1 = 54.1$$
$$\log u_1 = 2.9308$$
$$q_1 = 156$$
$$\log u_2 = 2.9152$$
$$\log \operatorname{cosec} \varphi_2 = 60$$
$$\log v_2 = 2.9212$$
$$v_2 = 834.1$$
$$F(v_2) = 2.420$$
$$\log F(v_2) = 0.3838$$
$$\bar{3}.8003$$
$$\bar{1}.9948$$
$$\log \sigma_2 = \bar{2}.1789$$
$$\sigma_2 = 0.01510$$

$$2 \log v_2 = 5.8424$$
$$\bar{4}.6482$$
$$\bar{1}.2236$$
$$\log \zeta_2 = 1.7142$$
$$\zeta_2 = 51.8$$

Таблица IV

n	σ	$\Delta\sigma$	$\Delta^2\sigma$	ζ	$\Delta\zeta$	$\Delta^2\zeta$
0	174			63.5		
		—12			—6.3	
1	162		+1	57.2		+0.9
		—11			—5.4	
2	151			51.8		

С этими значениями начинаем вычисление как показано в табл. 8. После $n = 4$ промежутки удваиваем. Для вычисления величин q_4 и Δz_4 составляем следующую табличку, удвоив значения σ и ζ.

Таблица V

n	σ	$\Delta\sigma$	$\Delta^2\sigma$	q	ζ	$\Delta\zeta$	$\Delta^2\zeta$	Δz
0	0.0348				127.0			
		—46				23.4		
2	302		+12	—	103.6		5.6	
		—34				17.8		78.0
4	268		+ 6	256	85.8		3.7	
		—28				14.1		66.2
5	240			230	71.7			

Совершенно так же поступаем при $n = 12$ и $n = 23$, где промежутки вновь удваиваются.

Сличая полученные значения v и z с полученными в табл. 6 (стлб. II и IX) и по ним величины x и t, видим, что разницы настолько малы, что можно довольствоваться полученными по методе Адамса — Штёрмера результатами. Таким образом видно, что эта метода ведет сразу к цели с желаемою степенью точности, требуя гораздо меньше труда.

§ 10. Уравнения движения снаряда, если принять за переменную независимую время t и обозначать производные по времени значками, имеют следующий вид:

$$u' = -g\frac{R}{P}\sin\varphi \tag{14}$$

$$v = u\,\mathrm{cosec}\,\varphi \tag{15}$$

$$z' = v\cos\varphi = u\,\mathrm{cotg}\,\varphi \tag{16}$$

$$x' = u \tag{17}$$

$$\varphi' = \frac{g}{v}\sin\varphi \tag{18}$$

Величины, стоящие в правых частях этих уравнений, вычисляются весьма просто по логарифмам.

Вместо уравнения (18) удобнее брать

$$\left(\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{g}{v} \tag{18'}$$

и вместо (14):

$$q' = \frac{g}{v}\frac{R}{P} \tag{14'}$$

тогда

$$\log u = \log u_0 - q \tag{14''}$$

Выбрав промежуток τ и положив

$$\sigma = q' \cdot \tau = \frac{Mg\tau}{P} \cdot \frac{R}{v}$$

$$\omega = p'\tau = \frac{Mg\tau}{v}$$

$$\zeta = z'\tau = u\tau \operatorname{cotg} \varphi = v\tau \cos \varphi$$

$$\zeta = x'\tau = u\tau$$

причем $M = 0.43429$ ($\log M = 1.63778$) есть модуль обыкновенных логарифмов, будем иметь весьма простую схему для вычислений.

Чтобы сравнить процессы, рассчитаем ту же траекторию по этой схеме.

В начале берем $\tau = \frac{1}{2}$.

Мы имели:

$$\frac{R}{P} = a \cdot F(v) \cdot f(z)$$

$\log a = 0.51675$; $a = 3.2866$

$\log M = \bar{1}.63778$

$\log g = 0.99167$

$\log \tau = \bar{1}.69897$

$\log M \cdot g\tau = 0.32842$

$\log a = 0.5168$

$\log F(v_0) = 0.4385$

$\operatorname{colg} v_0 = \bar{3}.0458$

$\log \sigma_0 = \bar{2}.3295$

$\sigma_0 = 0.0213$

$\log u_0 = 0.9476$

$\log u_1 = 0.9263$

$\log \sin \varphi = \bar{1}.9938$

$\log v_1 = 2.9325$; $v_1 = 856.0$

$\log g\tau = 0.69064$

$\log 3437.7 = 3.53627$

$\log k = 4.22691$

$\operatorname{colg} v_0 = \bar{3}.0458$

$\log \sin \varphi_0 = \bar{1}.9934$

$\log \omega_0 = 1.2661$

$\omega_0 = 18'.5$

$\varphi_0 = 80°00'.0$

$\varphi_1 = 80°18'.5$

$\log \tau = \bar{1}.6990$

$\log v_0 = 2.9542$

$\log \cos \varphi_0 = \bar{1}.2397$

$\log \zeta_0 = 1.8929$

$\zeta_0 = 78.1$

$n = 1$; $\varrho = \frac{1}{2}$; $v_1 = 856.0$; $\varphi_1 = 80°18'.5$; $z_1 = 78.1$

$\log u = 2.9263$; $\log v_1 = 2.9325$

$\log Mg\tau a = 0.8442$	$\log k = 4.2269$	$\log \tau = \bar{1}.6990$
$\operatorname{colog} v_1 = \bar{3}.0675$	$\operatorname{colog} v_1 = \bar{3}.6075$	$\log v_1 = 2.9325$
$\log F(v_1) = 0.4028$	$\log \sin \varphi_1 = \bar{1}.9938$	$\log \cos \varphi_1 = \bar{1}.2258$
$\log f(z_1) = \bar{1}.9965$	$\log \omega_1 = 1.2882$	$\log \zeta_1 = 1.8573$
$\log \sigma_1 = \bar{2}.3110$	$\omega_1 = 19'.4$	$\zeta_1 = 72.0$
$\sigma_1 = 0.0205$		

Таблица VI

n	σ	$\Delta\sigma$	q'	ω	$\Delta\omega$	$\Delta\varphi$	ζ	$\Delta\zeta$	Δz
0	213	—8	209	18'.5	+0.9	19.0	78.1	—6.1	75.0
1	205			19'.4			72.0		

$\log u_0 = 2.9476$	$\varphi_0 = 80°00'$	$z_0 = 0.0$
$q_0 = 209$	$\Delta\varphi_0 = 19'.0$	$\Delta z_0 = 75.0$
$\log u_1 = 2.9267$	$\varphi_1 = 80°19'.0$	$z_1 = 75.0$
$\log \sin \varphi_1 = 1.9938$		
$\log v_1 = 2.9329$	$\log u_1 = 2.9267$	$\varphi_1 = 80°19'.0$
$v_1 = 856.9$	$q_1 = 201$	$\Delta\varphi_1 = 19'.9$
$\log Mg\tau a = 0.8442$	$\log u_2 = 2.9066$	$\varphi_2 = 80°38'.9$
$\operatorname{colg} v_1 = \bar{3}0671$	$\log \sin \varphi_2 = \bar{1}.9942$	$z_1 = 75.0$
$\log F(v_1) = 0.4036$	$\log v_2 = 2.9124$	$\Delta z_1 = 68.9$
$\log f(z_1) = \bar{1}.9965$	$v_2 = 817.4$	$z_2 = 143.9$
$\log \sigma_1 = \bar{2}.3114$		
$\sigma_1 = 0.0205$		

$n = 2$; $v_2 = 817.4$; $\varphi_2 = 80°38'.9$; $r_2 = 143.9$

$\log v_2 = 2.9124$;	$\log u_2 = 2.9066.$	
$\log Mg\tau a = 0.8442$	$\log k = 4.2269$	$\log \tau = \bar{1}.6990$
$\operatorname{colg} v_2 = \bar{3}.0876$	$\operatorname{colg} V_2 = \bar{3}.0876$	$\log v_2 = 2.9124$
$\log F(v_2) = 0.3696$	$\log \sin \varphi_2 = \bar{1}.9942$	$\log \cos \varphi_2 = \bar{1}.2108$
$\log f(z_2) = \bar{1}.9939$	$\log \omega_2 = 1.3087$	$\log \zeta_2 = 1.8222$
$\log \sigma_2 = \bar{2}.2953$	$\omega_2 = 20'.3$	$\zeta_2 = 66.4$
$\sigma_2 = 0.0197$		

Таблица VII

n	σ	$\Delta\sigma$	$\Delta^2\sigma$	q	ω	$\Delta\omega$	$\Delta^2\omega$	$\Delta\varphi$	ζ	$\Delta\zeta$	$\Delta^2\zeta$	Δz
0	213			209	18′5			19.0	78.1			75.0
		—8				+0.9				—6.1		
1	205		0	201	19.4		0	19.9	72.0		+0.5	69.2
		—8				+0.9				—5.6		
2	197				20.3				66.4			

По этим значениям имеем:

$$\log u_0 = 2.9476 \qquad \varphi_0 = 80°00' \qquad z_0 = 0.0$$
$$\log u_1 = 2.9267 \qquad \varphi_1 = 80°19'.0 \qquad z_1 = 75.0$$
$$\log u_2 = 2.9066 \qquad \varphi_2 = 80°38'.9 \qquad z_2 = 144.2$$

Имея эти значения, продолжаем вычисление так, как показано в табл. 9а и 9б.

§ **11.** Для сличения полученных результатов составляем следующую сводную таблицу главных элементов траектории, рассчитанной по разным приемам.

Таблица VIII

Элементы	Мет. послед. прибл.	Мет. Адамса—Штёрмера пер. нез. φ	Мет. Адамса—Штёрмера пер. нез. t
Вершина			
Абс. x	6270.1 м	6267.2 м	6268.6 м
Орд. z	685.2 м	685.1 м	685.5 м
Время t	10.382 сек.	10.379 сек.	10.373 сек.
Скор. v	426.5 м/сек.	425.9 м/сек.	427.3 м/сек.
Точка падения			
Гор. дал. X	10.577 м	10570 м	10592 м
Угол Φ	19°56′	19°57′	19°55′.6
Время T	22.915 сек.	22.927 сек.	22.941 сек.
Скорость V	309.8 м/сек.	309.2 м/сек.	309.9 м/сек.

Необходимо иметь в виду, что таблицы сопротивления воздуха, начиная от $v = 504$ м/сек., составлены лишь на три знака, поэтому очевидно, что при разных способах вычисления по таким таблицам разницы в *четвертой* значащей цифре вполне возможны, вследствие самой неточности таблиц, и лучшего согласия результатов нельзя было и ожидать.

Исходное при

I	II	III	IV	V	VI	VII
n	$\varphi - \varphi_0$	$\alpha(\varphi - \varphi_0)$	$\varkappa(v)$	(v)	$2 \log v$	$\log \frac{1}{g} \operatorname{cosec} \varphi$
0	0°00	0.0	35.6	900	5.9085	$\bar{1}$.0150
1	.25	14.3	49.9	868	.8770	146
2	.50	28.7	64.3	836	.8444	143
3	.75	43.0	78.6	808	.8148	140
4	1.00	57.4	93.0	782	.7864	137
5	1.50	86.1	121.7	738	.7361	131
6	2.00	114.7	150.3	699	.6899	126
7	2.50	143.4	179.0	665	.6456	121
8	3.00	172.1	207.7	636	.6079	116
9	3.50	200.8	236.4	609	.5692	111
10	4.00	229.4	265.0	586	.5358	107
11	4.50	258.1	294	564	.5026	103
12	5.0	286.8	322	545	.4728	100
13	6.0	344.2	380	512	.4185	94
14	7.0	401.5	437	484	.3697	89
15	8.0	458.9	494	461	.3274	86
16	9.0	516.2	552	440	.2869	84
17	10.0	573.6	609	422	.2506	83
18	11.0	631.0	667	407	.2192	84
19	12.0	688.3	724	393	.1888	86
20	13.0	745.7	781	381	.1618	89
21	14.0	803.1	839	370	.1364	94
22	15.0	860.4	896	361	.1150	100
23	16.0	917.8	953	353	.0955	107
24	18.0	1032.5	1068	340	.0630	126
25	20.0	1147.2	1183	330	.0370	150
26	22.0	1261.9	1297	321	5.0130	179
27	24.0	1376.6	1412	313	4.9911	214
28	26.0	1491.4	1527	306	.9714	255
29	28.0	1606.1	1642	300	.9542	301
30	30.0	1720.8	1757	295	.9396	353
31	32.0	1835.5	1871	289	4.9218	$\bar{1}$.0411

Примечания:

1°) В ст. XIII числа 6.64; 7.24; 3.20 получены так:

$$6.64 = \frac{1}{2} \cdot 9.63 + 1.82$$

$$7.24 = \frac{1}{2} \cdot 13.56 + 0.46$$

$$3.20 = \frac{1}{2} 6.98 - 0.29$$

Таблица 1.

ближение

VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
log ρ	log cos φ	log ρ cos φ	$\frac{\rho \cos \varphi}{10000}$	Сумма XI попарно	Сумма XII сверху	z
4.9235	$\bar{1}$.2397	4.1632	1.46		0.00	0
.8916	.2288	.1204	1.32	2.78	2.78	60
.8587	.2176	.0763	1.19	2.51	5.29	115
.8288	.2061	4.0327	1.08	2.27	7.56	165
.8001	.1943	3.9944	0.99	2.07	9.63	209
.7492	.1697	.9189	0.83	1.82	6.64	290
.7025	.1436	.8461	.70	1.53	8.17	356
.6577	.1157	.7734	.58	1.28	9.45	412
.6195	.0859	.7054	.52	1.10	10.55	460
.5803	.0539	.6342	.43	0.95	11.50	502
.5465	$\bar{1}$.0192	.5657	.37	0.80	12.30	536
.5129	$\bar{2}$.9816	.4945	.31	0.68	12.98	566
.4828	.9403	.4231	.27	0.58	13.56	591
.4279	.8436	.2715	.19	0.46	7.24	632
.3786	.7188	3.0974	.12	0.31	7.55	660
.3360	.5428	2.8788	. 8	0.20	7.75	677
.2953	.2419	.5372	. 3	0.11	7.86	687
.2589	—	—	—	0.03	7.89	690
.2276	.2419	.4695	— 3	—0.03	7.86	687
.1974	.5428	.7402	— 6	—0.09	7.77	679
.1707	.7188	.8895	— 8	—0.14	7.63	666
.1458	.8436	2.9894	—10	—0.18	7.45	651
.1250	$\bar{2}$.9403	3.0653	—12	—0.22	7.23	631
.1062	$\bar{1}$.0192	.1254	—13	—0.25	6.98	610
.0756	.1436	.2192	—16	—0.29	3.20	559
.0520	.2397	.2917	—20	—0.36	2.84	496
.0309	.3179	.3488	—22	—0.42	2.42	422
4.0125	.3837	.3962	—25	—0.47	1.95	340
3.9969	.4403	.4372	—27	—0.52	1.43	249
.9843	.4900	.4743	—30	—0.57	0.86	150
.9749	.5341	.5090	—32	—0.62	0.24	37
3.9629	$\bar{1}$.5736	3.5365	—34	—0.66	—0.42	— 65

2°) Множители для получения z по числам стлб. XIII суть:

Для $n =$ 1 до 4 вкл. $\quad h = \frac{1}{2} \cdot \frac{10000}{4 \cdot 57.3} = 21.8$

» $n =$ 5 до 12 $\quad h = \frac{1}{2} \cdot \frac{10000}{2 \cdot 57.3} = 43.6$

» $n =$ 13 до 23 $\quad h = \frac{1}{2} \cdot \frac{10000}{57.3} = 87.3$

» $n =$ 24 до 31 $\quad h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{10000}{57.3} = 174.5$

Первое при

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
n	v	z	$F(v)\ P\cdot a$	$f(z)$	$IV\cdot V = R$	$\log R$	$\log R_\varphi$
0	900	0	501	1.000	501	2.6998	7.6233
1	868	60	473	0.994	470	.6721	.5637
2	836	115	443	.989	438	.6415	.5002
3	808	165	419	.983	412	.6149	.4437
4	782	209	397	.978	388	.5888	.3889
5	738	290	361	.971	350	.5441	.2933
6	699	356	328	.965	317	.5011	.2036
7	665	412	302	.959	290	.4624	.1201
8	636	460	280	.954	266	.4249	7.0444
9	609	502	260	.950	247	.3927	6.9730
10	586	536	243	.947	231	.3636	.9101
11	564	566	227	.944	224	.3502	.8631
12	545	591	213	.941	201	.3032	.7860
13	512	632	188	.937	175	.2430	.6709
14	484	660	168	.935	157	.1959	.5745
15	461	677	152	.933	141	.1492	.4852
16	440	687	139	.932	129	.1106	.4059
17	422	690	126	.932	117	.0682	.3271
18	407	687	115	.932	107	2.0294	.2570
19	393	679	104	.933	97	1.9868	.1842
20	381	666	94.2	.934	88.0	.9445	.1152
21	370	651	84.9	.936	79.0	.8976	6.0434
22	361	631	75.0	.937	71.2	.8525	5.9775
23	353	610	67.0	.939	63.0	.7993	.9055
24	340	559	54.9	.944	51.8	.7143	.7899
25	330	496	46.8	.950	44.5	.6484	.7004
26	321	422	41.4	.958	39.6	.5977	.6286
27	313	340	37.2	.966	36.0	.5563	.5688
28	306	249	33.4	.975	32.6	.5132	.5101
29	300	150	31.0	.985	30.6	.4857	.4700
30	295	37	29.2	.996	29.1	.4639	.4388
31	289	— 65	27.5	1.006	27.7	.4425	5.4054

Примечания:

1°) $P \cdot a = 182.4$. (для стлб. IV)

Таблица 2

ближение

IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
$\log R_\varphi h$	$\frac{R_\varphi h}{10000}$	Сумма X попарно	Сумма XI сверху	$\frac{\int_{\varphi_0}^{\varphi} R_\varphi d\varphi}{10000}$	$2gz$	$\frac{v^2}{10000}$	v
4.5105	3.24		0.00	0.00	0.00	81.00	900
.4509	2.82	6.06	6.06	6.06	.12	74.82	865
.3874	2.44	5.26	11.32	11.32	.23	69.45	833
.3309	2.14	4.58	15.80	15.80	.33	64.87	806
	1.89						
.5771	3.78	4.03	19.83	19.83	.42	60.75	779
.4815	3.03	6.81	26.64	26.64	.57	53.79	733
.3918	2.47	5.50	32.14	32.14	.71	48.15	694
.3083	2.03	4.50	36.64	36.64	.82	43.54	660
.2326	1.71	3.74	40.38	40.38	.92	39.70	630
.1612	1.45	3.16	43.54	43.54	1.00	36.46	604
.0983	1.25	2.70	46.24	46.24	1.06	33.70	581
4.0513	1.13	2.38	48.62	48.62	1.12	31.26	559
	0.93						
3.9742	1.87	2.06	50.68	50.68	1.17	29.15	540
4.1602	1.45	3.32	54.00	54.00	1.25	25.75	507
.0638	1.16	2.61	56.61	56.61	1.30	23.09	481
3.9745	0.94	2.10	58.71	58.71	1.34	20.95	458
.8952	.79	1.73	60.44	60.44	1.36	19.20	438
.8164	.66	1.45	61.89	61.84	1.36	17.75	421
.7463	.56	1.22	63.11	63.11	1.36	16.53	407
.6735	.47	1.03	64.14	64.14	1.34	15.52	394
.6045	.40	0.87	65.01	65.01	1.32	14.67	383
.5327	.34	0.74	65.75	65.75	1.29	13.96	374
.4668	.29	0.63	66.38	66.38	1.25	13.47	367
	.25	0.54	66.92	66.92	1.21	12.87	359
.3948	.50						
.5902	.39	0.89	67.81	67.81	1.11	12.08	348
.4907	.31	0.70	68.51	68.51	0.98	11.51	339
.4189	.26	0.57	69.08	69.08	0.84	11.08	333
.3591	.23	0.49	69.57	69.57	0.68	10.75	328
.3004	.20	0.43	70.00	70.00	0.50	10.50	324
.2603	.18	0.38	70.38	70.38	0.30	10.32	321
.2291	.17	0.35	70.73	70.73	0.08	10.19	319
3.1957	.16	0.33	71.06	71.06	—0.13	10.07	317

2°) Множители h для стлб. IX.

$n = 0$ до 4 $\quad \operatorname{colg} P = \bar{2}.25571$

$\log 2g = 1.29270$

$\operatorname{colg} 57.3 = \bar{2}.24188$

$\operatorname{colg} 8 = \bar{1}.09691$

$n = 0$ до 4... $\quad \log h = \bar{4}.88720$

$n = 4$ до 12... $\quad$ » $= \bar{3}.18823$

$n = 12$ до 23... $\quad$ » $= \bar{3}.48926$

$n = 23$ до 32... $\quad$ » $= \bar{3}.79029$

Второе при

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
n	v	$2 \log v$	$\log \rho$	$\log \rho \cos \varphi$	$\frac{\rho \cos \varphi}{10000}$	Сумма VI попарно	Сумма VII сверху	z	$a P \cdot F(v)$	$f(z)$
0	900	5.9085	4.9235	4.1632	1.46	2.77	0.00	0.0	501	1.000
1	865	.8740	.8886	.1174	1.31	2.49	2.77	60	470	.994
2	833	.8417	.8560	.0736	1.18	2.26	5.26	115	441	.989
3	806	.8120	.8260	4.0321	1.08	2.06	7.52	164	419	.984
4	779	.7835	.7972	3.9915	0.98	1.80	9.58	209	395	.979
5	733	.7307	.7438	.9135	.82	1.51	6.59	287	357	.971
6	694	.6826	.6952	.8388	.69	1.27	8.10	353	325	.965
7	660	.6389	.6510	.7667	.58	1.08	9.37	408	299	.959
8	630	.5988	.6104	.6963	.50	0.92	10.45	456	276	.954
9	604	.5618	.5729	.6268	.42	0.89	11.37	496	256	.950
10	581	.5276	.5383	.5575	.37	.68	12.26	535	240	.947
11	559	.4950	.5053	.4869	.31	.57	12.94	564	224	.944
12	540	.4646	.4746	.4149	.26	.44	*13.51*	589	209	.941
13	507	.4108	.4202	.2638	.18	.30	7.19	628	184	.937
14	481	.3634	.3723	.0911	.12	.20	7.49	654	166	.935
15	458	.3212	.3298	2.8726	.08	.11	7.69	671	151	.933
16	438	.2833	.2917	.5336	.03	.03	7.80	681	137	.932
17	421	.2492	.2575	—	.00	— .03	7.83	684	126	.932
18	407	.2183	.2267	2.4686	— .03	— .09	7.80	681	115	.932
19	394	.1909	.1995	.7423	— .06	— .14	7.71	673	105	.933
20	383	.1664	.1753	.8941	— .08	— .18	7.57	661	96.0	.934
21	374	.1449	.1543	.9979	— .10	— .22	7.39	645	88.4	.936
22	367	.1294	.1394	3.0797	— .12	— .26	7.17	626	82.0	.937
23	359	.1099	.1206	.1398	— .14	— .31	*6.91*	603	72.6	.940
24	348	.0821	.0947	.2383	— .17	— .38	3.14	548	62.4	.945
25	339	.0611	.0761	.3158	— .21	— .45	2.76	482	54.0	.952
26	333	.0445	.0624	.3803	— .24	— .51	2.31	403	49.1	.960
27	328	.0314	.0528	.4365	— .27	— .58	1.80	314	45.5	.969
28	324	.0212	.0467	.4870	— .31	— .65	1.22	213	43.1	.979
29	321	.0137	.0438	.5338	— .34	— .73	0.57	99	41.4	.990
30	319	.0082	.0435	.5776	— .39	— .80	—0.16	— 28	40.4	1.003
31	317	.0030	.0441	3.6177	— .41					

Примечания:

1°) $2 \log v$ берутся по числам стлб. XV первого приближения.

Таблица 8

ближение

XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI
R	log R	log $R\rho$	log $R\rho h$	$\frac{R\rho h}{10000}$	Сумма XVI попарно	Сумма XVII сверху	$2gz$	$\frac{v^2}{10000}$	v
501	2.6998	7.6233	4.5105	3.240	6.027	0.00	0.00	81.00	900
467	.6693	.5579	.4451	2.787	5.201	6.03	0.12	74.85	865
436	.6395	.4955	.3827	2.414	4.543	11.23	0.22	69.55	834
412	.6149	.4409	.3281	2.129	4.000	15.77	.32	64.91	806
387	.5877	.3849	.5731	1.871 3.742	6.709	19.77	.41	60.82	780
347	.5403	.2841	.4723	2.967	5.375	26.48	.56	53.96	734
315	.4983	.1935	.3817	2.408	4.390	31.86	.69	48.45	696
287	.4579	.1089	.2971	1.982	3.648	36.25	.80	43.95	663
265	.4232	7.0336	.2218	1.666	3.068	39.90	.90	40.20	634
243	.3856	6.9585	.1467	1.402	2.616	42.97	.97	37.06	606
228	.3579	.8962	.0844	1.214	2.261	45.59	1.05	34.34	586
212	.3263	.8316	4.0198	1.047	1.953	47.85	1.10	32.05	566
197	.2945	.7691	3.9573	0.906 1.812	3.216	49.80	1.16	30.04	546
173	.2380	.6582	4.1475	1.404	2.531	53.02	1.23	26.75	517
155	.1903	.5626	.0519	1.127	2.057	55.55	1.27	24.16	491
141	.1492	.4790	3.9683	0.930	1.697	57.61	1.32	22.07	470
127	.1038	.3955	.8848	.767	1.420	59.31	1.34	20.35	451
117	.0682	.3257	.8150	.653	1.209	60.73	1.35	18.92	435
107	2.0294	.2561	.7454	.556	1.035	61.94	1.34	17.72	421
98	1.9912	.1907	.6800	.479	0.893	62.98	1.32	16.70	408
89.6	.9523	.1276	.6169	.414	0.778	63.87	1.30	15.83	398
82.7	.9175	.0718	.5611	.364	0.691	64.56	1.27	15.17	389
76.8	.8854	6.0248	.5141	.327	0.605	65.25	1.23	14.52	381
68.2	.8338	5.9544	.4437	.278 .556	1.009	65.86	1.19	13.95	373
59.0	.7709	.8656	.6559	.453	0.830	66.87	1.08	13.05	361
51.3	.7101	.7862	.5765	.377	0.712	67.70	0.94	12.36	351
47.1	.6730	.7354	.5257	.335	0.642	68.41	0.79	11.80	343
44.1	.6444	.6972	.4875	.307	0.597	69.05	0.61	11.34	337
42.2	.6253	.6720	.4623	.290	0.570	69.65	0.42	10.93	331
41.0	.6128	.6566	.4469	.280	0.556	70.22	0.14	10.59	325
40.5	1.6075	.6510	3.4413	.276		70.78	—0.05	10.27	320

2°) log ρ получаются придавая к стлб. III числа стлб. VII исходного приближения.

