АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СОБРАНИЕ ТРУДОВ

АКАДЕМИКА

А. Н. КРЫЛОВА

V

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА — ЛЕНИНГРАД
1937

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Апрель 1937 г.

Непременный секретарь академик *Н. Горбунов*

Редактор издания акад. А. Н. Крылов

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Приближенное численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений	1
О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем	93
О применении способа последовательных приближений к нахождению решения некоторых дифференциальных уравнений колебательного движения	139
О формах равновесия сжатых стоек при продольном изгибе	181
О расчете балок, лежащих на упругом основании	227
Об определении критических скоростей вращающегося вала	363
О распространении тока по кабелю	391
Нагревание масляного кабеля при коротком замыкании	419
Две заметки по механике	437
О вычислении коэффициентов ряда Фурье	453
О динамическом уравновешивании роторов гироскопов	459
О силах инерции и начале Даламберта	495
Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben	513
On the Hatchet Planimeter	539
Sur un intégrateur des équations différentielles ordinaires	547

ПРИБЛИЖЕННОЕ ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предисловие

Эта статья служила предметом сообщения в союзе Морских инженеров на годовом его собрании 1917 г. и вошла в «Известия союза Морских инженеров» за этот год.

Но «Известия союза Морских инженеров» имеют распространение лишь в сравнительно тесном кругу инженеров этой специальности, вопрос же об интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений есть вопрос общий, представляющий значительный интерес не только для инженеров других специальностей, но и для физиков.

В самом деле, к обыкновенным дифференциальным уравнениям приводят все вопросы динамики, когда надо определить движение материальной точки, системы точек, твердого тела или системы таких тел. К таким же уравнениям приводят вопросы о равновесии гибких нитей, о равновесии тонких упругих стержней, о форме капель жидкости и вообще об определении поверхности жидкости под влиянием капиллярных сил, когда эта поверхность есть поверхность вращения, вопросы о взаимной индукции и распространении токов по линейным проводникам и т. д. Кроме этого, интегрирование многих уравнений в частных производных, встречающихся в математической физике, приводится к интегрированию уравнений обыкновенных.

В весьма многих случаях эти уравнения не подходят под те немногие «типы», которые интегрируются в конечном виде или квадратурах, и часто бывает, что для дальнейшего решения ограничиваются частными случаями вопроса, иногда же в самом уравнении отбрасывают некоторые члены или же принимают некоторые параметры за постоянные и таким образом заведомо вводят погрешности, оценить влияние которых невозможно.

Вот в этих-то случаях приближенное численное интегрирование уравнений, притом такое, в котором не приходится дифференцировать входящие

в состав уравнения известные функции переменной независимой, и представляет важное подспорье при физических исследованиях. Здесь эти заданные функции могут быть вводимы в уравнение, пользуясь графическою кривою, их представляющею, или эмпирически составленною таблицею их значений. Таким образом уравнение может быть взято в виде, соответствующем опыту; численное решение его может быть выполнено с точностью, которая также соответствует точности опытов, и следовательно, теоретические и наблюденные результаты явятся вполне между собою сравнимыми и позволят с уверенностью судить о правильности или ошибочности тех гипотез, которые послужили для составления самого дифференциального уравнения.

Методы такого численного интегрирования почти не излагаются в современных курсах анализа, преследующих не столько практические прикладные цели, сколь отвлеченно математическую, так сказать философскую сторону науки, поэтому эти методы не пользуются общею известностью, и зачастую у учащихся остается от курса дифференциальных уравнений то впечатление, что если предложенное уравнение ни к одному из «типов» не подходит, то с ним ничего и поделать нельзя.

В виду этих соображений, в ответ на лестное для меня предложение проф. академика П. П. Лазарева принять участие в «Архиве физических наук», я предложил поместить настоящую статью, которая по своему содержанию хотя и не относится к физике, но может облегчить приложения математики к исследованию физических вопросов.

Самую статью я оставил в том виде, в каком она была первоначально написана, и лишь в конце добавил один пример чисто физического уравнения, относящегося к определению формы капли.

По поводу этого примера необходимо сказать, что в сочинении «An Attempt to Test the Theories of Capillary Action... by *Fr. Bashforth* with an Explanation of the Method of Integration Employed by *J. C. Adams*», (Cambridge, 1883) этот знаменитый астроном излагает методу интегрирования дифференциальных уравнений, пользуясь конечными разностями. Но надо иметь в виду, что Адамс был столь же замечательный вычислитель, как и теоретик. Об этом свидетельствуют, напр., его статьи: «The Calculation of Bernoullian Numbers from B_{32} to B_{62}» или «Notes on the Value of Eulers Constant». Достаточно сказать, что числитель наименьшего из чисел Бернулли, им вычисленных, B_{32}, есть целое число в 42 цифры, а последнего B_{62} — в 110 цифр, что Эйлерова постоянная им вычислена с 273 знаками, — чтобы видеть, что человек, не обладающий специальною спо-

собностью и необыкновенным навыком, таких вычислений выполнить не может.

Возможно, что, в силу привычки к вычислениям с весьма большою точностью, Адамс и в излагаемом им способе приближенного интегрирования стремление к точности предпочел простоте самого процесса вычисления — его самого оно не затрудняло. Между тем, применение для приближенного интегрирования дифференциальных уравнений той формулы, которою он пользуется, делает самый процесс вычисления гораздо более сложным, а главное требующим гораздо более напряженного внимания, нежели по той, которую Адамс приводит, но которою не пользуется. Эта последняя формула является основною в нашей статье, и основанный на применении аналогичной формулы прием был разработан Штёрмером в его исследованиях о северных сияниях, хотя он на Адамса нигде не ссылается. Стоит только сличить нашу схему вычислений с процессом, описанным на стр. 46—49 книги Bashforth'a, чтобы видеть, как, пожертвовав незначительно точностью, оказалось возможным достигнуть крайней простоты процесса. Все наше вычисление выполнено целиком при помощи 50-сантиметровой логарифмической линейки; у Адамса — семизначными логарифмами, полученные же результаты отличаются от чисел Адамса не более, как на 2 или 3 единицы нашего последнего (четвертого после запятой) знака, что составляет менее, нежели $\frac{1}{1000}$ мм в размере капли и, значит, более чем достаточно для рассматриваемого физического вопроса.

Вообще, при производстве всяких численных вычислений надо руководствоваться правилом; точность вычисления должна соответствовать точности данных и той практической потребности, для которой вычисление производится. Этим правилом надо руководствоваться и при численном интегрировании уравнений; соблюдение его значительно сберегает труд и время.

Настоящее издание в составе монографий по техническим вопросам, изданных Железнодорожною миссией, является третьим. От предыдущих оно отличается добавлением двух примеров: одного — относящегося к вычислению траектории снаряда, другого — включенного по предложению проф. Ю. В. Ломоносова, относящегося к движению поезда.

Издание это произведено по распоряжению проф. Ю. В. Ломоносова средствами Миссии, и я считаю своим долгом выразить ему глубочайшую благодарность за оказанную мне честь включением этой статьи в число монографий, изданных Миссией.

Берлин. Июнь 1923.

§ 1. При разработке конструкций некоторых судовых устройств и механизмов приходится иметь дело и с такими вопросами динамики и теории сопротивления материалов, которые требуют решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

При этом по большей части нет надобности непременно иметь общий интеграл уравнения с входящими в него буквенно произвольными постоянными, а достаточно найти частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, и притом для ограниченного промежутка изменяемости аргумента. Для практики нет также надобности и в аналитическом представлении искомой функции, а достаточно составить таблицу ее значений или построить кривую, ее представляющую.

Приемы такого численного решения дифференциальных уравнений редко излагаются в курсах, между тем по сути дела эти приемы не сложнее вычисления определенных интегралов.

В настоящей заметке я имею в виду изложить наиболее удобные и общие способы такого численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

§ 2. Как для большей части вопросов интегрального исчисления, и здесь начало положено Эйлером, который уделяет главу VII тома I «Institutiones Calculi Integralis» изложению способа приближенного численного решения дифференциального уравнения первого порядка, к которому всегда можно свести все дело.

Итак, положим, что искомая функция y определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

и начальными условиями: при $x = a$ должно быть $y = b$. Выбрав достаточно малый промежуток h, можно принять, что пока x заключается между a и $a + h$, то y мало отличается от b, и производная сохраняет постоянное значение $f(a, b)$, так что для этого промежутка будет

$$y = b + (x - a) f(a, b) = b + (x - a) \cdot A_0$$

и следовательно, для конца его, когда $x = a + h$, будет

$$y = b + A_0 \cdot h = b_1$$

Таким образом мы получили приближенное значение $y = b_1$, соответствующее значению $x = a_1 = a + h$.

Совершенно так же, полагая

$$A_1 = f(a_1, b_1)$$

получим для $x = a_2 = a + 2h$ величину

$$y = b_2 = b_1 + A_1 \cdot h$$

и т. д., таким образом составится таблица соответствующих значений, переменных x и y:

x	y	$y' = f(x, y)$
a	b	A_0
a_1	b_1	A_1
a_2	b_2	A_2
. . .	. . .	. . . . .
a_n	b_n	A_n

причем

$$A_k = f(a_k, b_k)$$

и

$$b_{k+1} = b_k + hA_k$$

Изложив этот прием, Эйлер говорит: «чем меньше промежутки между последовательными значениями x, тем точнее определяются все остальные величины; тем не менее, вследствие большого числа, накопление и этих малых погрешностей может достигнуть значительной величины.

«Погрешность при этом вычислении происходит от того, что на протяжении каждого отдельного промежутка обе переменные x и y принимаются сохраняющими свои постоянные значения, соответствующие началу этого промежутка, так что и значение функции $f(x, y)$ остается постоянным, поэтому: чем быстрее значение этой функции изменяется при переходе от одного промежутка к следующему, тем большую можно ожидать погрешность. Это невыгодное обстоятельство имеет место обыкновенно там, где значение $f(x, y)$ или уничтожается, или же становится бесконечным».

Чтобы устранить это «невыгодное обстоятельство», Эйлер поступает так: положим, для простоты письма, что $f(x, y)$ обращается в нуль при $x = a$, $y = b$, тогда надо положить:

$$x = a + \xi, \quad y = b + \eta$$

наше уравнение примет вид

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f(a + \xi,\ b + \eta) \tag{2}$$

и начальное условие будет: при $\xi = 0$ должно быть $\eta = 0$, вместе с тем при $\xi = 0$ будет и $\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right) = f(a, b) = 0$, поэтому, положив

$$\eta = \alpha_1 \cdot \xi^n + \alpha_2 \cdot \xi^p + \ldots \tag{3}$$

подставляем величину (3) в уравнение (2) и определяем показатели n, p, ... и коэффициенты α_1, α_2, ... так, чтобы уравнение (2) имело место тождественно, иными словами по известному приему разлагаем величину η в ряд по возрастающим степеням ξ.

В том случае, когда $f(a, b) = \infty$, можно уравнение (1) писать в виде

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{1}{f(a + \xi,\ b + \eta)} = F(\xi, \eta)$$

функция $F(\xi, \eta)$ при $\xi = 0$ и $\eta = 0$ будет обращаться в нуль, и значит, надо будет взять разложение вида

$$\xi = \beta_1 \eta^k + \beta_2 \eta^n + \ldots$$

и, найдя коэффициенты β_1, β_2, ... и показатели k, n, ..., этот ряд «обратить», т. е. выразить η в виде ряда, расположенного по степеням ξ.

Так, Эйлер берет такой пример:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{x^2 - y^2} \tag{*}$$

и условие: при $x = a$ должно быть $y = a$.

Положив

$$x = a + \xi, \quad y = a + \eta$$

получим

$$a^2 \frac{d\xi}{d\eta} = 2a(\xi - \eta) + (\xi^2 - \eta^2) \tag{**}$$

делая затем

$$\xi = \alpha_1 \eta^n + \alpha_2 \eta^p + \ldots$$

имеем

$$a^2 [n\alpha_1 \eta^{n-1} + p\alpha_2 \eta^{p-1} + \ldots] =$$
$$= 2a [-\eta + \alpha_1 \eta^n + \alpha_2 \eta^p +] \ldots + [-\eta^2 + \alpha_1^2 \eta^{2n} + \ldots]$$

Отсюда следуют уравнения:

$$n-1=1 \qquad a^2 n\alpha_1 = -2a$$
$$p-1=n \qquad pa^2\alpha_2 = 2a\alpha_1 - 1$$

которые дают: $n=2$, $p=3,\ldots$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{a}; \quad \alpha_2 = -\frac{1}{a^2}\cdots$$

и значит,

$$\xi = -\frac{1}{a}\eta^2 - \frac{1}{a^2}\eta^3 + \ldots \tag{3}$$

Легко видеть, что если положить $\xi = -t^2$, то η будет разлагаться в ряд вида

$$\eta = At + Bt^2 + Ct^3 + \ldots \tag{4}$$

и вместо того, чтобы находить A, B, C, ... через обращение ряда (3), проще вернуться к самому уравнению (**) и, подставив в него вместо ξ и η их величины, искать A, B, C, ..., что даст

$$\eta = \sqrt{a}\cdot t - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{9}\frac{1}{\sqrt{a}}t^3 + \ldots$$

или

$$y - a = \sqrt{a(a-x)} + \frac{1}{3}(a-x) + \frac{1}{9}\frac{1}{\sqrt{a}}(a-x)^{\frac{3}{2}} + \cdots$$

значит x должно быть меньше a, чтобы y оставалось вещественным, и при $x = a_1 = a - h$ будет

$$y = b_1 = a + \sqrt{ah} + \frac{1}{3}h + \frac{1}{9}\frac{1}{\sqrt{a}}h^{\frac{3}{2}} + \cdots$$

Пару значений $x = a_1 = a - h$; $y = b_1$ можно теперь принять за исходную и применять вышеуказанный процесс.

§ **3**. Чтобы устранить первый из указанных им недостатков, т. е. что функция $f(x, y)$ принимается для каждого промежутка за постоянную, тогда как на самом деле она претерпевает изменения, в особенности если промежутки не весьма малы, Эйлер предполагает, что в смежности с каждым из рассматриваемых значений переменной независимой искомая функция y разлагается по Тейлорову ряду, так что будет вообще

$$y_{k+1} = y_k + \frac{x-a_k}{1}y_k' + \frac{(x-a_k)^2}{1\cdot 2}y_k'' + \frac{(x-a_k)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot y_k''' + \ldots \tag{4}$$

выражения же производных составляют, пользуясь данным уравнением

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

дифференцируя его последовательно и заменяя y' его величиною, так что будет:

$$\begin{aligned} y'' &= f_x' + y' \cdot f_y' = f_x' + f \cdot f_y' \\ y''' &= f_{xx}'' + 2ff_{xy}'' + f^2 \cdot f_{yy}'' + f_y' [f_x' + f \cdot f_y'] \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{5}$$

Полагая в этих выражениях $x = a_k$, $y_k = b_k$, найдем значения y_k', y_k'', y_k''', ... и, делая $x = a_{k+1} = a_k + h$, по формуле (4) найдем $y = b_{k+1}$, т. е. по паре (a_k, b_k) получим следующую пару (a_{k+1}, b_{k+1}).

Таким образом все дело сводится к вычислению количества

$$b_{k+1} - b_k = A_k h + B_k \frac{h^2}{2} + C_k \frac{h^3}{6} + \cdots \tag{6}$$

иными словами к вычислению «коэффициентов» A_k, B_k, C_k, ..., которые находятся или по формуле (5), или, как замечает Эйлер, «и не производя дифференцирования», а при помощи подстановки

$$y = b_k + \eta \qquad x = a_k + \xi$$

в уравнение $y' = f(x, y)$ и разложения величины в ряд по степеням ξ, чему Эйлер и дает затем примеры.

§ **4.** Изложенная метода Эйлера была затем развита Коши, который начинает с того, что по заданному дифференциальному уравнению

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

и начальному условию: при $x = x_0$ должно быть $y = y_0$, составляет ряд равенств:

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= (x_1 - x_0) f(x_0, y_0) \\ y_2 - y_1 &= (x_2 - x_1) f(x_1, y_1) \\ y_3 - y_1 &= (x_3 - x_2) f(x_2, y_2) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y - y_{n-1} &= (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

и берет их сумму

$$\begin{aligned} y - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0) + (x_2 - x_1) f(x_1, y_1) + \cdots \\ \cdots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned} \tag{7}$$

т. е. делает то же самое, что и Эйлер, но затем Коши доказывает, что при соблюдении некоторых ограничительных условий относительно величины промежутка $X - x$ и функции $f(x, y)$, рассматриваемая сумма, при неопределенном возрастании числа n и уменьшении каждой из разностей $x_k - x_{k-1}$, имеет конечный и определенный предел, представляющий такую функцию переменной X, которая удовлетворяет уравнению

$$F'(X) = f[X, F(X)] \tag{8}$$

равносильному уравнению (1). Кроме того, он показал, как найти пределы погрешности, которую мы сделаем, если промежуток $X - x_0$ подразделить на какое-нибудь конечное число частей, иначе когда разности $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ... будут иметь конечные значения, как это и есть в методе Эйлера.

Но вычисление этих пределов погрешности не представляет практических удобств, поэтому доказательство Коши имеет, главным образом, теоретическое значение, как первое строгое доказательство того, что всякое дифференциальное уравнение первого порядка имеет общий интеграл.

§ **5.** Пикар в первом томе своего «Traité d'Analyse», изложив вышеупомянутое доказательство Коши существования общего интеграла, дает свое собственное доказательство, основанное на применении способа последовательных приближений.

Сущность способа Пикара состоит в следующем: положим, что дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

и начальные условия: при $x = x_0$ должно быть $y = y_0$.

Вместо этого уравнения, для первого приближения Пикар берет такое:

$$y_1' = f(x, y_0)$$

откуда следует

$$y_1 = \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx + y_0$$

Для второго приближения он полагает

$$y_2' = f(x, y_1)$$

так что

$$y_2 = \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx + y_0$$

вообще $(k+1)$-ое приближение получают по предыдущему, взяв вместо предложенного уравнения такое:

$$y'_{k+1} = f(x, y_k)$$

т. е.

$$y_{k+1} = \int_{x_0}^{x} f(x, y_k)\,dx + y_0 \tag{9}$$

Пикар затем доказывает, что когда функция $f(x, y)$ удовлетворяет некоторым весьма общим условиям и разность $x - x_0$ не превышает некоторой границы, то описанный процесс есть процесс сходящийся, так что по мере возрастания значка k функция y_{k+1} стремится к некоторому пределу $F(x)$, для которого будет

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f[x, F(x)]\,dx + y_0 \tag{*}$$

т. е. величина

$$y = F(x)$$

удовлетворяет предложенному уравнению, и при $x = x_0$ принимает требуемое значение y_0.

Уравнение (*) заключает в себе критерий, по которому можно судить при практическом вычислении, достигнута ли предельная функция $F(x)$, или нет, и если нет, то велика ли погрешность, так как пока предел не достигнут, последующее приближение не будет совпадать с предшествующим ему.

Пикар развил свою методу не в целях практического вычисления, а как методу, дающую строгое доказательство существования общего интеграла. Эта метода одинаково применима и к системе обыкновенных уравнений; так, напр., для системы трех уравнений

$$\begin{aligned} u' &= f_1(x, u, v, w) \\ v' &= f_2(x, u, v, w) \\ w' &= f_3(x, u, v, w) \end{aligned} \tag{10}$$

и начальных условий: при $x = x_0$ должно быть $u = u_0$, $v = v_0$, $w = w_0$, последовательные приближения находятся по формулам:

$$u_{k+1} = \int_{x_0}^{x} f_1(x, u_k, v_k, w_k)\,dx + u_0$$

$$v_{k+1} = \int_{x_0}^{x} f_2(x, u_k, v_k, w_k)\,dx + v_0 \qquad (11)$$

$$w_{k+1} = \int_{x_0}^{x} f_3(x, u_k, v_k, w_k)\,dx + w_0$$

§ **6.** Приведенный выше процесс последовательных приближений остается сходящимся и в том случае, если принято за исходное не первое приближение по Пикару, а какое-либо иное более близкое, напр. получаемое по методе Эйлера, и чем это приближение ближе к истинному, тем быстрее будет достигнута предельная функция $F(x)$ с избранною степенью точности вычислений.

Но если брать исправленную методу Эйлера, т. е. ту, где он берет не только первый, но и следующие члены разложения в Тейлоровом ряду, то практическое выполнение вычислений часто оказалось бы длинным и потребовало бы много излишней работы. Чтобы этого избежать, было предложено два способа, из коих один принадлежит профессору Геттингенского университета Рунге, другой — профессору университета в Христиании Штёрмеру.

§ **7.** Метода Рунге в применении к уравнению

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

состоит в развитии приведенных выше слов Эйлера: «так как все дело сводится к нахождению количества

$$b_{k+1} - b_k = A_k \cdot h + B_k \frac{h^2}{2} + C_k \frac{h^3}{6} + \cdots \qquad (12)$$

что может быть сделано и не производя дифференцирования», для чего Эйлер применяет затем подстановку и разложение в ряд при помощи неопределенных коэффициентов.

В § 3 приведены общие выражения производных y'' и y''', получаемые дифференцированием предложенного уравнения; полагая в них

$$x = a_k, \qquad y = b_k,$$

получим:

$$A_k = f(a_k, b_k)$$
$$B_k = f_x'(a_k, b_k) + A_k f_y'(a_k, b_k)$$
$$C_k = f''_{xx}(a_k, b_k) + 2A_k f''_{xy}(a_k, b_k) + A_k^2 f''_{yy}(a_k, b_k) + B_k f_y'(a_k, b_k)$$

или, положив для краткости

$$f_x'(a_k, b_k) = p_k; \; f_y'(a_k, b_k) = q_k$$
$$f''_{xx}(a_k, b_k) = r_k; \; f''_{xy}(a_k, b_k) = s_k; \; f''_{yy}(a_k, b_k) = t_k$$

и

$$f''_{xx}(a_k, b_k) + 2A_k f''_{xy}(a_k, b_k) + A_k^2 f''_{yy}(a_k, b_k) = P_k$$
$$Bf_y'(a_k, b_k) = Q_k$$

будем иметь:

$$B_k = p_k + A_k q_k$$
$$C_k = P_k + Q_k.$$

Из формулы (12) видно, что если при вычислении разности $b_{k+1} - b_k$ ограничиваться членами третьего порядка относительно h, то нет надобности вычислять в отдельности величины A_k, B_k, C_k, а достаточно вычислить сумму

$$A_k h + \frac{1}{2} B_k h^2 + \frac{1}{6} C_k h^3 = N_k \cdot h$$

причем

$$N_k = A_k + \frac{1}{2} B_k h + \frac{1}{6} C_k h^2$$

Чтобы вычислить величину этой суммы, или, что то же, множителя N_k, обратимся сперва к чертежу.

Положим, что координаты точки M суть:

$$x = OG_k = a_k; \; y = G_k M = b_k$$

и MM_1 есть истинная интегральная кривая, проходящая через точку M, т. е. кривая, ордината произвольной точки которой, рассматриваемая как функция абсциссы x, удовлетворяет уравнению

$$y' = f(x, y)$$

Вообразим касательную к этой кривой в точке M и отметим точки пересечения H_1 и F_1 этой касательной с среднею ординатою $E_k C$ и с крайнею $C_{k+1} M_1$.

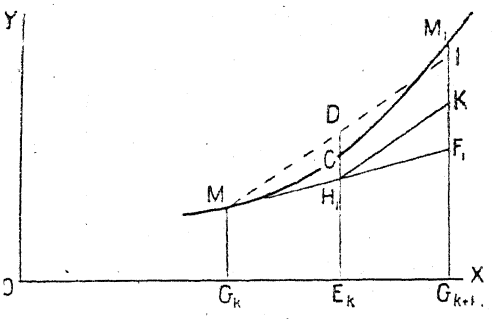
Очевидно, что тангенс угла наклонения этой касательной есть $A_k = f(a_k, b_k)$ и ординаты точек H_1 и F_1 суть

$$H_1 E_k = \eta_k = b_k + \frac{1}{2} A_k h \text{ и } G_{k+1} F_1 = b_k + A_k h$$

Подставляя во вторую часть уравнения (1), вместо x, величину $a_k + \frac{1}{2} h$ и вместо y величину η_k, получим уклон касательной к интегральной кривой, проходящей через H_1 в этой точке, обозначим тангенс этого уклона через α_k, так что будет

$$\alpha_k = f\left(a_k + \frac{1}{2} h, b_k + \frac{1}{2} A_k h\right)$$

проведем прямую $H_1 K$ под этим уклоном и отметим точку ее пересечения K с ординатою $G_{k+1} M_1$. Так как точка H_1 весьма близка к точке C (расстояние $H_1 C$ второго порядка относительно h), то прямая $H_1 K$ будет приблизительно параллельна касательной в точке C к интегральной кривой, проходящей через M, значит если провести через точку M прямую, параллельную $H_1 K$, то точка ее пересечения J будет лежать весьма близко к M_1, во всяком случае гораздо ближе точки F_1, соответствующей первому Эйлеровскому приближению. Вместе с тем очевидно, что точка C интегральной кривой будет лежать между точками H_1 и D и притом весьма близко к середине между ними. После этого общего объяснения качественной стороны дела составим выражения ординат точек M, H_1, D и J и уклонов касательных к интегральным кривым, проходящим через эти точки.



Фиг. 1.

Очевидно, что координаты наших точек будут:

$$M(a_k, b_k), \quad H_1\left(a_k + \frac{1}{2} h, b_k + \frac{1}{2} A_k h\right)$$

$$J(a_k + h, b_k + \alpha_k h); \quad D\left(a_k + \frac{1}{2} h, b_k + \frac{1}{2} \alpha_k h\right)$$

Обозначая, соответственно, через γ_k и δ_k — тангенсы уклонов касательных в точках D и J, будем иметь:

$$\gamma_k = f\left(a_k + \frac{1}{2}h,\ b_k + \frac{1}{2}\alpha_k h\right)$$

$$\delta_k = f(a_k + h,\ b_k + \alpha_k h)$$

Разовьем теперь величины α_k, γ_k, δ_k, разлагая их по степеням буквы h и удерживая в этих разложениях лишь члены до второго порядка включительно.

Имеем:

$$a_k = f(a_k, b_k) + \frac{1}{2}h[f_x'(a_k, b_k) + A_k f_y'(a_k, b_k)] + \frac{1}{8}h^2[f''_{xx}(a_k, b_k) +$$

$$+ 2A_k f''_{xy}(a_k, b_k) + A_k^2 f''_{yy}(a_k, b_k)] = A_k + \frac{1}{2}B_k h + \frac{1}{8}P_k h^2$$

$$\gamma_k = f(a_k, b_k) + \frac{1}{2}h[f_x'(a_k, b_k) + \alpha_k f_y'(a_k, b_k)] + \frac{1}{8}h^2[f''_{xx}(a_k, b_k) +$$

$$+ 2\alpha_k f''_{xy}(a_k, b_k) + \alpha_k^2 f''_{yy}(a_k, b_k)] = f(a_k, b_k) + \frac{1}{2}h[f_x'(a_k, b_k) +$$

$$+ A_k f_y'(a_k, b_k)] + \frac{1}{8}h^2[f''_{xx}(a_k, b_k) + A_k f''_{xy}(a_k, b_k) + A_k^2 f''_{yy}(a_k, b_k)] +$$

$$+ \frac{1}{4}h^2 B_k f_y'(a_k, b_k) = A_k + \frac{1}{2}B_k h + \frac{1}{8}h^2 P_k + \frac{1}{4}h^2 Q_k$$

Заменив в выражении γ_k величину $\frac{1}{2}h$ через h, получим

$$\delta_k = A_k + B_k h + \frac{1}{2}h^2 P_k + h^2 Q_k$$

Нам надо составить величину

$$N_k = A_k + \frac{1}{2}B_k h + \frac{1}{6}(P_k + Q_k)h^2$$

стоит только взять выражение

$$\frac{1}{6}[A_k + 4\alpha_k + \delta_k]$$

аналогичное тому трехчлену, который составляется из ординат при вычислении площадей по формуле Симпсона, чтобы убедиться, что

$$N_k = \frac{1}{6}[A_k + 4\alpha_k + \delta_k] \qquad (13)$$

и значит, ордината b_{k+1} будет

$$b_{k+1} = b_k + N_k h$$

Итак, процесс перехода от пары значений $x = a_k$; $y = b_k$ к следующей паре $x = a_{k+1} = a_k + h$; $y = b_{k+1}$ выполняется следующим образом:

1) *Вычисляется величина* A_k *по формуле*

$$A_k = f(a_k, b_k) \tag{14}$$

2) *Вычисляются величины* α_k и δ_k *по формулам:*

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k &= f\left(a_k + \frac{1}{2}h,\ b_k + \frac{1}{2}A_k h\right) \\ \delta_k &= f(a_k + h,\ b_k + \alpha_k h) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

3) *Составляется множитель* N_k *по формуле*

$$N_k = \frac{1}{6}[A_k + 4\alpha_k + \delta_k] \tag{16}$$

4) Величина b_{k+1} будет

$$b_{k+1} = b_k + N_k \cdot h \tag{17}$$

Это есть метода Рунге.

Заметим здесь же, что полезно вычислять еще и величину

$$\gamma_k = f\left(a_k + \frac{1}{2}h,\ b_k + \frac{1}{2}\alpha_k h\right) \tag{18}$$

чтобы иметь контроль, а также ординату и уклон касательной в промежуточной точке C кривой, тогда имеется возможность сразу вдвое уменьшить промежуток при исправлении интегральной кривой по методе Пикара, как это можно будет видеть на численном примере, приведенном ниже.

Главный недостаток методы Рунге состоит в том, что приходится вычислять, по крайней, мере три серии значений функции $f(x, y)$, и значит, когда предложенное уравнение сколь-нибудь сложное, то эти вычисления потребуют затраты большого труда, в значительной доле напрасного, как это будет видно по примеру, приводимому ниже.

§ 8. С 1890 г., по почину норвежского проф. Биркеланда, был снаряжен ряд экспедиций в полярные страны для производства систематических наблюдений над северными сияниями и магнитными возмущениями (бурями), чтобы точно установить связь между этими явлениями, которая была уже подмечена давно.

В последних экспедициях принимал участие и проф. К. Штёрмер, который разработал математическую теорию северных сияний, вполне

объясняющую все наблюдаемые явления. По этой теории северные сияния образуются наэлектризованными частицами (частицами электричества), выбрасываемыми Солнцем, в особенности теми извержениями, которые нам представляются в виде солнечных пятен. Эти частицы, двигаясь с громадными скоростями, попадают в сферу магнитного поля Земли и, достигая верхних, весьма разреженных слоев земной атмосферы, вызывают свечение, составляющее северное сияние; с другой стороны, они производят, подобно электрическому току, магнитные возмущения.

Для установления этой теории, Штёрмер предпринял громадную вычислительную работу, именно — определение вида траекторий, описываемых разного рода наэлектризованными частицами в магнитном поле Земли.

Траектории эти весьма разнообразны и сложны, представляя кривые не плоские, а иногда и спирали с несколькими завитками. Дифференциальные уравнения движения частиц не только не интегрируются в конечном виде, но не интегрируются и в квадратурах, и Штёрмеру пришлось прибегнуть к приближенному способу численного интегрирования. Для этой цели он развил особый прием, по которому им самим и его ассистентами было вычислено около 150 траекторий разных видов для изучения их типов, причем для каждой траектории приходилось вычислять по 100—120 точек, т. е. по 300—360 координат. Эта работа потребовала около 5000 рабочих часов, и следовательно, метода Штёрмера в достаточной мере проверена на практике.

Кроме того, в основе своей она весьма близка к тем методам, которые применяются в небесной механике под названием «методы механических квадратур» для вычисления возмущений планет и комет; последняя проверена столетнею практикою специально вычислительных учреждений как при главных обсерваториях, так и при издании астрономических таблиц и альманахов.

Мы изложим методу Штёрмера, не следуя буквально за ее автором, а дадим более элементарный и общий вывод его основной формулы, указав опять-таки ее связь с методою Эйлера.

§ **9.** Штёрмер развивает свою методу для уравнений второго порядка, не содержащих первой производной неизвестной функции, и для систем таких уравнений, мы же начнем с уравнений первого порядка, и вместо того, чтобы приводить, как то делает Штёрмер, всякое уравнение к системе уравнений второго порядка рассматриваемого им вида, мы будем приводить их к системе уравнений первого порядка. Но, кроме того, мы покажем отдельно и самую методу Штёрмера для непосредственного интегрирова-

ния уравнений второго порядка, как наиболее важных для вопросов динамики.

Итак, положим, что попрежнему предложено уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

и дано начальное условие: при $x = a$ должно быть $y = b$. Мы видели при изложении методы Эйлера, что все дело сводится к вычислению

$$b_{k+1} - b_k = A_k h + \frac{1}{2} B_k h^2 + \frac{1}{6} C_k h^3 + \frac{1}{24} D_k h^4 + \ldots \tag{*}$$

разности между значением b_k неизвестной y, соответствующим значению $x = a + kh = a_k$, и значением b_{k+1}, соответствующим a_{k+1}, причем безразлично, каким способом эта разность вычисляется.

Так Эйлер вычисляет в отдельности коэффициенты A_k, B_k, C_k, D_k, ..., составляя по данному уравнению последовательные производные искомой функции.

Рунге, ограничиваясь первыми тремя членами вместо производных B_k, C_k второго и третьего порядка, вычисляет три значения производной первого порядка непосредственно по данному уравнению, но для разных пар значений x и y, и по ним составляет требуемый трехчлен.

Штёрмер не ограничивается, подобно Рунге, первыми тремя членами в разложении (*), — его метода дает возможность брать сколько угодно членов этого разложения, причем непосредственно по данному уравнению производится вычисление лишь *одной серии* значений величин A_k, а не нескольких, как того требовала бы метода Рунге. Вычисление значений производных высших порядков B_k, C_k, D_k, ..., как то делается в методе Эйлера, совсем не производится, эти величины исключаются составлением «разностей» первого, второго, третьего,... порядка величин $A_k h$.

Этот последний процесс требует лишь вычитаний, и по своей простоте не может быть даже сравниваем с процессом непосредственного вычисления по данному уравнению лишних значений величин A_k или значений B_k, C_k, D_k, ..., по уравнениям, получаемым из данного дифференцированием.

Итак, положим, что составляются параллельно две таблицы I и II, из которых первая содержит последовательные значения неизвестной y и их первые разности, вторая — последовательные значения величины

$$\eta_n = A_n h = f(a_n, b_n) \cdot h$$

и их разности первого, второго, третьего и т. д. порядков, причем для простоты мы ограничимся лишь третьим порядком.

Физический ин-т Библиотека Академии Наук СССР

Положим, что в этих таблицах мы дошли до величин, соответствующих значению $x = a_n = a + nh$, так что наши таблицы будут такого вида:

I

n	x	y	Δy
. .	. . .	. .	. . .
$n-3$	a_{n-3}	b_{n-3}	
			Δb_{n-3}
$n-2$	a_{n-2}	b_{n-2}	
			Δb_{n-2}
$n-1$	a_{n-1}	b_{n-1}	
			Δb_{n-1}
n	a_n	b_n	

II

η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$
. . .	. . .	. . .	. . .
η_{n-3}			
	$\Delta\eta_{n-3}$		
η_{n-2}		$\Delta^2\eta_{n-4}$	
	$\Delta\eta_{n-2}$		$\Delta^3\eta_{n-4}$
η_{n-1}		$\Delta^2\eta_{n-3}$	
	$\Delta\eta_{n-1}$		$\Delta^3\eta_{n-3}$
η_n		$\Delta^2\eta_{n-2}$	

Разности вписываются в промежуточную строку между теми двумя числами, для коих они берутся, так:

$$\Delta b_{n-3} = b_{n-2} - b_{n-3}; \qquad \Delta b_{n-2} = b_{n-1} - b_{n-2} \quad \text{и т. д.}$$
$$\Delta\eta_{n-3} = \eta_{n-2} - \eta_{n-3}; \qquad \Delta\eta_{n-2} = \eta_{n-1} - \eta_{n-2} \quad \text{и т. д.}$$
$$\Delta^2\eta_{n-3} = \Delta\eta_{n-2} - \Delta\eta_{n-3}; \quad \Delta^2\eta_{n-2} = \Delta\eta_{n-1} - \Delta\eta_{n-2} \quad \text{и т. д.}$$

Весь вопрос и состоит в том, каким образом добавить к этим двум таблицам по одной косой строке снизу, т. е. перейти от n к $n+1$.

Мы этого достигнем, если получим каким бы то ни было способом величину Δb_n, ибо, придав ее к b_n, будем иметь

$$b_{n+1} = b_n + \Delta b_n$$

и первая таблица будет заполнена. Вместе с тем сейчас же прибавится одна косая строка и ко второй таблице: в самом деле, по данному уравнению

$$y' = f(x, y)$$

полагая в нем

$$x = a_{n+1} \qquad y = b_{n+1}$$

находим

$$y'_{n+1} = A_{n+1} = f(a_{n+1}, b_{n+1})$$

и значит,

$$\eta_{n+1} = A_{n+1} h = f(a_{n+1}, b_{n+1}) \cdot h$$

и, вписав η_{n+1} в свое место, сейчас же получаем

$$\Delta\eta_n = \eta_{n+1} - \eta_n$$

и затем:

$$\Delta^2\eta_{n-1} = \Delta\eta_n - \Delta\eta_{n-1};\quad \Delta^3\eta_{n-2} = \Delta^2\eta_{n-1} - \Delta^2\eta_{n-2}$$

и следовательно, вторая таблица будет заполнена, и можно будет перейти к следующему значению $n+2$ и т. д.

Таким образом надо только показать, как вычислить Δb_n по имеющимся в табл. II числам, т. е. по

$$\eta_n,\ \Delta\eta_{n-1},\ \Delta^2\eta_{n-2},\ \Delta^3\eta_{n-3}$$

Это производится по следующей формуле:

$$\Delta b_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3} \tag{19}$$

которую мы сейчас и выведем.

По Тейлорову ряду, согласно сделанному обозначению, имеем

$$b_{n+1} - b_n = \Delta b_n = A_n h + B_n\frac{h^2}{2} + C_n\frac{h^3}{6} + D_n\frac{h^4}{24} + E_n\frac{h^5}{120}$$

или, опуская для простоты письма значок n в правой части,

$$\Delta b_n = Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{6} + D\frac{h^4}{24} + E\frac{h^5}{120} + \ldots$$

но мы имеем

$$\eta_n = y_n' \cdot h = A \cdot h$$

следовательно, по тому же Тейлорову ряду будет:

$$\eta_{n-1} = Ah - Bh^2 + C\frac{h^3}{2} - D\frac{h^4}{6} + E\frac{h^5}{24}$$

$$\eta_{n-2} = Ah - 2Bh^2 + 4C\frac{h^3}{2} - 8D\frac{h^4}{6} + 16E\frac{h^5}{24}$$

$$\eta_{n-3} = Ah - 3Bh^2 + 9C\frac{h^3}{2} - 27D\frac{h^4}{6} + 81E\frac{h^5}{24}$$

Но по самому составлению разностей:

$$\Delta\eta_{n-1} = \eta_n - \eta_{n-1};\quad \Delta^2\eta_{n-2} = \eta_n - 2\eta_{n-1} + \eta_{n-2}$$
$$\Delta^3\eta_{n-3} = \eta_n - 3\eta_{n-1} + 3\eta_{n-2} - \eta_{n-3};\ \ldots$$

на основании этого будет:

$$\Delta\eta_{n-1} = Bh^2 - C\frac{h^3}{2} + D\frac{h^4}{6} - E\frac{h^5}{24} + \ldots$$

$$\Delta^2\eta_{n-2} = \quad 2C\frac{h^3}{2} - 6D\frac{h^4}{6} + 14E\frac{h^5}{24} - \ldots$$

$$\Delta^3\eta_{n-3} = \quad 6D\frac{h^4}{6} - 36E\frac{h^5}{24} + \ldots$$

Нам надо составить величину

$$\Delta b_n = Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{6} + D\frac{h^4}{24} + E\frac{h^5}{120} + \ldots$$

Чтобы этого достигнуть, стоит только, умножив предыдущие уравнения на множители α, β, γ, придать их к уравнению

$$\eta_n = Ah$$

и определить неизвестные множители, так чтобы равенство

$$\eta_n + \alpha\Delta\eta_{n-1} + \beta\Delta^2\eta_{n-2} + \gamma\Delta^3\eta_{n-3} = \\ = Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{6} + D\frac{h^4}{24} + E\frac{h^5}{120} + \ldots$$

имело место до членов возможно высокого порядка относительно h, таким образом для определения α, β, γ имеем уравнения:

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}(2\beta - \alpha) = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6}(6\gamma - 6\beta + \alpha) = \frac{1}{24}$$

которые дают:

$$\alpha = \frac{1}{2};\quad \beta = \frac{5}{12};\quad \gamma = \frac{3}{8}$$

и значит, будет

$$\Delta b_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3} \qquad (12)$$

Само собою понятно, что эта формула лишь приближенная и точна только до членов четвертого порядка относительно h, ибо разность

$$\frac{1}{120} - \frac{1}{24}[\alpha + 14\beta - 36\gamma] = \frac{49}{144}$$

а не нулю, и следовательно, первый из отброшенных в предыдущей формуле членов есть

$$\frac{49}{144}Eh^5$$

Нетрудно видеть, что если бы мы хотели иметь для Δb_n формулу, верную до членов пятого порядка, то надо было бы принять и разности че-

твертого порядка, т. е. $\Delta^4 \eta_{n-4}$; если бы хотели иметь и члены шестого порядка, то надо бы принять и $\Delta^5 \eta_{n-5}$ и т. д., и наша формула была бы вида

$$\Delta b_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta b_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 \eta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 \eta_{n-3} + \\ + \delta \Delta^4 \eta_{n-4} + \varepsilon \Delta^5 \eta_{n-5} \qquad (20)$$

ибо очевидно, что коэффициенты α, β, γ определялись бы прежними уравнениями и сохранили бы свои величины и добавились бы члены с коэффициентами δ и ε, причем оказалось бы:

$$\delta = \frac{251}{720}; \qquad \varepsilon = \frac{95}{288}$$

Наоборот, если бы мы предпочли брать более мелкие промежутки h и довольствоваться лишь членами третьего порядка, то при вычислении можно было бы ограничиться разностями второго порядка, и наша формула была бы вида

$$\Delta b_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta \eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 \eta_{n-2} \qquad (20')$$

и в этом случае таблицы приняли бы такой вид:

I

n	x	y	Δy
. . .	. . .	. . .	. . . .
$n-2$	a_{n-2}	b_{n-2}	Δb_{n-2}
$n-1$	a_{n-1}	b_{n-1}	Δb_{n-1}
n	a_n	b_n	
$n+1$			

II

η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$
. . .	. . .	. . .
η_{n-2}	$\Delta\eta_{n-2}$	$\Delta^2\eta_{n-3}$
η_{n-1}	$\Delta\eta_{n-1}$	$\Delta^2\eta_{n-2}$
η_n		

причем точность, ими доставляемая, одинакова с даваемою методою Рунге, простота же вычисления будет видна на приводимых ниже численных примерах.

§ **10.** В предыдущем показано, каким образом *продолжать* таблицы. Когда верхние строки их заполнены и мы имеем в нижней косой строке все разности до требуемого порядка, необходимо показать, каким образом *начать* составление этих таблиц, когда для $n = 0$ будут известны лишь числа

$$x = a = a_0 \quad \text{и} \quad y = b = b_0$$

и непосредственно по ним вычисляемое

$$\eta = h \cdot f(a_0, b_0)$$

Ясно, что если бы мы хотели вести вычисление до разностей третьего порядка, то нам надо бы получить числа, соответствующие значениям $n = 0$, 1, 2, 3, т. е. иметь для начала таблиц:

I

n	x	y	Δy
0	a_0	b_0	Δb_0
1	a_1	b_1	Δb_1
2	a_2	b_2	Δb_2
3	a_3	b_3	

II

η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$
η_0	$\Delta\eta_0$	$\Delta^2\eta_0$	$\Delta^3\eta_0$
η_1	$\Delta\eta_1$	$\Delta^2\eta_1$	
η_2	$\Delta\eta_2$		
η_3			

Этого можно достигнуть двояким путем:

1) Положив в предложенном уравнении

$$x = a_0 + t; \quad y = b_0 + z$$

разложить по известным правилам z в ряд по степеням t и, положив затем $t = h, 2h, 3h, \ldots$, вычислить соответствующие значения y, которые и будут представлять b_1, b_2, b_3. Понятно, что здесь само вычисление покажет, какой величины надо брать промежуток h, чтобы отбрасываемые в ряду члены не влияли на результат при избранной степени точности. По полученным таким образом парам значений (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) вычисляются η_1, η_2, η_3, по ним — их разности, и таблица будет подготовлена для продолжения.

2) Последовательным приближением, пользуясь разностями не нижней, а *верхней* косой строки.

Мы имели общую формулу

$$\Delta b_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3}$$

Считая, что третьи разности постоянные, т. е.

$$\Delta^3\eta_{n-3} = \Delta^3\eta_{n-2} = \Delta^3\eta_{n-1} = \Delta^3\eta_n$$

будем иметь:

$$\Delta^2\eta_{n-2} = \Delta^2\eta_{n-1} - \Delta^3\eta_{n-3} = \Delta^2\eta_n - 2\Delta^3\eta_n$$
$$\Delta\eta_{n-1} = \Delta\eta_n - \Delta^2\eta_{n-1} = \Delta\eta_n - \Delta^2\eta_n + \Delta^3\eta_n$$

и значит, будет

$$\Delta b_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_n - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_n + \frac{1}{24}\Delta^3\eta_n \qquad (*)$$

$$= \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-1} - \frac{1}{24}\Delta^3\eta_{n-1} \qquad (**)$$

$$= \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-2} \qquad (***)$$

Полагая в формуле $(*)$ $n = 0$, в формуле $(**)$ $n = 1$ и в формуле $(***)$ $n = 2$, получим:

$$\Delta b_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_0 + \frac{1}{24}\Delta^3\eta_0 \qquad (21)$$

$$\Delta b_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_0 - \frac{1}{24}\Delta^3\eta_0 \qquad (22)$$

$$\Delta b_2 = \eta_2 + \frac{1}{2}\Delta\eta_1 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_0 + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_0 \qquad (23)$$

Если же ограничиться членами второго порядка, то будет:

$$\Delta b_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_0 \qquad (24)$$

$$\Delta b_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\eta_1 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_1 \qquad (25)$$

Последовательность приближений ведем следующим образом: по данным a_0 и b_0 вычисляем η_0, затем берем

$$\Delta b_0 = \eta_0$$

и

$$b_1 = b_0 + \Delta b_0 = b_0 + \eta_0$$

по полученной паре (a_1, b_1) вычисляем η_1 и берем разность

$$\Delta\eta_0 = \eta_1 - \eta_0$$

вновь вычисляем Δb_0 по формуле

$$\Delta b_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0$$

и новое исправленное значение $b_1 = b_0 + \Delta b_0$, по этому значению b_1 вычисляем η_1 и затем

$$\Delta b_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0$$

и находим $b_2 = b_1 + \Delta b_1$, и по полученной паре (a_2, b_2) вычисляем η_1, найдя которое составляем разности и находим $\Delta\eta_0$ и $\Delta^2\eta_0$.

Пользуясь этими разностями, вновь вычисляем:

$$\Delta b_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_0$$
$$b_1 = b_0 + \Delta b_0$$
$$\eta_1 = f(a_1, b_1)$$
$$\Delta b_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_0$$
$$b_2 = b_1 + \Delta b_1$$

Получив эти исправленные величины, если хотим итти до разностей третьего порядка, то вычисляем сперва Δb_2 и b_3 по формулам:

$$\Delta b_2 = \eta_2 + \frac{1}{2}\Delta\eta_1 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_0$$
$$b_3 = b_2 + \Delta b_2$$

и, вновь перевычислив b_0, b_1, b_2 по формулам (21)—(23), повторяем это вычисление, пока два последовательных приближения не совпадут в пределах избранной точности. Здесь выгоднее, чем итти до разностей третьего порядка, взять сперва более мелкие промежутки h, так чтобы разностями третьего порядка можно было пренебречь и ограничиваться формулами (24)—(25).

Когда по ходу вычисления будет видно, что разности второго порядка становятся настолько изменяющимися, что третьи разности уже оказывают влияние на результат, то надо или принимать их в расчет, пользуясь соответствующей формулой, или уменьшить промежуток; наоборот, когда разности второго порядка окажутся настолько малыми, что не влияют на результат, то можно увеличить промежуток.

§ 11. Само собою понятно, что изложенная метода применима к системе нескольких совокупных уравнений первого порядка.

Напр., пусть дана система:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x, y, z)\\ \frac{dz}{dx} &= \varphi(x, y, z)\end{aligned}\right\} \quad (*)$$

и начальные условия: при $x = a$ должно быть $y = b$, $z = c$; тогда, положив

$$hy' = \eta \text{ и } hz' = \xi \quad (**)$$

составляем не одну пару, а две пары параллельных таблиц, как показанные выше, причем одна пара заключает значения:

$$x,\ y,\ \Delta y;\quad \eta,\ \Delta\eta,\ \Delta^2\eta,\ \Delta^3\eta,$$

другая:

$$x,\ z,\ \Delta z;\quad \xi,\ \Delta\xi,\ \Delta^2\xi,\ \Delta^3\xi,$$

причем для вычисления величин η и ξ служат уравнения (**), а для вычисления Δb_n и Δc_n — формулы:

$$\left.\begin{aligned}\Delta b_n &= \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3}\\ \Delta c_n &= \xi_n + \frac{1}{2}\Delta\xi_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\xi_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\xi_{n-3}\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Совершенно так же надо поступать для системы трех и большего числа уравнений.

§ **12.** Как известно, всякое обыкновенное дифференциальное уравнение любого порядка и всякая система таких уравнений, если только они разрешимы относительно наивысшей производной, в них входящей, могут быть приведены к системе уравнений первого порядка вида

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n,\ t) \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n)$$

Так, напр., если бы вопрос шел о движении точки в плоскости xoy, то мы имели бы систему:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x,\ y,\ t,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \varphi\left(x,\ y,\ t,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$

Вводя неизвестные функции u и v, приводим эту систему к виду:

$$\frac{dx}{dt} = u;\quad \frac{dy}{dt} = v$$

$$\frac{du}{dt} = f(x,\ y,\ t,\ u,\ v);\quad \frac{dv}{dt} = \varphi(x,\ y,\ t,\ u,\ v)$$

к которой уже непосредственно приложима изложенная выше метода.

§ **13.** Штёрмер развил свою методу в применении к системе уравнений второго порядка вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, y, z, t)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \varphi(x, y, z, t) \qquad (A)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \psi(x, y, z, t)$$

относящейся к движению материальной точки в среде, не оказывающей сопротивления.

Рассмотрим сперва одно уравнение вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, t)$$

не содержащее первой производной неизвестной функции x, положим, что это уравнение требуется интегрировать при начальных условиях: при $t = t_0$ должно быть $x = x_0$ и $\frac{dx}{dt} = x' = x_0'$. Положив $\xi = h^2 x''$, составляем таблицы такого вида:

n	t	x	Δx	$\Delta^2 x$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$n-3$	t_{n-3}	x_{n-3}	Δx_{n-3}	$\Delta^2 x_{n-1}$
$n-2$	t_{n-2}	x_{n-2}	Δx_{n-2}	$\Delta^2 x_{n-3}$
$n-1$	t_{n-1}	x_{n-1}	Δx_{n-1}	$\Delta^2 x_{n-2}$
n	t_n	x_n		
$n+1$	t_{n+1}			

ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	$\Delta^3\xi$	$\Delta^4\xi$
. .	. . .	. . .	. . . .	. . . .
ξ_{n-3}	$\Delta\xi_{n-3}$	$\Delta^2\xi_{n-4}$	$\Delta^3\xi_{n-4}$	
ξ_{n-2}	$\Delta\xi_{n-2}$	$\Delta^2\xi_{n-3}$	$\Delta^3\xi_{n-3}$	$\Delta^4\xi_{n-4}$
ξ_{n-1}	$\Delta\xi_{n-1}$	$\Delta^2\xi_{n-2}$		
ξ_n				

Эти таблицы будут заканчиваться косыми строками, содержащими числа:

$$x_n,\ \Delta x_{n-1},\ \Delta^2 x_{n-2}$$
$$\xi_n,\ \Delta\xi_{n-1},\ \Delta^2\xi_{n-2},\ \Delta^3\xi_{n-3},\ \Delta^4\xi_{n-4}$$

Чтобы иметь возможность продолжать эти таблицы, пренебрегая разностями пятого порядка, т. е. прибавлять к ним по одной косой строке, Штёрмер применяет формулу

$$\Delta^2 x_{n-1} = \xi_n + \frac{1}{12}\left[\Delta^2\xi_{n-2} + \Delta^3\xi_{n-3} + \Delta^4\xi_{n-4} - \frac{1}{20}\Delta^4\xi_{n-4}\right] \qquad (20)$$

вычислив по которой $\Delta^2 x_{n-1}$ вписываем его в свое место, затем имеем:

$$\Delta x_n = \Delta x_{n-1} + \Delta^2 x_{n-1}$$
$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$$

Получив величину x_{n+1}, вычисляем по данному уравнению, сделав в нем $t = t_{n+1}$, $x = x_{n+1}$, величину

$$\xi_{n+1} = h^2 f(t_{n+1}, x_{n+1})$$

и, вписав ее в свое место, берем разности, и таким образом нижние косые строки таблицы будут заполнены, и пользуясь формулой (20), можно продолжать процесс дальше.

Формула (20) выводится совершенно подобно тому, как формула (12). Сохраняя прежнее обозначение производных неизвестной функции, в данном случае x, по переменной независимой t и принимая за исходное значение x_n, соответствующее $t = t_0 + nh$, получим по Тейлорову ряду для x_{n-1} и x_{n+1} разложения:

$$x_{n+1} = x_n + Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{6} + D\frac{h^4}{24} + E\frac{h^5}{120} + F\frac{h^6}{720} + \ldots$$
$$x_{n-1} = x_n - Ah + B\frac{h^2}{2} - C\frac{h^3}{6} + D\frac{h^4}{24} - E\frac{h^5}{120} + F\frac{h^6}{720} - \ldots$$

Вместе с тем

$$\xi_n = x_n'' h^2 = Bh^2$$

Отсюда следует

$$\Delta^2 x_{n-1} = x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = \xi_n + D\frac{h^4}{24} + F\frac{h^6}{360} \qquad (*)$$

Написав затем разложения величин ξ_{n-1}, ξ_{n-2}, ξ_{n-3}, ξ_{n-4}, а именно:

$$\xi_{n-1} = \xi_n - Ch^3 + D\frac{h^4}{2} - E\frac{h^5}{6} + F\frac{h^6}{24} - \ldots$$
$$\xi_{n-2} = \xi_n - 2Ch^3 + 4D\frac{h^4}{2} - 8E\frac{h^5}{6} + 16F\frac{h^6}{24} - \ldots$$

и т. д.

составляем разности:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta^2 \xi_{n-2} &= \xi_n - 2\xi_{n-1} + \xi_{n-2} = 2D\frac{h^4}{2} - 6E\frac{h^5}{6} + 14F\frac{h^6}{24} \\
\Delta^3 \xi_{n-3} &= \xi_n - 3\xi_{n-1} + 3\xi_{n-2} - \xi_{n-3} = 6E\frac{h^5}{6} - 36F\frac{h^6}{24} \\
\Delta^4 \xi_{n-4} &= \xi_n - 4\xi_{n-1} + 6\xi_{n-2} - 4\xi_{n-3} + \xi_{n-4} = 24F\frac{h^6}{24}
\end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

исключаем (проще всего по методе множителей) из уравнений (*) и (**) величины D, E, F и получаем формулу

$$\Delta^2 x_{n-1} = \xi + \frac{1}{12}\left[\Delta^2 \xi_{n-2} + \Delta^3 \xi_{n-3} + \frac{19}{20}\Delta^4 \xi_{n-4}\right] \tag{26}$$

которую, для удобства вычисления, лучше писать в виде

$$\Delta^2 x_{n-1} = \xi_n + \frac{1}{12}\left[\Delta^2 \xi_{n-2} + \Delta^3 \xi_{n-3} + \Delta^4 \xi_{n-4} - \frac{1}{20}\Delta^4 \xi_{n-4}\right] \tag{27}$$

Чтобы по начальным условиям начать вычисление, можно применять также два способа: разложения в ряд, который не требует пояснений, и последовательных приближений, для которого, подобно предыдущему, из формулы (26) составим следующие:

$$\Delta x_0 = x_0' h + \frac{1}{2}\xi_0 + \frac{1}{6}\Delta\xi_0 - \frac{1}{24}\Delta^2 \xi_0 + \frac{1}{45}\Delta^3 \xi_0 - \frac{7}{480}\Delta^4 \xi_0$$

$$\Delta^2 x_0 = \xi_0 + \Delta\xi_0 + \frac{1}{12}\Delta^2 \xi_0 - \frac{1}{240}\Delta^4 \xi_0$$

$$\Delta^2 x_1 = \xi_1 + \Delta\xi_1 + \frac{1}{12}\Delta^2 \xi_0 + \frac{1}{12}\Delta^3 \xi_0 - \frac{1}{240}\Delta^4 \xi_0 =$$

$$= \xi_2 + \frac{1}{12}\Delta^2 \xi_1 - \frac{1}{240}\Delta^4 \xi_0$$

$$\Delta^2 x_2 = \xi_2 + \Delta\xi_2 + \frac{1}{12}\Delta^2 \xi_1 + \frac{1}{12}\Delta^3 \xi_0 + \frac{19}{240}\Delta^4 \xi_0$$

и ведем по ним вычисление как показано в § 10, т. е. сперва берем один член, со следующим приближением два и т. д.

Понятно само собою, что когда дано не одно уравнение, а система уравнений вида (A), не содержащих первых производных неизвестных функций, то метода применяется совершенно подобно тому, как для уравнений первого порядка, причем составляется столько пар таблиц, сколько имеется неизвестных функций.

§ **14.** Если брать промежутки настолько малыми, что разности третьего порядка уже не влияют на результат, то основная формула будет:

$$\Delta^2 x_{n-1} = \xi_n + \frac{1}{12}\Delta^2 \xi_{n-2} \tag{28}$$

$$\xi_n = h^2 f(x_n, t_n)$$

и таблицы будут:

t	x	Δx	$\Delta^2 x$
. . .	. . .	. . .	. . .
t_{n-2}	x_{n-2}	Δx_{n-2}	$\Delta^2 x_{n-3}$
t_{n-1}	x_{n-1}	Δx_{n-1}	$\Delta^2 x_{n-1}$
t_n	x_n		
t_{n+1}			

ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$
. . .	. . .	. . .
ξ_{n-2}	$\Delta\xi_{n-2}$	$\Delta^2\xi_{n-3}$
ξ_{n-1}	$\Delta\xi_{n-1}$	$\Delta^2\xi_{n-2}$
ξ_n		

и процесс вычисления сводится к весьма простому.

§ **15.** Если в методе Штёрмера следить за тем, чтобы промежуток h (меняя, когда нужно, его величину) оставался настолько малым, чтобы последняя из удержанных разностей могла быть принимаема за постоянную, с тою точностью, с которою вычисление производится, то результат получится сразу с требуемою степенью точности, и поправок требоваться не будет.

Но если бы мы применяли другую методу Эйлера или Рунге и желали бы полученный результат исправить, то, как уже сказано, его можно было бы принять за исходное приближение в методе Пикара.

Для простоты рассуждений предположим, что нам предложено одно уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

и начальное условие:

при $x = a$, должно быть $y = b$

и что для этого уравнения получено приближенное решение

$$y = F_1(x)$$

Если бы эта функция была точным решением уравнения (I), то имело бы место равенство

$$F_1'(x) = f\ [x, F_1(x)]$$

из которого, интегрируя, получили бы

$$F_1(x) = \int_a^x f\,[x, F_1(x)]\,dx + b \tag{*}$$

Если же значения первой части не будут равны значениям той функции $F_1(x)$, которая входит в состав подинтегральной, то это будет показывать, что принятое приближение недостаточно и надо положить

$$F_2(x) = \int_a^x f\,[x, F_1(x)]\,dx + b \tag{**}$$

и, приняв за новое приближение

$$y = F_2(x)$$

повторить этот процесс, который и продолжать, пока с принятою при вычислении степенью точности не будет достигнуто равенство

$$F_k(x) = \int_a^x f[x, F_k(x)]\,dx + b \qquad (29)$$

Здесь необходимо иметь в виду следующее обстоятельство: функции $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... будут нам известны не аналитическими своими выражениями, а будут задаваться или определяться лишь в табличной форме, и значит, интегралы в правых частях равенств (*) придется вычислять по приближенным формулам. Ясно, что эти формулы должны обладать тою степенью точности, которая соответствует принятой в исполняемом вычислении, иначе вычисление интегралов будет вносить свои погрешности в значения функций $F_2(x)$, $F_3(x)$, ..., и мы, вместо приближения, можем даже удаляться от истинных значений искомой функции.

Приемы такого вычисления определенных интегралов разработаны с большою обстоятельностью в приложении к вычислению планетных возмущений; некоторые из относящихся сюда формул приведены в моих «Лекциях о приближенных вычислениях». Подробно же их можно найти в сочинении Th. Oppolzer'a — «Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten» (t. II). К сожалению, это сочинение составляет теперь библиографическую редкость.

Я приведу без доказательства одну из таких формул, именно — Лапласа, достаточную для нашей цели:

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} y\,dx = \left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right] - \frac{1}{12}[\Delta y_{n-1} - \Delta y_0]$$
$$- \frac{1}{24}[\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0] - \frac{19}{720}[\Delta^3 y_{n-3} - \Delta^3 y_0]$$
$$- \frac{3}{160}[\Delta^4 y_{n-4} + \Delta^4 y_0] - \frac{863}{60840}[\Delta^5 y_{n-5} - \Delta^5 y_0]$$

которую напишем для краткости так:

$$Y_n = \int_a^{a+nh} y\,dx = hS_n + hQ_n = T_n + P_n$$

где

$$T_n = h\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right]$$

есть главный член формулы, представляющий результат вычисления нашего интеграла по правилу «трапеций», P_n есть «поправка» этого результата.

Понятно, что выгоднее и самое вычисление разбивать на две части, т. е. отдельно по известной схеме («суммы попарно», «суммы сверху») вычислять T_n и отдельно P_n.

§ **16.** Для пояснения изложенных выше способов проделаем некоторые примеры, выбрав их так, чтобы самое вычисление частных значений функции $f(x, y)$, стоящей в правой части уравнения

$$y' = f(x, y)$$

было возможно проще, ибо эта часть работы пояснений не требует.

Как первый пример, возьмем уравнение

$$y' = y$$

и начальное условие: при $x = 0$ должно быть $y = 1$, и составим таблицу значений y для x через 0.1.

Эта таблица будет, если применять методу Эйлера, следующая (табл. 1):

Таблица 1

n	x	$y = y'$	hy'
0	0.0	1.0000	0.1000
1	0.1	1.1000	0.1100
2	0.2	1.2100	0.1210
3	0.3	1.3310	0.1331
4	0.4	1.4641	0.1464
5	0.5	1.6105	0.1611
6	0.6	1.7716	0.1772
7	0.7	1.9488	0.1949
8	0.8	2.1437	0.2144
9	0.9	2.3581	0.2358
10	1.0	2.5939	

Процесс составления этой таблицы ясен из формулы

$$y_{n+1} = y_n + hy_n'$$

Примем полученные значения за исходное приближение, т. е. полагая

$$y' = F_1(x) = y$$

вычислим следующее приближение:

$$F_2(x) = \int_0^x F_1(x)\,dx + 1$$

причем значения функции $F_1(x)$ будем брать из предыдущей таблицы.

Вычисление расположится следующим образом (табл. 2):

Таблица 2

n		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
n	x	$y' = y = F_1(x)$	Суммы I попарно	Суммы II сверху	$T_n =$ III $\cdot \frac{1}{2} h$	$h\Delta y'$	$h\Delta^2 y'$	P_n	$F_2(x) =$ IV + VII
0	0.0	1.0000	2.1000	0.0000	0.0000	0.0100	0.0010	−0.0000	1.0000
1	0.1	1.1000	2.3100	2.1000	0.1050	110	11	1	1.1049
2	0.2	1.2100	2.5410	4.4100	0.2205	121	12	2	1.2203
3	0.3	1.3310	2.7951	6.9510	0.3476	133	13	3	1.3473
4	0.4	1.4641	3.0746	9.7461	0.4873	146	15	4	1.4869
5	0.5	1.6105	3.3821	12.8207	0.6410	161	10	5	1.6405
6	0.6	1.7716	3.7204	16.2028	0.8101	177	18	6	1.8095
7	0.7	1.9488	4.0925	19.9232	0.9962	195	19	8	1.9954
8	0.8	2.1437	4.5018	24.0157	1.2008	214	22	10	2.1998
9	0.9	2.3581	4.9520	28.5175	1.4259	236		12	2.4247
10	1.0	2.5939		33.4495	1.6725			14	2.6711

Сличая величину $F_1(x)$ и $F_2(x)$, видим, что равенство

$$F_2(x) = F_1(x)$$

еще не достигнуто в пределах точности вычисления, поэтому, приняв $y = F_2(x)$, а значит, и $y' = F_2(x)$, составляем выражение

$$F_3(x) = \int_0^x F_2(x)\,dx + 1$$

и продолжаем этот процесс, пока два последовательных приближения не будут совпадать в пределах точности вычисления.

Полученные результаты приведены в табл. 3.

Так как решение нашего уравнения есть

$$y = e^x$$

то в последнем столбце таблицы приведены и эти значения, чтобы иметь сличение приближенных результатов с точными.

Таблица 3

n	x	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$	$F_5(x)$	$F_6(x)$	e^x
0	0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.00000
1	0.1	1.1000	1.1049	1.1051	1.1051	1.1051	1.1051	1.10517
2	0.2	1.2100	1.2203	1.2213	1.2214	1.2214	1.2214	1.22140
3	0.3	1.3310	1.3473	1.3496	1.3498	1.3499	1.3499	1.34986
4	0.4	1.4641	1.4870	1.4912	1.4918	1.4921	1.4918	1.49183
5	0.5	1.6105	1.6406	1.6475	1.6486	1.6488	1.6488	1.64872
6	0.6	1.7716	1.8096	1.8299	1.8219	1.8222	1.8222	1.82212
7	0.7	1.9488	1.9955	2.0099	2.0137	2.0138	2.0138	2.01375
8	0.8	2.1437	2.1999	2.2195	2.2249	2.2255	2.2256	2.22554
9	0.9	2.3581	2.4248	2.4501	2.4582	2.4594	2.4597	2.45960
10	1.0	2.5939	2.6711	2.7046	2.7158	2.7179	2.7183	2.71828

Сличая $F_5(x)$ и $F_6(x)$, видим, что в пределах точности вычисления можно считать, что предельная функция достигнута, и действительно, $F_6(x)$ отличается от истинной функции e^x не более, как в четвертом знаке после запятой, за который вообще при нашем вычислении ручаться нельзя.

Этот пример показывает, что при избранной величине промежутка первое Эйлеровское приближение, если его принять за исходное для процесса Пикара, потребовало бы повторения интегрирования 5 раз для получения той ограниченной степени точности, с которою наше вычисление производилось. Ясно, что было бы выгоднее или уменьшить промежуток h, или применить другой прием для получения более точного исходного приближения. Понятно, что по количеству работы уменьшение промежутка вдвое равносильно с вычислением по упрощенной схеме Рунге, т. е. для уравнения

$$y' = f(x, y)$$

по формулам:

$$\alpha_n = f(x_n, y_n)$$

$$\xi_n = x_n + \frac{1}{2}h; \quad \eta_n = y_n + \frac{1}{2}\alpha_n h$$

$$\beta_n = f(\xi_n, \eta_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \beta_n h$$

ибо в обоих процессах потребуется вычисление одинакового числа частных значений функции $f(x, y)$, а обыкновенно это-то вычисление и требует наибольшей затраты работы.

Вычисление для нашего примера по предыдущим формулам исполнено в табл. 4.

Таблица 4

n	x	$y_n = u_{n-1} + h\beta_n$	$\alpha_n = f(x_n, y_n)$	$\frac{1}{2}h\alpha_n$	$\eta_n = y_n + \frac{1}{2}h\alpha_n$	$\beta_n = f(\xi_n, \eta_n)$	$h\beta_n$
0	0.0	1.0000	1.0000	0.0500			
					1.0500	1.0500	0.1050
1	0.1	1.1050	1.1050	0.0552			
					1.1602	1.1602	0.1160
2	0.2	1.2210	1.2210	0.0611			
					1.2821	1.2821	0.1282
3	0.3	1.3492	1.3492	0.0675			
					1.4167	1.4167	0.1417
4	0.4	1.4909	1.4909	0.0745			
					1.5654	1.5654	0.1565
5	0.5	1.6474	1.6474	0.0824			
					1.7298	1.7298	0.1730
6	0.6	1.8204	1.8204	0.0910			
					1.9114	1.9114	0.1911
7	0.7	2.0115	2.0115	0.1006			
					2.1121	2.1121	0.2112
8	0.8	2.2227	2.2227	0.1111			
					2.3338	2.3338	0.2334
9	0.9	2.4561	2.4561	0.1288			
					2.5789	2.5789	0.2579
10	1.00	2.7140	2.7140				

По этим числам видно, что полученный результат, по своей точности, соответствует приблизительно $F_4(x)$ и, значит, потребовал бы для получения окончательного еще интегрирования 2 раза. Таким образом, исходя от первого Эйлеровского приближения, нам пришлось бы вычислить $6n$ значений функции $f(x, y)$, здесь же их всего надо $4n$.

Обращаясь теперь к методе Штёрмера, получим табл. 5.

Таблица 5

n	x	y	Δy	$\eta = hy'$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$
0	0.0	1.0000		0.1000		
			0.1051		0.0105	
1	0.1	1.1051		0.1105		0.0011
			0.1160		116	
2	0.2	1.2211		0.1221		13
			0.1284		129	
3	0.3	1.3495		0.1350		13
			0.1420		142	
4	0.4	1.4915		0.1492		14
			0.1569		156	
5	0.5	1.6484		0.1648		18
			0.1732		174	
6	0.6	1.8216		0.1822		17
			0.1916		191	
7	0.7	2.0132		0.2013		21
			0.2114		212	
8	0.8	2.2246		0.2225		23
			0.2350		235	
9	0.9	2.4596		0.2460		
			0.2587			
10	1.0	2.7183				

Кроме того, для начала по схемам § 10 надо добавить к табл. 5 табл. 5а.

Таблица 5а

n	y	Δy	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	
0	1.0000		0.1000			
		0.1000		0.0100		
1	1.1000		0.1100			
		0.1100				
2	1.2100					
0	1.0000		0.1000			
		0.1049		0.0105		$\Delta y_0 = 0.1000 + 0.0050 -$
1	1.1049		0.1105		0.0011	$- 0.0001 = 0.1049$
		0.1158		0.0116		$\Delta y_1 = 0.1100 + 0.0050 +$
2	1.2207		0.1221			$+ 0.0008 = 0.1158$
0	1.0000					
		0.1051				$\Delta y_0 = 0.1000 + 0.0052 -$
1	1.1051					$- 0.0001 = 0.1051$
		0.1160				$\Delta y_1 = 0.1000 + 0.0052 +$
2	1.2211					$+ 0.0008 = 0.1160$

При сличении с табл. 3 видно, что приближение, получаемое по методе Штёрмера, есть окончательное, о чем можно было заключить и a priori по величине вторых разностей, ибо ясно, что член $\frac{3}{8}\Delta^3\eta_n$ не превышает $\frac{1}{2}$ единицы четвертого знака и, значит, не оказывает влияния на результат. Таким образом здесь потребовалось всего вычислить n значений функции $f(x, y)$, т. е. приблизительно в 4—6 раз меньше работы, нежели по предыдущим способам. В этом и состоит главное достоинство методы Штёрмера.

§ **17.** Чтобы пояснить еще методы Рунге и Штёрмера, возьмем пример, приводимый в сочинении аббата Moigno — «Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral», составленном по лекциям Коши.

Этот пример следующий:

$$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

начальное условие: при $x = 0$ должно быть $y = 0$, требуется составить таблицу значений функции y от $x = 0$ до $x = 1$.

По методе Коши в указанном сочинении составлена табл. 6 значений, между которыми заключается величина y.

Таблица 6

x	$f(x)$	$F(x)$
0.0	0.00000	0.00000
0.1	0.02108	0.04143
0.2	0.07413	0.17368
0.3	0.15127	0.20935
0.4	0.14297	0.32551
0.5	0.36624	0.46041
0.6	0.50089	0.61275
0.7	0.65226	0.78176
0.8	0.80961	0.96667
0.9	0.99175	0.16688
1.00	1.18879	1.37687

В рассматриваемом промежутке имеет место неравенство

$$f(x) < y < F(x)$$

Как видно, пределы еще весьма широкие.

Для этого уравнения при $x = 0$ как раз имеет место то невыгодное обстоятельство, на которое обращал внимание еще Эйлер: производная y также обращается в нуль, производные высших порядков обращаются в бесконечность, поэтому для значений, близких к $x = 0$, изложенные выше методы не применимы и проще всего разложить y в ряд по степеням переменной x (эти степени не будут целыми) и, вычислив по этому ряду значение y для какого-либо значения x, отличного от нуля, для получения дальнейших значений применять изложенные выше способы. Чтобы проще выполнять это разложение, положим сперва $x = t^4$, тогда будет

$$\frac{dy}{dt} = 4t^5 + 4t^3\sqrt{y}$$

Делая затем

$$y = t^6\left(\frac{2}{3} + \eta\right)$$

и, обозначая производную по t значком, имеем

$$t\eta' + 6\eta = 4t\sqrt{\frac{2}{3} + \eta}$$

Положив

$$\eta = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \delta t^4 + \ldots$$

имеем

$$t\eta' + 6\eta = t[7\alpha + 8\beta t + 9\gamma t^2 + 10\delta t^3 + \ldots]$$

и для определения коэффициентов α, β, γ, δ, ... получим

$$[7\alpha + 8\beta t + 9\gamma t^2 + 10\delta t^3 + \ldots]^2 = 16\left[\frac{2}{3} + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \ldots\right]$$

откуда следуют уравнения:

$$\begin{aligned} 49\alpha^2 &= \frac{32}{3} \\ 112\alpha\beta &= 16\alpha \\ 64\beta^2 + 126\alpha\beta &= 16\beta \\ 144\beta\gamma + 140\alpha\delta &= 16\gamma \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

значит будет:

$$\alpha = \frac{4}{7}\sqrt{\frac{2}{3}};\quad \beta = \frac{1}{7};\quad \gamma = \frac{1}{49}\sqrt{\frac{2}{3}};\quad \delta = -\frac{2}{1715};\quad \ldots$$

Таким образом получим

$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{7}\sqrt{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{4}} + \frac{1}{7}x^2 + \frac{1}{49}\sqrt{\frac{2}{3}}x^{\frac{9}{4}} - \frac{2}{1715}x^{\frac{5}{2}} + \ldots$$

При малых значениях x (около 0.1) полученных членов достаточно, чтобы найти y с точностью до пятого десятичного знака, в чем убедимся вычисляя y' как по предложенному уравнению

$$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

так по ряду

$$y' = x^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}}x^{\frac{3}{4}} + \frac{2}{7}x + \frac{9}{196}\sqrt{\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{4}} - \frac{1}{343}x^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

что видно из табл. 7.

Таблица 7

x	y	$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y}$	y' по ряду
0	0	0	0
0.1	0.030898	0.49201	0.49202
0.2	0.093677	0.75328	9.75331
0.3	0.18020	0.97222	0.97228
0.4	0.28738	1.16857	1.16860
0.5	0.41337	1.35004	1.35004
0.6	0.55706	1.52096	1.52108
0.7	0.71738	1.68364	1.68386
0.8	0.89359	1.83973	1.83991
0.9	1.08519	1.99040	1.99067
1.00	1.29158	2.13648	2.13678

Следовательно, если производить вычисление на 5 знаков, то можно принять, что y должно удовлетворять уравнению

$$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

и что при $x = 0.1$ должно быть $y = 0.030898$, соответственно чему

$$y' = 0.49201$$

Для значений x, меньших 0.1, величина y определяется приведенным выше рядом, для значений же, больших 0.1, мы применим методы Рунге и методу Штёрмера, чтобы иметь наглядное сравнение между этими методами.

Для применения методы Рунге с тем добавлением к ней, которое указано в § 7, подразделяем промежуток между $x = 0.1$ и $x = 1.0$ на два участка: от $x = 0.1$ до $x = 0.3$ и от $x = 0.3$ до $x = 1$.

На первом участке берем $h = \frac{1}{40} = 0.025$, на втором $h = 0.05$, тогда вычисление расположится как показывает табл. 8 (на отдельном листе).

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	2
	$z = y + \frac{1}{2}h\gamma$	$\sqrt{z}$	$\delta = f(\xi, z)$	$u = y + h\gamma$	$\sqrt{u}$	$\sqrt{x}$	$\varepsilon = f(x, u)$	$\frac{1}{2}\beta(+\delta)$	$\frac{1}{2}(\beta+\varepsilon)$	$\sigma = \gamma + \frac{1}{2}(\beta+\varepsilon)$	$\frac{1}{6}\zeta$	$\frac{1}{3}$
				0.03090		0.31623						
0	0.03750	0.19365	0.52906					0.51053	0.52778	0.00011	0.00002	0.0
6	5156	.22707	.59788	0.04410	0.21000	.35355	0.56355	.58072	.59690	5	1	
7	6729	.25910	.66251	5902	.24294	.38730	.63024	.64638	.66172	1	1	
4	8460	.29086	.72387	7556	.27488	.41833	.69321	.70854	.72321	0	0	
7	0.10341	.32157	.78255	9364	.30600	.44721	.75321	.76788	.78199	0	0	
8	0.12367	.35157	.83901	0.11318	.33642	.47434	.81046	.82488	.83851	0	0	
6	.14531	.38119	.89354	.13415	.36627	.50000	.86627	.87990	.89311	0	0	
8	.16830	.41024	.94643	.15647	.39556	.52440	.91996	.93320	.94605	0	0	
				.18013	.42441	.54772	0.97213					
				0.18012		0.54772						
5	0.20517	0.45350	1.02356					0.99786	1.02230	0.00008	−0.00001	0.
1	.25916	.50918	1.12155	0.23122	0.48085	0.59161	1.07246	1.09702	1.12046	— 10	— 2	—
6	.31763	.56358	1.21550	0.28727	0.53397	0.63246	1.16843	1.19196	1.21458	— 9	— 1	—
3	.38063	.61695	1.30613	0.34799	0.58990	0.67082	1.26072	1.28344	1.30534	— 9	— 1	—
3	.44809	.66939	1.39396	0.41326	0.64285	0.70711	1.34996	1.37196	1.39325	— 9	— 1	—
6	.51988	.72102	1.47931	0.48292	0.69492	0.74162	1.43654	1.45792	1.47868	— 9	— 1	—
5	.59590	.77195	1.56252	0.55684	0.74621	0.77460	1.52081	1.54167	1.56195	— 11	— 2	—
8	.67602	.82220	1.64378	0.63495	0.79684	0.80623	1.60307	1.62342	1.64328	— 10	— 2	—
7	.76017	.87187	1.72334	0.71710	0.84682	0.83666	1.68348	1.70341	1.72287	— 9	— 1	—
2	.84826	.92101	1.80135	0.80324	0.89623	0.86603	1.76226	1.78180	1.80091	— 8	— 1	—
3	.94021	.96965	1.87795	0.89328	0.94518	0.89443	1.83956	1.85876	1.87753	— 7	— 1	—
2	1.03597	1.01784	1.95325	0.98714	0.99355	0.92195	1.91550	1.93438	1.95285	— 7	— 1	—
7	1.13546	1.06558	2.02735	1.08479	1.04153	0.94868	1.99021	2.00879	2.02699	— 7	— 1	—
0	1.23864	1.11294	2.10036	1.18613	1.08909	0.97468	2.06377	2.08207	2.10002	— 6	— 1	—
				1.29114	1.13628	1.00000	2.13628					

Для проверки принимаем найденные таким образом величины y за первое приближение $F_1(x)$, составляем по ним функцию

$$y' = \varphi(x) = \sqrt{x} + \sqrt{y} = f[x, F_1(x)]$$

и по формуле

$$F_2(x) = \int_a^x f[x, F_1(x)]\, dx + b$$

при $a = 0.1$, $b = 0.030898$, находим второе приближение, как это показано в табл. 9.

Для сравнения, произведя то же вычисление по методе Штёрмера, получим табл. 10.

Сличение полученных результатов показывает, что метода Штёрмера, при затрате работы в 5 или 6 раз меньшей, даст результат, одинаковый с предыдущим.

Отсюда становится понятным, почему Штёрмер предпочел развить новую методу, нежели применять методу Рунге к обширной работе, им предпринятой.

§ **18.** Дадим еще пример интегрирования системы уравнений, причем приведем его со всею подробностью вычислений, чтобы дать образец их расположения и производства, ибо по словам Ньютона: «exempla non minus doceunt quam precaepta».

Из всех движений свободного тела после тел небесных движение артиллерийских снарядов обладает наибольшею мощностью. Может быть, это является одною из тех причин, которая привлекала к исследованию этого вопроса математиков, не бывших ни военными, ни артиллеристами. Помимо Эйлера, всеобъемлющий гений которого творил во всех областях, доступных приложениям математики, достаточно упомянуть: Ив. Бернулли, Лагранжа, Пуассона, Якоби и М. В. Остроградского, ограничиваясь наиболее знаменитыми именами из тех, кем даны общие способы исследования указанного явления.

Математики-артиллеристы развили эти общие методы, произвели множество опытов для установления закона сопротивления воздуха, составили вспомогательные таблицы и поставили дело вычисления траектории снаряда в соответствии с требованиями практики.

Минувшая мировая война показала, что в боевых условиях могут быть используемы в более полной мере, нежели предполагалось ранее,

Таблица 9

2-е приближение

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	Неиспр. значение y	$y' = \beta$	Сумма (3) попарно	Суммы (4) сверху S	$T = \frac{1}{2} hs$	$y_0 + T$	$\Delta\beta$	Поправки $\frac{1}{12}h(\Delta\beta_1 - \Delta\beta_0)$	Испр. y
0.100	0.03090	0.49201			0.00000	0.03090			0.03090
			1.02050				0.03648		
	0.03728	.52849		1.02050	0.00638	0.03728		0.00000	0.03728
			1.09204				3506		
.125	0.04410	.56355		2.11259	0.01320	4410		0	0.04410
			1.16099				3389		
	0.05136	.59744		3.27358	2046	5136		0	0.05136
			1.22768				3280		
.150	0.05902	.63024		4.50126	2813	5903		0	0.05903
			1.29239				3141		
	0.06710	.66215		5.79365	3621	6711		+ 1	0.06712
			1.35536				3106		
.175	0.07556	.69321		7.14901	4468	7558		1	0.07559
			1.41678				3036		
	0.08442	.72357		8.56579	5354	8444		1	0.08445
			1.47678				2964		
.200	0.09364	.75321		10.04257	6276	9366		1	0.09367
			1.53549				2927		
	0.10324	.78228		11.57806	7236	0.10326		1	0.10327
			1.59304				2848		
.225	0.11319	.81076		13.17110	8232	.11322		1	0.11323
			1.64353				2801		
	0.12350	.83877		14.82053	9263	.12353		1	0.12354
			1.70504				2750		
.250	0.12415	.86627		16.52557	0.10328	.13418		1	0.13419
			1.75961				2707		
	0.14515	.89334		18.28518	.11428	.14518		1	0.14519
			1.81330				2662		
.275	0.15647	.91996		20.09848	.12561	.15651		1	0.15652
			1.86619				2627		
	0.16813	.94623		21.46467	.13728	.16818		1	0.16819
			1.91836				2590		
.300	0.18012	.97213		23.88303	.14927	.18018		1	0.18018
			1.99507				0.05031		
	0.20507	1.02294		1.99507	0.02494	0.20512		0	0.20512
			2.09543				4955		
.350	0.23125	1.07249		4.09050	5113	0.23121		0	0.23134
			2.19346				4848		
	0.25867	1.12097		6.28396	1855	0.25873		0	0.25873
			2.28980				4746		
.400	0.28727	1.16843		8.57336	0.10717	0.28735		1	0.28736
			2.38344				4658		
	0.31707	1.21501		10.95680	.13696	0.31714		1	0.31715
			2.47574				4572		
.450	0.34800	1.26073		13.43254	.16791	0.34809		1	0.34810
			2.56643				4497		
	0.38008	1.30570		15.99897	.19999	0.38017		1	0.38018
			2.65567				4426		
.500	0.41326	1.34995		18.65463	.23318	0.41336		1	0.41337
			2.74352				4360		
	0.44756	1.39356		21.39815	.26748	0.44766		1	0.44767
			2.83010				4218		

(Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	Неиспр. значение y	$y' = \beta$	Сумма (3) попарно	Суммы (4) сверху S	$T = \frac{1}{2}hs$	$y_0 + T$	$\Delta\beta$	Поправки $\frac{1}{12}h(\Delta\beta_1 - \Delta\beta_0)$	Испр. y
0.550	0.48292	1.43654		24.22825	0.30285	0.48303		0.00002	0.48315
			2.91550				0.04238		
	0.51937	1.47896		27.14375	.33930	0.51948		2	0.51950
			2.99978				4186		
.600	0.55685	1.52082		30.14353	.37679	0.55697		2	0.55699
			3.08302				4138		
	0.59539	1.56220		33.22655	.41533	0.59551		2	0.59553
			3.16526				4086		
.650	0.63494	1.60306		36.39181	.45490	0.63508		2	0.63510
			3.24654				4044		
	0.67551	1.64348		39.63834	.49548	0.67566		2	0.67568
			3.32696				4090		
.700	0.71710	1.68348		42.96530	.53707	0.71725		2	0.71727
			3.40655				3959		
	0.75969	1.72307		46.37185	.57965	0.75983		2	0.75985
			3.48533				3919		
.750	0.80324	1.76226		49.85718	.62321	0.80339		2	0.80341
			3.56335				3883		
	0.84778	1.80109		53.42053	.66776	0.84794		2	0.84796
			3.64065				3847		
.800	0.89328	1.83956		57.06118	.71326	0.89344		3	0.89347
			3.71727				3815		
	0.93975	1.87771		60.77845	.75973	0.93991		3	0.93994
			3.79321				3779		
.850	0.98715	1.91550		64.57166	.80715	0.98733		3	0.98736
			3.86851				3751		
	1.03551	1.95301		68.44017	.85550	1.03568		3	1.03571
			3.94322				3720		
.900	1.08479	1.99021		72.38339	.90479	1.08497		3	1.08500
			4.01735				3693		
	1.13501	2.02714		76.40074	.95501	1.13519		3	1.13522
			4.09094				3663		
.950	1.18614	2.06377		80.49165	1.00615	1.18633		3	1.18636
			4.16393				3639		
	1.23819	2.10016		84.65558	1.05819	1.23837		3	1.26840
			4.23644				3612		
1.000	1.29114	1.13628		88.89202	1.11115	1.29133		3	1.29136

мощность и меткость современных орудий, и явилась надобность вычислять траектории для таких углов бросания и таких начальных скоростей, для которых применение существующих таблиц требует ряда допущений, оценить влияние которых на точность окончательного результата a priori не представляется возможным.

Таблица 10

Метода Штёрмера

1	2	3	4	5	6	1	2	3
x	y	$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2}$	$\eta = y'h$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$y' = \sqrt{x}+\sqrt{y}$
0.100	0.03090		0.00615			0.31623		
		0.00638		0.00045				
	3728		660		— 0.00001	.33541		
		682		44				
.125	4410		704		— 1	.35355		
		726		43				
	5136		747		— 2	.37081	0.22661	0.59742
		768		41				
.150	5904		788		— 1	.38730	.24298	.63028
		808		40				
	6712		828		— 2	.40311	.25908	.66219
		848		38				
.175	7560		866		0	.41833	.27495	.69310
		884		38				
	8444		904		0	.43301	.29059	.72360
		923		38				
.200	9367		942		— 2	.44721	.30605	.75326
		961		36				
	0.10328		978		0	.46098	.32138	.78236
		995		36				
.225	.11323		0.01014		— 1	.47434	.33650	.81084
		0.01032		35				
	.12355		1049		— 1	.48734	.35150	.83884
		1066		34				
.250	.13421		1083		0	.50000	.36634	.86634
		1099		34				
	.14520		1117		— 1	.51235	.38105	.89340
		1134		33				
.275	.15654		1150		0	.52440	.39565	.92005
		1166		33				
	.16820		1183		— 1	.53619	.41012	.94631
		1199		32				
.300	.18019		1215			.54772	.42449	.97221
0.250	0.13421		2166					
				134				
0.275	0.15634		2340		— 4			
				130				
0.300	0.18019		2430		— 3	.54772	.42449	.97221
		2493		127				
	.20512		2557		— 3	.57009	.45290	1.02299
		2619		124				
.350	.23131		2681		— 2	.59161	.48095	1.07256
		2742		122				
	.25873		2803		— 4	.61237	.50865	1.12102
		2863		118				
.400	.28736		2921		— 1	.63246	.53606	1.16852
		2979		117				
	.31715		3038		— 3	.65192	.56316	1.21508
		3096		114				

(Продолжение)

1	2	3	4	5	6	1	2	3
0.450	0.34811		0.03152		— 0.00002	0.67082	0.59001	1.26083
		0.03207		0.00112				
	.38018		3264		— 1	.68920	.61659	1.30579
		3319		111				
.500	.41337		3375		— 2	.70711	.64294	1.35005
		3430		109				
	.44767		3484		— 1	.72457	.66908	1.39365
		3538		108				
.550	.48305		3592		— 2	.74162	.69509	1.43671
		3646		106				
	.51951		3698		— 2	.75829	.72077	1.47906
		3749		104				
.600	.55700		3802		0	.77460	.74632	1.52092
		3851		104				
	.59551		3906		— 2	.79057	.77169	1.56226
		3958		102				
.650	.63509		4008		— 1	.80623	.79057	1.60315
		4059		101				
	.67568		4109		— 1	.82158	.82199	4.64357
		4159		100				
.700	.71727		4209		— 1	.83666	.84692	1.68358
		4258		99				
	.75985		4308		— 1	.85147	.87169	1.72316
		4357		98				
.750	.80342		4406		— 1	.86603	.89634	1.76237
		4454		97				
	.84796		4503		— 1	.88034	.92084	1.80116
		4551		96				
.800	.89347		4599		0	.89443	.94523	1.83966
		4647		96				
	.93994		4695		— 2	.90830	.96950	1.87780
		4743		94				
.850	.98737		4789		0	.92195	.99366	1.91561
		4835		94				
	1.03572		4883		— 1	.93541	1.01770	1.95311
		4930		93				
.900	1.08502		4976		— 1	.94868	1.04164	1.99032
		5022		92				
	1.13524		5068		0	.96177	1.06548	2.02725
		5113		92				
.950	1.18637		5160		— 2	.97468	1.08920	2.06388
		5206		90				
	1.23843		5250			.98742	1.11285	2.10027
		5294						
1.000	1.29137					1.00000	1.13638	2.13638

Возник вопрос о проверке a posteriori этих упрощенных способов вычисления траекторий сличая полученные при делаемых для пользования таблицами допущениях результаты с результатами, полученными помощью вычислений, этих допущений не заключающих и в этом смысле являющихся точными.

Такое точное вычисление траекторий может быть произведено проще всего, если воспользоваться методою Адамса-Штёрмера для численного

решения обыкновенных дифференциальных уравнений, и является хорошим примером как применения этой методы, так и некоторых вычислительных приемов, приложимых ко многим вопросам инженерного дела.

§ **19.** Примем точку вылета за начало координат O, плоскость стрельбы за плоскость zox, направив ось z вертикально вверх. В виду малости угла деривации, вопрос об определении траектории центра тяжести снаряда расчленяют и принимают для получения вертикальной проекции траектории, что сопротивление воздуха направлено по касательной к траектории; обозначая эту силу через R, вес снаряда через P, ускорение силы тяжести через g, координаты центра тяжести снаряда в момент t через x и z, угол наклонения траектории в точке (x, z), считаемый от оси z, через φ, радиус кривизны через ρ, скорость через v, ее горизонтальную проекцию $v \cdot \sin\varphi = u$, имеем следующие уравнения движения:

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{du}{dt} = -R \sin\varphi; \quad \frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{\rho} = P \cdot \sin\varphi$$

$$dx = \rho \sin\varphi \cdot d\varphi; \quad dz = \rho \cos\varphi \, d\varphi; \quad v = \frac{\rho \, d\varphi}{dt}$$

Из этих уравнений, принимая φ за переменную независимую и обозначая производные значками, следует такая система:

$$u' = -\frac{R}{P} \cdot \frac{u}{\sin\varphi} \tag{1}$$

$$x' = \frac{1}{g}\left(\frac{u}{\sin\varphi}\right)^2 \tag{2}$$

$$z' = \frac{1}{g} \cdot \left(\frac{u}{\sin\varphi}\right)^2 \operatorname{cotg}\varphi \tag{3}$$

$$t' = \frac{1}{g} \cdot \frac{u}{\sin\varphi} \cdot \operatorname{cosec}\varphi \tag{4}$$

Начальные условия таковы: при $\varphi = \varphi_0$ (угол бросания) должны быть:

$$\text{начальная скорость } \left(\frac{u}{\sin\varphi}\right)_0 = v_0$$

$$(x)_0 = 0; \; (z)_0 = 0; \; (t)_0 = 0$$

В общем случае сопротивление воздуха выражается формулою

$$\frac{R}{P} = A \cdot K(v) \cdot v^2 \cdot f(z) \tag{5}$$

где A есть некоторая постоянная для данного снаряда, $K(v)$ — некоторая функция скорости v, даваемая таблицею, составленною эмпирически, $f(z)$ есть

отношение плотности воздуха на высоте z к плотности на уровне точки вылета, которую мы примем на уровне моря. Эта функция также дается таблицею.

Отсюда ясно, что система уравнений (1) — (4) распадается на систему уравнений (1) и (3), заключающих по три переменных φ, u, z, и уравнения (2) и (4), которые содержат только по две переменных и непосредственно приводятся к квадратурам после того, как неизвестная функция u или v выражена через φ.

Так как функции $K(v)$ и $f(z)$ задаются таблично или графически, то система (1), (3) может быть интегрируема только численно. Для такого численного интегрирования, написав уравнение (1) так:

$$-\frac{u'}{u} = \frac{R}{P}\operatorname{cosec}\varphi$$

полагаем

$$q = \log_{10}\frac{u_0}{u} = M\cdot\log\frac{u_0}{u}$$

тогда будет

$$q' = -M\frac{u'}{u}$$

и уравнение (1) примет вид

$$q' = \frac{MR}{P}\operatorname{cosec}\varphi$$

причем

$$M = 0.43429\ldots$$

§ **20.** Итак, нам придется интегрировать по методе Адамса-Штёрмера систему:

$$q' = CK(v)\cdot v^2\cdot f(z)\cdot\operatorname{cosec}\varphi \qquad (6)$$

$$z' = \frac{1}{g}v^2\operatorname{cotg}\varphi \qquad (7)$$

причем

$$v = u\operatorname{cosec}\varphi;\quad q = \log_{10}\frac{u_0}{u}$$

так что

$$\log_{10}u = \log_{10}u_0 - q$$

Для ясности дальнейшего изложения и примера привожу краткую таблицу значений $\operatorname{Log}K(v)$ и $\operatorname{Log}f(z)$, воспользовавшись для составления первой данными «Внешней баллистики» Н. А. Забудского, для второй — труда В. М. Трофимова — «Вычисление траектории снаряда, брошенного с большою начальною скоростью и под большим углом возвышения».

Таблица 11

Значения Log $K(v)$

v	Log $K(v)$	v	Log $K(v)$	v	Log $K(v)$	v	Log $K(v)$	v	Log $K(v)$
1100	$\bar{2}$.4843	650	$\bar{2}$.5740	380	$\bar{2}$.5527	290	$\bar{2}$.2279	200	$\bar{2}$.1461
1050	4942	600	5843	370	5302	280	2122	190	1461
1000	5024	550	5955	360	4955	270	1959	180	1461
950	5145	500	5955	350	4579	260	1818	170	1461
900	5237	450	5955	340	4200	250	1644	160	$\bar{2}$.1461
850	5353	420	5955	330	3820	240	1461		
800	5465	410	5855	320	3424	230	1461		
750	5551	400	5752	310	3010	220	1461		
700	$\bar{2}$.5635	390	$\bar{2}$.5647	300	$\bar{2}$.2577	210	2.1461		

Скорость v выражена в метрах в секунду, сопротивление воздуха R — в килограммах.

Таблица 12

Значения Log $f(z)$

z	Log $f(z)$	z	Log $f(z)$	z	Log $f(z)$	z	Log $f(z)$	z	Log $f(z)$
0	0.0000	5	$\bar{1}$.7551	10	$\bar{1}$.4771	15	$\bar{1}$.1430	20	$\bar{2}$.7993
1	$\bar{1}$.9533	6	7024	11	4150	16	0719	21	7324
2	9053	7	6484	12	3502	17	$\bar{1}$.0000	22	6744
3	8561	8	5933	13	2833	18	$\bar{2}$.9294	23	5964
4	$\bar{1}$.8062	9	$\bar{1}$.5366	14	1.2148	19	$\bar{2}$.8633	24	$\bar{2}$.5284

Высота z над уровнем моря выражена в километрах.

Самый процесс численного интегрирования уравнений по методе Адамса-Штёрмера, в применении к нашему вопросу, лучше всего уясняется на численном примере, проделанном со всею подробностью.

Для такого примера вообразим, что взят 12-дюймовый (304.8 мм) снаряд, брошенный под углом возвышения 35°, т. е. $\varphi_0 = 55°$, с начальною скоростью 800 м/сек., причем, чтобы иметь более резкое влияние сопротивления воздуха, снаряд предположим легкий, $P = 360$ кг, и тупого очертания (коэффициент формы $\lambda = 1$). Таким образом имеем:

Данные:

$$P = 360;\ v_0 = 800;\ g = 9.81;\ r = 0.1524$$

Формулы:

$$R = \lambda \pi r^2 \cdot K(v) \cdot v^2 \cdot f(z)$$

$$\omega = q' h = \frac{MR}{P} h \cdot \operatorname{cosec} \varphi = CK(v) v^2 f(z) \cdot h \operatorname{cosec} \varphi$$

$$\zeta = z' h = \frac{h}{g} \cdot v^2 \operatorname{cotg} \varphi$$

$$v = u \operatorname{cosec} \varphi; \quad q = \log \frac{u_0}{u}$$

$$\Delta q_n = \omega_n + \frac{1}{2} \Delta \omega_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \omega_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 \omega_{n-3}$$

$$\Delta z_n = \zeta_n + \frac{1}{2} \Delta \zeta_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \zeta_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 \zeta_{n-3}$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta q_n$$

$$z_{n+1} = z_n + \Delta z_n$$

Табличный промежуток h берем настолько малым, чтобы члены, зависящие от разностей третьего порядка: $\frac{3}{8} \Delta^3 \omega_{n-3}$, составляли не более 10 единиц пятого знака $\log u$, член $\frac{3}{8} \Delta^3 \zeta_{n-3}$ — не более 1 м в высоте z. Получаемая таким образом точность вычисленных результатов далеко превосходит достижимую стрельбою.

Чтобы начать вычисление по этим формулам, надо прежде всего выбрать величину промежутка h и вычислить первые четыре значения q и z.

Мы проще всего достигнем этого воспользовавшись разложением величин q и z в ряд по степеням h и взяв h настолько малым, чтобы член $\frac{h^2}{2} q''$ не превышал 5 единиц четвертой значащей цифры в величине q, что будет соответствовать 5 единицам в пятом знаке $\log u$.

При скоростях от 800 до 700 м величина $K(v)$, со всею точностью, с которою она дается в таблицах, представляется формулой

$$K(v) = 0.0352 + 0.000014v$$

Точно так же $f(z)$ на протяжении от $z = 0$ до $z = 1$ кг представляется формулою

$$f(z) = 1 - 0.102z \text{ (кг)} = 1 - 0.000102z \text{ (м)}$$

Мы будем эти формулы для сокращения писать:

$$K(v) = a + bv$$

$$f(z) = 1 - \alpha z$$

Следовательно, будет:

$$q' = C(a + bv)v^3(1 - \alpha z)\operatorname{cosec}\varphi$$

$$z' = \frac{v^2}{g}\operatorname{cotg}\varphi$$

Взяв логарифмическую производную, имеем:

$$\frac{q''}{q'} = \left(\frac{b}{a + b\omega} + \frac{2}{v}\right)v' = \frac{\alpha z'}{1 - \alpha z} - \operatorname{cotg}\varphi$$

$$\frac{z''}{z'} = \frac{2}{v}\cdot v' - \operatorname{tang}\varphi - \operatorname{cotg}\varphi$$

Но

$$v = u\operatorname{cosec}\varphi$$

следовательно

$$\frac{v'}{v} = \frac{u'}{u} - \operatorname{cotg}\varphi = -\frac{1}{M}q' - \operatorname{cotg}\varphi = -2.302\,q' - \operatorname{cotg}\varphi$$

Таким образом будет:

$$\frac{z''}{z'} = -\left[\frac{2}{M}q' + \operatorname{tang}\varphi + 3\operatorname{cotg}\varphi\right] = -\left[4.605\,q' + \operatorname{tang}\varphi + 3\operatorname{cotg}\varphi\right]$$

$$\frac{q''}{q'} = \frac{b}{a + bv}\cdot v' + \frac{2v'}{v} - \frac{\alpha z'}{1 - \alpha z} - \operatorname{cotg}\varphi$$

Нужные нам постоянные суть:

$$C = \frac{\pi r^2 M}{P}; \quad \log C = \bar{5}.94459; \quad \frac{1}{M} = 2.3026$$

$$q_0' = CK(v_0)v_0^2\operatorname{cosec}\varphi_0 = 2.420$$

$$z_0' = \frac{1}{g}v_0^2\operatorname{cotg}\varphi_0 = 45680$$

Затем имеем:

$$\left(\frac{v'}{v}\right)_0 = -\frac{1}{M} q_0' - \operatorname{cotg} \varphi_0 = -6.27; \quad v_0' = -5020$$

$$\left(\frac{q''}{q'}\right)_0 = \left(\frac{b}{a+bv} \cdot v' + \frac{2v'}{v} - \frac{\alpha z'}{1-\alpha z} - \operatorname{cotg} \varphi\right)_0 = -1941$$

$$q_0'' = -47,_0$$

$$\left(\frac{z''}{z'}\right)_0 = \left(\frac{2v'}{v} - \operatorname{tang} \varphi - \operatorname{cotg} \varphi\right) = -14.67$$

$$z_0'' = -671000$$

Берем h так, чтобы было $\frac{h^2}{2} \cdot q_0'' < 0.0005$, тогда $h \leqq \frac{1}{220}$, поэтому, если взять $h = \frac{1}{229.2} = 0°15'$, то это неравенство будет удовлетворено, вместе с тем будет $\frac{h^2}{2} z_0'' < \frac{671000}{93800} = 7$ м, а так как $z_0' h = 199$ м, то и для величин z вычисление дальнейших членов разложения не нужно.

При

$$h = 0° 15' = \frac{1}{229.2}$$

будет:

$$\log A = \log hC = \bar{7}.58441$$

$$q_0' h = 0.01056; \quad \log \frac{h}{g} = \bar{4}.64815$$

Величина $q_0' h = 0.01056$, составляющая приращение обыкновенного логарифма u, показывает, что четвертая значащая цифра в величине $q' h$ соответствует *пятому* знаку $\log u$, поэтому, если $qh = \omega$ вычислять по четырехзначным логарифмам или на 50-сантиметровой логарифмической линейке, то в логарифмах u и v можно сохранять и *пятый* знак, чтобы ручаться за первые четыре.

Избрав величину h, вычисляем, как показано в примере, величины

$$\Delta q_0 = q_0' h + \frac{1}{2} h^2 q_0'' \quad \text{и} \quad \Delta z_0 = z_0' h + \frac{1}{2} h^2 z_0''$$

которые оказываются:

$$\Delta q_0 = 0.01011; \quad \Delta z_0 = 192.8$$

и при

$$q_0 = 0 \quad \text{и} \quad z_0 = 0$$

получаем:

$$q_1 = 0.01011; \quad z_1 = 192.8$$

Так как

$$\log u_0 = 2.81645$$

то будет:

$$\log u_1 = 2.80634; \quad \log v_1 = 2.89165, \quad \text{и} \quad v_1 = 779.2$$

По этим величинам находим q_1', q_1'', z_1', z_1'', составляем Δq_1 и Δz_1 и получаем q_2 и z_2, и u_2 и v_2, затем совершенно так же определяем q_3, z_3, u_3, v_3, после чего дальнейшее вычисление уже ведем по методе Адамса-Штёрмера.

При производстве этого вычисления тотчас же обнаруживается, что избранный промежуток h настолько мал, что не только третьи разности $\Delta^3 \omega_n$ и $\Delta^3 \zeta_n$ не оказывают влияния на последний знак, но и вторые, поэтому промежуток h можно увеличить вдвое, что и сделано после $n = 10$. Затем h вновь удвоено после $n = 16$ и еще раз при $n = 30$, и с этим последним значением ($h = 2°$) вычисление доводится до конца (табл. 13).

§ **21.** После того как величины z, u, v найдены, абсциссы x и времена полета t находятся, выполнив квадратуры:

$$x_n = \frac{1}{g}\int_{\varphi_0}^{\varphi_n} (u \operatorname{cosec} \varphi)^2 \cdot d\varphi = \frac{1}{g}\int_{\varphi_0}^{\varphi_n} v^2 \, d\varphi$$

$$t_n = \frac{1}{g}\int_{\varphi_0}^{\varphi_n} \frac{u}{\sin \varphi} \cdot \operatorname{cosec} \varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{g}\int_{\varphi_0}^{\varphi_n} v \operatorname{cosec} \varphi \cdot d\varphi$$

для которых уже имеются готовые логарифмы: стоит только к $\log v^2$ придавать $\log \frac{h}{g}$, мы получим $\log \xi_n = \log x_n' h$. Совершенно так же, сложив сперва $\log v_n$ и $\log \operatorname{cosec} \varphi_n$, которые и помещены для этого в смежных столбцах схемы, получим $\log v_n \operatorname{cosec} \varphi_n$, придав к которому тот же $\log \frac{h}{}$ получим

$$\log \tau_n = \log t_n' h$$

Самая квадратура выполняется по формуле Лапласа

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_n} F(\varphi_n)\cdot d\varphi = T_n + P_n$$

где

$$T_n = \frac{1}{2}\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{n-1} + \frac{1}{2}\xi_n$$

$$P_n = -\frac{1}{12}[\Delta\xi_{n-1} - \Delta\xi_0] - \frac{1}{24}[\Delta^2\xi_{n-2} - \Delta^2\xi_0]\ldots$$

причем

$$\xi_k = h\cdot F(\varphi_0 + kh)$$

В нашем случае промежуток h оказывается настолько малым, что в поправке P_n можно или ограничиваться первым ее членом, или отбрасывать ее совсем, тем не менее разности $\Delta\xi$, $\Delta^2\xi$, $\Delta\tau$, $\Delta^2\tau$ следует вычислять, чтобы по правильности их хода убеждаться, что в вычисление не вкралась ошибка.

§ **22.** Для вычисления координат вершины траектории, когда в число табличных значений $\varphi = 90°$ не вошло (как это сделано нарочно в нашем примере), надо воспользоваться ближайшим к 90° значением φ_k и, заметив, что в вершине радиус кривизны траектории $\rho = \frac{v^2}{g}$, скорость же v изменяется так медленно, что для ее получения вполне достаточно интерполирования по первым разностям, положив

$$\frac{\pi}{2} - \varphi_k = \alpha$$

будем иметь:

$$Z_0 - z_k = 2\rho\sin^2\frac{1}{2}\alpha$$

$$X_0 - x_k = \rho\sin\alpha$$

Соответствующее время будет

$$T_0 = t_k + \frac{X_0 - X_k}{V}$$

Для определения точки падения имеем значение $z = 0$, соответственно которому интерполируем: значение угла φ (угол падения), значение X (дальность) и T (время полета) и окончательную скорость V_1. Интерполирование можно производить по обычной формуле Ньютона, ограничиваясь вторыми разностями.

Таблица 13

Вычисление траектории 12-дюймового снаряда

Данные: $P = 360$ кг; $r = 0.1524$ м; $\lambda = 1$; $v_0 = 800$ м/сек.; $\vartheta_0 = 35^\circ$
$\varphi_0 = 55^0$; $g = 9.81$ м/сек.

Формулы: $q' = CK(v)\, v^2 f(z) \operatorname{cosec} \varphi$, $\quad \operatorname{Log} C = 5.9440$

$z' = \frac{1}{g} v^2 \operatorname{cotg} \varphi$; $\quad \operatorname{Log} \frac{1}{g} = 1.0083$

$v' : v = -2.302\, q' - \operatorname{cotg} \varphi$

$q'' : q' = bv' : (\alpha + bv) + 2v' : v - \alpha z' : (1 - \alpha z) - \operatorname{cotg} \varphi$

$z'' : z' = 2v' : v - \operatorname{tang} \varphi - \operatorname{cotg} \varphi$; $\quad \alpha = 0.352$; $\quad b = 0.000014$
$\alpha = 0.000102$

$q_{n+1} = q_n + h q_n' + \frac{h^2}{2} z_n''$ $\quad h = 0.004363$

$z_{n+1} = z_n + h z_n' + \frac{h^2}{2} q_n''$ $\quad \frac{h^2}{2} = 0.0000095$

a) Вычисление величин: q_n' и q_n'', u_n, v_n

n	0	1	2	3
Log	φ_n			
	55°00′	55°15′	55°30′	55°45′
$C \operatorname{cosec} \varphi$	$\bar{4}.0312$	$\bar{4}.0299$	$\bar{4}.0286$	$\bar{4}.0273$
v^2	5.8062	5.7833	5.7618	5.7414
$K(v)$	$\bar{2}.5465$	$\bar{2}.5502$	$\bar{2}.5534$	$\bar{2}.5565$
$f(z)$	0.0000	$\bar{1}.9910$	$\bar{1}.9825$	$\bar{1}.9745$
$\log q'$	0.3839	0.3544	0.3263	0.2997
q'	2.420	2.260	2.119	1.993
$q' \cdot h$	0.01056	0.00985	0.00925	0.00870
$-2.30\, q'$	— 5.57	— 5.20	— 4.87	— 4.58
$-\operatorname{cotg} \varphi$	— 0.70	— 0.69	— 0.69	— 0.68
$v' : v$	— 6.27	— 5.89	— 5.56	— 5.26
v'	— 5020	— 4590	— 4230	— 3905
$bv' : a + bv$	— 1.52	— 1.40	— 1.30	— 1.23
$2v' : v$	— 12.54	— 11.78	— 11.12	— 10.52
$-\alpha z' : (1 - \alpha z)$	— 4.65	— 4.40	— 4.29	— 4.12
$-\operatorname{cotg} \varphi$	— 0.70	— 0.69	— 0.69	— 0.68

(Продолжение)

n	0	1	2	3
Log	φ_n			
	55°00′	55°15′	55°30′	55°45′
$q'' : q'$	— 19.41	— 18.27	— 17.40	— 16.55
q''	— 47.0	— 41.3	— 36.8	— 32.9
$\frac{1}{2} h^2 q''$	— 0.00045	— 0.00039	— 0.00033	— 0.00030
$q_{n+1} - q_n$	0.01011	0.00946	0.00890	0.00838
$\log u$	2.81645	2.80634	2.79688	2.78798
$\log \operatorname{cosec} \varphi$	0.08664	0.08531	0.08401	0.08271
$\log v$	2.90309	2.89165	2.88089	2.87069
v	800	779.2	760.1	742.5

b) Вычисление величин: z_n', z_n'', z_n

n	0	1	2	3
Log	φ_n			
	55°00′	55°15′	55°30′	55°45′
$\frac{1}{2} \operatorname{cotg} \varphi$	$\bar{2}.8535$	$\bar{2}.8495$	$\bar{2}.8454$	$\bar{2}.8414$
v^2	5.8062	5.7833	5.7613	5.7414
$\operatorname{tang} z'$	4.6597	4.6328	4.6072	4.5828
z'	45680	42930	40460	38250
$z' h$	199.2	187.1	176.5	166.9
$-\operatorname{cotg} \varphi$	— 0.70	— 0.69	— 0.69	— 0.68
$2v' : v$	— 12.54	— 11.78	— 11.12	— 10.52
$-\operatorname{tang} \varphi$	— 1.43	— 1.44	— 1.45	— 1.47
$z'' : z'$	— 14.67	— 13.91	— 13.26	— 12.67
z''	— 671000	— 598000	— 537000	— 484900
$\frac{1}{2} z'' \cdot h^2$	— 6.4	— 5.6	— 5.1	— 4.6
$z_{n+1} - z_n$	192.8	181.5	171.4	162.3
z_n	0.0	192.8	374.3	545.7

Найденные величины

$$q_n' h = \omega_n$$
$$z_n' h = \xi_n$$

вписываем в соответствующие места табл. 13d, после чего ведем параллельное вычисление как чисел этой таблицы, так и чисел табл. 13c.

c) Вычисление величин: $\omega_n = q_n' \cdot h$ и $\zeta_n = z_n' \cdot h$ *(Продолжение)*

Формулы: $\omega_n = A \cdot K(v) \cdot v^2 \cdot f(z) \cdot \operatorname{cosec} \varphi_n$

$$\zeta_n = \frac{h}{g} \cdot v^2 \cdot \operatorname{cotg} \varphi_n$$

Постоянные

n	Log A	Log h/g
0—10	$\bar{7}.5844$	$\bar{4}.6481$
11—17	$\bar{7}.8854$	$\bar{4}.9491$
17—30	$\bar{6}.1864$	$\bar{3}.2501$
31—64	$\bar{6}.4874$	$\bar{3}.5511$

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Log	φ									
	56°00′	56°15′	56°30′	56°45′	57°00′	57°15′	57°30′	58°00′	58°30′	59°00′
A cosec φ	$\bar{7}.6658$	$\bar{7}.6646$	$\bar{7}.6633$	$\bar{7}.6620$	$\bar{7}.6608$	$\bar{7}.6596$	$\bar{7}.6584$	$\bar{7}.9570$	$\bar{7}.9546$	$\bar{7}.9523$
v^2	5.7220	5.7036	5.6859	5.6691	5.6530	5.6375	5.6227	5.5946	5.5685	5.5440
$K(v)$	$\bar{2}.5592$	$\bar{2}.5627$	2.5643	2.5670	$\bar{2}.5696$	$\bar{2}.5722$	$\bar{2}.5746$	2.5787	$\bar{2}.5826$	$\bar{2}.5862$
$f(z)$	$\bar{1}.9668$	$\bar{1}.9598$	$\bar{1}.9529$	$\bar{1}.9462$	$\bar{1}.9398$	$\bar{1}.9337$	$\bar{1}.9270$	$\bar{1}.9169$	$\bar{1}.9069$	$\bar{1}.8973$
log ω_n	$\bar{3}.9138$	$\bar{3}.8907$	$\bar{3}.8664$	$\bar{3}.8443$	$\bar{3}.8232$	$\bar{3}.8030$	$\bar{3}.7836$	$\bar{2}.0472$	$\bar{2}.0126$	$\bar{3}.9798$
ω_n	0.00820	777	735	698	666	635	608	0.01115	1029	955
$\frac{h}{g}$ cotg φ	$\bar{4}.4771$	$\bar{4}.4730$	$\bar{4}.4689$	$\bar{4}.4648$	$\bar{4}.4606$	$\bar{4}.4565$	$\bar{4}.4523$	$\bar{4}.7449$	$\bar{4}.7364$	$\bar{4}.7279$
log ζ_n	2.1991	2.1766	2.1548	2.1339	2.1136	2.0940	2.0750	2.3395	2.3049	2.2719
ζ_n	158.2	150.2	142.8	136.1	130.0	124.2	118.9	218.5	201.8	187.1

n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Log	φ									
	59°30′	60°	60°30′	61°30′	62°30′	63°30′	64°30′	65°30′	66°30′	67°30′
A cosec φ	$\bar{7}.9501$	$\bar{7}.9479$	$\bar{6}.2467$	$\bar{6}.2425$	$\bar{6}.2385$	$\bar{1}.2346$	$\bar{6}.2309$	$\bar{6}.2271$	$\bar{6}.2240$	$\bar{6}.2208$
v^2	5.5211	5.4995	5.4790	5.4413	5.4081	5.3767	5.3484	5.3222	5.2979	5.2753
$K(v)$	$\bar{2}.5897$	$\bar{2}.5927$	$\bar{2}.5955$	$\bar{2}.5955$	$\bar{2}.5955$	$\bar{2}.5955$	$\bar{2}.5955$	$\bar{2}.5955$	$\bar{2}.5955$	$\bar{2}.5955$
$f(z)$	$\bar{1}.8884$	$\bar{1}.8801$	$\bar{1}.8725$	$\bar{1}.8567$	$\bar{1}.8460$	$\bar{1}.8349$	$\bar{1}.8249$	$\bar{1}.8159$	$\bar{1}.8080$	$\bar{1}.8006$
log ω_n	$\bar{3}.9493$	$\bar{3}.9202$	$\bar{2}.1937$	$\bar{2}.1360$	$\bar{2}.0881$	$\bar{2}.0417$	$\bar{3}.9997$	$\bar{3}.9600$	$\bar{3}.9254$	$\bar{3}.8922$
ω_n	890	832	1562	1368	1225	1101	999	914	842	780
$\frac{h}{g}$ cotg φ	$\bar{4}.7192$	$\bar{4}.7105$	$\bar{3}.0027$	$\bar{4}.9849$	$\bar{4}.9666$	$\bar{4}.9478$	$\bar{4}.9286$	$\bar{4}.9088$	$\bar{4}.8884$	$\bar{4}.8673$
log ζ_n	2.2403	2.2100	2.4817	2.4262	2.3746	2.3245	2.2768	2.2308	2.1863	2.1426
ζ_n	173.9	162.2	303.2	266.8	236.9	211.1	189.2	170.1	153.6	138.9

n	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
Log	φ									
	68°30′	69°30′	70°30′	71°30′	72°30′	73°30′	74°30′	76°30′	78°30′	80°30′
A cosec φ	$\bar{6}.2179$	$\bar{6}.2148$	$\bar{6}.2121$	$\bar{6}.2094$	$\bar{6}.2070$	$\bar{6}.2047$	$\bar{6}.2025$	$\bar{6}.4996$	$\bar{6}.4962$	$\bar{6}.4934$
v^2	5.2541	5.2342	5.2160	5.1989	5.1829	5.1680	5.1540	5.1288	5.1071	5.0887
$K(v)$	$\bar{2}.5955$	$\bar{2}.5896$	$\bar{2}.5809$	$\bar{2}.5727$	$\bar{2}.5651$	$\bar{2}.5569$	$\bar{2}.5473$	$\bar{2}.5191$	$\bar{2}.4869$	$\bar{2}.4590$
$f(z)$	$\bar{1}.7938$	$\bar{1}.7877$	$\bar{1}.7820$	$\bar{1}.7770$	$\bar{1}.7724$	$\bar{1}.7682$	$\bar{1}.7641$	$\bar{1}.7579$	$\bar{1}.7527$	$\bar{1}.7483$
log ω_n	$\bar{3}.8613$	$\bar{3}.8263$	$\bar{3}.7910$	$\bar{3}.7580$	$\bar{3}.7275$	$\bar{3}.6978$	$\bar{3}.6679$	$\bar{3}.9054$	$\bar{3}.8429$	$\bar{3}.7894$
ω_n	727	670	618	573	534	499	466	804	696	616
$\frac{h}{g}$ cotg φ	$\bar{4}.8455$	$\bar{4}.8228$	$\bar{4}.7993$	$\bar{4}.7745$	$\bar{4}.7488$	$\bar{4}.7217$	$\bar{4}.6931$	$\bar{4}.9315$	$\bar{4}.8596$	$\bar{4}.7747$
log ζ_n	2.0996	2.0570	2.0153	1.9734	1.9317	1.8897	1.8471	2.0603	1.9668	1.8634
ζ_n	125.8	114.1	103.6	94.1	85.5	77.6	70.3	114.9	92.6	73.0

(Продолжение)

n	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
Log	φ									
	82°30′	84°30′	86°30′	88°30′	90°30′	92°30′	94°30′	96°30′	98°30′	100°30′
A cosec φ	$\bar{6}.4911$	$\bar{6}.4894$	$\bar{6}.4882$	$\bar{6}.4875$	$\bar{6}.4874$	$\bar{6}.4878$	$\bar{6}.4887$	$\bar{6}.4902$	$\bar{6}.4922$	$\bar{6}.4947$
v^2	5.0715	5.0577	5.0456	5.0355	5.0268	5.0192	5.0120	5.0084	5.0048	5.0022
$K(v)$	$\bar{2}.4325$	$\bar{2}.4120$	$\bar{2}.3942$	$\bar{2}.3804$	$\bar{2}.3666$	$\bar{2}.3554$	$\bar{2}.3464$	$\bar{2}.3395$	$\bar{2}.3381$	$\bar{2}.3330$
$f(z)$	$\bar{1}.7448$	$\bar{1}.7424$	$\bar{1}.7408$	1.7378	$\bar{1}.7396$	$\bar{1}.7401$	$\bar{1}.7412$	$\bar{1}.7431$	$\bar{1}.7456$	$\bar{1}.7488$
$\log \omega_n$	$\bar{3}.7400$	$\bar{3}.7015$	$\bar{3}.6688$	$\bar{3}.6432$	$\bar{1}.6204$	$\bar{3}.6025$	$\bar{3}.5883$	$\bar{3}.5812$	$\bar{3}.5807$	$\bar{3}.5787$
ω_n	550	503	466	440	417	400	388	380	379	382
$\frac{g}{h}\operatorname{cotg}\varphi$	$\bar{5}.6705$	$\bar{4}.5347$	$\bar{4}.3376$	$\bar{5}.9692$	$\bar{5}.4920(n)$	$\bar{4}.1912$	$\bar{4}.4471$	$\bar{4}.6078$	$\bar{4}.7256$	$\bar{4}.8191$
$\log \zeta_n$	1.7420	1.5924	1.3832	1.0047	0.5188	1.2104	1.4591	1.6162	1.7304	1.8213
ζ_n	55.2	39.1	24.2	10.1	—3.3	—16.2	—28.8	—41.3	—53.8	—66.3

n	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
Log	φ									
	102°30′	104°30′	106°30′	108°30′	110°30′	112°30′	114°30′	116°30′	118°30′	120°30′
A cosec φ	$\bar{6}.4978$	$\bar{6}.5015$	$\bar{6}.5057$	$\bar{6}.5104$	$\bar{6}.5158$	$\bar{6}.5218$	$\bar{6}.5284$	$\bar{6}.5356$	$\bar{6}.5435$	$\bar{6}.5521$
v^2	5.0009	5.0004	5.0011	5.0026	5.0082	5.0050	5.0122	5.0170	5.0222	5.0281
$K(v)$	$\bar{2}.3279$	$\bar{2}.3275$	$\bar{2}.3283$	$\bar{2}.3308$	$\bar{2}.3345$	$\bar{2}.3391$	$\bar{2}.3452$	$\bar{2}.3523$	$\bar{2}.3600$	$\bar{2}.3686$
$f(z)$	$\bar{1}.7558$	$\bar{1}.7572$	$\bar{1}.7620$	$\bar{1}.7675$	$\bar{1}.7737$	$\bar{1}.7807$	$\bar{1}.7885$	$\bar{1}.7992$	$\bar{1}.8087$	$\bar{1}.8193$
$\log \omega_n$	$\bar{3}.5824$	$\bar{3}.5866$	$\bar{3}.5971$	$\bar{3}.6113$	$\bar{3}.6290$	$\bar{3}.6498$	$\bar{3}.6743$	$\bar{3}.7041$	$\bar{3}.7344$	$\bar{3}.7681$
ω_n	382	386	395	409	426	447	472	506	543	586
$\frac{g}{h}\operatorname{cotg}\varphi$	$\bar{4}.8969$	$\bar{4}.9638$	$\bar{3}.0232$	$\bar{3}.0756$	$\bar{1}.1238$	$\bar{3}.1683$	$\bar{3}.2098$	$\bar{3}.2488$	$\bar{3}.2859$	$\bar{3}.3212$
$\log \zeta_n$	1.8978	1.9642	2.0243	2.0782	2.1288	2.1765	2.2220	2.2658	2.3081	2.3493
ζ_n	—79.0	—92.1	-105.8	-119.7	-134.6	-150.1	-166.7	-184.4	-203.3	-223.5

n	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
Log	φ									
	122°30′	124°30′	126°30′	128°30′	130°30′	132°30′	134°30′	136°30′	138°30′	140°30′
A cosec φ	$\bar{6}.5614$	$\bar{6}.5714$	$\bar{6}.5822$	$\bar{6}.5939$	$\bar{6}.6064$	$\bar{6}.6198$	$\bar{6}.6342$	$\bar{6}.6496$	$\bar{6}.6661$	$\bar{6}.6839$
v^2	5.0345	5.0412	5.0481	5.0552	5.0622	5.0689	5.0752	5.0811	5.0857	5.0897
$K(v)$	$\bar{2}.3780$	$\bar{2}.3881$	$\bar{2}.3980$	$\bar{2}.4086$	$\bar{2}.4189$	$\bar{2}.4291$	$\bar{2}.4382$	$\bar{2}.4472$	$\bar{2}.4541$	$\bar{2}.4602$
$f(z)$	$\bar{1}.8312$	$\bar{1}.8439$	$\bar{1}.8579$	$\bar{1}.8725$	$\bar{1}.8894$	$\bar{1}.9079$	$\bar{1}.9266$	$\bar{1}.9474$	$\bar{1}.9695$	$\bar{1}.9935$
$\log \omega_n$	$\bar{3}.8051$	$\bar{3}.8446$	$\bar{3}.8862$	$\bar{3}.9302$	$\bar{3}.9761$	$\bar{2}.0257$	$\bar{2}.0742$	$\bar{2}.1254$	$\bar{2}.1754$	$\bar{2}.2273$
ω_n	638	699	770	852	948	1061	1186	1335	1498	1688
$\frac{g}{h}\operatorname{cotg}\varphi$	$\bar{3}.3553$	$\bar{3}.3882$	$\bar{3}.4203$	$\bar{3}.4517$	$\bar{3}.4826$	$\bar{3}.5132$	$\bar{5}.5435$	$\bar{3}.5739$	$\bar{3}.6043$	$\bar{3}.6350$
$\log \zeta_n$	2.3898	2.4294	2.4684	2.5069	2.5448	2.5821	2.6187	2.6550	2.6900	2.7247
ζ_n	-245.4	-268.8	-294.0	-321.3	-350.6	-382.0	-415.6	-451.9	-489.8	-530.5

d) Вычисление величин z_n, u_n, v_n *(Продолжение)*

Формулы: $\Delta z_n = \zeta_n + \frac{1}{2}\Delta\zeta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\zeta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\zeta_{n-3}$ $\quad \Delta q_n = \omega_n + \frac{1}{2}\Delta\omega_{n-1} + \frac{5}{8}\Delta^2\omega_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\omega_{n-2}$

$z_{n+1} = z_n + \Delta z_n$ $\quad q_{n+1} = q_n + \Delta q_n$; $\quad \log u_n = \log u_0 - q_n$.