Приближения

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
n	v	z	$f(z)$	$F(v)$	$\log F(v)$	$\log f(z)$	VI + VII	VIII + lg cosec ρ	IX + lg h	$h \cdot \frac{R}{P} \operatorname{cosec} \varphi$
										1-е приближение
0	900	0	1.000	2.745	0.4385	0.0000	0.4385	0.4452	$\bar{3}$.9385	0.0087
1	868	60	0.994	2.588	.4130	$\bar{1}$.9974	.4104	.4168	.9101	81
2	836	115	.989	2.430	.3856	.9952	.3808	.3868	.8801	76
3	808	165	.983	2.297	.3612	.9926	.3538	.3595	.8548	71
4	782	209	.978	2.176	.3377	.9903	.3280	.3334	.8267	67
5	738	290	.971	1.976	.2958	.9872	.2830	.2878	$\bar{2}$.0821	121
6	699	356	.965	1.799	.2550	.9845	.2395	.2437	.0380	109
7	665	412	.959	1.659	.2198	.9818	.2016	.2053	$\bar{3}$.9996	100
8	636	460	.954	1.537	.1867	.9795	.1662	.1694	.9637	92
9	609	502	.950	1.424	.1535	.9777	.1312	.1340	.9283	85
10	586	536	.947	1.332	.1245	.9763	.1008	.1032	.8975	79
11	564	566	.944	1.246	.0955	.9750	.0705	.0725	.8668	73
12	545	591	.941	1.169	.0678	.9736	.0414	.0431	.8374	69
13	512	632	.937	1.032	0.0137	.9717	$\bar{1}$.9854	$\bar{1}$.9865	$\bar{2}$.0819	121
14	484	660	.935	0.921	$\bar{1}$.9643	.9708	.9351	.9357	.0311	107
15	461	677	.933	.836	.9222	.9699	.8921	.8924	$\bar{3}$.9878	97
16	440	687	.932	.761	.8814	.9694	.8508	.8509	.9463	88
17	422	690	.932	.693	.8407	.9694	.8101	.8101	.9055	80
18	407	687	.932	.631	.8000	.9694	.7694	.7695	.8649	73
19	393	679	.933	.570	.7559	.9699	.7258	.7261	.8115	65
20	381	666	.934	.516	.7126	.9703	.6829	.6835	.7789	60
21	370	651	.936	.465	.6675	.9713	.6388	.6399	.7353	54
22	361	631	.937	.411	.6138	.9717	.5855	.5872	.6826	48
23	353	610	.939	.367	.5647	.9728	.5375	.5399	.6353	43
24	340	559	.944	.301	.4786	.9750	.4536	.4578	$\bar{3}$.8542	71
25	330	496	.950	.257	.4099	.9777	.3876	.3943	.7907	62
26	321	422	.958	.227	.3560	.9814	.3374	.3470	.7434	55
27	313	340	.966	.204	.3096	.9850	.2946	.3077	.7041	51
28	306	249	.975	.183	.2625	.9890	.2515	.2687	.6651	46
29	300	150	.985	.170	.2304	.9926	.2230	.2448	.6412	44
30	295	37	.996	.160	$\bar{1}$.2041	.9983	$\bar{1}$.2024	$\bar{1}$.2294	$\bar{3}$.6258	42

Таблица 4

по формуле (III)

XII	XIII	XIV	XV
Суммы XI попарно	log u	log v	v
168	2.9476	2.9542	900
157	2.9308	.9372	865.4
147	2.9151	.9211	834.0
138	2.9004	.9061	805.6
255	2.8866	.8920	779.9
230	2.8611	.8659	734.4
209	.8381	.8423	695.5
192	.8172	.8209	662.1
177	.7980	.8012	632.7
164	.7803	.7831	606.9
152	.7639	.7663	583.9
142	.7487	.7507	563.3
259	.7345	.7362	544.7
228	.7086	.7097	512.5
204	.6858	.6864	485.7
185	.6654	.6657	463.1
168	.6469	.6470	443.6
153	.6301	.6301	426.7
138	.6148	.6149	412.0
125	.6010	.6013	398.2
114	.5885	.5891	388.2
102	.5771	.5782	378.6
91	.5669	.5686	370.3
157	.5578	.5602	363.2
133	.5421	.5463	351.8
117	.5288	.5355	343.2
106	.5171	.5267	336.3
97	.5065	.5196	330.8
90	.4968	.5140	326.6
86	.4878	.5096	323.3
	.4792	.5062	320.8

Множители для стлб. X.

$\log \pi r^2 = 2.26104$
$\operatorname{colg} P = \bar{2}.25571$
$\operatorname{colg} 57.3\ldots = \bar{2}.24188$
$\operatorname{colg} 8 = \bar{1}.09691$

$\bar{3}.85554$

$\log M = \bar{1}.63778$

$\bar{3}.49332$

$n = 0$ до $n = 4$	$\bar{3}.4933$
$n = 5 \ldots n = 12$	$\bar{3}.7943$
$n = 12$ до 23 ...	$\bar{2}.0954$
$n = 23$ до 30	2.3964

$\log v_0 = 2.95424$
$\log \sin \varphi_0 = \bar{1}.99335$

$\log u_0 = 2.94759$

I	II	III	IV	V	VI
n	v	$F(v)$	$\log F(v)$	$\log F(v)f(z)$	$\nabla + \log h \operatorname{cosec} \varphi$
			2-е приближение		
0	900.0	2.745	0.4385	0.4385	$\bar{3}$.9385
1	865.4	2.575	.4108	.4082	.9079
2	834.0	2.420	.3838	.3790	.8783
3	805.6	2.286	.3591	.3517	.8507
4	779.9	2.166	.3357	.3260	.8247
5	734.4	1.961	.2925	.2797	$\bar{2}$.0778
6	695.5	1.785	.2516	.2561	.0546
7	662.1	1.646	.2164	.1982	$\bar{3}$.9962
8	632.7	1.523	.1827	.1622	.9597
9	606.9	1.416	.1511	.1288	.9259
10	583.9	1.324	.1219	.0982	.8949
11	563.3	1.243	.0945	.0695	.8658
12	544.7	1.168	.0674	.0410	.8370
13	512.5	1.034	0.0145	$\bar{1}$.9862	$\bar{2}$.0827
14	485.7	0.928	1.9675	.9383	.0343
15	463.1	.843	.9258	.8957	$\bar{3}$.9914
16	443.6	.774	.8887	.8581	.9536
17	426.7	.711	.8519	.8113	.9067
18	412.0	.652	.8145	.7839	.8794
19	398.2	.593	.7731	.7430	.8387
20	388.2	.550	.7404	.7107	.8067
21	378.6	.505	.7033	.6746	.7411
22	370.3	.466	.6684	.6401	.7372
23	363.2	.425	.6284	.6012	.6990
24	351.8	.361	.5575	.5325	.9331
25	343.2	.317	.5011	.4788	.8819
26	336.3	.283	.4518	.4332	.8392
27	330.8	.260	.4150	.4000	.8095
28	326.6	.244	.3874	.3764	.7900
29	323.3	.235	.3711	.3637	.7819
30	320.8	.226	$\bar{1}$.3541	$\bar{1}$.3524	.7758
			3-е приближение		
19	398.3	0.594	$\bar{1}$.7738	$\bar{1}$.7437	$\bar{3}$.8394
20	386.5	.542	.7340	.7043	.8003
21	376.5	.496	.6955	.6668	.7633
22	367.7	.452	.6551	.6268	.7239
23	359.6	.402	.6042	.5770	.6748
24	346.0	.332	.5211	.4961	.8967
25	335.2	.278	.4440	.4217	.8248
26	326.4	.243	.3856	.3670	.7730
27	319.1	.221	.3444	.3294	.7389
28	312.9	.204	.3096	.2986	.7122
29	307.4	.187	.2718	.2644	.6826
30	302.6	.175	$\bar{1}$.2430	$\bar{1}$.2413	.6647
			4-е приближение		
23	359.7	0.402	$\bar{1}$.6042	$\bar{1}$.5770	$\bar{3}$.6748
24	347.1	.337	.5276	.5026	.9032
25	337.5	.289	.4609	.4386	.8417
26	330.1	.257	.4099	.3913	.7973
27	324.2	.237	.3747	.3597	.7692
28	319.4	.222	.3464	.3354	.7490
29	315.4	.211	.3243	.3169	.7351
30	312.4	.202	.3054	.3037	.7271
			5-е приближение		
26	329.6	0.255	$\bar{1}$.4065	$\bar{1}$.3879	$\bar{3}$.7939
27	323.5	.235	.3711	.3561	.7656
28	318.3	.219	.3404	.3294	.7430
29	314.0	.207	.3160	.3086	.7268
30	310.5	.197	.2945	.2928	.7162

по формуле (III)

Таблица 5

VII	VIII	IX	X	XI
Числ. VI	VII попарно	log u	log v	v_1
		2-е приближение		
87	168	2.9476	2.9543	900.0
81	156	.9308	.9372	865.4
75	146	.9152	.9212	834.1
71	138	.9006	.9063	806.0
67	253	.8868	.8922	780.2
119	232	.8615	.8663	735.0
113	212	.8383	.8425	695.8
99	190	.8171	.8208	661.9
91	175	.7981	.8013	632.8
84	163	.7806	.7834	607.3
79	152	.7643	.7667	584.4
73	141	.7491	.7511	563.8
68	257	.7350	.7377	546.7
121	229	.7093	.7104	513.3
108	206	.6864	.6870	486.4
98	188	.6658	.6661	463.6
90	171	.6470	.6471	443.7
81	156	.6299	.6299	426.5
75	144	.6143	.6144	411.5
69	133	.5999	.6002	398.3
64	119	.5866	.5872	386.5
55	109	.5747	.5758	376.5
54	104	.5638	.5655	367.7
50	186	.5534	.5558	359.6
86	162	.5348	.5390	346.0
76	145	.5186	.5253	335.2
69	133	.5041	.5137	326.4
64	126	.4908	.5039	319.1
62	123	.4782	.4954	312.9
61	121	.4659	.4877	307.4
60		.4538	.4808	302.6
		3-е приближение		
69	132	2.5999	2.6002	398.3
63	121	.5867	.5873	386.6
58	111	.5746	.5757	376.5
53	100	.5635	.5652	367.5
47	173	.5535	.5559	359.7
79	146	.5362	.5404	347.1
67	126	.5216	.5283	337.5
59	113	.5090	.5186	330.1
54	106	.4977	.5108	324.2
52	100	.4871	.5043	319.4
48	94	.4771	.4989	315.4
46		.4677	.4947	312.4
		4-е приближение		
47	174	2.5535	2.5559	359.7
80	150	.5361	.5403	347.0
70	133	.5211	.5278	337.1
63	121	.5078	.5174	329.2
58	114	.4957	.5088	322.7
56	110	.4843	.5015	317.3
54	107	.4733	.4951	312.7
53		.4626	.4896	308.7
		5-е приближение		
62	120	2.5084	2.5180	323.6
58	113	.4964	.5095	323.2
55	108	.4851	.5023	317.9
53	105	.4743	.4961	313.4
52		.4638	.4908	309.6

Абсциссы, ординаты

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
n	v	$2 \log v$	$\log \rho$	$\log h\rho$	$\log h\rho \cos \varphi$	$h\rho \cos \varphi$	Сумма попарно	z	$\log h\rho \sin \varphi$
0	900.0	5.9086	4.9236	2.2624	1.5021	31.8		0.0	2.2557
							60.4		
1	865.4	.8744	8890	.2278	.4566	28.6		60.4	.2214
							54.5		
2	834.1	.8424	.8567	.1955	.4131	25.9		114.9	.1895
							49.4		
3	806.0	.8126	.8266	.1654	.3715	23.5		164.3	.1597
							44.9		
4	780.2	.7844	.7981	.1369	.3312	21.4		209.2	.1315
							78.7		
5	735.0	.7326	.7457	.3855	.5552	35.9		287.9	.3807
							66.2		
6	695.8	.6850	.6976	.3374	.4810	30.3		354.1	.3332
							56.0		
7	661.9	.6416	.6537	.2935	.4092	25.7		410.1	.2898
							47.6		
8	632.8	.6026	.6142	.2540	.3399	21.9		457.7	.2508
							40.6		
9	607.3	.5668	.5779	.2177	.2716	18.7		498.3	.2149
							34.7		
10	584.4	.5334	.5441	.1839	.2031	16.0		533.0	.1815
							29.6		
11	563.8	.5022	.5125	.1523	.1339	13.6		562.6	.1503
							25.2		
12	546.7	.4754	.4854	.1252	.0655	11.6		587.8	.1235
							39.6		
13	513.3	.4208	.4302	.3711	.2147	16.4		627.4	.3700
							27.4		
14	486.4	.3740	.3829	.3238	.0426	11.0		654.8	.3232
							17.7		
15	463.6	.3322	.3408	.2817	0.8245	6.7		672.5	.2814
							9.7		
16	443.7	.2942	.3026	.2435	0.4854	3.0		682.2	.2434
							3.0		
17	426.5	.2598	.2681	.2090	—	0.0		685.2	.2090
							2.7		
18	411.5	.2288	.2372	.1781	0.4200	— 2.7		682.5	.1780
							7.7		
19	398.3	.2004	.2090	.1499	0.6927	— 5.0		674.8	.1496
							12.0		
20	386.6	.1746	.1835	.1244	0.8452	— 7.0		662.8	.1238
							15.8		
21	376.5	.1514	.1608	.1017	0.9453	— 8.8		647.0	.1006
							19.3		
22	367.5	.1304	.1404	.0813	1.0216	—10.5		627.7	.0796
							22.6		
23	359.7	.1118	.1225	.0634	.0826	—12.1		605.1	.0610
							54.3		
24	347.0	.0806	.0932	.3351	.4787	—30.1		550.8	.3309
							65.7		
25	337.1	.0556	.0706	.3125	.5522	—35.6		485.1	.3058
							76.7		
26	329.6	.0360	.0539	.2958	.6137	—41.1		408.4	.2862
							87.5		
27	323.2	.0190	.0404	.2823	.6660	—46.4		320.9	.2692
							98.0		
28	317.9	5.0046	.0301	.2720	.7123	—51.6		222.9	.2548
							108.4		
29	313.4	4.9922	.0223	.2642	.7542	—56.8		114.5	.2424
							118.9		
30	309.6	4.9816	4.0169	2.2588	1.7929	—62.1		—4.4	2.2318

Суммирование ζ, принимая

n	$\zeta = h\rho \cos \varphi$	$\Delta\zeta$	$\Delta^2\zeta$	Δz	z	n	$\zeta = h\rho \cos \varphi$	$\Delta\zeta$	$\Delta^2\zeta$	Δz	z
0	63.54				0.0	8	43.74	— 7.6		47.5	457.5
		— 6.3		60.2					+1.2		
1	57.23		+1.1		60.2	9	37.38	— 6.4		40.4	497.9
		— 5.2		54.6					+0.9		
2	51.77		+0.5		114.8	10	31.92	— 5.5		34.7	532.6
		— 4.7		49.6					+0.8		
3	47.04		+0.5		164.4	11	27.22	— 4.7		29.6	562.2
		— 4.2		44.8					+0.7		
4	42.87				209.2	12	23.25	— 4.0		25.1	587.3
				79.0							
5	71.81				288.2						
		—11.3		66.0						39.5	626.8
6	60.53		+2.1		354.2	13	32.80	—10.8			
		— 9.2		55.8					+2.1		
7	51.31		+1.6		410.0	14	22.06	— 8.7		27.2	654.0

Таблица 6

и время полета

XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII
$h\rho \sin \varphi$	Сумма попарно	x	$\log \frac{h\rho}{v}$	$\frac{h\rho}{v}$	Попарно	t
180.2		0.0	$\bar{1}.3081$	0.203		0.
	346.7				0 398	
166.5		346.7	.2906	.195		0.398
	321.2				.383	
154.7		667.9	.2743	.188		0.781
	299.1				.370	
144.4		967.0	.2591	.182		1.151
	279.8				.358	
135.4		1246.8	.2447	.176		1.509
	511.1				.683	
240.3		1757.9	.5192	.331		2.192
	455.7				.644	
215.4		2213.6	.4949	.313		2.836
	410.3				.610	
194.9		2623.9	.4727	.297		3.446
	373.1				.581	
178.2		2997.0	.4527	.284		4.027
	342.2				.556	
164.0		3339.2	.4343	.272		4.583
	315.9				.533	
151.9		3655.1	.4172	.261		5.116
	293.3				.513	
141.4		3948.4	.4012	.252		5.629
	273.3				.496	
131.9		4221.7	.3875	.244		6.125
	498.5				.946	
234.5		4720.2	.6607	.458		7.071
	445.0				.891	
210.5		5165.2	.6368	.433		7.962
	401.7				.842	
191.2		5566.9	.6156	.409		8.804
	366.3				.804	
175.1		5933.2	.5964	.395		9.608
	336.9				.774	
161.8		6270.1	.5791	.379		10.382
	312 5				.745	
150.7		6582.6	.5637	.366		11.127
	291.8				.721	
141.1		6874.4	.5497	.355		11.848
	274.1				.699	
133.0		7148.5	.5371	.344		12.547
	259.1				.680	
126.1		7407.6	.5260	.336		13.223
	246.2				.664	
120.1		7653.8	.5161	.328		13.881
	235.2				.650	
115.1		7889.0	.5075	.322		14.531
	444.4				1.267	
214.2		8333.4	.7948	.623		15.798
	416.4				1.232	
202.2		8749.8	.7847	.609		17.030
	395.5				1.209	
193.3		9145.3	.7778	.600		18.239
	379.2				1.193	
185.9		9524.5	.7728	.593		19.432
	365.7				1.181	
179.8		9890.2	.7697	.588		20.613
	354.5				1.174	
174.7		10244.7	.7681	.586		21.787
	345.2				1.172	
170.5		10589.9	.7680	.586		22.959

Множители

n.

$\operatorname{colg} 8 = \bar{1}.09691$

$\operatorname{colg} 57.3 = \bar{2}.24188$

$\log h = \bar{3}.33879$

n: 0— 4 ...	$\bar{3}.3388$
4—12	$\bar{3}.6398$
12—23	$\bar{3}.9409$
23—30	$\bar{2}.2419$

Дальность:

$$X = 10590 - 345 \cdot \frac{4.4}{118.9}$$
$$= 10577 \text{ м}$$
$$v = 309.6 + 3.8 \cdot \frac{4.4}{118.9}$$
$$= 309.7 \cdot \frac{\text{м}}{\text{сек.}}$$
$$\varphi = 110^\circ - 120' \cdot \frac{4.4}{118.9}$$
$$= 109^\circ 56'$$
$$\theta = 19^\circ 56'$$
$$T = 22.891 - 1.172 \cdot \frac{4.4}{118.9}$$
$$= 22.847 \text{ сек.}$$

Таблица 7

во внимание 2-ю разность

n	$\zeta = h\rho \cos \varphi$	$\Delta\zeta$	$\Delta^2\zeta$	Δz	z	n	$\zeta = h\rho \cos \varphi$	$\Delta\zeta$	$\Delta^2\zeta$	Δz	z
								— 3.1	+0.3	— 22.6	
15	13.35			17.7	671.7	23	—24.16				604.6
		—7.2								— 54 3	
16	6.12		+1.5	9.7	681.4						550.3
		—6.1				24	60.22	—11.1		— 65.7	
17	0.00		+1.1	3.0	684.4						484.6
		—5.3				25	71.32	—10.9		— 76.7	
18	— 5.26		+0.8	— 2.7	681.7						407.9
		—4.6				26	82.17	—10.5		— 87.4	
19	— 9.86		+0.7	— 7.6	674.1						320.5
		—4.1				27	92.70	—10.4		— 97.9	
20	—13.94		+0.5	—11.9	662.2						222.6
		—3.7				28	103.1	—10.5		—108.4	
21	—17.63		+0.4	—15.7	646.5						114.2
		—3.4				29	113.6	—10.5		—118.9	
22	—21.02		+0.3	—19.3	627.2						—4.7
						30	124.1				

Интегрированное уравнение

(Переменная

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n	v	$F(v)$	$\log F(v)$	$\log f(z)$	$\log h \operatorname{cosec} \varphi$	$\log \sigma$	σ	$\Delta\sigma$	$\Delta^2\sigma$	q
0	900.0	2.745	0.4385	0.0000	$\bar{3}$.8010	$\bar{2}$.2395	0.0174			0.0168
								—12	+ 1	
1	865.3	2.574	.4106	$\bar{1}$.9974	.8007	.2087	162			156
								—11	+ 2	
2	834.1	2.420	.3838	.9948	.8003	.1789	151			146
								— 9	+ 1	
3	806.0	2.288	.3595	.9926	.8000	.1521	142			138
								— 8		
4	780.2	2.167	.3359	.9908	.7997	.1264	134			
										256
5	734.5	1.961	.2925	.9872	$\bar{2}$.1001	.3798	240	—23	+ 5	
6	695.7	1.786	.2519	.9845	.0995	.3359	217	—18	+ 2	230
7	662.7	1.649	.2172	.9823	.0990	.2985	199	—16	+ 2	206
8	633.3	1.526	.1836	.9795	.0985	.2616	183	—14	+ 2	192
9	607.6	1.418	.1517	.9777	.0981	.2275	169	—12	+ 2	176
10	584.6	1.326	.1225	.9763	.0977	.1965	157	—10	+ 1	163
11	564.0	1.246	.0955	.9750	.0973	.1678	147	— 9		152
12	545.4	1.171	.0686	.9731	.0970	.1387	138			143
										263
13	512.6	1.034	.0145	.9717	.3975	.3837	242	—25	+ 4	
14	486.1	0.929	$\bar{1}$.9680	.9708	.3970	.3358	217	—21	+ 4	226
15	463.0	.843	.9258	.9699	.3967	.2924	196	—17	+ 2	209
16	443.1	.772	.8876	.9694	.3965	.2535	179	—15	+ 2	188
17	425.9	.708	.8500	.9694	.3964	.2158	164	—13	— 1	171
18	411.0	.648	.8116	.9694	.3965	.1775	151	—14	+ 3	156
19	397.6	.590	.7708	.9699	.3967	.1374	137	—11	0	145
20	386.2	.541	.7332	.9704	.3970	.1006	126	—11	+ 1	130
21	376.0	.494	.6937	.9708	.3975	.0620	115	—10	— 1	121
22	367.2	.450	.6532	.9717	.3981	.0230	105	—11		109
23	359.4	.400	.6021	.9731	.3988	$\bar{3}$.9740	94			100
										168
24	347.2	.338	.5289	.9754	.7016	$\bar{2}$.2059	161	—23	+10	
25	337.1	.286	.5564	.9786	.7041	.1391	138	—13	+ 4	154
26	329.5	.255	.4065	.9818	.7070	.0953	125	— 9	+ 3	138
27	322.9	.233	.3674	.9859	.7105	.0638	116	— 6	+ 4	123
28	317.6	.217	.3365	.9903	.7146	.0414	110	— 2		113
29	313.1	.204	.3096	.9952	.7192	.0340	108			108
30	309.1				$\bar{2}$.7244					108

Таблица 8а

по методе Адамса — Штёрмера

независимая φ)

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$\log u$	$\log v$	$2\log v$	$\log h \operatorname{cotg} \varphi$	$\log \zeta$	ζ	$\Delta\zeta$	$\Delta^2\zeta$	$\Delta^3\zeta$	Δz	z
2.9476	2.9542	5.9085	$\bar{5}.8945$	1.8030	63.5	— 6.3				0.0
							+0.9		60.4	
.9308	2.9372	.8744	.8833	.7577	57.2	— 5.4				60.4
							+0.7		54.4	
.9152	2.9212	.8424	.8718	.7142	51.8	— 4.7				114.8
							+0.5		49.5	
.9006	.9063	.8126	.8600	.6726	47.1	— 4.2				164.3
									45.1	
.8868	.8922	.7844	.8479	.6323	42.9					209.4
.8612	.8660	.7320	$\bar{4}.1237$	.8557	71.7	—11.2			78.0	287.4
							+2.1			
.8382	.8424	.6848	.0970	.7818	60.5	— 9.1		—0.6	66.2	353.6
							+1.5			
.8176	.8213	.6426	.0686	.7112	51.4	— 7.6		—0.3	56.0	409.6
							+1.2			
.7984	.8016	.6032	.0383	.6415	43.8	— 6.4		—0.2	47.7	457.3
							+1.0			
.7808	.7836	.5672	$\bar{4}.0059$	.5731	37.4	— 5.4		—0.3	40.6	497.9
							+0.7			
.7645	.7669	.5338	$\bar{5}.9708$	.5046	32.0	— 4.7			34.7	532.6
.7493	.7513	.5026	.9328	.4354	27.3				29.7	562.3
.7350	.7367	.4734	.8912	.3646	23.2				25.2	587.5
.7087	.7098	.4196	$\bar{4}.0948$	.5144	32.7	—10.7			38.7	626.2
							+2.0			
.6861	.6867	.3734	$\bar{5}.9696$	.3430	22.0	— 8.7			27.2	653.3
							+1.5			
.6652	.6655	.3310	$\bar{5}.7933$	.1243	13.3	— 7.2			17.9	671.2
							+1.1			
.6464	.6465	.2930	$\bar{5}.4921$	0.7851	6.1	— 6.1			9.9	680.1
							+0.9			
.6293	.6293	. . .	—	. . .	0.0	— 5.2			3.1	684.2
							+0.6			
.6137	.6138	.2276	$\bar{5}.4921$	0.7197	— 5.2	— 4.6			— 2.6	681.6
							+0.5			
.5992	.5995	.1990	$\bar{5}.7933$	0.9923	— 9.8	— 4.1			— 7.4	674.2
							+0.4			
.5862	.5868	.1736	$\bar{5}.9696$	1.1432	— 13.9	— 3.7			— 11.9	662.3
							+0.3			
.5741	.5752	.1504	$\bar{4}.0948$	1.2452	— 17.6	— 3.4			— 15.9	646.4
							+0.2			
.5632	.5649	.1298	$\bar{4}.1922$	1.3220	— 21.0	— 3.2			— 19.4	627.0
.5532	.5556	.1112	$\bar{4}.2718$	1.3840	— 24.2				— 22.7	604.3
.5364	.5406	.0812	$\bar{4}.6990$	1.7802	— 60.2	—11.1			— 54.0	550.3
							+0.3			
.5210	.5277	.0554	$\bar{4}.7975$	1.8529	— 71.3	—10.8			— 65.5	484.8
							+0.4			
.5282	.5178	.0356	$\bar{4}.8787$	1.9143	— 82.1	—10.4			— 76.6	408.2
							0.0			
.4959	.5090	.0180	$\bar{4}.9480$	1.9660	— 92.5	—10.4			— 87.4	320.8
							0.0			
.4846	.5018	.0036	$\bar{3}.0087$	2.0123	—102.9	—10.4			— 97.6	223.2
.4738	.4956	4.9912	$\bar{3}.0630$	2.0542	—113.3				—108.1	115.1
.4630	.4900		$.\bar{3}1123$						—118.5	—3.4

Абсциссы, ординаты,

(Переменная

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
n	v	$2 \log v$	$\log \rho$	$\log \rho h$	$\log \rho h \cos \varphi$	$\zeta = \rho h \cos \varphi$	Сумма попарно	z
0	900.0	5.9085	4.9235	2.2623	1.5020	31.77	60.3	0.0
1	865.3	.8744	.8890	.2278	.4566	28.62	54.5	60.3
2	834.1	.8424	.8567	.1955	.4131	25.89	49.4	114.8
3	806.0	.8126	.8266	.1654	.3715	23.52	45.0	164.2
4	780.2	.7844	.7981	.1369	.3312	21.44		209.2
5	734.5	.7320	.7451	.3849	.5546	35.86	58.7	287.9
6	695.7	.6848	.6974	.3372	.4808	30.26	66.1	354.0
7	662.7	.6424	.6545	.2943	.4100	25.71	56.0	410.0
8	633.3	.6032	.6148	.2546	.3405	21.90	47.6	457.6
9	607.6	.5672	.5783	.2181	.2720	18.71	40.6	498.2
10	584.6	.5338	.5445	.1843	.2035	15.98	34.7	532.9
11	564.0	.5026	.5129	.1527	.1343	13.62	29.6	562.5
12	545.4	.4734	.4834	.1232	.0635	11.58	25.2	587.7
13	512.6	.4196	.4290	.3699	.2135	16.35	39.5	627.2
14	486.1	.3734	.3823	.3232	1.0420	11.02	27.4	654.6
15	463.0	.3310	.3396	.2805	0.8233	6.66	17.7	672.3
16	443.1	.2930	.3014	.2423	0.4842	3.05	9.7	682.0
17	425.9	.2586	.2669	.2078	—	0.00	3.1	685.1
18	411.0	.2276	.2360	.1769	0.4188	—2.62	—2.6	682.5
19	397.6	.1990	.2076	.1485	0.6913	4.91	—7.5	675.0
20	386.2	.1736	.1825	.1234	0.8422	6.95	11.9	663.1
21	376.0	.1504	.1598	.1007	0.9443	8.80	15.8	647.3
22	367.2	.1298	.1398	.0807	1.0210	10.50	19.3	628.0
23	359.4	.1112	.1219	.0628	1.0820	12.08	22.6	605.4
24	347.2	.0812	.0938	.3357	1.4793	30.15	54.3	551.1
25	337.1	.0554	.0704	.3123	.5520	35.65	65.8	485.3
26	329.5	.0356	.0535	.2954	.6133	41.05	76.7	408.6
27	322.9	.0180	.0394	.2813	.6650	46.24	87.3	321.3
28	317.6	5.0036	4.0291	.2710	.7113	51.45	97.7	223.6
29	313.1	4.9912	4.0213	.2632	1.7532	56.65	108.1	115.5
30	309.1	4.9800	4.0153	2.2572	1.7913	61.84	118.5	—3.0
31								

$$X = 10579 - 344 \cdot \frac{3}{118.5} = 10570$$

$$\varphi = 110^\circ - 120' \cdot \frac{3}{118.5} = 109^\circ 57'$$

Таблица 8б

время полета

независимая φ)