n	ζ_n	$\Delta\zeta_n$	$\Delta^2\zeta_n$	$\Delta^3\zeta_n$	Δz_n	z_n	ω_n	$\Delta\omega_n$	$\Delta^2\omega_n$	$\Delta^3\omega_n$	Δq_n	$\log u_n$	$\log$ cosec φ	$\log v_n$	v_n
0	199.2					0.0	1056					2.81645	0.08664	2.90309	800.0
		— 12.1			192.8			— 71							
1	187.1		+ 1.5			192.8	985		+ 9		1011	80634	8531	89165	779.2
		10.6		— 0.5				— 62							
2	176.5		1.0		181.5	374.3	925		9	0	946	79688	8401	88089	760.1
		9.6		— 0.1				— 53							
3	166.9		0.9		171.4	545.7	870		3	— 6	890	78798	8271	87069	742.5
		8.7		— 0.2				— 50							
4	158.2		0.7		162.3	708.0	820		7	— 4	840	77958	8143	86101	726.1
		8.0		+ 0.1				— 43							
5	150.2		0.8		154.2	862.2	777		1	— 6	794	77164	8015	85179	710.9
		7.2		— 0.3				— 42							
6	142.8		0.5		146.4	1008.6	735		5	+ 4	759	76405	7889	84294	696.5
		6.7		+ 0.1				— 37							
7	136.1		0.6		139.6	1148.2	698		5	0	714	75691	7765	83456	683.2
		6.1		— 0.3				— 32							
8	130.0		0.3		132.9	1281.1	666		1	— 4	682	75009	7611	82650	670.7
		5.8		+ 0.2				— 31							
9	124.2		0.5		127.3	1408.4	635		4	+ 3	652	74357	7518	81875	658.8
		— 5.3						— 27							
10	118.9				121.5	1529.9	608				620	2.73737	0.07397	2.81134	647.6
6	285.6						1470								
		— 25.6						— 138							
8	260.0		+ 3.4				1332		+ 22						
		22.2		— 0.5				116		— 7					
10	237.8		2.9		227.7	1529.9	1216		15						
		19.3		— 0.3				101		0					
11	218.5		2.6		210.1	1757.6	1115		15	— 3	1167	2.72570	0.07158	2.79728	627.0
		16.7		— 0.6				86							
12	201.8		2.0		194.4	1967.7	1029		12	— 3	1070	71500	6923	78423	608.5
		14.7		— 0.5				74							
13	187.1		1.5		180.3	2162.1	955		9	— 2	992	70508	6693	77201	591.6
		13.2		0.0				69							
14	173.9		1.5		167.7	2342.4	890		7		921	69587	6468	76055	576.2
		— 11.7						— 58							
15	162.2					2510.1	832				860	68727	6247	74974	562.0
											807	2.67920	0.06030	2.73950	548.9
6	571.2														
		— 95.6													
10	475.6		+ 23.6												
		72.0		— 6.4											
12	403.6		16.2												
		55.8		— 5.7											
14	347.8		10.5			2342.4									
		45.3		— 1.1								2.67920	0.06030	2.73930	548.9
16	302.5		9.4		324.2	2666.4	1562								
		35.7		— 3.6				— 194							
17	266.8		5.8		282.2	2948.8	1368		+ 51		1465	66455	5610	72065	525.6
		29.9		— 1.7				143		— 32					
18	236.9		4.1		252.7	3201.5	1225		19		1256	65199	5207	70406	505.9
		25.8		— 0.2				124		+ 1					
19	211.1		3.9		223.0	3424.5	1101		20		1183	64016	4821	68837	487.9
		21.9		— 1.1				102		— 3					
20	189.2		2.8		199.3	3623.8	999		17		1035	62971	4451	67422	472.3
		19.1		— 0.2				85		— 4					
21	170.1		2.6		179.8	3803.6	914		13		958	62013	4098	66111	458.3
		16.5		— 0.6				72		— 3					
22	153.6		1.8		161.3	3964.9	842		10		878	61135	3760	64895	445.6
		14.7		— 0.2				62		— 1					
23	138.9		1.6		146.4	4111.3	780		9		808	60327	3438	63765	434.2
		13.1		— 0.2				53		— 5					
24	125.8		1.4		131.9	4243.2	727		+ 4		754	59573	3132	62705	423.7
		11.7		— 0.2				57		— 9					
25	114.1		1.2		118.8	4362.0	670		— 5		705	58868	2841	61709	414.1
		10.5		— 0.2				52		— 2					
26	103.6		1.0		108.8	4470.8	618		— 7		635	58233	2565	60798	405.5
		9.5		— 0.2				45		+ 1					
27	94.1		1.2		99.0	4569.8	573		— 6		591	57642	2304	59946	397.6
		8.6		— 0.5				39		+ 2					
28	85.5		0.7		89.8	4659.6	534		— 4		552	57090	2058	59148	390.4
		7.9		— 0.1				35		+ 2					
29	77.6		+ 0.6		82.4	4742.0	499		— 2		516	56574	1826	58400	383.7
		— 7.3						— 33							
30	70.3				73.8	4815.8	466				482	2.56092	0.01609	2.57701	377.6

24	251.6						1454	— 218							
26	207.2	—44.4	+ 8.2				1236	168	+ 50						
28	171.0	36.2	5.8	— 2.4			1068	136	32	— 18					
30	140.6	30.4	4.7	1.1		4815.8	932	128	8	— 24		2.56092	0.01609	2.57701	377.6
31	114.9	25.7	3.4	1.3	127.0	4942.8	804	108	20	+ 12	870	55222	1217	56439	366.8
32	92.6	22.3	2.7	0.7	103.6	5046.4	696	80	28	+ 2	753	54469	881	55350	357.7
33	73.0	19.6	1.8	0.9	82.6	5129.0	616	66	14	— 14	633	53836	600	54436	350.3
34	55.2	17.8	1.7	0.1	64.1	5193.1	550	47	19	— 5	605	53201	373	53574	343.3
35	39.1	16.1	1.2	0.5	46.8	5239.9	503	47	0	— 19	518	52683	200	52883	337.9
36	24.2	14.9	0.8	0.4	31.7	5271.6	466	26	21	— 21	486	52197	81	52278	333.2
37	10.1	14.1	0.7	0.1	18.7	5290.3	440	23	3	— 18	436	51761	15	51776	329.4
38	—3.3	13.4	0.5	0.2	+3.4	5293.7	417	17	6	— 3	425	51336	2	51338	326.1
39	16.2	12.9	0.3	0.3	—9.7	5284.0	400	12	5	— 1	416	50920	41	50961	323.3
40	28.8	12.6	0.1	0.2	22.5	5261.5	388	7	5	0	395	50525	134	50659	321.0
41	41.5	12.5	+ 0.0	0.1	35.1	5226.3	381	1	6	+ 1	384	50141	280	50421	319.3
42	53.8	12.5	— 1.5	1.5	47.5	5178.8	380	1	0	— 6	380	49761	480	50241	318.0
43	67.8	14.0	— 1.8	0.3	60.0	5118.8	379	3	+ 4	+ 4	382	49379	733	50112	317.0
44	79.0	11.2	1.9	— 0.1	74.8	5044.0	382	4	+ 1	— 3	377	49002	0.01042	50044	316.5
45	92.1	13.1	0.6	+ 1.3	85.3	4958.7	386	5		+ 4	386	48616	1406	50022	316.4
46	105.8	13.7	0.2	+ 0.4	99.6	4859.1	395	9	5	0	385	48230	1826	50056	316.6
47	119.7	13.9	1.0	— 0.8	112.5	4746.6	409	14	3	— 2	403	47827	2304	50131	317.2
48	134.6	14.9	0.6	— 0.4	126.6	4620.0	426	17	4	+ 1	418	47409	2841	50250	318.1
49	150.1	15.5	1.1	— 0.5	143.0	4477.0	447	21	4	0	435	46974	3438	50412	319.2
50	166.7	16.6	1.1	0.0	158.0	4319.0	472	25	9	+ 5	460	46514	4098	50612	320.7
51	184.4	17.7	1.2	— 0.1	175.7	4143.3	506	34	5	— 4	485	46029	4821	50850	322.5
52	203.3	18.9	1.3	— 0.1	193.8	3949.5	543	39	4	— 1	529	45500	5610	51110	324.4
53	223.5	20.2	1.7	— 0.4	212.9	3736.6	586	43	9	+ 5	564	44936	6468	51404	326.6
54	245.4	21.9	1.4	+ 0.3	234.3	3502.3	638	52	9	0	609	44327	7397	51724	329.0
55	268.8	23.4	1.8	— 0.4	257.4	3244.9	699	61	10	+ 1	670	43657	8401	52058	331.6
56	294.0	25.2	2.1	— 0.3	281.0	2963.9	770	71	11	+ 1	734	42923	0.09482	52405	334.2
57	321.3	27.3	2.0	+ 0.1	307.7	2656.3	852	82	14	+ 3	810	42113	0.10646	52759	337.0
58	350.6	29.3	2.3	— 0.3	336.2	2320.1	948	96	17	+ 4	899	41214	11895	53109	339.7
59	382.0	31.6	2.0	+ 0.3	366.2	1953.9	1061	113	11	— 6	1003	40211	13237	53448	342.4
60	415.6	33.6	1.7	+ 0.3	399.0	1554.9	1186	124	25	+ 14	1125	39086	14676	53762	344.8
61	450.9	35.3	3.6	— 1.9	433.3	1121.6	1335	149	10	— 15	1251	37835	16219	54054	347.2
62	489.8	38.9	— 1.8	+ 1.8	469.4	652.2	1498	159	35	+ 25	1425	36410	17874	54284	349.0
63	530.5	—40.7			511.5	+ 140.7	1688	194			1572	34838	19649	54487	350.6
64					550.8	— 410.1					1809	2.33029	21555	2.54564	351.3

Коорд. вершины $Z - z_{38} = 2\dfrac{V^2}{g} \cdot \sin^2(0°15'); \quad V = 326.9$

$$X - x_{38} = \frac{V^2}{g} \cdot \sin(0°30')$$

$X = 12642 - 95.4 = 12547; \quad Z = 5293.7 + 0.4 = 5294.1$

$$t_0 = t_{38} - \frac{95.4}{326.9} = 29.565 - 0.292 = 29.273.$$

Угол падения $\varepsilon = 550\,8 \cdot \psi - 19.7 \cdot \psi(\psi - 1) = 570.5\,\psi - 19.7\,\psi^2$

при $\varepsilon = 410.1$; $\psi = \dfrac{410.1}{570.5} - 19.7 \cdot \left(\dfrac{410.1}{570.5}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{570.5} = 0.719 + 0.018 + 0.737$

$\Delta\varphi = 0.737 \cdot 120 = 88'.4 = 1°28'.4$

$\varphi_1 = 142°30' - 1°28'.4 = 141°01'.6; \quad \Theta_1 = 51°01'.6$

Скорость при падении: $V_1 = 350.6 + 0.7\dfrac{140.7}{550.8} = 350.6 + 0.2 = 350.8$ м/сек.

e) Вычисление абсцисс x_n *(Продолжение)*

n	$\log \zeta_n$	$\zeta_n = \frac{hv^2}{g}$	$\frac{1}{2}$ суммы	Суммы	$\Delta\zeta_n$	$\Delta^2\zeta_n$	P_n	x_n
0	2.4543	284.7		0.0				0.0
			277.4		— 14.6	+ 1.5		
1	4314	270.1		277.4				277
			263.6		— 13.1	1.3		
2	4098	257.0		541.0				541
			251.1		— 11.8	1.2		
3	3894	245.2		792.1				792
			239.4		— 10.6	0.8	Меньше $\frac{1}{2}$ м	
4	3701	234.6		1032.0				1032
			229.7		— 9.8	0.8		
5	3517	224.8		1261.7				1262
			220.3		— 9.0	0.8		
6	3340	215.8		1482.0				1482
			211.7		— 8.2	0.7		
7	3172	207.6		1693.7				1694
			203.8		— 7.5	0.5		
8	3011	200.1		1897.5				1898
			196.6		— 7.0	0.5		
9	2856	193.1		2094.1				2094
			189.8		— 6.5			
10	2.2708	186.6		2283.9				2284
10	2.5718	373.1		2283.9				2284
			362.4		— 23.4	+ 3.0		
11	5437	349.7		2646.3				2646
			339.5		— 20.4	2.4		
12	5176	329.3		2985.8				2986
			320.3		—18.0	2.0	Меньше $\frac{1}{2}$ м	
13	4931	311.3		3306.1				3306
			303.3		— 16.0	1.6		
14	4702	295.3		3609.4				3609
			288.1		— 14.4	1.5		
15	4486	280.9		3897.5				3898
			274.5		— 12.9			
16	2.4281	268.0		4172.0				4172
16	2.7291	536.0		4172				4172
			513.7		— 44.6	+ 9.4	1	
17	6914	491.4		4686				4685
			474.3		35.2	2.5	1	
18	6582	455.2		5160				5159
			439.4		32.7	5.9	1	
19	6268	423.5		5600				5599
			410.1		26.8	3.4	2	
20	5985	396.7		6010				6008
			385.0		23.4	3.3	2	
21	5721	373.3		6395				6393
			363.3		20.1	2.2	2	
22	5480	353.2		6758				6756
			344.2		17.9	1.9	2	
23	5254	335.3		7202				7200
			327.3		16.0	1.7	2	
24	5042	319.3		7530				7528
			312.2		14.3	1.8	3	
25	4843	305.0		7842				7839
			298.7		12.5	1.2	3	
26	4661	292.5		8141				8138
			286.9		11.3	1.2	3	
27	4490	281.2		8428				8425
			275.6		10.1	0.9	3	
28	4330	271.1		8703				8700
			266.0		9.2	+ 0.9	3	
29	4181	261.9		8969				8966
			257.8		8.3		3	
30	1.4041	253.6		9227				9224

(Продолжение)

n	$\log \zeta_n$	$\zeta_n = \frac{hv^2}{g}$	$\frac{1}{2}$ суммы	Суммы	$\Delta\zeta_n$	$\Delta^2\zeta_n$	P_n	x_n
30	2.7051	507.1		9224				9224
			492.8		— 38.6			
31	6799	478.5		9717		15.3	0	9717
			466.8		23.3			
32	6582	455.2		10184		5.6	1	10183
			445.7		18.7			
33	6398	436.3		10630		1.8	2	10628
			427.7		16.9			
34	6226	419.5		11058		3.8	2	11056
			412.9		13.1			
35	6088	406.3		11471		1.9	2	11469
			400.7		11.2			
36	5967	395.1		11872		2.1	2	11870
			390.6		9.1			
37	5866	386.0		12263		1.5	3	12260
			382.2		7.6			
38	2.5779	378.4		12645			3	12642
38	2.5779	378.4		12642				12642
			375.1		— 6.6			
39	5703	371.8						13017
			368.7		6.1			
40	5631	305.7						13386
			364.2		3.0			
41	5595	362.7						13750
			361.2		3.0			
42	5559	359.7						14111
			358.6		2.2			
43	5533	357.5						14470
			357.0		1.0			
44	5520	356.5						14827
			356.3		— 0.4			
45	5515	356.1						15184
			356.3		+ 0.5			
46	5522	356.6						15540
			357.3		1.3			
47	5537	357.9						15898
			358.8		1.9			
48	5561	359.8						16257
			361.1		0.7			
49	5593	362.5						16618
			364.2		3.4			
50	5633	365.9						16982
			367.9		4.0			
51	5681	369.9						17350
			372.2		4.5			
52	5733	374.4						17722
			376.9		5.1			
53	5792	379.5						18099
			382.3		5.6			
54	5856	385.1						18381
			388.1		6.0			
55	5923	391.1						18769
			394.2		6.3			
56	5992	397.4						19153
			400.6		6.5			
57	6063	403.9						19564
			407.2		6.6			
58	6133	410.5						19971
			413.7		6.4			
59	6200	416.9						20385
			420.0		6.1			
60	6263	423.0						20805
			425.9		5.8			
61	6322	428.8						21231
			431.1		4.5			
62	6368	433.3						21662
			435.3		4.0			
63	6408	437.3						22097
			114.9					
64								22212

Нет надобности вычислять

Разность: $X - x_{63} = 140.7 \cdot \operatorname{cotg}(50°45'8) = 114.9$ м

Дальность: $X = 22212$ м

f) Вычисление времени полета t_n *(Продолжение)*

n	$\log v \operatorname{cosec} \varphi$	$\log \tau_n$	τ_n	$\frac{1}{2}$ суммы	Суммы	$\Delta\tau_n$	$\Delta^2\tau_n$	P_n	t_n
0	2.9897	$\bar{1}$.6378	0.4344	0.4282	0.0000	—0.0125	+ 9	—	0.0000
1	9770	6251	4219	4161	0.4282	116	9	0.0001	0.4281
2	9649	6130	4103	4050	0.8443	107	7	2	0.8441
3	9534	6015	3996	3946	1.2493	100	4	2	1.2491
4	9424	5605	3896	3850	1.6439	96	9	2	1.5437
5	9319	5800	3803	3760	2.0289	87	5	3	2.0286
6	9218	5699	3716	3675	2.4049	82	5	3	2.4046
7	9122	5603	3634	3695	2.7724	77	4	3	2.7721
8	9029	5510	3557	3541	3.1419	73	5	4	3.1415
9	8939	5420	3484	3450	3.4960	68		4	3.4956
10	2.8853	$\bar{1}$.5334	0.3416		3.8410			5	3.8405
10	2.8853	$\bar{1}$.8344	0.6830	0.6701	3.8405	— 253		0	3.8405
11	8689	8180	6577	6445	4.4109	229	24	2	4.4107
12	8535	8026	6348	6226	5.0554	210	19	3	5.0551
13	8389	7880	6138	6058	5.6780	191	19	5	5.6775
14	8252	7743	5947	5875	6.2838	175	16	6	6.2832
15	8122	7613	5772	5691	6.8713	162	13	6	6.8707
16	2.7998	$\bar{1}$.7489	0.5610		7.4804			7	7.4797
16	2.7998	0.0499	1.122	1.093	7.480	— 0.058	+ 8	0	7.480
17	7768	0269	1.064	1.039	8.573	50	6	— 1	8.573
18	7561	0.0062	1.014	0.992	9.612	44	5	1	9.611
19	7366	$\bar{1}$.9867	0.970	0.951	10.604	39	4	2	10.603
20	7187	9688	931	0.913	11.555	35	3	2	11.553
21	7020	9521	896	0.880	12.468	32	4	2	12.466
22	6865	9366	864	0.850	13.348	28	2	3	13.346
23	6720	9221	836	0.823	14.298	26	2	3	14.295
24	6584	9085	810	0.798	15.121	24	3	3	15.119
25	6455	8956	786	0.775	15.919	21	2	3	15.916
26	6336	8837	765	0.756	16.694	19	1	3	16.691
27	6225	8726	746	0.737	17.450	* 18	2	3	17.447
28	6120	8621	728	0.720	18.187	16	1	3	18.184
29	6023	8524	712	0.705	18.907	15		3	18.904
30	2.5931	$\bar{1}$.8432	0.697		19.612				19.609

(Продолжение)

n	$\log v \operatorname{cosec} \varphi$	$\log \tau_n$	τ_n	$\frac{1}{2}$ суммы	Суммы	$\Delta\tau_n$	$\Delta^2\tau_n$	P_n	t_n
30	2.5931	0.1442	1.394		19.609				19.609
				1.368		—0.052	8	0	
31	5765	1276	1.342		20.977				20.977
				1.320		44	9	1	
32	5623	1134	1.298		22.297				22.296
				1.261		35	4	2	
33	5504	1015	1.263		23.558				23.556
				1.248		31	6	2	
34	5394	0905	1.232		24.806				24.804
				1.219		25	6	3	
35	5308	0819	1.207		26.025				26.022
				1.197		19	3	3	
36	5236	0747	1.188		27.222				27.219
				1.180		16	4	3	
37	5179	0690	1.172		28.402				28.399
				1.666		12		3	
38	2.5134	0.0645	1.160		29.568				29.565
38	2.5134	0.0645	1.160		29.565			0	29.565
				1.156		—0.009	+ 4		
39	5100	0611	1.151		30.721			0	30.721
				1.148		— 5	2		
40	5079	0590	1.146		31.869			0	31.869
				1.145		— 3	4		
41	5070	0581	1.143		33.014			0	33.014
				1.143		+ 1	2		
42	5072	0583	1.144		34.157			— 1	34.156
				1.146		3	3		
43	5084	0595	1.147		35.303			1	35.302
				1.150		6	3		
44	5109	0620	1.153		36.453			1	36.452
				1.157		9	4		
45	5143	0654	1.162		37.610			1	37.606
				1.169		13	2		
46	5188	0699	1.175		38.779			2	38.777
				1.182		15	3		
47	5243	0754	1.190		39.961			2	39.959
				1.199		18	3		
48	5309	0820	1.208		41.160			2	41.158
				1.219		21	4		
49	5385	0896	1.229		42.379			2	42.377
				1.241		25	3		
50	5471	0984	1.254		43.620			3	43.617
				1.268		28	3		
51	5567	1078	1.282		44.888			3	44.885
				1.298		31	4		
52	5672	1183	1.313		46.186			3	46.182
				1.330		35	5		
53	5787	1298	1.348		47.516			4	47.511
				1.368		40	3		
54	5912	1423	1.388		48.884			4	48.880
				1.410		43	5		
55	6046	1557	1.431		50.294			4	50.289
				1.455		48	5		
56	6189	1700	1.479		51.749			5	51.744
				1.505		53	4		
57	6340	1851	1.532		53.254			5	53.250
				1.561		57	6		
58	6500	2011	1.589		54.815			5	54.809
				1.620		63	5		
59	6668	2179	1.652		56.435			6	56.429
				1.686		68	6		
60	6844	2355	1.720		58.121			6	58.115
				1.757		74	6		
61	7027	2538	1.794		59.878			7	59.872
				1.834		80	7		
62	7216	2727	1.874		61.712			7	61.705
				1.917		87	5		
63	7414	2925	1.961		63.629			8	63.621
				2.007		92			
64	2.7612	3123	2.053		65.636			— 8	65.628

Полное время полета $T = t_{63} + 1.916 \cdot 0.263 + 0.091 \cdot [-0.0970] + 0.010 \times$
$\times [0.056] = 63.621 + 0.504 - 0.009 + 0.006 = 64.122$ сек.

g) Общая сводка *(Продолжение)*

n	Угол наклон. θ	Абсц. x	Ордин. z	Время t, сек.	Скорость v, м/сек.
		Метры			
0	35°00′	0	0.0	0.	800.0
1	34 45	227	192.8	0.4281	779.2
2	34 30	541	374.3	0.8441	760.1
3	34 15	792	545.7	1.2491	742.5
4	34 00	1032	708.0	1.6437	726.1
5	33 45	1262	862.2	2.0286	710.9
6	33 30	1482	1008.6	2.4046	696.5
7	33 15	1694	1148.2	2.7721	683.2
8	33 00	1898	1281.1	3.1415	670.7
9	32 45	2094	1408.4	4.4956	658.8
10	32 30	2284	1529.9	3.8405	647.6
11	32 00	2646	1757.6	4.4107	627.0
12	31 30	2986	1967.7	5.0551	608.5
13	31 00	3306	2162.1	5.6775	591.6
14	30 30	3609	2342.4	6.2832	576.2
15	30 00	3898	2510.1	6.8707	562.0
16	29 30	4172	2666.6	7.4797	548.9
17	28 30	4685	2949	8.573	525.6
18	27 30	5159	3202	9.611	505.9
19	26 30	5599	3425	10.603	487.9
20	25 30	6008	3624	11.553	472.3
21	24 30	6393	3804	12.466	458.3
22	23 30	6756	3965	13.346	445.6
23	22 30	7200	4111	14.295	434.2
24	21 30	7528	4243	15.119	423.7
25	20 30	7829	4362	15.916	414.1
26	19 30	8138	4471	16.691	405.5
27	18 30	8425	4570	17.447	397.6
28	17 30	8700	4660	18.184	390.4
29	16 30	8966	4742	18.904	383.7
30	15 30	9224	4816	19.609	377.6

(Продолжение)

	Угол наклон. θ	Абсц. x	Ордин. z	Время t, сек.	Скорость v, м/сек.
		Метры			
31	13°30′	9717	4943	20.977	366.8
32	11 30	10183	5046	22.296	357.7
33	9 30	10628	5129	23.556	350.3
34	7 30	11056	5193	24.804	343.3
35	5 30	11469	5240	26.022	337.9
36	3 30	11870	5272	27.219	333.2
37	1 30	12260	5290	28.399	329.4
Вершина	0 00	12547	5294.1	29.273	326.9
38	— 0 30	12642	5294	29.565	326.1
39	2 30	13017	5284	30.721	323.3
40	4 30	13386	5262	31.869	321.0
41	6 30	13750	5226	33.014	319.3
42	8 30	14111	5179	34.156	318.0
43	10 30	14470	5119	35.302	317.0
44	12 30	14827	5044	36.452	316.5
45	14 30	15184	4959	37.606	316.4
46	16 30	15540	4859	38.777	316.6
47	18 30	15898	4747	39.959	317.2
48	20 30	16257	4620	41.158	318.1
49	22 30	16618	4477	42.377	319.2
50	24 30	16982	4319	43.617	320.7
51	26 30	17350	4143	44.885	322.5
52	28 30	17722	3949	46.182	324.4
53	30 30	18099	3737	47.511	326.6
54	32 30	18381	3502	48.880	329.0
55	34 30	18769	3245	50.289	331.6
56	36 30	19163	2964	51.744	334.2
57	38 30	19564	2653	53.250	337.0
58	40 30	19971	2320	54.809	339.7
59	42 30	20385	1954	56.429	342.4
60	44 30	20805	1555	58.115	344.8
61	46 30	21231	1122	59.872	347.2
62	48 30	21662	652	61.705	349.0
63	— 50 30	22097	141	63.621	350.6
Падение	— 51°01′.6	22212	0	64.122	350.8

Вычисление здесь приложено со всею подробностью, т. е. в том именно виде, как оно произведено, чтобы по нему можно было с ясностью судить, как следует располагать действия, сколько требуется работы и какие можно делать сокращения, если довольствоваться результатами меньшей точности.

§ **23.** Приведем в заключение этой статьи одно замечание исторического характера.

В 1826 г. вышло в двух больших томах in-4° сочинение A. Legendre'a — «Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Euleriennes», в котором этот знаменитый математик дает сводку своих сорокалетних изысканий по теории эллиптических и Эйлеровых интегралов.

В томе II содержатся таблицы значений интегралов первого и второго рода, т. е. функций:

$$F(c, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}; \quad E(c, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi$$

В этих таблицах значение функции F и E даны для всех значений амплитуды φ через 1° от 0° до 90°, при всех значениях модульного угла θ (определяемого равенством $\sin \theta = c$) также через 1°, т. е. они заключают $2 \cdot 90 \cdot 90 = 16\,200$ результатов.

Все эти числа даны с 10 знаками для θ от 0° до 45° и с 9 знаками от 45° до 90°. Самое же вычисление производилось с 14 и 12 знаками.

Кроме этих таблиц, Лежандр дает и ряд других весьма обширных таблиц, вычисленных также с 12 и 14 знаками, причем все вычисления произведены им *самим*.

Отсюда ясно, каким огромным навыком и какою огромною опытностью обладал Лежандр в производстве численных вычислений.

Объясняя способ составления своих таблиц, он развивает методу разностей для вычисления интегралов простых и повторных. Между прочим, он рассматривает и двукратный интеграл, т. е. нахождение функции y, определяемой уравнением

$$y'' = f(x)$$

и начальными значениями y_0 и y_0'.

Формула, которую он для этого дает, напишется при наших обозначениях так:

$$\Delta^2 y_{n-1} = \eta_n + \frac{1}{12}\Delta^2 \eta_{n-4} - \frac{1}{240}\Delta^4 \eta_{n-2} + \frac{31}{60480}\Delta^6 \eta_{n-3} \qquad (*)$$

где

$$\eta_n = h^2 f(x_n)$$

и промежуток h он рекомендует брать настолько малым, чтобы в этой формуле достаточно было удерживать только первые три члена.

Чтобы пользоваться этою формулою, он составляет две параллельные таблицы, совершенно подобные показанным в § 13, из коих одна содержит величину y и ее первые и вторые разности, вторая содержит «вспомогательную», как Лежандр ее называет, величину η и ее разности до четвертого порядка. Предполагая, что в первой части таблицы дошли до значения y_n соответственно $x = x_n$, он вычисляет для второй части величины η_{n+1} и η_{n+2}, пользуясь которыми находит нужные ему разности $\Delta^2\eta_{n-1}$ и $\Delta^4\eta_{n-2}$, стоящие в той же прямой строке, как и η_n, по ним он составляет по формуле (*) величину $\Delta^2 y_{n-1}$, затем

$$\Delta y_n = \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-1} \quad \text{и} \quad y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$$

Изложив эту методу, он говорит: «Было бы желательно подобными же способами и при помощи столь же быстро сходящихся рядов иметь возможность вычислять последовательные значения функции u, определяемой дифференциальным уравнением

$$\frac{du}{d\varphi} = F(u, \varphi)$$

или уравнением более высокого порядка. Эта задача того же рода, как и задачи, относящиеся к вычислению простых и повторных интегралов, *но ее решение представляет гораздо большие трудности, и до сих пор мы не видим другого способа к его достижению, как применение формулы Тейлора*», после чего он излагает методу Эйлера.

Но стоило бы Лежандру выразить величины $\Delta^2\eta_{n-1}$ и $\Delta^4\eta_{n-2}$ через имеющиеся в его таблице разности, стоящие в последней *косой* строке, идущей от η_n наискосок вверх, и заметить, что отбрасывание всех разностей, коих порядок выше четвертого, равносильно предположению, что разности четвертого порядка постоянны, он получил бы:

$$\Delta^4\eta_{n-2} = \Delta^4\eta_{n-3} = \Delta^4\eta_{n-4} \cdots$$
$$\Delta^2\eta_{n-1} = \Delta^2\eta_{n-2} + \Delta^3\eta_{n-2} = \Delta^2\eta_{n-2} + \Delta^3\eta_{n-3} + \Delta^4\eta_{n-3} =$$
$$= \Delta^2\eta_{n-2} + \Delta^3\eta_{n-3} + \Delta^4\eta_{n-4}$$

и, по подстановке, его формула приняла бы вид

$$\Delta^2 y_{n-1} = \eta_n + \frac{1}{12}\left[\Delta^2\eta_{n-1} + \Delta^3\eta_{n-3} + \Delta^4\eta_{n-4} - \frac{1}{20}\Delta^4\eta_{n-4}\right]$$

Это и есть формула Штёрмера, которая как раз решает намеченную Лежандром задачу именно так, как Лежандр имел это в виду.

Это замечание может служить примером того, как решение, которое представляется, после того как оно дано, весьма простым и очевидным, ускользало от внимания даже таких математиков, как Лежандр.

§ **24.** В вопросах инженерного дела встречаются уравнения вида

$$y^{\mathrm{IV}} = f(x, y)$$

(изгиб балки на упругом основании). Для уравнений такого вида можно воспользоваться тем приемом, который Лежандр применяет для вычисления четырехкратного интеграла, т. е. исходить из формулы

$$\Delta^4 y_{n-3} = \eta_{n-1} + \frac{1}{6}\Delta^2\eta_{n-2} - \frac{1}{720}\Delta^4\eta_{n-3} + \frac{421}{4755 \cdot 1024}\Delta^6\eta_{n-4} - \ldots$$

где

$$\eta_n = h^4 y_n^{\mathrm{IV}} = h^4 f(x_n, y_n)$$

Ограничиваясь разностями четвертого порядка, можем положить

$$\Delta^4\eta_{n-3} = \Delta^4\eta_{n-4}$$

и наша формула будет

$$\Delta^4 y_{n-3} = \eta_{n-1} + \frac{1}{6}\Delta^2\eta_{n-2} - \frac{1}{720}\Delta^4\eta_{n-4}$$

При достаточно малом промежутке h последний член может быть сделан также настолько малым, что он не будет оказывать влияния на результат, и мы получим формулу

$$\Delta^4 y_{n-3} = \eta_{n-1} + \frac{1}{6}\Delta^2\eta_{n-2}$$

вычисление по которой настолько очевидно, что дальнейших пояснений не требует.

Заметим еще, что при численном решении дифференциальных уравнений по методе Штёрмера в том виде, как она здесь изложена, не приходится дифференцировать функции $f(x, y)$, стоящей в правой части уравнения, а приходится иметь дело лишь с частными значениями этой функции, следовательно эта функция может заключать и такие элементы, которые задаются графически, что особенно важно для вопросов прикладной математики.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

§ **1.** Проф. П. П. Лазарев сообщил мне, что для редактируемого им журнала было бы желательно иметь еще какой-либо пример приближенного интегрирования уравнения, встречающегося в физике.

Возьмем как такой пример уравнение, которым определяется форма меридионального сечения капли тяжелой жидкости, лежащей на горизонтальной плоскости.

Общее уравнение граничащей капиллярной поверхности есть

$$z = \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right] \tag{1}$$

где z есть вертикальная ордината точки поверхности, ρ_1 и ρ_2 — главные радиусы кривизны в этой точке, a^2 — некоторая постоянная для данной жидкости.

В нашем случае граничащая поверхность есть поверхность вращения около вертикальной оси, т. е. оси z, направленной вниз. Для каждой точки такой поверхности один из главных радиусов кривизны есть радиус кривизны меридиана в этой точке, примем его за ρ_1; второй главный радиус кривизны ρ_2 равен отрезку нормали в рассматриваемой точке, заключенному между этою точкою и осью вращения. Обозначая через r — радиус параллели, проходящей через рассматриваемую точку, и через φ — угол между нормалью и осью z, будем иметь

$$\rho_2 = \frac{r}{\sin\varphi}$$

и следовательно, наше уравнение будет

$$z = \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{\rho_1} + \frac{\sin\varphi}{r}\right] \tag{2}$$

иначе

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{2z}{a^2} - \frac{\sin\varphi}{r} \tag{2}$$

Но так как вообще

$$dz = ds \cdot \sin\varphi$$
$$dr = ds \cdot \cos\varphi$$

где ds есть дифференциал дуги меридиана и

$$\rho_1 = \frac{ds}{d\varphi}$$

то будет:

$$\begin{aligned} dz &= \rho_1 \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi \\ dr &= \rho_1 \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi \end{aligned} \tag{3}$$

Приняв φ за переменную независимую и обозначая производные значками, мы видим, что наш вопрос приведен к интегрированию следующей системы уравнений:

где

$$\begin{aligned} z' &= \rho_1 \cdot \sin\varphi \\ r' &= \rho_2 \cdot \cos\varphi \\ \frac{1}{\rho_1} &= \frac{2z}{a^2} - \frac{\sin\varphi}{r} \end{aligned} \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что эти уравнения однородны относительно величин z, ρ, r и a, и их можно написать в таком виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{z}{a}\right) &= \left(\frac{\rho_1}{a}\right) \cdot \sin\varphi \\ \left(\frac{r}{a}\right) &= \left(\frac{\rho_1}{a}\right) \cdot \cos\varphi \\ \frac{1}{\left(\frac{\rho_1}{a}\right)} &= 2\left(\frac{z}{a}\right) - \frac{\sin\varphi}{\left(\frac{r}{a}\right)} \end{aligned}$$

следовательно z, r и ρ_1 можно выражать в долях a, иными словами, можно без ущерба общности полагать $a = 1$ и рассматривать систему:

$$\begin{aligned} z' &= \rho_1 \cdot \sin\varphi \\ r' &= \rho_1 \cdot \cos\varphi \\ \frac{1}{\rho_1} &= 2z - \frac{\sin\varphi}{r} \end{aligned} \tag{5}$$

В верхней точке капли, которая, очевидно, лежит на оси вращения, будет $\varphi = 0$, значит начальные условия таковы: при $\varphi = 0$ должно быть: $r = 0$ и $z = b$, где b — некоторая постоянная.

Так как при бесконечно малом φ будет и r бесконечно малое, то пред $\left(\frac{\sin\varphi}{r}\right)$ = пред $\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)$ = пред $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right) = \left(\frac{1}{\rho_1}\right)_{\varphi=0}$, следовательно при $\varphi = 0$ будет

$$\frac{1}{\rho_1} = b$$

Для численного примера возьмем тот случай, когда $b = 1$, и, положив

$$\zeta = z' \cdot h;\ \lambda = r' \cdot h$$

где h есть избранный промежуток между смежными значениями φ, который принимаем за $5^\circ = 0.087266$, располагаем наше вычисление как приведено ниже, выполняя его логарифмической линейкой (50 см длины).

Для получения исходных значений z и r проще всего разложить z и r по степеням φ, что выполним так: легко видеть, что ρ_1 есть четная функция угла φ, поэтому полагаем

$$\rho_1 = 1 + a\varphi^2 + \beta\varphi^4 + \ldots$$

тогда:

$$\rho_1 \sin\varphi = \varphi + \left(\alpha - \frac{1}{6}\right)\varphi^3 + \left(\beta - \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{120}\right)\varphi^5 + \ldots$$

$$\rho_1 \cos\varphi = 1 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\varphi^2 + \left(\beta - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{24}\right)\varphi^4 + \ldots$$

Следовательно, в виду условий, что при $\varphi = 0$ должно быть

$$z = 1 \quad \text{и} \quad r = 0$$

на основании уравнения (3) имеем:

$$z = 1 + \frac{1}{2}\varphi^2 + \left(\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{24}\right)\varphi^4 + \left(\frac{\beta}{6} - \frac{\alpha}{36} + \frac{1}{720}\right)\varphi^6 + \ldots$$

$$r = \varphi + \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{1}{6}\right)\varphi^3 + \left(\frac{\beta}{5} - \frac{\alpha}{10} + \frac{1}{120}\right)\varphi^5 + \ldots$$

Затем имеем

$$2rz - \sin\varphi = \varphi + \left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{5}{6}\right)\varphi^3 + \left(\frac{19}{30}\alpha + \frac{2}{5}\beta - \frac{29}{120}\right)\varphi^5 + \ldots$$

и

$$(2rz - \sin\varphi)\rho_1 = \varphi + \left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{5}{6} + \alpha\right)\varphi^3 + \left[\frac{22}{15}\alpha + \frac{2}{3}\alpha^2 + \frac{7}{5}\beta - \frac{29}{120}\right]\varphi^5 + \ldots$$

Уравнивая эту последнюю величину величине r, получаем, для определения неизвестных коэффициентов α и β, уравнения:

$$\frac{5}{3}\alpha + \frac{5}{6} = \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{6}$$

$$\frac{7}{5}\beta + \frac{22}{15}\alpha + \frac{3}{2}\alpha^2 - \frac{29}{120} = \frac{1}{5}\beta - \frac{1}{10}\alpha + \frac{1}{120}$$

которые дают:

$$a = -\frac{3}{4}; \quad \beta = \frac{7}{8}$$

Подставляя, имеем:

$$\rho_1 = 1 - \frac{3}{4}\varphi^2 + \frac{7}{8}\varphi^4 + \ldots$$

$$z = 1 + \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{11}{48}\varphi^4 + \frac{121}{720}\varphi^4 + \ldots \qquad (6)$$

$$r = \varphi - \frac{5}{12}\varphi^3 + \frac{31}{120}\varphi^5 + \ldots$$

Полагая в этих выражениях последовательно $\varphi = 0°$, $5°$, $10°$, $15°$, т. е. делая φ равным 0; 0.087266; 0.17453; 0.26180, получаем следующую таблицу исходных значений:

φ	z	r	ρ_1
0°	1.0000	0.0000	1.0000
5	1.0038	0.0870	0.9943
10°	1.0150	0.1723	0.9780
15°	1.0332	0.2546	0.9527

имея которые и продолжаем вычисление по общей схеме, приведенной ниже в табл. 14.

Заметим также, что формы капель вычислены с большою точностью и для них составлены обширные таблицы в сочинении Bashforth'a — «An Attempt to Test the Theories of Capillary Action» (Cambridge, 1883), причем метода интегрирования уравнения разработана знаменитым астрономом Адамсом.

Метода Адамса аналогична методе Штёрмера, и в указанном сочинении, на стр. 18, приведена формула, отличающаяся лишь обозначениями от нашей основной формулы (13), а именно:

$$y_1 - y_0 = \omega\left(q_0 + \frac{1}{2}\Delta q_0 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_0 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0 + \frac{251}{720}\Delta^4 q_0 + \frac{95}{288}\Delta^5 q_0 + \right.$$
$$\left. + \frac{19087}{60480}\Delta^6 q_0 + \frac{5257}{17280}\Delta^7 q_0 + \frac{1070017}{3628800}\Delta^8 q_0 + \frac{2082753}{7257600}\Delta^9 q_0 + \ldots\right)$$

где ω есть промежуток между последовательными значениями переменной независимой t; уравнение, предложенное для интегрирования, Адамс пишет

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) = q$$

и через q_0, Δq_0, . . . $\Delta^9 q_0$ обозначены частные значения величины q и ее разностей до девятого порядка, расположенные в нижней косой строке таблицы, подобной табл. II § 9.

Но Адамс для вычисления, вместо этой формулы, берет другую, представляющую разность $y_0 - y_{-1}$; в этой формуле коэффициенты при

$$\Delta^2 q_0, \ldots \Delta^9 q_0$$

значительно меньше, нежели в предыдущей, вследствие чего вычисление может быть произведено с большою точностью, но самый процесс сложнее.

Уравнение, определяющее форму поверхности, Адамс пишет в таком виде:

$$\frac{b}{\rho} + \frac{\sin\varphi}{\left(\frac{x}{b}\right)} = 2 + \beta\left(\frac{z}{b}\right)$$

т. е. выражает величины ρ, z и x или, при нашем обозначении, r в долях радиуса кривизны в вершине, т. е. b, и за начало координат принимает вершину.

Таким образом в таблицах Bashforth'a наш случай соответствует значению $\beta = 2$, и наше z получится придав 1 к показанному в таблице. Сличение покажет, что разница не превышает 2 или 3 единицы четвертого знака (таблицы Bashforth'a вычислены на 5 знаков), так что полученный нами результат даже лучше, чем можно было ожидать при вычислении на 4 знака и притом линейкой.

§ 2. Скажем еще несколько слов по поводу тех многих уравнений математической физики, интегрирование которых приводится к нахождению так называемых *фундаментальных* функций. Эти функции определяются в каждом вопросе обыкновенным линейным дифференциальным уравнением, заключающим неизвестный параметр, значения которого даются некоторым трансцендентным уравнением, получаемым на основании граничных условий.

Так, напр., исследование колебаний упругого стержня переменной площади поперечного сечения приводится к разысканию функций X, определяемых уравнением

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[p(x)\frac{d^2X}{dx^2}\right] - \lambda \cdot q(x) X = 0 \qquad (*)$$

и граничными условиями.

Здесь λ есть некоторый параметр, значение которого также требуется найти, $p(x)$ и $q(x)$ — заданные функции.

Таблица 14

Вычисление формы капли

Интегрирование системы

$$dz = \rho_1 \sin\varphi \cdot d\varphi;\ dr = \rho_1 \cos\varphi \cdot d\varphi;\ \frac{1}{\rho_1} = 2z - \frac{\sin\varphi}{r}$$

Начальные условия: при $\varphi = 0$ должно быть $r = 0$, $z = 1$

φ	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	r	$2z$	$\frac{\sin\varphi}{r}$	$\frac{1}{\rho_1} = 2z - \frac{\sin\varphi}{r}$	z	Δz	ζ	$\Delta\zeta$	$\Delta^2\zeta$	r	Δr	λ	$\Delta\lambda$	$\Delta^2\lambda$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	2.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0	0.0000	0.00	0.00	0.0000	0.0	0.0873	0.00	0 00
								038		76			870		— 9	
5	.0872	.9962	0870	2.0076	1.0023	1.0053	1.0038		76		— 4	.0870		864		— 15
								112		72			853		— 24	
10	.1736	.9848	1723	2.0300	1.0075	1.0225	1.0150		148		— 5	.1723		840		— 13
								182		67			823		— 37	
15	.2588	.9659	2546	2.0664	1.0165	1.0499	1.0332		215		— 8	.2546		803		— 12
								246		59			781		— 49	
20	.3420	.9397	3327	2.1156	1.0279	1.0877	1.0578		274		— 8	.3327		754		— 7
								301		51			724		— 56	
25	.4226	.9063	4051	2.1758	1.0432	1.1326	1.0879		325		— 8	.4051		698		— 4
								347		43			661		— 60	
30	.5000	.8660	4718	2.2452	1.0597	1.1855	1.1226		368		— 9	.4718		638		— 5
								385		34			606		— 65	
35	.5736	.8192	5324	2.3222	1.0764	1.2458	1.1611		402		— 6	.5324		574		+ 3
								415		28			540		— 62	
40	.6428	.7660	5864	2.4050	1.0963	1.3087	1.2026		430		— 10	.5864		512		— 2
								442		18			482		— 64	
45	.7071	.7071	6346	2.4934	1.1142	1.3792	1.2467		448		— 6	.6346		448		+ 4
								453		12			415		— 60	
50	.7660	.6428	6761	2.5840	1.1330	1.4510	1.2920		460		— 4	.6761		388		0
								461		8			359		— 60	
55	.8192	.5736	7120	2.6762	1.1507	1.5255	1.3381		468		— 4	.7120		328		+ 6
								470		4			298		— 54	
60	.8660	.5000	7418	2.7702	1.1678	1.6024	1.3851		472		— 7	.7418		274		— 1
								472		— 3			250		— 55	
65	.9063	.4226	7668	2.8646	1.1821	1.6824	1.4323		469		— 1	.7668		219		+ 5
								470		— 4			192		— 50	
70	.9397	.3420	7860	2.9586	1.1956	1.7630	1.4793		465		— 4	.7860		169		+ 3
								463		— 8			146		— 47	

75	.9659	.2588	8006	3.0512	1.2068	1.8444	1.5256	451	457	— 10	— 2	.8006	98	122	— 43	+ 4
80	.9848	.1736	8104	3.1414	1.2149	1.9265	1.5707	441	447	— 14	— 4	.8104	60	79	— 41	+ 2
85	.9962	.0872	8164	3.2296	1.2204	2.0092	1.6148	426	433	— 16	— 2	.8164	18	38	— 38	+ 3
90	1.0000	0.0000 (—)	8182	3.3148	1.2225	2.0923	1.6574	410	417	— 17	— 1	.8182	— 19	0	— 35	+ 3
95	.9962	.0872	8164	3.3968	1.2204	2.1764	1.6984	390	400	— 20	— 3	.8164	— 52	— 35	— 32	+ 3
100	.9848	.1736	8112	3.4748	1.2142	2.2606	1.7374	369	380	— 21	— 1	.8112	— 82	— 67	— 30	+ 2
105	.9659	.2588	8030	3.5486	1.2027	2.3459	1.7743	348	359	— 22	— 1	.8030	— 111	— 97	— 26	+ 4
110	.9397	.3420	7919	3.6182	1.1868	2.4314	1.8091	324	337	— 24	— 2	.7919	— 134	— 123	— 24	+ 2
115	.9063	.4226	7786	3.6830	1.1663	2.5167	1.8415	301	313	— 24	0	.7786	— 158	— 147	— 20	+ 4
120	.8660	.5000	7628	3.7432	1.1372	2.6060	1.8716	277	289	— 25	— 1	.7628	— 175	— 167	— 18	+ 2
125	.8192	.5736	7453	3.7986	1.0992	2.6994	1.8993	251	264	— 25	0	.7453	— 193	— 185	— 16	+ 2
130	.7660	.6428	7260	3.8488	1.0554	2.7934	1.9244	227	239	— 25	0	.7260	— 208	— 201	— 13	+ 3
135	.7071	.7071	7052	3.8942	1.0030	2.8912	1.9471	201	214	— 26	— 1	.7052	— 219	— 214	— 9	+ 4
140	.6428	.7660	6833	3.9342	0.9407	2.9935	1.9672	175	188	— 26	0	.6833	— 227	— 223	— 7	+ 2
145	.5736	.8192	6606	3.9694	0.8727	3.0967	1.9847	149	162	— 26	0	.6606	— 223	— 230	— 5	+ 2
150	.5000	.8660	6373	3.9992	0.7847	3.2145	1.9996	123	136	— 25	— 1	.6373	— 236	— 235	— 2	+ 3
155	.4226	.9063	6137	4.0238	0.6900	3.3338	2.0119	099	111	— 24	+ 1	.6133	— 237	— 237	+ 1	+ 3
160	.3420	.9397	5900	4.0436	0.5822	3.4614	2.0218	075	87	— 25	0	.5900	— 236	— 236	+ 3	+ 2
165	.2588	.9659	5664	4.0586	0.4585	3.6001	2.0293	050	62	— 22	+ 3	.5664	— 231	— 233	+ 3	0
170	.1736	.9848	5433	4.0686	0.3197	3.7488	2.0343	030	41	— 22	0	.5433	— 227	— 230	+ 8	+ 5
175	.0872	.9962	5206	4.0746	0.1682	3.9064	2.0373	008	19	— 19	+ 3	.5206	— 217	— 222		
180	0.0000	1.0000	4989	4.0762	0.0000	4.0762	2.0381		0			.4989				

Граничные условия выражаются различно, смотря по тому, закреплен, подперт или свободен рассматриваемый конец стержня, для которого абсцисса $x = 0$ или $x = l$.

Пусть этот конец есть тот, для которого $x = 0$, тогда граничные условия выразятся так:

а) если конец *закреплен*: при $x = 0$ должно быть $X = 0$ и $\frac{dX}{dx} = 0$

б) » » *подперт*: » » » » $X = 0$; $\frac{d^2X}{dx^2} = 0$

в) » » *свободен*: » » » » $\frac{d^2X}{d^2x} = 0$; $\frac{d^3X}{dx^3} = 0$.

Совершенно подобно выражаются эти условия и для другого конца, для которого $x = l$.

Положим, напр., что оба конца стержня свободны (корабль, плавающий на воде), тогда граничные условия будут:

при $x = 0$ должно быть $\frac{d^2X}{dx^2} = 0$ и $\frac{d^3X}{dx^3} = 0$ (**)

» $x = l$ » » $\frac{d^2X}{dx^2} = 0$ и $\frac{d^3X}{dx^3} = 0$ (***)

Так как уравнение, служащее для определения X, — линейное, то общий его интеграл есть линейная функция произвольных постоянных, т. е.

$$X = AY + BZ + CU + DV$$

где Y, Z, U, V — частные решения уравнения (*) и A, B, C, D — произвольные постоянные. Очевидно, что Y, Z, U, V суть функции как переменной x, так и параметра λ.

Граничные условия будут, обозначая значками производные по x:

$$\begin{aligned}
AY''(0, \lambda) + BZ''(0, \lambda) + CU''(0, \lambda) + DV''(0, \lambda) &= 0 \\
AY'''(0, \lambda) + BZ'''(0, \lambda) + CU'''(0, \lambda) + DV'''(0, \lambda) &= 0 \\
AY''(l, \lambda) + BZ''(l, \lambda) + CU''(l, \lambda) + DV''(l, \lambda) &= 0 \\
AY'''(l, \lambda) + BZ'''(l, \lambda) + CU'''(l, \lambda) + DV'''(l, \lambda) &= 0
\end{aligned}$$

Чтобы эти уравнения для A, B, C, D допускали решения, отличные от нуля, необходимо, чтобы определитель

$$F(\lambda) = |Y''(0, \lambda),\ Z'''(0, \lambda),\ U''(l, \lambda),\ V'''(l, \lambda)| = 0 \qquad (I)$$

Это и есть то трансцендентное уравнение, о котором сказано выше и которым определяется значение параметра λ.

Но ясно, что лишь для весьма немногих частных видов функций $p(x)$ и $q(x)$ вопрос может быть проведен аналитически до конца, в остальных же случаях, особенно когда функции $p(x)$ и $q(x)$ заданы графически или таблично, не только решить, но и составить в развернутом виде уравнение (I) невозможно, и следовательно, надо прибегать к приближенным способам.

Для того чтобы найти значения λ, удовлетворяющие уравнению (I), нет надобности иметь аналитическое выражение функции $F(\lambda)$, достаточно иметь возможность вычислить частное ее значение, соответствующее любому избранному частному значению параметра $\lambda = n$.

В самом деле, если на основании каких-либо соображений, изложение которых здесь опускаем, было бы известно, что приближенно значение λ есть n, то, вычислив $F(n)$, полагаем затем

$$\lambda = n + k$$

и вычисляем $F(n+k)$; если эти величины окажутся разных знаков, то искомое значение λ лежит между n и $n+k$, после чего обычным приемом и найдется с любой степенью точности. Нетрудно видеть, как поступать, если бы $F(n)$ и $F(n+k)$ оказались одного знака.

Ход этого вычисления численного значения $F(n)$ и надо показать.

Постоянные произвольные можно воображать выбранными так, чтобы они представляли частные значения функции X и первых трех ее производных при $x = 0$.

Для этого стоит только вообразить, что Y, Z, U, V суть такие частные решения уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[p(x)\frac{d^2X}{dx^2}\right] - n \cdot q(x) \cdot X = 0$$

что при $x = 0$ значения этих функций и их производных таковы:

$$\begin{aligned}
&Y = 1, \quad Y' = 0, \quad Y'' = 0; \quad Y''' = 0 \\
&Z = 0 \quad Z' = 1 \quad Z'' = 0; \quad Z''' = 0 \\
&U = 0 \quad U' = 0 \quad U'' = 1; \quad U''' = 0 \\
&V = 0 \quad V' = 0 \quad V'' = 0; \quad V''' = 1
\end{aligned} \tag{II}$$

Так как X должно удовлетворять условиям (**), то при таком выборе функций Y, Z, U, V будет

$$C = 0 \quad \text{и} \quad D = 0$$

и останется только найти функции Y и Z.

Чтобы найти функцию Y, положим

$$\frac{1}{p(x)} = f(x)$$

и заменим уравнение, коим определяется Y, системою:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y}{dx^2} &= f(x) \cdot y \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= n \cdot q(x) \cdot Y \end{aligned} \qquad (3)$$

Начальные значения будут: при $x = 0$ должно быть:

$$\begin{aligned} y &= 0; \quad y' = 0 \\ Y &= 1; \quad Y' = 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

К системе (3) при условиях (4) непосредственно применима метода Штёрмера, по которой и составим таблицу значений функций Y и y на протяжении от $x = 0$ до $x = l$, причем попутно получится и таблица значений Y''.

Совершенно так же составим и таблицу значений функции Z и попутно с нею Z''.

Искомая функция X будет

$$X = AY + BZ$$

пользуясь составленными таблицами значений функций Y'' и Z'', находим величины их, соответствующие $x = l$, пусть эти величины будут P и Q. Пользуясь значениями Y'' и Z'' и известными формулами, выражающими зависимость между разностями и производными, составляем значения Y''' и Z''' при $x = l$ [если функции $p(x)$ и $q(x)$ заданы аналитически, а не таблично, то эти значения найдем и из предложенного уравнения, продифференцировав его]; пусть они будут M и N, тогда, на основании условий (**) и (***), должно быть:

$$\begin{aligned} AP + BQ &= 0 \\ AM + BN &= 0 \end{aligned}$$

и частное значение определителя $F(n)$ есть

$$F(n) = PN - QM$$

Если оно окажется равно нулю, то $\lambda = n$ есть одно из истинных значений параметра λ, если же нет, то надо повторить процесс, положив

$$\lambda = n + k$$

и т. д., применяя известную методу разыскания значения корня, близкого к данному числу n.

Таким образом изложенная метода дает практическую возможность при решении физических вопросов на самом деле составлять таблицы и вычислять значения фундаментальных функций, существование и свойства которых устанавливаются другими способами. Примера численного вычисления мы не приводим, так как оно ничем не отличается от показанных выше и не может представить никаких затруднений, кроме некоторой утомительности по своему однообразию.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

§ **1.** Покажем для примера применение изложенных способов к численному интегрированию уравнения движения поезда для того случая, когда он, выйдя со стоянки на станции, проходит сперва площадку, а затем входит на подъем.

Все данные и обозначения заимствуем из сочинения проф. Ю. В. Ломоносова — «Тяговые расчеты».

§ **2.** При движении поезда по площадке имеем уравнение

$$\frac{dv}{dt} = \zeta[f - w_0] \tag{1}$$

причем

$$\zeta = 120; \quad f = \frac{F}{P + Q}; \quad w_0 = 1.5 + 0.05v$$

где F — сила тяги паровоза, $P + Q$ — вес поезда, w_0 — удельное сопротивление, v — скорость. За единицы приняты: километр, час, тонна для веса поезда, килограмм для силы тяги.

При переходе поезда с площадки на подъем, уравнение движения его есть

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \zeta[f - w_0 - ks] \tag{2}$$

где s есть длина той части поезда, которая уже вошла на подъем

$$k = \frac{i_2}{L}$$

причем i_2 есть уклон в тысячных, L — длина поезда.

Наконец, движение поезда по подъему дается уравнением

$$\frac{dv}{dt} = \zeta [f - w_0 - i_2] \tag{3}$$

Все эти три уравнения можно соединить в одну систему:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \zeta [f - w_0 - k(x - l)] \\ \frac{dx}{dt} &= v \end{aligned} \tag{4}$$

условившись считать:

$$\begin{aligned} k(x - l) &= 0, \quad \text{пока } x \leqq l \\ k(x - l) &= \frac{i_2}{L} \cdot s \quad \text{» } l \leqq x \leqq L + l \\ k(x - l) &= i_2 \quad \text{» } x > L + l \end{aligned} \tag{5}$$

здесь x есть расстояние головы поезда от станции (пройденный путь), l — длина площадки. Начальные условия суть: при $t = 0$ должно быть

$$x = 0 \quad \text{и} \quad v = 0 \tag{4'}$$

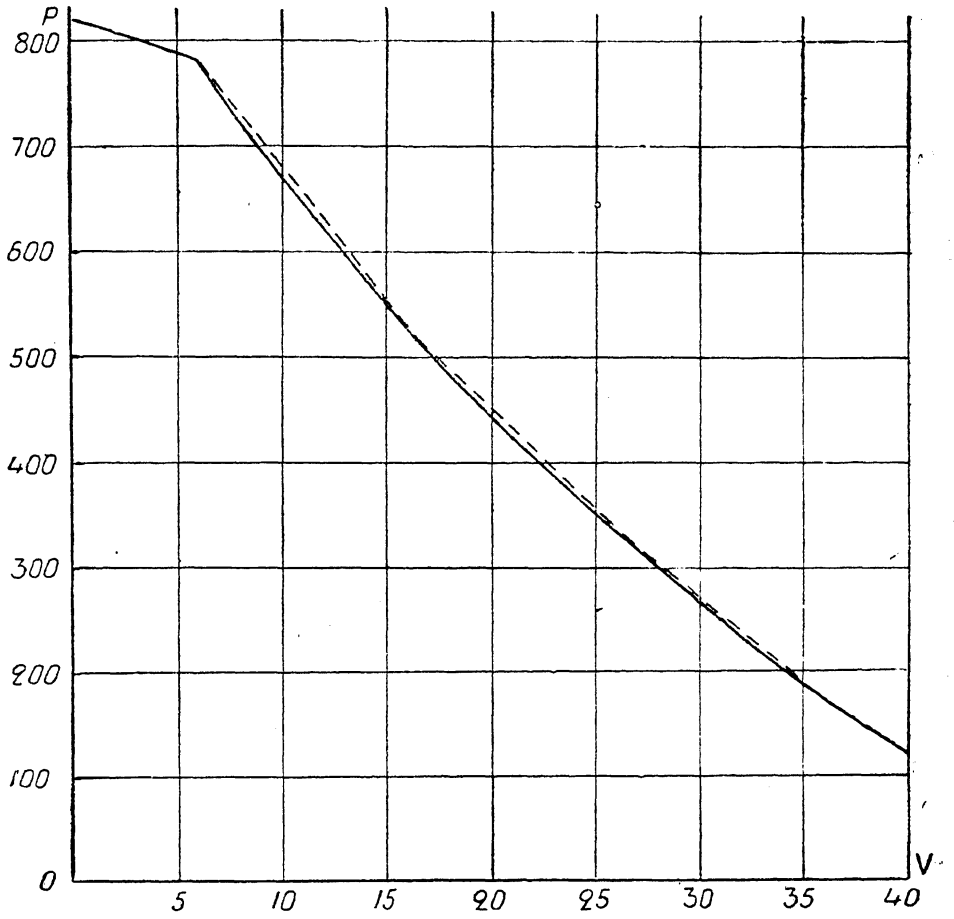
§ **3.** Для нашего частного примера численные задания таковы:

$$\begin{aligned} \zeta &= 120 \\ P + Q &= 1830 \text{ т} \\ i_2 &= 6 \\ l &= 0.640 \text{ км} \\ L &= 0.560 \text{ км} \\ \zeta k &= 1280 \end{aligned}$$

Положим для сокращения письма:

$$p = \zeta (f - w_0) = \zeta \left[\frac{F}{P + Q} - w_0 \right] \tag{6}$$

тогда, взяв величины силы тяги F товарного паровоза серии Э при езде с вполне открытым регулятором и наполнением 0.4, имеем таблицу значений функции p (стр. 79).



Фиг. 2.

Таблица значений функций $p = \zeta(f - w_0)$

v	p	v	p	v	p	v	p
0	820	10	676	20	446	30	266
2	808	12	625	22	408	32	235
4	796	14	575	24	370	34	205
6	784	16	528	26	334	36	188
8	735	18	486	28	299	38	148
10	676	20	446	30	266	40	122

Эти значения сняты с кривой, построенной в крупном масштабе, уменьшенный снимок которой дан на фиг. 2, а именно: для v 1 сантиметр за единицу, для p 1 сантиметр за 20 единиц. Участок от $v = 0$ до $v = 6$ представляет прямую линию.

Приняв время t за переменную независимую, берем его через равные промежутки $\tau = 0.005$, значения p снимаем по аргументу v с упомянутой кривой или выбираем из вышеприведенной таблицы и располагаем вычисление как показано в табл. 15.

Таблица 15

Движение поезда

Уравнения:

$$\frac{dv}{dt} = p - k(x - l) \qquad \frac{dx}{dt} = V$$

Формулы:

$$\eta_n = [p_n - k(x - l)], \quad \tau = q_n \tau$$

$$\Delta V_n = \eta_n + \frac{1}{2}\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 \eta_{n-2}; \qquad \Delta x_n = \frac{1}{2}(V_n + V_{n+1})\tau$$

$$V_{n+1} = V_n + \Delta V_n; \quad x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$$

n	V_n	ΔV_n	q_n	η_n	$\Delta\eta_n$	$\Delta^2\eta_n$	x_n	Δx_n	$k(x_n - l)$	t_n
0	0	4.10	820	4.10	—0.12	—0.19	0	0.010		0
1	4.10	3.92	795	3.98	—0.31	—0.17	0.010	0.031		0.005
2	8.02	3.41	735	3.67	—0.48	+0.12	0.041	0.048		0.010
3	11.43	2.88	638	3.19	—0.36	+0.06	0.089	0.065		0.015
4	14.31	2.70	567	2.83	—0.30	+0.06	0.154	0.079		0.020
5	17.01	2.41	507	2.53	—0.24	+0.03	0.233	0.092		0.025
6	19.42	2.20	458	2.29	—0.21	+0.02	0.325	0.103		0.030
7	21.62	1.98	415	2.08	—0.19	—0.14	0.428	0.113		0.035
8	23.60	1.80	378	1.89	—0.33	—0.63	0.541	0.123	34	0.040
9	25.40	1.32	311	1.56	—0.96	+0.12	0.664	0.133	201	0.045
10	26.72	—0.13	120	0.60	—0.84	+0.05	0.797	0.134	373	0.050
11	26.59	—0.61	— 49	—0.24	—0.79	+0.07	0.931	0.133	541	0.055
12	25.98	—1.40	—207	—1.03	—0.72	—	1.064	0.129	710	0 060
13	24.58	—1.71	—350	—1.75	+0.10	—	1.193	0.116	720	0.065
14	22.87	—1.61	—329	—1.65	+0.16	—	1.299	0.108	720	0.070
15	21.26	—1.42	—298	—1.49	+0.10	—	1.407	0.103	720	0.075
16	19.84	—1.35	—277	—1.39	+0.12	—	1.510	0.096	720	0.080
17	18.49	—1.17	—244	—1.22			1.606	0.090	720	0.085
18	17.32						1.696			0.090
16	19.84			—2.77	+0.57	—0.15			720	0.090
18	17.32	—1.92	—220	—2.20	+0.42	—0.04	1.696	0.167	720	0.100
20	15.40	—1.63	—178	—1.78	+0.38	—0.07	1.863	0.146	720	0.110
22	13.77	—1.20	—140	—1.40	+0.31	—0.09	2.009	0.132	720	0.120
24	12.57	—0.96	—109	—1.09	+0.22	—0.01	2.141	0.121	720	0.130
26	11.61	—0.80	— 87	—0.87	+0.21		2.262	0 112	720	0.140
28	10.81	—0.56	— 66	—0.66			2.374	0.105	720	0.150
30	10.25						2.479			
26				—1.74	+0.70	—			720	0.150
30	10.25	—0.69	— 52	—1.04	+0.40	—	2.479	0.198	720	0.170
34	9.56	—0.44	— 32	—0.64	+0.36		2.677	0.186	720	0.190
38	9.12	—0.10	— 14	—0.28			2.863	0.181	720	0.210
42	9.02						3.044			

Это вычисление произведено при помощи логарифмической линейки, длиною 50 см.

Задаваясь показанными в таблице значениями x и беря соответствующие им значения v и t, строим кривые (фиг. 3), представляющие движение поезда графически, причем v и t будут выражены в функции расстояния x.

§ 4. Показанное в табл. 15 вычисление произведено с точностью, далеко превышающей не только достижимую на практике, но и самую практическую потребность, — смысл такого вычисления может состоять лишь в том, чтобы сличать результаты, получаемые другими упрощенными приемами, с этими излишне точными и таким образом судить о точности этих приемов и способов.

Дадим в пояснение этого некоторые численные примеры.

Возьмем способ Чечетта (Тяговые расчеты, стр. 135), сущность которого состоит в том, что кривая

$$p = f - w_0$$

заменяется ломаной, в нее вписанной (фиг. 2), или около нее описанной; для каждого такого прямолинейного участка уравнение движения интегрируется в конечном виде, и следовательно, в результате получается таблица, подобная 16.

Понятно, что замена кривой p ломаною может быть выполнена на бесчисленное множество манеров и что, взяв звенья ломаной достаточно малыми, можно достигнуть какой угодно точности, но задача состоит не столько в достижении этой точности, сколько простоты расчета с тою ограниченной степенью точности, которая требуется для практики. Этой части касаться здесь не будем.