X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII
$\log \rho h \sin \varphi$	$\rho h \sin \varphi$	Сумма попарно	x	$\log \frac{\rho h}{v}$	$\frac{\rho h}{v}$	Сумма попарно	t
2.2556	180.1		0.0	$\bar{1}$.3081	0.2033		0.000
.2214	166.5	346.6	346.6	.2906	.1953	0.399	.399
.1895	154.7	321.2	667.8	.2743	.1881	0.383	.782
.1579	144.4	299.1	966.9	.2591	.1816	0.368	1.150
.1315	135.3	279.7	1246.6	.2447	.1757	.357	1.507
		510.6				.682	
.3801	240.0	455.3	1757.2	.5189	.3303	.643	2.189
.3330	215.3	410.6	2212.5	.4948	.3125	.610	2.832
.2906	195.3	373.7	2623.1	.4730	.2972	.581	3.442
.2514	178.4	342.6	2996.8	.4530	.2838	.556	4.023
.2153	164.2	316.2	3339.4	.4345	.2720	.533	4.579
.1819	152.0	293.5	3655.6	.4174	.2615	.514	5.112
.1507	141.5	273.5	3949.1	.4014	.2520	.495	5.626
.1215	132.3		4222.6	.3865	.2435		6.121
		498.4				.944	
.3688	233.8	444.0	4721.0	.6601	.4572	.890	7.065
.3226	210.2	400.8	5165.0	.6365	.4330	.845	7.955
.2802	190.6	365.3	5565.8	.6150	.4121	.806	8.800
.2422	174.7	336.1	5931.1	.5958	.3943	.773	9.606
.2078	161.4	311.6	6267.2	.5785	.3789	.745	10.379
.1768	150.2	290.9	6578.8	.5631	.3657	.720	11.124
.1482	140.7	273.4	6869.7	.5490	.3540	.698	11.844
.1228	132.7	258.5	7143.1	.5366	.3440	.679	12.542
.0996	125.8	245.7	7401.6	.5255	.3354	.663	13.221
.0790	119.9	234.8	7647.3	.5158	.3280	.650	13.884
.0604	114.9		7882.1	.5072	.3215		14.534
		444.3				1.267	
.3315	214.5	416.6	8326.4	.7951	.6239	1.233	15.801
.3056	202.1	395.2	8743.0	.7847	.6090	1.208	17.034
.2858	193.1	378.5	9138.2	.7776	.5993	1.191	18.242
.2682	185.4	364.8	9516.7	.7723	.5920	1.180	19.433
.2538	179.4	353.7	9881.5	.7692	.5878	1.173	20.613
.2414	174.3	344.2	10235.2	.7676	.5856	1.171	21.786
2.2302	169.9		10579.4	$\bar{1}$.7672	0.5850		22.957

$\Theta = 19°57'$

$$T = 22.957 - 3 \cdot \frac{1.171}{1.185} = 22.927$$

Время принято за пере

$\frac{n}{t}$	0 0.0	1 0.5	2 1.0	3 1.5	4 2.0	5 2.5	6 3.0	7 3.5
colog v	$\bar{3}$.0458	$\bar{3}$.0671	$\bar{3}$.0876	$\bar{3}$.1073	$\bar{3}$.1264	$\bar{3}$.1450	$\bar{3}$.1628	$\bar{3}$.1802
log $F(v)$	0.4385	0.4036	0.3696	0.3367	0.3051	0.2732	0.2440	0.2148
log $f(z)$	0.0000	$\bar{1}$.9965	$\bar{1}$.9939	$\bar{1}$.9908	$\bar{1}$.9881	$\bar{1}$.9859	$\bar{1}$.9836	$\bar{1}$.9818
log σ . . .	$\bar{2}$.3295	$\bar{2}$.3114	$\bar{2}$.2953	$\bar{2}$.2790	$\bar{2}$.2638	$\bar{2}$.2483	$\bar{2}$.2346	$\bar{2}$.2210
σ	0.0213	0.0205	0.0197	190	184	177	172	166
log $\frac{kg\tau}{v}$	1.2727	1.2940	1.3145	1.3342	1.3533	1.3719	1.3897	1.4071
log sin φ . . .	$\bar{1}$.9934	$\bar{1}$.9938	$\bar{1}$.9942	$\bar{1}$.9946	$\bar{1}$.9950	$\bar{1}$.9955	$\bar{1}$.9959	$\bar{1}$.9963
log ω	1.2661	1.2878	1.3087	1.3288	1.3483	1.3674	1.3856	1.4034
ω	18′5	19′4	20′3	21′3	22′3	23′3	24′3	25′3
log $v\tau$	2.6532	2.6319	2.6114	2.5917	2.5726	2.5540	2.5362	2.5188
log cos φ . . .	$\bar{1}$.2397	$\bar{1}$.2258	$\bar{1}$.2108	$\bar{1}$.1943	$\bar{1}$.1768	$\bar{1}$.1575	$\bar{1}$.1362	1.1129
log ζ	1.8929	1.8577	1.8222	1.7860	1.7494	1.7115	1.6724	1.6317
ζ	78.1	72.0	66.4	61.1	56.2	51.5	47.0	42.8
log u	2.9476	2.9267	2.9066	2.8873	2.8686	2.8505	2.8331	2.8161
log $\dot{\xi}$	2.6466	2.6257	2.6056	2.5863	2.5676	2.5495	2.5321	2.5151
$\dot{\xi}$	443.2	422.4	403.3	385.8	369.5	354.4	340.5	327.4
$\frac{n}{t}$	17 11	18 12	19 13	20 14	21 15	22 16	23 17	24 18
colog v	$\bar{3}$.3825	$\bar{3}$.4023	$\bar{3}$.4200	$\bar{3}$.4360	$\bar{3}$.4497	$\bar{3}$.4611	$\bar{3}$.4709	$\bar{3}$.4793
log $F(v)$ . . .	$\bar{1}$.8215	$\bar{1}$.7657	$\bar{1}$.7093	$\bar{1}$.6484	$\bar{1}$.5764	$\bar{1}$.5185	$\bar{1}$.4639	$\bar{1}$.4216
log $f(z)$	$\bar{1}$.9692	$\bar{1}$.9694	1.9703	$\bar{1}$.9722	$\bar{1}$.9736	$\bar{1}$.9759	$\bar{1}$.9782	$\bar{1}$.9809
log σ	$\bar{2}$.3184	$\bar{2}$.2826	$\bar{2}$.2448	$\bar{2}$.2018	$\bar{2}$.1449	$\bar{2}$.1007	$\bar{2}$.0582	$\bar{2}$.0270
σ	208	192	176	159	140	126	114	106
lg $\frac{kg\tau}{v}$	1.9104	1.9302	1.9479	1.9639	1.9776	1.9890	1.9988	2.0072
log sin φ . . .	0.0000	$\bar{1}$.9997	$\bar{1}$.9991	$\bar{1}$.9983	$\bar{1}$.9970	$\bar{1}$.9954	$\bar{1}$.9935	$\bar{1}$.9911
log ω	1.9104	1.9299	1.9470	1.9622	1.9746	1.9844	1.9923	1.9983
ω	81.4	85.1	88.5	91.7	94.3	96.5	98.2	99.6
log $v\tau$	2.6175	2.5977	2.5800	2.5640	2.5503	2.5387	2.5291	2.5207
log cos φ . . .	$\bar{2}$.1351	$\bar{2}$.5802	$\bar{2}$.8015	$\bar{2}$.9513	$\bar{1}$.0664	$\bar{1}$.1584	$\bar{1}$.2351	$\bar{1}$.3014
log ζ	0.7526	1.1779	1.3815	1.5153	1.6167	1.6973	1.7642	1.8221
ζ	—5.7	—15.1	—24.1	—32.8	—41.4	—49.8	—58.1	—66.4

Таблица 9а

менную независимую

8 4.0	9 4.5	10 5	11 5.5	12 6.0	13 7.0	14 8.0	15 9.0	16 10.0
$\bar{3}$.1969 0.1861 $\bar{1}$.9800	$\bar{3}$.2131 0.1575 $\bar{1}$.9782	$\bar{3}$.2288 0.1307 $\bar{1}$.9763	$\bar{3}$.2440 0.1038 $\bar{1}$.9750	$\bar{3}$.2587 0.0777 1.9741	$\bar{3}$.2871 0.0212 $\bar{1}$.9722	$\bar{3}$.3134 $\bar{1}$.9680 $\bar{1}$.9703	$\bar{3}$.3379 $\bar{1}$.9191 $\bar{1}$.9694	$\bar{3}$.3609 $\bar{1}$.8716 $\bar{1}$.9692
$\bar{2}$.2072 161	$\bar{2}$.1930 156	$\bar{2}$.1800 151	$\bar{2}$.1670 147	$\bar{2}$.1547 143	$\bar{2}$.4257 267	$\bar{2}$.3969 249	$\bar{2}$.3716 235	$\bar{2}$.3469 222
1.4238 $\bar{1}$.9967	1.4400 $\bar{1}$.9971	1.4557 $\bar{1}$.9975	1.4709 $\bar{1}$.9979	1.4856 $\bar{1}$.9983	1.8150 $\bar{1}$.9989	1.8413 $\bar{1}$.9994	1.8658 $\bar{1}$.9998	1.8888 0.0000
1.4205 26'3	1.4371 27'4	1.4532 28'4	1.4688 29'4	1.4839 30'5	1.8139 65'1	1.8407 69'3	1.8656 73'4	1.8888 77'4
2.5021 $\bar{1}$.0872	2.4859 $\bar{1}$.0587	2.4702 $\bar{1}$.0270	2.4550 $\bar{2}$.9914	2.4403 $\bar{2}$.9512	2.7129 $\bar{2}$.8518	2.6866 $\bar{2}$.7125	2.6621 $\bar{2}$.4930	2.6391 $\bar{3}$.9170
1.5893 38.8	1.5446 35.0	1.4972 31.4	1.4464 28.0	1.3915 24.6	1.5747 37.6	1.3991 25.1	1.1551 14.3	0.6561 4.5
2.7998	2.7840	2.7687	2.7539	2.7396	—	—	—	—
2.4988 315.4	2.4830 304.1	2.4677 293.6	2.4529 283.7	2.4386 274.5	— —	— —	— —	— —

25 19	26 20	27 21	28 22					
$\bar{3}$.4869 1.3838 $\bar{1}$.9841	$\bar{3}$.4935 $\bar{1}$.3560 $\bar{1}$.9877	$\bar{3}$.4993 $\bar{1}$.3304 $\bar{1}$.9917	$\bar{3}$.5044 $\bar{1}$.3096 $\bar{1}$.9961					
$\bar{2}$.0000 100	$\bar{3}$.9824 96	$\bar{3}$.9666 93	$\bar{3}$.9553 90					
2.0148 $\bar{1}$.9883	2.0214 $\bar{1}$.9851	2.0272 $\bar{1}$.9815	2.0323 $\bar{1}$.9774					
2.0031 100.7	2.0065 101.5	2.0087 102.2	2.0097 102.6					
2.5131 $\bar{1}$.3593	2.5065 $\bar{1}$.4105	2.5007 $\bar{1}$.4561	2.4956 $\bar{1}$.4973					
1.8724 —74.5	1.9170 —82.6	1.9568 90.5	1.9929 98.4					

Время принято за пере

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n	σ	$\Delta\sigma$	$\Delta^2\sigma$	q	log u	ω	$\Delta\omega$	$\Delta^2\omega$	$\Delta\varphi$	φ	log sin φ	ζ
0	213				2.9476	18.5				80°00′	$\bar{1}$.9934	78.1
		— 8		209			+0.9		19.0			
1	205		0		.9267	19.4		0		19.0	.9938	72.0
		— 8		201			0.9		19.9			
2	197		+1		.9066	20.3		0.1		38.9	.9942	66.4
		— 7		193			1.0		20.8			
3	190		+1		.8873	21.3		0		80 59.7	.9946	61.1
		— 6		187			1.0		21.8			
4	184		—1		.8686	22.3		0		81 21.5	.9950	56.2
		— 7		181			1.0		22.8			
5	177		+2		.8505	23.3		0		44.3	.9955	51.5
		— 5		174			1.0		23.8			
6	172		+1		.8331	24.3		0		82 8.1	.9959	47.0
		— 6		170			1.0		24.8			
7	166		+1		.8161	25.3		0		32.9	.9963	42.8
		— 5		163			1.0		25.8			
8	161		0		.7998	26.3		0.1		58.7	.9967	38.8
		— 5		158			1.1		26.8			
9	156		0		.7840	27.4		—0.1		83 25.5	.9971	35.0
		— 5		153			1.0		28.0			
10	151		+1		.7687	28.4		0		53.5	.9975	31.4
		— 4		148			1.0		28.9			
11	147				.7539	29.4				84 22.4	.9979	28.0
				143					29.9			
12	143				.7396	30.5				84 52.3	.9983	24.6
		—19		278			4.1		53.1			
13	267		+1		.7118	65.1		0.1		85 55.4	.9989	37.6
		—18		258			4.2		67.2			
14	249		+4		.6860	69.3		—0.1		87 02.6	.9994	25.1
		—14		240			4.1		71.4			
15	235		+1		.6620	73.4		—0.1		88 13.0	.9998	14.3
		—13		229			4.0		75.4			
16	222		—1		.6391	77.4		0		89 28.4	.0000	4.5
		—14		216			4.0		79.4			
17	208		—2		.6175	81.4		—0.3		90 47.8	.0000	— 5.7
		—16		201			3.7		83.4			
18	192		0		.5974	85.1		—0.3		92 11.2	.9997	—15.1
		—16		183			3.4		87.0			
19	176		—1		.5791	88.5		—0.2		93 38.2	.9991	—24.1
		—17		168			3.2		90.1			
20	159		—2		.5623	91.7		—0.6		95 8.3	.9983	—32.8
		—19		150			2.6		93.2			
21	140		+5		.5473	94.3		—0.4		96 41.5	.9970	—41.4
		—14		130			2.2		95.4			
22	126		+2		.5343	96.5		—0.5		98 16.9	.9954	—49.8
		—12		117			1.7		97.4			
23	114		+4		.5226	98.2		—0.3		99 54.3	.9935	—58.1
		— 8		108			1.4		98.9			
24	106		+2		.5118	99.6		—0.3		101 33.2	.9911	—66.4
		— 6		104			1.1		100.2			
25	100		+2		.5014	100.7		—0.3		103 13.4	.9883	—74.5
		— 4		98			0.8		101.2			
26	96		+1		.4916	101.5		—0.1		104 54.6	.9851	—82.6
		— 3		94			0.7		101.8			
27	93		0		.4822	102.2		—0.3		106 36.4	.9815	—90.5
		— 3		92			0.4		102.5			
28	90				.4730	102.6				108 18.9	.9774	—98.4
				92					102.7			
29					.4638					110 1.6	.9729	

Скорость в вершине: $435.6 - 21.1 \cdot \frac{31.6}{79.4} = 435.6 - 8.3 = 427.3.$

$2 \log 427.3 = 5.2614$
$\operatorname{colg} g = \bar{1}.0083$

$\log \rho = 4.2697$
$\operatorname{colog} 2 = \bar{1}.6990$
$2 \log \sin \alpha = \bar{5}.9268$

$\log \Delta z = \bar{1}.8955$
$\Delta z = 0.8$
$z = 684.7$

$Z = 685.5$

$\log 31.6 = 1.4997$
$\log \sin 1'' = \bar{4}.4637$

$\log \sin \alpha = \bar{3}.9634$

$X = 10610.2 - 294.1 \cdot \frac{6}{102.4} = 10592.$

Поверка (суммирование) вели

½ суммы попарно	x	½ суммы попарно	x	½ суммы попарно	x
432.8	0000.0	361.9	1979.8	298.8	3591.0
	432.8	347.4	2327.2	288.7	3879.7
412.9	845.7	333.9	2661.1	279.1	4158.8
394.5	1240.2	321.4	2982.5	532.0	4690.8
377.7	1617.9	309.7	3292.2	500.1	5190.9

менную независимую

Таблица 9б

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\Delta\zeta$	$\Delta^2\zeta$	Δz	z	ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	Δx	x	log v	v
			0.0	443.2				0.0	2.9542	900.0
— 6.1	+0.5	75.0	75.0	422.4	—20.8	+1.7	432.7	432.7	.9329	856.9
— 5.6	+0.3	69.2	144.2	403.3	—19.1	+1.6	412.7	845.4	.9124	817.4
— 5.3	0.4	63.8	208.0	385.8	—17.5	+1.2	394.4	1239.8	.8927	781.1
— 4.9	0.2	58.5	266.5	369.5	—16.3	1.2	377.6	1617.4	.8736	747.5
— 4.7	0.2	53.8	320.3	354.4	—15.1	1.2	361.8	1979.2	.8550	716.2
— 4.5	0.3	49.2	369.5	340.5	—13.9	0.8	347.3	2326.5	.8372	687.4
— 4.2	0.2	44.7	414.2	327.4	—13.1	1.1	334.0	2660.5	.8198	660.4
— 4.0	0.2	40.8	455.0	315.4	—12.0	0.7	321.1	2981.6	.8031	635.6
— 3.8	0.2	36.9	491.9	304.1	—11.3	0.8	309.9	3291.5	.7869	612.2
— 3.6	0.2	33.2	525.1	293.6	—10.5	0.6	299.2	3590.7	.7712	590.5
— 3.4		29.7	554.8	283.7	— 9.9		288.5	3879.2	.7560	570.2
		26.4	581.2	274.5	— 9.2		278.9	4158.1	.7413	551.2
—11.6		42.9	624.1	515.0		+4.3	531.7	4689.8	.7129	516.3
—12.5	+1.1	32.6	656.7	485.3	—29.7	+3.6	499.7	5189.5	.6866	486.0
—10.8	+1.7	18.4	675.1	459.2	—26.1	2.5	472.6	5662.1	.6621	459.3
— 9.8	+1.0	9.6	684.7	435.6	—23.6	2.5	448.0	6110.1	.6391	435.6
—10.2	—0.4	0.0	684.7	414.5	—21.1	2.3	425.1	6535.2	.6175	414.5
— 9.4	+0.8	— 10.9	673.8	395.7	—18.8	2.5	406.6	6941.8	.5977	396.0
— 9.0	+0.4	— 19.5	654.3	379.4	—16.3	1.9	387.3	7329.1	.5800	380.2
— 8.7	+0.3	— 28.4	625.9	365.0	—14.4	2.0	372.2	7701.3	.5640	366.4
— 8.6	0.0	— 37.1	588.8	352.6	—12.4	2.0	358.6	8059.9	.5503	355.1
— 8.4	+0.2	— 45.7	543.1	342.2	—10.4	1.3	347.2	8407.1	.5389	345.7
— 8.3	+0.1	— 54.0	489.1	333.1	— 9.1	0.9	337.8	8744.9	.5291	338.1
— 8.3	0	— 62.3	426.8	324.9	— 8.2	0.5	329.0	9073.9	.5207	331.7
— 8.1	+0.2	— 70.6	356.2	317.2	— 7.7	0.7	321.2	9395.1	.5131	325.9
— 8.1	0	— 78.6	277.6	310.2	— 7.0	0.4	313.5	9708.6	.5065	321.0
— 7.9	+0.2	— 86.7	190.9	303.6	— 6.6	0.2	307.0	10015.6	.5007	316.7
— 7.9	0	— 94.5	96.4	297.2	— 6.4	0.1	300.5	10316.1	.4956	313.0
		—102.4	—6.0	290.9	— 6.3		294.1	10610.2	.4909	309.7

Падение:

$$T = 23 - \frac{6}{102 \cdot 4} = 23 - 0.059 = 22.941.$$

$V = 309.9.$

$\varphi = 110°1'.6 - 0°6 = 109°55'.6$

$\theta = 19°55.'6$

$X = 10592.$

Таблица 9в

чин ξ по правилу трапеций

$^1/_2$ суммы попарно	x	$^1/_2$ суммы попарно	x	$^1/_2$ суммы попарно	x
472.2	5663.1	372.2	7700.5	321.0	9394.4
447.4	6110.5	358.8	8059.3	313.7	9708.1
425.1	6535.6	347.4	8406.7	306.9	10015.0
405.1	6940.7	337.7	8744.4	300.4	10315.4
387.6	7328.3	329.0	9073.4	294.0	10609.4

II. О формуле Дидиона

При вычислении траектории по способу Дидиона делается замена

$$F(ax) = kF(x) \tag{1}$$

причем k есть постоянная, зависящая от постоянной a. Спрашивается, при каком виде функции F эта замена является справедливой, иными словами: требуется решить функциональное уравнение (1).

Из уравнения (1) следует:

при $x = 0$

$$F(0) = k \cdot F(0)$$

значит

$$F(0) = 0 \tag{2}$$

при $x = \frac{1}{a}$

$$F(1) = kF\left(\frac{1}{a}\right)$$

при $x = 1$

$$F(a) = kF(1)$$

Отсюда получаем

$$F(a) \cdot F\left(\frac{1}{a}\right) = F(1) \cdot F(1) = \text{const}$$

Так как a есть величина произвольная, то будет вообще

$$F(x) \cdot F\left(\frac{1}{x}\right) = \text{const}$$

Иначе

$$F(x) \cdot F(z) = \text{const} \tag{3}$$

при условии

$$x \cdot z = 1 \tag{4}$$

Дифференцируя равенства (3) и (4), имеем,

$$F'(x) \cdot F(z) + z' F(x) \cdot F'(z) = 0$$

$$z + z' \cdot x \qquad = 0$$

Исключая z', имеем

$$F'(x) \cdot \frac{F(z)}{z} = \frac{F(x)}{x} \cdot F'(z)$$

иначе

$$\frac{x F'(x)}{F(x)} = \frac{z F'(z)}{F(z)}$$

Это равенство может иметь место только, если величины

$$\frac{x F'(x)}{F(x)} \quad \text{и} \quad \frac{x F'(z)}{F'(z)}$$

букв x и z не содержат, т. е. суть величины *постоянные*. Обозначая эту постоянную через n, имеем

$$\frac{x \cdot F'(x)}{F(x)} = n$$

Отсюда следует

$$\log F'(x) = \log C + \log x^n$$

где C есть произвольная постоянная, значит будет

$$F(x) = C \cdot x^n \tag{5}$$

Это есть *единственный* вид функции F, удовлетворяющий условию

$$F(ax) = kF(x)$$

причем постоянная k связана с постоянною a равенством

$$k = a^n \tag{6}$$

Таким образом, когда при интегрировании основного уравнения делается замена

$$F(v \cos \theta) = \sigma \cdot \cos \theta \cdot F(v)$$

то величина σ постоянной быть не может, и судить о погрешности, происходящей от такой замены, можно лишь на основании таблицы значений функции $F(v)$.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О КРЕШЕРАХ И ИНДИКАТОРАХ

(Представлено в заседании Физико-математического отделения 15 апреля 1909 г.)

Года три тому назад мне пришлось принять участие в выработке приборов, предназначенных для определения давления, которое имеет место при минном взрыве в различных расстояниях от центра его.

С этою целью, в научно-технической лаборатории морского ведомства производились некоторые предварительные испытания обычно применяемых для таких определений крешеров и индикаторов давления. Во многих случаях эти испытания приводили к противоречивым результатам, требовавшим объяснения, в виду чего мною тогда же были произведены некоторые теоретические исследования, исходною точкою которых служила известная работа Sarrau et Vielle в «Mémorial des Poudres et Salpêtres» (t. I).

В настоящее время намечается продолжение подобных же опытов, вследствие чего я решил привести свои прежние соображения в систему и, проделав наново относящиеся сюда выкладки, напечатать эту работу.

§ **1.** Мы начнем наше рассмотрение с идеально простых случаев: 1°) индикатора, у которого масса пружины весьма мала по сравнению с массою поршня, и 2°) крешера, у которого масса сжимаемого столбика ничтожна.

Под словом *индикатор* мы будем разуметь такой прибор, служащий для записи давления, поршень которого опирается на *вполне упругую* пружину и по прекращении давления возвращается к первоначальному своему положению.

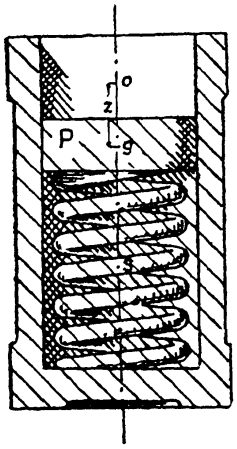
Под словом *крешер* мы будем разуметь такой прибор, служащий для определения наибольшей величины давления, на него действовавшего, поршень которого опирается на металлический столбик, обжимаемый за *предел упругости* и сохраняющий полученное наибольшее сжатие и по прекращении давления.

Пусть фиг. 1 представляет схему служащего для записи давления индикатора:

P — поршень его, s — пружина. Пусть площадь поршня есть A, давление, на него действующее, есть p, вес поршня пусть будет P.

Давление p, действующее на поршень, обыкновенно весьма быстро изменяется с течением времени t, так что

$$p = f(t) \tag{1}$$



Фиг. 1.

Назначение прибора и состоит в том, чтобы найти эту функцию $f(t)$, получив запись перемещения z поршня в функцию времени t.

Примем ось поршня и цилиндра, в коем он движется, за ось z, обозначим через l — начальную длину пружины, через l_1 — ее длину в момент t, так что ее сжатие, представляющее вместе с тем и перемещение поршня, равно $l - l_1 = z$, тогда противодействие, встречаемое поршнем от пружины, выразится формулою

$$R = k\frac{l-l_1}{l} = k\frac{z}{l} \tag{2}$$

и следовательно, уравнение движения поршня или, точнее говоря, центра тяжести его будет

$$\frac{P}{g}\frac{d^2z}{dt^2} = Af(t) - \frac{kz}{l} \tag{3}$$

Начальные же условия таковы: при $t = 0$ должно быть

$$z = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dt} = 0 \tag{4}$$

Написав уравнение (3) в виде

$$\frac{d^2z}{dt^2} + n^2z = \frac{Ag}{P}\cdot f(t) \tag{3'}$$

где

$$n^2 = \frac{kg}{l\cdot P} \tag{3''}$$

имеем его общий интеграл

$$z = C_1\cos nt + C_2\sin nt + \frac{Ag}{P\cdot n}\cdot\left[\sin nt\cdot\int_a f(\zeta)\cos n\zeta\,d\xi - \cos nt\cdot\int_a^t f(\xi)\sin n\zeta\,d\xi\right]$$

причем C_1 и C_2 — произвольные постоянные, a — какое угодно *заданное* число.

Если взять $a = 0$, то при начальных условиях (4) будет

$$C_1 = C_2 = 0$$

и общий интеграл уравнения (3) принимает простейшую форму

$$z = \frac{Ag}{Pn}\left[\sin nt \int_0^t f(\xi)\cos n\xi\, d\xi - \cos nt \int_0^t f(\xi)\sin n\xi\, d\xi\right] \tag{5}$$

или, что то же,

$$z = \frac{Al}{k}\cdot n\int_0^t f(\xi)\sin(nt - n\xi)\, d\xi \tag{5'}$$

Заметив, что, при $t = 0$, и $f(t) = 0$, так как лишь с этого момента начинает действовать постепенно возрастающее давление, мы из формулы (5′) имеем

$$z = \frac{Ag}{Pn}\left\{\left[\frac{1}{n}\cdot f(\xi)\cos(nt - n\xi)\right]_0^t - \frac{1}{n}\int_0^t f'(\xi)\cos(nt - n\xi)\, d\xi\right\}$$

или

$$z = \frac{Al}{k}f(t) - \frac{Al}{k}\int_0^t f'(\xi)\cos(nt - n\xi)\, d\xi \tag{6}$$

В силу формулы (2), величина $\frac{Al}{k}\cdot f(t)$ представляет как раз то сжатие, которое должна бы иметь пружина, или то смещение поршня, которое должно бы иметь место в момент t, если бы давление действовало «статически».

Величина

$$\varepsilon = -\frac{Al}{k}\cdot\int_0^t f'(\xi)\cos n(t - \xi)\, d\xi \tag{7}$$

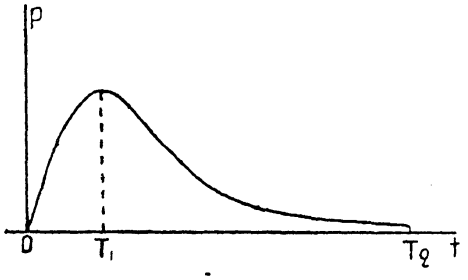
представляет «погрешность» показаний прибора, происходящую от изменения давления и зависящую, как видно, от быстроты этого изменения.

§ **2.** При действии минного взрыва, общий ход изменения давления, т. е. вид функции $f(t)$, может быть представлен графически кривой, представленной на фиг. 2, т. е. давление сперва весьма быстро возрастает и, достигнув в момент T_1 наибольшей величины, затем сравнительно медленно

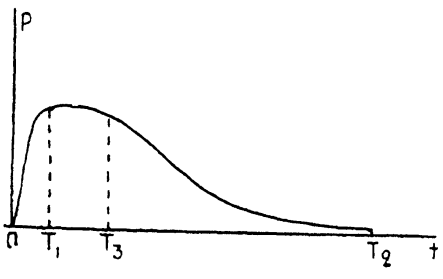
убывает, обращаясь практически в нуль к некоторому моменту T_2; при этом промежуток времени T_1 значительно меньше T_2.

Подобный же ход имеет давление и при взрыве небольшого количества вещества в пробной бомбочке, только здесь отношение промежутков T_2 и T_1 еще больше, так что кривая имеет приблизительно вид, представленный фиг. 3, так что давление в продолжение промежутка времени от T_1 до T_3 — причем T_3 велико по сравнению с T_1 — остается практически постоянным.

Прежде чем рассматривать формулы (5′) и (7) для общего вида функции $f(t)$, сделаем частный пример, взяв функцию, ход которой подходит



Фиг. 2.



Фиг. 3.

к вышеуказанному, и притом такую, для которой нужные нам выражения вычислялись бы просто. Разбор такого частного примера даст указания и для общего случая.

Подходящий вид функции $f(t)$ следующий:

$$f(t) = a \cdot \sin \frac{\pi t}{2T_1} \tag{8}$$

для промежутка от $t = 0$ до $t = T_1$ и

$$f(t) = ae^{-h\frac{t-T_1}{T_2}} \left\{ 1 + \frac{h(t-T_1)}{T_2} \right\} \tag{9}$$

для промежутка, когда $t > T_1$, при этом h — настолько большая величина, что с принятою для расчетов степенью точности $(1 + h)e^{-h}$ могло бы быть пренебрегаемо.

При вычислении входящего в формулу (5′) интеграла надо обратить внимание на значение t, и пока t не превосходит величины T_1 брать вместо $f(t)$ его значение (8), а затем значение (9).

Итак, имеем

$$\int_0^t f(\xi) \sin(nt - n\xi)\, d\xi = a \int_0^t \sin n_1\xi \cdot \sin(nt - n\xi)\, d\xi$$

если $t \leqq T_1$, и

$$\int_0^t f(\xi)\sin(nt-n\xi)\,d\xi = a\int_0^{T_1}\sin n_1\xi\sin(nt-n\xi)\,d\xi + a\int_{T_1}^{t} e^{-h\frac{\xi-T_1}{T_2}}\left(1+h\frac{\xi-T_1}{T_2}\right)\sin(nt-n\xi)\,d\xi$$

если $t > T_1$, причем для сокращения письма сделано $n_1 = \frac{\pi}{2T_1}$.

Таким образом, найдя интегралы

$$\int_0^t \sin n_1\xi\sin(nt-n\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\int_0^t \cos[nt-(n+n_1)\xi]\,d\xi - \frac{1}{2}\int_0^t \cos[nt-(n-n_1)\xi]\,d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+n_1}\sin(nt-(n+n_1)\xi) - \frac{1}{n-n_1}\sin(nt-(n-n_1)\xi)\right]_0^t =$$

$$= \frac{n}{n^2-n_1^2}\sin n_1 t - \frac{n_1}{n^2-n_1^2}\sin nt$$

получаем соответствующее значение z для $t \leqq T_1$:

$$z = \frac{Al}{k}\cdot a\left\{\frac{n^2}{n^2-n_1^2}\sin n_1 t - \frac{nn_1}{n^2-n_1^2}\sin nt\right\} \tag{10}$$

Точно так же, найдя второй интеграл, получим выражение для z для значений времени больших T_1.

Но проще обратиться к самому уравнению (3′) и, сделав в нем $t - T_1 = x$, написать его так:

$$z'' + n^2 z = a\cdot\frac{Ag}{P}e^{-bx}(1+bx) \tag{11}$$

причем

$$b = \frac{h}{T_2}$$

начальные же условия следуют из уравнения (10), именно: при $t = T_1$ или $x = 0$ должно быть:

$$z = \frac{Ala}{k}\left(\frac{n^2}{n^2-n_1^2} - \frac{nn_1}{n^2-n_1^2}\sin nT_1\right)$$

$$z' = -\frac{Al\cdot a}{k}\cdot\frac{n^2 n_1}{n^2-n_1^2}\cos nT_1$$

Из уравнения (11) следует

$$z = C_1\cos nx + C_2\sin nx + \frac{Al}{k}\cdot a\cdot\frac{n^2}{b^2+n^2}e^{-bx}\left[\frac{3b^2+n^2}{b^2+n^2}+bx\right]$$

В силу начальных условий:

$$C_1 = \frac{Al \cdot a}{k}\left[\frac{n^2}{n^2 - n_1^2} - \frac{n^2}{b^2 + n^2} \cdot \frac{3b^2 + n^2}{b^2 + n^2} - \frac{nn_1}{n^2 - n_1^2} \sin nT_1\right]$$

$$C_2 = \frac{Ala}{k}\left[\frac{2b^3 n}{(b^2 + n^2)^2} - \frac{nn_1}{n^2 - n_1^2} \cos nT_1\right]$$

Таким образом для значений $t > T_1$ будет

$$z = \frac{Ala}{k}\left[\frac{n^2}{n^2 - n_1^2} - \frac{n^2}{b^2 + n^2} \cdot \frac{3b^2 + n^2}{b^2 + n^2}\right] \cdot \cos n(t - T_1) +$$

$$+ \frac{Ala}{k} \cdot \frac{2b^3 n}{(b^2 + n^2)^2} \cdot \sin n(t - T_1) - \frac{Ala}{k} \cdot \frac{nn_1}{n^2 - n_1^2} \cdot \sin nt + \tag{12}$$

$$+ \frac{Ala}{k} \frac{n^2}{b^2 + n^2} e^{-b(t - T_1)} \cdot \left[\frac{3b^2 + n^2}{b^2 + n^2} + c(t - T_1)\right]$$

Сделаем в формулах (10) и (12):

$$n = \frac{2\pi}{\tau}; \quad n_1 = \frac{\pi}{2T_1} = \frac{2\pi}{\tau_1}$$

так что

$$T_1 = \frac{1}{4}\tau_1$$

и положим для простоты, что $h = 2\pi$, тогда[1] $b = \frac{2\pi}{T_2}$* и будет:

$$\frac{n^2}{n^2 - n_1^2} = \frac{\tau_1^2}{\tau_1^2 - \tau^2}; \quad \frac{nn_1}{n^2 - n_1^2} = \frac{\tau\tau_1}{\tau_1^2 - \tau^2}; \quad \frac{n^2}{b^2 + n^2} = \frac{T_2^2}{T_2^2 + \tau^2}$$

$$\frac{3b^2 + n^2}{b^2 + n^2} = \frac{3\tau^2 + T_2^2}{T_2^2 + \tau^2} \quad \text{и} \quad \frac{2b^3 n}{(b^2 + n^2)^2} = \frac{2T_2\tau^3}{(T_2^2 + \tau^2)^2} \tag{13}$$

Как видно, все эти величины зависят только от отношений

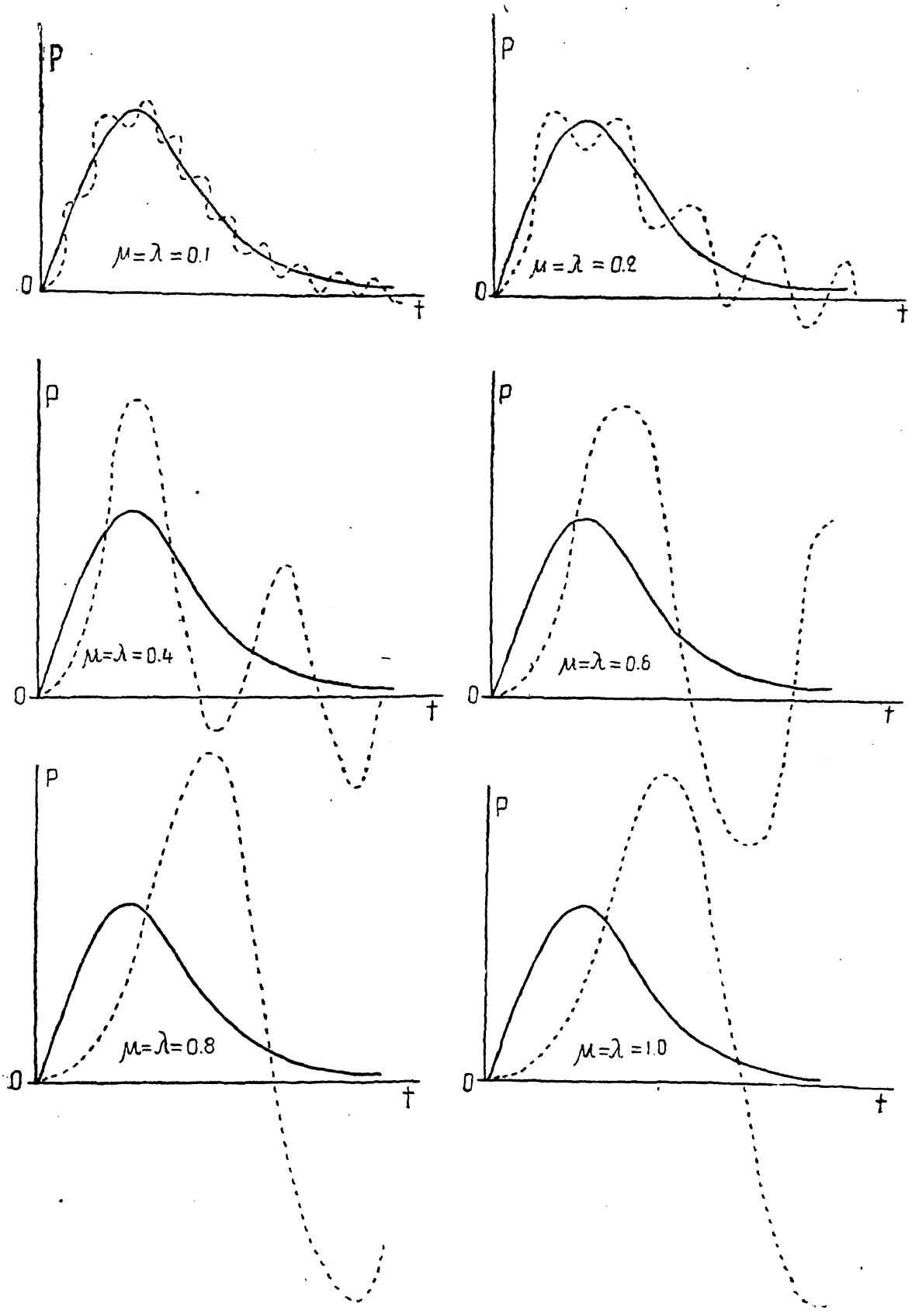
$$\frac{\tau}{\tau_1} = \lambda \quad \text{и} \quad \frac{\tau}{T_2} = \mu$$

Вводя эти величины, мы напишем формулы (10) и (12) так, обозначив $\frac{Ala}{k}$ через c:

$$z = c\left(\frac{1}{1 - \lambda^2} \sin \frac{2\pi t}{\tau_1} - \frac{\lambda}{1 - \lambda^2} \sin \frac{2\pi t}{\tau}\right) \tag{10'}$$

---

* Величина $e^{-2\pi} = \frac{1}{535}$; значит, $e^{-h}(1 + h)$ при $h = 2\pi$ составляет около $\frac{1}{70}$.



Фиг. 4.

и

$$z = c \cdot \frac{1}{1+\mu^2} \cdot e^{-b(t-T_1)} \left(\frac{1+3\mu^2}{1+\mu^2} + b(t-T_1) \right) - c \cdot \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \sin \frac{2\pi t}{\tau} +$$

$$+ c \cdot \frac{2\mu^3}{(1+\mu^2)^2} \sin \frac{2\pi (t-T_1)}{\tau} + \tag{12'}$$

$$+ c \left(\frac{1}{1-\lambda^2} - \frac{1}{1+\mu^2} \cdot \frac{1+3\mu^2}{1+\mu^2} \right) \cos \frac{2\pi (t-T_1)}{\tau}$$

причем формулою (10) надо пользоваться, пока $t \leqq T_1$, и формулою (12) для $t \geqq T_1$.

Заметим, что при $\lambda = 1$, т. е. когда $\tau = \tau_1 = 4T_1$, формула (10′) принимает вид

$$z = \frac{1}{2} c \cdot \sin \frac{2\pi t}{\tau} - \frac{\pi c}{\tau} \cdot t \cdot \cos \frac{2\pi t}{\tau} \tag{10''}$$

и формула (12′) — вид

$$z = c \cdot \frac{1}{1+\mu^2} \cdot e^{-b(t-T_1)} \left\{ \frac{1+3\mu^2}{1+\mu^2} + b(t-T_1) \right\} - \frac{2\mu^3}{(1+\mu^2)^2} \cdot c \cdot \cos \frac{2\pi t}{\tau} \tag{12''}$$

$$- \frac{1+3\mu^2}{(1+\mu^2)^2} \cdot c \cdot \sin \frac{2\pi t}{\tau} - \frac{\pi}{4} c \cdot \cos \frac{2\pi t}{\tau} + \frac{c}{2} \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

§ **3.** При $\lambda = 0$ и $\mu = 0$ предыдущие формулы принимают вид:

$$z = c \cdot \sin \frac{2\pi t}{\tau_1} \qquad \left(\text{для } t \leqq \frac{1}{4} \tau_1 \right) \tag{13}$$

$$z = c \cdot e^{-b(t-T_1)} \left(1 + b(t-T_1) \right) \qquad \text{для } t \geqq \tau_1$$

т. е. величина z будет пропорциональна давлению p, так что

$$z = \frac{Al}{k} \cdot f(t) \tag{14}$$

и следовательно, индикатор дает истинную запись давления.

Чтобы представить наглядно влияние величин λ и μ на погрешность показаний индикатора, составлены прилагаемые чертежи (фиг. 4), в которых сделано

$$\lambda = \mu$$

и затем взято:

$$\lambda = \frac{1}{10}, \quad \frac{2}{10}, \quad \frac{4}{10}, \quad \frac{6}{10}, \quad \frac{8}{10} \quad \text{и} \quad 1.$$

Эти чертежи показывают, что уже при $\lambda = \frac{1}{10}$ погрешность достигает заметной величины, при значениях же λ, превышающих $\frac{2}{10}$, показания прибора совершенно не соответствуют ходу явления.

Отношение

$$\lambda = \frac{\tau}{\tau_1}$$

где

$$\tau = \frac{2\pi}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{lP}{kg}} \tag{15}$$

представляет период свободных колебаний поршня на своей пружине.

Формуле (15) можно придать другой вид. Сделаем

$$L = \frac{lP}{k}$$

тогда L представляет величину сжатия, вызываемого в пружине нагрузкою, равною весу поршня, τ — есть период такого маятника, длина коего L.

Величина τ_1 — *учетверенная* продолжительность *нарастания* давления.

§ 4. После этого разбора частного примера видно, что пользование индикатором, для которого отношение λ более $\frac{1}{10}$, не может дать надежных результатов; остается рассмотреть в общем виде предел погрешности в показании прибора при произвольном виде функции $f(t)$, подверженном лишь некоторым ограничениям.

Сделаем относительно этой функции следующие предположения:

1°) При $t = 0$ . . . $f(t) = 0$.

2°) От $t = 0$ до $t = T_1 = \frac{1}{4}\tau_1$ функция $f(t)$ возрастает, так что $f'(t) > 0$ и при $t = T_1$ величина $f'(T_1) = 0$.

3°) При $t > T_1$ функция $f(t)$ убывающая и $f'(t) < 0$. Причем $f(t)$ и $f'(t)$, при неопределенном возрастании t, асимптотически приближаются к нулю.

Формула (7′)

$$\varepsilon = -\frac{Al}{k} \cdot \int_0^t f'(\xi)\cos(nt - n\xi) \cdot d\xi \tag{7}$$

сводит определение пределов погрешности к вычислению интеграла

$$\int_0^t f'(\xi)\cos(nt-n\xi)\,d\xi = A_1\cos nt + B_1\sin nt$$

где

$$A_1=\int_0^t f'(\xi)\cos n\xi\cdot d\xi;\qquad B_1=\int_0^t f'(\xi)\sin n\xi\cdot d\xi$$

Положим сперва, что $t\leqq T_1$, так что $f'(\xi)>0$, и найдем предел, которого не превзойдет величина $\sqrt{A_1^2+B_1^2}$.

Начнем с величины A_1. Так как t значительно больше τ, то положим, что

$$t=\frac{\tau}{4}+k\frac{\tau}{2}+t_1$$

причем $t_1<\frac{\tau}{2}$ и k есть целое число. Тогда можем написать равенство

$$A=I_0+I_1+I_2+\ldots+I_k+H$$

причем

$$I_0=\int_0^{\frac{\tau}{4}} f'(\xi)\cos n\xi\cdot d\xi;\quad I_1=\int_{\frac{\tau}{4}}^{\frac{\tau}{4}+\frac{\tau}{2}} f'(\xi)\cos n\xi\,d\xi;\quad \ldots \text{ и т. д.}$$

$$H=\int_{\frac{\tau}{4}+k\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{4}+k\frac{\tau}{2}+t_1} f'(\xi)\cos n\xi\cdot d\xi$$

В каждом из промежутков $\cos n\xi$ сохраняет свой знак, так же как и $f'(\xi)$; поэтому имеем равенство

$$I_i=\int_{\frac{\tau}{4}+(i-1)\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{4}+i\frac{\tau}{2}} f'(\xi)\cos n\xi\,d\xi=(-1)^i\int_0^{\frac{\tau}{2}} f'\Big(\frac{\tau}{4}+(i-1)\frac{\tau}{2}+x\Big)\sin\frac{2\pi x}{\tau}\cdot dx$$

$$=(-1)^i\cdot f'(x_i)\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}}\sin\frac{2\pi x}{\tau}\cdot dx=(-1)^i\cdot f'(x_i)\frac{\tau}{2}\cdot\frac{2}{\pi}=(-1)^i\cdot\frac{2}{\pi}\cdot a_i$$

причем x_i есть некоторое среднее значение между пределами интеграла, так что

$$\frac{\tau}{4}+(i-1)\frac{\tau}{2}<x_i<\frac{\tau}{4}+i\frac{\tau}{2}$$

Произведение

$$\frac{\tau}{2} \cdot f'(x_i) = a_i$$

представляет изменение давления за промежуток времени $\frac{\tau}{2}$.

Таким образом мы имеем равенство

$$A = \frac{1}{\pi} a_0 - \frac{2}{\pi} a_2 + \frac{2}{\pi} a_1 - \ldots \pm \frac{2}{\pi} a_k \mp \frac{2}{\pi} a_{k+i} \eta$$

причем $\eta < 1$.

Совершенно подобным же образом получим

$$B = \frac{2}{\pi} a_0 - \frac{2}{\pi} a_1 + \frac{2}{\pi} a_2 - \ldots \pm \frac{2}{\pi} a_k \mp \frac{2}{\pi} a_{k+1} \cdot \eta_1$$

Отсюда следует, что как A, так и B по абсолютной величине не превышают наибольшего из членов, входящих в выражение их, если только число таких наибольших членов один, что имеет место, когда кривая $f(t)$ на рассматриваемом протяжении имеет не более *одной* точки перегиба, что мы и предположим. Так как наибольшее абсолютное значение ε есть $\sqrt{A^2+B^2}$, то видно, что

$$(*) \qquad |\varepsilon| \leqq \frac{2}{\pi} a \sqrt{2} \cdot \frac{Al}{k}$$

где a есть наибольшее из чисел в ряде для B, иначе приближенно:

$$(**) \qquad |\varepsilon| < a \cdot \frac{Al}{k}$$

т. е. *погрешность показания индикатора не превосходит величины наибольшего изменения давления за промежуток времени, равный полупериоду свободного колебания поршня индикатора на пружине его.*

Совершенно так же увидим, что этот результат сохраняется и для нисходящей ветви кривой $f(t)$.

Полученный вывод с ясностью указывает, чем руководствоваться при проектировании индикатора для записи давления, и объясняет несогласия их показаний, когда прибор применен для записи такого давления, нарастание которого совершается слишком быстро для данного прибора.

§ **5.** Формула (5) указывает на возможность получать показания прибора, пропорциональные импульсу давления, т. е. интегралу

$$\int_0^T f(\xi) \cdot d\xi$$

где T есть полная продолжительность действия давления.

В самом деле, положим, что величина n весьма мала, иными словами отношение $\frac{T}{\tau}$ весьма малое; тогда, заметив, что $f(t)=0$ для значений $t > T$, имеем:

$$\int_0^t f(\xi)\cos n\xi \cdot d\xi = \int_0^T f(\xi)\cdot\cos n\xi\cdot d\xi = \cos nT_1 \int_0^1 f(\xi)\,d\xi$$

и

$$\int_0^T f(\xi)\cdot\sin n\xi\cdot d\xi = \int_0^T f(\xi)\sin n\xi\cdot d\xi = \sin nT_1\cdot\int_0^T f(\xi)\,d\xi$$

причем

$$0 < T_1 < T$$

Если величина $nT_1 = 2\pi\frac{T_1}{\tau}$ настолько мала, что $\cos nT_1$ можно считать равным 1 и $\sin nT_1$ ничтожно малым, то формула (5) примет вид

$$z = \frac{Ag}{P\cdot n}\cdot\sin nt$$

где

$$I = \int_0^T f(\xi)\,d\xi$$

Значит, наибольшая величина z будет

$$Z_{max} = \frac{Ag}{P\cdot n}\cdot I$$

или иначе

$$Z_{max} = \frac{Al}{k}\cdot n\cdot I = \frac{Al}{k}\cdot\sqrt{\frac{kg}{lP}}\cdot I \tag{16}$$

Погрешность определения величины I будет зависеть от того, в какой мере мало значение $\sin nT_1$. Если $nT < \frac{1}{20}$, иначе отношение $\frac{T}{\tau}$ не больше $\frac{1}{120}$, то $\sin nT_1 < 0.05$, и значит, величина импульса тогда может быть получена с точностью до 5%.

§ **6.** Выше рассмотрен индикатор, у которого пружина имеет массу, ничтожно малую по сравнению с массою поршня. Это предположение близко к истине для индикаторов, предназначенных для записи импульса, но для индикатора с весьма малым периодом колебаний надо иметь легкий поршень

и жесткую пружину, и тогда наше допущение часто уже не имеет места. Отсюда является необходимость рассмотреть и этот случай.

В 18-й тетради «Journal de l'École Polytechnique» (cah. 18) находится мемуар Пуассона, имеющий следующее общее заглавие: «Mémoire sur la manière d'exprimer les fonctions en séries de quantités périodiques et sur l'usage de cette transformation dans la résolution de différents problèmes». Последние пять параграфов этого мемуара (§§ 30—35) посвящены рассмотрению «движения тяжелого тела, подвешенного к концу растяжимой нити».

Ясно, что наша задача находится в самой тесной связи с задачею Пуассона, отличаясь от нее лишь тем, что на подвешенное тело (поршень) действует внешняя переменная сила. В нашем изложении мы применим к решению этой задачи общий прием для решения подобного рода вопросов математической физики.

Примем точку закрепления или неподвижную опору пружины за начало координат и направим ось x-ов по оси пружины.

Перемещение точки пружины, соответствующей абсциссе x, обозначим через u; тогда перемещение точки, соответствующей абсциссе $x + dx$, будет $u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx$; относительное удлинение в рассматриваемом месте есть $\frac{\partial u}{\partial x}$ и натяжение $k \frac{\partial u}{\partial x}$.

Таким образом на рассматриваемый элемент действуют силы

$$-k\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{и} \quad +k\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx\right);$$

Обозначая массу *погонной* единицы длины пружины через q, видим, что масса рассматриваемого элемента есть $q \cdot dx$. Ускорение его есть $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, и значит, уравнение движения

$$q \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{17}$$

или, полагая

$$\frac{k}{q} = b^2 \tag{17'}$$

получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{17''}$$

если только на пружину никаких внешних сил не действует.

Если же на пружину действует внешняя сила, величина которой, отнесенная к 1 длины, есть $F(x, t)$, то предыдущее уравнение напишется так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{q} \cdot F(x, t) \tag{18}$$

К этому уравнению необходимо присоединить:

Во-первых. *Граничные условия*, а именно:

1) Конец пружины, соответствующий абсциссе $x = 0$, остается неподвижным, значит при $x = 0$ и при всяком t должно быть

$$u = 0$$

2) Конец, соответствующий абсциссе l, несет на себе добавочную массу $\frac{P}{g}$, с которою он связан неизменно и движение которой должно быть такое же, как и этого конца.

Так как натяжение пружины во всякой точке есть $k\frac{\partial u}{\partial x}$, то, относя *все внешние силы* к силам, входящим в состав функции $F(x, t)$, видим, что при $x = l$ должно при всяком t иметь место уравнение

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -k\frac{\partial u}{\partial x} \tag{19}$$

или иначе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \tag{19'}$$

где

$$c^2 = \frac{kg}{P} \tag{20}$$

Во-вторых. Начальные условия, т. е. те, которые относятся к моменту $t = 0$ и которые выражаются уравнениями: при $t = 0$ должно быть

$$u = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x) \tag{21}$$

Эти уравнения представляют начальное состояние пружины, т. е. начальное ее растяжение или сжатие и скорости, сообщенные различным точкам ее.

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ должны быть заданы на протяжении от $x = 0$ до $x = l$.

§ 7. Рассмотрим сперва простейший частный случай поставленной задачи; от этого частного случая уже нетрудно будет перейти к более общему, рассмотренному Пуассоном, а затем и к нашему.