На каждом звене ломаной будет

$$p = a - bv \tag{7}$$

причем a и b для каждого отдельного звена — постоянные, от звена же к звену меняются. Обозначим через a_n, b_n — значения a и b для n-го участка кривой, т. е. для участка, заключенного между точками:

$$v = v_n,\ p = p_n \quad \text{и} \quad v = v_{n+1} \quad \text{и} \quad p = p_{n+1},$$

тогда будет:

$$\left.\begin{aligned} b_n &= \frac{p_n - p_{n+1}}{v_{n+1} - v_n} \\ a_n &= p_n + b_n v_n = p_{n+1} + b_n v_{n+1} = \frac{p_n v_{n+1} - p_{n+1} v_n}{v_{n+1} - v_n} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Уравнение движения поезда будет:

$$\frac{dv}{dt} = a_n - b_n v$$
$$\frac{dx}{dt} = v \qquad (9)$$

и начальные условия: при $t = t_n$ должно быть

$$x = x_n \quad \text{и} \quad v = v_n \qquad (10)$$

Отсюда следует

$$t - t_n = \frac{1}{b_n} \log \frac{a_n - b_n v_n}{a_n - b_n v} = \log \frac{p_n}{p} \qquad (11)$$

Затем

$$a_n - b_n v = (a_n - b_n v_n) e^{-b_n (t - t_n)}$$

$$v - v_n = \frac{1}{b_n} (a_n - b_n v_n [1 - e^{-b_n (t - t_n)}] \qquad (11^1)$$

$$x - x_n = v_n (t - t_n) + \frac{1}{b_n} (a_n - b_n v_n) \left[(t - t_n) - \frac{1}{b_n} (1 - e^{-b_n (t - t_n)}) \right]$$

т. е.

$$x - x_n = \frac{1}{b_n} [a_n (t - t_n) - (v - v_n)] \qquad (12)$$

Из формул (11) и (12) видно, что для пользования ими удобнее задаваться значениями v, но тогда не получится сразу то значение $x = l$, при котором поезд вступает на подъем, и соответствующие этому значению x величины v и t придется определять или методою последовательных приближений, или интерполированием, как будет показано на примере, где показан порядок и схемы вычисления по формулам (11) и (12) (табл. 16).

§ **5.** После того как вычислены значения

$$v = v_0 \quad \text{и} \quad t = t_0$$

соответствующие значению $x = l$ или $s = 0$, т. е. вступлению поезда на подъем, уравнение движения его будет

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + b \frac{ds}{dt} + ks = a \qquad (13)$$

и начальные условия: при $t = t_0$ должно быть

$$s = 0; \quad v = v_0 = \left(\frac{ds}{dt} \right)_0$$

предполагая, что для соответствующего промежутка скоростей

$$p = a - bv$$

Интеграл уравнения (13) при указанных условиях есть:

$$s = e^{-ht}\left\{C_1 \cos\frac{2\pi t}{\tau} + C_2 \sin 2\pi t\frac{t}{\tau}\right\} + \frac{a}{k} \tag{14}$$

$$h = \frac{b}{2}; \quad \tau = \frac{2\pi}{\sqrt{k - h^2}}$$

$$C_1 = \frac{a}{k}; \quad C_2 = \left(v_0 - \frac{ha}{k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{k^2 - h^2}} \tag{15}$$

Формулы (14) и (15) не могут быть признаны удобными для вычислений, когда требуется лишь небольшое число значений s.

Уравнением (13) приходится пользоваться лишь в течение того промежутка времени, пока поезд не войдет целиком на подъем, т. е. для значений s от $s = 0$ до $s = L$, причем L не превышает 0.6, поэтому выгоднее заменить уравнение (13) системою:

$$\frac{dv}{dt} = a - bv - ks$$

$$\frac{ds}{dt} = v \tag{13'}$$

и принять s за переменное независимое, т. е. писать эту систему так:

$$\frac{v\,dv}{ds} = a - bv - ks$$

$$dt = \frac{1}{v}\,ds \tag{13''}$$

Вообразим, что промежуток L подразделен на несколько частей равных или неравных, обозначим через s_0, s_1, s_2, ... s_n, ... — соответствующие началу каждой части значения s, тогда для промежутка $s_{n+1} - s_n$ имеем уравнение

$$\frac{v\,dv}{ds} = a - bv_n - ks_n - b(v - v_n) - k(s - s_n)$$

или

$$\frac{v\,dv}{ds} = p_n - ks_n - b(v - v_n) - k(s - s_n) \tag{16}$$

С другой стороны, при достаточно малом значении $s-s_n$ в разложении $v-v_n$ по Тейлорову ряду можно ограничиться одним первым членом и писать

$$v - v_n = v_n'(s - s_n)$$

Но из уравнения (16) следует

$$v_n' = \frac{p_n - ks_n}{v_n} = \frac{q_n}{v_n}$$

поэтому уравнение (16) напишется так:

$$\frac{v\,dv}{ds} = q_n\left[1 - \frac{b}{v_n}(s - s_n)\right] - k\,(s - s_n)$$

которое по интегрировании дает

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_n^2) = q_n(s - s_n) - \frac{1}{2}\left(q_n\frac{b}{v_n} + k\right)(s - s_n)^2 \qquad (17)$$

Полученная формула (17) и послужит для последовательного вычисления скоростей; после того как скорости

$$v_0,\ v_1,\ v_2, \ldots v_n,\ v_{n+1}, \ldots$$

вычислены, вычисляем время по формуле

$$t_{n+1} - t_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{v_{n+1}} + \frac{1}{v_n}\right] \cdot [s_{n+1} - s_n] \qquad (18)$$

и суммируем эти промежутки.

Чтобы судить о степени точности формулы (17), достаточно вычислить наибольшее значение первого из отброшенных членов, который будет

$$-bv_n'' \cdot \frac{(s - s_n)^3}{6}$$

Из уравнения (16) следует

$$vv'' + v'^2 = -bv' - k$$

откуда

$$v_n'' = -\frac{1}{v_n}[bv_n' + k + v_n'^2]$$

В нашем случае наибольшее значение q_n есть 360, v_n — около 26, $k = 1280$, $b = 19.3$, значит

$$v_n' = \frac{q_n}{v_n} = 14$$

$$v_n'' = -\frac{1}{26}[270 + 1280 + 196] = -67$$

Если брать

$$s - s_n \leqq 0.2$$

то будет

$$\frac{1}{6} b v_n'' (s - s_n)^3 \leqq \frac{1}{6} 19.3 \cdot 67 \cdot 0.008 \leqq 1.7 < 2$$

Такая точность может почитаться более чем достаточной, следовательно длину L можно подразделить на три части, ибо погрешности, равной 2 в значении v^2, соответствует, при $v = 25$, погрешность в самом значении v, равная

$$\frac{1}{25} = 0.04$$

Если довольствоваться в значении v погрешностью в 0.1, то в v^2, при $v = 25$, погрешность будет 5 (в самом деле, $\sqrt{625} = 25$; $\sqrt{630} = 25.0998$), следовательно можно было бы брать

$$\frac{1}{6} b \cdot v_n'' (s - s_n)^3 \leqq 5$$

т. е. при значениях, приведенных выше:

$$s - s_n \leqq \sqrt[3]{\frac{30}{19.3 \cdot 67}} \leqq 0.28 .$$

т. е. длину L достаточно подразделить пополам.

Так, в нашем случае заменим кривую p ломаной, составленной из следующих звеньев:

$0 < v \leqq 6$	$a = 820;$	$b = 6.00$
$6 \leqq v \leqq 16$	$a = 937$	$b = 25.6$
$16 \leqq v \leqq 26$	$a = 837$	$b = 19.3$
$26 \leqq v \leqq 36$	$a = 746$	$b = 15.8$

Тогда вычисление расположится как показано в следующих таблицах.

Движение по площадке

Таблица 16

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
v	p	Log p	Log $\frac{p_n}{p_{n+1}}$	$t_{n+1} - t_n = \frac{2.302}{b_n}$ IV	a_n V	$x_{n+1} - x_n$	t	x
0	820	2.9138					0.0000	0.000
			0.0195	0.0075	6.15	0.025		
6	784	.8943					0.0075	0.025
			.1717	.0154	14.50	0.176		
16	528	.7226					0.0229	0.201
			.1976	.0237	19.80	0.507		
26	335	.5250					0.0466	0.708

Интерполирование:

$$0.708 - 0.640 = 0.068$$

$$\tau = \frac{0.068}{26} = 0.0026$$

$$v = 26 - 335 \cdot 0.0026 = 26 - 0.87 = 25.13$$

$$\tau_1 = \frac{0.068}{25.56} = 0.00266$$

$$v_1 = 26 - 325 \cdot 0.00266 = 26 - 0.87 = 25.13$$

Итак, при

$$x = 0.640$$

будет:

$$v = 25.13;\ t = 0.0440.$$

Таблица 17

Вход поезда на подъем

Вычисление скоростей [форм. (17)]

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
s_n	p_n	ks_n	$q_n =$ II—III	IV$\cdot h$ $h=0.140$	$q_n \cdot \frac{h}{v_n}$	VI$+k$	$-$VII$\cdot \frac{h^2}{2}$	2(V + + VIII)	v_n^2	v_n
0	350	0	350	49.0	267	1547	—15.1	69.8	632	25.13
0.140	325	180	145	20.3	106	1386	—13.6	13.4	702	25.50
0.280	321	360	— 39	— 5.6	— 28.2	1252	—12.5	—36.2	715	26.74
0.420	334	540	—206	—28.1	—152	1128	—11.2	—78.6	679	26.06
0.560		720							600	24.52

Таблица 18

Вход поезда на подъем

Вычисление времени [форм. (18)]

s	$\frac{1}{v}$	$\frac{h}{2}\left[\frac{1}{v_n} + \frac{1}{v_{n+1}}\right]$	t
0	0.0398		0.0440
		0.0054	
0.140	378		493
		0.0053	
0.280	374		546
		0.0053	
0.420	384		599
		0.0055	
0.560	408		0.0654

Таблица 19

Ход по подъему

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
v	$p-720$	Log II	$\text{Log}\frac{p_n}{p_{n+1}}$	$t_{n+1}-t_n=\text{IV}\cdot\frac{2.302}{b}$	$\text{V}\cdot(a-720)$	$x_{n+1}-x_n$	t	x
24.52	—361	2.5575					0.0654	1.200
			0.2742	0.0328	3.86	0.642		
16.0	—192	.2833					.0982	1.842
			1.1372	0.0985	21.70	1.100		
9.0	— 14	.1461					.1967	2.942
8.15	0	—	—	—	—	—	∞	∞

Предельная скорость

$$V=\frac{a-720}{b}=\frac{217}{25.6}=8.15$$

Согласие результатов, вычисленных по этому приему, с результатами, полученными по первому приему, видно, напр., из сопоставления следующих чисел:

x	t по I пр.	t по II пр.
0.640	0.0437	0.0440
1.200	0.0653	0.0654
2.900	0.194	0.193

Для большей наглядности по результатам вычислений по первому приему построена кривая (фиг. 3), на которой соответствующие точки отмечены маленькими кружочками. Результаты вычисления по второму приему нанесены на ту же кривую и отмечены двойными кружочками.

§ **6.** Мы видели, что при вычислении по формулам (17) и (18) времени и скорости по входе поезда на подъем возможно брать промежутки $\leqq 0.28$, т. е. подразделять длину L пополам, в таком случае расчет сведется к следующему (табл. 20).

Таблица 20

Вход поезда на подъем

Вычисление скоростей

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
s_n	p_n	ks_n	$q_n =$ II—III	IV·h (h=0.280)	$\frac{q_n b}{v_n}$	VI + k	VII·$\frac{h^2}{2}$	2 (V + VIII)	v_n^2	v_n
0	350	0	350	98	264	1544	—60	76	632	25.13
0.280	323	360	— 37	—10	— 27	1253	—49	—118	708	26.61
0.560									590	24.29

Вычисление времени

s_n	$\frac{1}{v_n}$	$\frac{h}{2}\left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_{n+1}}\right)$	t
0	0.0398	0.0108	0.0440
0.280	376	0.0110	0.0548
0.560	412		0.0658

Этот поверочный расчет с ясностью показывает, что при пользовании формулами (17) и (18) длину поезда достаточно подразделять пополам при расчете его входа на подъем.

§ 7. Заметим по поводу формул (17) и (18), что практически ими решается вопрос об интегрировании уравнения

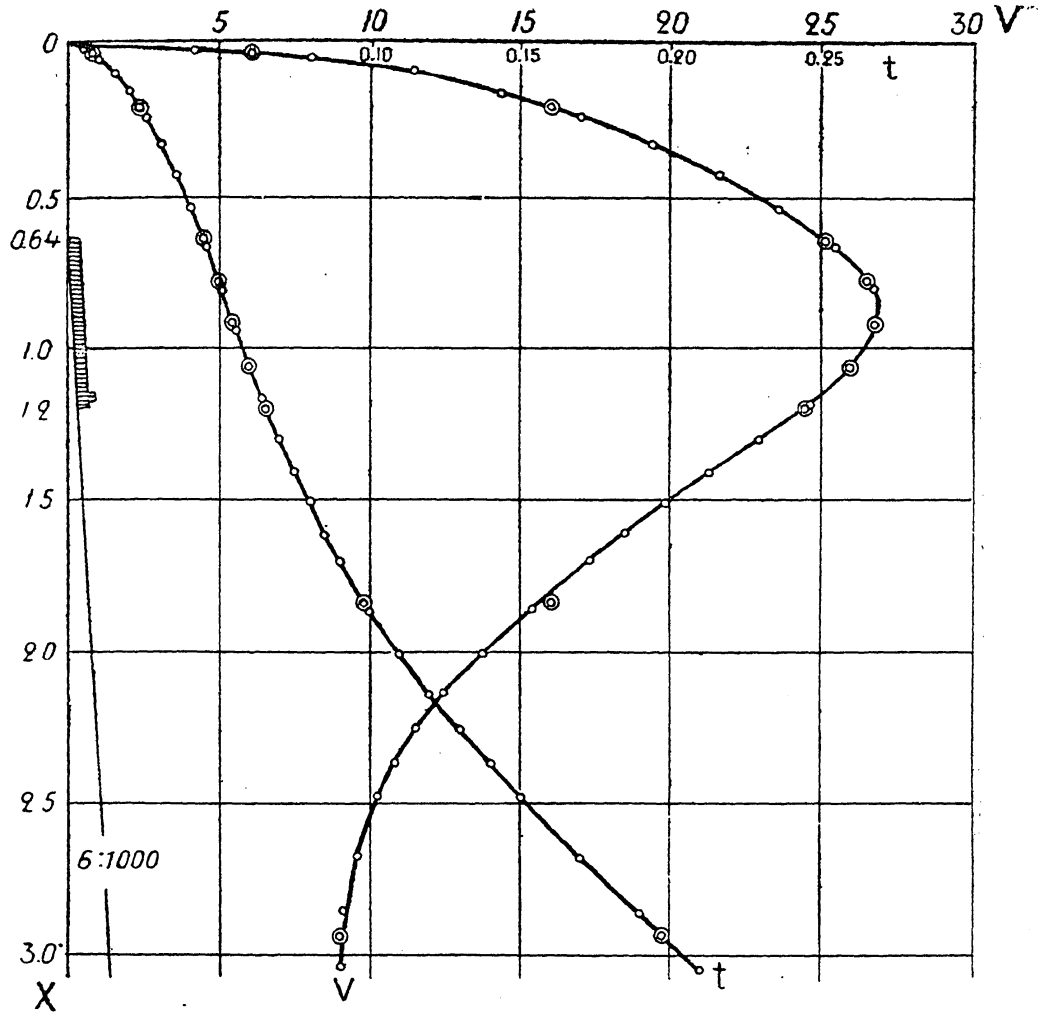
$$\frac{d^2s}{dt^2} = \zeta[f - w_0 - ks] \qquad (2)$$

движения поезда при входе на подъем с требуемой для практики степенью точности для всякого вида функции f, ибо входящая в эти формулы величина b в том случае, когда функция f задана аналитически, есть не что иное, как

$$b = f'(v_n)$$

когда же функция f задана графически, то величина b получится по формуле

$$b = \frac{f(v_n - \alpha) - f(v_n + \alpha)}{2\alpha}$$



Фиг. 3.

где α — достаточно малая величина, при этом величину b достаточно знать с грубым приближением, ибо член $\frac{bq_n}{v_n}$, в который она входит, мал по сравнению с k и имеет малого множителя $\frac{h^2}{2}$.

Так, в нашем случае скорость v_n близка к 25, из таблицы значений функции p видно, что

$$b = \frac{370 - 334}{2} = 18$$

повторяя расчет с этим значением b, имеем, выбирая все числа из упомянутой таблицы, табл. 21.

Вход поезда на подъем Таблица 21

Вычисление скоростей ($b = 18$)

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
p	p_n	ks_n	$q_n =$ II—III	IV$\cdot h$	$\frac{b}{v_n} q_n$	VI$+k$	$-$VII$\cdot\frac{h^2}{2}$	V$+$VIII	v_n^2	v_n
0	350	0	350	98	249	1529	—60	76	632	25.13
0.280	323	360	— 37	—10	— 27	1253	—49	—118	708	26.61
0.560									590	24.29

т. е. совершенно тот же результат, как и выше при $b = 19.3$, которое взято для промежутка от $v = 16$ до $v = 26$, вместе с тем ясно, что значение b, взятое для более тесного промежутка, более соответствует действительности.

§ 8. Рассмотрим теперь, какова будет погрешность, если формулы (17) и (18) применить совсем не делая подразделения, т. е. взяв $h = L$; в таком случае наши формулы будут:

$$\left.\begin{aligned} v_1^2 &= v_0^2 + 2p_0 L - \left(p_0 \frac{b}{v_0} + k\right) L^2 \\ t_1 &= t_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1}\right) L \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

при само собою понятном обозначении.

В нашем случае будет:

$$v_0 = 25.13;\ p_0 = 350;\ b = 18;\ k = 1280;\ t_0 = 0.0440$$

и мы получим:

$$\begin{aligned} v_0^2 &= 632 \\ 2p_0 L &= 392 \\ -\left(\frac{p_0 b}{v_0} + k\right) L^2 &= -480 \\ \hline v_1^2 &= 544 : v_1 = 23.32 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{v_0} = 0.0398, \quad \text{иначе} \quad \frac{2L}{v_0 + v_1} = 0.0231$$

$$\frac{1}{v_1} = 0.0429 \qquad t_0 = 0.0440$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1}\right) L = 0.0231 \qquad t_1 = 0.0671$$

$$t_0 = 0.0440$$

$$t_1 = 0.0671$$

Тогда как при подразделении получались истинные значения

$$v_1 = 24.52 \quad \text{и} \quad t_1 = 0.0654$$

Такая точность едва ли достаточна, и в формуле (17) надо брать и следующий член, тогда формула (17) заменится такой:

$$v_1^2 = v_0^2 + 2p_0 L - \left(\frac{b}{v_0}p_0 + k\right)L^2 + \frac{1}{3}b\left[\frac{b}{v_0}p_0 + k + \frac{p_0^2}{v_0^2}\right]L^3 \quad (20)$$

которую удобнее для вычисления писать так:

$$v_1^2 = v_0^2 + 2p_0 L - \left(\frac{b}{v_0}p_0 + k\right)L^2 + \\ + \frac{1}{3}\frac{bL}{v_0}\left[\frac{b}{v_0}p_0 + k\right]L^2 + \frac{1}{3}b\frac{p_0^2}{v_0^3}\cdot L^3 \quad (20^1)$$

Таким образом при наших данных будет:

$$\begin{aligned} v_0 = 25.13 \qquad v_0^2 &= \quad 632 \\ 2p_0 L &= \quad 392 \\ -\left(\frac{b}{v_0}p_0 + k\right)L^2 &= -480 \\ \frac{1}{3}\frac{bL}{v_0}\left[\frac{b}{v_0}p_0 + k\right]L^2 &= + \quad 64 \\ \frac{1}{3}\frac{bp_0^2}{v_0^3}\cdot L^3 &= + \quad 8 \\ \hline v_1^2 &= \quad 616 \qquad v_1 = 24.84 \end{aligned}$$

$$t_1 - t_0 = \frac{2L}{v_0 + v_1} = 0.0224$$

$$t_0 = 0.0440$$

$$t_1 = 0.0664$$

Эти значения, как видно, гораздо ближе к истинным

$$v_1 = 24.52 \quad \text{и} \quad t_1 = 0.0654$$

и формула (20), несмотря на кажущуюся сложность, при вычислении логарифмической линейкой доставляет решение вопроса с достаточной простотой.

§ **9.** Таблицы 15—19 и кривая фиг. 3 показывают, насколько согласуются результаты расчетов, производимых по различным способам. Для целей практики вообще нет надобности в такой точности, которая

является чисто расчетною и представляет лишь поверку вычислений, убеждая в отсутствии в них грубых ошибок.

Лаплас в предисловии к громадному тому своего «Исчисления вероятностей» говорит: «la théorie des probabilités n'est que le bon sens confirmé par le calcul». Техник, применяя математику к практическим вопросам, сам должен заботиться, чтобы она служила подспорьем здравому смыслу; он должен помнить, что вычисление можно произвести сколь угодно точно, но результат вычисления не может быть точнее тех данных и тех предположений, на коих оно основано, поэтому точность вычисления должна соответствовать точности данных и той практической потребности, для которой оно производится.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ, КОТОРЫМ В ТЕХНИЧЕСКИХ ВОПРОСАХ ОПРЕДЕЛЯЮТСЯ ЧАСТОТЫ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

§ 1. Колебательное движение приобретает все бóльшее и бóльшее значение в технических вопросах, так что в Германии есть специальность Schwingungs-Ingenieure.

Главнейшие из этих вопросов следующие:

а) Упругие, крутильные колебания вала двигателей Дизеля или вообще поршневых двигателей, в особенности когда такой двигатель сцеплен с генератором тока.

б) Неустановившиеся электрические колебания в сложной цепи при замыкании или размыкании.

в) Колебания в связанных системах при радиотелеграфировании.

г) Колебания разного рода упругих систем строительной механики.

д) Наконец, статические расчеты перекрестных связей, подобных системе стрингеров и шпангоутов судового днища.

Все эти вопросы сводятся к интегрированию системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для первых четырех случаев порядок этих уравнений второй, для последнего — четвертый.

Так как во всех случаях («а», «б», «в», «г») надо считаться с явлениями «резонанса», то необходимо рассчитывать периоды свободных колебаний системы, что приводится к решению так называемого *«векового уравнения»*.

Название это ему придано потому, что в небесной механике такое уравнение служит для определения «вековых» неравенств в движении планет.

«Вековыми» эти неравенства названы вследствие того, что периоды их весьма велики, а именно от 24 000 до 2 000 000 лет.

Вековое уравнение в технических вопросах бывает двоякого рода:

а) Для систем, в которых нет сопротивлений, погашающих колебания.

б) Для систем с погашением.

Уравнение для систем без сопротивления ничем не отличается по виду от векового уравнения небесной механики. Уравнение для систем с погашением значительно сложнее по своему составу.

В этой статье имеется в виду изложить практические методы численного решения обоих типов этих уравнений.

§ **2.** Простейший тип векового уравнения получается для таких механических систем, дифференциальные уравнения движения которых для малых колебаний составляются по схеме Лагранжа, исходя из выражения живой силы и элементарной работы.

Пусть первоначально введенные Лагранжевские координатные параметры, определяющие конфигурацию и положение системы, суть:

$$s_1, s_2, \ldots s_k \tag{1}$$

тогда, при рассмотрении «малых колебаний», живая сила системы выражается квадратичною формою

$$2T = \Sigma M_{ik} \dot{s}_i \dot{s}_k \tag{2}$$

причем коэффициенты M_{ik} суть *заданные постоянные.*

Элементарная работа выражается в общем случае так:

$$\delta U = S_1 \delta s_1 + S_2 \delta s_2 + \ldots + S_k \delta s_k \tag{3}$$

причем величины

$$S_1, \; S_2, \ldots S_k$$

суть линейные функции параметров (1).

Для упрощения дальнейших выкладок следует, прежде всего, преобразовать выражение живой силы, представляющее всегда «определенную» квадратичную форму, к сумме квадратов следующего вида:

$$\begin{aligned} 2T = {} & (c_1 \dot{s}_1 + c_2 \dot{s}_2 + \ldots + c_k \dot{s}_k)^2 + (d_2 \dot{s}_2 + d_3 \dot{s}_3 + \ldots + d_k \dot{s}_k)^2 + \\ & + \ldots + (g_{k-1} \dot{s}_{k-1} + g_k \dot{s}_k)^2 + (h_k \dot{s}_k)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

что, как известно, совершается весьма просто, не требуя решения никаких уравнений.

Затем полагаем:

$$\begin{aligned} h_k s_k &= q_k \\ g_{k-1} s_{k-1} + g_k s_k &= q_{k-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1 s_1 + c_2 s_2 + \ldots + c_k s_k &= q_1 \end{aligned} \tag{5}$$

и, вместо параметров s_i, вводим параметры q_i. Очевидно, что из уравнения (5) непосредственно находятся выражения переменных s_i через переменные q_i. Эти выражения будут вида:

$$
\begin{aligned}
s_k &= h_k' q_k \\
s_{k-1} &= g_{k-1}' q_{k-1} + g_k' q_k \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
s_1 &= c_1' q_1 + c_2' q_2 + \ldots + c_k' q_k
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где все коэффициенты, $h_k', \ldots c_k'$ — постоянные.

Очевидно, что заменив переменные s_i при помощи выражений (6), мы получим:

$$2T = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \ldots + \dot{q}_k^2 \tag{7}$$

$$\delta U = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_k \delta q_k \tag{8}$$

причем величины $Q_1, Q_2, \ldots Q_k$ будут известными *линейными* функциями переменных $q_1, q_2, \ldots q_k$; мы их обозначим так:

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + a_{13} q_3 + \ldots + a_{1k} q_k \\
Q_2 &= a_{21} q_1 + a_{22} q_2 + a_{23} q_3 + \ldots + a_{2k} q_k \\
Q_3 &= a_{31} q_1 + a_{32} q_2 + a_{33} q_3 + \ldots + a_{3k} q_k \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Q_k &= a_{k1} q_1 + a_{k2} q_2 + a_{k3} q_3 + \ldots + a_{kk} q_k
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Заметим здесь же, что в том случае, когда интеграл живых сил имеет место, выражение (8) будет представлять *полный дифференциал*, и между коэффициентами a_{ik} будут иметь место соотношения

$$a_{ih} = a_{hi} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots k-1, k \\ i = 1, 2, \ldots k-1, k \end{pmatrix} \tag{10}$$

пока же мы этого предполагать не будем.

На основании выражений (7), (8), (9), уравнения движения нашей системы будут:

$$
\begin{aligned}
\ddot{q}_1 &= a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + a_{13} q_3 + \ldots + a_{1k} q_k \\
\ddot{q}_2 &= a_{21} q_1 + a_{22} q_2 + a_{23} q_3 + \ldots + a_{2k} q_k \\
\ddot{q}_3 &= a_{31} q_1 + a_{32} q_2 + a_{33} q_3 + \ldots + a_{3k} q_k \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\ddot{q}_k &= a_{k1} q_1 + a_{k2} q_2 + a_{k3} q_3 + \ldots + a_{kk} q_k
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Для такой системы, при обычном теперь изложении, ищут частное решение вида:

$$(12) \qquad q_1 = C_1 e^{\lambda t};\ q_2 = C_2 e^{\lambda t};\ q_3 = C_3 e^{\lambda t};\ \ldots\ q_k = C_k e^{\lambda t}$$

причем C_1, C_2, $\ldots$ C_k и λ — пока неизвестные постоянные. Подставив выражения (12) в систему уравнений (11) и сократив на $e^{\lambda t}$, получаем, для определения этих неизвестных, уравнения:

$$(13) \quad \begin{aligned}
&C_1(a_{11}-\lambda^2) + C_2\, a_{12} + C_3\, a_{13} + \ldots + C_k\, a_{1k} = 0\\
&C_1\, a_{21} + C_2(a_{22}-\lambda^2) + C_3\, a_{23} + \ldots + C_k\, a_{2k} = 0\\
&C_1\, a_{31} + C_2\, a_{32} + C_3(a_{33}-\lambda^2) + \ldots + C_k\, a_{3k} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_1\, a_{k1} + C_2\, a_{k2} + C_3\, a_{k3} + \ldots + C_k(a_{kk}-\lambda^2) = 0
\end{aligned}$$

Для совместности этих уравнений необходимо, чтобы было

$$(14) \qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix}
(a_{11}-\lambda^2) & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1k}\\
a_{21} & (a_{22}-\lambda^2) & a_{23} & \ldots & a_{2k}\\
a_{31} & a_{32} & (a_{33}-\lambda^2) & \ldots & a_{3k}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \ldots & (a_{kk}-\lambda^2)
\end{vmatrix} = 0$$

Это и есть так называемое «вековое уравнение», служащее для определения величины λ. В общем случае все его корни будут неравные, число их будет $2k$. Каждому корню, напр. $\lambda = \lambda_1$, будет соответствовать своя система значений постоянных C_1, C_2, $\ldots$ C_k, которая найдется из пропорции

$$(15) \qquad \frac{C_1}{\Delta_1(\lambda_1)} = \frac{C_2}{\Delta_2(\lambda_1)} = \frac{C_3}{\Delta_3(\lambda_1)} = \ldots = \frac{C_k}{\Delta_k(\lambda_1)} = A_1$$

где A_1 есть произвольная постоянная, величины же $\Delta_1(\lambda_1)$, $\Delta_2(\lambda_1)$, $\ldots$ $\Delta_k(\lambda_1)$ суть миноры определителя $\Delta(\lambda)$, соответствующие элементам первой строки, когда в них положено $\lambda = \lambda_1$. Таким образом получится $2k$ систем решений (12), содержащих $2k$ произвольных постоянных:

$$(16) \qquad A_1,\ A_2,\ \ldots\ A_{2k}$$

Общий интеграл системы получится взяв сумму найденных решений; так, напр., будет

$$(17) \qquad q_1 = A_1 \Delta_1(\lambda_1) e^{\lambda_1 t} + A_2 \Delta_1(\lambda_2) e^{\lambda_2 t} + \ldots + A_{2k} \Delta_1(\lambda_{2k}) e^{\lambda_{2k} t}$$

Мы не будем разбирать здесь случая равных корней векового уравнения и определения в этом случае решений, так как в технической практике он редко встречается, отсылая к курсам анализа или механики, где подробно разбирается вопрос о малых колебаниях, но почти никогда не излагаются практические приемы численного вычисления корней векового уравнения, в чем состоит цель этой статьи.

Как видно, уравнение (14), даже сохраняя двучленные множители, если просто развить его первую часть, будет содержать

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$$

членов, т. е. для

$$k = 2,\ 3,\ 4, \ldots 8$$

это число будет соответственно:

$$2,\ 6,\ 24,\ 120,\ 720,\ 5760$$

а если раскрыть все скобки, то числа эти возрастут еще во много раз.

Ясно, что если легко составить это уравнение для $k = 2$ и $k = 3$, то для $k = 4$ выкладка становится весьма громоздкой, а для значений k, бóльших 5, и совсем непосредственно не выполнимой, поэтому надо прибегать к таким методам составления этого уравнения, где к полному непосредственному развитию определителя (14) прибегать не приходится.

Цель этой статьи, как уже сказано, состоит в изложении простых методов составления векового уравнения в развитой форме, после чего решение его, т. е. численное вычисление корней, затруднений не представляет.

Однако, прежде чем излагать эти способы, полезно вернуться несколько назад и рассмотреть, каким образом поступали первые творцы этих методов, Лагранж и Лаплас, а затем такóй великий астроном, как Леверрье, и такой великий математик, как Якоби. При этом обнаружится совершенно непонятное обстоятельство: Лаплас, Леверрье, Якоби развивали сложные и неудобные методы составления векового уравнения, оставляя в стороне методу, очевидную и в их время уже хорошо известную, но которая излагалась не для практического составления векового уравнения, а для общего теоретического доказательства, что всякая система обыкновенных совокупных

уравнений может быть приведена к одному обыкновенному дифференциальному уравнению, порядок коего равен порядку системы.

§ **3.** Лагранж в «Mécanique Analytique» в главе «Sur les oscillations très petites d'un système quelconque de corps», поступает для интегрирования системы (11) так: взяв вспомогательную неизвестную ξ, он полагает:

$$(A) \qquad q_1 = \xi, \quad q_2 = C_2\xi, \quad \ldots \quad q_k = C_k\xi$$

причем $C_2, \ldots C_k$ — некоторые постоянные; если выражения (A) подставить в уравнения (11), то эти уравнения примут вид:

$$(B) \qquad \begin{aligned} \ddot{\xi} &= (a_{11} + a_{12}C_2 + \ldots + a_{1k}C_k)\xi \\ C_2\ddot{\xi} &= (a_{21} + a_{22}C_2 + \ldots + a_{2k}C_k)\xi \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_k\ddot{\xi}_k &= (a_{k1} + a_{k2}C_2 + \ldots + a_{kk}C_k)\xi \end{aligned}$$

Если постоянные $C_2, \ldots C_k$ подчинить условиям

$$(C) \qquad \begin{aligned} \lambda^2 = \frac{a_{11} + a_{12}C_2 + \ldots + a_{1k}C_k}{1} &= \frac{a_{21} + a_{22}C_2 + \ldots + a_{2k}C_k}{C_2} = \\ = \ldots = \frac{a_{k1} + a_{k2}C_2 + \ldots + a_{kk}C_k}{C_k} & \end{aligned}$$

то уравнения (B) сведутся к одному:

$$(I) \qquad \ddot{\xi} - \lambda^2\xi = 0$$

решение которого сейчас же находится, после чего найдутся и соответствующие значения неизвестных $q_1, q_2, \ldots q_k$.

Таким образом все сводится к нахождению величины λ^2 и затем величин $C_2, \ldots C_k$. Относительно этого Лагранж ограничивается следующим кратким указанием:

«Число этих уравнений, как видно, равно числу неизвестных $C_2, \ldots C_k, \lambda^2$, следовательно ими эти неизвестные вполне определяются, поэтому, удерживая в первой части член λ^2 и умножив его, соответственно, на знаменатели вторых членов, получим линейные уравнения с неизвестными $C_2, \ldots C_k$, их можно будет исключить известными способами, и не трудно видеть из общих формул исключения, что для определения λ^2 получится уравнение, степень которого относительно этой неизвестной будет равна числу предложенных

уравнений, так что для λ^2 получится таковое же число различных значений, каждое из которых, по подстановке в уравнения (C), доставит соответствующие значения величин C_2, C_3, ... C_k».

Затем Лагранж показывает, каким образом определить постоянные произвольные, вводимые интегрированием уравнений (11), которых также будет k, а значит, постоянных произвольных $2k$, так чтобы удовлетворить начальным условиям.

О самом же составлении уравнения для определения значений λ^2 он ограничивается приведенным выше указанием, не развивая его дальше.

Первое издание «Mécanique Analytique» было в 1788 г., первый том второго — в 1811 г., последующие издания повторяли второе.

§ **3а.** Лаплас в главе VII книги 2 тома I «Traité de Mécanique Céleste», в отделе о вековых неравенствах в движении небесных тел, приходит к необходимости интегрировать систему уравнений, которая при наших обозначениях приводится к следующей:

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_1 &= a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + \ldots + a_{1k} q_k \\
\ddot{q}_2 &= a_{21} q_1 + a_{22} q_2 + \ldots + a_{2k} q_{2k} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\ddot{q}_k &= a_{k1} q_1 + a_{k2} q_2 + \ldots + a_{kk} q_k
\end{aligned}$$

причем

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Лаплас для этой системы ищет прямо решения вида:

$$q_1 = N_1 \sin(\lambda t + \beta); \quad q_2 = N_2 \sin(\lambda t + \beta); \quad \ldots \quad q_k = N_k \sin(\lambda t + \beta)$$

и, положив $-\lambda^2 = g$, получает для определения постоянных N уравнения:

(D)
$$\begin{aligned}
gN_1 &= a_{11} N_1 + a_{12} N_2 + \ldots + a_{1k} N_k \\
gN_2 &= a_{21} N_1 + a_{22} N_2 + \ldots + a_{2k} N_k \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
gN_k &= a_{k1} N_1 + a_{k2} N_2 + \ldots + a_{kk} N_k
\end{aligned}$$

Хотя Лаплас сам дал ряд замечательных теорем о свойствах определителей, но он в данном случае определителями не пользуется, а поступает следующим образом.

«Обозначим, — говорит он, — через φ — функцию

$$\varphi = (a_{11} - g) N_1^2 + (a_{22} - g) N_2^2 + \ldots + (a_{kk} - g^2) N_k^2 + \\ + 2a_{12} N_1 N_2 + 2a_{13} N_1 N_3 + \ldots + 2a_{1k} N_1 N_k + \ldots + 2a_{k-1,k} N_{k-1} N_k$$

тогда уравнения (D) суть не что иное, как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N_k} = 0$$

и значит, если рассматривать φ как функцию переменных независимых

$$N_1, \ N_2, \ldots N_k$$

то эти уравнения выражают, что φ должно быть максимумом, но так как по теореме об однородных функциях будет

$$N_1 \frac{\partial \varphi}{\partial N_1} + N_2 \frac{\partial \varphi}{\partial N_2} + \ldots + N_k \frac{\partial \varphi}{\partial N_k} = 2\varphi$$

то этот максимум есть $\varphi = 0$.

«Но максимум функции φ можно находить и следующим образом: взяв частную производную этой функции по N_1 и уравняв эту производную нулю, получим линейное уравнение между переменными $N_1, N_2, \ldots N_k$, из которого N_1 выразится также линейным образом через остальные переменные:

$$N_2, \ N_3, \ldots N_k$$

подставив это выражение, вместо N_1, в выражение функции φ, получим новую функцию φ_1 от переменных $N_2, N_3, \ldots N_k$, также однородную и второй степени. Берем частную производную φ_1 по переменной N_2 и, уравняв ее нулю, находим N_2 в виде линейной функции остальных переменных и, подставив в выражение φ_1, получим функцию φ_2 переменных $N_3, N_4, \ldots N_k$ однородную и второй степени. Продолжая поступать таким образом, придем к функции φ_{k-1}, которая будет вида

$$\varphi_{k-1} = K(g) \cdot N_k^2$$

причем $K(g)$ будет известная целая функция степени k от неизвестной g.

«Уравнение

$$\frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial N_k} = 0$$

будет

$$K(g) \cdot N_k = 0$$

а так как мы ищем решения системы (D), отличные от нуля, то должно быть

$$K(g) = 0 \tag{E}$$

величина же N_k остается произвольной.

«Уравнение (E) доставит k значений для величины g, которые обозначим через

$$g_1,\ g_2,\ \ldots\ g_k$$

для каждого из них получим из уравнений

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial N_{i+1}} = 0$$

выражения вида:

$$N_{11} = A_{11} N_k',\quad N_{21} = A_{21} N_k',\quad \ldots\quad N_{k-1} = A_{k-1} N_k'$$

причем N_k' есть произвольная постоянная; таким образом для корня

$$g = g_1$$

получим частное решение нашей системы вида:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_{11} N_k' \sin(g_1 t + \beta') \\ q_2 &= A_{21} N_k' \sin(g_1 t + \beta') \\ &\cdots\cdots\cdots \\ q_k &= A_{k1} N_k' \sin(g_1 t + \beta') \end{aligned}$$

причем β' есть также произвольная постоянная. Взяв сумму решений, соответствующих всем k корням, получим общий интеграл системы в виде:

$$\text{(F)}\quad \begin{cases} q_1' = A_{11} N_k' \sin(g_1 t + \beta') + A_{12} N_k'' \sin(g_2 t + \beta'') + \ldots + N_k^{(k)} \sin(g_k t + \beta^{(k)}) \\ q_2 = A_{21} N_k' \sin(g_2 t + \beta') + A_{22} N_k'' \sin(g_2 t + \beta'') + \ldots + N_k^{(k)} \sin(g_k t + \beta^{(k)}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_k = A_{k1} N_k' \sin(g_1 t + \beta') + A_{k2} N_k'' \sin(g_2 t + \beta'') + \ldots + N_k^{(k)} \sin(g_k t + \beta^{k}) \end{cases}$$

причем

$$A_{11},\ A_{12},\ \ldots\ A_{k,k-1}$$

будут некоторые вполне определенные числа, величины же

$$\begin{gathered} N_k',\ N_k'',\ \ldots\ N_k^{(k)} \\ \beta',\ \beta'',\ \ldots\ \beta^{(k)} \end{gathered}$$

произвольные постоянные».

Отсюда видно, что Лаплас гораздо подробнее, нежели Лагранж, указал, каким образом составлять уравнение

$$(E) \qquad K(g) = 0$$

в вычислении корней которого и заключается вся сущность дела.

Действия, которые надо совершать для составления уравнения (E) следуя Лапласу, как видно, весьма просты, но если начать их развивать на самом деле, то сейчас же убедимся, насколько сложны и утомительны становятся выкладки даже при k, равном 4 или 5, к тому же Лаплас не счел нужным указать, что уравнение

$$K(g) = 0$$

будет степени k лишь после устранения из него лишних множителей, введенных при процессе последовательного составления функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, причем эти множители надо помечать.

Покажем это на простейшем примере. Пусть, напр., будет

$$2\varphi = (1-g)N_1^2 + (2-g)N_2^2 + (3-g)N_3^2 - 2N_1N_2 - 4N_1N_3 - 6N_2N_3$$

тогда имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial N_1} = (1-g)N_1 - N_2 - 2N_3 = 0$$

откуда

$$N_1 = \frac{N_2 + 2N_3}{1-g}$$

по подстановке и упрощении получаем

$$2(1-g)\varphi_1 = (g^2 - 3g + 1)N_2^2 + (g^2 - 4g - 1)N_3^2 + (6g - 10)N_2N_3$$

значит

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial N_2} = (g^2 - 3g + 1)N_2 + (3g - 5)N_3 = 0$$

откуда

$$N_2 = -\frac{3g-5}{g^2 - 3g + 1}N_3$$

По подстановке получаем после упрощения:

$$2(1-g)(g^2 - 3g + 1)\varphi_2 = [(g^2 - 4g - 1)(g^2 - 3g + 1) - (3g - 5)^2]N_3^2$$
$$= [g^4 - 7g^3 + 3g^2 + 29g - 26]N_3^2$$

и сейчас же убеждаемся, что множитель $(1-g)$ в обеих частях этого равенства общий; устранив его, получаем

$$K(g) = g^3 - 6g^2 - 3g + 26 = 0$$

Это и есть искомое уравнение третьей степени, коим определяются значения g для системы, соответствующей вышеприведенной функции φ.

Эти посторонние множители, степень которых с каждым преобразованием повышается, значительно усложняют составление «векового уравнения» по методе Лапласа, но зато доставляют превосходный контроль вычислению.

§ **3б.** Последний том «Небесной механики» Лапласа вышел в 1825 г., а в 1827 г. Лаплас скончался. Непосредственным его преемником был Леверрье, который с конца 1830-х годов начал серию своих «Астрономических исследований», продолжавшихся по самый день его смерти в течение 40 лет. В этих исследованиях он не только в общем виде развивает теорию движения небесных тел нашей системы, но сопоставляет ее с наблюдениями, т. е. развивает *численно*, присоединив к известным до него семи большим планетам и открытую им вычислениями восьмую — Нептун.

Исследования Леверрье, помимо того, что им помещено в других изданиях, занимают семь больших томов in-4° в летописях Парижской обсерватории; как астроном теоретик и вместе с тем вычислитель, он считался едва ли имеющим себе равного.

Метода Лапласа, видимо, не удовлетворяла Леверрье, так как в своей статье «Sur les variations séculaires des éléments des orbites», помещенной в прибавлении к «Connaissance des Temps» за 1843 г., следовательно напечатанной в 1839 или 1840 г., Леверрье излагает свою методу составления векового уравнения. Эта метода включена затем и в его «Recherches Astronomiques» (гл. IX), помещенных в «Annales de l'Observatoire Impérial de Paris» (t. II, 1856).

Главное неудобство вида (14) векового уравнения для *численного* его решения происходит вследствие того, что члены вида $a_{ii} - \lambda^2$ стоят в диагонали определителя. Это заставило знаменитого математика Якоби поместить в томе XXX журнала «Crelle» составленную им в 1845 г. обширную статью под заглавием: «Ueber ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Secularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen». Эта статья вошла в том VII собрания сочинений Якоби.

Собрание сочинений Якоби относительно доступно — его можно найти во многих фундаментальных библиотеках, тем не менее оно редко попадает в руки техников, поэтому мы приведем упрощенное изложение методы Якоби, устранив из нее все то, что специально относится к астрономии.

«Annales de l'Observatoire de Paris», особенно первые их тома, гораздо менее доступны, и едва ли их найдется десяток комплектов во всем Союзе, к тому же изложение Леверрье еще более, чем у Якоби, занято

астраномическими подробностями, относящимися к разбираемой им специально задаче небесной механики, поэтому мы приводим также изложение методы Леверрье в упрощенном виде, устранив все специально астрономическое.

Показав эти методы, я показываю в этой статье естественный и весьма простой способ составления векового уравнения в виде такого определителя, в котором все двучлены вида $a_{ii} - \lambda^2$, когда сопротивления нет, и все трехчлены вида $a_{ii} + h_{ii}\lambda - \lambda^2$, когда сопротивление есть, располагаются *только в одном первом* столбце этого определителя, все же остальные элементы его — известные *постоянные*, — развитие такого определителя никаких трудностей не представляет. Упрощение, таким образом получаемое, становится особенно наглядным по сравнении с методами Лапласа, Леверрье и Якоби.

§ 4. Начнем с методы Леверрье. Положим для краткости письма:

$$\lambda^2 = \alpha \tag{18}$$

тогда уравнение (14) будет

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \alpha), & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & (a_{22} - \alpha) & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33} - \alpha) & \dots & a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & (a_{kk} - \alpha) \end{vmatrix} = 0 \tag{19}$$

Очевидно, что это уравнение будет степени k относительно α, причем эта степень получится от произведения *диагональных* членов

$$(a_{11} - \alpha)(a_{22} - \alpha)(a_{33} - \alpha) \dots (a_{kk} - \alpha) \tag{20}$$

ибо это есть единственный член, который в развитом определителе содержит все биномы. Более того, от этого же произведения происходит и член, содержащий α^{k-1} в развитом определителе. В самом деле, вообразим, что мы сперва развили наш определитель по элементам первого столбца, тогда сразу видно, что член α^{k-1} получится только из того же произведения (20), ибо все остальные миноры содержат не более $k-2$ двучленных множителей, что очевидно, если вычеркнуть в определителе $\Delta(\alpha)$ первый столбец и любую строку, начиная со второй.

Итак, в развернутом уравнении

$$\Delta(\alpha) = 0$$

первые два члена происходят от разложения произведения

$$(a_{11} - -\alpha)(a_{22} - \alpha)(a_{33} - \alpha) \ldots (a_{kk} - \alpha) \tag{20}$$

так что по умножении на $(-1)^k$ эти два члена будут

$$\alpha^k - (a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{kk})\alpha^{k-1} \tag{21}$$

Отсюда видно, что сумма корней уравнения (19) будет

$$s_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{kk} \tag{22}$$

Это свойство и является основным в методе Леверрье, который использует его следующим образом: продифференцируем уравнения (11) дважды по времени t, получим систему:

$$\begin{aligned} q_1^{\text{IV}} &= a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + \ldots + a_{1k}\ddot{q}_k \\ q_2^{\text{IV}} &= a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + \ldots + a_{2k}\ddot{q}_k \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_k^{\text{IV}} &= a_{k1}\ddot{q}_1 + a_{k2}\ddot{q}_2 + \ldots + a_{2k}\ddot{q}_k \end{aligned} \tag{23}$$

Очевидно, что эта система будет иметь решение:

$$q_1 = \lambda^2 C_1 e^{\lambda t};\quad q_2 = \lambda^2 C_2 e^{\lambda t};\quad \ldots\quad q_k = \lambda^2 C_k e^{\lambda t} \tag{24}$$

или, что то же:

$$q_1 = C_1 e^{\lambda t};\quad q_2 = C_2 e^{\lambda t};\quad \ldots\quad q_k = C_k e^{\lambda t} \tag{25}$$

Подставим в уравнение (23) вместо

$$\ddot{q}_1,\ \ddot{q}_2, \ldots \ddot{q}_k$$

их величины (11), тогда получим систему уравнений вида:

$$\begin{aligned} q_1^{\text{IV}} &= b_{11}q_1 + b_{12}q_2 + b_{13}q_3 + \ldots + b_{1k}q_k \\ q_2^{\text{IV}} &= b_{21}q + b_{22}q_2 + b_{23}q_3 + \ldots + b_{2k}q_k \\ q_3^{\text{IV}} &= b_{31}q_1 + b_{32}q_2 + b_{33}q_3 + \ldots + b_{3k}q_k \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_k^{\text{IV}} &= b_{k1}q_1 + b_{k2}q_2 + b_{k3}q_3 + \ldots + b_{kk}q_k \end{aligned} \tag{26}$$

причем коэффициенты b_{ik} будут составляться по тому правилу, как будто составляется произведение определителей, комбинируя строки со столбцами:

$$(27)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\ldots a_{1k}\\ a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\ldots a_{2k}\\ a_{31}\,a_{32}\,a_{33}\ldots a_{3k}\\ \ldots\ldots\\ a_{k1}\,a_{k2}\,a_{k3}\ldots a_{kk}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\ldots a_{1k}\\ a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\ldots a_{2k}\\ a_{31}\,a_{32}\,a_{33}\ldots a_{3k}\\ \ldots\ldots\\ a_{k1}\,a_{k2}\,a_{k3}\ldots a_{kk}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11}\,b_{12}\,b_{13}\ldots b_{1k}\\ b_{21}\,b_{22}\,b_{23}\ldots b_{2k}\\ b_{31}\,b_{32}\,b_{33}\ldots b_{3k}\\ \ldots\ldots\\ b_{k1}\,b_{k2}\,b_{k3}\ldots b_{kk}\end{vmatrix}.$$

С другой стороны, так как выражения (25) представляют решение системы (26), то λ будет удовлетворять уравнению

$$(28)\qquad \begin{vmatrix} (b_{11}-\lambda^4), & b_{12}, & b_{13}, & \ldots\ b_{1k}\\ b_{21} & (b_{22}-\lambda^4) & b_{23} & \ldots\ b_{2k}\\ b_{31} & b_{32} & (b_{33}-\lambda^4) & \ldots\ b_{3k}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & \ldots (b_{kk}-\lambda^4)\end{vmatrix}=0$$

значит α будет удовлетворять уравнению

$$(29)\qquad \Delta(\alpha^2)=\begin{vmatrix} (b_{11}-\alpha^2) & b_{12} & b_{13} & \ldots\ b_{1k}\\ b_{21} & (b_{22}-\alpha^2) & b_{23} & \ldots\ b_{2k}\\ b_{31} & b_{32} & (b_{33}-\alpha^2) & \ldots\ b_{3k}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & \ldots (b_{kk}-\alpha^2)\end{vmatrix}=0$$

следовательно будет, на основании формулы (22),

$$(30)\qquad s_2=\alpha_1^{\,2}+\alpha_2^{\,2}+\alpha_3^{\,2}+\ldots+\alpha_k^{\,2}=b_{11}+b_{22}+b_{33}+\ldots+b_{kk}$$

Проделаем этот процесс еще раз, т. е. уравнение (26) продифференцируем дважды по времени t и в полученную систему вместо величин

$$\ddot{q}_1,\ \ddot{q}_2,\ \ldots\ddot{q}_k$$

подставим их величины (11), тогда будет:

$$
\begin{aligned}
q_1^{\,VI} &= c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + c_{13}q_3 + \ldots + c_{2k}q_{1k} \\
q_2^{\,VI} &= c_{21}q_1 + c_{22}q_2 + c_{23}q_3 + \ldots + c_{2k}q_{2k} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
q_k^{\,VI} &= c_{k1}q_1 + c_{k2}q_2 + c_{k3}q_3 + \ldots + c_{kk}q_k
\end{aligned}
\tag{31}
$$

причем коэффициенты c_{ik} вычисляются по схеме

$$
\begin{vmatrix} b_{11}\,b_{12}\ldots b_{1k} \\ b_{21}\,b_{22}\ldots b_{2k} \\ \cdots\cdots \\ b_{k1}\,b_{k2}\ldots b_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1k} \\ a_{21}\,a_{22}\ldots a_{2k} \\ \cdots\cdots \\ a_{k1}\,a_{k2}\ldots a_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11}\,c_{12}\ldots c_{1k} \\ c_{21}\,c_{22}\ldots c_{2k} \\ \cdots\cdots \\ c_{k1}\,c_{k2}\ldots c_{kk} \end{vmatrix} \tag{32}
$$

тогда будет

$$
s_3 = \alpha_1^{\,3} + \alpha_2^{\,3} + \alpha_3^{\,3} + \ldots + \alpha_k^{\,3} = c_{11} + c_{22} + c_{33} + \ldots + c_{kk} \tag{33}
$$

Продолжая поступать таким образом, получим последовательно значения:

$$
\begin{aligned}
s_4 &= \alpha_1^{\,4} + \alpha_2^{\,4} + \alpha_3^{\,4} + \ldots + \alpha_k^{\,4} \\
s_5 &= \alpha_1^{\,5} + \alpha_2^{\,5} + \alpha_3^{\,5} + \ldots + \alpha_k^{\,5} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
s_k &= \alpha_1^{\,k} + \alpha_2^{\,k} + \alpha_3^{\,k} + \ldots + \alpha_k^{\,k}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Пусть уравнение

$$\Delta(\alpha) = 0$$

будет

$$
\Delta(\alpha) = \alpha^k + B_1\alpha^{k-1} + B_2\alpha^{k-2} + \ldots + B_k = 0 \tag{35}
$$

Зная значения

$$s_1,\ s_2,\ s_3, \ldots s_k$$

найдем коэффициенты $B_1, B_2, \ldots B_k$ по известным формулам Ньютона:

$$
\begin{aligned}
0 &= s_1 + B_1 \\
0 &= s_2 + B_1 s_1 + 2B_2 \\
0 &= s_3 + B_1 s_2 + B_2 s_1 + 3B_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= s_{k-1} + B_1 s_{k-2} + B_2 s_{k-3} + \ldots + B_{k-2} s_1 + (k-1) B_{k-1} \\
0 &= s_k + B_1 s_{k-1} + B_2 s_{k-2} + \ldots + B_{k-1} s_1 + k B_k
\end{aligned}
\tag{36}
$$

и после того как уравнение (35) будет составлено, вычисляем его корни по одному из обычных методов (напр. Греффе), чем поставленная задача и будет решена.

§ **5.** Прежде чем приводить нашу методу и пример, ее поясняющий, покажем, в чем состоит метода Якоби, сохраняя ее сущность, но не придерживаясь изложения ее знаменитого автора.

Изложение этой методы приобретает бо́льшую простоту и наглядность, если преобразовывать не систему дифференциальных уравнений, как делает Якоби, а те две квадратичные формы, из которых система получается, когда интеграл живой силы имеет место.

В этом случае будет:

$$
\begin{aligned}
2T &= \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \ldots + \dot{q}_k^2 \\
2(U_0 + U) &= \Sigma a_{ih} q_i q_h
\end{aligned}
\qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots k \\ h = 1, 2, \ldots k \end{pmatrix}
\tag{37}
$$

причем

$$
a_{ih} = a_{hi} \tag{38}
$$

иными словами форма $2(U_0 + U)$ будет

$$
\begin{aligned}
2(U_0 + U) = {} & a_{11} q_1^2 + a_{22} q_2^2 + a_{33} q_3^2 + \ldots + a_{kk} q_k^2 \\
& + 2a_{12} q_1 q_2 + 2a_{13} q_1 q_3 + \ldots + 2a_{1k} q_1 q_k \\
& + 2a_{23} q_2 q_3 + \ldots + 2a_{2k} q_2 q_k \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + 2a_{k-2,k-1} q_{k-2} q_{k-1} + 2a_{k-2,k} q_{k-2} q_k \\
& + 2a_{k-1,k} q_{k-1} q_k
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Положим, что обе формы преобразованы к «нормальным координатам»:

$$p_1, p_2, \ldots p_k \tag{40}$$

т. е. эти формы приняли вид:

$$\begin{gathered} 2T = \dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2 + \dot{p}_3^2 + \ldots + \dot{p}_k^2 \\ 2(U_0 + U) = -[g_1^2 p_1^2 + g_2^2 p_2^2 + g_3^2 p_3^2 + \ldots + g_k^2 p_k^2] \end{gathered} \tag{41}$$

Мы написали $g_1^2, g_2^2, \ldots g_k^2$, чтобы показать, что все эти числа положительные, когда колебания происходят около устойчивого положения равновесия системы, в каковом только случае они и остаются «малыми».

Ясно, что в нормальных координатах уравнения движения системы будут:

$$\begin{gathered} \ddot{p}_1 + g_1^2 p_1 = 0 \\ \ddot{p}_2 + g_2^2 p_2 = 0 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ddot{p}_k + g_k^2 p_k = 0 \end{gathered} \tag{42}$$

и определитель $\Delta(\lambda)$ для этой системы сводится к его диагональным элементам

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} g_1^2 + \lambda^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & g_2^2 + \lambda^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & g_3^2 + \lambda^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & g_k^2 + \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{43}$$

Отсюда ясно, что вопрос об интегрировании системы (11) в этом случае (т. е. когда интеграл живых сил имеет место) равносилен разысканию «нормальных» координат, т. е. преобразованию обеих квадратичных форм

$$2T \text{ и } 2(U_0 + U)$$

к виду (41), при помощи «ортогональных» подстановок, т. е. таких, что форма $2T$ сохраняет свой вид (41).

Очевидно, что если бы мы, наряду с формою $2T$, взяли форму

$$2S = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \ldots + q_k^2 \tag{44}$$

то, после преобразования, эта форма приняла бы вид

$$2S = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \ldots + p_k^2 \tag{45}$$

Если бы мы стали искать сразу ортогональную подстановку

$$\begin{aligned} q_1 &= \alpha_{11} p_1 + \alpha_{12} p_2 + \ldots + \alpha_{1k} p_k \\ q_2 &= \alpha_{21} p_1 + \alpha_{22} p_2 + \ldots + \alpha_{2k} p_k \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_k &= \alpha_{k1} p_1 + \alpha_{k2} p_2 + \ldots + \alpha_{kk} p_k \end{aligned} \tag{46}$$

то, как известно, мы пришли бы к необходимости решать то же самое вековое уравнение (14), как и при интегрировании системы (11).

Сущность методы Якоби состоит в том, чтобы делать эту подстановку не сразу, а постепенно, последовательно, обращая в нуль тот элемент определителя $\Delta(\lambda)$, стоящий вне диагонали, абсолютная величина которого наибольшая. Оказывается, что при этом сумма квадратов элементов вне диагонали уменьшается при каждом преобразовании и может быть сделана меньше любой наперед назначенной величины, а значит, и каждый из этих элементов в отдельности может быть сделан произвольно малым, сумма же квадратов постоянных членов в диагональных биномах с каждым преобразованием возрастает; таким образом определитель $\Delta(\lambda)$ может быть приведен сколь угодно близко к виду (43), а форма $2(U_0 + U)$ — к виду (41).

В самом деле, положим для определенности рассуждения, что в форме $2(U_0 + U)$ наибольший по численной величине коэффициент при произведении двух переменных есть a_{12}, выделим тогда в этой форме трехчлен, содержащий только эти две переменные; это будет

$$a_{11} q_1^2 + 2a_{12} q_1 q_2 + a_{22} q_2^2 \tag{47}$$

Вместо переменных q_1 и q_2, введем вспомогательные переменные r_1 и r_2 простейшей ортогональной подстановкой:

$$\begin{aligned} q_1 &= r_1 \cos\varphi - r_2 \sin\varphi \\ q_2 &= r_1 \sin\varphi + r_2 \cos\varphi \end{aligned} \tag{48}$$

остальные же величины q оставим без изменения.

Ясно, что в форме $2S$ сумма

$$q_1^2 + q_2^2$$

заменится суммою

$$r_1^2 + r_2^2$$

и выражение $2S$ после преобразования будет

$$2S = r_1^2 + r_2^2 + q_3^2 + q_4^2 + \ldots + q_k^2 \tag{49}$$

каков бы угол φ ни был.

Выберем этот угол так, чтобы после преобразования в выражении

$$2(U_0 + U)$$

не было члена с $r_1 r_2$.

Очевидно будет

$$\begin{aligned} a_{11} q_1^2 + 2a_{12} q_1 q_2 + a_{22} q_2^2 = {} & (a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\sin^2\varphi) r_1^2 \\ & + (a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\cos^2\varphi) r_2^2 \\ & + 2[-a_{11}\sin\varphi\cos\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + a_{22}\sin\varphi\cos\varphi] r_1 r_2 \end{aligned}$$

и чтобы член с $r_1 r_2$ пропал, надо определить угол φ так, чтобы величина, стоящая в [ ], была равна нулю, т. е. чтобы было

$$\frac{1}{2}(a_{22} - a_{11})\sin 2\varphi + a_{12}\cos 2\varphi = 0$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \tag{50}$$

Значит,

$$\sin 2\varphi = \frac{2a_{12}}{\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}; \quad \cos 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}$$

Затем будет:

$$a_{11}\cos^2\varphi + a_{12}\sin 2\varphi + a_{22}\sin^2\varphi = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}$$

$$a_{11}\sin^2\varphi - a_{12}\sin 2\varphi + a_{22}\cos^2\varphi = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}$$

Обозначая эти величины, соответственно, через b_{11} и b_{22}, видим, что трехчлен

$$a_{11} q_1^2 + 2a_{12} q_1 q_2 + a_{22} q_2^2 = b_{11} r_1^2 + b_{22} r_2^2$$

в составе формы $2(U_0 - U)$ заменится этим двучленом.

Заметим, что

$$b_{11} + b_{22} = a_{11} + a_{22}$$

Составим теперь выражение коэффициентов

$$2a_{13} \text{ и } 2a_{23}$$

как типичных для изменяющихся при преобразовании и остающихся после его выполнения.

Имеем:

$$2a_{13}q_1 \cdot q_3 = 2a_{13}(r_1 \cos\varphi - r_2 \sin\varphi)q_3 = 2a_{13}\cos\varphi \cdot r_1 q_3 - 2a_{13}\sin\varphi \cdot r_2 q_3$$
$$2a_{23}q_2 \cdot q_3 = 2a_{23}(r_1 \sin\varphi + r_2 \sin\varphi)q_3 = 2a_{23}\sin\varphi \cdot r_1 q_3 + 2a_{23}\cos\varphi \cdot r_2 q_3$$

Значит, будет

$$2a_{13}q_1q_3 + 2a_{23}q_2q_3 = 2b_{13}r_1q_3 + 2b_{23}r_2q_3$$

причем

$$\begin{aligned} b_{13} &= a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi \\ b_{23} &= a_{23}\cos\varphi - a_{13}\sin\varphi \end{aligned} \tag{51}$$

Из этих формул следует

$$4b_{13}^2 + 4b_{23}^2 = 4a_{13}^2 + 4a_{23}^2 \tag{52}$$

вместе с тем

$$b_{11}^2 + b_{22}^2 = \frac{(a_{11}+a_{22})^2}{2} + \frac{(a_{11}-a_{22})^2}{2} + 2a_{12}^2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2a_{12}^2 \tag{53}$$

Отсюда видно, что в рассматриваемой форме сумма квадратов коэффициентов при квадратах переменных была до преобразования:

$$\Sigma a_{ii}^2$$

а после преобразования стала

$$\Sigma a_{ii}^2 + 2a_{12}^2 \tag{54}$$

т. е. увеличилась на $2a_{12}^2$, сумма же квадратов коэффициентов при произведениях переменных уменьшилась на $4a_{12}^2$, ибо в преобразованной форме коэффициент $2a_{12}$ исчез, а сумма квадратов прочих свою величину сохранила.

Таким образом, после преобразования, форма $2(U_0 + U)$ будет

$$\begin{aligned} 2(U_0+U) = {} & b_{11}r_1^2 + b_{22}r_2^2 + a_{33}q_3^2 + \ldots + a_{kk}q_k^2 \\ & + 2b_{13}r_1q_3 + \ldots + 2b_{1k}r_1q_k \\ & + 2b_{23}r_2q_3 + \ldots + 2b_{2k}r_2q_k \\ & + 2a_{32}q_3q_4 + \ldots + 2a_{3k}q_3q_k \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \ldots + 2a_{k-1,k}q_{k-1}q_k \end{aligned} \tag{55}$$

Выбрав в этой форме наибольший по абсолютной величине коэффициент при произведении двух переменных, выполняем подобное же преобразование, получаем новую форму, в которой сумма квадратов коэффициентов будет еще уменьшена, и продолжаем таким образом, пока не дойдем до формы вида

$$(56) \quad -2(U_0 + U) = n_{11}u_1^2 + n_{22}u_2^2 + \ldots + n_{kk}u_k^2 + \Sigma n_{ik}u_i u_k$$

причем *все* коэффициенты n_{ik} будут настолько малы по сравнению с коэффициентами

$$n_{11},\ n_{22},\ \ldots\ n_{kk}$$

что суммою

$$\Sigma n_{ik}u_i u_k$$

можно пренебречь при той точности, с которою вычисление производится, и отбросить эту сумму.

Полагая

$$n_{11} = g_1^2;\ n_{22} = g_2^2;\ \ldots\ n_{kk} = g_k^2$$

ибо все эти величины положительные при устойчивом движении, мы будем иметь:

$$(57) \quad \begin{gathered} 2T = \dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 + \ldots + \dot{u}_k^2 \\ 2(U_0 + U) = -[g_1^2u_1^2 + g_2^2u_2^2 + g_3^2u_3^2 + \ldots + g_k^2u_k^2] \end{gathered}$$

Переменные

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_k$$

и будут «нормальные» координаты, и поставленная задача будет решена, причем ни составлять, ни решать уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0$$

не потребовалось.

§ **6.** Сравним теперь методы наших двух знаменитых авторов.

Метода Якоби приложима лишь к интегрированию такой системы уравнений, для которой имеет место интеграл живых сил, метода Леверрье приложима к любой системе.

В методе Якоби нельзя наперед в точности указать, сколько раз придется делать преобразование, пока можно будет в выражении потенциальной функции отбросить все члены с произведениями переменных, в методе Леверрье можно с точностью вперед указать, какая требуется работа для составления уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0$$

а если применять методу Греффе, то и для его решения.

Чтобы получить более определенное сравнение, разовьем методу Леверрье для того случая, когда интеграл живых сил имеет место, и притом не в том виде, как это сделано им самим, а подобно тому, как нами развита метода Якоби, т. е. путем преобразования квадратичных форм

$$2T \text{ и } 2(U_0 + U)$$

§ 7. Когда интеграл живых сил имеет место, то, как указано, формы

$$2T \text{ и } 2(U_0 + U)$$

будут представляться уравнениями (37) и (39), и уравнения движения системы будут:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \frac{\partial U}{\partial q_1} \\ \ddot{q}_2 &= \frac{\partial U}{\partial q_2} \\ &\cdots \\ \ddot{q}_k &= \frac{\partial U}{\partial q_k} \end{aligned} \tag{58}$$

По теореме об однородных функциях будет

$$2U = q_1 \frac{\partial U}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial U}{\partial q_2} + \ldots + q_k \frac{\partial U}{\partial q_k} \tag{59}$$

Когда мы составляем уравнения (23) и по ним (26), то если в выражении (59) заменить множители

$$q_2, q_2, \cdots q_k$$

соответственно, через

$$\frac{\partial U}{\partial q_1}, \frac{\partial U}{\partial q_2}, \cdots \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

то получится форма

$$\begin{aligned} 2U_1 &= \frac{\partial U}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_2} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_k} = \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial U}{\partial q_k}\right)^2 = \Sigma b_{ik} q_i q_k \end{aligned} \tag{60}$$

Форма эта будет такова, что

$$q_1^{IV} = \frac{\partial U_1}{\partial q_1}$$

$$q_2^{IV} = \frac{\partial U_1}{\partial q_2} \tag{61}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$q_k^{IV} = \frac{\partial U_1}{\partial q_k}$$

Чтобы перейти к уравнениям, первые части коих, соответственно,

$$q_1^{VI},\ q_2^{VI},\ \ldots\ q_k^{VI}$$

стоит только составить форму

$$2U_2 = \frac{\partial U_1}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial U}{\partial q_1} + \frac{\partial U_1}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial U}{\partial q_2} + \ldots + \frac{\partial U_1}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial U}{\partial q_k} = \Sigma c_{ik}\, q_i q_k \tag{62}$$

то будет:

$$q_1^{VI} = \frac{\partial U_2}{\partial q_1}$$

$$q_2^{VI} = \frac{\partial U_2}{\partial q_2} \tag{63}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$q_k^{VI} = \frac{\partial U_2}{\partial q_k}$$

Таким образом преобразования Леверрье будут состоять в составлении последовательных форм:

$$U_1,\ U_2,\ U_3,\ \ldots\ U_{k-1}$$

причем форма U_1 составляется по формуле (60), остальные — по формуле

$$2U_{i+1} = \frac{\partial U_i}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial U}{\partial q_1} + \frac{\partial U_i}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial U}{\partial q_2} + \ldots + \frac{\partial U_i}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial U}{\partial q_k} \tag{64}$$

Пусть, напр., $k = 6$, посмотрим, сколько надо сделать умножений, чтобы по методе Леверрье составить s_2, s_3, s_4, s_5 и s_6, т. е. формы:

$$U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4,\ U_5$$

Ясно, что каждая производная $\frac{\partial U_i}{\partial q_n}$ представляет линейный шестичлен относительно переменных $q_1, q_2, \ldots q_6$, следовательно для перехода от одной

формы к следующей надо сделать $36 \cdot 6 = 216$ умножений, а значит, всего надо $216 \cdot 5 = 1080$ умножений, но число это уменьшается в отношении 21:36, вследствие равенства многих коэффициентов между собою, так что различных умножений будет всего 630.

После этого останется вычислить по формулам Ньютона (36) коэффициенты

$$B_1, \; B_2, \ldots B_6$$

уравнения

$$(65) \qquad \alpha^6 + B_1 \alpha^5 + B_2 \alpha^4 + B_3 \alpha^3 + B_4 \alpha^2 + B_5 \alpha + B_6 = 0$$

и затем все шесть корней этого уравнения, что требует сравнительно небольшую работу.

Посмотрим теперь, сколько работы в худшем случае потребует метода Якоби.

Для этой методы самый невыгодный случай тот, когда все коэффициенты a_{ik} близки между собою, тогда при $k = 6$, при каждом преобразовании, сумма квадратов коэффициентов вне диагонали будет уменьшаться на $\frac{1}{15}$ ее величины, отсюда видно, что эта сумма составит меньше $\frac{1}{1000}$ своего первоначального значения (что во всех технических вопросах может считаться вполне достаточным) лишь после

$$\frac{3}{|\log 0.85|} = 43$$

преобразований.

При каждом преобразовании надо перевычислять $2 + 8 = 10$ коэффициентов, причем для каждого надо два умножения; присоединяя к этому вычисление углов φ, видим, что требуется кругло 900 умножений, после чего работу можно считать законченной.

Отсюда видно, что в самом невыгодном случае метода Якоби может потребовать работы почти на 50% больше, нежели метода Леверрье, причем необходимо еще заметить, что вычисления по методе Леверрье гораздо симметричнее, умножения приходится делать все время на *те же* самые числа и схема вычисления может быть расположена подобно столь хорошо выработанной и для астрономов столь привычной схеме, служащей для составления нормальных уравнений в методе наименьших квадратов.

Что же касается остающегося затем решения уравнения (65), то для привычного вычислителя оно требует, примерно, $1^1/_2$ часа времени. Все эти обстоятельства, вероятно, и заставили Леверрье сохранить в 1856 г. свою

методу, хотя метода Якоби и была опубликована в 1845 г. и, конечно, была хорошо известна Леверрье.

В тех случаях, когда при преобразованиях Якоби один из коэффициентов вне диагонали оказывается значительно больше остальных, число преобразований, соответственно, сокращается.

§ 8. Прежде чем перейти к системам с сопротивлением, напомним ту общую методу интегрирования систем линейных уравнений, которая излагается в любом курсе анализа, начинается с курса Лакруа, вышедшего 120 лет тому назад, причем будем придерживаться того своеобразного изложения, которым пользовался на своих лекциях А. Н. Коркин.

Положим

$$(*) \qquad x = q_1$$

где x есть вспомогательная переменная (можно полагать в общем случае и

$$x = aq_1 + bq_2 + cq_3 + \ldots + fq_k$$

где a, b, c, $\ldots$ f — любые *заданные* постоянные).

Продифференцируем равенство (*) дважды по времени t, и в полученном равенстве

$$x'' = q_1''$$

заменим q_1'' его величиною

$$q_1'' = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1k}q_k$$

из предложенной системы (11), так что будет

$$x'' = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1k}q_k$$

Дифференцируем это равенство дважды по времени, и в полученном равенстве

$$x^{IV} = a_{11}q_1'' + a_{12}q_2'' + \ldots + a_{1k}q_k''$$

заменяем

$$q_1'',\ q_2'',\ \ldots\ q_k''$$

их величинами из предложенной системы, получим, сохраняя сделанное в § 4 обозначение, уравнение

$$x^{IV} = b_{11}q_1 + b_{12}q_2 + \ldots + b_{1k}q_k$$

и продолжаем поступать таким образом при составлении производных:

$$x^{VI},\ x^{VIII},\ \ldots\ x^{2k}$$

Таким образом, изменив несколько обозначения § 4, вместо предложенной системы, получим ей эквивалентную:

$$
\begin{aligned}
x &= q_1 \\
x'' &= a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + a_{13} q_3 + \ldots + a_{1k} q_k \\
x^{\mathrm{IV}} &= b_{21} q_1 + b_{22} q_2 + b_{23} q_3 + \ldots + b_{2k} q_k \\
x^{\mathrm{VI}} &= c_{31} q_1 + c_{32} q_2 + c_{33} q_3 + \ldots + c_{3k} q_k \qquad (66) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^{2k} &= f_{1k} q_1 + f_{k2} q_2 + f_{k3} q_3 + \ldots + f_{kk} q_k
\end{aligned}
$$

Как видно, здесь процесс перехода от одного уравнения к следующему тот самый, как в методе Леверрье, с тою разницею, что всякий раз составляется *одно первое* уравнение соответствующей системы Леверрье и, значит, работа сокращается в k раз.

Обыкновенно, составив систему (66), говорят: «исключив из уравнений (66) переменные $q_1, q_2, \ldots q_k$, получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $2k$ с неизвестною x; найдя его общий интеграл, находим затем и величины $q_1, q_2, \ldots q_k$ из уравнений (66). Эти величины будут содержать те же $2k$ произвольных постоянных, как и переменная x». На этом изложение и заканчивают.

Продолжим, однако, это обычное изложение несколько далее и, пользуясь определителями, выполним или, точнее говоря, обозначим результат исключения из системы (66) переменных:

$$q_1, \; q_2, \; q_3, \ldots q_k$$

очевидно, что мы получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $2k$:

$$
\begin{vmatrix}
-x & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
-x'' & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1k} \\
-x^{\mathrm{IV}} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2k} \\
-x^{\mathrm{VI}} & c_{31} & c_{32} & c_{33} & \ldots & c_{3k} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
-x^{(2k)} & f_{k1} & f_{k2} & f_{k3} & \ldots & f_{kk}
\end{vmatrix} = 0 \qquad (67)
$$

Ищем его решение вида

$$x = C_1 e^{\lambda t}$$

причем C_1 — произвольная постоянная, получаем для определения λ уравнение

$$(68) \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda^2 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ -\lambda^4 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2k} \\ -\lambda_6 & c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda^{2k} & f_{k1} & f_{k2} & f_{k3} & \dots & f_{kk} \end{vmatrix} = 0$$

придав затем первый столбец ко второму, приводим это уравнение к виду

$$(69) \qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda^2), & a_{12}, & a_{13} \dots a_{1k} \\ (b_{21} - \lambda^4), & b_{22}, & b_{23} \dots b_{2k} \\ (c_{31} - \lambda^6), & c_{32}, & c_{33} \dots c_{3k} \\ \dots & \dots & \dots \\ (f_{k1} - \lambda^{2k}), & f_{k2}, & f_{k3} \dots f_{kk} \end{vmatrix} = 0$$

Это и есть вековое или характеристическое уравнение для нашей системы (11), написанное в том виде, в котором оно получится, если применить общую методу интегрирования, излагаемую во всех курсах анализа, и довести ее до конца.

Пусть будет

$$(69') \qquad \Delta_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{k1} & f_{k2} & \dots & f_{kk} \end{vmatrix}$$

обозначим через

$$(69'') \qquad \Delta_1, \ \Delta_2, \ \Delta_3, \dots \Delta_k$$

миноры определителя Δ_0, относящиеся к первому столбцу, так что

$$\Delta_0 = a_{11} \cdot \Delta_1 + b_{21} \cdot \Delta_2 + c_{31} \cdot \Delta_3 + \dots + f_{k1} \cdot \Delta_k$$

тогда уравнение (69) напишется, положив $\lambda^2 = \alpha$, так:

$$\Delta_k \alpha^k + \Delta_{k-1} \alpha^{k-1} + \ldots + \Delta_1 \alpha - \Delta_0 = 0$$

или, разделяя на Δ_k и полагая

$$(70) \qquad \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k} = B_1, \quad \frac{\Delta_{k-2}}{\Delta_k} = B_2; \ \ldots \ \frac{\Delta_1}{\Delta_k} = B_{k-1}; \quad -\frac{\Delta_0}{\Delta_k} = B_k$$

придаем ему вид

$$(71) \qquad \alpha^k + B_1 \alpha^{k-1} + B_2 \alpha^{k-2} + \ldots + B_{k-1} \alpha + B_k = 0$$

после чего и решаем его по обычным способам.

Как видно, определители миноры (69″) *все численные* порядка $(k-1)$, их вычисление совершается весьма просто, эта простота получилась потому, что неизвестная α и ее степени находятся в *одном первом* столбце, а не в диагональных элементах определителя, при каковом их расположении развитие такого определителя, как (19), при сколь-нибудь значительном k практически непосредственно не выполнимо и требует тех особенных приемов, которые и были даны Лапласом, Леверрье и Якоби.

Вид (19) векового уравнения удобен для теоретического исследования его общих свойств, но не для практического вычисления его корней.

Очевидно, что оба вида (19) и (69) тожественны между собою, следовательно форма (69) могла бы быть получена из (19) чисто *алгебраическими* преобразованиями, помимо рассмотрения той системы дифференциальных уравнений, для которой оба вида представляют «характеристическое» уравнение.

Выполнить такое чисто алгебраическое преобразование я не умею.

Преимущество формы (69) для численных вычислений выясняется наглядно ниже на численном примере.

§ **9.** Положим теперь, что нам дана система уравнений, соответствующая колебаниям с гироскопическими членами и сопротивлением, так что уравнения движения будут вида:

$$(72) \qquad \begin{aligned}
q_1'' &= a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + \ldots + a_{1k} q_k + h_{11} q_1' + h_{12} q_2' + \ldots + h_{1k} q_k' \\
q_2'' &= a_{21} q_1 + a_{22} q_2 + \ldots + a_{2k} q_k + h_{21} q_1' + h_{22} q_2' + \ldots + h_{2k} q_k' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_k'' &= a_{k1} q_1 + a_{k2} q_2 + \ldots + a_{kk} q_k + h_{k1} q_1' + h_{k2} q_2' + \ldots + h_{kk} q_k'
\end{aligned}$$

причем равенств

$$a_{i,j} = a_{ji} \quad \text{и} \quad h_{ij} = h_{ji}$$

может в общем случае и не быть.

В таком случае, если бы положить, как и раньше,

$$q_1 = C_1 e^{\lambda t}; \quad q_2 = C_2 e^{\lambda t}; \quad \ldots \quad q_k = C_k e^{\lambda t}$$

то для определения λ получилось бы уравнение

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (a_{11} + h_{11}\lambda - \lambda^2), & a_{12} + h_{12}\lambda, & \ldots & a_{1k} + h_{1k}\lambda \\ a_{21} + h_{21}\lambda, & (a_{22} + h_{21}\lambda - \lambda^2), & \ldots & a_{2k} + h_{2k}\lambda \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} + h_{k1}\lambda, & a_{k2} + h_{k2}\lambda, & \ldots & (a_{kk} + h_{kk}\lambda - \lambda^2) \end{vmatrix} = 0$$

развитие которого, даже для случая $k = 4$, потребовало бы весьма длинных и громоздких выкладок.

Для такой системы надо поступать следующим образом:

1°) прежде всего привести введением добавочных неизвестных все уравнения системы к первому порядку, для этого положить:

$$q_1' = q_{k+1}, \quad q_2' = q_{k+2}, \quad \ldots \quad q_k' = q_{2k}$$

тогда предложенная система примет вид:

$$\begin{aligned}
q_1' &= 0 + 0 + \ldots + 0 + q_{k+1} + 0 + \ldots + 0 \\
q_2' &= 0 + 0 + \ldots + 0 + 0 + q_{k+2} + \ldots + 0 \\
&\ldots \\
q_k' &= 0 + 0 + \ldots + 0 + 0 + 0 + \ldots + q_{2k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(73) \quad q'_{k+1} &= a_{11}q_1 + a_{12}b_2 + \ldots + a_{1k}q_k + h_{11}q_{k+1} + h_{12}q_{k+2} + \ldots + h_{1k}q_{2k} \\
q'_{k+2} &= a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2k}q_k + h_{21}q_{k+1} + h_{22}q_{k+2} + \ldots + h_{2k}q_{2k} \\
q'_{k+3} &= a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + \ldots + a_{3k}q_k + h_{31}q_{k+1} + h_{32}q_{k+2} + \ldots + h_{3k}q_{2k} \\
&\ldots \\
q'_{2k} &= a_{k1}q_1 + a_{k2}q_2 + \ldots + a_{kk}q_k + h_{k1}q_{k+1} + h_{k2}q_{k+2} + \ldots + h_{kk}q_{2k}
\end{aligned}$$

К этой системе применимы как метода Леверрье, так и общая. Первой мы развивать не будем, а ограничимся лишь второй, ибо она требует работы в $2k$ раз меньше.

Итак, полагаем

$$x = q_1$$

и будем последовательно дифференцировать это равенство $2k$ раз, заменяя после всякого дифференцирования производные переменных $q_1, q_2, \ldots q_{2k}$ их выражениями (73), тогда предложенная система заменится следующей, ей эквивалентной:

$$\begin{aligned}
&x = q_1 \\
&x' = 0 \quad + 0 \quad + \ldots + 0 \quad + \quad q_{k+1} + 0 \quad + \ldots + 0 \\
&x'' = a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + \ldots + a_{1k} q_k + h_{11}\ q_{k+1} + h_{12} q_{k+2} + \ldots + h_{1k} q_{2k} \\
&x''' = b_1\ q_1 + b_2\ q_2 + \ldots + b_k\ q_k + b_{k+1} q_{k+1} + h_{22} q_{k+2} + \ldots + b_{2k} q_{2k} \\
&\ldots\ldots\ldots

Ищем решение вида $x = Ce^{\lambda t}$, тогда для определения λ получим уравнение

$$(76)\qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda^2 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1k} \\ -\lambda^3 & b_1 & b_2 & \dots & b_k & b_{k+1} & b_{k+2} & \dots & b_{2k} \\ -\lambda^4 & c_1 & c_2 & \dots & c_k & c_{k+1} & c_{k+2} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda^{(2k)} & f_1 & f_2 & \dots & f_k & f_{k+1} & f_{k+2} & \dots & f_{2k} \end{vmatrix} = 0$$

Приложив первый столбец ко второму, получаем

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ (a_{11} - \lambda^2) & a_{12} & a_{13} & \dots & h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1k} \\ (b_1 - \lambda^3) & b_2 & b_3 & \dots & b_k & b_{k+1} & \dots & b_{2k} \\ (c_1 - \lambda^4) & c_2 & c_3 & \dots & c_k & c_{k+1} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_1 - \lambda^{2k}) & f_2 & f_3 & \dots & f_k & f_{k+1} & \dots & f_{2k} \end{vmatrix} = 0$$

Это уравнение может быть написано и в другом виде, который получится умножив столбец k на λ, придав к нему первый, вычеркнув верхнюю строку и первый столбец, а столбец k перенеся на первое место, тогда будет

$$(77)\quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (a_{11} + h_{11}\lambda - \lambda^2), & a_{12}, & a_{13}, & \dots & a_{1,k-1}, & h_{12} & \dots & h_{1,k} \\ (b_1 + b_k\lambda - \lambda^3), & b_2, & b_3, & \dots & b_{k-1}, & b_{k+1} & \dots & b_{2k} \\ (c_1 + c_k\lambda - \lambda^4), & c_2, & c_3, & \dots & c_{k-1}, & c_{k+1} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_1 + f_k\lambda - \lambda^{2k}), & f_2, & f_3, & \dots & f_{k-1}, & f_{k+1} & \dots & f_{2k} \end{vmatrix} = 0$$

Определитель этот будет порядка $(2k-1)$, развитие его по элементам первого столбца затруднений не представляет, и обозначая соответствующие элементам первого столбца миноры через

$$(77') \qquad \Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots\ \Delta_{2k-1}$$

приведем «вековое уравнение» в этом случае сперва к виду

$$(a_{11}+h_{11}\lambda-\lambda^2)\Delta_1+(b_1+b_k\lambda-\lambda^3)\Delta_2+\ldots+ \\ +(f_1+f_k\lambda-\lambda^{2k})\Delta_{2k-1}=0$$

а затем к окончательному виду

$$\lambda^{2k}+B_1\lambda^{2k-1}+B_2\lambda^{2k-2}+\ldots+B_{2k-1}\lambda+B_{2k}=0$$

причем нам потребуется лишь вычислять *численные* определители $(77')$, каждый из которых будет порядка $2k-2$.

§ **10.** Чтобы пояснить нашу методу примером, возьмем этот пример из «Recherches Astronomiques» Леверрье (Ann. de l'Observ. de Paris, t. II, p. 128), а именно — систему в наших обозначениях:

$$\begin{aligned}
q_1'' &= -5.509882\,q_1+1.870086\,q_2+0.422908\,q_3+0.008814\,q_4\\
q_2'' &= 0.287865\,q_1-11.811654\,q_2+5.711900\,q_3+0.058717\,q_4\\
q_3'' &= 0.049099\,q_1+4.308033\,q_2-12.970687\,q_3+0.229326\,q_4\\
q_4'' &= 0.006235\,q_1+0.269851\,q_2+1.397369\,q_3-17.596207\,q_4
\end{aligned}$$

Округляя коэффициенты на 5 знаков и приискав соответствующие им пятизначные логарифмы, пишем эту систему с логарифмическими коэффициентами, после чего вычисляем по приведенным схемам числа:

$$b_{2i},\ c_{3,i},\ d_{4,i} \qquad (i=1,2,3,4)$$

и по ним коэффициенты

$$B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4$$

векового уравнения, вычисление корней которого, как не представляющее никаких трудностей и не требующее пояснений, опускаем.

Вычисление это приведено со всею подробностью в том именно виде, как оно на самом деле произведено, чтобы дать полный пример и образец подобной работы.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ВЕКОВОГО УРАВНЕНИЯ

А. Схемы для вычисления

Заданная система

q_i''	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1''	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
q_2''	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
q_3''	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
q_4''	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

Схемы вычисления b_{2i}

i	$a_{11} =$	$a_{12} =$	$a_{13} =$	$a_{14} =$	b_{2i}
1	$a_{11}\ a_{11}$	$a_{12}\ a_{21}$	$a_{13}\ a_{31}$	$a_{14}\ a_{41}$	b_{21}
2	$a_{11}\ a_{12}$	$a_{12}\ a_{22}$	$a_{13}\ a_{32}$	$a_{14}\ a_{42}$	b_{22}
3	$a_{11}\ a_{13}$	$a_{12}\ a_{23}$	$a_{13}\ a_{33}$	$a_{14}\ a_{43}$	b_{23}
4	$a_{11}\ a_{14}$	$a_{12}\ a_{24}$	$a_{13}\ a_{34}$	$a_{14}\ a_{44}$	b_{24}

Схемы вычисления c_{3i}

i	$b_{21} =$	$b_{22} =$	$b_{23} =$	$b_{24} =$	c_{3i}
1	$b_{21}\ a_{11}$	$b_{22}\ a_{21}$	$b_{23}\ a_{31}$	$b_{24}\ a_{41}$	c_{31}
2	$b_{21}\ a_{12}$	$b_{22}\ a_{22}$	$b_{23}\ a_{32}$	$b_{24}\ a_{42}$	c_{32}
3	$b_{21}\ a_{13}$	$b_{22}\ a_{23}$	$b_{23}\ a_{33}$	$b_{24}\ a_{43}$	c_{33}
4	$b_{21}\ a_{14}$	$b_{22}\ a_{24}$	$b_{23}\ a_{34}$	$b_{24}\ a_{44}$	c_{34}

Заданная система (коэф. логар.)

q_i''	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1''	0.74114_n	0.27186	$\bar{1}.62625$	$\bar{3}.94517$
q_2''	$\bar{1}.45919$	1.07231_n	0.75678	$\bar{2}.76876$
q_3''	$\bar{2}.69107$	0.63428	1.11296_n	$\bar{1}.36045$
q_4''	$\bar{5}.79484$	$\bar{1}.43112$	0.14531	1.24542_n

Вычисление b_{2i}

i					b_{2i}	log b_{2i}
1	1.48228 + 30.358	$\bar{1}$.73105 0.53833	$\bar{2}$.31732 0.020764	$\bar{5}$.74001 0.00006	30.8985	1.48994
2	1.01300_n — 10.304	1.34417_n —22.089	0.26053 1.8219	$\bar{3}$.37269 0.00238	—30.569	1.48528_n
3	0.36739_n — 2.3303	1.10264 10.6817	0.73921_n —5.4854	$\bar{2}$.09048 0.012316	2.8783	0.45914
4	—2.68631 — 0.048563	$\bar{1}$.04062 0.109805	$\bar{2}$.98670 0.096984	$\bar{1}$.19059 —0.15509	0.003139	$\bar{3}$.49679

Вычисление c_{3i}

i					c_{3i}	log c_{3i}
1	2.23108_n —170.25	0.94447_n — 8.7998	$\bar{1}$.15021 0.1413	$\bar{5}$.29163 0.0000	—178.91	2.25264_n
2	1.76180 57.783	2.55759 361.07	1.09342 12.400	$\bar{4}$.92791 0.0008	431.25	2.63473
3	1.11619 13.0675	2.24206_n —174.61	1.57210_n — 37.334	$\bar{3}$.64210 0.004	—198.87	2.29857_n
4	$\bar{1}$.43511 0.27234	0.25404_n — 1.7949	1.81959 0.66007	$\bar{2}$.74221$_n$ — 0.045235	— 0.9177	$\bar{1}.96270_n$

Вычисление d_{4i}

i					d_{4i}	log d_{4i}
1	2.99383 985.90	2.09392 124.14	0.98964_n — 9.764	$\bar{3}.75754_n$ — 0.006	1100.27	3.04150
2	2.52450_n —334.58	3.70704_n —5093.8	2.93285_n —856.74	1.39382_n — 0.25	— 6285.37	3.79883_n
3	1.87889_n — 75.664	3.39151 2463.3	3.41153 2579.5	0.10801_n — 1.28	4965.86	3.69599
4	0.19781_n — 1.5769	1.40349 25.322	1.65902_n — 45.606	1.20812 16.148	— 5.713	0.75686_n

Определитель Δ (0)

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} 0.74114_n & 0.27186 & \bar{1}.62625 & \bar{3}.94517 \\ 1.48994 & 1.48528_n & 0.45914 & \bar{3}.49679 \\ 2.25264_n & 2.63473 & 2.29857_n & .96270_n \\ 3.04150 & 3.79833_n & 3.69599 & 0.75686_n \end{vmatrix}$$

Вычисление миноров Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, относящихся к элементам 1-го столбца Δ (0)

1.48528_n	2.63473	3.79833_n	3.79833_n	1.48528_n	2.63473
2.29857_n	3.69599	0.45914	2.29857_n	3.69599	0.45914
0.75686_n	$\bar{3}.49679$	$\bar{1}.96270_n$	—3.49679	1.96270_n	0.75686_n
4.54071_n	3.82751	4.22017	3.59369	5.14397	3.85083_n
—34730	6722.2	16602.5	3923.6	139305	—7093.0

$\Delta_1 = -147541$

0.27186	2.63473	3.79838_n	3.79833_n	0.27186	2.63473
2.29857_n	3.69599	$\bar{1}.62625$	2.29857_n	3.69599	$\bar{1}.62625$
0.75686_n	$\bar{3}.94517$	$\bar{1}.96270_n$	$\bar{3}.94517$	$\bar{1}.96270_n$	0.75686_n
3.32729	4.27589	3.38733	4.04207	3.93055_n	3.01784_n
2124.7	18875	2439.7	11017.2	8522.2	—1041.9

$\Delta_2 = -21986$

0.27186	1.48528_n	3.79833_n	0.79833_n	0.27186	1.48528_n
0.45914	3.69599	$\bar{1}.62625$	0.45914	3.69599	$\bar{1}.62625$
0.75686_n	$\bar{3}.94517$	$\bar{3}.49679$	$\bar{3}.94517$	$\bar{3}.49679$	0.75686_n
1.48786_n	3.12644_n	0.92137_n	2.20264_n	1.46464	1.86839
—30.751	—1337.95	—8.34	—159.455	29.150	73.857

$\Delta_3 = -1320.59$

0.27186	1.48528_n	2.63473	2.63473	0.27186	1.48528_n
0.45914	2.29857_n	$\bar{1}.62625$	0.45914	2.29857_n	$\bar{1}.62625$
$\bar{1}.96270_n$	$\bar{3}.94517$	$\bar{3}.49679$	$\bar{3}.94517$	$\bar{3}.49679$	$\bar{1}.96270_n$
0.69370_n	1.72902	$\bar{1}.75777$	1.03904	0.06722_n	1.07423
—4.9397	53.582	0.5725	10.9405	—1.1674	11.8640

$\Delta_4 = -27.578$

Примечание. Миноры вычислены по этому более длинному приему, чтобы избежать малых разностей больших чисел и происходящей от этого утраты точности.

Вычисление коэффициентов B_i

i	$\log \Delta_i$	$\log B_i$	B_i	$\log \Delta_i \cdot a_{11}$	
0	5.53085_n	4.09029	**12311**		
1	5.16891_n	3.72835	5350.0	5.91005	812930
2	4.34215_n	2.90159	797.24	5.83209_n	—679350
3	3.12077_n	1.68021	**47.886**	5.37341	236270
4	1.44056_n			4.48206_n	— 30343
				$-\Delta_0 =$	339507

Контроль

					$\log a_{ii}$	$-a_{ii}$
	2.79597_n	2.32669	1.68108	$\bar{3}.94517$		
	—625.13	212.17	47.982		0.74114_n	5.5099
	0.69043	2.30355_n	1.98802	$\bar{2}.76876$	1.07231_n	11.8115
	4.9026	—201.165	97.279		1.11296_n	12.9705
$\Delta(0) =$	$\bar{1}.33062$	1.27383	1.75251_n	$\bar{1}.36045$	1.24542_n	17.5965
	0.21410	18.786	—56.560			
	$\bar{4}.54942_n$	$\bar{2}.18570_n$	$\bar{2}.89989_n$	1.24542_n	$B_1 =$	**47.8884**
	—0.00035434	—0.015336	—0.079413	$\bar{3}.31980_n$		

—625.13	212.185	48.061	$\log 5888258 = 6.76999_n$
2.79597_n	2.32671	1.68179	$\bar{3}.31980_n$
4.9030	—201.150	97.358	
0.69046	2.30352_n	1.98837	4.08979
0.21445	18.801	—56.481	
1.33133	1.27418	1.75190_n	$B^4 = \Delta(0) =$ **12297**

2.79597_n	0.69049	$\bar{1}.33133$	1.33133	2.79597_n	0.69046
2.30352_n	1.27418	2.32671	2.30352_n	1.27418_n	2.32671
1.75190_n	1.68179	1.98837	1.68179	1.98837	1.75190_n
6.85139_n	3.64643	3.64641	3.31664_n	6.05852_n	4.76907_n
—7102200	4430.3	4430.1	—2073.2	—1144250	—58759

—5888258

Контрольное вычисление обнаруживает вполне удовлетворительное при вычислении по пятизначным логарифмам согласие, а именно:

$$B_1 = 47.886 \quad \text{и} \quad 47.8884$$
$$B_4 = 12311 \quad \text{и} \quad 12297$$

Так как контрольные числа получены по непосредственному вычислению, то им надо отдать предпочтение, таким образом при наших обозначениях вековое уравнение для написанной системы есть

$$(*) \qquad \alpha^4 + 47.8884\,\alpha^3 + 797.24\,\alpha^2 + 5350.0\,\alpha + 12297 = 0$$

По вычислениям Леверрье, произведенным по семизначным, а может быть, и десятизначным логарифмам, это уравнение есть

$$\alpha^4 + 47.888430\,\alpha^3 + 797.2789\,\alpha^2 + 5349.457\,\alpha + 12296.555 = 0$$

Все корни этого уравнения вещественные и отрицательные. Вычисление по логарифмической линейке покажет, что один корень лежит между —5 и — 8, второй — между — 17 и — 18. Вычисление этих корней совершить весьма просто, после чего остальные два найдутся решением квадратного уравнения. Корни нашего уравнения будут отличаться лишь в пятом знаке от корней, вычисленных Леверрье, которые суть:

$$\alpha_1 = -5.29870 \qquad \alpha_3 = -17.15266$$
$$\alpha_2 = -7.57404 \qquad \alpha_4 = -17.86303$$

§ **11.** В предыдущем примере все миноры вычислены независимо и отдельно, ибо они третьего порядка, а вычисление такого определителя производится весьма просто, но если бы число k было не 4, а скажем 8, то такое раздельное вычисление потребовало бы много излишней работы, которой можно избежать, поступая следующим образом.

Обозначим двучлены или трехчлены первого столбца через

$$A,\ B,\ C,\ D, \ldots F$$

и поставим этот столбец на последнее место, так что наш определитель будет вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1\, a_2 \ldots a_{k-1}, & A \\ b_1\, b_2 \ldots b_{k-1}, & B \\ c_1\, c_2 \ldots c_{k-1}, & C \\ \ldots\ldots\ldots & \\ f_1 f_2 \ldots f_{k-1}, & F \end{vmatrix}$$

разделяем каждую строку, соответственно, на первый член ее и затем вычитаем первую строку из всех остальных, тогда, отбросив первый столбец и верхнюю строку, приводим наш определитель к виду

$$\Delta = a_1 b_1 \dots f_1 \begin{vmatrix} b_2', & b_3' \dots b_{k-1}', & (b_1^{-1} B - a_1^{-1} A) \\ c_2', & c_3' \dots c_{k-1}', & (c_1^{-1} C - a_1^{-1} A) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_2', & f_3' \dots f_{k-1}', & (f_1^{-1} F - a_1^{-1} A) \end{vmatrix}$$

С этим определителем поступаем так же, и по упрощении получим определитель порядка $k-2$ такого вида:

$$\Delta = a_1 b_1 \dots f_1 \cdot b_2' c_2' \dots f_2' \begin{vmatrix} c_3'' c_4'' \dots c_{k-1}'', & (\gamma C + \beta B + \alpha A) \\ d_3'' d_4'' \dots d_{k-1}'', & (\delta D + \beta B + \alpha A) \\ \dots & \dots \\ f_3'', & f_4'' \dots f_k'', & (\eta F + \beta B + \alpha A) \end{vmatrix}$$

и продолжаем таким образом, пока не дойдем до определителя четвертого порядка, миноры которого будут третьего порядка и вычисляются непосредственно как показано выше, после чего определитель Δ развивается по элементам своего последнего столбца и представляется в виде

$$\Delta = nA + mB + pC + \dots + rF$$

Очевидно, что $n, m, p, \dots r$ и будут искомые миноры, относящиеся к числам первого столбца первоначально предложенного определителя, а так как достаточно знать лишь числа, им пропорциональные, то нет надобности производить умножение на величину

$$a_1 b_1 \dots f_1 \cdot b_2' c_2' \dots f_2' \dots$$

Особенно просто это вычисление производится пользуясь логарифмической линейкой, что для технических вопросов вполне достаточно, так же просто выполняется оно и по логарифмам, на подробностях чего останавливаться не будем.

§ 12. В предыдущих параграфах мы рассмотрели тот случай, когда все корни характеристического уравнения, соответствующего данной системе, не равные между собой.

Первоначально я имел в виду ограничиться этим общим случаем, как наиболее часто встречающимся в технических вопросах, но акад. Л. И. Ман-

дельштам, ознакомясь с этою статьею в рукописи, любезно обратил мое внимание на то, что случай равных корней представляет такие особенности, что с первого взгляда может показаться, что изложенная метода к этому случаю не применима, поэтому для практиков представляющееся затруднение желательно разъяснить.

Здесь приходится особенно вспомнить слова Ньютона: «*при изучении наук примеры не менее поучительны, нежели правила*», а также Эйлера, который, излагая какой-либо вопрос, всегда начинал с разбора простейших частных случаев, на которых наглядно выясняется сущность дела. Лагранж как раз в данном случае, следуя своему обычаю рассматривать всякий вопрос в самом общем виде, впал в свою знаменитую ошибку, вовлек в нее Лапласа, и эта ошибка удержалась в науке в течение 70 лет, пока почти одновременно ее не разъяснил К. Вейерштрасс в 1858 г. и наш академик О. И. Сомов (в 1859 г.).

Начнем с того примера, который мне сообщил акад. Л. И. Мандельштам:

$$\begin{aligned} q_1'' &= 2q_1 + q_2 + q_3 \\ q_2'' &= q_1 + 2q_2 + q_3 \\ q_3'' &= q_1 + q_2 + 2q_3 \end{aligned} \tag{78}$$

Характеристическое уравнение для этой системы, написанное в виде обычного определителя, есть

$$\Delta(\lambda^2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda^2, & 1, & 1 \\ 1, & 2-\lambda^2, & 1 \\ 1, & 1, & 2-\lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{79}$$

Очевидно, оно имеет корень

$$\lambda_1^2 = 1$$

а так как при этом значении не только

$$\Delta(1) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{80}$$

но и все миноры первого порядка этого определителя равны нулю, то корень $\lambda^2 = 1$ есть двойной. Второй корень, как легко проверить, есть $\lambda_2^2 = 4$, таким образом

$$\Delta(\lambda^2) = (\lambda^2 - 1)^2 (\lambda^2 - 4)$$

Обращаясь к системе (78) и применяя методу § 8, получим последовательно:

$$(81)\qquad \begin{cases} x = q_1 \\ x'' = 2q_1 + q_2 + q_3 \\ x^{IV} = 6q_1 + 5q_2 + 5q_3 \\ x^{VI} = 22q_1 + 21q_2 + 21q_3 \end{cases}$$

По исключении, следуя буквально правилу § 8, переменных q_1, q_2, q_3, мы написали бы уравнение

$$(82)\qquad \begin{vmatrix} -x, & 1, & 0, & 0 \\ -x'', & 2, & 1, & 1 \\ -x^{IV}, & 6, & 5, & 5 \\ -x^{VI}, & 22, & 21, & 21 \end{vmatrix} = 0$$

соответствующее ему характеристическое

$$(83)\qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -1, & 1, & 0, & 0 \\ -\lambda^2, & 2, & 1, & 1 \\ -\lambda^4, & 6, & 5, & 5 \\ -\lambda^6, & 22, & 21, & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda^2, & 1, & 1 \\ 6-\lambda^4, & 5, & 5 \\ 22-\lambda^6, & 21, & 21 \end{vmatrix} = 0$$

Развивая этот определитель по элементам первого столбца, получим

$$(84)\quad (2-\lambda^2)\begin{vmatrix} 5, & 5 \\ 21, & 21 \end{vmatrix} - (6-\lambda^4)\begin{vmatrix} 1, & 1 \\ 21, & 21 \end{vmatrix} + (22-\lambda^6)\begin{vmatrix} 1, & 1 \\ 5, & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Очевидно, что все написанные миноры равны нулю, и вместо уравнения, мы получим тожество

$$0 = 0$$

Очевидно также, что если бы мы стали развивать уравнение (82), то получили бы то же самое тожество.

В чем же дело и в чем причина этого кажущегося противоречия?

Дело в том, что когда мы составляем систему (81), чтобы затем исключить переменные q_1, q_2, q_3, в этом частном случае (который имеет место всегда, если в системе третьего порядка два корня между собою равны) нет надобности составлять *четвертое* уравнение, а достаточно только *первых*

трех уравнений, ибо переменные q_2 и q_3 входят лишь в виде суммы q_2+q_3 и исключаются *обе сразу*, а не каждая порознь. В самом деле, положив на время в уравнении (81)

$$q_2+q_3=\xi$$

мы напишем систему (81) так:

$$\begin{aligned} x &= q_1 \\ x'' &= 2q_1+\xi \\ x^{IV} &= 6q_1+5\xi \end{aligned} \tag{85}$$

и результат исключения будет

$$\begin{vmatrix} -x, & 1, & 0 \\ -x'', & 2, & 1 \\ -x^{IV}, & 6, & 5 \end{vmatrix} = 0$$

или в развитом виде

$$x^{IV}-5x''+4x=0 \tag{86}$$

и характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1, & 1, & 0 \\ -\lambda^2, & 2, & 1 \\ -\lambda^4, & 6, & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda^2-2, & 1 \\ \lambda^4-6, & 5 \end{vmatrix} = \lambda^4-5\lambda^2+4=0 \tag{87}$$

Откуда — корни:

$$\lambda_1^2=1;\quad \lambda_2^2=4$$

соответственно чему

$$q_1=A_1e^{t}+B_1e^{-t}+C_1e^{2t}+D_1e^{-2t} \tag{88}$$

причем A_1, B_1, C_1 и D_1 — произвольные постоянные.

Совершенно так же, если бы положив

$$y=q_2$$

мы исключили бы затем переменные q_1 и q_3, то получили бы уравнение

$$y^{IV}-5y''+4=0$$

и из него имели бы общее решение

$$q_2 = A_2 e^t + B_2 e^{-t} + C_2 e^{2t} + D_2 e^{-2t} \tag{89}$$

а если бы, положив

$$q_3 = z$$

исключили q_1 и q_2, то имели бы

$$q_3 = A_3 e^t + B_3 e^{-t} + C_3 e^{2t} + D_3 e^{-2t} \tag{90}$$

Но постоянные произвольные A_1, B_1, ... D_3 не суть независимые между собою, а связаны теми соотношениями, которые следуют из уравнений системы.

Так, возьмем частное решение:

$$q_1 = A_1 e^t;\ q_2 = A_2 e^t;\ q_3 = A_3 e^t$$

подставляя, получим:

$$\begin{aligned} A_1 &= 2A_1 + A_2 + A_3 \\ A_2 &= A_1 + 2A_2 + A_3 \\ A_3 &= A_1 + A_2 + 2A_3 \end{aligned} \tag{91}$$

Очевидно, эти три уравнения заменяются одним

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

откуда

$$A_3 = -(A_1 + A_2) \tag{92}$$

Совершенно так же, рассматривая частное решение

$$q_1 = B_1 e^{-t},\ q_2 = B_2 e^{-t},\ q_3 = B_3 e^{-t}$$

соответствующее второй паре равных корней, получим

$$B_3 = -(B_1 + B_2) \tag{93}$$

Наконец, для частного решения

$$q_1 = C_1 e^{2t};\ q_2 = C_2 e^{2t};\ q_3 = C_3 e^{2t}$$

получим:

$$\begin{aligned} 4C_1 &= 2C_1 + C_2 + C_3 \\ 4C_2 &= C_1 + 2C_2 + C_3 \\ 4C_3 &= C_1 + C_2 + 2C_3 \end{aligned} \tag{94}$$

или

$$\begin{aligned} -2C_1 + C_2 + C_3 &= 0 \\ C_1 - 2C_2 + C_3 &= 0 \\ C_1 + C_2 - 2C_3 &= 0 \end{aligned} \tag{95}$$

Очевидно, что сумма первых частей этих уравнений тожественно равна нулю, значит одно из этих уравнений (скажем третье) есть следствие первых двух, и отбросив его, мы получим:

$$\begin{aligned} -2C_1 + C_2 + C_3 &= 0 \\ C_1 - 2C_2 + C_3 &= 0 \end{aligned} \tag{96}$$

принимая C_1 произвольным, имеем:

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 \\ C_3 &= C_1 \end{aligned} \tag{97}$$

Совершенно так же будет:

$$\begin{aligned} D_2 &= D_1 \\ D_3 &= D_1 \end{aligned} \tag{98}$$

Таким образом общий интеграл системы будет:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 e^t + B_1 e^{-t} + C_1 e^{2t} + D_1 e^{-2t} \\ q_2 &= A_2 e^t + B_2 e^{-t} + C_1 e^{2t} + D_1 e^{-2t} \\ q_3 &= -(A_1 + A_2) e^t - (B_1 + B_2) e^{-t} + C_1 e^{2t} + D_1 e^{-2t} \end{aligned} \tag{99}$$

причем A_1, B_1, A_2, B_2, C_1, D_1 — *произвольные* постоянные.
Возьмем еще пример:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= 5q_1 + 30q_2 - 48q_3 \\ \ddot{q}_2 &= 3q_1 + 14q_2 - 24q_3 \\ \ddot{q}_3 &= 3q_1 + 15q_2 - 25q_3 \end{aligned} \tag{99'}$$

Отсюда следует

$$q_1^{\mathrm{IV}} = -29q_1 - 150q_2 + 240q_3$$

Таким образом имеем:

$$\begin{aligned} x &= q_1 \\ \ddot{x} &= 5q_1 + 30q_2 - 48q_3 \\ x^{\mathrm{IV}} &= -29q_1 - 5(30q_2 - 48q_3) \end{aligned}$$

Ясно, что переменные q_2 и q_3 исключатся одновременно, и мы получим

$$\begin{vmatrix} -x, & 1, & 0 \\ -\ddot{x}, & 5, & 1 \\ -x^{\mathrm{IV}}, & -29, & -5 \end{vmatrix} = 0 \tag{100}$$

Соответствующее характеристическое уравнение будет

$$\begin{vmatrix} -1, & 1, & 0 \\ -\lambda^2, & 5, & 1 \\ -\lambda^4, & -29, & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda^2, & 1 \\ -29-\lambda^4, & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 = (\lambda^2+1)(\lambda^2+4) = 0$$

Взяв определитель

$$\Delta(\lambda^2) = \begin{vmatrix} 5-\lambda^2, & 30, & -48 \\ 3, & 14-\lambda^2, & -24 \\ 3, & 15, & -25-\lambda^2 \end{vmatrix} \tag{101}$$

положив в нем $\lambda^2 = -1$, имеем

$$\Delta(-1) = \begin{vmatrix} 6, & 30, & -48 \\ 3, & 15, & -24 \\ 3, & 15, & -24 \end{vmatrix} = -6 \cdot 15 \cdot 24 \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

и так как все три строки одинаковы, то и все миноры равны нулю, т. е.

$$\lambda^2 = -1$$

есть *двойной* корень уравнения

$$\Delta(\lambda^2) = 0$$

зная это, доканчиваем интегрирование как обыкновенно.

Возьмем в заключение систему:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= 12q_1 + 27q_2 + 135q_3 - 231q_4 \\ \ddot{q}_2 &= 10q_1 + 15q_2 + 90q_3 - 154q_4 \\ \ddot{q}_3 &= 5q_1 + 9q_2 + 42q_3 - 77q_4 \\ \ddot{q}_4 &= 5q_1 + 9q_2 + 45q_3 - 80q_4 \end{aligned} \tag{102}$$

и, положив

$$x = q_1$$

составляем по схеме § 10 коэффициенты b_{2i}, получаем таблицу:

i	$a_{11}=12$	$a_{12}=27$	$a_{13}=135$	$a_{14}=-231$	b_{2i}
1	144	270	675	— 1155	— 66
2	324	405	1215	— 2079	— 135
3	1620	2430	5670	—10395	— 675
4	—2772	—4158	—10395	+18480	+1155

Значит, будет:

$$x = q_1$$
$$\ddot{x} = 12q_1 + 27q_2 + 135q_3 - 231q_4$$
$$x^{IV} = -66q_1 - 135q_2 - 675q_3 + 1155q_4$$

Очевидно, что положив

$$27q_1 + 135q_2 - 231q_4 = \xi$$

напишем эту систему так:

$$x = q_1$$
$$\ddot{x} = 12q_1 + \xi$$
$$x^{IV} = -66q_1 - 5\xi$$

Откуда следует:

$$(103) \qquad \begin{vmatrix} -x, & 1, & 0 \\ -\ddot{x}, & 12, & 1 \\ -x^{IV}, & -66, & -5 \end{vmatrix} = 0$$

Значит, характеристическое уравнение будет

$$\Delta(\lambda^2) = \begin{vmatrix} -1, & 1, & 0 \\ -\lambda^2, & 12, & 1 \\ -\lambda^4, & -66, & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12-\lambda^2, & 1 \\ -66-\lambda^4, & -5 \end{vmatrix} = \lambda^4 + 5\lambda^2 + 6 = 0$$

т. е.

$$(\lambda^2 + 2)(\lambda^2 + 3) = 0$$

Обращаясь к основному определителю для нашей системы, находим, что при $\lambda^2 = -3$ все миноры равны нулю, так что этот корень тройной, корень же $\lambda^2 = -2$ есть простой, после чего интегрирование заканчивается как обыкновенно.

Эти примеры с ясностью показывают, что если при вычислении по изложенным правилам окажется, что уравнение

$$(104) \qquad \Delta(\lambda^2) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda^2, & a_{12}, & a_{13} \ldots a_{1k} \\ b_{21}-\lambda^4, & b_{22}, & b_{23} \ldots b_{2k} \\ c_{31}-\lambda^6, & c_{32}, & c_{33} \ldots c_{3k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (f_{k1}-\lambda^{2k}), & f_{k2}, & f_{k3} \ldots f_{kk} \end{vmatrix} = 0$$

обращается в тожество

$$0 = 0$$

т. е. все миноры, соответствующие первому столбцу, равны нулю, то это будет указывать, что исключение неизвестных

(105) $$q_1,\ q_2, \cdots q_k$$

может быть выполнено не из полного числа $(2k+1)$ уравнений (66), а из меньшего их числа, тогда вычеркиваем в этой системе уравнения, последовательно начиная с нижнего, и определяем то наименьшее их число, при котором все переменные (105) исключаются; пишем соответствующее обыкновенное уравнение с неизвестной x, и для него характеристическое, — степень его будет ниже $2k$, — находим его корни и, обратившись к основному определителю (104), находим кратность корней, после чего и заканчиваем интегрирование как обыкновенно.

О ПРИМЕНЕНИИ СПОСОБА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К НАХОЖДЕНИЮ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 1. В некоторых технических вопросах приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями вида:

$$y'' + n^2 y + \alpha f(y) = 0 \tag{1}$$
$$y'' + n^2 y + \beta F(y') = 0 \tag{1'}$$
$$y'' + n^2 y + \alpha f(y) + \gamma F(y') = 0 \tag{1''}$$

в которых n^2 — заданная постоянная, $f(y)$ и $F(y')$ — заданные целые функции, большею частию целые полиномы небольшого числа членов, α и γ — заданные постоянные, имеющие «малую» величину.

Начальные условия задаются обыкновенно в виде: при $t = 0$ должно быть

$$y(0) = a;\ y'(0) = 0 \tag{2}$$

В тех же случаях, когда начальные условия заданы в более общем виде

$$y(0) = A;\ y'(0) = B \tag{2'}$$

то мы покажем (§ 12), что они всегда могут быть приведены к виду (2).

Пользуясь тем, что параметры α и γ малые, решения этих уравнений представляют в виде рядов, расположенных по целым положительным возрастающим степеням этих параметров.

Другой тип уравнений, с которым приходится иметь дело, такой:

$$y'' + n^2 y + f(y) = 0 \tag{3}$$
$$y'' + n^2 y + F(y') = 0 \tag{3'}$$
$$y'' + n^2 y + f(y) + F(y') = 0 \tag{3''}$$

где попрежнему n^2 — заданная постоянная, $f(y)$, $F(y')$ — заданные целые функции своих аргументов, начальные условия:

$$y(0) = \beta;\ y'(0) = 0 \tag{2}$$

причем величина β, представляющая в механических вопросах амплитуду колебаний, — «малая»; в этих случаях решение представляют в виде ряда, расположенного по целым положительным возрастающим степеням этой амплитуды β.

§ 2. Начнем наше рассмотрение с уравнений вида (1) как простейшего.

Итак, положим, что дано уравнение

$$y'' + n^2 y + \alpha f(y) = 0 \tag{1}$$

и начальное условие: при $t = 0$ должно быть

$$y(0) = a;\ y'(0) = 0 \tag{2}$$

требуется разложить решение этого уравнения в ряд по степеням малого параметра α, ограничиваясь в этом разложении членами, степень коих относительно α не выше k.

Обычная метода состоит в применении для такого разложения одного из следующих двух способов, приводящих к одинаковым результатам и в сущности к одинаковым выкладкам.

Первый способ состоит в том, что за исходное приближение берут величину

$$y = y_0 \tag{4}$$

определяя y_0 уравнением

$$y_0'' + n^2 y_0 = 0 \tag{5}$$

и начальными условиями:

$$y_0(0) = a;\ y_0' = 0 \tag{6}$$

так что будет

$$y_0 = a \cos nt \tag{7}$$

Чтобы получить первое приближение, полагают

$$y = y_1 \tag{8}$$

определяя y_1 уравнением

$$y_1'' + n^2 y_1 = -\alpha f(y_0) \tag{9}$$

и условиями:

$$y_1(0) = a;\ y_1'(0) = 0 \tag{10}$$

Определив y_1, находят второе приближение по уравнению

$$y_2'' + n^2 y_2 = -\alpha f(y_1) \tag{11}$$

и условиям:

$$y_2(0) = a;\ y_2'(0) = 0 \tag{12}$$

и продолжают таким образом далее, пока дойдут до членов требуемого порядка относительно α.

Второй способ, примененный Пуассоном в его «Механике» и в исследованиях о качаниях маятника, такой: полагают

$$y = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \ldots + \alpha^k\varphi_k \tag{13}$$

подставляют эту величину в уравнение (1) и в начальные условия (2); развивают левую часть полученного уравнения по степеням буквы α, ограничиваясь степенью k, то же делают и с начальными условиями, группируют члены с одинаковыми степенями α, тогда, уравнивая множитель при каждой из степеней α в отдельности нулю, получают систему уравнений такого вида:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0'' + n^2\varphi_0 = 0\\
&\varphi_1'' + n^2\varphi_1 = f_1(\varphi_0)\\
&\varphi_2'' + n^2\varphi_2 = f_2(\varphi_0, \varphi_1)\\
&\varphi_3'' + n^2\varphi_3 = f_3(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{14}$$

и т. д.

причем $f_1, f_2, \ldots$ будут известными целыми функциями переменных, под их знаками стоящих.

Начальные условия будут: при $t = 0$ должно быть

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(0) = a;\ \varphi_0'(0) = 0\\
&\varphi_1(0) = 0;\ \varphi_1'(0) = 0\\
&\varphi_2(0) = 0;\ \varphi_2'(0) = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{15}$$

и т. д.

Первое уравнение системы (14) и первое начальное условие (15) дают

$$\varphi_0 = a\cos nt \tag{16}$$

тогда второе уравнение будет

$$\varphi_1'' + n^2\varphi_1 = -f(a\cos nt) \tag{17}$$

правую часть этого уравнения развивают, заменяя степени косинуса через косинусы кратных аргументов по формулам:

для m четного:

$$\cos^m u = \frac{1}{2^{m-1}}\left[\cos mu + m\cos(m-2)u + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)u + \ldots + \frac{1}{2}\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{1}{2}m+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\frac{1}{2}m}\right]$$

для m нечетного:

$$\cos^m u = \frac{1}{2^{m-1}}\left[\cos mu + m\cos(m-2)u + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)u + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots\frac{1}{2}(m+3)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\frac{1}{2}(m-1)}\cos u\right]$$

Найдя после этого из уравнения (17) и соответствующего ему начального условия величину φ_1, переходят к третьему уравнению, в котором, развив правую часть, заменяют степени и произведения косинусов через косинусы кратных аргументов; из полученного таким образом уравнения и соответствующего начального условия находят φ_2 и продолжают таким образом, пока не определят величины φ_k, после чего найденные величины подставляют в уравнение

$$y = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \ldots + \alpha^k\varphi_k$$

которое и представит требуемое разложение.

Из выражений для степеней косинуса видно, что в том случае, когда функция $f(y)$ четная, то во всех разложениях будут встречаться лишь четные степени косинуса, которые заменятся косинусами четных кратностей аргумента nt, и решение получится периодическое, но если функция $f(y)$ будет заключать и нечетные степени переменной y, то в правой части второго уравнения системы (14) будет заключаться член вида

$$g_0\cos nt$$

где g_0 — постоянная. Этому члену в выражении φ_1 будет соответствовать член

$$\frac{g_0}{n}t\sin nt$$

В правой части уравнения, которым определяется φ_2, появятся члены, содержащие время t вне знака синуса или косинуса, эти члены будут и во всех прочих уравнениях, так что в решении их будут члены вида:

$$(g_2 t^2 + g_1 t + g_0)\cos nt; \quad (f_2 t^2 + f_1 t + f_0)\sin nt$$

и т. д.

При возрастании t, эти члены, называемые в небесной механике *вековыми*, неопределенно возрастают, и найденным решением можно пользоваться лишь для весьма малых значений переменной t.

С этим затруднением встретились математики XVIII ст., как только, изучая движение светил нашей солнечной системы, они начали применять анализ к решению вопросов небесной механики. Во многих астрономических вопросах переменной независимой служило не время, а вообще какая-нибудь угловая величина, поэтому в течение XVIII ст. появилось множество работ, главным образом французских математиков, «Sur les méthodes pour faire disparaître les arcs de cercle dans les approximations successives».

Мы ограничимся кратким очерком наиболее знаменитых из этих работ, именно — мемуаров Лапласа, вошедших в томы VIII и IX полного собрания его сочинений, включенных затем в первый том его «Небесной механики», в котором они составляют пятую главу второй книги, и мемуара Лагранжа, вошедшего в том V полного собрания его сочинений.

§ **3**. Метода Лапласа состоит вкратце в следующем: пусть предложено уравнение

$$\frac{d^i y}{dt^i} + P + \alpha Q = 0 \tag{18}$$

в котором α — малый параметр, P — линейная функция с постоянными коэффициентами от y и его производных до порядка $(i-1)$, Q — целая функция переменной y и ее производных до порядка $(i-1)$.

Положим, что для уравнения

$$\frac{d^i y}{dt^i} + P = 0 \tag{19}$$

найден общий интеграл, содержащий i постоянных произвольных и не содержащий времени t вне знаков синуса и косинуса, и что для уравнения (18) составлено приближенное решение вида

$$y = X + t \cdot Y + t^2 \cdot Z + t^3 \cdot S + \ldots \tag{20}$$

в котором функции X, Y, Z, S, ... содержат время t только под знаками синуса и косинуса аргументов, линейно зависящих от t, и произвольные постоянные:

$$C_1, C_2, C_3, \ldots C_i$$

Если величину (20) подставить в уравнение (18), которому она по предположению удовлетворяет (с точностью до членов назначенного порядка k относительно α), то получится равенство вида

$$K_0 + t \cdot K_1 + t^2 \cdot K_2 + \ldots = 0 \qquad (21)$$

в котором K_0, K_1, K_2, ... суть функции синусов и косинусов аргументов, линейно зависящих от t, и так как это равенство должно иметь место тождественно, то каждая из функций K_0, K_1, K_2, ... в отдельности должна быть тождественно равна нулю.

Дифференцирования синусов и косинусов аргументов, линейно зависящих от t, не выводят переменной t из-под знаков синуса и косинуса, поэтому при подстановке величины (20) в уравнение (18) множители t, t^2, ... произошли от подобных же множителей в выражении (20); следовательно, если в этом выражении заменить вне функций X, Y, Z, ... переменную t на $t - \theta$, то результат подстановки будет

$$K_0 + (t - \theta) \cdot K_1 + (t - \theta)^2 K_2 + \ldots = 0 \qquad (22)$$

причем величины K_0, K_1, K_2, ... попрежнему тождественно равны нулю; равенство (22) показывает, что величина

$$y = X + (t - \theta) \cdot Y + (t - \theta)^2 \cdot Z + \ldots \qquad (23)$$

есть также решение предложенного уравнения

$$\frac{d^i y}{dt^i} + P + \alpha Q = 0 \qquad (18)$$

при любом постоянном значении θ.

Выражение (20), кроме i постоянных произвольных C_1, C_2, ... C_i, содержит, таким образом, еще произвольную постоянную θ; следовательно, постоянные произвольные C_1, C_2, ... C_i могут быть изменены так, что величина θ в выражении (23) исчезнет.

Положим, что эта замена выполнена, т. е. произвольные постоянные

$$C_1, C_2, \ldots C_i$$

заменены такими функциями

$$C_1(\theta), C_2(\theta), \ldots C_i(\theta) \qquad (24)$$

переменной θ, что эта переменная из уравнения (17) исчезла, следовательно, *после* такой замены, будет иметь место *тожество*

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = 0 \tag{25}$$

или в развитом виде

$$\frac{\partial X}{\partial \theta} - Y + (t-\theta)\left[\frac{\partial Y}{\partial \theta} - 2Z\right] + (t-\theta)^2\left[\frac{\partial Z}{\partial \theta} - 3S\right] + \ldots = 0 \tag{26}$$

следовательно имеют место равенства:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial X}{\partial \theta} - Y = 0 \\ &\frac{\partial Y}{\partial \theta} - 2Z = 0 \\ &\frac{\partial Z}{\partial \theta} - 3S = 0 \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \end{aligned} \tag{27}$$

Но переменная θ входит в функции X, Y, Z лишь постолько, поскольку она содержится в функциях:

$$C_1(\theta);\ C_2(\theta);\ C_3(\theta);\ \ldots\ C_i(\theta)$$

поэтому частные производные $\frac{\partial X}{\partial \theta}$; $\frac{\partial Y}{\partial \theta}$; $\frac{\partial Z}{\partial \theta}$; ... будут:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial X}{\partial \theta} = \frac{\partial X}{\partial C_1}\cdot C_1' + \frac{\partial X}{\partial C_2}\cdot C_2' + \ldots + \frac{\partial X}{\partial C_i} C_i' \\ &\frac{\partial Y}{\partial \theta} = \frac{\partial Y}{\partial C_1} C_1' + \frac{\partial Y}{\partial C_2} C_2' + \ldots + \frac{\partial Y}{\partial C_i} C_i' \\ &\ldots\ldots\ldots \text{ и т. д. } \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{28}$$

причем

$$C_1' = \frac{dC_1}{d\theta};\ C_2' = \frac{dC_2}{d\theta};\ \ldots\ C_i' = \frac{dC_i}{d\theta} \tag{28'}$$

По подстановке выражений (28) в уравнения (27), мы получим систему i дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными:

$$C_1, C_2, \ldots C_i$$

и переменной независимой θ, величина же t в этой системе должна рассматриваться как постоянный параметр.

Интегрирование этой системы доставит искомые функции:

$$C_1(\theta);\ C_2(\theta);\ \ldots\ C_i(\theta) \tag{24}$$

которые будут содержать i постоянных произвольных:

$$A_1, A_2, \ldots A_i \tag{29}$$

По подстановке выражений (24) в уравнение (23), переменная θ из него исчезнет.

Лаплас показывает, что результат этой подстановки получится подставив величины (24) лишь в функцию X и заменив в ней затем букву θ на букву t.

Он это показывает следующим образом: напишем выражение (20) так:

$$y = X + (t - \theta) \cdot R \tag{30}$$

тогда будет

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial X}{\partial \theta} - R + (t - \theta)\frac{\partial R}{\partial \theta}$$

и из равенства

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = 0$$

следует

$$R = \frac{\partial X}{\partial \theta} + (t - \theta)\frac{\partial R}{\partial \theta} \tag{31}$$

Дифференцируя это выражение по θ, получим следовательно:

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial R}{\partial \theta} &= \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} + (t - \theta)\frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2} \\ 3\frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^3 X}{\partial \theta^3} + (t - \theta)\frac{\partial^3 R}{\partial \theta^3} \end{aligned} \tag{32}$$

. . . . и т. д. . . . .

Исключая из уравнений (30), (31) (32) величину R и ее производные, получим равенство

$$y = X + (t - \theta)\frac{\partial X}{\partial \theta} + \frac{(t-\theta)^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} + \frac{(t-\theta)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\partial^3 X}{\partial \theta^3} + \cdots \tag{33}$$

Обозначим правую часть этого равенства через $\Phi(t, \theta)$; очевидно, что правая часть равенства (33) представляет разложение функции

$$\Phi[t, \theta + (t - \theta)]$$

по степеням $(t - \theta)$, следовательно будет

$$y = \Phi(t, t)$$

т. е. величина y получится просто подставив в выражение

$$y = X$$

вместо постоянных $C_1, C_2, C_3, \ldots C_i$ их выражения:

$$C_1(\theta);\ C_2(\theta);\ C_3(\theta);\ \ldots C_i(\theta)$$

полученные через интегрирование системы (27), и заменив затем букву θ буквою t.

Заметим здесь же, что в выражение X, которое является общим интегралом линейного уравнения (19), буквы $C_1, C_2, \ldots C_i$ входят линейно.