Именно предположим, что масса поршня ничтожно мала по сравнению с массою пружины; тогда вместо уравнения (19) у нас будет такое:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Таким образом имеем следующую задачу:

Определить неизвестную функцию u так, чтобы она удовлетворяла:

1°) *уравнению*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{q} F(x, t), \tag{17'}$$

2°) *граничным условиям:*

$$\begin{array}{llll} \text{при} & x = 0 & \text{должно быть} & u = 0 \quad \text{при всяком } t \\ \text{»} & x = l & \text{»} \quad \text{»} & \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \end{array} \tag{19''}$$

3°) *начальным условиям:* при $t = 0$ должно быть

$$u = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x) \tag{21}$$

причем $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — некоторые заданные на протяжении от $x = 0$ до $x = l$ функций. Задача эта представляет не что иное, как определение вынужденных колебаний струны; для решения ее применим тот общий прием, который развит в статье моей «Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben», помещенной в 61-м томе «Mathematische Annalen».

Делаем

$$u = u_1 + u_2 \tag{22}$$

и подчиним u_1 и u_2 таким граничным и начальным условиям, чтобы u_1 представляло *свободные* колебания, u_2 — *вынужденные*, разумея под свободными те, которые происходят без действия внешней силы, лишь в силу начального отклонения системы от состояния равновесия; вынужденными — те, которые вызываются действием внешней силы, независимо от начального состояния системы.

Стоит только распорядиться так: u_1 должна удовлетворять:

1°) *уравнению*

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = l^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \tag{23}$$

2°) *граничным условиям:*

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{при} & x = 0 & \text{должно быть} & u_1 = 0 \\ \text{»} & x = l & \text{»} & \text{»} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \text{при всяком значении } t \tag{24}$$

3°) *начальным условиям:*

$$\begin{array}{lll} \text{при} & t = 0 & \text{должно быть} \\ \text{»} & u_1 = \varphi(x) \quad \text{и} & \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \psi(x) \end{array} \tag{25}$$

Величина u_2 должна удовлетворять:

1°) *уравнению*

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{1}{q} \cdot F(x, t) \tag{26}$$

2°) *граничным условиям:*

$$\begin{array}{lllll} \text{при} & x = 0 & \text{должно быть} & u_2 = 0 \\ \text{»} & x = l & \text{»} & \text{»} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \end{array} \tag{27}$$

3°) *начальным условиям:* при $t = 0$ должно быть

$$u_2 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0 \tag{28}$$

Очевидно, что при таком выборе величина $u = u_1 + u_2$ удовлетворяет всем требованиям задачи и вместе с тем u_1 представляет свободные и u_2 — вынужденные колебания.

Прежде всего найдем u_1. Для этого будем искать эту величину под видом суммы

$$u_1 = \sum XT \tag{29}$$

в которой X есть функция только одной переменной x, T есть функция только переменной t; каждый член этой суммы должен в отдельности удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0$$

т. е.

$$XT'' - b^2 TX'' = 0 \tag{30}$$

Это уравнение очевидно распадается на два:

$$X'' + m^2 X = 0 \tag{31}$$

$$T'' + b^2 m^2 T = 0 \tag{32}$$

где m^2 — какое угодно число, не содержащее ни t, ни x.

Из уравнения (31) следует

$$X = C \cos mx + D \sin mx$$

причем C и D — произвольные постоянные. Распорядимся постоянными C, D и m так, чтобы величина X удовлетворяла граничным условиям, тогда очевидно, что и u_1 будет им удовлетворять, сколько бы членов мы в сумме (29) ни брали.

Итак, имеем:

при $x = 0$ должно быть $X = 0$

» $x = l$ » » $X' = 0$

отсюда следует:

$$\begin{aligned} C &= 0 \\ mD \cos ml &= 0 \end{aligned} \tag{33}$$

Так как значения $m = 0$, $D = 0$ не удовлетворяют вопросу, то последнему уравнению удовлетворим, взяв m так, чтобы было

$$\cos ml = 0 \tag{34}$$

откуда следует

$$ml = \frac{2n+1}{2}\pi \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

или иначе

$$m = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{\pi}{l} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{35}$$

Эти значения мы будем для краткости обозначать так:

$$m_0,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ \ldots\ m_n,\ \ldots$$

и соответствующие им функции X так:

$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ \ldots\ X_n,\ \ldots$$

так что

$$X_n = D_n \sin\frac{2n+1}{2}\frac{\pi x}{l} = D_n \sin m_n x \tag{36}$$

Каждой функции X_n соответствует и функция T_n, которую получим внося в уравнение (32) соответствующее значение m. Таким образом получим

$$T_n = E_n \cos bm_n t + H_n \sin bm_n t \tag{37}$$

причем E_n и H_n — произвольные постоянные.

Так как произведения

$$E_n D_n \quad \text{и} \quad H_n D_n$$

произвольных постоянных суть также произвольные постоянные, то мы можем, не теряя общности, писать

$$E_n D_n = A_n \quad \text{и} \quad H_n D_n = B_n$$

и тогда u_1 примет вид

$$u_1 = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left(A_n \cos\frac{2n+1}{2}\frac{b\pi t}{l} + B_n \sin\frac{2n+1}{2}\frac{bnt}{l}\right)\sin\frac{2n+1}{2}\frac{\pi x}{l} \tag{38}$$

что равносильно тому, что в формуле (36) положить $D_n = 1$ и брать просто

$$X_n = \sin\frac{2n+1}{2}\frac{\pi x}{l} \tag{39}$$

Величина u_1, определяемая равенством (38), удовлетворяет уравнению (23) и граничным условиям; остается определить произвольные постоянные A_n и B_n так, чтобы u_1 удовлетворяла и начальным условиям, которые принимают вид

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \sin\frac{2n+1}{2}\frac{\pi x}{l} \tag{40}$$

и

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2n+1}{2}\cdot\frac{b\pi}{l}\cdot B_n \sin\frac{2n+1}{2}\frac{\pi x}{l} \tag{41}$$

Для определения коэффициентов A_n и B_n применяем обычный прием, который дает:

$$A_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi \xi}{l} \cdot d\xi$$

(42)

$$B_n = \frac{1}{b\pi} \cdot \frac{4}{2n+1} \cdot \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi \xi}{l} \cdot d\xi$$

Формулы (38) и (42) и дают выражение u_1.

Чтобы определить величину u_2, поступаем подобным же образом и будем искать эту величину под видом суммы

$$u_2 = \sum_0^\infty X_n S_n \tag{43}$$

причем X_n *суть те самые функции, которые входят в состав* u_1 *и удовлетворяют граничным условиям;* значит, и выражение (43) этим условиям удовлетворяет.

Подставляя это выражение в уравнение (26), получим равенство

$$\sum_0^\infty (X_n S_n'' - b^2 X_n'' S_n) = \frac{1}{q} F(x, t)$$

а так как функция X_n удовлетворяет уравнению

$$X_n'' + m_n^2 X_n = 0$$

то предыдущее равенство равносильно такому:

$$\sum_0^\infty X_n (S_n'' + b^2 m_n^2 S_n) = \frac{1}{q} F(x, t) \tag{44}$$

причем

$$m_n = \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l}$$

и

$$X_n = \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi x}{l}$$

Чтобы удовлетворить равенству (44), разложим функцию $\frac{1}{q} F(x, t)$ в ряд по функциям X_n, т. е. положим, что

$$\frac{1}{q} F(x, t) = \sum_0^n f_n(t) \cdot X_n \tag{45}$$

откуда следует

$$f_n(t) = \frac{2}{q \cdot l} \cdot \int_0^l F(\xi, t) \cdot \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi \xi}{l} \cdot d\xi \tag{46}$$

Значит, функция S_n будет определяться уравнением

$$S_n'' + b^2 m^2 S_n = f_n(t) \tag{47}$$

а так как при $t = 0$ должно быть

$$u_2 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0$$

то и для всякого n должно быть при $t = 0$:

$$S_n = 0 \quad \text{и} \quad S_n' = 0 \tag{48}$$

Сопоставляя уравнение (47) и условия (48) с уравнением (3′) и условиями (4), видим, что

$$S_n = \frac{1}{bm_n} \int_0^l f_n(\alpha) \sin bm_n (t - \alpha)\, d\alpha \tag{49}$$

или, заменяя f_n его величиною,

$$S_n = \frac{4}{b\pi q} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \int_0^t d\alpha \int_0^l F(\xi, \alpha) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{b\pi}{l} (t - \alpha) \cdot \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi \xi}{l} \cdot d\xi \tag{50}$$

Эта формула, в соединении с формулою (43), и решает вопрос об определении u_2.

§ 8. Общие формулы предыдущего параграфа настолько сложны, что для применения их к интересующему нас вопросу об индикаторе с тяжелою пружиною и весьма легким поршнем надо эти формулы развить подробнее для того частного вида функции $F(x, t)$, с которым именно и приходится иметь дело.

В нашем случае давление действует на конец пружины, соответствующий абсциссе $x = l$, и является функцией только времени t, в остальных же точках на пружину никаких внешних сил не действует.

Таким образом мы имеем здесь дело с сосредоточенной нагрузкой, и для разбора этого случая надо воспользоваться тем приемом, который указан в § 8 и в § 12 вышеупомянутой статьи моей.

Сосредоточенную нагрузку надо рассматривать как предельный случай нагрузки, распределенной на бесконечно малом протяжении при условии, что полная величина ее не изменяется с изменением промежутка, на котором она распределена.

Выкладку следует вести так, как будто бы нагрузка действовала на некотором конечном промежутке λ, в конечном расстоянии c от конца пружины, а затем в окончательном результате переходить к пределу

$$\lambda = 0 \quad \text{и} \quad c = l$$

Итак, положим, что функция $F(x, t)$ такова:

$F(x,t) = 0$	для промежутка от	$x = 0$	до	$x = c$	
$F(x,t) = \omega(x) \cdot f(t)$	»	»	»	$x = c$	» $x = c + \lambda$
$F(x,t) = 0$	»	»	»	$c + \lambda$	» l

причем

$$\int_c^{c+\lambda} \omega(x) \cdot dx = A \quad \text{(см. § 1) и} \quad \omega(x) > 0$$

т. е. что независимо от величины c и λ полная нагрузка равна $A \cdot f(t)$.

В этих предположениях относительно функции $F(x, t)$ и исчислим интеграл, входящий в формулу (50).

Выполним сперва интегрирование по букве ξ: имеем

$$\int_0^l F(\xi, \alpha) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi\xi}{l} \cdot d\xi = f(\alpha) \int_c^{c+\lambda} \omega(\xi) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi\xi}{l} \cdot d\xi$$

$$\int_c^{c+\lambda} \omega(\xi) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi\xi}{l} \cdot d\xi =$$

$$= \left[\sin \frac{2\pi+1}{2} \frac{\pi\xi}{l} \cdot \int_c^{\xi} \omega(\xi)\, d\xi \right]_c^{c+\lambda}$$

$$- \frac{2\pi+1}{2} \frac{\pi}{l} \cdot \int_c^{c+\lambda} \cos \frac{2n+1}{2} \frac{\pi\xi}{l} \cdot \left[\int_c^{\xi} \omega(\xi)\, d\xi \right] d\xi =$$

$$= A \cdot \sin \frac{2n+1}{2} \pi \frac{(c+\lambda)}{l} - \frac{2\pi+1}{2} \frac{\pi}{l} \cdot \int_c^{c+\lambda} \cos \frac{2n+1}{2} \frac{\pi\xi}{l} \cdot \left[\int_c^{\xi} \omega(\xi)\, d\xi \right] d\xi$$

Нетрудно показать, что последний из этих интегралов имеет своим пределом 0 вместе с λ. В самом деле, всегда можно взять λ столь малым, чтобы $\cos\frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{l}\xi$ не менял своего знака между пределами интегрирования; тогда, обозначая через η — правильную дробь, имеем по теореме о средней:

$$\int_c^{c+\lambda} \cos\frac{2n+1}{2}\frac{\pi\xi}{l}\cdot\left[\int_c^{\xi}\omega(\xi)\,d\xi\right]d\xi = \cos\frac{2n+1}{2}\frac{\pi(c+\eta\lambda)}{l}\cdot\int_c^{c+\lambda}d\xi\cdot\left[\int_c^{\xi}\omega(\xi)\,d\xi\right];$$

так как $\omega(\xi)$ постоянно положительно, то

$$\int_c^{\xi}\omega(\xi)\,d\xi < \left(\int_c^{c+\lambda}\omega(\xi)\,d\xi = A\right)$$

т. е.

$$\int_c^{\xi}\omega(\xi)\,d\xi < A$$

следовательно интеграл

$$\int_c^{c+\lambda} d\xi\left[\int_c^{\xi}\omega(\xi)\,d\xi\right] < A\cdot\lambda$$

а значит, по абсолютной величине и интеграл

$$\int_c^{c+\lambda}\cos\frac{2n+1}{2}\frac{\pi\xi}{l}\cdot\left[\int_c^{\xi}\omega(\xi)\,d\xi\right]d\xi < A\cdot\lambda$$

а так как A величина конечная, то предел этого интеграла при $\lambda = 0$ есть 0.

Таким образом

$$\underset{\lambda=0}{\text{пред.}}\int_c^{c+\lambda}\omega(\xi)\sin\frac{2n+1}{2}\frac{\pi\xi}{l}\cdot d\xi = \text{пред.}\sin\frac{2n+1}{2}\frac{\pi(c+\lambda)}{l}\cdot\text{пред.}\int_c^{c+\lambda}\omega(\xi)\,d\xi =$$

$$= A\sin\frac{2n+1}{2}\frac{\pi c}{l}$$

Отсюда следует, что

$$\underset{\substack{c=l\\ \lambda=0}}{\text{пред.}}\int_c^{c+\lambda}\omega(\xi)\sin\frac{2n+1}{2}\frac{\pi\xi}{l}\cdot d\xi = A\cdot\sin\frac{2n+1}{2}\pi = (-1)^n A$$

Таким образом имеем: в пределе, т. е. когда сосредоточенное давление, равное $Af(t)$, действует на конец пружины, то функция

$$S_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{4A}{b\pi q} \int_0^t f(\alpha) \cdot \sin \frac{2n+1}{2} \frac{b\pi}{l} (t-\alpha)\, d\alpha \tag{51}$$

вместе с тем

$$u_2 = \sum_{n=0}^{n=\infty} S_n \cdot \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi x}{l} \tag{52}$$

Если начальные условия таковы, что

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{и} \quad \psi(x) = 0$$

то и

$$u_1 = 0$$

и следовательно,

$$u = u_2$$

§ 9. Обыкновенно представляет интерес не перемещение произвольной точки пружины, соответствующей абсциссе x, а лишь свободного конца ее, соответствующего значению $x = l$.

Для этого случая формула (52) дает

$$u_2 = \sum_{n=0}^{n=\infty} S_n = \frac{4A}{b\pi q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^t f(\alpha) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{b\pi}{l} (t-\alpha)\, d\alpha \tag{53}$$

Прежде чем исследовать эту формулу, проверим ее справедливость для простейшего случая: положим, что

$$f(\alpha) = p_0$$

тогда

$$\int_0^t f(\alpha) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{b\pi}{l} (t-\alpha) \cdot d\alpha = \frac{2p_0}{2n+1} \cdot \frac{l}{b\pi} \left[1 - \cos \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{b\pi t}{l} \right]$$

если взять $t = \frac{2l}{b}$, то

$$1 - \cos \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{b\pi t}{l} = 1 - \cos (2n+1)\pi = 2$$

и u_2 получает наибольшее свое значение

$$u_2 = \frac{16 A p_0 l}{b^2 \pi^2 q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \tag{54}$$

Как известно, сумма

$$(55)\qquad \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}$$

Замечая, кроме этого, что, в силу обозначения,

$$(56)\qquad b^2=\frac{k}{q},\quad \text{т. е.}\quad b^2q=k$$

видим, что предыдущая величина u_2 равносильна такой:

$$(54')\qquad u_2=\frac{2Ap_0l}{k}$$

т. е. что наибольшее растяжение, которое получает пружина под действием внезапно приложенной силы, *вдвое* больше того «статического» растяжения, которое этой силой сообщается.

Результат этот общеизвестен и может быть выведен из самых элементарных соображений; для нас же он был нужен, чтобы проверить, нет ли ошибки в выкладке.

§ 10. Перейдем теперь к исследованию формулы (53)

$$(53)\qquad u_2=\frac{4A}{b\pi q}\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{2n+1}\int_0^t f(\alpha)\sin\frac{2n+1}{2}\frac{b\pi}{l}(t-\alpha)\,d\alpha$$

Как видно, каждый из входящих в состав этой формулы интегралов имеет совершенно такой же вид, как и в формуле (6), и применяя к каждому из них то же преобразование, имеем

$$(57)\qquad \int_0^t f(\alpha)\sin\frac{2n+1}{2}\frac{b\pi}{l}(t-\alpha)\,d\alpha=$$
$$=\frac{2l}{b\pi}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot f(t)-\frac{2l}{b\pi(2n+1)}\int_0^t f'(\alpha)\cos\frac{2n+1}{2}\frac{b\pi}{l}(t-\alpha)\,d\alpha$$

подставляя в формулу (53) и воспользовавшись соотношениями (55) и (56), получаем

$$(58)\qquad u_2=\frac{Al}{k}\cdot f(t)-\frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{Al}{k}\cdot\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\int_0^t f'(\alpha)\cos\frac{2n+1}{2}\frac{b\pi}{l}(t-\alpha)\cdot d\alpha$$

Первый член этой формулы

$$\frac{Al}{k} f(t)$$

представляет как раз ту величину, которую должен дать индикатор, если бы давление нарастало весьма медленно $[f'(t) = 0]$, иными словами действовало «статически», значит величина

$$(59) \qquad \varepsilon = -\frac{8}{\pi^2}\frac{Al}{k}\sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}\int_0^t f'(\alpha)\cos\frac{2n+1}{2}\frac{b\pi}{l}(t-\alpha)\,d\alpha$$

представляет погрешность записи прибора вследствие изменяемости давления.

Как видно, каждый член этого выражения совершенно подобен выражению (7), отличаясь от него лишь постоянными множителями.

В § 4 произведено исследование этого выражения для важнейшего в практике случая.

Сделаем для сокращения письма

$$\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{b\pi}{l} = \nu_n$$

тогда, в силу сказанного в § 4, обозначая через σ_0, σ_1, σ_2 и т. д. — величины: $\frac{2\pi}{\nu_0}$, $\frac{2\pi}{\nu_1}$, $\frac{2\pi}{\nu_2}$ и т. д. и через $f'(t_i)$ — наибольшее значение $f'(t)$, имеем, на основании формулы (*) § 4, следующий ряд неравенств, относящихся к *абсолютным* величинам количеств, в них входящих:

$$(59') \qquad \begin{aligned}
&\int_0^t f'(\alpha)\cos\nu_0(t-\alpha)\cdot d\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{\nu_0}\cdot f'(t_i)\\
&\int_0^t f'(\alpha)\cos\nu_1(t-\alpha)\cdot d\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{\nu_1}\cdot f'(t_i)\\
&\qquad\qquad\qquad

следовательно будет

$$|\varepsilon| < \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{Al}{k} \cdot \frac{2\sqrt{2} \cdot l}{b\pi} \cdot f'(t_i) \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$$

Так как сумма $\sum_{0}^{n} \frac{1}{(2n+1)^3}$ приблизительно равна 1.07, то, полагая попрежнему

$$f'(t_i) \cdot \frac{\sigma_0}{2} = a \tag{60}$$

получаем

$$|\varepsilon| < 0.4 \cdot a \cdot \frac{Al}{k} \tag{60'}$$

Заметим, что $\sigma_0 = \frac{4l}{b} = 4l\sqrt{\frac{q}{k}}$.

Обозначая через Q — *вес* всей пружины, имеем

$$q = \frac{Q}{gl}$$

следовательно

$$\sigma_0 = 4\sqrt{\frac{Ql}{gk}} \tag{61}$$

причем k есть «мера жесткости» пружины и определяется формулою

$$k = \frac{P \cdot l}{h} \tag{62}$$

где P — нагрузка и h — соответствующее ей растяжение или сжатие пружины.

Формулы (60′), (61) и (62) и дают полные указания на выбор элементов индикатора с весьма легким поршнем и весьма жесткой пружиной, предназначенного для записи давления, наибольшая быстрота нарастания которого известна.

Заметим, что во всех случаях первый член входящей в состав формулы (59) суммы настолько преобладает над остальными, что практически можно ограничиваться им одним и писать формулу (59) так:

$$\varepsilon = 0.8 \frac{Al}{k} \cdot \int_0^t f'(\alpha) \cos \frac{b\pi}{2l}(t-\alpha) \cdot d\alpha \tag{63}$$

и тогда все сказанное в §§ 2 и 3 относится и к рассматриваемому случаю, стоит только вместо периода τ брать период σ_0.

Нетрудно также, исходя из формулы (53), получить результат, подобный формуле (16), для индикатора, дающего импульс давления, несмотря на то, что масса его поршня ничтожно мала по сравнению с массою пружины; стоит только заменить в формуле (16) букву n буквою ν_0, и мы получим

$$U_{\max} = \frac{Al}{k} \cdot \nu_0 \cdot I = \frac{Al}{k} \cdot \frac{b\pi}{2l} \cdot I$$

или иначе

$$U_{\max} = \frac{AI}{2} \pi \sqrt{\frac{gl}{kQ}} = \frac{AI}{2} \pi \sqrt{\frac{gh}{P \cdot Q}} \tag{64}$$

где попрежнему обозначено: через Q — вес пружины и через h — растяжение или сжатие ее при статической нагрузке, равной P.

§ 11. Приложим теперь изложенный в предыдущих параграфах прием к рассмотрению и общего случая, т. е. когда отношение веса поршня к весу пружины таково, что его нельзя почитать ни за «малую», ни за «большую» величину при той степени точности, которой при обработке каких-либо опытов или наблюдений желательно достигнуть.

Итак, нам надо решить следующую задачу: определить функцию u так, чтобы она удовлетворяла:

1°) *уравнению*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{q} F(x, t) \tag{18}$$

2°) *граничным условиям:*

при $x = 0$ должно быть $u = 0$

$$\text{»} \quad x = l \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \tag{19'}$$

3°) *начальным условиям:* при $t = 0$ должно быть

$$u = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x) \tag{21}$$

Следуя изложенной в § 7 методе, полагаем

$$u = u_1 + u_2$$

и подчиняем u_1 и u_2 следующим требованиям:

1°) *Для* u_1*:*

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0 \tag{65}$$

2°) *Граничные условия:*

$$\text{при } x = 0 \text{ должно быть } u_1 = 0$$

(66)
$$\text{» } x = l \text{ » » } \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0$$

3°) *Начальные условия:* при $t = 0$ должно быть

(67)
$$u_1 = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \psi(x)$$

1°) *Для* u_2*:*

(68)
$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{1}{q} F(x, t)$$

2°) *Граничные условия:*

(69)
$$\text{при } x = 0 \text{ должно быть } u_2 = 0$$

(70)
$$\text{» } x = l \text{ » » } \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

3°) *Начальные условия:* при $t = 0$ должно быть

(71)
$$u_2 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0$$

§ **12.** Начинаем с определения u_1.

Полагаем попрежнему:

(72)
$$u_1 = \sum XT$$

тогда должно быть:

(73)
$$X'' + m^2 X = 0$$

(74)
$$T'' + b^2 m^2 T = 0$$

где m — какое угодно число, не содержащее ни t, ни x.

Отсюда следует

$$X = C \cos mx + D \sin mx$$

а так как при $x = 0$ должно быть $X = 0$, то $C = 0$, и значит,

(75)
$$X = \sin mx$$

так как мы видели, что, не теряя в общности, можно брать $D = 1$.

Из уравнения (74) следует

$$T = A \cos bmt + B \sin bmt$$

и следовательно,

(76)
$$u_1 = \sum A \sin mx \cos bmt + \sum B \sin mx \sin bmt$$

Чтобы эта величина удовлетворяла второму из граничных условий, необходимо, чтобы при *всяком* t имело место равенство

$$\sum (b^2 m^2 \sin ml - mc^2 \cos ml)(A \cos bmt + B \sin bmt) = 0 \tag{77}$$

которое получается подставив в уравнение (72) вместо u_1 его выражение (76) и положив затем $x = l$.

Из равенства (77) следует, что каждый член суммы в отдельности должен равняться нулю, т. е. числа m должны удовлетворять уравнению

$$mb^2 \sin ml - c^2 \cos ml = 0 \tag{77'}$$

или, полагая $ml = \mu$ и делая $\frac{c^2 l}{b^2} = \frac{glq}{P} = \frac{Q}{P} = \gamma$

такому:

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma \tag{78}$$

Обозначив корни этого уравнения через

$$\mu_1, \ \mu_2, \ \mu_3, \ \ldots \ \mu_n, \ \ldots$$

(вычисление этих корней будет показано ниже), мы для каждого корня получаем соответствующую функцию X и T, а именно:

$$X_n = \sin \frac{\mu_n x}{l} \tag{79}$$

и

$$T_n = A_n \cos \frac{\mu_n bt}{l} + B_n \sin \frac{\mu_n bt}{l} \tag{80}$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям, надо определить постоянные произвольные A_n и B_n так, чтобы было:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum A_n \sin \frac{\mu_n x}{l} \\ \psi(x) &= \sum \frac{b\mu_n}{l} B_n \sin \frac{\mu x}{l} \end{aligned} \tag{81}$$

Но здесь для определения коэффициентов A_n и B_n примененный в § 7 прием — умножения на $\sin \frac{\mu_n x}{l}$ интегрирования в пределах от 0 до l — не привел бы к цели, ибо интеграл

$$\int_0^l \sin \frac{\mu_n x}{l} \cdot \sin \frac{\mu_k x}{l} \cdot dx$$

не обращается в нуль, когда значки n и k не равны.

Но Пуассон в упомянутой выше статье показывает, что

$$\int_0^l \cos\frac{\mu_n x}{l}\cos\frac{\mu_k x}{l}\,dx = 0 \tag{82}$$

когда n не равно k.