В развитом виде система уравнений (27), служащих для определения неизвестных $C_1(\theta), C_2(\theta), \ldots$, будет:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial X}{\partial C_1} \cdot C_1' + \frac{\partial X}{\partial C_2} \cdot C_2' + \ldots + \frac{\partial X}{\partial C_i} \cdot C_i' = V \\
&\frac{\partial Y}{\partial C_1} \cdot C_1' + \frac{\partial Y}{\partial C_i} \cdot C_2' + \ldots + \frac{\partial Y}{\partial C_i} \cdot C_i' = 2Z \\
&\frac{\partial Z}{\partial C_1} \cdot C_1' + \frac{\partial Z}{\partial C_2} \cdot C_2' + \ldots + \frac{\partial Z}{\partial C_i} \cdot C_i' = 3S \\
&\ldots\ldots\ldots \text{и т. д.} \ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{34}$$

В этой системе, как уже сказано, переменная независимая есть θ, которая явно не содержится, переменная же t рассматривается как постоянный параметр; по поводу этой системы Лаплас пишет: «если продифференцировать $(i - 1)$ раз кряду по переменной t первое из уравнений (34), то получается столько же уравнений между величинами $C_1, C_2, \ldots C_i$ и их производными $C_1', C_2', \ldots C_i'$ по переменной θ. Интегрируя эти уравнения, считая θ за переменную независимую, мы получим выражения $C_1, C_2, \ldots C_i$ в функции θ. Почти всегда окажется, что достаточно будет пользоваться только первым уравнением (34), чтобы составить дифференциальные уравнения для $C_1, C_2, \ldots C_i$, уравняв в отдельности нулю коэффициенты при

синусах и косинусах различной кратности аргументов, ибо величины C_1, C_2, ... C_i не должны содержать времени t [т. е. равенства (34) и получаемые из них дифференцированием должны иметь место при *всяком* значении t]. Упрощение, вносимое в выкладки этим соображением, составляет одно из главных достоинств методы».

«*В большей части случаев*, — продолжает Лаплас, — *эти уравнения могут быть интегрируемы лишь последовательными приближениями, которые могут ввести переменную* θ *вне знаков синуса и косинуса, хотя бы в точных интегралах эта переменная из-под этих знаков и не выходила бы, тогда придется изложенным способом такие члены уничтожить.*

«Если бы первое уравнение и следующие из него дифференцированием по t не доставили потребного для определения величин C_1, C_2, ... C_i числа уравнений (не зависимых между собою), то надо обратиться ко второму уравнению системы (34) и т. д.

«После того как величины C_1, C_2, ... C_i найдены в функции переменной θ, надо их подставить в выражение X и заменить в нем букву θ через t; это и будет требуемое выражение y, не содержащее времени t вне знаков синуса и косинуса, когда это возможно. Если бы оказалось, что время t вне знаков синуса и косинуса не исчезает, то это служит признаком, что оно входит, таким образом, и в точное решение уравнения (18)».

Из подчеркнутых нами слов Лапласа видна та сложность, к которой изложенный процесс может вообще приводить — придется интегрировать систему уравнений первого порядка с i неизвестными. Уравнения этой системы могут оказаться не только с переменными коэффициентами, но даже нелинейными, и интегрирование системы будет представлять задачу более трудную, нежели интегрирование предложенного уравнения, для которого мы во всяком случае будем иметь исходное приближение, а для системы и этого может не быть. Это составляет затруднение по существу применения методы.

Другое обстоятельство влечет за собою затруднение чисто практическое, именно — значительное усложнение выкладок, происходящее от того, что сперва надо развить с точностью до членов желаемого порядка относительно α решение уравнения (18) *полностью* с i постоянными произвольными.

По предположению уравнение

$$\frac{d^i y}{dt^i} + P = 0 \qquad (19)$$

имеет своим решением выражение

$$y = X$$

причем X содержит время t лишь под знаками синуса и косинуса аргументов, линейно зависящих от t; отсюда следует, что уравнение (19) содержит лишь производные четного порядка с постоянными при них коэффициентами, так что характеристическое уравнение имеет только чисто мнимые корни.

Пусть будет

$$i = 2j$$

и корни характеристического уравнения:

$$\pm\lambda_1\sqrt{-1};\quad \pm\lambda_2\sqrt{-1};\quad \ldots\quad \pm\lambda_j\sqrt{-1}$$

тогда будет

$$X = C_1\cos\lambda_1 t + C_2\sin\lambda_1 t + C_3\cos\lambda_2 t + C_4\sin\lambda_2 t \ldots + C_{i-1}\cos\lambda_j t + C_i\sin\lambda_j t$$

Здесь все постоянные произвольные входят линейно, но в выражения Y, Z, ... эти постоянные произвольные уже не будут входить линейно, а эти выражения будут целыми рациональными функциями постоянных произвольных C_1, C_2, ... C_i, и все эти выражения надо развивать *полностью*, оставляя C_1, C_2, ... C_i неопределенными и пользуясь начальными условиями лишь в самом конце для определения постоянных

$$A_1, A_2, \ldots A_i$$

введенных интегрированием уравнений (34).

Это значительно усложняет вид функций Y, Z, S, ..., ибо нельзя с самого начала воспользоваться теми упрощениями, которые вносятся частным видом начальных условий, напр. таким: при $t = 0$ должно быть

$$y(0) = a;\quad y'(0) = 0;\quad y''(0) = 0;\quad \ldots\quad y^{(i-1)}(0) = 0$$

Благодаря этому выкладки для получения величин Y, Z, S, ... могут оказаться весьма продолжительными.

§ 4. Мемуар Лагранжа носит название: «Sur la manière de rectifier les méthodes ordinaires d'approximation pour l'intégration des équations du mouvement des planètes» (Oeuvres de Lagrange, t. V, pp. 493—514).

Для удобства сравнения с методою Лапласа, мы, излагая содержание мемуара Лагранжа, отступим от его обозначений и придержимся тех, которые сделаны при изложении методы Лапласа.

Лагранж также предполагает, что решение предложенного уравнения (18) развито до требуемых степеней параметра α в общем виде с i постоянными произвольными $C_1, C_2, \ldots C_i$ и представлено тою же формулой

$$y = X + t \cdot Y + t^2 \cdot Z + t^3 \cdot S + \ldots \tag{20}$$

причем функции $X, Y, Z, \ldots$ содержат время t лишь под знаками синусов, косинусов и показательных функций аргументов, линейно зависящих от t. В эти же функции $X, Y, Z, \ldots$ входят и постоянные произвольные, и притом, как мы уже обратили внимание, в функцию X — линейно, в остальные — рационально в целых и положительных степенях. Таким образом при дифференцировании по переменной t функций $X, Y, Z, \ldots$ время t не выходит из-под знаков синуса, косинуса и показательной, и дифференцируя i раз под ряд по t выражение (20), получим:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \left(\frac{dX}{dt} + Y\right) + \left(\frac{dY}{dt} + 2Z\right)t + \left(\frac{dZ}{dt} + 3S\right)t^2 + \ldots \\
\frac{d^2Y}{dt^2} &= \left(\frac{d^2X}{dt^2} + 2\frac{dY}{dt} + 2Z\right) + \left(\frac{d^2Y}{dt^2} + 4\frac{dZ}{dt} + 6S\right)t + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\text{и т. д.}\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{35}$$

Если эти выражения подставить в предложенное уравнение (18), то получится тождество, имеющее место при *всяком* значении буквы t, и так как в функциях $X, Y, Z, S, \ldots$ буква t входит лишь под знаками синусов, косинусов и показателей, то множители, стоящие при каждой степени t, в отдельности должны быть равны нулю также тожественно.

Но член, не содержащий буквы t множителем, иначе содержащий t в нулевой степени, происходит только от тех членов формул (20), которые также множителя t не содержат; отсюда следует, что если в равенствах (35) брать в правых частях только первые члены, т. е. полагать:

$$\begin{aligned}
Y &= X \\
\frac{dY}{dt} &= \frac{dX}{dt} + Y \\
\frac{d^2Y}{dt^2} &= \frac{d^2X}{dt^2} + 2\frac{dY}{dt} + 2Z \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{36}$$

то, по подстановке в уравнение (18) этих выражений, это уравнение будет удовлетворено.

При составлении выражений (35), величины $C_1, C_2, \ldots C_i$ рассматриваются как постоянные; если бы, продолжая рассматривать эти величины как постоянные, ограничиться в правых частях каждого из уравнений (36) лишь первым членом, то при подстановке значений

$$\begin{aligned} Y &= X \\ \frac{dY}{dt} &= \frac{dX}{dt} \\ \frac{d^2Y}{dt^2} &= \frac{d^2X}{dt^2} \\ &\ldots\ldots \end{aligned} \tag{37}$$

в уравнение (18) мы не получили бы тожества, т. е. при постоянных значениях величин $C_1, C_2, \ldots C_i$ выражение

$$Y = X$$

не есть решение предложенного уравнения

$$\frac{d^iy}{dt^i} + P + \alpha Q = 0 \tag{18}$$

что и само собою очевидно, ибо это выражение есть лишь решение уравнения

$$\frac{d^iY}{dt^i} + P = 0 \tag{19}$$

но если постоянные $C_1, C_2, \ldots C_i$ заменить функциями

$$C_1(t), C_2(t), \ldots C_i(t)$$

времени t, то этими функциями можно распорядиться так, чтобы величина

$$Y = X \tag{38}$$

в которой постоянные $C_1, C_2, \ldots C_i$ заменены, соответственно, через

$$C_1(t), C_2(t), \ldots C_i(t)$$

была решением уравнения (18). Для этого стоит только выбрать эти функции так, чтобы при переменных $C_1, C_2, \ldots C_i$ производные от Y выражались бы теми же формулами (36), как и при постоянных: короче говоря, Лагранж применяет к рассматриваемому вопросу свой способ изменения произвольных постоянных.

При переменных $C_1, C_2, \ldots C_i$ следующая из равенства (38) величина производной $\frac{dY}{dt}$ есть

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial C_1} \cdot C_1' + \frac{\partial X}{\partial C_2} C_2' + \ldots + \frac{\partial X}{\partial C_i} \cdot C_i' \qquad (39)$$

причем положено:

$$C_1' = \frac{dC_1}{dt}; \quad C_2' = \frac{dC_2}{dt}; \quad \ldots \quad C_i' = \frac{dC_i}{dt} \qquad (39')$$

но, на основании второго из уравнений (37), эта величина должна равняться выражению

$$\frac{dX}{dt} + Y$$

составленному в предположении, что $C_1, C_2, \ldots C_i$ — постоянные, но в этом предположении

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t}$$

и следовательно, первое условное уравнение, которому надо подчинить переменные $C_1(t), \ldots C_i(t)$, есть

$$\frac{\partial X}{\partial C_1} \cdot C_1' + \frac{\partial X}{\partial C_2} \cdot C_2' + \ldots + \frac{\partial X}{\partial C_i} \cdot C_i' = Y \qquad (40,1)$$

тогда будет

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + Y \qquad (41,1)$$

Дифференцируя это равенство по t, получим, считая $C_1, C_2, \ldots C_i$ переменными:

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial C_1} \cdot C_1' + \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial C_2} C_2' + \ldots + \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial C_i} \cdot C_i' +$$
$$+ \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial C_1} C_1' + \frac{\partial Y}{\partial C_2} C_2' + \ldots + \frac{\partial Y}{\partial C_i} C_i'$$

и, уравняв эту величину выражению

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + 2\frac{\partial Y}{\partial t} + 2Z$$

ибо при постоянных $C_1, C_2, \ldots C_i$

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}; \quad \frac{dY}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial t}$$

по упрощении получаем второе условное уравнение

$$\left(\frac{\partial^2 X}{\partial t\,\partial C_1}+\frac{\partial Y}{\partial C_1}\right)C_1'+\left(\frac{\partial^2 X}{\partial t\,\partial C_2}+\frac{\partial Y}{\partial C_2}\right)C_2'+\ldots+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 X}{\partial t\,\partial C_i}+\frac{\partial Y}{\partial C_i}\right)C_i'=\frac{\partial Y}{\partial t}+2Z \qquad (40,2)$$

и равенство

$$\frac{d^2 Y}{dt^2}=\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}+2\frac{\partial Y}{\partial t}+2Z \qquad (41,2)$$

Продолжая поступать таким образом, пока не дойдем до $\frac{d^i X}{dt^i}$, мы получим систему i дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными $C_1, C_2, \ldots C_i$ и переменной независимой t. Интегрированием этой системы определим эти величины как функции переменной t, причем войдут еще i постоянных произвольных $A_1, A_2, \ldots A_i$. Подставив в выражение

$$Y=X$$

вместо входящих в него постоянных, упомянутые функции, мы и получим требуемое решение, которое не будет содержать времени t вне знаков синуса, косинуса и показательных, если только при интегрировании сказанной системы время t не войдет алгебраически в выражения $C_1(t)$, $C_2(t), \ldots C_i(t)$.

Как видно, и в методе Лагранжа требуется сперва в общем виде, т. е. с i постоянными произвольными, разложить решение предложенного уравнения в ряд до требуемых степеней параметра α, и если при этом время t выйдет из-под знаков синуса, косинуса или показательной, надо эти «вековые» члены уничтожить, что потребует интегрирования системы i дифференциальных уравнений не только с переменными коэффициентами, но даже нелинейных, т. е. приведется во многих случаях к вопросу более трудному, нежели интегрирование предложенного уравнения. Это как раз имеет место, если применять изложенную методу к тем уравнениям, которые мы наметили как встречающиеся в технических вопросах.

Теория Лагранжа, как видно, проще теории Лапласа, но по выкладкам его метода сложнее методы Лапласа, ибо в системе уравнений Лагранжа время t, входящее под знаками синуса, косинуса и показательной, является переменной независимой, в методе же Лапласа — принимается за произвольный постоянный параметр, что вносит указанное Лапласом упрощение в выкладках и в составление самой системы уравнений, служащей для определения величин $C_1, C_2, \ldots C_i$.

§ 5. Само собою возникает вопрос: нельзя ли распорядиться вводимыми в решение предложенного уравнения произвольными или неопределенными величинами так, чтобы не приходилось сперва развивать решения полностью и затем в нем уничтожать вековые члены, а при самом составлении решения не дозволять этим членам появляться?

Весьма краткое указание на такой способ имеется в небольшой заметке М. В. Остроградского под заглавием: «Note sur la méthode des approximations successives», помещенной в томе I 6-й серии «Мемуаров Академии Наук», вышедшем в 1838 г.

В этой заметке наш знаменитый математик обращает сперва внимание, что при разложении решения предложенного дифференциального уравнения в ряд по степеням малого параметра, заданного численно, надо его сперва заменить переменною (буквою) ω, по степеням которой и вести разложение, при этом Остроградский делает такое указание: «нет надобности писать повсюду ω вместо α, можно оставить α там, где это требуется удобством вычисления. Можно также изменять самое уравнение или уравнения, лишь бы эти изменения пропадали, когда будет сделано $\omega = \alpha$».

Затем Остроградский берет для примера уравнение

$$y'' + y = \alpha y^3 \tag{42}$$

при начальных условиях:

$$y(0) = 1;\ y'(0) = 0 \tag{43}$$

и показывает, что следуя обычной методе получается, с точностью до величин первого порядка относительно α, решение

$$y = \cos t + \frac{\alpha}{32}(12t \sin t + \cos t - \cos 3t) \tag{44}$$

после чего Остроградский пишет: «однако это выражение станет неточным вследствие множителя t, находящегося вне знака синуса.

«Чтобы избежать этого недостатка, напишем предложенное уравнение в таком виде:

$$y'' + \left(1 - \frac{3}{4}\alpha\right) y = \frac{\omega}{4}(4y^3 - 3y) \tag{45}$$

полагая $\omega = \alpha$, получим заданное уравнение». Обозначив для краткости

$$1 - \frac{3}{4}\alpha = n^2 \tag{46}$$

Остроградский обычным способом получает решение

$$y = \cos nt + \frac{\alpha}{32n^2}(\cos nt + \cos 3nt) \qquad (47)$$

в котором время t содержится лишь под знаками косинуса. Это произошло потому, что в выражении

$$4y^3 - 3y$$

при подстановке в него первого приближения

$$y = \cos nt$$

член с $\cos nt$ пропадает, в самом деле будет

$$4y^3 - 3y = 4\cos^3 nt - 3\cos nt = \cos 3nt$$

Выражение же

$$4y^3 - 3y$$

в правой части получилось вследствие изменения в самом уравнении (42) коэффициента при y, представляющего квадрат частоты колебаний, на

$$n^2 = 1 - \frac{3}{4}\alpha$$

вместо первоначального значения 1.

Но, приведя этот пример, Остроградский не указывает, чем надо руководствоваться при такого рода преобразованиях и как поступать для разыскания дальнейших членов разложения, содержащих множители α^2, α^3, ... и т. д., чтобы и в этих членах время t не выходило из-под знаков синуса и косинуса, но намек на способ уже есть: надо надлежащим образом изменять частоту колебаний, как это будет показано ниже.

Заметим здесь же, что пример Остроградского относится как раз к так называемым возмущенным гармоническим колебаниям и встречается в техническом вопросе при исследовании качаний корабля, имеющего данную диаграмму остойчивости (см. ст. Scribanti в «Transactions of the Institution of Naval Architects», vol. 46, London, 1904), но, само собою разумеется, что Остроградский этого приложения не имел в виду, ибо рассмотрение диаграмм остойчивости было введено Ридом в 1869 г.

§ **6.** В 1877 г. появилось знаменитое сочинение лорда Rayleigh'a — «Theory of Sound», в котором в § 67 рассматриваются гармонические колебания систем с одною степенью свободы и, между прочим, как раз то

уравнение, которое служило примером Остроградскому, но лишь в слегка обобщенной форме, а именно при обозначении Рэйлея

$$\ddot{u} + n^2 u + \beta u^3 = 0 \qquad (48)$$

по поводу этого уравнения в указанном сочинении говорится: «если принять за первое приближение

$$u = A \cos nt \qquad (49)$$

и подставить его в член, умноженный на β, то получится уравнение

$$\ddot{u} + n^2 u = -\frac{\beta A^3}{4} \cos 3nt - \frac{3\beta A^3}{4} \cos nt \qquad (50)$$

«Соответственно последнему члену, в составе решения получился бы член, заключающий множитель $t \sin nt$, неопределенно возрастающий вместе с временем t. Это показывает, подобно тому, что имеет место в теории Луны, что принятое в первом приближении решение в действительности совсем не составляет приближения или не *остается* таковым. Но если взять за исходное решение

$$u = A \cos mt \qquad (51)$$

и выбрать надлежащим образом значение m, то мы увидим, что решение может быть представлено при помощи одних только периодических членов. В самом деле, заранее очевидно, что единственно, что дозволительно предположить, — это, что движение приблизительно гармоническое, с периодом *приблизительно* таким же, как и при $\beta = 0$. Достаточно даже беглого рассмотрения, чтобы убедиться, что член, пропорциональный u^3, не только может, но должен влиять на период. Вместе с тем очевидно, что решение, в котором период принят неправильно, хотя бы и на весьма малую величину, по прошествии достаточно долгого времени перестает представлять движение даже с грубым приближением.

«Мы возьмем, таким образом, за приближенное — уравнение

$$\ddot{u} + n^2 u = -\frac{3\beta A^3}{4} \cos mt - \frac{\beta A^3}{4} \cos 3mt \qquad (52)$$

решение которого есть

$$u = A \cos mt + \frac{\beta A^3}{4} \frac{\cos 3mt}{9m^2 - n^2} \qquad (53)$$

предполагая, что m взято так, что имеет место равенство

$$A(-m^2 + n^2) = -\frac{3\beta A^3}{4}$$

т. е.

$$m^2 = n^2 = \frac{3\beta A^3}{4} \text{»} \tag{54}$$

Мы привели слова и выкладки Рэйлея буквально. Никаких пояснений к сказанному он не приводит и не указывает, каким образом вести приближение до более высоких степеней β так, чтобы и при них не появлялись вековые члены.

Нетрудно видеть, что выкладка Рэйлея полностью и с надлежащими исправлениями может быть представлена так: очевидно, что можно писать

$$n^2 = m^2 + (n^2 - m^2) \tag{55}$$

и предположить, что разность $n^2 - m^2$ весьма мала, ибо при $\beta = 0$ она обращается в нуль; предложенное уравнение тогда будет

$$\ddot{u} + m^2 u + (n^2 - m^2) u + \beta u^3 = 0 \tag{56}$$

к этому уравнению надо присовокупить и начальные условия:

$$u(0) = A; \quad \dot{u}(0) = 0 \tag{57}$$

которые следуют из того, что Рэйлей в первом приближении берет

$$u = A \cos mt \tag{51}$$

хотя о начальных условиях он не упоминает.

При условиях (57), отбрасывая в уравнении (56) малые члены, получим первое приближение из уравнения

$$\ddot{u} + m^2 u = 0$$

оно будет

$$u = A \cos mt$$

Второе приближение получится написав заданное уравнение (48) так:

$$\ddot{u} + m^2 u = -(n^2 - m^2) u - \beta u^3 \tag{58}$$

и заменив в правой части величину u ее первым приближением; таким образом для второго приближения получается уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{u} + m^2 u &= -(n^2 - m^2) A \cos mt - \beta A^3 \cos^3 mt = \\ &= -\left[(n^2 - m^2) A + \frac{3}{4}\beta A^3\right] \cos mt - \frac{1}{4}\beta A^3 \cos 3mt \end{aligned} \tag{59}$$

при прежних начальных условиях (57).

Чтобы решение этого уравнения не содержало вековых членов, надо взять m^2 так, чтобы в правой части член с $\cos mt$ пропадал, т. е. надо положить

$$A(n^2 - m^2) + \frac{3}{4}\beta A^3 = 0$$

откуда следует

$$m^2 = n^2 + \frac{3}{4}\beta A^2$$

При таком значении m^2 общий интеграл уравнения (59) будет

$$u = C_1 \cos mt + C_2 \sin mt + \frac{1}{32m^2}\beta A^3 \cos 3mt$$

Значения постоянных произвольных C_1 и C_2, удовлетворяющих начальным условиям, суть:

$$C_1 = A - \frac{1}{32}\frac{\beta A^3}{m^2}$$
$$C_2 = 0$$

так что во втором приближении будет

$$u = A \cos mt + \frac{1}{32}\frac{\beta A^3}{m^2}(\cos 3mt - \cos mt) \qquad (60)$$

Как видно, решение это представляет гармоническое колебание с частотою основного тона m.

Результат, приведенный в сочинении Рэйлея, физически верен, но он не следует из уравнения (52), ибо начальные условия не удовлетворены и формула (53) представляет лишь частное решение, начальным условиям не удовлетворяющее.

В самом деле, общий интеграл уравнения (52) есть

$$u = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt + \frac{3\beta A^3}{4(m^2 - n^2)} \cos mt + \frac{\beta A^3}{4}\frac{\cos 3mt}{9m^2 - n^2}$$

и так как

$$m^2 - n^2 = \frac{3\beta A^2}{4}$$

то будет

$$u = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt + A \cos mt + \frac{\beta A^3}{4}\frac{\cos 3mt}{9m^2 - n^2}$$

На основании начальных условий должно быть:

$$u(0) = A;\ \dot{u}(0) = 0$$

следовательно:

$$C_1 = -\frac{\beta A^3}{4(9m^2 - n^2)};\quad C_2 = 0$$

так что

$$u = A\cos mt + \frac{\beta A^3}{4(9m^2 - n^2)}(\cos 3mt - \cos nt) \tag{61}$$

В последнем члене, вместо $9m^2 - n^2$, можно брать просто $8m^2$, ибо это вводит лишь член с множителем β^2, а такие члены в этом приближении не рассматриваются, тогда будет

$$u = A\cos mt + \frac{1}{32}\frac{\beta A^3}{m^2}(\cos 3mt - \cos nt) \tag{61'}$$

Это решение уравнения (52), верное математически (до членов второго порядка относительно β), неверно физически, ибо, когда величины m и n не соизмеримы между собою, как это имеет место вообще, величина u не будет периодической, в противность того, что Рэйлей искал. Произошло это потому, что взятое им уравнение неверно и должно быть заменено нашим уравнением (59), которое и доставляет решение, верное как математически, так и физически.

§ 7. В своей знаменитой докторской диссертации «Общая задача об устойчивости движения» (Харьков, 1892) А. М. Ляпунов, в § 33, для рассматриваемого им примера, частным случаем которого являются уравнения типа рассматриваемого нами, применяет методу совместного разложения по степеням начальной амплитуды как решения уравнения, так и частоты колебаний. Эта метода Ляпунова может быть видоизменена так, чтобы получать решение наших уравнений, ведя совместно и одновременно разложение по степеням входящего в уравнение малого параметра α решения уравнения и квадрата частоты колебаний, а не самой частоты; этим выкладки упрощаются и получают большую наглядность. Подобные разложения применял Линдшедт, но в иной форме.

Чтобы показать эту методу, начнем с уравнений типа

$$y'' + n^2 y + \alpha f(y) = 0 \tag{1}$$

где $f(y)$ есть целая функция переменной y, степень низшего члена которой не меньше 2.

Для простоты выкладок возьмем уравнение, рассмотренное Остроградским и Рэйлеем, рассуждения же будем вести так, чтобы они оставались применимыми и к общему уравнению (1).

Итак, положим, что надо разложить в ряд по степеням параметра α решение уравнения

$$y'' + n^2 y + \alpha y^3 = 0 \tag{62}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0) = a;\ y'(0) = 0 \tag{63}$$

Прежде всего, если бы величины n^2 и α были заданы численно, заменяем эти числа буквами и ведем всю выкладку алгебраически на буквах, и лишь в полученном окончательном решении подставляем вместо букв их численные значения.

Положим, что решение требуется разложить до третьей степени параметра α включительно, тогда полагаем:

$$\begin{aligned} y &= \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \alpha^3\varphi_3 \\ n^2 &= p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3 \end{aligned} \tag{64}$$

где φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 — неизвестные функции, p^2 — новая пока неизвестная постоянная, c_1, c_2, c_3 — неопределенные коэффициенты, которыми будем распоряжаться так, чтобы в получаемых выражениях функций φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 время t не выходило из-под знаков синуса и косинуса.

В этом совместном и одновременном разложении величины y и величины p^2, представляющей квадрат частоты возмущенных колебаний, и состоит сущность дела; остается выполнить соответствующие выкладки.

Подставив выражения (64) в предложенное уравнение и в начальные условия, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \varphi_0'' + \alpha\varphi_1'' + \alpha^2\varphi_2'' + \alpha^3\varphi_3'' + (p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3)(\varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \alpha^3\varphi_3) \\ + \alpha(\varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \alpha^3\varphi_3)^3 = 0 \end{aligned}$$

Разложив левую часть этого уравнения по степеням буквы α, ограничиваясь третьей ее степенью, получаем

$$\begin{aligned} \varphi'' + p^2\varphi_0 + \alpha\,(\varphi_1'' + p^2\varphi_1 + c_1\varphi_0 + \varphi_0^3) \\ + \alpha^2(\varphi_2'' + p^2\varphi_2 + c_2\varphi_0 + c_1\varphi_1 + 3\varphi_0^2\varphi_1) \\ + \alpha^3(\varphi_3'' + p^2\varphi_3 + c_3\varphi_0 + c_2\varphi_1 + c_1\varphi_2 + 3\varphi_0^2\varphi_2 + 3\varphi_1^2\varphi_0) = 0 \end{aligned}$$

Так как это уравнение должно иметь место при всяком малом значении параметра α, то оно распадается на следующую систему:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0'' + p^2\varphi_0 = 0\\
&\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1\varphi_0 - \varphi_0^3\\
&\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -c_2\varphi_0 - c_1\varphi_1 - 3\varphi_0^2\varphi_1\\
&\varphi_3'' + p^2\varphi_3 = -c_3\varphi_0 - c_2\varphi_1 - c_1\varphi_2 - 3\varphi_0^2\varphi_2 - 3\varphi_0\varphi_1^2
\end{aligned} \tag{65}$$

Начальные условия, по подстановке выражения (64) вместо y, принимают вид:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(0) + \alpha\varphi_1(0) + \alpha^2\varphi_2(0) + \alpha^3\varphi_3(0) = a\\
&\varphi_0'(0) + \alpha\varphi_1'(0) + \alpha^2\varphi_2'(0) + \alpha^3\varphi_3'(0) = 0
\end{aligned}$$

и распадаются на следующие:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(0) = a; \quad \varphi_0'(0) = 0\\
&\varphi_1(0) = 0; \quad \varphi_1'(0) = 0\\
&\varphi_2(0) = 0; \quad \varphi_2'(0) = 0\\
&\varphi_3(0) = 0; \quad \varphi_3'(0) = 0
\end{aligned} \tag{66}$$

Первое уравнение системы (65) и соответствующее ему начальное условие дают

$$\varphi_0 = a\cos pt \tag{67}$$

подставив эту величину во второе уравнение, имеем

$$\begin{aligned}
\varphi_1'' + p^2\varphi_1 &= -c_1 a\cos pt - a^3\cos^3 pt =\\
&= -\left(c_1 a + \frac{3}{4}a^3\right)\cos pt - \frac{1}{4}a^3\cos 3pt
\end{aligned}$$

Чтобы время t не выходило из-под знака синуса, надо выбрать неопределенный коэффициент c_1 так, чтобы член с $\cos pt$ в правой части пропадал, т. е. надо положить

$$c_1 a + \frac{3}{4}a^3 = 0$$

откуда

$$c_1 = -\frac{3}{4}a^2 \tag{68}$$

тогда будет

$$\varphi_1 = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \frac{1}{32}\frac{a^3}{p^2}\cos 3pt$$

соответствующее начальное условие дает:

$$C_1 + \frac{1}{32}\frac{a^3}{p^2} = 0$$
$$C_1 = 0$$

следовательно будет

$$\varphi_1 = \frac{1}{32}\frac{a^3}{p^2}(\cos 3pt - \cos pt) \tag{69}$$

Таким образом решение, точное до членов первого порядка относительно α, есть

$$y = a\cos pt + \frac{1}{32}\frac{\alpha a^3}{p^2}(\cos 3pt - \cos pt) \tag{70}$$

причем

$$p^2 = n^2 + \frac{3}{4}\alpha a^2 \tag{71}$$

Подставив значения φ_0 и φ_1, даваемые равенствами (67) и (69), в третье уравнение системы (65), имеем

$$\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -c_2 a\cos pt + \frac{3}{128}\frac{a^5}{p^2}(\cos 3pt - \cos pt) - \frac{3}{32}\frac{a^5}{p^2}\cos^2 pt(\cos 3pt - \cos pt)$$

по приведении правой части к косинусам кратных аргументов, получим

$$\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -a\left(c_2 + \frac{3}{128}\frac{a^4}{p^2}\right)\cos pt - \frac{3}{128}\frac{a^5}{p^2}(\cos 3pt + \cos 5pt)$$

следовательно надо взять

$$c_2 = -\frac{3}{128}\frac{a^4}{p^2} \tag{72}$$

тогда получим

$$\varphi_2 = C_1\cos pt + C_2\sin pt + \frac{3}{1024}\frac{a^5}{p^2}\cos 3pt + \frac{1}{1024}\frac{a^5}{p^2}\cos 5pt$$

причем постоянные произвольные C_1 и C_2, на основании третьего начального условия, будут:

$$C_1 = -\frac{1}{256}\frac{a^5}{p^4}$$
$$C_2 = 0$$

таким образом будет

$$\varphi_2 = \frac{1}{1024}\frac{a^5}{p^4}(\cos 5pt + 3\cos 3pt - 4\cos pt) \tag{73}$$

следовательно, с точностью до членов второго порядка,

$$\begin{aligned} y = a\cos pt + \frac{1}{32}\frac{\alpha a^3}{p^2}(\cos 3pt - \cos pt) \\ + \frac{1}{1024}\frac{\alpha^2 a^5}{p^4}(\cos 5pt + 3\cos 3pt - 4\cos pt) \end{aligned} \tag{74}$$

причем, на основании равенств (64), (68), (72), величина p^2 определяется уравнением

$$p^2 = n^2 + \frac{3}{4}\alpha a^2 + \frac{3}{128}\alpha^2\frac{a^4}{p^2} \tag{75}$$

Нет надобности решать это уравнение относительно p^2 точно, а надо получить лишь приближенное значение p^2, точное до вторых степеней буквы α, т. е. взять

$$p^2 = n^2 + \frac{3}{4}\alpha a^2 + \frac{3}{128}\alpha^2\frac{a^4}{n^2} \tag{76}$$

Ясно, что для получения φ_3 надо в последнее уравнение системы (65) подставить вместо φ_0, φ_1, φ_2 их выражения (67), (69) и (73), вместо коэффициентов c_1, c_2 — их значения (68) и (72), развить правую часть по косинусам кратных аргументов, собрать члены с $\cos pt$, распорядиться неопределенным коэффициентом c_3 так, чтобы член с $\cos pt$ пропал, таким образом получим

$$\begin{aligned} \varphi_3'' + p^2\varphi_3 = \left(-ac_3 + \frac{3}{1024}\frac{a^7}{p^4}\right)\cos pt + \\ + \frac{1}{4096}\frac{a^7}{p^4}[-6\cos 7pt - 15\cos 5pt + 3\cos 3pt] \end{aligned}$$

Значит, надо взять

$$c_3 = \frac{3}{1024}\frac{a^6}{p^4} \tag{77}$$

тогда, на основании начальных условий, будет

$$\varphi_3 = \frac{1}{32768}\frac{a^7}{p^6}[\cos 7pt + 3\cos 5pt - 3\cos 3pt - \cos pt] \tag{78}$$

и следовательно, с точностью до членов третьего порядка относительно α, будет

$$y = a\cos pt + \frac{1}{32}\alpha\frac{a^3}{p^2}(\cos 3pt - \cos pt)$$

$$+ \frac{1}{1024}\alpha^2\frac{a^5}{p^4}(\cos 5pt + 3\cos 3pt - 4\cos pt) \qquad (79)$$

$$+ \frac{1}{32768}\alpha^3\frac{a^7}{p^6}(\cos 7pt + 3\cos 5pt - 3\cos 3pt - \cos pt)$$

причем p^2 определяется уравнением

$$n^2 = p^2 - \frac{3}{4}\alpha a^2 - \frac{3}{128}\alpha^2\frac{a^4}{p^2} + \frac{3}{1024}\alpha^3\frac{a^6}{p^4} \qquad (80)$$

и так как величина p^2 требуется лишь до членов третьего порядка относительно α, то это уравнение можно заменить таким:

$$n^2 = p^2 - \frac{3}{4}\alpha a^2 - \frac{3}{128}\alpha^2\frac{a^4}{n^2 + \frac{3}{4}\alpha a^2} + \frac{3}{1024}\alpha^3\frac{\alpha^6}{n^4}$$

откуда следует

$$p^2 = n^2 + \frac{3}{4}\alpha a^2 + \frac{3}{128}\alpha^2\frac{a^4}{n^2} - \frac{21}{1024}\alpha^3\frac{a^6}{n^4} \qquad (81)$$

Из этого примера видно, насколько изложенная метода проще метод Лапласа и Лагранжа: здесь не приходится развивать общего интеграла предложенного дифференциального уравнения, удерживая обе постоянные произвольные, одно это развитие потребовало бы гораздо более сложных выкладок, нежели получение вышеприведенного окончательного решения; чтобы не дозволять появляться членам, в которых время t выходит из-под знака синуса или косинуса, нам достаточно всякий раз решать одно уравнение первой степени с одною неизвестною, в методах же Лапласа и Лагранжа пришлось бы сперва составить сложную систему двух дифференциальных уравнений и решить ее, что могло бы представить гораздо большие трудности, нежели решение предложенного уравнения.

Само собою понятно, что совершенно так же надо поступать и для всякого уравнения вида

$$y'' + n^2 y + \alpha f(y) = 0 \qquad (1)$$

в котором $f(y)$ есть любая целая функция не ниже второй степени относительно y; при этом, если бы разложение требовалось до членов порядка k относительно α, то надо полагать:

$$y = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \ldots + \alpha^k\varphi_k \tag{82}$$

$$n^2 = p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_k\alpha^k \tag{83}$$

в остальном поступать как описано на примере.

При выполнении этих выкладок никаких затруднений не встретится, ибо при разыскании функции φ_i, по приведении степеней и произведений косинусов к кратным аргументам, в правой части будут получаться члены только с косинусами разных крайностей pt и будет один член, содержащий $\cos pt$, коэффициент при нем будет линейно зависеть от c_i, которое и определится из условия, чтобы член с $\cos pt$ пропадал.

Заметим здесь же, что начальное условие

$$y(0) = a;\ y'(0) = 0 \tag{2}$$

существенно необходимо при этой методе; ниже (см. § 12) показано, каким образом общее начальное условие

$$y(0) = A;\ y'(0) = B$$

приводится к виду (2).

§ 8. Перейдем теперь к рассмотрению уравнений вида

$$y'' + n^2 y + \alpha F(y') = 0 \tag{1'}$$

причем $F(y')$ есть целая функция от y'; начальные условия попрежнему пусть будут:

$$y(0) = a;\ y'(0) = 0 \tag{2}$$

Начнем с того простейшего случая, когда функция $F(y')$ четная, не ниже второй степени относительно y', и опять все выкладки проведем для самого простого примера, ведя рассуждения так, чтобы они были приложимы и к общему случаю.

Самый простой пример уравнений типа (1'), при четной функции $F(y')$, представляют гармонические или вообще малые колебания маятника в среде, сопротивление которой пропорционально второй степени скорости и мало.

В этом случае уравнение движения будет вида

$$y'' + n^2 y \mp \alpha y'^2 = 0 \tag{84}$$

Двойной знак при члене $\alpha y'^2$ взят для того, чтобы отметить, что этот член должен представлять сопротивление движению, поэтому при нем надо брать знак минус, когда y' — отрицательное, и знак плюс, когда y' — положительное, изменяя таким образом, соответственно перемене знака y', самое уравнение движения.

Предполагая, что начальное отклонение

$$y(0) = a$$

положительное, будем иметь для первого полуразмаха уравнение

$$y'' + n^2 y - \alpha y'^2 = 0 \tag{85}$$

и начальное условие:

$$y(0) = a; \quad y'(0) = 0 \tag{86}$$

Будем разлагать решение уравнения (83) в ряд по степеням α и для простоты выкладок ограничимся второю степенью этого параметра.

Полагаем:

$$y = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 \tag{87}$$

$$n^2 = p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 \tag{88}$$

тогда, по подстановке в уравнение (85), ограничиваясь второю степенью α, получаем

$$\varphi_0'' + p^2\varphi_0 + \alpha(\varphi_1'' + p^2\varphi_1 - \varphi_0'^2) + \\ + \alpha^2(\varphi_2'' + p^2\varphi_2 + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_0 - 2\varphi_0'\varphi_1') = 0$$

из этого уравнения следует система:

$$\begin{aligned} &\varphi_0'' + p^2\varphi_0 = 0 \\ &\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = \varphi_0'^2 \\ &\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -c_1\varphi_1 - c_2\varphi_0 + 2\varphi_0'\varphi_1' \end{aligned} \tag{89}$$

Начальные условия будут:

$$\begin{aligned} &\varphi_0(0) = a; \quad \varphi_0'(0) = 0 \\ &\varphi_1(0) = 0; \quad \varphi_1'(0) = 0 \\ &\varphi_2(0) = 0; \quad \varphi_2'(0) = 0 \end{aligned} \tag{90}$$

Из первого уравнения, на основании первого начального условия, следует

$$\varphi_0 = a\cos pt \tag{91}$$

тогда второе уравнение будет

$$\varphi_1'' + p^2 \varphi_1 = a^2 p^2 \sin^2 pt = \frac{1}{2} a^2 p^2 (1 - \cos 2pt)$$

следовательно

$$\varphi_1 = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{6} a^2 \cos 2pt$$

причем на основании начальных условий:

$$C_1 = -\frac{2}{3} a^2; \quad C_2 = 0$$

таким образом имеем

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} a^2 - \frac{2}{3} a^2 \cos pt + \frac{1}{6} a^2 \cos 2pt \tag{92}$$

Третье уравнение системы (89) будет

$$\varphi_2'' + p^2 \varphi_2 = -c_2 a \cos pt - c_1 \left(\frac{1}{2} a^2 - \frac{2}{3} a^2 \cos pt + \frac{1}{6} \cos 2pt \right) - 2p^2 a^3 \sin pt \left[\frac{2}{3} \sin pt - \frac{1}{3} \sin 2pt \right]$$

В нашем распоряжении два неопределенных коэффициента c_1 и c_2, между тем нам придется, для уничтожения члена с $\cos pt$, подчинить c_1 и c_2 одному условию, следовательно одну из этих величин можно взять по произволу; очевидно, что проще всего положить

$$c_1 = 0 \tag{93}$$

тогда, по приведении к кратным аргументам, имеем уравнение

$$\varphi_2'' + p^2 \varphi_2 = \left(-c_2 a + \frac{1}{3} p^2 a^3 \right) \cos pt - \frac{2}{3} p^2 a^3 + \frac{2}{3} p^2 a^3 \cos 2pt - \frac{1}{3} p^2 a^3 \cos 3pt$$

следовательно надо положить

$$-c_2 a + \frac{1}{3} p^2 a^3 = 0$$

т. е.

$$c_2 = \frac{1}{3} p^2 a^2 \tag{94}$$

тогда будет

$$\varphi_2 = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt - \frac{2}{3} a^3 - \frac{2}{9} a^3 \cos 2pt + \frac{1}{24} a^3 \cos 3pt$$

и, на основании начальных условий,

$$C_1 = \frac{61}{72} a^3; \quad C_2 = 0$$

так что

$$\varphi_2 = -\frac{2}{3} a^2 + \frac{1}{72} a^3 (61 \cos pt - 16 \cos 2pt + 3 \cos 3pt) \tag{95}$$

причем p^2 определяется уравнением

$$n^2 = p^2 + \frac{1}{3} p^2 a^2 \alpha^2 \tag{96}$$

т. е.

$$p = \frac{n}{\sqrt{1 + \frac{1}{3} a^2 \alpha^2}}$$

соответствующий период τ будет

$$\tau = \frac{2\pi}{n} \sqrt{1 + \frac{1}{3} a^2 \alpha^2} \approx \frac{2\pi}{n} \left(1 + \frac{1}{6} a^2 \alpha^2\right)$$

или, полагая

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{n}$$

имеем

$$\tau = \tau_0 \sqrt{1 + \frac{1}{3} a^2 \alpha^2} \approx \tau_0 \left(1 + \frac{1}{6} a^2 \alpha^2\right)$$

Подставив найденные величины φ_0, φ_1, φ_2 в уравнение (87), имеем

$$\begin{aligned} y = a \cos \frac{2\pi t}{\tau} + \frac{1}{6} \alpha a^2 \left(3 - 4 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + \cos \frac{4\pi t}{\tau}\right) \\ - \frac{1}{72} \alpha^2 a^3 \left[48 - 61 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + 16 \cos \frac{4\pi t}{\tau} - 3 \cos \frac{6\pi t}{\tau}\right] \end{aligned} \tag{97}$$

Это уравнение имеет место до тех пор, пока

$$y' < 0$$

т. е. до момента

$$t = t_1 = \frac{1}{2} \tau$$

когда будет

$$y' = 0$$

Отклонение маятника в этот момент есть

$$y = -a_1 = -\left(a - \frac{4}{3}\alpha a^2 + \frac{16}{9}\alpha^2 a^3\right) \tag{98}$$

Свой второй полуразмах маятник начнет с этого отклонения, причем уравнение его движения будет

$$y'' + n^2 y + \alpha y'^2 = 0 \tag{99}$$

Очевидно, что продолжительность этого второго полуразмаха будет

$$\frac{1}{2}\tau_1 = \frac{1}{2}\tau\sqrt{1 + \frac{1}{3}a_1^2\alpha^2} = \frac{1}{2}\tau\left(1 + \frac{1}{6}a_1^2\alpha^2\right) \tag{100}$$

и отклонение, до которого он дойдет,

$$a_2 = a_1 - \frac{4}{3}\alpha a_1^2 + \frac{16}{9}\alpha^2 a_1^2 \tag{101}$$

таким образом маятник будет продолжать качаться с постепенно убывающей амплитудой.

Очевидно, что совершенно подобным же образом проводятся выкладки и для разложения решения уравнения

$$y'' + n^2 y + \alpha F(y') = 0 \tag{102}$$

где $F(y')$ есть любая целая четная функция от y', степень которой не ниже второй.

Если бы разложение надо было вести до членов порядка k относительно α, то следовало бы положить:

$$y = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \ldots + \alpha^k\varphi_k \tag{103}$$

$$n^2 = p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_k\alpha^k \tag{104}$$

и поступать как описано для примера.

При этом разложении никаких затруднений не возникает, ибо в правых частях уравнений, служащих для определения функций $\varphi_1, \varphi_1, \ldots \varphi_k$, будут появляться лишь члены четной степени относительно синусов различной кратности аргумента pt; эти члены будут выражаться через косинусы разной кратности этого аргумента, так что получится с аргументом pt только член с $\cos pt$, который и уничтожим, распоряжаясь соответствующим неопределенным коэффициентом c_1, совершенно подобно тому, как это имело место в нашем примере.

Изложенное заключение следует из формул, которыми выражаются степени синуса через синусы и косинусы кратных аргументов, а именно:

1°) при m четном:

$$\sin^m a = (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{1}{2^{m-1}} \left[\cos ma - m \cos(m-2)a + \right.$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos(m-4)a - \ldots + \tag{105}$$

$$\left. + (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{1}{2}m+1\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \left(\frac{1}{2}m\right)} \right]$$

2°) при m нечетном:

$$\sin^m a = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{1}{2^{m-1}} \left[\sin na - n \sin(n-2)a + \right.$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \sin(n-4)a - \ldots + \tag{106}$$

$$\left. + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{m(m-1)\ldots\frac{1}{2}(m+3)}{1 \cdot 2 \ldots \left(\frac{1}{2}m-1\right)} \sin a \right]$$

Так как от членов четной степени относительно y' будут получаться или четные степени синусов разной кратности, или члены вида

$$\sin^l u \cdot \sin^h v$$

где u и v — кратные pt, причем сумма показателей $l + h$ есть число четное, то после приведения будут получаться только члены с косинусами pt, и нахождение функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ никаких затруднений не представит.

§ **9.** При изучении колебательного движения часто приходится иметь дело с уравнениями вида:

$$y'' + n^2 y + f(y) = 0 \tag{107}$$

$$y'' + n^2 y + F(y') = 0 \tag{108}$$

не содержащими малого параметра, но относящимися к колебаниям с малой амплитудой, так что величина β, входящая в начальные условия

$$y(0) = \beta; \quad y'(0) = 0 \tag{109}$$

есть малая.

В таком случае надо искать решение этого уравнения в виде ряда, расположенного по целым положительным степеням амплитуды β.

Поясним опять, для простоты выкладок, относящуюся сюда методу на простейших частных примерах.

Пусть дано уравнение

$$y'' + n^2 y + ky^3 = 0 \tag{110}$$

и начальные условия:

$$y(0) = \beta;\ y'(0) = 0 \tag{109}$$

Чтобы разложить решение этого уравнения в ряд по степеням малой величины β, полагаем:

$$y = \beta\varphi_0 + \beta^2\varphi_1 + \beta^3\varphi_2 + \ldots \tag{111}$$

$$n^2 = p^2 + c_1\beta + c_2\beta^2 + \ldots \tag{112}$$

и если желаем ограничиться, напр., членами третьего порядка относительно β, то удерживаем в разложениях y и n^2 лишь написанные выше члены.

Подставив выражения (111) и (112) в предложенное уравнение и начальные условия и уравняв нулю члены с одинаковою степенью β, получаем, подобно предыдущему, систему:

$$\begin{aligned} &\varphi_0'' + p^2\varphi_0 = 0 \\ &\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1\varphi_0 \\ &\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -c_1\varphi_1 - c_2\varphi_0 - k\varphi_0^3 \end{aligned} \tag{113}$$

и начальные условия:

$$\begin{aligned} &\varphi_0(0) = 1;\ \varphi_0'(0) = 0 \\ &\varphi_1(0) = 0;\ \varphi_1'(0) = 0 \\ &\varphi_2(0) = 0;\ \varphi_2'(0) = 0 \end{aligned} \tag{114}$$

отсюда следует

$$\varphi_0 = \cos pt \tag{115}$$

затем

$$\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1\cos pt$$

следовательно надо брать

$$c_1 = 0 \tag{116}$$

и будет

$$\varphi_1 = 0 \tag{116'}$$

так что φ_2 определяется уравнением

$$\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -c_2\cos pt - k\cos^3 pt$$
$$= -\left(c_2 + \frac{3}{4}k\right)\cos pt - \frac{k}{4}\cos 3pt$$

значит надо брать

$$c_2 = -\frac{3}{4}k \tag{117}$$

тогда будет

$$\varphi_2 = C_1\cos pt + C_2\sin pt + \frac{k}{32p^2}\cos 3pt$$

и, на основании начальных условий:

$$C_1 = -\frac{1}{32}\frac{k}{p^2}; \quad C_2 = 0$$

так что

$$\varphi_2 = \frac{1}{32}\frac{k}{p^2}[\cos 3pt - \cos pt] \tag{118}$$

Таким образом имеем

$$y = \beta\cos pt + \frac{1}{32}\frac{\beta^2 k}{p^2}(\cos 3pt - \cos pt) \tag{119}$$

причем

$$p^2 = n^2 + \frac{3}{4}k\beta^2 \tag{120}$$

Очевидно, что и для всякой целой функции $f(y)$ разложение решения в ряд по любой степени k начальной амплитуды может быть произведено, положив:

$$y = \beta\varphi_0 + \beta^2\varphi_1 + \beta^3\varphi_2 + \ldots + \beta^k\varphi_{k-1} \tag{121}$$
$$n^2 = p^2 + c_1\beta + c_2\beta^2 + \ldots + c_{k-1}\beta^{k-1} \tag{122}$$

и поступая как указано в примере.

В правых частях уравнений, служащих для определения

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{k-1}$$

будут получаться лишь степени и произведения степеней косинусов различных кратностей аргумента pt, которые приведутся к косинусам кратных аргументов и к члену с $\cos pt$; этот член можно будет уничтожать, имея в своем распоряжении неопределенный коэффициент, линейно в него входящий, так что никаких затруднений возникнуть не может.

§ **10.** Рассмотрим теперь уравнение вида

$$y'' + n^2 y + F(y') = 0 \tag{123}$$

при начальном условии:

$$y(0) = \beta;\ y'(0) = 0 \tag{124}$$

Положим сперва, что функция $F(y')$ есть функция четная, и поясним процесс на простейшем примере

$$y'' + n^2 y - ky'^2 = 0 \tag{125}$$

ограничиваясь третьей степенью амплитуды.

Полагаем:

$$y = \beta\varphi_0 + \beta^2\varphi_1 + \beta^3\varphi_2 \tag{126}$$

$$n^2 = p^2 + c_1\beta + c_2\beta^2 \tag{127}$$

и, поступая как раньше, получаем систему:

$$\begin{aligned} &\varphi_0'' + p^2\varphi_0 = 0 \\ &\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1\varphi_0 + k\varphi_0'^2 \\ &\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -c_1\varphi_1 - c_2\varphi_0 + 2k\varphi_0'\varphi_1' \end{aligned} \tag{128}$$

и начальные условия:

$$\begin{aligned} &\varphi_0(0) = 1;\ \varphi_0'(0) = 0 \\ &\varphi_1(0) = 0;\ \varphi_1'(0) = 0 \\ &\varphi_2(0) = 0;\ \varphi_2'(0) = 0 \end{aligned} \tag{129}$$

на основании которых последовательно получаем:

$$\varphi_0 = \cos pt \tag{130}$$

$$\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1\cos pt + kp^2\sin^2 pt = -c_1\cos pt + \frac{kp^2}{2}(1 - \cos 2pt)$$

$$c_1 = 0 \tag{131}$$

$$\varphi_1 = \frac{k}{2} - \frac{2}{3}k\cos pt + \frac{k}{6}\cos 2pt \tag{132}$$

$$\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -c_2\cos pt - \frac{2k^2p^2}{3}(2\sin^2 pt - \sin pt\sin 2pt)$$

$$= -\frac{2}{3}k^2p^2 - \left(c_2 - \frac{k^2p^2}{3}\right)\cos pt + \frac{2}{3}k^2p^2\cos 2pt - \frac{1}{3}k^2p^2\cos 3pt$$

$$c_2 = \frac{k^2p^2}{3} \tag{133}$$

$$\varphi_2 = -\frac{2}{3}k^2 + \frac{1}{72}k^2[61\cos pt - 16\cos 2pt + 3\cos 3pt] \tag{134}$$

Таким образом для первого полуразмаха, т. е. пока

$$y' < 0$$

будет

$$y = \beta \cos pt + \beta^2 \cdot \frac{k}{6}(3 - 2\cos pt + \cos 2pt) + \beta^3 \cdot \frac{k^2}{72}(-48 + 61\cos pt - 16\cos 2pt + 3\cos 3pt) \tag{135}$$

причем p^2 определяется уравнением

$$n^2 = p^2 + \frac{1}{3}\beta^2 k^2 p^2 \tag{136}$$

т. е.

$$p^2 = \frac{n^2}{1 + \frac{1}{3}k^2\beta^2}$$

Очевидно, что все сказанное в конце § 8 относится и к этому случаю, так что разложение для любой четной функции $F(y')$ затруднений не представит.

В том случае, когда функция $F(y')$ нечетная и низшая степень ее членов есть *первая*, так что будет

$$F(y') = 2hy' + F_1(y') \tag{137}$$

причем $F_1(y')$ не ниже третьей степени относительно y', то и обычный прием разложения не представит затруднений, ибо время t не будет выходить из-под знаков синуса, косинуса и показательной функции.

Для простоты выкладок поясним это на простейшем примере, взяв уравнение

$$y'' + 2hy' + n^2 y + ky'^3 = 0 \tag{138}$$

и начальное условие:

$$y(0) = \beta;\ y'(0) = 0 \tag{139}$$

Ограничиваясь в разложении третьей степенью малой амплитуды β, полагаем

$$y = \beta\varphi_0 + \beta^2\varphi_1 + \beta^3\varphi_2 \tag{140}$$

тогда, после подстановки и группировки членов, получим

$$\beta(\varphi_0'' + 2h\varphi_0' + n^2\varphi_0) + \beta^2(\varphi_1' + 2h\varphi_1' + n^2\varphi_1) + \beta^3(\varphi_2'' + 2h\varphi_2' + n^2\varphi_2 + k\varphi'^3) = 0$$

Отсюда следует система:

$$\begin{aligned} \varphi_0'' + 2h\varphi_0' + n^2\varphi_0 &= 0 \\ \varphi_1'' + 2h\varphi_1' + n^2\varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2'' + 2h\varphi_2' + n^2\varphi_2 &= -k\varphi_0'^3 \end{aligned} \tag{141}$$

Начальные условия будут:

$$\begin{aligned} \varphi_0(0) &= 1; \quad \varphi_0'(0) = 0 \\ \varphi_1(0) &= 0; \quad \varphi_1'(0) = 0 \\ \varphi_2(0) &= 0; \quad \varphi_2'(0) = 0 \end{aligned} \tag{142}$$

и мы получим

$$\varphi_0 = e^{-ht}\left(\cos n_1 t + \frac{h}{n_1}\sin n_1 t\right) \tag{143}$$

причем

$$n_1 = \sqrt{n^2 - h^2} \tag{144}$$

ибо при колебательном движении величина h меньше n.

Второе уравнение и второе начальное условие дают

$$\varphi_1 = 0 \tag{145}$$

Третье уравнение будет

$$\varphi_2'' + 2h\varphi_2' + n^2\varphi_2 = k\frac{n^6}{n_1^3}e^{-3ht}\sin^3 n_1 t = \frac{kn^6}{4n_1^3}e^{-3ht}(3\sin n_1 t - \sin 3n_1 t)$$

благодаря множителю e^{-3ht} в правой части общий интеграл этого уравнения будет вида

$$\begin{aligned} \varphi_2 = e^{-ht}(C_1\cos n_1 t + C_2\sin n_1 t) + \\ + e^{-3ht}(A\cos n_1 t + B\sin n_1 t + E\cos 3n_1 t + G\sin 3n_1 t) \end{aligned} \tag{146}$$

и время t не выйдет из-под знака синуса и косинуса.

Совершенно так же поступим и для любой целой функции $F(y')$, низший член которой есть $2hy'$, причем нет надобности, чтобы она была нечетной, в нее могут входить и члены четной степени, но тогда надо, соответственно изменению знака при y', изменять знаки и при этих членах в механических вопросах, когда функция $F(y')$ представляет сопротивление движению.

Точно так же, если бы было предложено уравнение вида

$$y'' + n^2 y + f(y) + F(y') = 0 \tag{147}$$

причем $f(y)$ есть целая функция не ниже второй степени и $F(y')$ — целая функция вида

$$F(y') = 2hy' + F_1(y') \tag{148}$$

где $F(y')$ есть целая функция от y' не ниже второй степени, то обычный прием разложения по степеням амплитуды β, т. е. представление решения в виде ряда

$$y = \beta\varphi_0 + \beta^2\varphi_1 + \ldots + \beta^k\varphi_{k-1} \tag{149}$$

ведет к цели без всяких затруднений, так как время t не будет выходить из-под знаков синуса и косинуса.

§ 11. До сих пор мы рассматривали уравнения, относящиеся к свободным колебаниям, так что их правая часть есть нуль; рассмотрим теперь случай вынужденных колебаний, т. е. когда в правой части уравнения находится заданная функция времени t, так что, вместо уравнения (1), мы бы имели уравнение вида

$$y'' + n^2 y + \alpha f(y) = G(t) \tag{150}$$

и прежние начальные условия:

$$y(0) = a;\ y'(0) = 0 \tag{151}$$

Поясним опять методу решения на частном примере

$$y'' + n^2 y + \alpha y^3 = G(t) \tag{152}$$

полагаем попрежнему:

$$y = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \alpha^3\varphi_3 + \ldots \tag{153}$$

$$n^2 = p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3 + \ldots \tag{154}$$

по подстановке и группировке членов, подобно тому как сделано в § 7, получим систему:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_0'' + p^2\varphi_0 = G(t) \\ &\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1\varphi_0 - \varphi_0^3 \\ &\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -c_2\varphi_0 - c_1\varphi_1 - 3\varphi_0^2\varphi_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{155}$$

и начальные условия:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_0(0) = a;\ \varphi_0'(0) = 0 \\ &\varphi_1(0) = 0;\ \varphi_1'(0) = 0 \\ &\varphi_2(0) = 0;\ \varphi_2'(0) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{156}$$

Первое уравнение системы (155), на основании первого начального условия, будет

$$\varphi_0 = a\cos pt + \frac{1}{p}\int_0^t G(\xi)\sin p(t-\xi)\,d\xi \tag{157}$$

Подставляем эту величину во второе уравнение, которое после подстановки будет вида

$$\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1 a\cos pt - a^3\cos^3 pt + G_1(t)$$
$$= -\left(c_1 a + \frac{3}{4}a^3\right)\cos pt - \frac{1}{4}a^3\cos 3pt + G_1(t)$$

причем G_1 будет известная функция времени; берем

$$c_1 = -\frac{3}{4}a^2 \tag{158}$$

чтобы член с $\cos pt$ в правой части пропал, тогда будет на основании второго начального условия:

$$\varphi_1 = \frac{1}{32}\frac{a^3}{p^2}(\cos 3pt - \cos pt) + \frac{1}{p}\int_0^t G_1(\xi)\sin p(t-\xi)\,d\xi \tag{159}$$

и продолжаем таким образом далее, пока не дойдем в разложении до требуемых степеней α.

В большей части случаев, встречающихся в практике, функция $G(t)$ будет вида

$$G(t) = g\cos mt + f\sin mt \tag{160}$$

причем g, f и m — заданные постоянные, тогда нет надобности пользоваться общей формулой (157), а следует определять частное решение по способу неопределенных коэффициентов.

Так, в нашем случае первое уравнение было бы

$$\varphi_0'' + p^2\varphi_0 = g\cos mt + f\sin mt \tag{161}$$

решение которого есть

$$\varphi_0 = C_1\cos pt + C_2\sin pt + \frac{g}{m^2-p^2}\cos mt + \frac{f}{m^2-p^2}\sin mt \tag{162}$$

постоянные произвольные C_1 и C_2 будут:

$$C_1 = a - \frac{g}{m^2-p^2}; \quad C_2 = -\frac{mf}{p(m^2-p^2)} \tag{162'}$$

Заметим здесь же, что знаменатель $m^2 - p^2$ при заданном m никогда нулем не будет, ибо если, развивая, скажем, до вторых степеней α, мы бы получили

$$m^2 = p^2$$

то стоит только взять в разложении одним членом больше, как это равенство места иметь не будет, хотя знаменатель и будет весьма малый, но не нуль, и значит, время t не выйдет из-под знаков косинуса.

Совершенно так же поступим и для остальных типов рассмотренных нами уравнений; присутствие члена $G(t)$ в уравнении не вносит трудностей принципиального характера, хотя и может значительно усложнить выкладки и потребовать разложений до более высоких степеней малых параметров или малых амплитуд.

§ **12.** Покажем теперь, каким образом во всех рассмотренных случаях привести начальные условия к виду:

$$y(0) = a; \quad y'(0) = 0 \tag{2}$$

который мы предполагали.

Положим, что начальные условия были бы заданы в виде:

$$y(0) = A; \quad y'(0) = B \tag{163}$$

как видно во всех рассмотренных случаях, это изменение скажется только на условиях, относящихся к функции φ_0, которые тогда будут:

$$\varphi_0(0) = A; \quad \varphi_0'(0) = B \tag{164}$$

а так как φ_0 определяется уравнением

$$\varphi_0'' + p^2 \varphi_0 = 0$$

то решение, удовлетворяющее условиям (164), будет

$$\varphi_0 = A \cos pt + \frac{B}{p} \sin pt \tag{165}$$

Положим:

$$a \cos \delta = A; \quad a \sin \delta = \frac{B}{p} \tag{166}$$

тогда будет:

$$\left.\begin{aligned} a &= \pm \sqrt{A^2 + \frac{B^2}{p^2}} \\ \cos \delta &= \frac{A}{a}; \quad \sin \delta = \frac{B}{ap} \end{aligned}\right\} \tag{167}$$

этими формулами величины a и δ определяются вполне.

Таким образом будет

$$\varphi_0 = a\cos(pt - \delta) \tag{168}$$

ясно, что стоит только, вместо переменной t, взять переменную t_1, определяемую равенством

$$t = t_1 + \frac{\delta}{p} \tag{169}$$

и у нас будет

$$\varphi_0 = a\cos pt_1 \tag{170}$$

т. е. при $t_1 = 0$ должно быть:

$$\varphi_0(0) = a;\ \varphi_0'(0) = 0 \tag{171}$$

От такого изменения переменной независимой ни предложенное уравнение, ни уравнения, из него следующие, вида своего не изменяют. Так как все выкладки ведутся алгебраически на *буквах*, то величина p остается неопределенной до самого конца вычисления, когда для ее определения получится уравнение, подобное уравнению (80), которое и доставит численную величину p^2, после чего найдутся однозначно и численные величины a и δ.

§ **13.** Может возникнуть вопрос, являются ли ряды, первыми членами которых мы пользуемся, сходящимися, и при увеличении числа взятых членов не будет ли приближение ухудшаться, вместо того, чтобы улучшаться.

Исследования сходимости подобных рядов можно найти в упомянутой диссертации А. М. Ляпунова — «Общая задача об устойчивости движения», а также в сочинении H. Poincaré — «Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste», но они слишком сложны, чтобы их здесь приводить, и мы приведем § 118 из сочинения Poincaré, в котором он в следующих словах характеризует смысл, придаваемый слову «сходимость» математиками и астрономами: «между математиками и астрономами имеет место своего рода разногласие по поводу слова *сходимость*. Математики, озабоченные полною строгостью и зачастую относящиеся безразлично к длинноте неисполнимых вычислений, возможность которых они себе представляют, не имея в виду их на самом деле выполнять, говорят, что ряд сходящийся, когда сумма его членов приближается к определенному пределу, хотя бы первые члены и убывали весьма медленно. Наоборот, астрономы имеют обыкновение называть ряд сходящимся, когда, напр., первые двадцать его членов весьма быстро убывают, хотя бы дальнейшие члены и возрастали неопределенно.

«Так, рассмотрим простой пример: из двух рядов, коих общие члены суть

$$\frac{1000^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$

и

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{1000^n}$$

математики назовут первый сходящимся и даже весьма быстро сходящимся, потому что миллионный член гораздо меньше 999999-го, второй же ряд они рассматривают как расходящийся, ибо его общий член может беспредельно возрастать.

«Астрономы, наоборот, примут первый ряд за расходящийся, потому что первые его 1000 членов идут возрастая; второй же ряд они сочтут за сходящийся, потому что первые 1000 членов идут убывая и в начале это убывание весьма быстрое.

«Оба воззрения законны: первое — в исследованиях теоретических, второе — в численных приложениях. Оба воззрения должны господствовать, но в двух различных областях, которые важно точно разграничить.

«Астрономам эти границы не всегда известны с точностью, но они редко их переходят; приближение, которым они довольствуются, их обыкновенно удерживает далеко внутри этих границ; кроме того, они руководствуются своим инстинктом, и если бы он ввел их в заблуждение, поверка наблюдениями вскоре обнаружила бы их ошибку».

Наша статья предназначена не для астрономов, имеющих в своем распоряжении более совершенные методы, а для техников и притом, главным образом, в области техники строительной, где нет надобности в той высокой точности, которая требуется в астрономии, но зато здесь и последствия ошибки совсем иные, нежели когда одна из 2000 малых планет пройдет через Гринический меридиан на несколько секунд раньше или позже, чем рассчитано. Техник должен быть уверен в точности даваемого его расчетом результата в *пределах практических допусков* как в данных, так и в нужном ему результате.