В самом деле,

$$\int_0^l \cos\frac{\mu_n x}{l}\cos\frac{\mu_k x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\cos\frac{\mu_n + \mu_k}{l}x + \cos\frac{\mu_n - \mu_k}{l}\right)dx =$$

$$= \frac{l}{2}\left[\frac{\sin(\mu_n + \mu_k)}{\mu_n + \mu_k} + \frac{\sin(\mu_n - \mu_k)}{\mu_n - \mu_k}\right] =$$

$$= \frac{l}{2}\frac{(\mu_n - \mu_k)\sin(\mu_n + \mu_k) + (\mu_n + \mu_k)\sin(\mu_n - \mu_k)}{\mu_n^2 - \mu_k^2} =$$

$$= l\cdot\frac{\mu_n \sin\mu_n\cos\mu_k - \mu_k\sin\mu_k\cos\mu_n}{\mu_n^2 - \mu_k^2} =$$

$$= \frac{l}{\mu_n^2 - \mu_k^2}\cdot\cos\mu_n\cos\mu_k\left[\mu_n\operatorname{tg}\mu_n - \mu_k\operatorname{tg}\mu_k\right] = 0$$

ибо, в силу уравнения (78),

$$\mu_n\operatorname{tg}\mu_n = \mu_k\operatorname{tg}\mu_k = \gamma$$

Когда же $\mu_n = \mu_k$, то будет

$$\int_0^l \cos^2\frac{\mu_n x}{l}\cdot dx = \frac{1}{2}\int_0^l \left(1 + \cos\frac{2\mu_n x}{l}\right)dx = \frac{l}{2}\left(1 + \frac{1}{2\mu_n}\sin 2\mu_n\right) = \tag{83}$$

$$= \frac{l}{4\mu_n}(2\mu_n + \sin 2\mu_n)$$

Таким образом нахождение коэффициентов в ряду

$$\omega(x) = \sum_1^\infty C_n\cos\frac{\mu_n x}{l}$$

производится по формуле

$$C_n = \frac{4}{l}\cdot\frac{\mu_n}{2\mu_n + \sin 2\mu_n}\cdot\int_0^l \omega(\xi)\cos\frac{\mu_n\xi}{l}\cdot d\xi \tag{84}$$

Чтобы к этому привести наш случай, стоит только положить

$$\omega(x) = \varphi'(x) = \sum C_n \cos \frac{\mu_n x}{l}$$

тогда

$$\varphi(x) = \sum A_n \sin \frac{\mu_n x}{l} \tag{84'}$$

причем

$$A_n = \frac{C_n \cdot l}{\mu_n} = \frac{4}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^l \varphi'(\xi) \cos \frac{\mu_n \xi}{l} \cdot d\xi \tag{85}$$

Точно так же получим

$$B_n = \frac{4l}{b} \cdot \frac{1}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} \int_0^l \psi'(\xi) \cos \frac{\mu_n \xi}{l} \cdot d\xi \tag{86}$$

Таким образом имеем

$$u_1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(A_n \cos \frac{b\mu_n t}{l} + B_n \sin \frac{b\mu_n t}{l} \right) \sin \frac{\mu_n x}{l} \tag{87}$$

причем A_n и B_n определяются формулами (85) и (86); величины же

$$\mu_1, \ \mu_2, \ldots \mu_n, \ldots$$

суть корни уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$$

§ **13.** Покажем теперь, каким образом найти величину u_2. Для этого:

1°) Полагаем, согласно сказанному в § 7,

$$u_2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} S_n \cdot \sin \frac{\mu_n x}{l} \tag{88}$$

2°) Представляем функцию $\frac{1}{q} F(x, t)$ в виде ряда

$$\frac{1}{q} F(x, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} f_n(t) \cdot \sin \frac{\mu_n x}{l} \tag{89}$$

тогда, как показано выше, будет

$$f_n(t) = \frac{4}{q} \cdot \frac{1}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \cdot \int_0^l \frac{\partial F(\xi, t)}{\partial \xi} \cdot \cos \frac{\mu_n \xi}{l} \cdot d\xi \tag{90}$$

3°) Функция S_n определяется уравнением

$$S_n'' + \frac{b^2 \mu_n^2}{l^2} S_n = f_n(t) \tag{91}$$

и условиями: при $t = 0$ должно быть

$$S_n = 0 \quad \text{и} \quad S_n' = 0$$

так что

$$S_n = \frac{l}{b\mu_n} \cdot \int_0^t f_n(\alpha) \sin \frac{b\mu_n}{l} (t - \alpha)\, d\alpha \tag{92}$$

формулы (88), (90), (92) и доставляют выражение u_2, чем поставленная задача и решается вполне, так как

$$u = u_1 + u_2$$

когда же начальные условия таковы, что

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{и} \quad \psi(x) = 0$$

то $u_1 = 0$, и остается решение

$$u = u_2$$

§ **14.** В предыдущем изложении внешняя нагрузка $F(x, t)$ предполагается распределенной по длине пружины или отдельных участков ее и отнесенной на погонную единицу длины пружины, для нашей же цели необходимо исследовать действие нагрузки, сосредоточенной на конце ($x = l$) пружины.

Очевидно, что имея общие формулы (88), (90) и (92), надо поступить с ними совершенно подобно тому, как мы делали в § 8, рассматривая сосредоточенную нагрузку как предельный случай конечной полной нагрузки, распределенной на бесконечно малом участке.

С этою целью берем функцию $F(x, t)$ так, как указано в § 8; тогда интеграл

$$\int_0^l \frac{\partial F(\xi, \alpha)}{\partial \xi} \cos \frac{\mu_n \xi}{l} \cdot d\xi = f(\alpha) \int_c^{c+\lambda} \omega'(\xi) \cos \frac{\mu_n \xi}{l} \cdot d\xi$$

$$\int_c^{c+\lambda} \omega'(\xi) \cos \frac{\mu_n \xi}{l} \cdot d\xi = \left(\omega(\xi) \cdot \cos \frac{\mu_n}{l} \xi \right)_c^{c+\lambda} + \frac{\mu_n}{l} \int_c^{c+\lambda} \omega(\xi) \sin \frac{\mu_n \xi}{l} \cdot d\xi$$

Будем брать функцию $\omega(\xi)$ так, чтобы было

$$\omega(c+\lambda) = \omega(c) = 0,$$

тогда

$$\int_c^{c+\lambda} \omega'(\xi) \cos\frac{\mu_n \xi}{l}\, d\xi = \frac{\mu_n}{l} \int_c^{c+\lambda} \omega(\xi) \sin\frac{\mu_n \xi}{l} \cdot d\xi$$

Затем

$$\int_c^{c+\lambda} \omega(\xi) \sin\frac{\mu_n \xi}{l} \cdot d\xi =$$

$$= \left\{\left[\int_c^{\xi} \omega(\xi)\, d\xi\right] \cdot \sin\frac{\mu_n \xi}{l}\right\}_c^{c+\lambda} - \frac{\mu_n}{l} \int_c^{c+\lambda} \left[\int_c^{\xi} \omega(\xi)\, d\xi\right] \cos\frac{\mu_n \xi}{l}\, d\xi =$$

$$= A \cdot \sin\frac{\mu_n (c+\lambda)}{l}$$

ибо в § 8 показано, что второй из этих двух интегралов имеет своим пределом 0, интеграл же

$$\int_c^{c+\lambda} \omega(\xi)\, d\xi$$

по предположению, имеет своим пределом A; таким образом имеем

$$\underset{\substack{c=l \\ \lambda=0}}{\text{пред.}} \int_c^{c+\lambda} \omega'(\xi) \cos\frac{\mu_n \xi}{l}\, d\xi = \frac{\mu_n \sin\mu_n}{l} \cdot A = \frac{\gamma}{l} A \cdot \cos\mu_n$$

Следовательно, будет

$$f_n(t) = \frac{4\gamma}{ql} \cdot \frac{\cos\mu_n}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \cdot A \cdot f(t)$$

Следовательно,

$$S_n = \frac{4\gamma}{bq} \frac{\cos\mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} A \cdot \int_0^t f(\alpha) \sin\frac{b\mu_n}{l}(t-\alpha)\, d\alpha$$

и попрежнему

$$u_2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} S_n \cdot \sin\frac{\mu_n x}{l} \tag{93}$$

Так как нас интересует, главным образом, движение поршня, а не промежуточных точек пружины индикатора, то для получения его надо положить в формуле (93) $x = l$; тогда получим

$$u_2 = z = \frac{4\gamma A}{bq} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos \mu_n \sin \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} \cdot \int_0^t f(\alpha) \sin \frac{b\mu_n}{l} (t - \alpha)\, d\alpha$$

В силу уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$$

имеем

$$\frac{\gamma \cdot \cos \mu}{\mu} = \sin \mu$$

и предыдущую формулу можно написать так:

$$(94) \qquad z = \frac{4A}{bq} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^t f(\alpha) \sin \frac{b\mu_n}{l} (t - \alpha)\, d\alpha$$

Эту формулу преобразуем подобно тому, как мы делали раньше, а именно, интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^t f(\alpha) \sin \frac{b\mu_n}{l} (t - \alpha)\, d\alpha = \frac{l}{b\mu_n} f(t) - \frac{l}{b\mu_n} \cdot \int_0^t f'(\alpha) \cos \frac{b\mu_n}{l} (t - \alpha)\, d\alpha;$$

подставляя, получаем

$$z = \frac{4A}{b^2 q} l \cdot f(t) \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)}$$

$$- \frac{4A}{b^2 q} \cdot l \sum \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin^2 \mu_n)} \int_0^t f'(\alpha) \cos \frac{b\mu_n}{l} (t - \alpha)\, d\alpha .$$

Нетрудно найти сумму

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)}$$

В самом деле, сделаем в данных Пуассоном для разложения функции в ряд по синусам аргументов, зависящих от корней уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$$

формулах (84′) и (85):

$$\varphi(x) = x$$

тогда будет

$$A_n = \frac{4}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^l \cos \frac{\mu_n \xi}{l} d\xi = \frac{4l \sin \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)}$$

следовательно

$$x = 4l \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} \sin \frac{\mu_n x}{l}$$

полагая в этой формуле $x = l$, имеем равенство

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} = \frac{1}{4}$$

и, замечая, что

$$b^2 q = k, \qquad [\text{см. формулу } (17')]$$

можем написать

$$z = \frac{Al}{k} \cdot f(t) - \frac{Al}{k} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} \int_0^t f'(\alpha) \cos \frac{b\mu_n}{l} (t - \alpha) d\alpha$$

причем последний член и представляет выражение погрешности, даваемой индикатором.

Очевидно, что выражение погрешности

$$\varepsilon = -\frac{Al}{k} \sum \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} \int_0^t f'(\alpha) \cos \frac{b\mu_n}{l} (t - \alpha) d\alpha \tag{95}$$

может быть преобразовано подобно тому, как и раньше, и мы получим верхний предел ее абсолютной величины.

Полагая $\frac{b\mu_n}{l} = \lambda_n$, мы, в силу сказанного в § 4, можем написать ряд неравенств, подобных (59′), а именно:

$$\int_0^t f'(\alpha) \cos \lambda_1 (t - \alpha) d\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_1} f'(t_i)$$

$$\int_0^t f'(\alpha) \cos \lambda_2 (t - \alpha) d\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_2} f'(t_i)$$

. . . . . .

$$\int_0^t f'(\alpha) \cos \lambda_n (t - \alpha) d\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_2} f'(t_i)$$

следовательно будет

$$|\varepsilon| < \frac{Al}{k} \cdot \frac{2\sqrt{2} \cdot l}{b} \sum \frac{1}{\mu_n} \cdot \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} \cdot f'(t_i) \tag{96}$$

Так как корни уравнения $\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$ идут возрастая приблизительно как ряд натуральных чисел, то

$$\frac{1}{\mu_n} < \frac{1}{\mu_1}$$

следовательно

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\mu_n} \cdot \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} < \frac{1}{\mu_1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)}$$

т. е. рассматриваемая сумма меньше $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\mu_1}$.

Таким образом имеем

$$\varepsilon < \frac{Al}{k} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{l}{b\mu_1} f'(t_i) \tag{97}$$

Формула (87) показывает, что величина

$$\sigma_1 = \frac{2\pi}{b\mu_1} l \tag{98}$$

есть наибольший из периодов свободных колебаний пружины вместе с поршнем; поэтому, чтобы соблюсти аналогию с предыдущим, формулу (97) напишем для случая, когда σ_1 *мало* по сравнению с продолжительностью нарастания давления, так:

$$\varepsilon < \frac{Al}{k} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot f'(t) \cdot \frac{\sigma_1}{2}$$

или

$$\varepsilon < 0.45 \cdot \frac{Al}{k} \cdot f'(t) \cdot \frac{\sigma_1}{2} \tag{99}$$

Само собою разумеется, что когда период σ_1 весьма велик по сравнению с продолжительностью действия давления, то индикатор показывает импульс давления, и будет

$$Z_{max} = \frac{Al}{k} \cdot \frac{b\mu_1}{l} \cdot I \tag{100}$$

причем μ_1 есть наименьший из корней уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$$

и

$$b = \sqrt{\frac{k}{q}} = \sqrt{\frac{klg}{Q}}; \quad \gamma = \frac{Q}{P} = \frac{\text{вес пружины}}{\text{вес поршня}}$$

§ 15. Как видно, для нахождения величины σ_1 необходимо решить уравнение

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$$

Подобные трансцендентные уравнения встречаются во многих вопросах математической физики, и еще Фурье обратил внимание и показал, что их надо решать, исходя из графических соображений, строя такие две кривые абсциссы точек, пересечения которых и давали бы искомые корни.

В нашем случае стоит только взять кривые, коих уравнения

$$y = \operatorname{tg} x \quad \text{и} \quad xy = \gamma$$

то абсциссы точек пересечения их и дадут искомые корни предложенного уравнения. Не входя в дальнейшие подробности, прилагаем таблицу значений наименьшего корня этого уравнения.

Таблица значений наименьшего корня *уравнения* $\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$

γ	μ_1	γ	μ_1	γ	μ_1
0.01	0.10	0.8	0.79	7.0	1.39
0.05	0.22	0.9	0.82	8.0	1.40
0.1	0.32	1.0	0.86	9.0	1.41
0.2	0.43	1.5	0.98	10.0	1.417
0.3	0.52	2.0	1.13	15.0	1.473
0.4	0.59	3.0	1.20	20.0	1.525
0.5	0.65	4.0	1.27	100.0	1.568
0.6	0.70	5.0	1.32	∞	1.5705
0.7	0.75	6.0	1.37		

Эта таблица составлена по логарифмической линейке без всяких вычислений; стоит только написать уравнение так:

$$\mu^0 \operatorname{tg} \mu^0 = 57.3 \cdot \gamma$$

и поступать, для приискания числа градусов в μ^0, со шкалою тангенсов и чисел подобно тому, как делают для извлечения кубичного корня из чисел.

§ **16.** Очевидно, что случай, рассмотренный в § 11—15, где приняты во внимание как инерция поршня, так и пружины, есть самый общий и должен заключать в себе как частные остальные два, поэтому получение из этого общего случая этих двух частных составит надежную поверку выкладок.

Начнем с того случая, который рассмотрен в § 7, т. е. где предположено, что масса поршня ничтожно мала. Следовательно, в уравнении (78) надо сделать

$$\gamma = \infty$$

и значит, корни μ_1, μ_2, μ_3, ... μ_n соответственно будут:

$$\frac{\pi}{2};\quad \frac{3\pi}{2};\quad \frac{5\pi}{2};\ \ldots\ \frac{2n-1}{2}\pi$$

и соответствующие функции

$$X_n = \sin\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{\pi x}{l} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

что согласуется с формулою (39).

Обращаясь затем к формуле (94), мы видим, что коэффициент

$$\frac{\sin^2\mu_n}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} = \frac{\sin^2\frac{2n-1}{2}\pi}{2\cdot\frac{2n-1}{2}\pi + \sin(2n-1)\pi} = \frac{1}{(2n-1)\pi}$$

и формула (94) обращается в такую:

$$z = \frac{4A}{bq\cdot\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{2n-1}\int_0^t f(\alpha)\sin\frac{(2n-1)b\pi}{l}(t-\alpha)\,d\alpha \tag{101}$$

что согласуется с формулою (53), ибо очевидно, что сумму по всем нечетным целым числам можно писать или от $n = 0$ до $n = \infty$, изображая нечетное число в виде $2n + 1$, как это сделано в формуле (53), или же от $n = 1$ до $n = \infty$, изображая нечетное число в виде $2n - 1$, как это сделано формулой (101).

Таким образом случай, рассмотренный в § 7, вытекает из общего.

Перейдем теперь к случаю, рассмотренному в § 1, т. е. когда масса пружины ничтожно мала по сравнению с массою поршня.

В этом случае величина γ в уравнении

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma$$

равна нулю, и это уравнение дает для величины μ значения

$$\mu_n = n\pi \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

в формуле (94) все члены, содержащие коэффициенты

$$\frac{\sin^2 \mu_n}{2\mu_n + \sin 2\mu_n}$$

обратятся в нуль, кроме первого, который принимает неопределенный вид, так что формула (94) должна быть написана так:

$$z = \operatorname*{пред.}_{q=0} \frac{4A}{bq} \cdot \frac{\sin^2 \mu}{2\mu + \sin 2\mu} \int_0^t f(\alpha) \sin \frac{b\mu}{l} (t - \alpha) \cdot d\alpha \tag{102}$$

При разыскании этого предела необходимо иметь в виду следующие соотношения:

$$b^2 = \frac{k}{q}; \quad Q = gq \cdot l$$

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \frac{Q}{P} = \frac{gql}{P}$$

Из последнего уравнения, при бесконечно малом q, следует, что наименьший корень μ выражается так:

$$\mu = \sqrt{\frac{gql}{P}}$$

Значит,

$$\operatorname*{пред.}_{q=0} \frac{b\mu}{l} = \operatorname*{пред.}_{q=0} \frac{1}{l} \cdot \sqrt{\frac{k}{q}} \cdot \sqrt{\frac{glq}{P}} = \sqrt{\frac{kg}{Pl}} \tag{*}$$

Затем

$$\operatorname*{пред.}_{q=0} \frac{4A}{bq} \cdot \frac{\sin^2 \mu}{2\mu + \sin 2\mu} = 4A \cdot \operatorname*{пред.}_{q=0} \frac{1}{bq} \cdot \frac{\mu}{4} =$$

$$= A \cdot \operatorname*{пред.}_{q=0} \sqrt{\frac{1}{kq}} \cdot \sqrt{\frac{gql}{P}} = A \cdot \sqrt{\frac{gl}{kP}}$$

Принимая во внимание обозначение § 1

$$n^2 = \frac{kg}{lP} \tag{3''}$$

видим, что

$$\text{пред.}\frac{b\mu}{l} = n$$

и величина

$$\sqrt{\frac{gl}{kP}} = \frac{nl}{k}$$

и формула (102) обратится в такую:

$$z = \frac{Al}{k} \cdot n \int_0^t f(\alpha) \sin n(t - \alpha)\, d\alpha$$

которая совпадает с формулою (5'), т. е. что и 1-й случай есть следствие общего.

§ **17.** Не приводя численных примеров, относящихся к чисто артиллерийской и минной практике, заметим, что рассмотренное уравнение встречается во многих физических вопросах; так, изложенная теория относится целиком и без всяких изменений к струнному осциллографу; она находится также в самой тесной связи с распространением электрических колебаний и с действием приемника беспроволочного телеграфа и тому подобными вопросами, относящимися к определению вынужденных колебаний системы, движение которой определяется уравнениями в частных производных, подобных уравнениям движения струны.

АНАЛИЗ ДИАГРАММЫ ДАВЛЕНИЯ В ЦИЛИНДРЕ КОМПРЕССОРА, СНЯТОЙ ИНДИКАТОРОМ ВИККЕРСА

§ **1.** С правильностью показаний индикатора и, особенно, с правильным их истолкованием часто связаны весьма большие интересы, как то можно видеть по следующему примеру.

В январе 1914 г., при испытании на полигоне пробной установки 12-дюймовых орудий 52 калибров длиною, предназначенных для линейных кораблей, снимались специальным индикатором Виккерса диаграммы давления в цилиндре компрессора — получилась кривая, представленная на фиг. 1.

Эта диаграмма показывает, что по записи индикатора наибольшее давление достигает 450 атм. По контракту с Металлическим заводом, построившим эту установку, испытание цилиндров компрессора должно было производиться двойным давлением, т. е. до 900 атм, между тем все 48 компрессоров были уже готовы, рассчитаны они были на нормальное давление 250 атм, т. е. на пробное 500 атм. Замена их новыми повлекла бы расход около 2 500 000 руб. и значительно отдалила бы срок готовности кораблей. Произведенное мною исследование этого вопроса показало, что индикатор работал в условиях фиг. 4 при $\mu = \lambda$ статьи «Некоторые замечания о крешерах и индикаторах» и записал давление, в *два* раза превышающее то, которое имело место в действительности.

§ **2.** Так как подобное обстоятельство может представиться и в других случаях, то привожу сущность упомянутого исследования.

В упомянутой статье показано, что период колебаний поршня индикатора на пружине его выражается формулою

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\mu_1} \cdot \frac{l}{a} \tag{1}$$

в которой μ_1 есть наименьший положительный корень уравнения

$$\mu \cdot \operatorname{tg} \mu = \frac{Q}{P} \tag{2}$$

где Q есть вес пружины, P — вес поршня, l — длина пружины в ненагруженном ее состоянии

$$a = \sqrt{\frac{klg}{Q}} \tag{3}$$

причем k есть мера жесткости пружины, т. е. множитель, на который надо умножать *относительное* сжатие пружины $\frac{z}{l}$, чтобы получить действующее усилие F:

$$F = k\frac{z}{l} \tag{4}$$

В рассматриваемом случае было: $Q = 0.817$ кг; $P = 0.092$ кг; длина пружины $l = 12$ см; жесткость пружины $k = 1165$ кг.

Таким образом

$$a = \sqrt{\frac{1167.12.981}{0.817}} = 4100 \text{ см/сек.}$$

$$\frac{Q}{P} = \frac{0.817}{0.092} = 8.9$$

Наименьший корень уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu = 8.9$$

есть

$$\mu_1 = 1.41$$

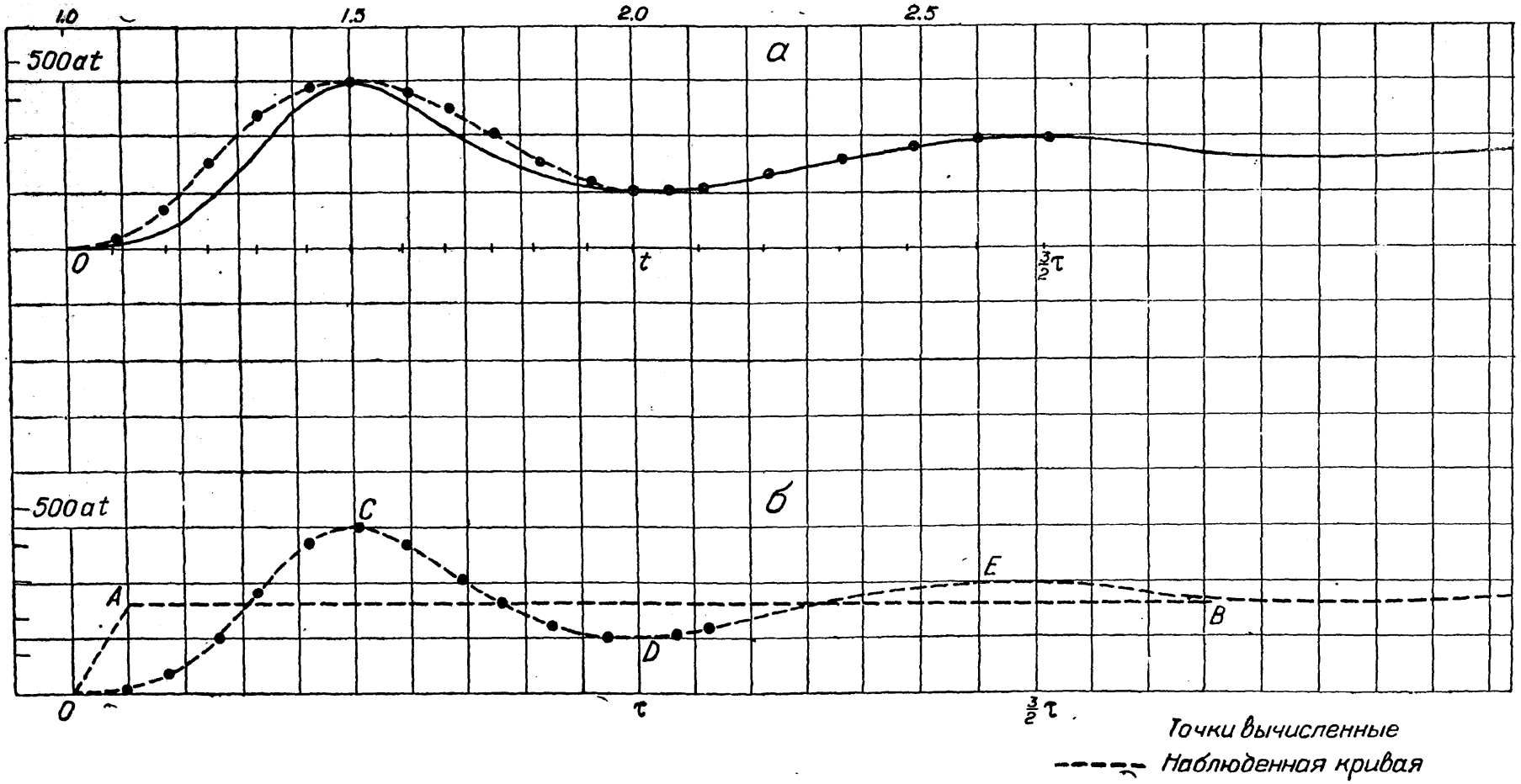
следовательно период основного колебания

$$\tau_1 = \frac{2\pi.12}{1.41.4100} = 0.013 \text{ сек.} \tag{5}$$

По записанной кривой видно, что расстояние между двумя последовательными вершинами волн записи составляет около 11 см, что при скорости отката в этот момент около 8.5 м/сек. и будет соответствовать продолжительности 0.013 сек.

При снятии диаграммы не было произведено велосимметрической записи отката, но при другом выстреле наибольшая скорость составляла 22 фута (7 м) в секунду. Расчетная же величина наибольшей скорости отката составляла до 9 м/сек.

Таким образом видно, что если бы принять даваемую индикатором запись за истинную кривую давления, то надо бы допустить, что это давление претерпевало показанное волнообразное изменение в течение времени


1.0
1.5
2.0
2.5
500at
а
0
t
$\frac{3}{2}\tau$
500at
б
C
A
E
B
D
0
τ
$\frac{3}{2}\tau$
Точки вычисленные
Наблюденная кривая

Фиг. 1.

около 0.013 сек., которое или в точности равно, или весьма близко к периоду свободных колебаний поршня индикатора.

Именно, в этих условиях, как следует из теории прибора, его показания совершенно не согласуются с истинною кривою давления, а представляют наложение свободных колебаний поршня, вследствие инерции его и пружины, на вынужденные, которые пропорциональны действующему давлению.

Примером такой разницы показаний прибора и истинной кривой давления могут служить фиг. 4 статьи «Некоторые замечания о крешерах и индикаторах», на которых сплошною чертою показана истинная кривая давления, пунктиром — та запись, которую доставил бы индикатор при различном отношении периода его свободных колебаний к продолжительности нарастания давления.

Уже сказанного в предыдущем параграфе достаточно, чтобы убедиться, что в рассматриваемом случае прибор Виккерса может служить для нахождения *среднего* давления за время отката, но не может давать закона быстро (по сравнению с 0.013 сек.) протекающих изменений давления с течением времени.

§ **3.** В указанной статье мы рассчитывали смещение поршня при заданном давлении, в нашем случае мы встречаемся с обратною задачей — по данной записи найти давление, или действующее на поршень усилие G.

При этом смещение поршня, которое мы обозначим через z, задано графически и не в функции времени t, а в функции s длины пути, пройденного от начала движения.

Так как нам приходится рассматривать лишь небольшой участок, соответствующий значениям s: от $s = 10$ до $s = 28$ см, то можно считать, что на этом протяжении, или, точнее, на протяжении каждой полуволны, величина s изменяется пропорционально времени, т. е. скорость отката постоянная.

Чтобы воспользоваться для определения G приводимым ниже уравнением (11), пришлось бы величину z, заданную графически, дважды дифференцировать. Такой процесс чрезвычайно не надежен, и чтобы его избежать, следует в подобных вопросах представить самую величину такою функциею времени t, которою эта величина изображалась бы достаточно точно на всем ее протяжении, и уже эту функцию подставлять в уравнение (11). Для выбора такой функции надо сообразоваться с самым характером явления.

Так, в нашем случае мы, очевидно, имеем дело с затухающими колебаниями. Простейший случай таких затухающих колебаний есть тот, когда сопротивление состоит из *постоянного* трения.

В этом случае последовательные амплитуды размахов уменьшаются в арифметической прогрессии. Случай этот разобран в § 21 моего сочинения «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики» и на основании выводов этого параграфа, допустив на время, что давление на поршень постоянно равно N, так что

$$G = N \pm F$$

где F — сила трения и знак + надо брать, когда поршень приближается к своему нулевому положению $[z' < 0]$, и знак —, когда $z' > 0$, мы увидали бы, что z должно представляться формулами такого вида:

$$z_1 = (a - b)\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{\tau}\right) \tag{6}$$

$$z_2 = (a + b) + (a - 3b)\cos\frac{2\pi t_1}{\tau} \tag{7}$$

$$z_3 = (a - b) - (a - 5b)\cos\frac{2\pi t_2}{\tau} \tag{8}$$

причем первая формула относится к первому полуразмаху $[z' > 0]$, вторая — ко второму $[z' < 0]$, третья — к третьему $(z' > 0)$ и время t, t_1, t_2 считается всякий раз от начала этого полуразмаха.