Поверку всех наших разложений в ряды надо производить следующим образом: полученный ряд, проще всего в окончательной его численной форме, надо подставить в предложенное уравнение, в результате, вместо нуля, получится какое-то число; надо посмотреть, лежит ли это число в пределах допусков и тех погрешностей, которые имеются в самих данных, т. е. n^2, α, или иных величин, входящих в уравнение. Если лежит — точность результата достаточна, если не лежит — надо искать результат более точный, так поступал знаменитый Адамс.

О ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ СЖАТЫХ СТОЕК ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ

§ 1. В руководствах по сопротивлению материалов обыкновенно излагается данная Эйлером упрощенная теория продольного изгиба сжатых стоек и выводятся его формулы для величины предельной нагрузки, при которой прямолинейная форма равновесия теряет устойчивость. У техника и инженера сами собою возникают вопросы о том, что на самом деле произойдет со стойкой, когда нагрузка превысит Эйлеров предел, какова тогда форма или формы, если их несколько, равновесия, как велик будет «боковой прогиб» и «усадка» стойки, каковы будут эти величины, если нагрузка «весьма мало» превысит предельную, будут ли тогда «малая» усадка и «малый» прогиб того же порядка малости, как и превышение нагрузки, или иного и какого именно.

Однако эти вопросы не находят освещения в известной мне технической литературе по кораблестроению и в обычных руководствах по сопротивлению материалов, в которых лишь иногда упоминается, что решение подобных вопросов требует применения теории эллиптических функций, которая в обычный объем курсов технических и инженерных училищ не входит.

Действительно, обращаясь к руководствам по теории эллиптических функций, мы, напр., в томе II знаменитого сочинения G. Halphen'a — «Traité des Fonctions elliptiques», находим подробное рассмотрение общей теории изгиба тонкого стержня, но, главным образом, не в смысле технических приложений, а как геометрической задачи, представляющей поучительный пример приложения эллиптических функций и притом в их Вейерштрассовой форме. При этом изложении предполагается, что читатель предварительно изучил весь громадный том I сочинения Halphen'a, в котором дается теория тех функций, которыми он пользуется.

В более элементарных руководствах, напр.: L. Levy — «Précis élémentaire des Fonctions elliptiques», или P. Appell et E. Lacour — «Principes de la

théorie des Fonctions elliptiques», также излагается эта теория, в последнем даже весьма подробно, но опять-таки как геометрическая задача на применение, главным образом, функций Вейерштрасса, хотя в § 126 простейший случай изгиба решен и в функциях Якоби.

В классическом руководстве по теории упругости A. Love задача о стойках решена в функциях Якоби, но формулы не приведены к удобному для численных вычислений и пользованию готовыми таблицами виду и недостаточно освещена наиболее важная для приложений в технике сторона дела.

В руководстве J. Prescott'a — «Applied Elasticity», весьма подробно изложена теория Эйлера, и в §§ 88—89 излагается общая теория упругой линии и показывается ее связь с задачей о колебаниях маятника, но вопрос не доводится до конца, так как не развиты формулы для вычисления координат точек кривой, представляющей формы равновесия стойки, хотя фиг. 48 и 49, изображающие две типичные формы, вычерчены правильно. Вместе с тем по разложению в ряд полного эллиптического интеграла первого рода получается значение критической нагрузки, данное Эйлером.

Таким образом Prescott дает приблизительно то, что изложено в начале статьи Лагранжа — «Sur les figures des colonnes» (Oeuvres, t. II), так как именно в этой статье Лагранж выразил через эллиптический интеграл первого рода ординату первоначально прямой стойки при ее продольном изгибе. Еще более изящный прием интегрирования уравнения изгиба он дал в статье «Sur la force des ressorts pliés» (Oeuvres, t. III).

Во времена Лагранжа таблиц эллиптических интегралов еще не было (они изданы Лежандром в 1826 г., т. е. через 13 лет после смерти Лагранжа и через 56 лет после его статьи о форме колонн), но теперь эти таблицы в сокращенных извлечениях общедоступны,[1] поэтому естественно для практических приложений задачу о формах равновесия стоек и задачу об упругой линии вообще решать в эллиптических интегралах, для которых есть готовые таблицы, а не в эллиптических функциях, для которых таблиц нет.

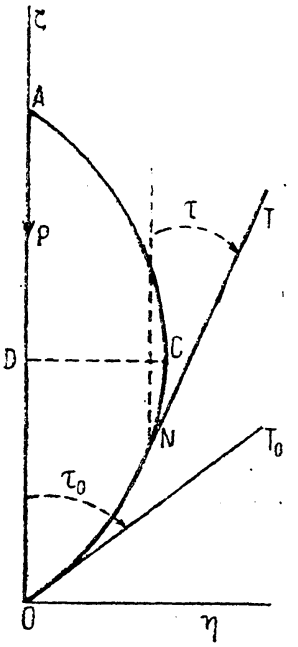
В этой статье я и показываю такое решение задачи о формах равновесия стоек при обычных в технике условиях закрепления концов. Решение это совершенно не требует сложного аппарата теории эллиптических функций, достаточно самого элементарного понятия об эллиптических интегра-

[1] Таблицы Лежандра недавно полностью переизданы в Германии под заглавием: «Legendr'es Tafeln der elliptischen Integrale, herausgegeben von. Fr. Emde» (K. Wittwerr, Stuttgard, 1931).

лах, в сущности сводящееся к приведению их в простейшем случае к тому каноническому виду, для которого Лежандром 100 лет тому назад составлены таблицы, и к пользованию этими таблицами.

Вместе с тем показывается простейший способ вычерчивания форм равновесия стойки, ибо для техника чертеж гораздо нагляднее всяких формул выясняет сущность дела.

§ **2.** Итак, рассмотрим нашу задачу в технической ее постановке: дана первоначально прямолинейная стойка OA (фиг. 1), к верхнему концу которой приложена направленная вертикально вниз нагрузка P, требуется определить, сохранит ли стойка свою прямолинейную форму (чистое сжатие), или, вследствие неустойчивости этой формы, примет криволинейную форму равновесия OCA и тогда — какую именно.



Фиг. 1.

Для полной определенности задачи необходимо еще указать способы закрепления концов стойки; обычные способы таковы:

1) Нижний конец O подперт, верхний A удерживается на оси $O\zeta$ (вертикальной) и может перемещаться лишь по этой оси.

2) Нижний конец O заделан, верхний A свободен.

3) Оба конца заделаны.

4) Один конец заделан, другой — подперт.

§ **3.** Начнем с простейшего 1-го случая и положим, что стойка приняла показанную на фиг. 1 форму равновесия, не имеющую точек перегиба и не пересекающую ось $O\zeta$.

Возьмем сечение N, определяемое длиною дуги $ON = \sigma$ нейтральной оси, форму которой только и рассматриваем. Сделаем следующие обозначения: ζ, η — координаты точки N, l — длина стойки, I — наименьший момент инерции площади сечения ее, перпендикулярно к оси коего и возьмем плоскость чертежа, E — модуль упругости материала, ρ — радиус кривизны кривой ONA в точке N, тогда уравнение равновесия будет

$$EI\frac{1}{\rho} = M \qquad (*)$$

где M — изгибающий момент в точке N:

$$M = -P\eta$$

вместе с тем

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2\eta\, d\zeta - d^2\zeta\, d\eta}{d\sigma^3}$$

$$d\eta^2 + d\zeta^2 = d\sigma^2$$

Введем, вместо переменных ζ, η, σ, ρ, переменные z, y, s, r, определяемые равенствами:

$$\zeta = lz, \quad \eta = ly, \quad \sigma = ls, \quad \rho = lr$$

положим

$$\frac{Pl^2}{EI} = 2a^2$$

и будем производные по переменной s обозначать значками, тогда уравнение равновесия примет вид

$$y''z' - z''y' = -2a^2 y \tag{1}$$

вместе с тем будет

$$z'^2 + y'^2 = 1 \tag{2}$$

Из уравнения (2) следует

$$z'z'' + y'y'' = 0$$

отсюда имеем

$$y'' = -\frac{z''z'}{y'}$$

и, подставив эту величину в уравнение (1), получим на основании уравнения (2):

$$z'' = 2a^2 yy' \tag{3}$$

и по интегрировании:

$$z' = h + a^2 y^2 \tag{4}$$

где h есть произвольная постоянная, геометрическое значение которой есть

$$h = z_0' = \cos\tau_0$$

где τ_0 есть наклонение касательной OT_0 к оси $O\zeta$. На основании уравнения (2) имеем

$$y' = \sqrt{1 - z'^2} = \sqrt{1 - (h + a^2 y^2)^2} =$$
$$= \sqrt{[1 - h - a^2 y^2] \cdot [1 + h + a^2 y^2]}$$

а так как

$$y' = \frac{dy}{ds}$$

то будет

$$ds = \frac{dy}{\sqrt{(1-h-a^2y^2)(1+h+a^2y^2)}}$$

причем перед корнем взят знак +, ибо при возрастании дуги s ордината y также возрастает, пока мы не дойдем до вершины C, соответствующей значению $s = \frac{1}{2}$, ибо очевидно, что кривая имеет ось симметрии CD.

Так как $h < 1$, то положим:

$$1-h = f^2; \quad 1+h = g^2$$

тогда будет

$$s = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(g^2+a^2y^2)(f^2-a^2y^2)}} \tag{5}$$

Чтобы привести этот интеграл к каноническому виду, полагаем

$$ay = f\cos\varphi \tag{6}$$

тогда:

$$a\,dy = -f\sin\varphi\,d\varphi$$

$$\sqrt{f^2-a^2y^2} = f\sin\varphi; \quad \sqrt{g^2+a^2y^2} = \sqrt{2-f^2\sin^2\varphi}$$

положив

$$k^2 = \frac{f^2}{2} \tag{7}$$

получим

$$\sqrt{2}as = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{5'}$$

Лежандр, составляя свои таблицы, положил

$$k = \sin\theta \tag{8}$$

и, с аргументами θ и φ от 0 до 90°, составил таблицы функций

$$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}}$$

и

$$E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}\cdot d\varphi$$

называемых эллиптическими интегралами первого и второго вида.

При таком обозначении уравнение (5′) напишется:

$$\sqrt{2}ds = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(\varphi) \tag{9}$$

Величины $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$, которые зависят, очевидно, только от k, обозначают через K и E, тогда уравнение (9) напишется так:

$$K - \sqrt{2}as = F(\varphi) \tag{10}$$

Пользуясь таблицами Лежандра, которые в извлечении можно найти, напр., в книге L. Levy, упомянутой выше, по *известному* значению «модуля» k находится K, а затем по аргументу φ вычисляется величина y по формуле

$$y = \frac{f}{a}\cos\varphi = \frac{k\sqrt{2}}{a}\cos\varphi \tag{11}$$

Чтобы найти z, обращаемся к уравнению (4), из которого следует

$$z' = h + f^2\cos^2\varphi = 1 - 2k^2\sin^2\varphi$$

так что будет

$$z = \int_0^s (1 - 2k^2\sin^2\varphi)\,ds = s - 2k^2\int_0^s \sin^2\varphi\,ds$$

Но, на основании уравнения (9),

$$ds = -\frac{1}{\sqrt{2}a}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

следовательно

$$z = s + \frac{\sqrt{2}}{a}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\frac{k^2\sin^2\varphi\cdot d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

Но, очевидно, будет

$$\int_0^{\varphi}\frac{\sqrt{k^2\sin^2\varphi\cdot d\varphi}}{1-k^2\sin^2\varphi} =$$

$$= \int_0^{\varphi}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\cdot d\varphi - \int_0^{\varphi}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi = F(\varphi) - E(\varphi)$$

значит

$$z = s - \frac{\sqrt{2}}{a}\left[F(\varphi) - E(\varphi)\right]_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} = s - \frac{\sqrt{2}}{a}\left[K - E - (F(\varphi) - E(\varphi))\right]$$

Заменив s его величиною, следующей из уравнения (10), получим на основании формулы (13), приведенной ниже:

$$z = \frac{1}{2K}[(2E - K) - (2E(\varphi) - F(\varphi))] \tag{12}$$

Уравнениями (11) и (12) форма стойки вполне определяется, когда модуль k *известен*, ибо φ можно рассматривать как переменную независимую, границы изменяемости которой определяются по уравнению (10).

Остается определить значение модуля k по заданной нагрузке и элементам стойки.

§ 4. Для определения значения модуля k стоит только положить в уравнении (10) $s = \frac{1}{2}$, при каковом значении угол $\varphi = 0$, значит $F(\varphi) = F(0) = 0$, и мы получим

$$K = \frac{a}{\sqrt{2}} \tag{13}$$

по этому значению величина k непосредственно и найдется по таблице Лежандра.

Тогда уравнение (11) напишется так:

$$y = \frac{k}{K}\cos\varphi \tag{11'}$$

Из формулы

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$$

очевидно, что при всяком k

$$K > \frac{\pi}{2}$$

и лишь при $k = 0$ будет

$$K = \frac{\pi}{2}$$

Значит, равенство (13) может иметь место лишь при условии

$$\frac{a}{\sqrt{2}} > \frac{\pi}{2}$$

т. е.

$$2a^2 > \pi^2 \tag{13'}$$

но

$$2a^2 = \frac{Pl^2}{EI} \tag{*}$$

следовательно, чтобы могла существовать криволинейная форма равновесия, необходимо, чтобы было

$$P > \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

как это следует из неравенства (13′) и формулы (*).

В этом случае при $s=0$ будет

$$y = 0 \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

ибо k не равно нулю.

Если же будет

$$P \leqq \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{14}$$

то из условия, чтобы при $s = 0$ было $y = 0$, следует

$$k = 0$$

и значит, при всяком значении s будет

$$y = 0 \quad \text{и} \quad z = s$$

т. е. стойка сохраняет прямолинейную форму равновесия, в этом случае единственную.

Условие (14) и есть как раз условие Эйлера. Нетрудно видеть, что если к условию

$$P > \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

или, что то же,

$$\frac{a}{\sqrt{2}} > \frac{\pi}{2}$$

присовокупить

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < 2\,\frac{\pi}{2}$$

т. е.

$$P < 4\pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

то рассматриваемая форма, не пересекающая в промежутке от $s = 0$ до $s = 1$ оси $O\zeta$, есть единственная криволинейная форма равновесия, которая тогда и есть форма устойчивая, прямолинейная же — неустойчивая.

Так как для нас представляет наибольший интерес лишь та форма равновесия, при которой нагрузка лишь «мало» превышает Эйлерову, то мы и ограничимся случаем, когда

$$2\frac{\pi}{2} > \frac{a}{\sqrt{2}} > \frac{\pi}{2}$$

т. е.

$$4\pi^2\frac{EI}{l^2} > P > \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

и форма равновесия определяется равенствами:

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{a}{\sqrt{2}} \\ y &= \frac{k}{K}\cos\varphi \\ z &= \frac{1}{2K}[(2E-K)-(2E(\varphi)-F(\varphi))] \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

Координаты вершины C получим положив

$$s = \frac{1}{2}$$

чему соответствует $\varphi = 0$, так что

$$\left.\begin{aligned} y_c &= \frac{k}{K} \\ z_c &= \frac{E}{K} - \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (II)$$

Значения y и z для s от $\frac{1}{2}$ до 1, т. е. для верхней половины стойки, следуют из (I) по условию симметрии относительно оси CD.

Заметим еще, что из формулы

$$dz = ds \cdot \cos\tau$$

следует

$$z' = \cos\tau$$

и из формулы

$$z' = 1 - 2k^2\sin^2\varphi$$

следует:

$$1 - \cos\tau = 2\sin^2\frac{\tau}{2} = 2k^2\sin^2\varphi$$

т. е.

$$\sin\frac{\tau}{2} = k\sin\varphi \tag{15}$$

что доставит значение угла наклонения касательной в любой точке кривой, отсюда же видно, что при $s = 0$, т. е. в точке 0, для которой $\varphi = \frac{\pi}{2}$, будет

$$\sin\frac{\tau_0}{2} = k = \sin\theta$$

т. е.

$$\tau_0 = 2\theta \tag{15'}$$

Из формулы (II) видно, что для точки A будет:

$$y_a = y_0 = 0$$
$$z_a = 2z_c = 2\frac{E}{K} - 1$$

и значит, «оседание» верхнего конца стойки:

$$m = 1 - z_a = 2\left[1 - \frac{E}{K}\right] \tag{16}$$

Все эти величины представляют числа отвлеченные; чтобы получить по ним линейные размеры, т. е. величины η, ζ, η_c, ζ_c, μ, надо длину балки l умножить на числа: y, z, y_c, z_c, m.

§ **5.** Покажем теперь на примере порядок вычисления по формуле (I). Пусть будет

$$a = \frac{\pi}{2}\cdot 1{,}1 = 1.7279$$

так что

$$P = 1.21\frac{\pi^2 EI}{l^2} = 1.21P_e$$

т. е. P превышает на 21% Эйлерову нагрузку P_e.

В таблице значений K и E, соответствующих аргументу θ, находим:

θ	K	E
. . .	. . .	. . .
34°	1.7214	1.4397
35°	1.7313	1.4322

значит при

$$K = 1.7279$$

будет

$$\theta = 34^\circ + 60' \cdot \frac{65}{99} = 34^\circ 39'$$

так что

$$k = \sin 34^\circ 39' = 0.5686$$

и при

$$\theta = 34^\circ 39'$$

будет

$$E = 1.4397 - \frac{39}{60} \cdot 75 = 1.4348$$

значит координаты вершины суть:

$$y_c = \frac{k}{K} = \frac{0.5686}{1.7279} = 0.329$$

$$z_c = \frac{E}{K} - \frac{1}{2} = \frac{1.4348}{1.7279} - 0.5 = 0.330$$

Эти значения выражены в долях длины l, значит:

$$\eta_c = 0.329 l$$
$$\zeta_c = 0.330 l$$
$$\mu_c = l - 2\zeta_c = 0.340 l$$

Чтобы получить координаты промежуточных точек, надо задавать значения угла φ от 90° до 0 и по таблицам Лежандра приискать при найденном θ соответствующие значения $F(\varphi)$ и $E(\varphi)$ и применить формулу (I), присовокупив к ним формулу

$$\sin \frac{\tau}{2} = \sin \theta \sin \varphi = k \sin \varphi \qquad (15)$$

чтобы иметь уклон касательной.

Таким образом, положив φ равным

$$15^\circ,\ 30^\circ,\ 45^\circ,\ 60^\circ,\ 75^\circ$$

при $\theta = 30^\circ$ и 35°, находим в сокращенных таблицах Лежандра, приведенных в книге L. Levy, нижепоказанные значения $F(\varphi)$ и $E(\varphi)$, пользуясь которыми по простой интерполяции составляем требуемые нам значения при угле $\theta = 34^\circ 39'$.

(φ)	$F(\varphi)$			$F(\varphi)$		
	$\theta = 30°$	$\theta = 35°$	$\theta = 34°39'$	$\theta = 30°$	$\theta = 35°$	$\theta = 34°39'$
15°	0.2625	0.2628	0.2628	0.2611	0.2608	0.2608
30	0.5294	0.5313	0.5311	0.5179	0.5161	0.5163
45	0.8044	0.8109	0.8101	0.7672	0.7613	0.7618
60	1.0896	1.1049	1.1029	1.0076	0.9945	0.9962
75	1.3846	1.4134	1.4102	1.2399	1.2167	1.2197

По этим значениям и уже известным

$$y_c = 0.329; \quad K = 1.7279; \quad E = 1.4348$$

составляем такую сводную табличку:

φ	y	ε	τ
90°	0	0	69°18′
75	0.085	0.032	66 30
60	0.165	0.073	56 20
45	0.232	0.138	46 30
30	0.285	0.185	33 00
15	0.318	0.255	16 50
0	0.329	0.330	0 0

Имея координаты этих точек и уклоны касательных в них, можем с большою точностью начертить форму кривой, которая и показана на фиг. 2.

В виду столь значительного прогиба и оседания

$$\eta_c = 0.329l, \quad m = 0.340l$$

когда нагрузка превышает Эйлерову всего на 21%, составим еще значения прогибов и оседания при

$$a = 1.01 \frac{\pi}{2}$$

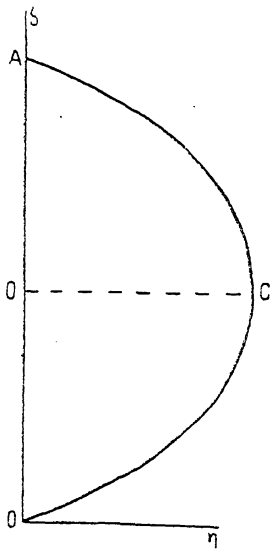
и

$$a = 1.001 \frac{\pi}{2}$$

т. е. при нагрузках, превышающих Эйлерову на 2% и на 0.2%, получим, совершенно подобно предыдущему, таблицу на стр. 193.

a	P	y_c	z_c	m
$1.01\ \frac{\pi}{2}$	$1.02\ P_e$	0.125	0.480	0.040
$1.001\ \frac{\pi}{2}$	$1.002\ P_e$	0.039	0.49957	0.00086

Значительная величина прогиба и оседания при превышении всего на $2^0/_0$ Эйлеровой нагрузки показывает, насколько важно не превосходить ее, ибо если эта нагрузка превзойдена, то или сооружение разрушается, как это было, напр., при знаменитом крушении моста через р. св. Лаврентия в Квебеке при постройке его, или же стойка, восприняв нагрузку, практически равную Эйлеровой, получит такую усадку, что остальной избыток нагрузки будет восприниматься не этой стойкой, а прочими более жесткими частями сооружения. Было бы слишком долго излагать здесь, как с этим обстоятельством считаются и как его учитывают в кораблестроении.



Фиг. 2.

Нетрудно указать причину значительных прогибов балки при малом превышении Эйлеровой нагрузки и составить приближенные формулы для вычисления координат вершины и оседания, не пользуясь таблицами Лежандра.

При малых значениях модуля k величина K разлагается в следующий быстро сходящийся ряд, в котором достаточно удержать лишь первые члены:

$$K = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \ldots\right)$$

поэтому, когда мы берем

$$P = (1 + 2\varepsilon)\,P_e$$

то соответствующее значение K при малом ε будет

$$K = (1 + \varepsilon)\,\frac{\pi}{2}$$

следовательно

$$\frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 = \varepsilon$$

значит

$$k = 2\sqrt{\varepsilon}\left(1 - \frac{9}{32}\varepsilon\right)$$

следовательно

$$y_c = \frac{k}{K} = \frac{4}{\pi}\sqrt{\varepsilon}\left(1 - \frac{41}{32}\varepsilon\right) = 1.273\sqrt{\varepsilon}(1 - 1.28\varepsilon)$$

Для величины E имеется разложение

$$E = \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4 - \ldots\right]$$

поэтому будет приближенно:

$$\frac{E}{K} = 1 - \frac{1}{2}k^2 - \frac{3}{16}k^4 = 1 - 2\varepsilon - 3\varepsilon^2$$

следовательно:

$$z_c = \frac{1}{2} - 2\varepsilon - 3\varepsilon^2$$

$$m = 4\varepsilon - 6\varepsilon^2$$

Так, напр., при

$$\varepsilon = 0.01$$

будет:

$$y_c = 0.127\,(1 - 0{\cdot}0013) = 0.125$$
$$z_c = 0.500 - 0.020 = 0.480$$
$$m = 1 - 0.960 = 0.040$$

что мы имели и по таблицам Лежандра.

Из этих формул видно, что когда превышение нагрузки пропорционально малой величине ε, то прогиб, выражаясь формулою

$$y_c = 1.27\sqrt{\varepsilon}(1 - 1.28\varepsilon)$$

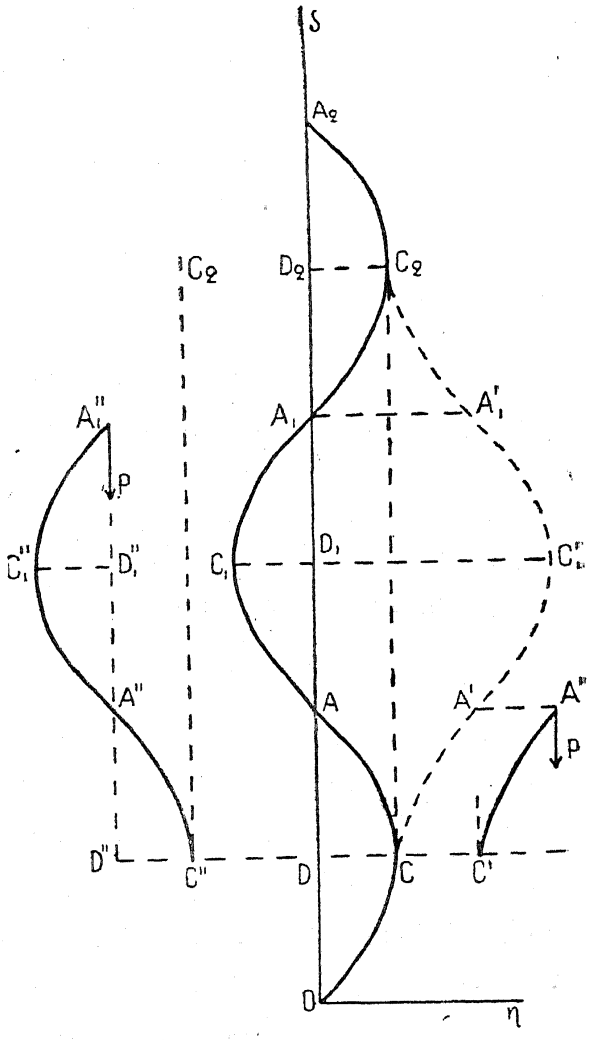
пропорционален $\sqrt{\varepsilon}$, т. е. порядок «малости» его есть половинный от порядка малости увеличения нагрузки; оседание же — одинакового с увеличением нагрузки порядка малости.

§ **6.** Начертив, на основании указанных в предыдущем параграфе вычислений, форму равновесия стойки при указанном закреплении ее концов и соответствующем действующей нагрузке значении параметра a, можно начертить без всяких вычислений формы равновесия стойки при всех прочих условиях закрепления концов.

В самом деле, пусть на фиг. 3 кривая OCA представляет форму заданной стойки, длиною l, под действием нагрузки P.

В точке A изгибающий момент равен нулю, к ней приложена вертикальная сила P, направленная вниз.

Проведем в точке C касательную CT и примем ее за новую ось ζ_1. В точке C изгибающий момент равен $P\eta_c$, этот момент, вместе с реакцией $-P$, представляет действие нижней части OC стойки на верхнюю ее часть CA, ясно, что если часть OC убрать, а в точке C приложить пару с моментом $P\eta_c$ и реакцию $-P$, то равновесие не нарушится, а тогда можно рассматривать, что стойка CA, длина коей $l_1 = \frac{l}{2}$, заделана в точке C вертикально и к свободному ее концу A приложена сила P. Значит, кривая CA или симметричная с нею кривая CA' представляет форму равновесия такой стойки. Эта форма, очевидно, сразу вычерчивается по шаблону OCA.



Фиг. 3.

Заметив, что для стойки OA предельная нагрузка есть

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

видим, что эта же нагрузка есть предельная и для стойки CA', длина коей $l_1 = \frac{1}{2} l$, поэтому, заменив l его величиною $2l_1$, имеем

$$P_e = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{l_1^2}$$

в каковом виде обыкновенно эту формулу и приводят.

Само собою разумеется, что нетрудно простым преобразованием координат перейти от уравнения кривой OC, отнесенной к осям $O\eta$ и $O\zeta$, к уравнению кривой CA', но проще делать это прямо графически.

Нарастим нашу основную стойку OA еще двумя AC_1A_1 и $A_1C_2A_2$, перенесем нагрузку в точку A_2 и вообразим, что все три стойки в точках A, A_1, A_2 скреплены, тогда имеем форму $OCA\,C_1A_1C_2A_2$ стойки OA_2, длина которой $3l$; эта форма пересекает ось $O\zeta$, по направлению которой действует нагрузка в точках A и A_1, причем это суть точки перегиба нашей кривой, ибо в них изгибающий момент и кривизна равны нулю.

Проведем в точке C касательную, которая будет касательной и в точке C_2.

В точках C и C_2, на участках CC_1C_2, от частей OC и A_2C_2 происходят реакции, равные P, и изгибающие моменты $M=P\eta_c$. Если части OC и A_2C_2 убрать, приложив в точках C и C_2 упомянутые реакции и изгибающие пары, то стойка $CAC_1A_1C_2$ останется в равновесии. Ясно, что это есть форма равновесия стойки, длиною $l_1=2l$, заделанной в точках C и C_2 и подверженной нагрузке P.

Очевидно, что и симметричная с нею кривая $CA'C_1'A_1'C_2$ есть такая же форма равновесия: вычерчивание этих форм, когда вычерчена форма OCA нашей основной стойки, настолько очевидно, что пояснений не требует.

Эйлерова нагрузка

$$P_e=\frac{\pi^2EI}{l^2}$$

предельная для основной стойки, является предельной и для произведенных от нее.

Заменив в предыдущей формуле величину l ее значением $\frac{1}{2}l_1$, получим

$$P_e=\frac{4\pi^2EI}{l_1^2}$$

как величину Эйлеровой нагрузки для стойки, которая заделана в обоих концах своих и длина коей l_1.

Вообразим нашу заделанную в обоих концах стойку $CAC_1A_1C_2$; в точке A_1 изгибающий момент равен нулю, в ней действует только вертикальная реакция P, поэтому, оставив точку C заделанной, уберем часть A_1C_2 стойки, приложив взамен в точке A_1 силу P, направленную вертикально вниз, стойка CAC_1A_1 будет в равновесии, и значит, эта кривая пред-

ставит форму равновесия стойки, длина которой $l_1 = \frac{3}{2} l_1$, которая заделана в точке C, имеет свободный конец A_1, на который действует вертикальная сила P.

Предельная нагрузка для такой формы изгиба попрежнему есть

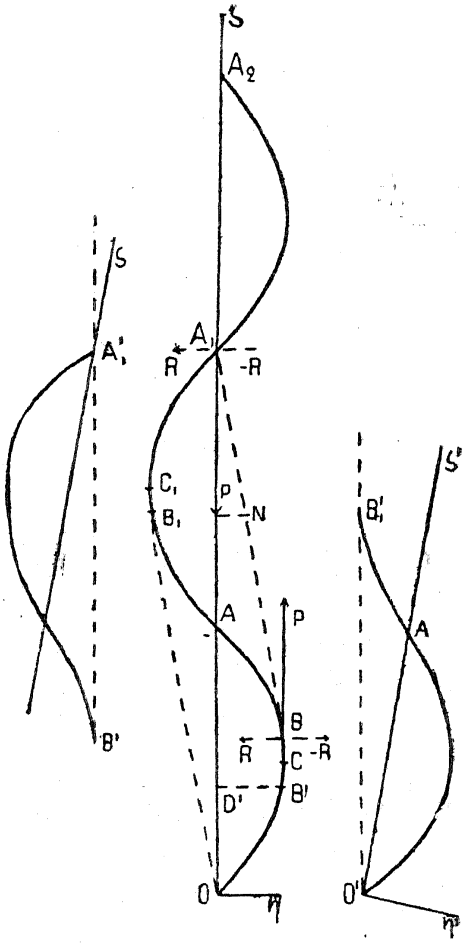
$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

или, заменив l его величиной $\frac{2}{3} l_1$, получим

$$P_e = \frac{9}{4} \pi^2 \frac{EI}{l_1^2}$$

От формы равновесия $OCAC_1A_1$ можно перейти к определению формы равновесия, когда один конец стойки заделан, другой — подперт.

Положим, что заделан нижний конец стойки. Возьмем точку A_1, в этой точке приложена сила P по *направлению* A_2A, и точка A_2, по предположению, остается на этой прямой. Проведем через точку A_1 касательную к кривой $OCAC_1A_1$, пусть B есть точка касания, которая расположится близ точки C. Обозначим через α — угол, составляемый этой касательной с осью $O\zeta$, приложим в точках A и B по две силы R и $-R$, направленные горизонтально в противоположные стороны, причем $R = Q \times$ $\times \operatorname{tg} \alpha$ — равновесие системы не нарушится.



Фиг. 4.

Обозначим ординату точки B через η_b, тогда изгибающий момент в точке B, $M_b = -P \cdot \eta_b$ и реакция от части AC_1 стойки равна $-P$. Вообразив, что в точке B приложены эта сила $-P$ и момент $-P\eta_b$, можем часть OC убрать. Точно так же, вообразив, что в точке A_1 приложена сила P, можем часть стойки выше A_1 убрать и считать часть BAC_1A_1 свободной и находящейся в равновесии под действием приложенной системы сил и пары M, как это показано на фиг. 4. Очевидно, что можно всю эту фигуру, сохраняя взаимное расположение и величины сил, поворачивать как угодно в ее плоскости. Повернем же ее так, чтобы прямая BA_1 стала вертикальной (фиг. 4), тогда, вообразив, что в точке A_1 стойка подперта и в точке B

заделана по направлению BA, сложим силы P и R, в точке B приложенные, в одну силу N, которая будет направлена по BA, увидим, что кривая BC_1A_1 представляет форму равновесия стойки, подпертой в точке A и заделанной в точке B, под действием силы N, направленной по прямой BA.

Совершенно так же увидим, что кривая $OCAB_1$, где B_1 есть точка касания касательной, проведенной через O, есть форма равновесия стойки, заделанной в B_1 и подпертой в точке O.

Длина l_1 стойки в этом случае есть $OBAB_1 = BC_1A_1 = \frac{3}{2}l - CB = l_1$;

эта длина *графически* определяется просто и с достаточною точностью, аналитически же требует решения сложных трансцендентных уравнений.

Эйлерова нагрузка в этом случае определяется формулою

$$P_e = \frac{\gamma^2 \cdot EI}{l^2} \qquad (*)$$

где γ есть наименьший корень уравнения

$$\operatorname{tg}\mu = \mu$$

этот наименьший корень есть

$$\gamma = 4.4934$$

Заметив, что

$$\gamma^2 = (4.49)^2 = 20.19$$
$$2\pi^2 = 19.75$$

вместо формулы (*), по аналогии с прочими, берут

$$P_e = \frac{2\pi^2 EI}{l_1^2}$$

Таким образом для этого случая должно иметь место равенство

$$\frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{2\pi^2 EI}{l_1^2}$$

из которого следует

$$l_1 = \sqrt{2}l = 1.414l$$

значит

$$CB = (1.500 - 1.414)l = 0.086l$$

или более точно

$$\frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\gamma^2 \cdot EI}{l_1^2}$$

откуда

$$l_1 = \frac{\gamma}{\pi}l = 1.4303l$$

и

$$l = 0.6991 \approx 0.7l$$

т. е.

$$CB = (1.5000 - 1.4303)l = 0.0697l$$

или кругло

$$CB = 0.07l$$

Сопоставляя полученные результаты, имеем следующую табличку соотношений между длиною стойки l_1 и длиною l стойки, оба конца которой подперты и по форме которой сейчас же вычерчивается и форма равновесия стойки l_1 под действием заданной нагрузки.

1) Оба конца подпертые: $l = l_1$.

2) Один конец свободен, другой — заделан: $l = 2l_1$.

2а) Один конец свободен, другой—заделан, форма равновесия с точкою перегиба: $l = \frac{2}{3} l_1$.

3) Оба конца заделаны: $l = \frac{1}{2} l_1$.

4) Один конец заделан, другой — подперт: $l = 0.7l$.

Определив таким образом длину l, вычисляем по заданной нагрузке P величину a по формуле

$$2a^2 = \frac{Pl^2}{EI}$$

если окажется, что

$$a < \frac{\pi}{\sqrt{2}}; \quad \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2.2214\right)$$

то существует только прямолинейная форма равновесия.

Если окажется

$$2\frac{\pi}{\sqrt{2}} > a > \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

то прямолинейная форма равновесия *неустойчива*, и кроме нее существует *одна* криволинейная форма равновесия, вид и вычерчивание которой и показаны выше.

Если бы оказалось

$$a > \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

то, кроме упомянутой криволинейной формы, существуют другие формы равновесия, о которых мы ниже скажем лишь несколько слов, ибо эти формы технического значения не имеют.

Определение этих форм может быть выполнено подобно изложенному, не пользуясь эллиптическими функциями, а лишь простейшими эллиптическими интегралами.

§ 7. Разберем несколько подробнее «основную» форму равновесия при условии

$$a > \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

предполагая, что a изменяется от величины, весьма мало превышающей его низший предел, и возрастает неопределенно.

Уравнения (I) упругой линии

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{a}{\sqrt{2}} \\ y &= \frac{k}{K}\cos\varphi \\ z &= \frac{1}{2K}[(2E-K)-(2E(\varphi)-F(\varphi))] \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

в виду того, что постоянные

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{и} \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

суть функции модуля k, представляют семейство кривых, зависящих от одного параметра, за который можно принять k или a. Проще проследить за последовательной изменяемостью формы этих кривых, задавая модуль k или, точнее говоря, модулярный угол θ, а не величины a, ибо в таблицах функций $F(\varphi)$ и $E(\varphi)$ эти функции даны с аргументами θ и φ через 1° у Лежандра, в сокращенном же извлечении L. Levy углы θ даются через 5°, углы φ — через 1°.

Мы будем пользоваться сокращенными таблицами и возьмем следующие значения угла θ:

$$5°,\ 15°,\ 45°,\ 65°,\ 75°,\ 80°,\ 85°,\ 89°54'$$

последнее число потому, что оно есть наибольшее в таблицах L. Levy.

Углы φ берем:

$$0°,\ 15°,\ 30°,\ 45°,\ 60°,\ 75°,\ 90°$$

и для последней кривой еще $\varphi = 87°$, чтобы иметь для более точного ее очертания еще одну точку там, где эта точка нужна.

Вычисления, само собою разумеется, производимые логарифмической линейкой, располагаются как показано в следующих таблицах.

В этих таблицах вычисление всей серии восьми кривых, по шесть точек на каждой половине кривой, приведено полностью в том виде, как оно сделано для вычерчивания этих кривых, причем ни одной цифры не писалось где-либо особо.

1) Основные величины

θ	K	a	a^2	$P : P_e = n$	$k = \sin\theta$	$y_c = \frac{k}{K}$	τ_0
5°	1.5738	2.228	4.964	1.0059	0.0872	0.0554	10°
15	1.5981	2.25	5.06	1.023	0.2588	0.162	30
45	1.8541	2.62	6.86	1.39	0.7071	0.332	90
65	2.309	3.27	10.69	2.17	0.9063	0.392	130
75	2.768	3.91	15.29	3.20	0.9659	0.349	150
80	3.153	4.44	19.71	3.90	09848	0.312	160
85	3.832	5.38	28.94	5.88	0.9962	0.260	170
89°54′	7.737	10.40	108.2	21.90	1.0000	0.128	179°48′

2) $E(\varphi)$

φ \ θ	5°	15°	45°	65°	75°	80°	85°	89°54′
15°	0.5236	0.5232	0.5212	0.5188	0.5180	0.5178	0.5176	1.5176
30	1.0468	1.0442	1.0282	1.0088	1.0034	1.0014	1.0004	1.0000
45	1.5697	1.5612	1.5098	1.4446	1.4258	1.4194	1.4156	1.4142
60	2.0921	2.0736	1.9300	1.8084	1.7616	1.7456	1.7354	1.7320
75	2.6140	2.5822	2.3270	2.0954	1.9984	1.9628	1.9398	1.9318
90	3.1356	3.0883	2.7013	2.3277	2.1528	2.0802	2.0253	2.0000

3) $F(\varphi)$

φ \ θ	5°	15°	45°	65°	75°	80°	85°	89°54′
15°	0.2618	0.2620	0.2633	0.2643	0.2646	0.2648	0.2648	0.2648
30	0.5238	0.5251	0.5356	0.5442	0.5474	0.5483	0.5491	0.5493
45	0.7859	0.7903	0.8260	0.8593	0.8727	0.8774	0.8804	0.8813
60	1.0484	1.0577	1.1424	1.2376	1.2837	1.3014	1.3129	1.3169
75	1.3110	1.3273	1.4879	1.7176	1.8715	1.9468	2.0050	2.0271
90	1.5738	1.5981	1.8541	2.3088	2.7681	3.1534	3.8317	7.7371

4) $2E(\varphi) - F(\varphi)$

φ \ θ	5°	15°	45°	65°	75°	80°	85°	89°54′
15°	0.2618	0.2618	0.2579	0.2545	0.2544	0.2530	0.2528	0.2528
30	0.5230	0.5191	0.4926	0.4646	0.4560	0.4531	0.4513	0.4507
45	0.7838	0.7709	0.6838	0.5853	0.5531	0.5420	0.5352	0.5329
60	1.0437	1.0159	0.7876	0.5708	0.4779	0.4442	0.4225	0.4151
75	1.3030	1.2549	0.8391	0.3778	0.1269	0.0160	—0.0652	—0.0953
90	1.5618	1.4902	0.8472	0.0189	—0.6153	—1.0732	—1.8164	—5.5371
87	—	—	—	—	—	—	—	—1.6453

5) $(2E - K) - (2E(\varphi) - F(\varphi))$

φ \ θ	5°	15°	45°	65°	75°	80°	85°	89°54′
15°	1.3000	1.2284	0.5893	—0.2356	—0.8697	—1.3262	—2.0692	—5.7899
30	1.0388	0.9711	0.3556	—0.4457	—1.0713	—1.5263	—2.2677	—5.9878
45	0.7780	0.7193	0.1634	—0.5664	—1.1684	—1.6152	—2.3516	—6.0700
60	0.5181	0.4743	0.0596	—0.5519	—1.0932	—1.5174	—2.2389	—5.9522
75	0.2588	0.2353	0.0081	—0.3589	—0.7422	—1.0892	—1.7512	—5.4418
90	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
87	—	—	—	—	—	—	—	—3.8918

6) $z = \frac{1}{2K}[(2E - K) - (2E(\varphi) - F(\varphi)]$

φ \ θ	5°	15°	45°	65°	75°	80°	85°	89°54′
0°	0.500	0.463	0.224	—0.0041	—0.1147	—0.1700	—0.2372	—0.357
15	0.416	0.381	0.156	—0.0510	—0.1621	—0.2143	—0.2700	—0.374
30	0.333	0.304	0.094	—0.0964	—0.1995	—0.2421	—0.2960	—0.387
45	0.249	0.225	0.0432	—0.1225	—0.2180	—0.2562	—0.3070	—0.392
60	0.166	0.148	0.0157	—0.1195	—0.2040	—0.2492	—0.2920	—0.384
75	0.083	0.073	0.0021	—0.0777	—0.1385	—0.1727	—0.2288	—0.352
90	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
87	—	—	—	—	—	—	—	—0.251
$2K$	3.1476	3.1962	3.7082	4.6176	5.5362	6.3068	7.6634	15.4742
$\frac{1}{2}K$	0.3201	0.3129	0.2643	0.2165	0.1865	0.1586	0.1305	0.0646

7) Вычисление $y = y_c \cos\varphi$

φ \ θ	$\cos\varphi$	5°	15°	45°	65°	75°	80°	85°	89°54′
0°	1.000	0.0554	0.162	0.332	0.392	0.349	0.312	0.260	0.129
15	0.966	0.0535	0.160	0.321	0.380	0.338	0.301	0.251	0.124
30	0.866	0.0480	0.140	0.287	0.338	0.302	0.270	0.225	0.122
45	0.707	0.0395	0.114	0.235	0.277	0.247	0.221	0.183	0.091
60	0.500	0.0277	0.081	0.166	0.196	0.175	0.156	0.130	0.065
75	0.259	0.0144	0.042	0.086	0.102	0.090	0.081	0.067	0.033
90	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Отсюда простота вычисления по нашим формулам, которые непосредственно следуют из формул, данных Лагранжем 160 лет тому назад, ясна сама собою, между тем, если обратиться к сочинениям по теории эллиптических функций, то, напр., в книге P. Appell'я и E. Lacour'a мы на стр. 205, снимок которой прилагается (фиг. 5), находим формулы, по которым определяются координаты x (наше z) и y упругой линии, при этом в этих формулах наша величина $2a^2$ заменена величиною $\frac{2C}{a^2}$ и, вместо нашей буквы τ, написано θ. Величины $p(u)$ и $\zeta(u)$ суть эллиптические функции Вейерштрасса. Необходимо, однако, заметить, что для этих функций таблиц нет, да и составить их, напр., для функции $p(u)$ невозможно, ибо функция эта зависит еще от двух величин, так что таблица потребовалась бы трехвходная, поэтому при численных вычислениях надо обращаться к таблицам Лежандра, а для этого надо применять последовательно целый ряд формул, показанных на стр. 100—104 книги L. Levy.

Отсюда очевидно, что вычисление по этим формулам координат только *одной* точки потребовало бы во много раз больше работы, нежели приведенное нами вычисление всей серии восьми типичных кривых по шесть точек на каждой. Понятно, почему решение, подобное приводимым в руководствах по теории эллиптических функций, отпугивает техника и инженера от столь простого по существу вопроса, но это не может быть поставлено в упрек названным авторам, ибо они решали не технический вопрос, а имели в виду дать упражнение в применении излагаемых ими теорий.

§ 8. По вычисленным координатам построены показанные на фиг. 6 и 2 кривые, представляющие формы упругого равновесия по мере возрастания нагрузки. Само собою разумеется, что лишь первые типы относятся к стойкам, дальнейшие типы представляют формы равновесия упругой

проволоки, последовательность их ясно видна на фиг. 6 начиная от слегка изогнутой и кончая крайней, при бесконечно большой нагрузке, когда проволока, удерживаемая в точке O и нагруженная в точке A, приняла опять прямолинейную форму, но с «колышкою» в точке C.

Нагрузки, которым соответствуют показанные на таблицах формы равновесия, приведены в таблице основных величин, послуживших для вычисления этих форм. Для ясности приводим их здесь:

№ формы равновесия	Нагрузки $P:P_e=n$	№ формы равновесия	Нагрузки $P:P_e=n$
1	1.0059	6	3.90
2	1.023	7	5.88
3	1.39	8	21.90
4	2.17	9	∞
5	3.20		

Вычерчивание этих фигур выполняется очень просто, если изготовить сперва картонные шаблоны, представляющие половину OC каждой кривой.

Пользуясь теми же шаблонами, вычерчены серии форм равновесия для стойки, заделанной в одном конце (фиг. 6), свободной в другом, который нагружен, а затем серия (фиг. 7) для случая, когда оба конца заделаны.

Заметим, что форма, соответствующая значению модулярного угла $\theta=65°$, почти замкнутая и напоминает лемнискату. Кривая смыкается при таком значении θ, при котором $2E=K$, т. е. при $\theta=65°22.5'$, чему соответствует $\tau_0=130°45'$, для лемнискаты же этот угол равен $135°$.

Совершенно так же, взяв с табл. 1 части кривых CAC_1A_1, получим формы равновесия стойки, заделанной в точке C, нагруженной в точке A_1 и имеющей точку перегиба в точке A. Вычерчивание их очевидно, и производить его нет надобности.

Наконец, проводя из точки O касательную OB, получаем формы равновесия стойки, подпертой в точке O и заделанной по направлению OB в точке B.

По поводу этих последних форм необходимо сделать следующее замечание: уже было упомянуто, что Эйлерова нагрузка выражается в этом случае формулою

$$P_e=\gamma^2\frac{EI}{l^2}$$

TABLEAU DE FORMULES. (*Courbe élastique plane et sans pression.*)

(1) $$\frac{1}{\rho} = 2C\frac{y}{a^2},$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\rho}\sin\theta,$$

(2) $$\frac{dx}{ds} = C\frac{y^2}{a^2} + D.$$

(3) $$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 - \left(C\frac{y^2}{a^2} + D\right)^2$$

(4) $$\frac{y}{a} = -\frac{1}{2}\frac{p'u}{pu - e_2},$$

(5) $$(pu - e_2)[p(u + \omega_2) - e_2] = (e_1 - e_2)(e_3 - e_2),$$

(6) $$(pu - e_2) + [p(u + \omega_2) - e_2] = \frac{y^2}{a^2} - 3e_2.$$

(7) $$\left(\frac{y^2}{a^2} - 3e_2\right)^2 - 4(e_2 - e_1)(e_2 - e_3) = [p(u + \omega_2) - pu]^2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{dy}{du}\right)$$

(8) $$\left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{D}{C}\right)^2 - \frac{1}{C^2} = -\frac{1}{C^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2,$$

(9) $$a\,du = C\,ds,$$

(10) et (11) $$\frac{i}{a}\frac{dx}{du} = \frac{y^2}{a^2} - 3e_2 = pu + p(u + \omega_2) - 2e_2$$

(12) $$\frac{x}{a} = i[\zeta u + \zeta(u + \omega_2) + 2ue_2] + \text{const.},$$

(13) $$u = -\frac{\omega_2}{2} + it,$$

(14) $$a\,dt = C\,ds,$$

(15) $$\frac{x}{a} = i\left[\zeta\left(\frac{\omega_2}{2} + it\right) - \zeta\left(\frac{\omega_2}{2} - it\right)\right] - 2e_2 t$$

(16) $$\frac{y}{a} = -\frac{1}{2}\frac{p'\left(-\frac{\omega_2}{2} + it\right)}{p\left(-\frac{\omega_2}{2} + it\right) - p\omega_2},$$

(17) $$\frac{y - y_0}{a} = \frac{1}{2}\frac{p'\frac{\omega_2}{2}}{p(it) - p\frac{\omega_2}{2}}$$

Фиг. 5.

причем γ есть наименьший корень уравнения

$$\operatorname{tg}\mu = \mu$$

По симметрии и способу построения кривой Фиг. 4 видно, что отложив длину $CB' = CB$, мы получим точку B', соответствующую значению $\varphi = \omega$, причем ω — небольшой угол; пусть τ есть уклон касательной в этой точке, тогда, как мы видели:

$$\sin\frac{\tau}{2} = k\sin\omega$$

$$\cos\frac{\tau}{2} = \sqrt{1 - k^2\sin^2\omega}$$

$$\sin\tau = 2k\sin\omega\cdot\sqrt{1 - k^2\sin^2\omega}$$

$$\cos\tau = 1 - 2k^2\sin^2\varphi$$

Координаты точки B суть:

$$z_b = 2z_c + OD' = 2z_c + \frac{1}{2K}[2E - K - (2E(\omega) - F(\omega))] =$$

$$= 3z_c - [2E(\omega) - F(\omega)]$$

$$y_b = -D'B' = -\frac{k}{K}\cos\omega$$

Уравнение касательной в точке B' есть

$$(Y - y_b)\cos\tau + (Z - z_b)\sin\tau = 0$$

Чтобы эта касательная проходила через точку O, необходимо условие

$$y_b\cos\tau + z_b\sin\tau = 0$$

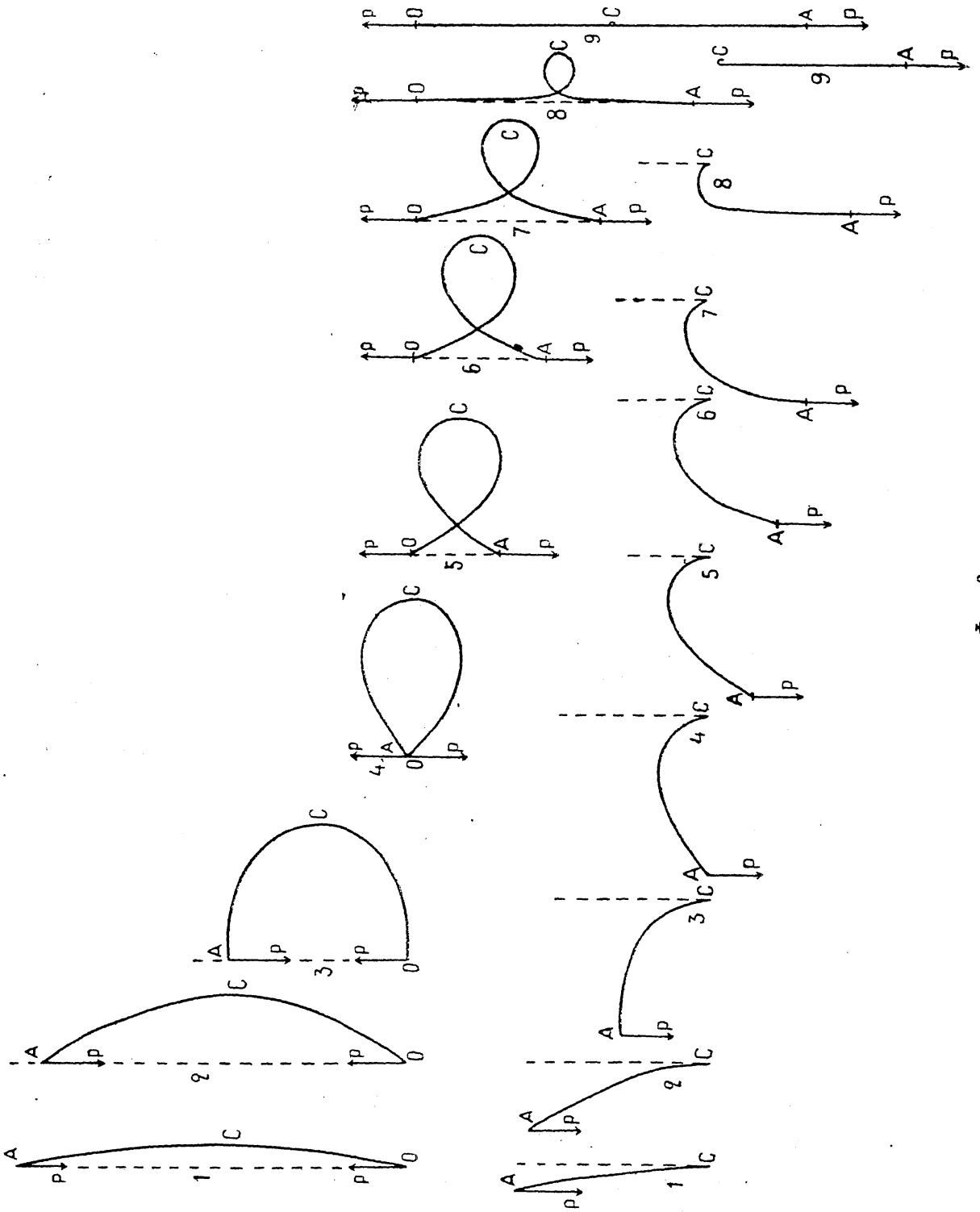
Это условие распадается на два:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & k = 0 \\ 2) & \cos\omega(1 - 2k^2\sin^2\omega) + \\ + 3(2E - K) - (2E(\omega) - F(\omega))\sin\omega\cdot\sqrt{1 - k^2\sin^2\omega} = 0 & \end{array}\right\} \quad (*)$$

Первое имеет место, если левая часть уравнения (*) не может равняться нулю, и соответствует прямолинейной форме равновесия.

Положим

$$\omega = \frac{3\pi}{2} - \mu$$



Фиг. 6.

тогда будет:

$$E(\omega) = E\left(\frac{3\pi}{2} - \mu\right) = 3E - E(\mu)$$

$$F(\omega) = F\left(\frac{3\pi}{2} - \mu\right) = 3F - F(\mu)$$

и предыдущее уравнение примет вид

$$\sin\mu\,(1 - 2k^2\cos^2\mu) - (2E(\mu) - F(\mu))\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu} = 0 \qquad (17)$$

Мы получим ближайшую к прямолинейной форму равновесия при весьма малых значениях k, тогда, отбрасывая члены с множителем k^2, будем иметь:

$$E(\mu) = \mu, \quad F(\mu) = \mu$$

и наше уравнение примет вид

$$\sin\mu - \mu\cos\mu = 0$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\mu = \mu$$

— это и есть уравнение Эйлера для этого случая закрепления концов стойки и форм, весьма близких к прямолинейной.

Если же модуль k значительный, то величина μ определяется уравнением (17), вычисление наименьшего корня этого уравнения, найдя сперва графически приближенное его значение по построению точки B и измерению длины $C_1B - CB' = s$, не представит затруднений.

В самом деле, для точки B' имеем, на основании уравнения (9), равенство

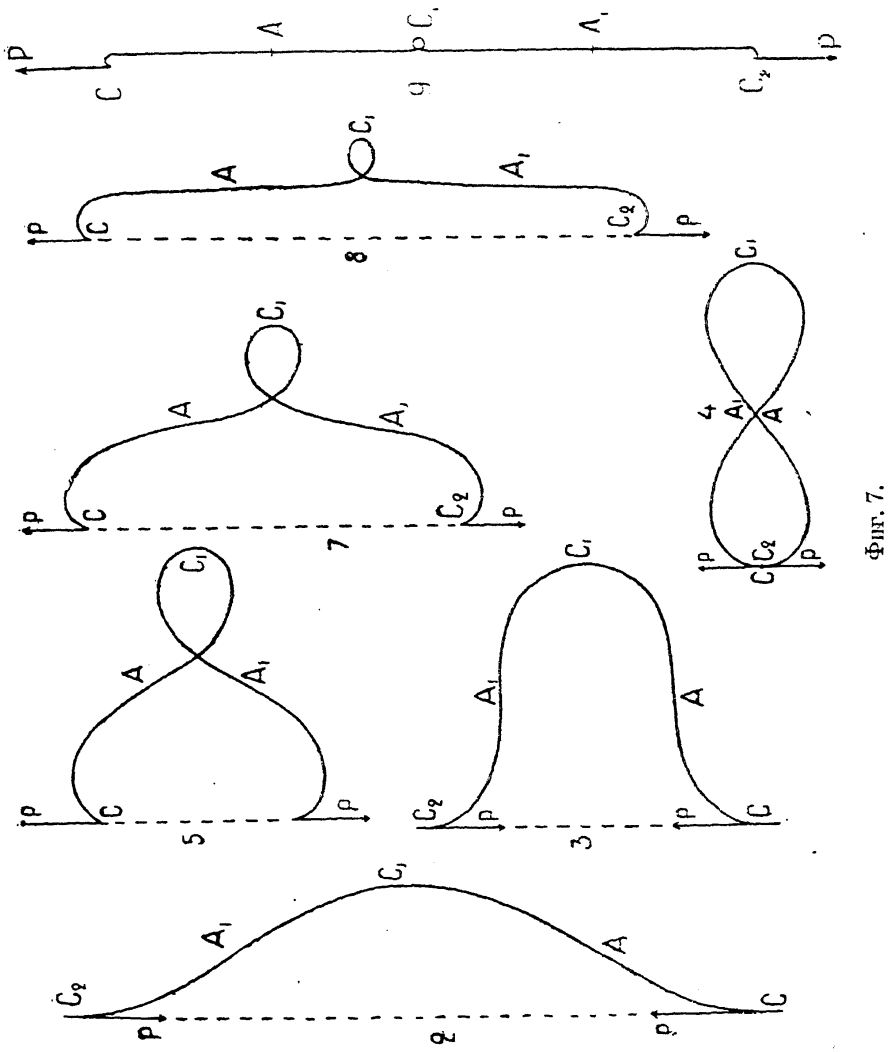
$$2K\left(\frac{1}{2} - s_1\right) = K - F(\omega) \qquad (18)$$

иначе

$$2Ks_1 = F(\omega) \qquad (18')$$

отсюда найдем приближенное значение ω и по нему приближенное значение μ, после чего более точное легко находится как обыкновенно, последовательными линейными приближениями.

Разбирать формы равновесия, которые получаются, кроме изображенных, мы не будем, ибо они представляют лишь соединения двух, трех... форм, уже начерченных, взяв их в половинном, третном и т. д. масштабе, причем это соединение всегда надо делать в точках перегиба. Так, напр., черт. 5 фиг. 6, будучи повторен трижды, дает форму, представленную на



Фиг. 7.

фиг. 8, и относится к стойке, длиною $3l$, при нагрузке $3.20P_e$ указанной выше.

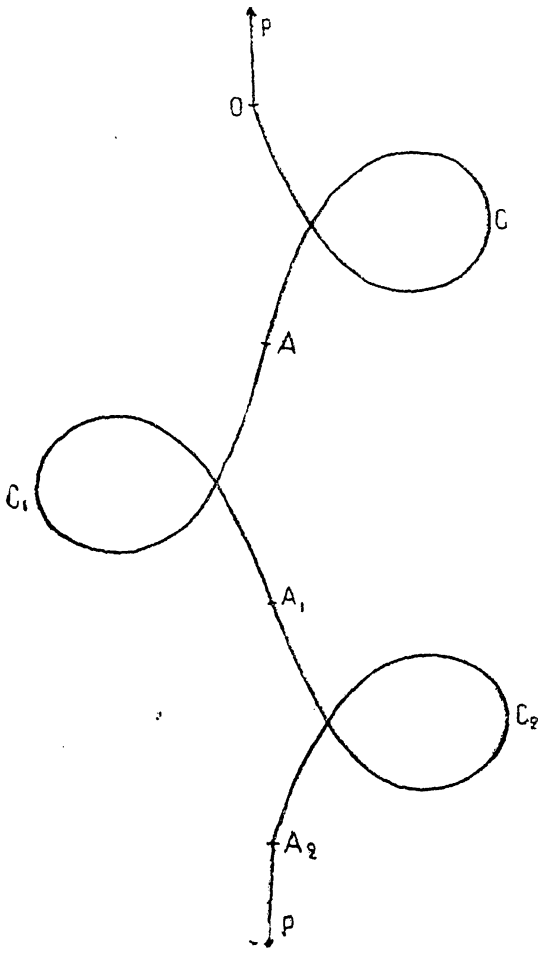
Все эти формы, возможные для упругой проволоки, не имеют технического значения, упомянуты же здесь, чтобы показать, насколько просто решается задача об упругой линии, не прибегая к эллиптическим функциям, а пользуясь лишь эллиптическими интегралами и готовыми для них таблицами Лежандра.

§ **9.** Вопросы о том, как отражается на формах равновесия стойки ее начальная кривизна, сохраняются ли тогда условия Эйлера и какой смысл тогда надо им придавать, — представляют некоторый интерес для техники. Изложение этих вопросов в обычных курсах является часто недостаточным.

Начнем с простейшего случая, когда начальная кривизна стойки постоянная и «малая» и нагрузка такова, что стойка и после деформации имеет «малую» кривизну.

К этому случаю относится упрощенная теория Эйлера.

Упрощение в этой теории состоит, как известно, в том, что наклон касательной к оси $O\zeta$ считается настолько малым, что *квадратом* его можно пренебречь, по сравнению с 1, при той степени точности, с которою ведется расчет. Так, напр., если наибольший уклон касательной не более 1°, то $\operatorname{tg} 1^\circ = 0.0175$, $\operatorname{tg}^2 1^\circ = 0.000\,306 = \frac{1}{3270}$; ясно, что практически ни нагрузка, ни момент инерции I, ни модуль упругости E с такою точностью известны не будут и квадратом уклона в 1° можно пренебречь. Таким образом, когда расчет сделан при предположениях Эйлера, надо рассчитать уклон, чтобы иметь суждение об относительной точности этого расчета.



Фиг. 8.

В том случае, когда квадратом уклона можно пренебречь, будет

$$\frac{d\zeta}{d\sigma} = 1$$

Значит, за переменную независимую можно вместо σ принять ζ и вместо s принять z и полагать

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2\eta}{d\zeta^2}$$

и

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dz^2} = y''$$

и уравнение равновесия принимает упрощенную форму

$$EI\eta'' = M$$

или

$$EIy'' = Ml$$

Итак, положим, что имеем стойку, оба конца которой подперты и начальная форма которой есть AC_0A, представляющая дугу круга радиуса ρ_0 со стрелкою $D_0C_0 = f_0$ и длиною $OC_0A = OA = l$ (фиг. 9).

Уравнение равновесия этой стойки будет

$$EI\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) = P\eta$$

но в данном случае, при указанном расположении осей:

$$\frac{1}{\rho} = -\eta''; \quad \frac{1}{\rho_0} = -\eta_0''$$

причем ρ и ρ_0 считаются величинами, представляющими некоторые длины, значит существенно положительными. Таким образом будет

$$EI(\eta'' - \eta_0'') = -P\eta$$

иначе

$$y'' + n^2 y = -c \tag{19}$$

причем положено:

$$n^2 = \frac{Pl}{EI}, \qquad y_0'' = -c$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$y = A\cos nz + B\sin nz - \frac{c}{n^2}$$

Граничные условия суть:

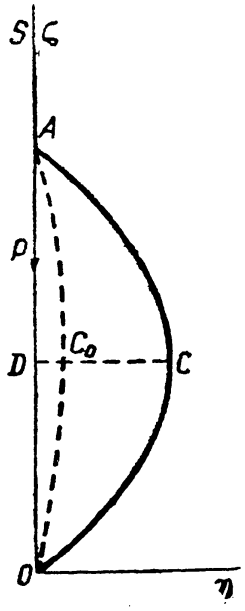
при $z = 0$ должно быть $y_0 = 0 = A - \frac{c}{n^2}$

» $z = 1$ » » $y_1 = 0 = A\cos n + B\sin n - \frac{c}{n^2}$

Откуда следует:

$$A = \frac{c}{n^2}; \quad B = \frac{c}{n^2}\operatorname{tg}\frac{n}{2}$$

$$y = \frac{c}{n^2}\left[\frac{\cos n\left(\frac{1}{2} - z\right)}{\cos\frac{n}{2}} - 1\right] \tag{19'}$$



Фиг. 9.