Чтобы найти величины a и b, надо взять последовательные ординаты, соответствующие вершинам и подошвам волн нашей записи. Эти последовательные ординаты суть в миллиметрах на чертеже: 0, 30, 10, 20; таким образом, делая

$$t = \frac{\tau}{2} \quad \text{в формуле (6)}$$

$$t_1 = \frac{\tau}{2} \quad » \quad » \quad (7)$$

$$t_2 = \frac{\tau}{2} \quad » \quad » \quad (8)$$

получим:

$$30 = 2a - 2b$$
$$10 = 4b$$
$$20 = 2a - 6b$$

Все эти три уравнения оказываются совместными и дают

$$a = 17.5; \qquad b = 2.5 \tag{9}$$

Подставляя эти величины в формулы (6), (7) и (8) и вычисляя величины z_1, z_2, z_3 для значений t, t_1 и t_2 через $\frac{1}{12}\tau$, получим табл. 1.

Таблица 1

Время от начала движения поршня	Время от подошвы каждой полуволны	Первая полуволна	Вторая полуволна	Третья полуволна
$\tau/12$	$\tau/12$	мм	мм	мм
0	0	0.0	—	—
1	1	2.0	—	—
2	2	7.5	—	—
3	3	15.0	—	—
4	4	22.5	—	—
5	5	28.0	—	—
6	6.0	30.0	30.0	—
7	1	—	28.7	—
8	2	—	25.0	—
9	3	—	20.0	—
10	4	—	15.0	—
11	5	—	11.3	—
12	6.0	—	10.0	10.0
13	1	—	—	10.7
14	2	—	—	12.5
15	3	—	—	15.0
16	4	—	—	17.5
17	5	—	—	19.3
18	6	—	—	20.0

Вынося эти величины на график и сопоставляя их с действительно наблюденною кривою, видим *систематическое* уклонение на первой и второй полуволне, при этом уклонение это имеет также периодический характер с периодом $\frac{1}{2}\tau$ (фиг. 4 статьи «Некоторые замечания о крешерах и индикаторах»).

По ходу кривой, представляющей это уклонение, видно, что его следует представлять формулою

$$\zeta = C\left[1 - \cos\frac{4\pi t}{\tau}\right] \qquad (10)$$

и действительно, взяв $c = 2.5$ мм и присовокупляя величину ζ, расчисленную по формуле (10), к величинам z_1 и z_2, получим табл. 2, которая показывает, что на своем протяжении величина z, рассчитанная по формулам

$$z = z_1 + \zeta \quad \text{для} \quad t \quad \text{от} \quad 0 \quad \text{до} \quad 6\frac{\tau}{12}$$

$$z = z_2 + \zeta \quad » \quad t \quad » \quad \frac{6\tau}{12} \quad » \quad 12\frac{\tau}{12}$$

$$z = z_3 \quad » \quad t \quad » \quad 12\frac{\tau}{12} \quad \text{до} \quad 18\frac{\tau}{12}$$

практически *совпадает* с наблюденною кривою, так как показанные в следующей таблице разности ординат, вычисленные по формулам и снятые с чертежа, выражаясь десятыми долями миллиметра, не выходят за пределы ширины карандашной линии на подлинной записи индикатора.

Таблица 2

Время от начала движения	Вычисленные ординаты	Ординаты с чертежа	Разности выч. — снят.
$\tau/12$	мм	мм	мм
0	0	0	0
1	0.7	1	—0.3
2	3.8	3	+0.8
3	10.0	9	+1.0
4	17.7	18	—0.3
5	26.7	26	+0.7
6	30.0	30	0.0
7	26.7	26	+0.7
8	21.2	21	+0.2
9	15.0	16.5	—1.5
10	11.2	12.5	—1.3
11	10.0	9.8	+0.2
12	10.0	9.8	+0.2
13	10.7	11.0	—0.3
14	12.5	13	—0.5
15	15.0	15	0.0
16	17.5	17	+0.5
17	19.3	19.5	—0.2
18	20.0	20	0.0

Таким образом, получив аналитическое представление функции z, мы можем воспользоваться для нахождения величины G уравнением движения поршня:

$$Mz'' + \frac{k}{l} z = G = S \cdot f(t) \tag{11}$$

и мы получим:

а) Для первой полуволны:

$$z = (a - b)(1 - \cos nt) - c(1 - \cos 2nt)$$

где:

$$a = 17.5 \text{ мм} = 1.75 \text{ см}$$
$$b = 2.5 \text{ мм} = 0.25 \text{ см}$$
$$c = 2.5 \text{ мм} = 0.25 \text{ см}$$
$$n = 450$$
$$n^2 = 202\,000 = \frac{k}{lM}$$

$$M = [0.092 + 0.465 \cdot 0.817] \frac{1}{981} = \frac{0.472}{981} = 4.8 \cdot 10^{-4}$$

Из уравнения (10) следует

$$\frac{G}{M} = z'' + n^2 z$$

или, по подстановке,

$$\frac{G}{M} = n^2 [a - b - c] - 3n^2 c \cos 2nt \tag{12}$$

б) Для второй полуволны:

$$\left.\begin{aligned} z &= (a + b) + (a - 3b)\cos nt - c(1 - \cos 2nt) \\ \frac{G}{M} &= n^2 (a + b + c) - 3n^2 c \cos 2nt \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

в) Для третьей полуволны:

$$\left.\begin{aligned} z &= a - b - (a - 5b)\cos nt \\ \frac{G}{M} &= n^2 (a - b) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

В формулах (12), (13), (14) надо величины a, b и c выражать в сантиметрах, тогда сила G получится в килограммах.

Присутствие в этих формулах члена $3n^2 c \cos 2nt$ с периодом колебания системы заставляет искать причину этого члена не в изменении давления в цилиндре компрессора, а в особенностях конструкции самого прибора.

Написав равенство

$$\cos 2nt = 1 - 2\sin^2 nt$$

видим, что член

$$-3n^2 c\cos 2nt = -3n^2 c + 6n^2 c\sin^2 nt$$

и значит, напр., для первой полуволны будет

$$\frac{G}{M} = n^2(a - b - 4c) + 6n^2 c\sin^2 nt$$

но при

$$a = 1.75;\ b = 0.25;\ c = 0.25$$

будет

$$a - b - 4d = 0.5$$

и остается

$$\frac{G}{M} = 6n^2 c\cdot\sin^2 nt + 0.5n^2 \qquad (15)$$

точно так же для второй полуволны будет

$$\frac{G}{M} = (a + b - 4c)\cdot n^2 + 6n^2 c\sin^2 nt \qquad (16)$$

В выражениях для z главный член есть первый, и тогда для первой полуволны будет приближенно:

$$z' = z_1' = n(a - b)\sin nt$$

для второй:

$$\frac{dz}{dt} = z' = z_2' = -n(a - 3b)\sin nt$$

следовательно член $6n^2 c\sin^2 nt$ будет приближенно пропорционален z'^2, т. е. второй степени скорости движения поршня, и значит, его надо искать в тех гидравлических сопротивлениях, которые поршень индикатора встречает.

Обращаясь к конструкции прибора, мы заметим, что завинтованный отросток, которым индикатор ввинчивается в трубку, соединяющую его с цилиндром компрессора, прикрыт ввернутой в него особой втулкой, которая снабжена лишь двумя маленькими дырочками, диаметром в 0.05 дюйма, и лишь через эти две маленькие дырочки находящаяся под поршнем индикатора полость сообщается с цилиндром.

Очевидно, что это приспособление сделано, чтобы гасить колебания поршня, не влияя на установившиеся показания прибора.

Обратив внимание на это устройство, мы сейчас же видим, откуда берется член $-3n^2c\cos 2nt$ в формуле (16).

Для второй полуволны поршень движется в сторону к нулевому своему положению, и значит, он должен выталкивать из полости под ним жидкость через две вышеупомянутые дырочки. Ясно, что он будет встречать сопротивление, пропорциональное квадрату скорости своего движения.

Необходимо обратить внимание, что скорость тока жидкости через сказанные дырочки будет весьма велика.

В самом деле, наибольшая скорость поршня будет

$$n(a-3b) = 450 \cdot 1.00 = 450 \text{ см/сек.}$$

Площадь поршня $S = \frac{1}{10}$ кв. дм.

Площадь дырочки $s = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^2 = \frac{1}{500}$ кв. дм., значит отношение

$$\frac{S}{2s} = 25$$

и принимая во внимание сжатие струи, будем иметь, что отношение скоростей протока жидкости и поршня составит не 25, а около 40.

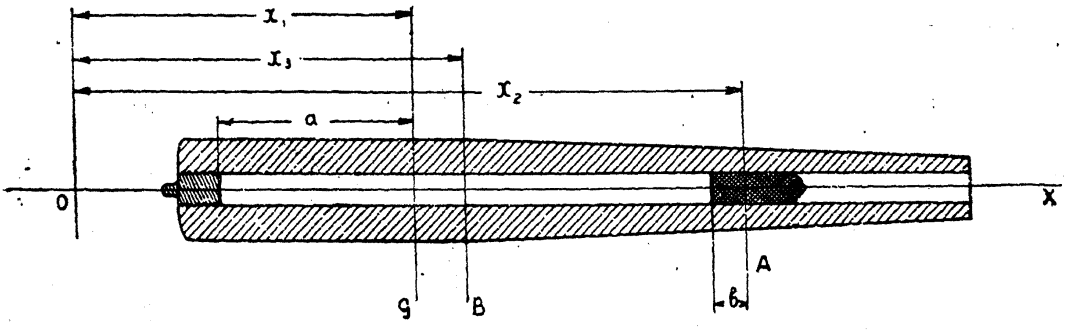
Значит, наибольшая скорость протока составит около 180 м/сек., чему соответствует давление до 300 атм.

Сопоставляя все вышеизложенное, мы можем придти к заключению, что, по самому своему устройству, прибор Виккерса может давать запись лишь установившегося и сравнительно медленно изменяющегося давления, показываемые же им колебания в рассматриваемом случае не служат признаком изменяемости давления, и если бы давление, напр., нарастало так, как показано на фиг. 1 ломаной OAB, то прибор зачертил бы кривую $OCDE$, полученную при испытаниях.

Вообще этот прибор пригоден для определения по его записи среднего давления, а не быстрой изменяемости давления с течением времени, поэтому теперь для записи таких давлений применяют приборы, не обладающие инерцией, как то: катодные осциллографы, пьезокварцевые указатели и т. п. Описание и теория этих приборов не может входить в наш курс, на теории же обыкновенного индикатора мы остановились так подробно потому, что только этот прибор по своей простоте и применяется на судах.

О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОРУДИЯ[1]

В настоящей статье я имею в виду дать изложение теории продольных колебаний ствола орудия и определение тех *продольных* напряжений, которые возникают от этих колебаний независимо от поперечных напряжений, вызываемых давлением газов внутри канала.



Фиг. 1.

§ 1. Рассмотрение поставленного вопроса начнем с установления тех сил, которыми в стволе вызываются продольные напряжения, не зависимые от тех, которые сопровождают поперечные напряжения и вызываются этими последними.

Те продольные напряжения, которые мы имеем в виду изучить, вызываются: 1) силами инерции, развивающимися при откате орудия, 2) продольными упругими колебаниями ствола орудия, происходящими от изменяемости усилия, действующего на дно канала.

Пусть имеется орудие, ось канала которого примем за ось x-ов, произвольную неподвижную на ней точку O — за начало координат (фиг. 1).

В момент времени t положение орудия определяется абсциссою x_1 его центра тяжести G, положение снаряда — абсциссою x_2 его центра тяжести A, положение заряда, который мы предположим уже вполне сгоревшим, —

---

[1] Эта статья была напечатана в томе I «Известий Физического института при Московском научном институте» в 1921 г., но этот том «Известий» давно разошелся и почти недоступен.

абсциссою x_3 центра тяжести B объема, занимаемого газами. Если канал цилиндрический (без каморы), что мы и будем предполагать для простоты выкладки, то точка B лежит посередине между дном снаряда и дном канала.

Обозначим через M_1 — массу орудия, через m_2 — массу снаряда, через m_3 — массу заряда, пренебрежем трением снаряда о нарезы и давлением на поршень компрессора (оно в большей части случаев не поспевает и развиться ранее вылета); тогда будем иметь уравнение

$$M_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = \text{const} \tag{1}$$

ибо при сделанных предположениях центр тяжести всей системы остается неподвижным.

Дифференцируя уравнение (1) два раза по времени, получим

$$M_1 x_1'' + m_2 x_2'' + m_3 x_3'' = 0 \tag{2}$$

но, очевидно,

$$x_3 = \frac{1}{2}(x_2 - b) + \frac{1}{2}(x_1 - a) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(a + b)$$

причем a и b имеют показанные на чертеже значения, следовательно

$$x_3'' = \frac{1}{2} x_1'' + \frac{1}{2} x_2''$$

и уравнение (2) принимает вид

$$\left(M_1 + \frac{1}{2} m_3\right) x_1'' + \left(m_2 + \frac{1}{2} m_3\right) x_2'' = 0 \tag{3}$$

Обозначим через p — давление в канале в момент t и через s — площадь сечения канала, имеем

$$m_2 x_2'' = ps = F(t) \tag{4}$$

причем $F(t)$ есть некоторая заданная функция времени t.

Отсюда, на основании (3), следует

$$\left(M_1 + \frac{1}{2} m_3\right) x_1'' + \left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_3}{m_2}\right) F(t) = 0 \tag{5}$$

Положив, для краткости письма,

$$k = \frac{1 + \frac{1}{2}\frac{m_3}{m_2}}{M_1 + \frac{1}{2} m_3} = \frac{2m_2 + m_3}{2M_1 + m_3} \cdot \frac{1}{m_2} \tag{6}$$

имеем

$$x_1'' = -k F(t) \tag{7}$$

§ 2. Определяемое уравнением (7) движение всего орудия, как твердого тела, вызывает в каждом его поперечном сечении натяжение, величина которого равна произведению из расположенной впереди этого сечения массы ствола на ускорение x_1''.

Пусть x есть абсцисса рассматриваемого сечения и l_1 — длина дульной части впереди центра тяжести G орудия, тогда сказанная масса $\mu(x)$ будет

$$\mu(x) = \rho \int_x^{x_1+l_1} \omega(\xi)\, d\xi \tag{8}$$

где $\omega(\xi)$ есть площадь сечения тела орудия, ρ — плотность металла.

Таким образом в рассматриваемом сечении в момент t будет действовать продольное усилие

$$S(x) = \mu(x) \cdot x_1'' = k\,\mu(x) \cdot F(t) \tag{9}$$

Отсюда видно, что если бы это действие было *статическое*, то соответствующее напряжение металла определилось бы по уравнению

$$\sigma = \frac{1}{\omega(x)}\, k\,\mu(x) F(t) \tag{10}$$

Так как масса m_3 заряда не превышает $\frac{1}{200}$ массы орудия, то вместо точной величины k, даваемой уравнением (6), можно брать приближенно:

$$k = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_3}{m_2}\right)\frac{1}{M_1} \tag{11}$$

и писать

$$\sigma = \frac{1}{\omega(x)}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_3}{m_2}\right)\frac{\mu(x)}{M_1} \cdot F(t) \tag{12}$$

Само собою разумеется, что вычисление величины $\mu(x)$ сейчас же сводится к вычислению продольного распределения массы орудия, считая, напр., абсциссы от дна канала или, лучше, от дульного среза. В этом последнем случае будет

$$\mu(x) = \rho \int_x^{l_1+x_1} \omega(\xi)\, d\xi = \rho \int_0^{x_1+l_1-x} \omega(\xi)\, d\xi = \rho \int_0^{z} \omega(\xi)\, d\xi = \mu(z) \tag{13}$$

и следовательно, натяжение в момент времени t в сечении, отстоящем на z от дульного среза, будет

$$\sigma(z) = \frac{1}{\omega(z)}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_3}{m_2}\right)\frac{\mu(z)}{M_1} F(t) \tag{14}$$

Вычисление интеграла (13)

$$\mu(z) = \rho \int_0^z \omega(\xi)\, d\xi \tag{13}$$

имея чертежи орудия, не представляет никаких затруднений и не требует пояснений.

При статическом действии усилий нет надобности знать изменяемость силы ps с течением времени, т. е. нет надобности знать функцию $F(t)$. Достаточно знать наибольшее ее значение, соответствующее наибольшему давлению в канале, причем *безразлично*, при каком положении снаряда по длине канала оно имеет место. Обозначая это наибольшее значение функции $F(t)$ через $F_{\max}$, будем иметь для наибольшего напряжения в данном сечении формулу

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}(z) &= \frac{1}{\omega(z)}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_3}{m_2}\right)\frac{\mu(z)}{M_1} F_{\max} = \\ &= \frac{s}{\omega(z)}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_3}{m_2}\right)\frac{\mu(z)}{M_1} P_{\max} \end{aligned} \tag{15}$$

где $P_{\max}$ есть наибольшее давление газов в канале.

Эта формула и решает поставленный вопрос о распределении продольных напряжений, при предположении, что действие усилий, вызывающих эти напряжения, *статическое*.

Чтобы при действии на какую угодно упругую систему усилия, изменяющегося с течением времени, можно было это действие, в смысле вызываемых им деформаций и напряжений, считать статическим, необходимо, чтобы период свободных колебаний системы, а если таких периодов много, то наибольший из них, был *мал* по сравнению с продолжительностью *нарастания* усилия от начального нулевого его значения до наибольшего.

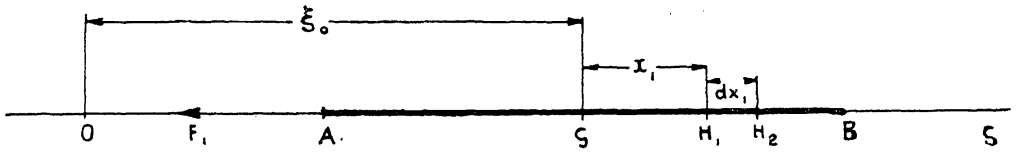
Между тем, по отношению к стволу орудия это предположение вообще не имеет места. Возьмем, напр., морскую 4-дюймовую пушку 60 калибров длиною. Давление достигает в ней наибольшего своего значения приблизительно через 0.003 секунды, продолжительность движения снаряда по каналу около 0.01 секунды. Длина этого орудия 6 м, период основного периода продольных колебаний приблизительно равен продолжительности пробега звуковой волной, бегущей по стали, двойной длины орудия, а это составит около $\frac{12}{5200} = 0.0024$ секунды, т. е. величину, близкую или во всяком случае того же порядка, как продолжительность нарастания давления. В этом случае действие «статическое» и «динамическое» могут разниться весьма

значительно, ибо в стволе возбудятся продольные колебания, напряжения от которых и заменят собою статические.

§ 3. Определение продольных колебаний ствола орудия, если стремиться принять в расчет все особенности его конструкции, представляет задачу чрезмерно сложную и едва ли в общем виде разрешимую, поэтому необходимо разобрать сперва вопрос при разного рода упрощающих дело допущениях, чтобы по анализу этих частных случаев судить хотя бы предположительно об общем.

Простейшим из этих частных случаев является тот, когда ствол состоит из простой цилиндрической трубы одинаковой повсюду толщины стенок. С этого случая и начнем, чтобы на нем пояснить метод решения.

Очевидно, что в этом случае площадь сечения $\omega(\xi)$ есть величина постоянная, которую обозначим через ω, тогда, если пренебречь массою затвора по сравнению с массою тела орудия, будем иметь такую задачу.



Фиг. 2.

К концу A свободного однородного стержня (фиг. 2), *длина коего l, приложена переменная сила* $F_1 = F(t)$; *требуется определить движение стержня, принимая во внимание и упругие колебания его.*

Пусть G есть центр тяжести стержня. Если бы стержень был телом неизменяемым, то перемещение u_0 как центра тяжести, так и всех прочих точек стержня определялось бы уравнением

$$\frac{d^2u_0}{dt^2} = \frac{1}{M_1}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_3}{m_2}\right)F(t) = \frac{1}{M_1}F_1(t) \tag{16}$$

причем сила F, действующая на дно снаряда, увеличена в отношении

$$1 + \frac{1}{2}\frac{m_3}{m_2} \text{ к } 1$$

чтобы получить такое же движение центра тяжести стержня, как и в случае орудия. Начальные условия: при $t = 0$, должны быть

$$u_0 = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{du_0}{dt}\right)_0 = 0$$

Пусть сечение H_1 отвечает абсциссе $x_1 = GH_1$, считаемой от центра тяжести, и абсциссе $\xi_1 = \xi_0 + x_1$, считаемой от неподвижного начала O; но

$$\xi_0 = c + u_0$$

где c есть начальная абсцисса центра тяжести, таким образом для сечения H_2, соответствующего

$$x_2 = x_1 + dx_1$$

будет

$$\xi_2 = \xi_1 + d\xi_1 \quad \text{и} \quad d\xi_1 = dx_1$$

Обозначим через $v = u_0 + u$ — перемещение сечения H_1, тогда перемещение сечения H_2 в тот же момент будет

$$v + \frac{\partial v}{\partial x_1} dx_1 = u_0 + u + \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1$$

Отсюда видно, что натяжение в сечении H_1 будет

$$E\omega \frac{\partial v}{\partial x_1} = E\omega \frac{\partial u}{\partial x_1}$$

и в сечении H_2 оно будет

$$E\omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1 \right)$$

значит на элемент $H_1 H_2$, масса которого есть $\rho\omega\, dx_1$, действуют силы

$$-E\omega \frac{\partial u}{\partial x_1} + E\omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1 \right) = E\omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1$$

и мы получаем уравнение движения

$$(\rho\omega\, dx_1) \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = E\omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1$$

но

$$\frac{\partial v^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{M_1} F_1(t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

подставляя, получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{M_1} F_1(t) \tag{17}$$

причем положено

$$\frac{E}{\rho} = a^2 \tag{18}$$

К уравнению (17) необходимо присоединить условия граничные и начальные: первые — относятся к концам стержня A и B, отвечающим значениям $x_1 = \pm \frac{l}{2}$, вторые — к моменту времени $t = 0$.

В конце $A\left(x_1 = -\frac{l}{2}\right)$ действует сила $F_1(t)$, конец $B\left(x_1 = +\frac{l}{2}\right)$ свободен от всякого напряжения, следовательно величину u надлежит подчинить условиям:

$$(19)\qquad \left.\begin{array}{ll} \text{при } x_1 = -\frac{l}{2} \text{ должно быть } & E\omega \frac{\partial u}{\partial x_1} = F_1(t) \\ \text{» } x_1 = +\frac{l}{2} \text{ » » } & E\omega \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \end{array}\right\} \text{при всяком значении времени } t$$

Начальные же условия суть:

$$(20)\qquad \text{при } t = 0 \text{ должно быть: } u = g(x_1),\quad \frac{\partial u}{\partial t} = f(x_1)$$

где $g(x_1)$ и $f(x_1)$ — заданные функции переменной x_1 для значений этой переменной от $x_1 = -\frac{l}{2}$ до $x_1 = +\frac{l}{2}$.

В нашем частном случае обе эти функции равны нулю для упомянутого участка.

§ 4. Если ставить задачу в такой форме, то ее решение представляет излишние трудности, но можно взять другую задачу, физически равносильную этой и гораздо более простую для решения.

Уравнение (17) представляет *вынужденные* колебания стержня под действием равномерно распределенной по его длине нагрузки, равной

$$-\frac{1}{M_1} F_1(t)$$

на каждую погонную единицу длины стержня.

Вместо силы $F_1(t)$, приложенной к концу

$$x_1 = -\frac{l}{2}$$

возьмем также равномерно распределенную нагрузку $\frac{F_1(t)}{\lambda}$ на каждую погонную единицу для длины на протяжении от $x_1 = b$ до $x_1 = b + \lambda$ и затем определим предел, к которому приближается искомая функция u, когда b приближается к $-\frac{l}{2}$ и λ к нулю.

Для выкладок удобнее, если перенести начало счета абсцисс в конец A; эти абсциссы будем обозначать просто через x, а вышеупомянутую нагрузку, распределенную на участке от b до $b+\lambda$, обозначим через $\varphi(x,t)$, тогда наша задача приведется к такой математической:

Требуется определить функцию u, удовлетворяющую:

1°) *дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{M_1} F_1(t) + \frac{1}{\rho\omega}\varphi(x,t) \tag{21}$$

2°) *граничным условиям:*

$$\left.\begin{array}{l} \text{при } x=0 \text{ должно быть } \dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \\ \text{» } x=l \quad \text{» } \quad \text{» } \dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \end{array}\right\} \text{при всяком значении } t \tag{22}$$

3°) *начальным условиям:*

$$\text{при } t=0 \text{ должно быть: } u=g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}=f(x) \tag{23}$$

причем $g(x)$ и $f(x)$ — заданные функции в промежутке от $x=0$ до $x=l$; в нашем частном случае обе эти функции равны нулю на всем этом протяжении.

Поставленная задача решается непосредственно по данному мною общему способу определения вынужденных колебаний упругих систем линейного протяжения. Способ этот в кратких чертах состоит в следующем: полагаем

$$u = u_1 + u_2 \tag{24}$$

и определяем функции u_1 и u_2, так чтобы u_1 представляло свободные колебания, u_2 — вынужденные. Для этого необходимо подчинить функцию u_1:

1°) *дифференциальному уравнению* того же вида, как (21), но без последнего члена, т. е.

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0 \tag{25}$$

2°) *граничным условиям* тем же, которые относятся к функции u, т. е. в нашем случае:

$$\left.\begin{array}{l} \text{при } x=0 \text{ должно быть } \dfrac{\partial u_1}{\partial x}=0 \\ \text{» } x=l \quad \text{» } \quad \text{» } \dfrac{\partial u_1}{\partial x}=0 \end{array}\right. \tag{26}$$

3°) *начальным условиям* тем же, которые относятся к функции u.

Что касается функции u_2, представляющей вынужденные колебания, то она должна удовлетворять:

1°) *дифференциальному уравнению* (21), т. е.

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = -\frac{F_1(t)}{M_1} + \frac{1}{\rho\omega}\varphi(x, t) \tag{27}$$

2°) *граничным условиям:*

$$\begin{aligned} &\text{при } x = 0 \text{ должно быть } \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \\ &\text{» } x = l \text{ » » } \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

3°) *начальным условиям:*

$$\text{при } t = 0 \text{ должно быть: } u_2 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0 \tag{29}$$

Решение надо начинать с нахождения функции u_1 под видом

$$u_1 = \sum X \cdot T \tag{30}$$

где X есть функция одной только переменной x и T — функция только t, причем каждый член этой суммы должен удовлетворять дифференциальному уравнению (25), граничным условиям (26), а вся сумма должна удовлетворять начальным условиям.

Таким образом имеем

$$T''X - a^2 X'' T = 0 \tag{31}$$

Этому уравнению нельзя удовлетворить иначе, как положив:

$$T'' = -a^2 m^2 T \tag{32}$$

$$X'' = -m_1^2 X \tag{33}$$

где m — постоянная величина пока произвольная.

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} T &= A\cos mat + B\sin mat \\ X &= C\cos mx + D\sin mx \end{aligned} \tag{34}$$

Граничные условия дают:

$$X'(0) = mD = 0$$
$$X'(l) = mC\sin ml = 0 \tag{35}$$

Отсюда следует

$$m = \frac{n\pi}{l} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots n, \ldots) \tag{36}$$

Таким образом будет:

$$X_n = \cos\frac{n\pi x}{l} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots n, \ldots) \tag{37}$$

$$T_n = A_n \cos n\frac{\pi at}{l} + B_n \sin n\frac{\pi at}{l} \tag{38}$$

ибо без нарушения общности все постоянные произвольные C можно брать равными 1.

Необходимо еще заметить, что при $n = 0$ будет:

$$X_0 = 1$$
$$T_0 = A_0 + B_0 t \tag{39}$$

Таким образом получится:

$$u_1 = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{n=\infty} \cos\frac{n\pi x}{l}\left(A_n \cos n\frac{\pi at}{l} + B_n \sin n\frac{\pi at}{l}\right) \tag{40}$$

где A_0, B_0, A_n, B_n $(n = 1, 2, \ldots n, \ldots)$ — произвольные постоянные, которые определяются по начальным условиям, именно будет:

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l g(\xi)\, d\xi \tag{41}$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\cdot d\xi \tag{42}$$

$$B_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)\, d\xi \tag{43}$$

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\cdot d\xi\ . \tag{44}$$

Как видно в нашем частном случае, когда на всем протяжении от $x = 0$ до $x = l$ функции

$$g(x) = f(x) = 0$$

то будет и

$$u_1 = 0$$

§ **5.** Вынужденные колебания ищем под видом

$$u_2 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \cos\frac{n\pi x}{l} \cdot S_n(t) \tag{45}$$

где $S_n(t)$ — неизвестные функции t.

Для этого представляем сперва вторую часть уравнения (27) под видом суммы

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} H_n(t) \cos\frac{n\pi x}{l} = -\frac{1}{M_1} F_1(t) + \frac{1}{\rho\omega} \varphi(x, t) \tag{46}$$

тогда будет:

$$H_0(t) = \frac{1}{l}\int_0^l \left(-\frac{1}{M_1} F_1(t) + \frac{1}{\rho\omega}\varphi(\xi, t)\right) d\xi$$

$$H_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{1}{\rho\omega}\varphi(\xi, t)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi \tag{47}$$

и величина $S_n(t)$ будет определяться уравнением:

$$S_n'' + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} S_n = H_n(t) \qquad (n = 1, 2, \ldots n) \tag{48}$$

$$S_0'' = H_0(t) \tag{49}$$

и начальными условиями: при $t = 0$ должно быть:

$$\begin{aligned} &S_n(0) = 0; \quad S_n'(0) = 0 \\ &S_0(0) = 0; \quad S_0'(0) = 0 \end{aligned} \tag{50}$$

В нашем случае функция $\varphi(\xi, t)$ такова:

при $\quad 0 \leqq \xi \leqq b \qquad \varphi(\xi, t) = 0$

» $\quad b \leqq \xi \leqq b + \lambda \qquad \varphi(\xi, t) = \frac{1}{\lambda} F_1(t)$

» $\quad (b + \lambda) \leqq \xi \leqq l \qquad \varphi(\xi, t) = 0$

следовательно будет:

$$H_0(t) = -\frac{F_1(t)}{M_1} + \frac{1}{l\rho\omega}\int_b^{b+\lambda}\frac{1}{\lambda}F_1(t)\cdot d\xi = -\frac{1}{M_1}[F_1(t) - F_1(t)] = 0$$

$$H_n(t) = \frac{2}{l\rho\omega}\int_b^{b+\lambda}\frac{1}{\lambda}F_1(t)\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi =$$

$$= \frac{2}{l\rho\omega}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{l}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi(b+\lambda)}{l} - \sin\frac{n\pi b}{l}\right]F_1(t) =$$

$$= \frac{4}{M_1}\frac{l}{n\pi\lambda}\sin\frac{n\pi\lambda}{2l}\cos\frac{n\pi\left(b+\frac{1}{2}\lambda\right)}{l}\cdot F_1(t) = G_n F_1(t)$$

причем

$$G_n = \frac{4}{M_1}\cdot\frac{l}{n\pi\lambda}\sin\frac{n\pi\lambda}{2l}\cos\frac{n\pi\left(b+\frac{1}{2}\lambda\right)}{l}$$

Таким образом, для определения S_0 и S_n, имеем уравнения

$$S_0'' = H_0 = 0$$

и

$$S_n'' + \frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}S_n = G_n F_1(t)$$

решения коих, удовлетворяющие условиям (50), суть:

$$S_0 = 0$$

(51)
$$S_n = \frac{lG_n}{an\pi}\int_0^t F_1(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\,d\tau$$

Но величина

$$\frac{l}{an\pi}G_n = \frac{4l}{an\pi M_1}\cdot\frac{l}{n\pi\lambda}\cdot\sin\frac{n\pi\lambda}{2l}\cos\frac{n\pi\left(b+\frac{1}{2}\lambda\right)}{l}$$

в пределе при $b=0$, $\lambda=0$ будет

$$\lim_{b=0,\,\lambda=0}\left(\frac{l}{an\pi}G_n\right) = \frac{2l}{an\pi M_1}$$

Следовательно, предельное значение $S_n(t)$ будет

(52)
$$S_n(t) = \frac{2l}{an\pi M_1}\int_0^t F_1(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau$$

и искомая функция u_2 есть

$$u_2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} S_n(t) \cos \frac{n\pi x}{l} \tag{53}$$

причем суммирование взято от $n = 1$ до $n = \infty$, ибо $S_0 = 0$.

Выражение (53) для u_2 и решает поставленную задачу.

§ **6.** Хотя входящая в состав выражения u_2 сумма и может быть найдена в простой замкнутой форме (способ нахождения этой суммы совершенно подобен тому, который изложен в этом параграфе), но мы на этом останавливаться не будем, ибо нас не столько интересуют величины перемещений различных точек стержня при его продольных упругих колебаниях, сколько происходящие от них напряжения, выражаемые формулою

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

На основании формулы (53) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n\pi}{l} S_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} =$$

$$= -\frac{2}{aM_1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \int_0^t F_1(\tau) \sin \frac{an\pi}{l} (t - \tau)\, d\tau$$

полагая

$$a(t - \tau) = \xi$$

получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2}{aM_1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \int_0^{at} F_1\left(t - \frac{\xi}{a}\right) \sin \frac{n\pi \xi}{l} \cdot d\xi$$

но

$$a^2 = \frac{E}{\rho}; \quad M_1 = \rho \omega l$$

поэтому будет

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\omega} \Phi(x, t) \tag{54}$$

причем

$$\Phi(x_1, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^{at} F_1\left(t - \frac{\xi}{a}\right) \sin \frac{n\pi \xi}{l} \cdot d\xi \tag{55}$$

Функция $\Phi(x, t)$ может быть найдена в простой замкнутой форме на основании свойств рядов Фурье и функций, ими представляемых.

В самом деле, известно, что сумма

$$(56) \qquad \sum_1 = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{n=\infty}{}' \sin\frac{n\pi x}{l} \cdot \int_0^l f(\xi) \sin\frac{n\pi\xi}{l} \cdot d\xi$$

представляет такую функцию $\Omega(x)$, которая в промежутке от $x=0$ до $x=l$ равна $f(x)$, в промежутке от $x=0$ до $x=-l$ эта функция равна $-f(x)$, вне же этого основного участка, т. е. от $x=-l$ до $x=+l$, функция Ω определяется условием периодичности $\Omega(x+2l)=\Omega(v)$. В местах разрыва ряд представляет значение

$$\frac{1}{2}[\Omega(c+0)+\Omega(c-0)]$$

Нам величина $\frac{\partial u}{\partial x}$ нужна только для участка от $x=0$ до $x=l$, поэтому мы ограничимся ее составлением для этого участка.

1°) Положим, что частное значение t_1 переменной t таково, что

$$0 < at_1 < l$$

тогда, если взять функцию $f(\xi)$ так, чтобы было

$$\begin{array}{lll} \text{для} & 0 \leqq \xi \leqq at_1 & f(\xi) = F_1\left(t_1 - \frac{\xi}{a}\right) \\ \text{»} & at_1 \leqq \xi \leqq l & f(\xi) = 0 \end{array}$$

то очевидно, что интеграл

$$\int_0^l f(\xi) \sin\frac{n\pi\xi}{l} d\xi = \int_0^{at_1} F_1\left(t_1 - \frac{\xi}{a}\right) \sin\frac{n\pi\xi}{l} d\xi$$

и следовательно, сумма $\sum_1$ представляет такую функцию $\Phi(x, t_1)$, которая:

$$(57) \qquad \begin{array}{lll} \text{для} & 0 \leqq x \leqq at_1 & \Phi(x, t_1) = F_1\left(t_1 - \frac{x}{a}\right) \\ \text{»} & at_1 \leqq x \leqq l & \Phi(x, t_1) = 0 \end{array}$$

2°) Пусть частное значение t_2 переменной t таково, что

$$l \leqq at_2 \leqq 2l$$

тогда положим

$$2l - at_2 = h$$

величина h будет меньше l.

Очевидно будет

$$\int_0^{at_2} = \int_0^{l} + \int_{l}^{at_2}$$

т. е.

$$\int_0^{at_2} F_1\left(t_2 - \frac{\xi}{a}\right) \sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi = \int_0^{l} F_1\left(t_2 - \frac{\xi}{a}\right) \sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi +$$

$$+ \int_{l}^{at_2} F_1\left(t_2 - \frac{\xi}{a}\right) \sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi$$

Сделаем в последнем интеграле

$$2l - \xi = \xi_1$$

тогда будет

$$\int_{l}^{at_2} F_1\left(t_2 - \frac{\xi}{a}\right) \sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi = -\int_{2l-at_2}^{l} F_1\left(t_2 - \frac{2l-\xi}{a}\right) \sin\frac{n\pi\xi}{l} \cdot d\xi$$

Следовательно, рассматриваемая сумма разложится на две и будет:

$$\sum_1 = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin\frac{n\pi x}{l} \cdot \int_0^{l} F_1\left(t_2 - \frac{\xi}{a}\right) \sin\frac{n\pi\xi}{l} \cdot d\xi$$

$$- \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin\frac{n\pi x}{l} \cdot \int_{2l-at_2}^{l} F_1\left(t_2 - \frac{2l-\xi}{a}\right) \sin\frac{n\pi\xi}{l} \cdot d\xi$$

Первая сумма представляет такую функцию $\Phi_1(x, t_2)$, которая в промежутке от $x = 0$ до $x = l$ равна

$$F_1\left(t_2 - \frac{x}{a}\right)$$

вторая сумма представляет такую функцию $\Phi_2(x, t_2)$, которая

для $0 \leqq x \leqq 2l - at_2$ $\quad \Phi_2(x, t_2) = 0$

» $2l - at_2 \leqq x \leqq l$ $\quad \Phi_2(x, t_2) = F_1\left(t_2 - \frac{2l-x}{a}\right)$

следовательно функция $\Phi(x, t_2)$ определяется условиями:

для $0 \leqq x \leqq 2l - at_2$ $\quad \Phi(x, t_2) = F_1\left(t_2 - \frac{x}{a}\right)$

» $2l - at_1 \leqq x \leqq l$ $\quad \Phi(x, t_2) = F_1\left(t_2 - \frac{x}{a}\right)$

$$- F_1\left(t_2 - \frac{2l-x}{a}\right)$$

3°) Пусть

$$2l < at_3 < 3l$$

тогда будет

$$\int_0^{at_3} = \int_0^{l} + \int_l^{2l} + \int_{2l}^{at_3}$$

соответственно этому и сумма $\sum_1$ разобьется на три суммы, и нетрудно видеть, что первая сумма представляет такую функцию $\Phi_1(x, t_3)$, которая в промежутке от $x = 0$ до $x = l$ равна

$$F_1\left(t_3 - \frac{x}{a}\right)$$

вторая сумма, после преобразования интеграла к такому виду, чтобы в нем верхний предел равнялся l, будет со знаком и представляет собою на протяжении от $x = 0$ до $x = l$ функцию $\Phi_2(x, t_3)$, которая равна

$$F_1\left(t_3 - \frac{2l + x}{a}\right)$$

и наконец, третья сумма представляет функцию $\Phi_3(x, t_3)$, которая в промежутке от $x = 0$ до $x = at_3 - 2l$ равна

$$F_1\left(t_3 - \frac{2l + x}{a}\right)$$

и в промежутке от $x = at_3 - 2l$ до $x = l$ равна нулю.

Таким образом будет:

для $0 \leqq x \leqq at_3 - 2l$

$$\Phi(x, t_3) = F_1\left(t_3 - \frac{x}{a}\right) - F_1\left(t_3 - \frac{2l - x}{a}\right) + F_1\left(t_3 - \frac{2l + x}{a}\right)$$

для $at_3 - 2l \leqq x \leqq l$

$$\Phi(x, t_3) = F_1\left(t_3 - \frac{x}{a}\right) - F_1\left(t_3 - \frac{2l - x}{a}\right)$$

4°) Совершенно так же увидим, что если

$$3l < at_4 < 4l$$

то функция $\Phi(x, t_4)$ будет:

для $0 \leqq x \leqq 4l - at_4$

$$\Phi(x, t_4) = F_1\left(t_4 - \frac{x}{a}\right) - F_1\left(t_4 - \frac{2l-x}{a}\right) + F_1\left(t_4 - \frac{2l+x}{a}\right)$$

для $4l - at_4 \leqq x \leqq l$

$$\Phi(x, t_4) = F_1\left(t_4 - \frac{x}{a}\right) - F_1\left(t_4 - \frac{2l-x}{a}\right) + F_1\left(t_4 - \frac{2l+x}{a}\right) - F_1\left(t_4 - \frac{4l-x}{a}\right)$$

и т. д.

Как видно, этими формулами вопрос решается *вполне*, ибо функция $F_1(t)$ предполагается заданной для всего времени движения снаряда по каналу, причем это задание может быть и графическое.

§ 7. Понятно, что когда функция $F_1(t)$ задана графически, то и функцию $\Phi(x, t)$ надо строить графически же. Это построение, на основании выведенных выше формул, выполняется весьма просто.

Для наглядности сделаем сперва сводку формул, определяющих функцию $\Phi(x, t)$ для различных значений времени t:

1°) $0 < at_1 \leqq l$

$0 < x \leqq at_1 \ . \ . \ . \ \Phi(x, t_1) = F_1\left(t_1 - \frac{x}{a}\right)$

$at_1 \leqq x \leqq l \ . \ . \ . \ \Phi(x, t_1) = 0.$

2°) $l \leqq at_2 \leqq 2l$

$0 \leqq x \leqq 2l - at_2 \ . \ . \ . \ \Phi(x, t_2) = F_1\left(t_2 - \frac{x}{a}\right)$

$2l - at_2 \leqq x \leqq l \ . \ . \ .$

$$\Phi(x, t_2) = F_1\left(t_2 - \frac{x}{a}\right) - F_1\left(t_2 - \frac{2l-x}{a}\right)$$

3°) $0 \leqq x \leqq at_3 - 2l$

$$0 \leqq x \leqq at_3 - 2l \ . \ . \ . \ \Phi(x_1, t_3) = F_1\left(t_3 - \frac{x}{a}\right) + F_1\left(t_3 - \frac{2l+x}{a}\right)$$

$$at_3 - 2l \leqq x \leqq l \ . \ . \ . \ \Phi(x, t_3) = F_1\left(t_3 - \frac{x}{a}\right) - F_1\left(t_3 - \frac{2l-x}{a}\right)$$

и т. д.

Для составления графика следует принять определенное соответствие масштабов для времени t и абсцисс x_1, именно следует эти масштабы избрать так, чтобы на чертеже промежуток времени

$$T = \frac{a}{l}$$

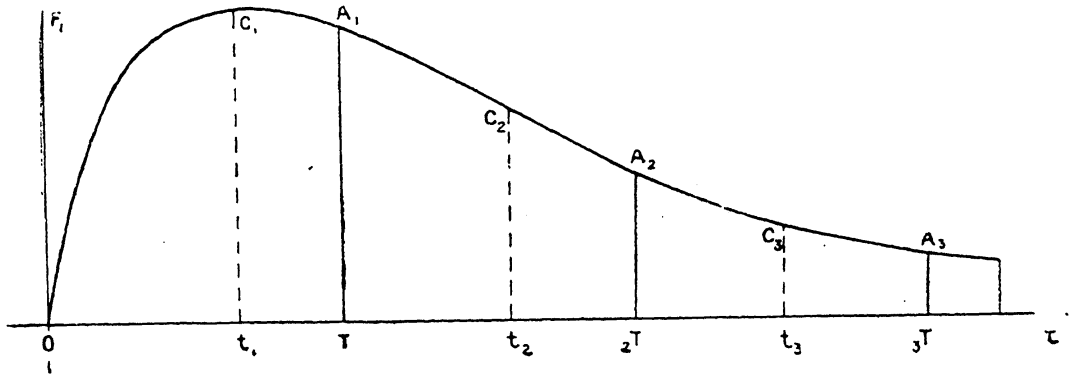
в течение которого звуковая волна, бегущая по металлу со скоростью a, проходит путь, равный длине l орудия (стержня), изображалась бы такою же длиною, как и l.

Затем напряжения

$$E\frac{\partial u}{\partial x}$$

которые пропорциональны $\Phi(x, t)$ или $F_1(t)$, изображать тою же кривою $F_1(t)$, но только читать ее ординаты в соответственном масштабе.

Пусть кривая $OA_1A_2A_3, \ldots$ (фиг. 3а) изображает в принятом масштабе функцию $F_1(t)$. Помечаем на оси времен точки T, $2T$, $3T$ и т. д. Проводим на отдельном чертеже прямую Ox, откладываем по ней длину $AB = l = OT$ с первого чертежа и приводим концевые ординаты.



Фиг. 3а.

Положим, что надо построить функцию $F(x, t_1)$, тогда на первом чертеже (фиг. 3а) откладываем длину Ot_1, изображающую промежуток времени t, и на втором чертеже (фиг. 3б) откладываем длину $AO_1 = Ot_1$. С кривой $F_1(t)$ снимаем шаблон и, повернув этот шаблон точкою O вправо, прикладываем его так, чтобы точка O легла в O_1 и ось t совмещалась бы с осью x^{ob}, тогда точка t_1 ляжет в A_1 и ордината t_1C_1 ляжет по оси $A_1\Phi$; по шаблону очерчиваем кривую $C'O_1$. Эта кривая и представит функцию

$$F_1\left(t_1 - \frac{x}{a}\right)$$

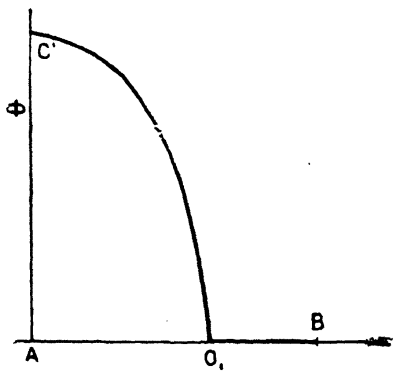
которой равна $\Phi(x, t_1)$ для значений x от $x = 0$ до $x = at_1 = AO_1$. Для дальнейшего протяжения O_1B эта функция равна нулю: напряжение еще не поспело распространиться до конца B орудия (стержня).

Положим теперь, что промежуток времени t_2 такой, что $l < at_2 < 2l$.

Выносим на первый чертеж (фиг. 3а) точку t_2 по оси Ot, на втором чертеже (фиг. 3b) проводим ось Ax и концевые ординаты через точки A и B; при-

кладываем шаблон кривой, изображающей $F_1(t)$, так чтобы ординаты $t_2 C_2$ легли на оси $A\Phi$ и точка O легла на оси Ax в точку O_2 такую, что $AO_2 = Ot_2$, и прочерчиваем пунктирно часть C_2D кривой между осью O_2F и концевою ординатою — этот участок представит функцию

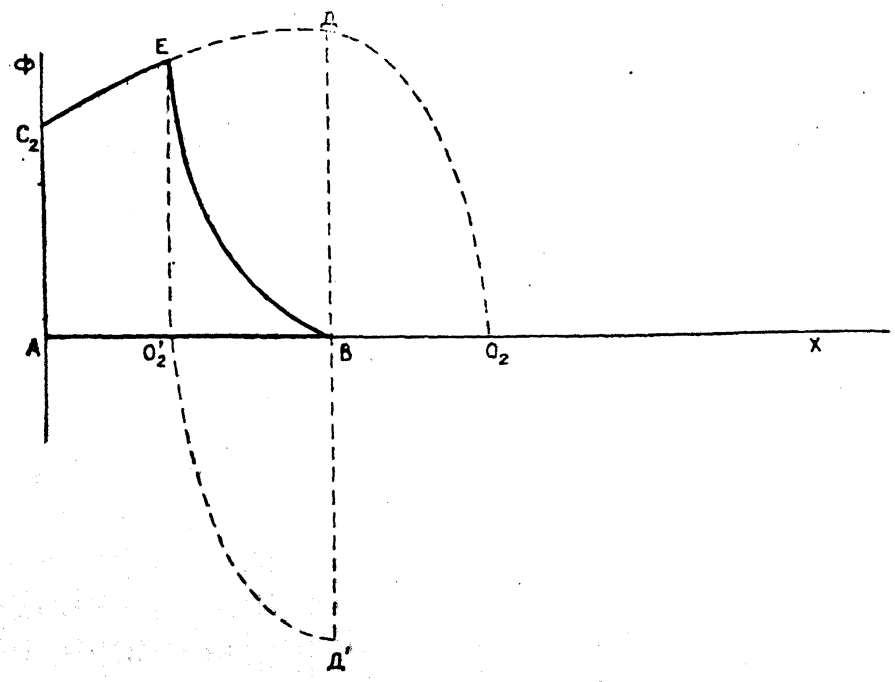
$$F_1\left(t_2 - \frac{x}{a}\right)$$



Фиг. 3б.

в промежутке от $x = 0$ до $x = l$; продолжение этой кривой заняло бы положение DO_2 (прочерчивать это положение нет надобности). Помечаем на шаблоне ординату, проходящую через точку D, и оборачиваем шаблон так, чтобы точка O легла в O_2' и точка D—в D', и обчерчиваем пунктирно кривую $O_2'D'$; эта кривая представит функцию

$$-F_1\left(t_2 - \frac{2l - x}{a}\right)$$



Фиг. 3в.

По пунктирным кривым C_2D и $O_2'D'$ строим сплошную кривую C_2EB, ординаты которой представляют алгебраическую сумму ординат кривых C_2D и $O_2'D'$. Полученная кривая E_2EB и представляет функцию $\Phi(x_1, t_2)$ для рассматриваемого значения t_2 времени t.

Физический смысл этого построения таков: распространяющееся по стволу напряжение, достигнув дульного среза (свободный конец стержня), отражается, изменившись на противуположное, и распространяется с тою же скоростью в обратную сторону, причем к рассматриваемому моменту t_2 эта отраженная волна достигнет точки O_2', симметричной с точкой O_2, в которую она пришла бы, если бы стержень был неограниченный.

Совершенно так же для значения t_3 времени такого, что $2l < at_3 < 3l$, наношу на первом чертеже (фиг. 3а) точку t_3, помечаю на шаблоне ординату t_3C_3, накладываю шаблон на второй чертеж (фиг. 3г) так, чтобы эта ордината шла по $A\Phi$, а начальная точка O шаблона лежала в точке O_3 на оси Ox. Прочерчиваю пунктирно часть C_3D кривой между осью $A\Phi$ и концевою ординатою, помечаю на шаблоне ординату, проходящую через точку D, оборачиваю шаблон так, чтобы точка O_3 легла в O_3' и точка D легла бы в D', прочерчиваю пунктирно кривую C_1D'. Между осью $O\Phi_1$ и концевою ординатою помечаю ординату, проходящую через точку C_1, оборачиваю шаблон так, чтобы точка O_3' легла в O_3'' и точка C — в C_1', прочерчиваю кривую C_1O_3'' пунктирно. По ординатам пунктирных кривых $C'O_3''$, C_3D, C_1D' строю сплошную кривую EHB, ординаты которой равны алгебраической сумме ординат трех предыдущих кривых, кривая EHB и представит функцию $\Phi(x, t_3)$. Как уже сказано, оборот шаблона соответствует отражению волны от конца стержня; построение, как видно, состоит в том, чтобы волну, которая в неограниченном стержне заняла бы положение C_3DO_3, собрать отражениями с переменой при всяком отражении знака на участок между концами стержня, иначе — между дульным и казенным срезом орудия.

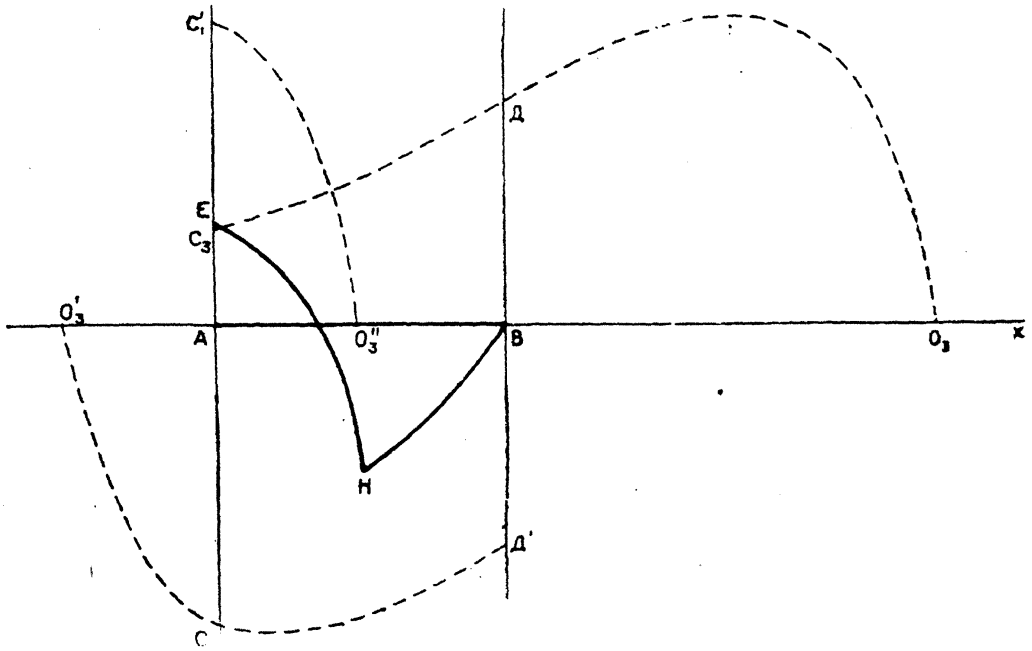
Отсюда ясно, каким образом выполнить построения для любого момента времени.

§ 8. Физическое истолкование полученного решения делает его почти очевидным a priori: приложенная к концу $x = 0$ сила $F_1(t)$ возбуждает в этом конце натяжение, ей соответствующее, этому натяжению отвечает определенное относительное удлинение материала (расширение), это расширение (волна расширения) бежит по длине стержня со скоростью распространения звука по металлу, достигает свободного конца, от него отражается с переменою фазы на π, т. е. превращается в волну сжатия, и бежит обратно к первому концу, достигнув которого вновь отражается опять-таки с переменою фазы на π, т. е. обратившись вновь в волну расширения, и т. д., причем действие силы служит постоянным источником все новых и новых волн. Все эти волны не выходят из стержня, а отражаясь от концов его,

образуют, накладываясь друг на друга, сложную систему равнодействующей волны напряжений.

§ 9. Если бы встретилась надобность построить не только величины напряжений, но и самих перемещений, то для каждого данного момента времени мы имеем соотношение

$$u = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx$$



Фиг. 3г.

Но, вместо того, чтобы интегрировать всякий раз кривую $\frac{\partial u}{\partial x}$, проще сперва по заданной кривой $F_1(t)$ построить ее интегральную кривую

$$F(t) = \int_0^t F_1(\tau)\, d\tau$$

а затем с этою кривою поступить совершенно так же, как мы поступали с кривою $F_1(t)$, — получится распределение упругих перемещений по длине ствола, в масштабе, определяемом величиною $E\omega$.

Если бы потребовались и абсолютные положения каждого сечения по отношению к неподвижному началу, то к исчисленным величинам u надо

присовокупить величину u_0 перемещения всего стержня как неизменяемого тела, рассчитав u_0 по формуле

$$u_0 = \frac{1}{M_1} \int_0^t d\tau \int_0^t F_1(\tau)\, d\tau$$

Таким образом случай колебаний однородного упругого стержня, возбуждаемых действием переменной силы, приложенной к одному из его концов, а значит, и простейший случай продольных колебаний ствола орудия, получает полное решение, весьма наглядное, простое и удобное для практического пользования им.