Между начальным радиусом кривизны ρ_0 и стрелкою f_0 имеем соотношение

$$\frac{l^2}{4} = f_0(2\rho_0 - f_0)$$

откуда следует приближенно

$$\rho_0 = \frac{l^2}{8f_0}$$

следовательно:

$$r_0 = \frac{l}{8f_0}, \quad c = \frac{8f_0}{l}$$

значит будет

$$\eta = \frac{8f_0}{n^2}\left[\frac{\cos n\left(\frac{1}{2} - z\right)}{\cos\frac{n}{2}} - 1\right]$$

и наибольший прогиб и наибольший уклон:

$$\left.\begin{aligned} \eta_{\max} &= \frac{8f_0}{n^2}\left(\sec\frac{n}{2}-1\right)=f\cdot l \\ \left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)_{\max} &= \frac{8f_0}{nl}\cdot \operatorname{tg}\frac{n}{2}=\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Чтобы получить ясное прадставление, в каких пределах применимы эти формулы, проследим за изменяемостью множителей

$$\alpha=\frac{8}{n^2}\left(\sec\frac{n}{2}-1\right) \quad \text{и} \quad \frac{8}{n}\operatorname{tg}\frac{n}{2}=\beta \qquad (21)$$

при изменяемости n, получим следующую таблицу:

1	2	3	4	5	6
$\frac{n^\circ}{2}$	$\frac{P}{P_e}=\frac{n^2}{\pi^2}$	α	β	$f=\alpha\frac{f_0}{l}$	$\gamma=\beta.\frac{f_0}{l}$
30°	0.111	1.13	4.40	1 : 530	1 : 136
60	0.445	1.66	6.62	361	91
75	0.694	3.35	11.40	179	53
80	0.790	4.89	19.20	122	31
85	0.894	9.53	30.80	63	19.5
87°5	0.935	18.85	57.80	32	10.4

В двух последних столбцах этой таблицы показаны: в столбце 5 — отношение стрелки прогиба к пролету, когда начальное значение этого отношения есть $\frac{1}{600}$, в столбце 6 — величина наибольшего уклона, в столбце 2 показано отношение действующей нагрузки P к Эйлеровой, в столбце 3 — отношение наибольшей стрелки прогиба к начальной. Это последнее отношение от величины начальной стрелки прогиба не зависит.

Числа α, приведенные в этой таблице, особенно если их представить графически в зависимости от нагрузки, ясно показывают, насколько быстро начинает возрастать прогиб, когда нагрузка превзойдет, примерно, 0.8 Эйлеровой, последний же столбец показывает, что y'^2 не превышает в этом случае $\frac{1}{1000}$, значит упрощенным уравнением можно вполне пользоваться, если же нагрузка не превышает 0.5 Эйлеровой, то прогиб не превышает удвоенного начального прогиба.

Было бы, однако, неправильно заключить, что когда нагрузка равна Эйлеровой, то прогиб бесконечный, ибо тогда самое уравнение (19) не применимо и расчет для этого случая надо бы производить по полному уравнению.

Мы не будем останавливаться на других случаях закрепления концов, так как сущность дела достаточно выяснена на разобранном простейшем случае.

§ **10.** Полное уравнение в нашем случае будет

$$EI\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)=P\eta$$

причем при сделанном расположении осей надо писать

$$\frac{1}{\rho}=-\frac{d^2\eta\,d\zeta-d^2\zeta\,d\eta}{d\sigma^3}$$

или, вводя, как и раньше, переменные z, y, s, r и положив

$$2a^2=\frac{Pl^2}{EI}\qquad\frac{1}{2a^2 r_0}=-c$$

получим

$$y''z'-z''y'=-2a^2(y+c)$$

откуда, подобно предыдущему, получим:

$$z''=2a^2(y+c)y'$$
$$z'=h+a^2(x+c)^2$$

Постоянная произвольная h определяется по условию

$$h=\cos\tau_0-a^2c^2$$

где через τ_0 обозначено наклонение касательной в точке, для которой $y=0$ и $s=0$.

Затем попрежнему имеем

$$y'=\sqrt{[1-h-a^2(y+c)^2]\cdot[1+h+a^2(y+c)^2]} \tag{22}$$

причем

$$\left.\begin{aligned}1-h&=1-\cos\tau_0+a^2c^2\\1+h&=1+\cos\tau_0-a^2c^2\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Отсюда видно, что всегда будет

$$1 - h > 0$$

но величина $1 + h$ может быть как положительной, так и отрицательной — эти два случая требуют отдельного рассмотрения.

I случай.

$$1 + h > 0$$

В этом случае полагаем:

$$1 - h = f^2$$
$$1 + h = g^2$$

так что будет

$$y' = \sqrt{[g^2 + a^2(y+c)^2] \cdot [f^2 - a^2(y+c)^2]}$$

Полагаем

$$a(y+c) = -f\cos\varphi$$

тогда будет:

$$a\,dy = f\sin\varphi \cdot d\varphi$$

$$a\sqrt{2}\,s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = F(\varphi) - F(\varphi_0)$$

$$k^2 = \frac{f^2}{2}$$

угол φ_0 определяется равенством

$$\cos\varphi_0 = -\frac{ac}{f} \tag{24}$$

угол же φ возрастает от значения φ_0 до значения $\varphi = \pi$ при $s = \frac{1}{2}$, таким образом будет

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = F(\pi) - F(\varphi_0) = 2K - F(\varphi_0)$$

Положим

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \omega$$

тогда для определения ω имеем уравнение

$$\sin\omega = \frac{ac}{f} = \frac{ac}{k\sqrt{2}} \tag{25}$$

вместе с тем будет

$$F(\varphi_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}+\omega} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$$

положив в этом интеграле

$$\pi - \varphi = \psi$$

получим

$$F(\varphi_0) = -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}-\omega} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^{\pi} - \int_0^{\frac{\pi}{2}-\omega} = 2K - F\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$$

и следовательно, будет

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = F\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \tag{26}$$

При данных: нагрузке, размерах и начальной кривизне балки, величины

$$a = \sqrt{\frac{P}{2EI}} \cdot l$$

и

$$c = \left|\frac{1}{2a^2 r}\right|$$

известны — уравнения (25) и (26) послужат для определения неизвестных k и φ_0, и тогда по равенству

$$f = k\sqrt{2}$$

найдем наибольший прогиб

$$\eta_{\max} = l\left[\frac{f}{a} - c\right] \tag{27}$$

Величина z найдется по уравнению

$$z' = h + a^2(y + c)^2$$

совершенно подобно тому, как в § 3, на чем останавливаться не будем.

По таблицам значений функции $F(\varphi)$ нахождение значений k и ω затруднений не представляет.

II случай.

$$1 + h < 0$$

В этом случае полагаем:

$$1 - h = f^2$$
$$1 + h = -g^2$$

так что будет:

$$y' = \sqrt{[a^2(y + c)^2 - g^2] \cdot [f^2 - a^2(y + c)^2]}$$

$$s = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{[a^2(y + c)^2 - g^2] \cdot [f^2 - a^2(y + c)^2]}}$$

Для приведения интеграла правой части к каноническому виду надо положить:

$$a(c+y)=\frac{g}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$k^2=\frac{f^2-g^2}{f^2}=\frac{2}{f^2}$$

и получится

$$as\sqrt{2}=k\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=k[F(\varphi)-F(\varphi_0)]$$

причем угол φ_0 определяется уравнением

$$a^2c^2(1-k^2\sin^2\varphi)=g^2=f^2-2=\frac{2(1-k^2)}{k^2} \tag{28}$$

к этому уравнению надо еще присоединить следующее:

$$\frac{a}{\sqrt{2}}=k[K-F(\varphi_0)] \tag{29}$$

которое получается из (28), если положить в нем $s=\frac{1}{2}$ и $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Уравнения (28′) и (29) послужат для определения величин k и φ_0, после чего наибольший прогиб $\eta_{\max}$ найдется из равенства

$$\eta_{\max}=l\left[\frac{f}{a}-c\right] \tag{30}$$

совершенно того же вида, как и в первом случае.

Мы не будем выводить формул для вычисления координаты ζ, так как этот вывод не отличается существенно от изложенного в § 3, а вычислим для ясности значения прогибов по формуле (27), чтобы иметь наглядное представление о том, в какой мере точны результаты, даваемые упрощенной теорией Эйлера.

Для этого вычисления мы имеем следующие формулы:

$$n^2=2a^2=\frac{Pl^2}{EI};\quad c=\left|\frac{1}{2a^2r_0}\right|;\quad \frac{1}{r_0}=\frac{8f_0}{l} \tag{1}$$

$$k^2=\frac{f^2}{2};\quad k=\frac{f}{\sqrt{2}} \tag{2}$$

$$\sin\omega=\frac{ac}{f}=\frac{ac}{k\sqrt{2}} \tag{3}$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}}=F\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\omega}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{4}$$

$$\eta_{\max}=l\left[\frac{f}{a}-c\right]=lc\,[\operatorname{cosec}\omega-1] \tag{5}$$

В том случае, когда кривизна стойки, а значит, и прогиб малые, то модуль k будет малый, и если пренебрегать квадратом его величины, то будет

$$F\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\frac{\pi}{2}-\omega=\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{n}{2}$$

и

$$\eta_{\max}=\frac{8f_0}{n^2}\left[\sec\frac{n}{2}-1\right]$$

т. е. получается формула (20) Эйлера, так что числа приведенной выше таблицы поправки не требуют.

При $n^2=\pi^2$ формула (20) явно не применима, и если бы рассчитать $\eta_{\max}$ по этой формуле, то получили бы $\eta_{\max}=\infty$, поэтому в этом случае расчет надо делать по точным формулам.

Очевидно будет

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\omega}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\int_{\frac{\pi}{2}-\omega}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\approx K-\frac{\omega}{\sqrt{1-k^2}}$$

ибо величины ω и k малые.

Но мы имели:

$$K=\frac{\pi}{2}\left[1+\frac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4+\ldots\right]$$

$$\sin\omega=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{c}{k}$$

значит

$$\omega=\frac{\pi}{2}\frac{c}{k}+\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\frac{c}{k}\right)^3=\frac{\pi}{2}\left[\frac{c}{k}+0.41\left(\frac{c}{k}\right)^3\right]$$

Таким образом имеем уравнение

$$\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\left[1+\frac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4\right]-\frac{\pi}{2}\left(\frac{c}{k}+0.41\left(\frac{c}{k}\right)\right)^3\left(1+\frac{1}{2}k^2\right)$$

т. е.

$$0=\frac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4-\frac{c}{k}-\frac{1}{2}ck$$

В первом приближении будет

$$k_1^3=4c$$

второе приближение будет

$$k=k_1\left(1-\frac{1}{48}k_1^2\right)$$

В нашем примере:

$$c = \frac{1}{75} \cdot \frac{1}{\pi^2} = 0.00135095; \quad \log c = \bar{3}.130\,639$$

$$k_1 = 0.175\,482, \qquad \log k_1 = \bar{1}.244\,233$$

$$1 - \frac{1}{48} k_1^2 = 0.999\,358 \qquad \log\left(1 - \frac{1}{48} k_1^2\right) = \bar{1}.999\,721$$

$$\log k = \bar{1}.243\,954 = \log \sin \theta$$

$$\theta = 10°6'0''.5$$

Затем имеем $\sin \omega = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{c}{k}$, поэтому будет:

$$\frac{\sin \omega}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{c}{k} \cdot \sec \theta \cdot = \frac{\omega}{\sqrt{1-k^2}}$$

$$\log \frac{\pi}{2} = 0.196\,120$$

$$\log c = \bar{3}.130\,639$$

$$\operatorname{colg} k = 0.756\,046$$

$$\log \sec \theta = 0.006\,783$$

$$\bar{2}.089\,588 \qquad \frac{\omega}{\sqrt{1-k^2}} = 0.01229 = 0°42'15''$$

Во втором томе упомянутого сочинения Лежандра помещены двенадцатизначные таблицы логарифмов величин K и E для всех модулярных углов θ через $0°1'$, в этой таблице находим для $\theta = 10°6'$, взяв первые 6 знаков:

$$\log K = 0.199505$$

$$K = 1.58309$$

$$\frac{\omega}{\sqrt{1-k^2}} = 0.01229$$

$$K - \frac{\omega}{\sqrt{1-k^2}} = 1.57080 \quad = \frac{\pi}{2}$$

следовательно найденные значения k и ω удовлетворяют уравнениям (25) и (26).

Затем имеем:

$$\log k = \bar{1}.243954$$

$$\log \sqrt{2} = 0.150515$$

$$\log f = \bar{1}.394469$$

$$f = 0.248010$$

$$\eta_{max} = 600f = 148.806 f_0 \simeq 149 f_0 \approx \frac{1}{4} l$$

Этот результат и приведенная выше таблица наглядно показывают, какое сильное влияние оказывает даже малая начальная кривизна или малая погибь стойки на ее прогиб, когда нагрузка приближается к Эйлеровой, для стойки прямолинейной. Вот почему и не рекомендуется превосходить половины, а в важных случаях — даже одной четверти Эйлеровой нагрузки.

В рассмотренном примере предполагается, что стойка имеет весьма малую, как бы случайную, кривизну, но во многих случаях пользуются криволинейными балками, напр. в судостроении палубным бимсам придается определенная погибь или в строительном деле — при сооружении разного рода арок. Но эти случаи не относятся к «продольному» изгибу, в котором предполагается, что нагрузка действует по направлению *хорды* недеформированной стойки или балки, а в случае арки или бимса нагрузка действует *перпендикулярно* хорде. Эти случаи требуют отдельного рассмотрения.

§ 11. В упомянутых выше сочинениях Halphen'a и Appell'я приведено решение в эллиптических функциях Вейерштрасса и более общей задачи, когда на стойку, имеющую постоянную начальную кривизну, действует направленное по нормали давление.

Обозначим это давление, отнесенное на погонную единицу длины, через p и положим сперва, что оба конца стойки подперты. Пусть R и S — слагающие реакции в точке опоры, O, S_1 — боковая реакция в точке A, удерживающая эту точку на оси $O\zeta$.

Условия статического равновесия стойки суть:

$$-P+R-\int_0^l p\sin\tau\,d\sigma=0$$

$$S+S_1-\int_0^l p\cos\tau\,d\sigma=0$$

$$S_1\zeta_1-\int_0^l p\eta\sin\tau\,d\sigma-\int_0^l p\zeta\cos\tau\,d\sigma=0$$

но мы имеем:

$$d\zeta=d\sigma\cos\tau;\qquad d\eta=d\sigma\sin\tau$$

то будет

$$\int_0^l \sin\tau\,d\sigma=\eta_1-\eta_0=0$$

ибо

$$\eta_1=0$$

и

$$\eta_0 = 0$$

$$\int_0^l \eta \sin\tau \, d\sigma = \frac{1}{2}\eta_1^2 - \frac{1}{2}\eta_0^2 = 0$$

$$\int_0^l \zeta \cos\tau \, d\sigma = \frac{1}{2}\zeta_1^2 - \frac{1}{2}\zeta_0^2 = \frac{1}{2}\zeta_1^2$$

Таким образом предыдущие уравнения дают:

$$\left.\begin{aligned} R &= P \\ S &= S_1 = \frac{p}{2}\zeta_1 \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Возьмем сечение в точке $N(\zeta, \eta)$, тогда изгибающий момент в этой точке будет

$$M = -S\zeta + R\eta + p\int_0^\sigma (\zeta - \alpha)\cos\tau \, d\sigma_1 + p\int_0^\sigma (\eta - \beta)\sin\tau \, d\sigma_1 \qquad (32)$$

где α и β суть координаты переменной точки H, лежащей между O и N, соответствующей дуге $OH = \sigma$, так что

$$d\sigma\cos\tau = d\alpha; \quad d\sigma\sin\tau = d\beta$$

Значит, будет

$$M = R\eta - S\zeta + \frac{p}{2}(\zeta^2 + \eta^2)$$

ибо

при $\sigma_1 = 0$ будет $\alpha = 0, \quad \beta = 0$
» $\sigma_1 = \sigma$ » $\alpha = \zeta, \quad \beta = \eta$

так как значению $\sigma_1 = 0$ соответствует точка O, значению $\sigma_1 = \sigma$ соответствует точка N.

Уравнение равновесия будет

$$EI\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) = M$$

причем при избранном направлении осей и счете дуги σ будет

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2\eta\, d\zeta - d^2\zeta\, d\eta}{d\sigma^3} = -\frac{d\tau}{d\sigma}$$

Положим:

$$\zeta = lz,\ \eta = ly,\ \rho = lq,\ \rho_0 = lq_0,\ \zeta_1 = lz_1$$

тогда будет

$$M = Ply - \frac{pl^2}{2} z_1 z + \frac{pl^2}{2}(z^2 + y^2)$$

и пусть

$$P = m\frac{pl}{2}$$

тогда

$$M = \frac{pl^2}{2}[z^2 + y^2 + my - z_1 z] = \frac{pl^2}{2}\left[\left(z - \frac{z_1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{z_1^2 + m^2}{4}\right]$$

Необходимо здесь же заметить, что хотя величина z_1 и постоянная, но *не заданная, а неизвестная*, значение которой подлежит определению. Нетрудно вперед предвидеть, что расчет возможно будет вести только последовательными приближениями, приписывая z_1 различные частные значения и таким путем определяя то из них, которое будет удовлетворять трансцендентным уравнениям, служащим для определения z_1 и других постоянных, требуемых при решении задачи, поэтому мы будем считать, что величине z_1 приписано такое частное значение.

Положим:

$$u = z - \frac{z_1}{2} = r\sin\tau; \quad v = y + \frac{m}{2} = r\cos\tau$$

тогда будет

$$M = \frac{pl^2}{2}\left[r^2 - \frac{m^2 + z_1^2}{4}\right] \tag{33}$$

и уравнение равновесия примет вид

$$\frac{EI}{l}\left[\frac{1}{q} - \frac{1}{q_0}\right] = M$$

Положим для краткости:

$$\frac{pl^3}{2EI} = 2a^2 \qquad \frac{m^2 + z_1^2}{4} = b_1$$

тогда получим

$$\frac{1}{q} = 2a^2[r^2 - b_1] + \frac{1}{q_0}$$

пусть будет

$$\frac{1}{q_0} - 2a^2 b_1 = 2a^2 c$$

тогда уравнение равновесия примет вид

$$\frac{1}{q} = 2a^2 [r^2 + c] \tag{34}$$

Дальнейшее интегрирование этого уравнения основано на следующем преобразовании, данном M. Levy: имеем равенство

$$r^2 d\tau = u\,dv - v\,du = (u\cos\tau - v\sin\tau)\,ds$$

значит

$$r^2 \frac{d\tau}{ds} = u\cos\tau - v\sin\tau$$

Отсюда следует

$$d\left(\frac{r^2 d\tau}{ds}\right) = -(u\sin\tau + v\cos\tau)\,d\tau = -(u\sin\tau + v\cos\tau)\frac{d\tau}{ds} = r\,dr \cdot \frac{1}{q}$$

значит

$$\frac{1}{q} = \frac{d\left(r^2 \frac{d\tau}{ds}\right)}{r\,dr}$$

так что уравнение (34) будет

$$d\left(r^2 \frac{d\tau}{ds}\right) = 2a^2 (r^2 + c) \cdot r\,dr$$

Откуда, по интегрировании, получаем

$$r^2 \frac{d\tau}{ds} = h + a^2 (r^2 + c)^2 \tag{35}$$

где h есть произвольная постоянная, которая определяется по условию, что при $s = 0$, т. е. в точке O, момент $M = 0$, значит кривизна равна $\frac{1}{q_0}$, таким образом будет

$$h = \left(r^2 \frac{d\tau}{ds}\right)_0 - a^2 (r_0 + c)^2 = -r_0^2 \frac{1}{q_0} - a^2 (r_0^2 + c)^2$$

причем

$$r_0^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + m_1^2}{4}$$

Но в полярных координатах

$$ds^2 = r^2 d\tau^2 + dr^2 \tag{36}$$

из уравнений (35) и (36) следует

$$\left(r \frac{d\tau}{ds}\right)^2 = \frac{[h + a^2 (r^2 + c)^2]^2}{r^2} = 1 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2$$

поэтому будет

$$\left(\frac{r\,dr}{ds}\right)^2 = r^2 - [h - a^2(r^2 + c)^2]^2$$

Положив

$$r^2 + c = \lambda \tag{37}$$

получим

$$\frac{1}{4}\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = \lambda - c - (h - a^2\lambda^2)^2 \tag{37'}$$

Откуда следует

$$2ds = \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda - c - (h + a^2\lambda^2)^2}}$$

и

$$2s = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - c) - (h + a^2\lambda^2)^2}} \tag{37''}$$

причем

$$\lambda_0 = r_0 + c$$

По правилам, излагаемым в курсах интегрального исчисления, интеграл в уравнении (37) приведется к каноническому виду, и мы получим

$$2s = \mu \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

где μ, k, φ_0 будут выражены через λ_0, c, h, a, т. е. в нашем предположении, когда величине z_1 приписано частное значение, это будут известные числа.

Для вершины C будет:

$$z = \frac{1}{2} z_1; \quad \tau = 0$$

обозначая ординату вершины через y_1, будем иметь

$$y_1 + \frac{m}{2} = r_1$$

соответственно чему для вершины C будет

$$\lambda = \lambda_1 = r_1^2 + c$$

С другой стороны, для вершины C значение s есть $s = \frac{1}{2}$, поэтому будет

$$\frac{1}{2} = \mu \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin \varphi}} \tag{38}$$

причем φ_1 выражается через λ_1 совершенно так же, как φ_0 через λ_0, так что должно бы иметь равенство

$$\frac{1}{2} - \mu [F(\varphi_1) - F(\varphi_0)] = 0 \tag{39}$$

если бы значения z_1 и y_1 были истинные.

Для дальнейшего интегрирования имеем уравнение (35), из которого следует

$$(\lambda - c)\frac{d\tau}{ds} = h + a^2 \lambda^2$$

или, на основании (37′),

$$d\tau = \frac{h + a^2 \lambda^2}{2(\lambda - c)} \cdot \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - c) - (h + a^2 \lambda^2)^2}}$$

т. е.

$$2\tau = \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{h + a^2 \lambda^2}{\lambda - c} \cdot \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - c) - (h + a^2 \lambda^2)^2}} \tag{40}$$

В виду наличия в знаменателе множителя $\lambda - c$, интеграл в этой формуле приведется не только к эллиптическим интегралам первого и второго рода, с которыми мы имели дело выше, но и к интегралу третьего рода, который зависит от трех аргументов и для которого таблиц нет.

Интегралы третьего рода надо для численных вычислений или приводить к Якобиевым функциям Z и Θ, или же вычислять непосредственно по приближенным формулам квадратур. Упомянутое приведение довольно сложно, оно подробно изложено в руководстве H. Durège — «Theorie der elliptischen Functionen».

Практически расчет проще вести по приближенным формулам квадратур, не делая никаких приведений к нормальному виду, а беря интегралы (37″) и (40) в том виде, как они есть.

Этот расчет ведется тогда в следующей последовательности.

1) По заданным элементам стойки, нагрузке, начальной кривизне и нормальному давлению вычисляются постоянные a и m.

2) Задаются для пробы значения $\frac{1}{2}z_1$ и y_1 координат вершины и вычисляются величины

$$c,\ h,\ \lambda_0 \quad \text{и} \quad \lambda_1$$

3) По одной из формул квадратур, лучше всего Гаусса, взяв пять ординат, надо вычислить интегралы:

$$H = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - c) - (h + a^2\lambda^2)^2}} - \frac{1}{2}$$
$$L = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{h + a^2\lambda}{\lambda - c} \cdot \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - c) - (h + a^2\lambda^2)^2}} \tag{41}$$

Если бы оказалось $H = 0$ и $L = 0$, то принятые значения $\frac{1}{2}\ z_1$ и y_1 суть истинные, если же H и L окажутся не равными нулю, то надо, сохранив значение z_1, принять другое значение y_1 и вычислить величины H и L, затем, сохранив первое значение y_1, взять другое значение z_1 и, повторив вычисление, найти соответствующие H и L и, продолжая действовать таким образом, применять «линейное приближение», по которому и найти те значения y_1 и z_1, при которых $H = 0$ и $L = 0$; эти значения и дадут координаты вершины.

4) В вершине угол $\tau = 0$, поэтому как только координаты вершины найдены и, значит, численные значения параметров, входящих в интеграл (40), известны, задаем ряд последовательных равноотстоящих значений λ между λ_0 и λ_1 и по одной из формул квадратур вычисляем по уравнению (40) значения угла τ, а так как формула (37) дает и соответствующие значения r, то форма равновесия и будет определена.

Хотя такое вычисление и представляется довольно продолжительным, но оно будет во много раз проще и короче, нежели по Вейерштрассовым функциям, как то изложено в руководствах Halphen'а или Appell'я. Необходимо при этом еще заметить, что там рассматривается не стойка, для которой заданы длина и условия закрепления концов, а упругая проволока, к концам которой приложены *заданные силы и пары*, находящиеся в равновесии, для стойки же реакции опор и пары закрепления *не известны*. Таким

образом задача для проволоки становится значительно проще, нежели для стойки, ибо для проволоки в интегралах (37″) и (40) *все* постоянные известны, тогда как для стойки в определении этих постоянных и заключается главная трудность.

Если методу Halphen'a применить к стойке, то для определения неизвестных постоянных параметров пришлось бы вести процесс последовательных приближений, гораздо более сложный, нежели изложенный выше.

Рассмотренная задача не имеет большого технического значения, поэтому нет надобности пояснять ее численным примером, тем более, что вычисления, кроме некоторой длинноты и утомительного однообразия, затруднений не представляют.

О РАСЧЕТЕ БАЛОК, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Предисловие ко 2-му изданию

Первое издание этой книги быстро разошлось, в виду чего Редакционно-издательский совет Академии Наук постановил выпустить второе ее издание, дополнив его таблицами, приложенными к книге Хаяси, на что Государственное Техническое издательство любезно выразило свое согласие.

Первоначальный текст оставлен без изменений, лишь в прибавлении, при расчете набора судового днища, применена к составлению характеристического уравнения метода, изложенная в моей статье «О численном решении уравнения, которым определяются частоты малых колебаний материальных систем», ибо эта метода всего проще и быстрее ведет к цели.

Введение

Расчет балок, лежащих на упругом основании, разбирается весьма подробно и обстоятельно в изданном Государственным Техническим издательством сочинении проф. Кеиши Хаяси под заглавием: «Теория расчета балок на упругом основании».

Хаяси излагает обычные методы решения этого вопроса, причем в случае прерывной нагрузки или сосредоточенных сил он подразделяет балку на отдельные участки по местам разрывов нагрузки или приложения сосредоточенных сил, и таким образом, вместо *одной* непрерывной балки, ему приходится рассматривать столько балок, сколько таких участков. Вследствие этого, кроме граничных условий, выражающих род закрепления концов балки, ему необходимо составлять для каждой точки соединения двух участков по четыре уравнения, выражающих условия «сопряжения» этих участков балки. Так, напр., для балки, нагруженной тремя силами, ему надо рассматривать четыре участка, и для определения шестнадцати произвольных постоянных, вводимых интегрированием, составить шестнадцать уравнений с шестнадцатью неизвестными со сложными при них коэффициентами. Отсюда ясно, к каким сложным выкладкам, даже для простейших нагрузок, приводит эта обычная метода.

В этой статье я, прежде всего, развиваю общую методу решения поставленного вопроса, при которой, какова бы нагрузка ни была, балку на отдельные участки подразделять не надо, условий сопряжения составлять не надо и, вместо многочисленных уравнений для определения постоянных произвольных, таковых приходится определять во всех случаях нагрузки *две* и только *две* по условиям закрепления одного из концов балки. Это вносит во все выкладки простоту и симметрию.

Развив эту «точную» методу и пояснив ее численным примером, я показываю «приближенные» методы, которые обобщаются на случай балок переменного и притом какого угодно сечения. Методу эту поясняю также численным примером, чтобы показать, что «приближение» может быть доведено до любой степени точности.

На применимость формул к численным вычислениям, без чего вопрос не может считаться решенным, я обращаю особое внимание, ибо рассматриваемый вопрос, в связи с нашим громадным и самым разнообразным строительством, как раз теперь получил немаловажное практическое значение.

Статья подразделена на две главы, в первой из которых рассматриваются балки постоянного сечения, во второй — балки переменного сечения, относя сюда и те случаи, когда балка состоит из нескольких частей, на каждой из которых ее сечение постоянное.

В прибавлении я предлагаю методу, изложенную в первой главе, к расчету перекрестных связей вообще и в частности набора судового днища.

ГЛАВА I

Расчет балок постоянного сечения

§ 1. Расчет балки постоянного сечения, лежащей на упругом основании, приводится, как известно со времен Эйлера, к интегрированию уравнения

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} + Ky = F(x) \tag{1}$$

в котором E — модуль упругости материала балки, I — момент инерции площади ее поперечного сечения, K — отнесенное на погонную единицу длины (1 см) сопротивление грунта оседанию, когда оседание равно 1, $F(x)$ — внешняя нагрузка балки, отнесенная на погонную единицу длины, y — прогиб балки, в точке коей абсцисса равна x. Абсциссы считаются от одного из концов балки, длина которой равна l.

Величина y, кроме уравнения (1), должна удовлетворять граничным условиям, относящимся к роду закрепления концов балки, соответствующих значениям $x = 0$ и $x = l$.

Эти условия выражаются следующим образом: при $x = 0$ или при $x = l$ должно быть:

$$(2)\quad \begin{cases} \text{а) для конца заделанного: } y = 0 \text{ и } y' = 0 \\ \text{б) » » подпертого: } y = 0 \text{ и } y'' = 0 \\ \text{в) » » свободного: } y'' = 0 \text{ и } y''' = 0 \end{cases}$$

Для решения уравнения (1) и составления таблиц для разных частных случаев, Хаяси полагает, согласно Шведлеру,

$$(3)\quad L = \sqrt[4]{\frac{4EI}{K}} \text{ и } \frac{x}{L} = \xi$$

он приводит, таким образом, уравнение (1) к виду

$$(4)\quad \frac{d^4y}{d\xi^4} + 4y = f(\xi)$$

и указывает составление его общего интеграла, но, как мы увидим ниже, эту основную выкладку до конца не доводит.

Для уравнения (4) характеристическое уравнение есть

$$(5)\quad s^4 + 4 = 0$$

и корни его суть:

$$(6)\quad \begin{cases} s_1 = -s_4 = 1 + i \\ s_2 = -s_3 = 1 - i \end{cases}$$

причем, как обыкновенно, $i = \sqrt{-1}$. Соответственно этому, Хаяси представляет общий интеграл уравнения (4) в виде

$$(7)\quad y = Z_1 e^{s_1\xi} + Z_2 e^{s_2\xi} + Z_3 e^{-s_2\xi} + Z_4 e^{-s_1\xi}$$

причем Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 суть функции переменной ξ, для определения которых Хаяси пишет известные уравнения Лагранжевой методы изменения постоянных произвольных, а именно:

$$(8)\quad \begin{cases} e^{s_1\xi} Z_1' + e^{s_2\xi} Z_2' + e^{-s_2\xi} Z_3' + e^{-s_1\xi} Z_4' = 0 \\ e^{s_1\xi} Z_1' - e^{s_2\xi} Z_2' - e^{-s_2\xi} Z_3' + e^{-s_1\xi} Z_4' = 0 \\ s_1 e^{s_1\xi} Z_1' + s_2 e^{s_2\xi} Z_2' - s_2 e^{-s_2\xi} Z_3' - s_1 e^{-s_1\xi} Z_4' = 0 \\ -s_2 e^{s_1\xi} Z_1' - s_1 e^{s_2\xi} Z_2' + s_1 e^{-s_2\xi} Z_3' + s_2 e^{-s_1\xi} Z_4' = \frac{2}{K} f(x) \end{cases}$$

Но этой системы в общем виде он не решает, ограничиваясь рассмотрением некоторых простейших частных видов функции $f(x)$, т. е. действующей на балку нагрузки. Заметим здесь же, что ниже мы показываем, что для нахождения общего интеграла уравнения (4) нет надобности прибегать к Лагранжевой методе и этот общий интеграл находится весьма просто для любой функции $f(x)$, прерывной или непрерывной, и даже для сосредоточенных сил, причем нет надобности прибегать к уравнениям сопряжения. Между тем, при обычном изложении этого вопроса Хаяси, а значит, и всеми авторами, на которых он ссылается, не получающими выражения общего интеграла уравнения (4) при произвольной функции $f(x)$, приходится для каждой точки, где нагрузка претерпевает разрыв или где приложена сосредоточенная сила, составлять «условия сопряжения» различных участков, на которые этими точками длина балки подразделяется. Это приводит к необходимости решать, для определения постоянных произвольных, большое число уравнений первой степени со многими неизвестными, именно — по четыре для каждого участка.

Чтобы это стало ясным, возьмем простейший случай: балки, подпертой по концам и нагруженной сосредоточенной силой P, приложенной в точке, абсцисса коей $x = a$.

В этом случае, следуя Хаяси, балка подразделяется на два участка: 1-й — от $x = 0$ до $x = a$ и 2-й — от $x = a$ до $x = l$.

Так как распределенной по длине балки нагрузки нет, то $f(x) = 0$ и уравнения ее упругого равновесия будут:

для 1-го участка:

$$y_1^{IV} + 4y_1 = 0 \tag{9}$$

для 2-го участка:

$$y_2^{IV} + 4y_2 = 0 \tag{10}$$

Пусть

$$\frac{l}{L} = \lambda, \quad \frac{a}{L} = \alpha$$

Общий интеграл уравнения (9), по освобождении от мнимых знаков, как его обыкновенно пишут, будет

$$y_1 = (A_1 e^{\xi} + A_2 e^{-\xi}) \cos \xi + (A_3 e^{\xi} + A_4 e^{-\xi}) \sin \xi \tag{11}$$

и для уравнения (10):

$$y_2 = (B_1 e^{\xi} + B_2 e^{-\xi}) \cos \xi + (B_3 e^{\xi} + B_4 e^{-\xi}) \sin \xi \tag{12}$$

Так как конец $\xi = 0$ принадлежит 1-му участку, а конец $\xi = \lambda$ — 2-му, то граничные условия будут:

$$(13) \qquad \begin{aligned} y_1(0) &= 0 \quad \text{и} \quad y_1''(0) = 0 \\ y_2(\lambda) &= 0 \quad \text{и} \quad y_2''(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Условия «сопряжения» обоих участков в точке $\xi = \alpha$ в этом случае будут:

$$(14) \qquad \begin{gathered} y_1(\alpha) = y_2(\alpha);\ y_1'(\alpha) = y_2'(\alpha);\ y_1''(\alpha) = y_2''(\alpha) \\ \text{и} \qquad y_1'''(\alpha) + \frac{P}{EI} = y_3'''(\alpha) \end{gathered}$$

Очевидно, что в развернутом виде уравнения (13) и (14) будут уравнениями первой степени с *восемью* неизвестными $A_1, \ldots B_4$, с довольно сложными при них коэффициентами, заключающими тригонометрические и показательные функции аргументов λ и α.

Если бы наша балка была нагружена, напр., двумя сосредоточенными силами P_1 и P_2, приложенными в точках $x = a$ и $x = b$, коим соответствуют значения

$$(15) \qquad \xi_1 = \frac{a}{L} = \alpha \quad \text{и} \quad \xi_2 = \frac{b}{L} = \beta$$

то пришлось бы, следуя Хаяси, рассматривать три участка:

$$(16) \qquad \begin{cases} \text{1-й — от } \xi = 0 \text{ до } \xi = \alpha; \quad \text{2-й — от } \xi = \alpha \text{ до } \xi = \beta \\ \text{3-й — от } \xi = \beta \text{ до } \xi = \lambda \end{cases}$$

и три неизвестные функции y_1, y_2, y_3, каждая из которых заключает по четыре произвольных постоянных, для определения которых придется составить *двенадцать* уравнений с этими двенадцатью неизвестными, а именно: четыре уравнения для граничных условий, четыре — для сопряжения в точке $\xi = \alpha$ и четыре — для сопряжения в точке $\xi = \beta$.

Само собою понятно, насколько сложно было бы общее решение такой системы и к каким громоздким формулам оно бы привело.

Примеры подобных систем и сложных формул, даже для простейших случаев нагрузки, можно видеть в книге Хаяси.

Такие системы и формулы ему приходится составлять и решать для каждого частного случая нагрузки. Между тем, мы покажем, что для балки постоянного сечения условия сопряжения составлять незачем и для *всех* случаев нагрузки вопрос об определении постоянных произвольных

приводится к решению системы *двух* уравнений первой степени с *двумя* неизвестными, значит самая сложная и длинная часть выкладок Хаяси отпадает целиком.

Затем мы покажем еще одну методу, где не надо решать для определения постоянных произвольных ни одного уравнения и расчет ведется прямым ходом, как англичане говорят: «straight forward».

§ 2. Указав сущность методы, излагаемой Хаяси, и ее главный недостаток, покажем сперва простой прием, которым этот недостаток устраняется, а также такое предварительное преобразование или подготовку уравнения (1), при котором во второй его части будет функция непрерывная.

Расчет надо вести в следующей последовательности.

А) Положим, что на балку действует: а) распределенная нагрузка $F_1(x)$ на погонный сантиметр, б) сосредоточенные силы P_1, $P_2, \ldots P_k$, приложенные в точках, абсциссы коих, соответственно, a_1, $a_2, \ldots a_k$. Надо различать два случая: 1) закрепление концов балки таково, что под действием данной нагрузки она может находиться в равновесии, *не встречая поддержания от грунта*. Это имеет место в следующих четырех обычных случаях закрепления концов: оба конца балки заделаны; один конец заделан, другой — подперт; один конец заделан, другой — свободен; оба конца подперты; 2) когда равновесие возможно только вследствие поддержания грунтом, т. е. когда оба конца балки свободны и когда один конец подперт, другой — свободен.

В этих двух последних случаях надо, прежде всего, определить оседание бесконечно жесткой (т. е. остающейся прямолинейной) балки, при котором она находится на данном грунте в равновесии.

Пусть будет $y = h_0 + g_0 x$; тогда сила поддержания на 1 см длины в сечении x будет

$$-K(h_0 + g_0 x)$$

и условия статического равновесия под действием внешней нагрузки и поддержания выразятся для балки, оба конца коей свободны, уравнениями:

$$(17)\begin{cases} P_1 + P_2 + \ldots + P_k + \int_0^l [F_1(x) - K(h_0 + g_0 x)]\, dx = 0 \\ P_1 a_1 + P_2 a_2 + \ldots + P_k a_k + \int_0^l [F_1(x) - K(h_0 + g_0 x)]\, x \cdot dx = 0 \end{cases}$$

из которых h_0 и g_0 найдутся.

В том случае, когда конец $x = 0$ подперт, конец же $x = l$ свободен, то $h_0 = 0$; предполагая, что опора — на уровне грунта, и обозначая через R — реакцию опоры, будем иметь уравнения:

$$-R + P_1 + P_2 + \ldots + P_k + \int_0^l [F_1(x) - Kg_0 x]\, dx = 0$$

(18)

$$P_1 a_1 + P_2 a_2 + \ldots + P_k\, \imath_k + \int_0^l [F_1(x) - Kg_0 x]\, x\, dx = 0$$

откуда найдутся R и g_0.

Полагая в общем уравнении

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + Ky = F_1(x) \tag{19}$$

$$y = Y + h_0 + g_0 x \tag{20}$$

получим

$$EI \frac{d^4 Y}{dx^4} + KY = F_1(x) - K(h_0 + g_0 x) \tag{21}$$

т. е. уравнение того же самого вида, но для нагрузки имеем

$$F(x) = F_1(x) - K(h_0 + g_0 x) \tag{22}$$

эту нагрузку будем называть «приведенной».

Таким образом для всех случаев будем иметь уравнение вида

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + Ky = F(x) \tag{1}$$

причем условия статического равновесия балки удовлетворены.

Б) После этого выделяем ту деформацию (прогиб) балки, которая для заданной балки произошла бы от внешней нагрузки при отсутствии поддержания, т. е. при $K = 0$; для этого по заданной внешней нагрузке, если надо — приведенной, составляем известным образом эпюр срезывающих сил, по нему — эпюр моментов и затем двукратным интегрированием находим прогиб y_0, если только сразу не найдется для этого случая нагрузки готовых формул в справочниках.

Пусть этот прогиб будет y_0, это будет известная функция от x, определяемая или таблично, или различными аналитическими выражениями для разных участков; это для нас не важно, но важно то, что эта функция

$$y_0 = \varphi(x) \tag{23}$$

будет не только сама непрерывна, но будет иметь непрерывную производную первого и второго порядков и будет удовлетворять граничным условиям. Значения функции $\varphi(x)$, как уже сказано, будут заданы или аналитически, или графически, или таблично.

Функция эта удовлетворяет уравнению

$$EI\frac{d^4y_0}{dx^4} = F(x) \tag{24}$$

условиям закрепления (граничным) и условиям сопряжения и составляется прямым расчетом, без того чтобы надо было решать сложные системы уравнений.

В уравнении

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} + Ky = F(x) \tag{1}$$

положим

$$y = y_0 + \eta \tag{25}$$

тогда будет

$$EI\frac{d^4\eta}{dx^4} + K\eta = F(x) - EI\frac{d^4y_0}{dx^4} - Ky_0$$

что, на основании уравнения (24), будет

$$EI\frac{d^4\eta}{dx^4} + K\eta = -K\varphi(x) \tag{26}$$

т. е. опять-таки уравнение того же вида:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} + Ky = F(x) \tag{1}$$

причем $F(x)$ — известная функция, но теперь эта функция не только сама непрерывна, но ее производные первого и второго порядков непрерывны на всем протяжении от $x = 0$ до $x = l$; более того, эта функция удовлетворяет *граничным* условиям.

Таким образом неизвестная y теперь определяется уравнением (1) и *граничными* условиями, ибо все условия сопряжения и все, что вызывалось особенностями внешней нагрузки, сосредоточенными силами и пр., вошло в функцию y_0, при определении которой не приходится для удовлетворения этих условий решать сложные системы уравнений со многими неизвестными.

Как видно, этот процесс равносилен тому, что сперва определяется форма равновесия балки под действием заданной внешней нагрузки, отбросив влияние грунта или учитывая среднее его значение, а затем рассчиты-

вается та поправка, которую надо к этой форме присовокупить, чтобы учесть влияние упругого основания или грунта, т. е. расчет ведется подобно тому, как в астрономии при рассмотрении возмущенного движения.

Итак, в дальнейшем мы можем предполагать, что функция $F(x)$ непрерывна с двумя первыми своими производными и удовлетворяет граничным условиям, в остальном — какая угодно.

«Приведение» нагрузки, указанное в п. «А», существенно, ибо иначе уравнения, выражающие граничные условия, недостаточны для полного решения задачи.

Приведение, указанное в п. «Б», не является необходимым, и все формулы, выводимые ниже, как будет показано, приложимы и для какой угодно прерывной нагрузки. Но предварительное выделение величины y_0 при сложной нагрузке упрощает расчет и, когда придется вычислять интегралы по правилу трапеций, дозволяет брать меньшее число ординат без ущерба точности результата.

§ **3.** Составим теперь выражение общего интеграла уравнения

$$y^{IV} + 4y = f(\xi) \tag{4}$$

к решению которого вопрос приводится. Для этого стоит только применить символическую методу, вошедшую теперь в бо́льшую часть руководств анализа.

По этой методе уравнение (4) напишем

$$(\delta^4 + 4)y = f(x) \tag{27}$$

следовательно символически будет

$$y = (\delta^4 + 4)^{-1} f(x) \tag{28}$$

Пусть корни уравнения

$$s^4 + 4 = 0$$

суть:

$$s_1 = 1 + i; \quad s_2 = 1 - i; \quad s_3 = -1 + i; \quad s_4 = -1 - i \tag{29}$$

как указано выше, но мы изменили их нумерацию для большей симметрии дальнейших формул.

Алгебраическая дробь

$$\frac{1}{\delta^4 + 4} = \frac{B_1}{\delta - s_1} + \frac{B_2}{\delta - s_2} + \frac{B_3}{\delta - s_3} + \frac{B_4}{\delta - s_4} \tag{30}$$

причем, по известным формулам разложения дробей на частные, будет:

$$(31)\qquad B_1=\frac{1}{4s_1^3};\quad B_2=\frac{1}{4s_2^3};\quad B_3=\frac{1}{4s_3^3};\quad B_4=\frac{1}{4s_4^3}$$

но так как

$$s_1^4=s_2^4=s_3^4=s_4^4=-4$$

то

$$(32)\quad B_1=-\frac{1}{16}s_1;\quad B_2=-\frac{1}{16}s_2,\quad B_3=-\frac{1}{16}s_3,\quad B_4=-\frac{1}{16}s_4$$

поэтому символически будет

$$(33)\qquad \begin{aligned} y=(\delta^4+4)^{-1}f(\xi)=B_1(\delta-s_1)^{-1}f(\xi)+B_2(\delta-s_2)^{-1}f(\xi)+\\ +B_3(\delta-s_3)^{-1}f(\xi)+B_4(\delta-s_4)^{-1}f(\xi)\end{aligned}$$

Но символ $(\delta-s_1)^{-1}f(\xi)$ равносилен дифференциальному уравнению

$$(\delta-s_1)z=f(\xi)$$

иначе

$$(34)\qquad z'-s_1z=f(\xi)$$

Это уравнение имеет своим интегрирующим множителем

$$e^{-s_1\xi}$$

следовательно будет

$$(e^{-s_1\xi}\cdot z)'=f(x)\cdot e^{-s_1\xi}$$

откуда следует

$$(35)\qquad z=A_1e^{s_1\xi}+e^{s_1\xi}\int_0^{\xi}e^{-s_1t}\cdot f(t)\,dt$$

причем A_1 есть постоянная произвольная; буква, по которой интегрирование производится, обозначена через t, во избежание путаницы в дальнейших выкладках, чтобы с ясностью показать, что этот интеграл есть функция своего верхнего предела ξ. За нижний предел взят 0 по причине, которая будет видна ниже.

Так как произведение $-\frac{1}{16}s_1A_1$ есть такая же произвольная постоянная, как и A_1, то, положив

$$(36)\qquad \begin{aligned} -16\Phi(\xi)=s_1e^{s_1\xi}\int_0^{\xi}e^{-s_1t}f(t)\,dt+s_2e^{s_2\xi}\int_0^{\xi}e^{-s_2t}f(t)\,dt+\\ +s_3e^{s_3\xi}\int_0^{\xi}e^{-s_3t}f(t)\,dt+s_4e^{s_4\xi}\int_0^{\xi}e^{-s_4t}f(t)\,dt\end{aligned}$$

получим общий интеграл нашего уравнения в таком виде:

$$y = A_1 e^{s_1\xi} + A_2 e^{s_2\xi} + A_3 e^{s_3\xi} + A_4 e^{s_4\xi} + \Phi(\xi) \tag{37}$$

Функция $\Phi(\xi)$ может быть короче написана так:

$$-16\Phi(\xi) = \int_0^\xi f(t) \cdot \sum s e^{s(\xi-t)}\, dt$$

причем

$$\sum s e^{s(\xi-t)} = s_1 e^{s_1(\xi-t)} + s_2 e^{s_2(\xi-t)} + s_3 e^{s_3(\xi-t)} + s_4 e^{s_4(\xi-t)}$$

На основании выражений величин s_1, s_2, s_3, s_4 легко проверить равенства:

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 + s_3 + s_4 &= 0 \\ s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 &= 0 \\ s_1^3 + s_2^3 + s_3^3 + s_4^3 &= 0 \\ s_1^4 + s_2^4 + s_3^4 + s_4^4 &= -16 \end{aligned}$$

На основании этих равенств имеем:

$$-16\Phi'(\xi) = \int_0^\xi f(t)\,\Sigma s^2 e^{s(\xi-t)} \cdot dt + f(\xi)\cdot\Sigma s = \int_0^\xi f(t)\,\Sigma s^2 e^{s(\xi-t)} \cdot dt$$

$$-16\Phi''(\xi) = \int_0^\xi f(t)\,\Sigma s^3 e^{s(\xi-t)} \cdot dt + f(\xi)\cdot\Sigma s^2 = \int_0^\xi f(t)\,\Sigma s^3 e^{s(\xi-t)} \cdot dt$$

(36′)

$$-16\Phi'''(\xi) = \int_0^\xi f(t)\,\Sigma s^4 e^{s(\xi-t)} \cdot dt + f(\xi)\cdot\Sigma s^2 = \int_0^\xi f(t)\,\Sigma s^4 e^{s(\xi-t)} \cdot dt =$$

$$= -4\int_0^\xi f(t)\cdot\Sigma e^{s(\xi-t)} \cdot dt$$

ибо

$$s_1^4 = s_2^4 = s_3^4 = s_4^4 = -4$$

Наконец,

$$-16\Phi^{IV}(\xi) = -4\int_0^\xi f(t)\cdot\Sigma s e^{s(\xi-t)} \cdot dt - 4\cdot f(\xi)\cdot\Sigma e^0 =$$

$$= -16 f(\xi) + 64\Phi(\xi)$$

откуда следует

$$\Phi^{IV}(\xi) + 4\Phi(\xi) = f(\xi)$$

Это служит поверкою, что функция $\Phi(\xi)$ есть, действительно, частное решение уравнения (4), какова бы функция $f(\xi)$ ни была, при вышеуказанных ограничениях, коим она удовлетворяет, как и функция $F(x)$.

Затем из формулы (36′) видно, что при $\xi = 0$ будет:

$$(36'') \qquad \Phi(0) = 0;\ \Phi'(0) = 0;\ \Phi''(0) = 0;\ \Phi'''(0) = 0$$

Эти равенства показывают, что при составлении граничных условий, относящихся к концу $\xi = 0$, в те уравнения, коими эти условия выражаются, функция $\Phi(\xi)$ и ее производные не входят, ибо они равны нулю. Для этого за нижний предел интеграла, коим $\Phi(\xi)$ выражается, и взят нуль.

§ 4. Общий интеграл

$$(37) \qquad y = A_1 e^{s_1\xi} + A_2 e^{s_2\xi} + A_3 e^{s_3\xi} + A_4 e^{s_4\xi} + \Phi(\xi)$$

уравнения

$$(4) \qquad y^{IV} + 4y = f(\xi)$$

состоит из двух частей: 1°) частного решения $\Phi(\xi)$ этого уравнения и 2°) общего интеграла

$$(38) \qquad Y = A_1 e^{s_1\xi} + A_2 e^{s_2\xi} + A_3 e^{s_3\xi} + A_4 e^{s_4\xi}$$

уравнения без последнего члена

$$(39) \qquad Y^{IV} + 4Y = 0$$

соответствующего уравнению (4).

Вместо общего интеграла (38) этого уравнения, можно взять интеграл

$$(40) \qquad Y = B_1 Y_1 + B_2 Y_2 + B_3 Y_3 + B_4 Y_4$$

в котором B_1, B_2, B_3, B_4 — постоянные произвольные, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 — какие угодно четыре линейно между собою независимых решения уравнения (39).

Для упрощения дальнейших вычислений, мы, следуя Коши, определим эти частные решения так, чтобы они удовлетворяли следующим условиям:

$$(41) \qquad \begin{array}{llll} Y_1(0) = 1; & Y_1'(0) = 0; & Y_1''(0) = 0; & Y_1'''(0) = 0 \\ Y_2(0) = 0; & Y_2'(0) = 1; & Y_2''(0) = 0; & Y_2'''(0) = 0 \\ Y_3(0) = 0; & Y_3'(0) = 0; & Y_3''(0) = 1; & Y_3'''(0) = 0 \\ Y_4(0) = 0; & Y_4'(0) = 0; & Y_4''(0) = 0; & Y_4'''(0) = 1 \end{array}$$

Можно бы было, положив напр.:

$$Y_1 = A_1 e^{s_1\xi} + A_2 e^{s_2\xi} + A_3 e^{s_3\xi} + A_4 e^{s_4\xi}$$

составить условия (41) и из них найти A_1, A_2, A_3, A_4, совершенно так же затем поступить для Y_2 и т. д.; но такой путь был бы сложен, поэтому проще применить общую методу Коши.

Положим, что для уравнения

$$Y^{IV} + 4Y = 0 \tag{39}$$

надо составить такое решение, которое при $\xi = 0$ удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$Y(0) = \eta_0; \quad Y'(0) = \eta_1; \quad Y''(0) = \eta_2; \quad Y'''(0) = \eta_3 \tag{42}$$

где η_0, η_1, η_2, η_3 — постоянные. Коши, как одно из приложений своей теории интегральных вычетов, дал для этого следующее правило: пусть будет

$$F(s) = s^4 + 4 \tag{43}$$

характеристическое уравнение для (39).

1°) Составляем функцию

$$F(\eta) = \eta^4 + 4 \tag{44}$$

и затем алгебраическую дробь

$$\frac{\varphi(s)}{F(s)} = \frac{F(s) - F(\eta)}{s - \eta} \cdot \frac{1}{F(s)}$$

т. е. в нашем случае:

$$\frac{s^3\eta^0 + s^2\eta^1 + s\eta^2 + \eta^3}{s^4 + 4}$$

2°) Заменяем в этой дроби показатели степени при букве η соответствующими значками, так что будет

$$\frac{\varphi(s)}{F(s)} = \frac{s^3\eta_0 + s^2\eta_1 + s\eta_2 + \eta_3}{s^4 + 4} \tag{45}$$

3°) Эту дробь, разлагаем на частные, т. е. полагаем

$$\frac{\varphi(s)}{F(s)} = \frac{B_1}{s - s_1} + \frac{B_2}{s - s_2} + \frac{B_3}{s - s_3} + \frac{B_4}{s - s_4} \tag{46}$$

определяя коэффициенты по известным формулам:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{\varphi(s_1)}{F'(s_1)} = \frac{\eta_0 s_1^3 + \eta_1 s_1^2 + \eta_2 s_1 + \eta_3}{4s_1^3} = -\frac{1}{16}(\eta_0 s_1^4 + \eta_1 s_1^3 + \eta_2 s_1^2 + \eta_3 s_1) \\
B_2 &= \frac{\varphi(s_2)}{F'(s_2)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{1}{16}(\eta_0 s_2^4 + \eta_1 s_2^3 + \eta_2 s_2^2 + \eta_3 s_2) \\
B_3 &= \frac{\varphi(s_3)}{F'(s_3)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{1}{16}(\eta_0 s_3^4 + \eta_1 s_3^2 + \eta_2 s_3^2 + \eta_3 s_3) \\
B_4 &= \frac{\varphi(s_4)}{F'(s_4)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{1}{16}(\eta_0 s_4^4 + \eta_1 s_4^3 + \eta_2 s_4^2 + \eta_3 s_4)
\end{aligned} \tag{47}$$

4°) Полагаем

$$Y = B_1 e^{s_1\xi} + B_2 e^{s_2\xi} + B_3 e^{s_3\xi} + B_4 e^{s_4\xi} \tag{48}$$

Это и есть искомое решение.

В нашем случае, как видно, будет

$$\begin{aligned} -16Y = \eta_0 &\left[s_1^4 e^{s_1\xi} + s_2^4 e^{s_2\xi} + s_3^4 e^{s_3\xi} + s_4^4 e^{s_4\xi}\right] + \\ + \eta_1 &\left[s_1^3 e^{s_1\xi} + s_2^3 e^{s_2\xi} + s_3^3 e^{s_3\xi} + s_4^3 e^{s_4\xi}\right] + \\ + \eta_2 &\left[s_1^2 e^{s_1\xi} + s_2^2 e^{s_2\xi} + s_3^2 e^{s_3\xi} + s_4^2 e^{s_4\xi}\right] + \\ + \eta_3 &\left[s_1 e^{s_1\xi} + s_2 e^{s_2\xi} + s_3 e^{s_3\xi} + s_4 e^{s_4\xi}\right] \end{aligned} \tag{49}$$

Для упрощения этих формул, заметим, что

$$s_1^4 = s_2^4 = s_3^4 = s_4^4 = -4$$

поэтому множитель при η_0 есть

$$-4\left[e^{s_1\xi} + e^{s_2\xi} + e^{s_3\xi} + e^{s_4\xi}\right]$$

Стоит только положить в формуле (49)

$$\eta_0 = 1;\ \eta_1 = 0;\ \eta_2 = 0;\ \eta_3 = 0$$

и мы получим на основании условий (41):

$$Y_1 = \frac{1}{4}\left[e^{s_1\xi} + e^{s_2\xi} + e^{s_3\xi} + e^{s_4\xi}\right] \tag{50}$$

а так как

$$e^{s_1\xi} = e^{(1+i)\xi} = e^{\xi}\cdot e^{i\xi};\quad e^{s_3\xi} = e^{(-1+i)\xi} = e^{-\xi}\cdot e^{i\xi}$$
$$e^{s_2\xi} = e^{(1-i)\xi} = e^{\xi}\cdot e^{-i\xi};\quad e^{s_4\xi} = e^{(-1-i)\xi} = e^{-\xi}\cdot e^{-i\xi}$$

то будет:

$$e^{s_1\xi} + e^{s_2\xi} = 2e^{\xi}\cdot\cos\xi;\quad e^{s_3\xi} + e^{s_4\xi} = 2e^{-\xi}\cos\xi$$

следовательно

$$Y_1 = \frac{1}{2}(e^{\xi} + e^{-\xi})\cos\xi = \operatorname{Ch}\xi\cos\xi \tag{51}$$

Совершенно так же, полагая

$$\eta_0 = 0,\ \eta_1 = 0;\quad \eta_2 = 0,\ \eta_3 = 1$$

видим, что множитель при η_3 в формуле (49) равен $-16Y_4$, вместе с тем этот множитель равен производной множителя при η_0, значит будет

$$Y_4 = -\frac{1}{4}Y_1' \tag{52}$$

т. е.

$$Y_4 = \frac{1}{4}\operatorname{Ch}\xi\sin\xi - \frac{1}{4}\operatorname{Sh}\xi\cos\xi \tag{53}$$

Совершенно подобным образом увидим, что

$$Y_3 = Y_4' \tag{54}$$

т. е.

$$Y_3 = \frac{1}{2}\operatorname{Sh}\xi \sin\xi \tag{55}$$

Наконец,

$$Y_2 = Y_3' \tag{56}$$

т. е.

$$Y_2 = \frac{1}{2}\operatorname{Ch}\xi \sin\xi + \frac{1}{2}\operatorname{Sh}\xi \cos\xi \tag{57}$$

Таким образом получаем следующие формулы:

$$\begin{cases} Y_1 = \operatorname{Ch}\xi \cos\xi \\ Y_2 = \frac{1}{2}(\operatorname{Ch}\xi \sin\xi + \operatorname{Sh}\xi \cos\xi) \\ Y_3 = \frac{1}{2}\operatorname{Sh}\xi \sin\xi \\ Y_4 = \frac{1}{4}(\operatorname{Ch}\xi \sin\xi - \operatorname{Sh}\xi \cos\xi) \end{cases} \tag{58}$$

к которым здесь же присоединим и таблицу производных этих функций.

(58′)

k	Y_k	Y_k'	Y_k''	Y_k'''
1	$Y_1 = \operatorname{Ch}\xi \cos\xi$	$-4Y_4$	$-4Y_3$	$-4Y_2$
2	$Y_2 = \frac{1}{2}(\operatorname{Ch}\xi \sin\xi + \operatorname{Sh}\xi \cos\xi)$	Y_1	$-4Y_4$	$-4Y_3$
3	$Y_3 = \frac{1}{2}\operatorname{Sh}\xi \sin\xi$	Y_2	Y_1	$-4Y_4$
4	$Y_4 = \frac{1}{4}(\operatorname{Ch}\xi \sin\xi - \operatorname{Sh}\xi \cos\xi)$	Y_3	Y_2	Y_1

Вот эти-то функции,[1] при расчете балок *постоянного* сечения, являясь как бы фундаментальными, избавляют от необходимости составлять условия

[1] Проф. Н. П. Пузыревский, после выхода первого издания этой книги, обратил мое внимание, что функции, отличающиеся лишь постоянными множителями от функций (58), применены им для расчета балок на упругом основании, в его литографированном курсе «Оснований и фундаментов», изданном в 1923 г., под названием «повторяющихся» функций. Проф. Пузыревский пришел к этим функциям совершенно иным путем, нежели сделано здесь. Как видно, метода Коши приводит по необходимости к этим функциям, выбором же решений, удовлетворяющих условиям (41), Коши постоянно пользовался в своих статьях по математической физике, напечатанных более 100 лет тому назад.

сопряжения при прерывной нагрузке и, таким образом, дают полное решение этого вопроса в самом общем виде, поэтому общий интеграл уравнения (4) мы будем писать так:

$$y = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3 + A_4 Y_4 + \Phi(\xi) \tag{59}$$

причем A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные.

§ **5.** Остается еще упростить и избавить от мнимых знаков выражение

$$-16\Phi(\xi) = \int_0^\xi [s_1 e^{s_1(\xi-t)} + s_2 e^{s_2(\xi-t)} + s_3 e^{s_3(\xi-t)} + s_4 e^{s_4(\xi-t)}] f(t)\,dt$$

Сличая множитель в скобках под знаком интеграла с множителем при η_3 в формуле (49), который, как мы видели, равен $-16Y_4$, видим, что стоящий под знаком интеграла отличается от последнего заменою в выражении Y_4 буквы ξ через $\xi - t$, следовательно будет

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \int_0^\xi Y_4(\xi - t)\cdot f(t)\,dt = \\ &= \frac{1}{4}\int_0^\xi [\mathrm{Ch}(\xi-t)\sin(\xi-t) - \mathrm{Sh}(\xi-t)\cos(\xi-t)] f(t)\,dt \end{aligned} \tag{60}$$

Развернув и собрав, соответственно, члены, имеем

$$Y_4(\xi - t) = 4[Y_4(\xi) Y_1(t) - Y_1(\xi) Y_4(t) + Y_2(\xi) Y_3(t) - Y_3(\xi) Y_2(t)] \tag{61}$$

Положим:

$$\begin{aligned} Z_1(\xi) &= -4\int_0^\xi Y_4(t)\cdot f(t)\,dt \\ Z_2(\xi) &= 4\int_0^\xi Y_3(t)\cdot f(t)\,dt \\ Z_3(\xi) &= -4\int_0^\xi Y_2(t)\cdot f(t)\,dt \\ Z_4(\xi) &= 4\int_0^\xi Y_1(t)\cdot f(t)\,dt \end{aligned} \tag{62}$$

тогда будет

$$4\Phi(\xi) = Y_1(\xi)\cdot Z_1(\xi) + Y_2(\xi) Z_2(\xi) + Y_3(\xi) Z_3(\xi) + Y_4(\xi) Z_4(\xi) \tag{63}$$

и следовательно, общий интеграл уравнения (4), опуская аргумент ξ, напишется так:

$$y = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3 + A_4 Y_4 + \\ + \frac{1}{4}(Y_1 Z_1 + Y_2 Z_2 + Y_3 Z_3 + Y_4 Z_4) \tag{64}$$

причем A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 — функции переменной ξ, определяемые равенствами (62).

В этой форме и имел в виду представить интеграл уравнения (4) Хаяси, составив те уравнения (8), которыми определяются функции Z по Лагранжевой методе изменения произвольных постоянных, но если не ввести в рассмотрение функций Y_k, то выкладка становится столь сложной, что довести ее до конца представляется затруднительным, поэтому эта выкладка у Хаяси, а значит, и у всех тех авторов, на коих он ссылается, до конца не доведена.

Само собою разумеется, что этими общими формулами следует пользоваться в тех случаях, когда известные простые приемы нахождения частного решения уравнения

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} + Ky = F(x)$$

или ему равносильного

$$y^{IV} + 4y = f(\xi)$$

не применимы, напр. когда функция $F(x)$ задана графически или таблично.

При составлении частного решения этими приемами надо заботиться, однако, чтобы функция $\Phi(\xi)$ и ее производные удовлетворяли условиям

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = \Phi''(0) = \Phi'''(0) = 0$$

и были бы определены для всей длины балки, хотя бы и различными аналитическими выражениями для разных участков ее.

В том случае, когда вычисление функций Z по формулам (62) приводит или к слишком сложным выражениям, или же интегралы не выражаются в конечном виде, их весьма просто вычислить по приближению с любою степенью точности, пользуясь, напр., формулой трапеций, как простейшей.

Для вычисления уклона касательной к упругой линии, изгибающего момента и срезывающей силы надо иметь производные функции $\Phi(\xi)$, а именно:

$$\Phi'(\xi),\ \Phi''(\xi) \quad \text{и} \quad \Phi'''(\xi)$$

Составим выражения этих производных и покажем, что они выражаются через функции Y_k и Z_k.

В самом деле, $\Phi(\xi)$ есть такое частное решение уравнения (4), которое само и его производные первых трех порядков при $\xi = 0$ обращаются в нуль — такое решение единственное, и значит, каким бы способом оно найдено ни было, результат всегда будет один и тот же.

Представим же себе, что написав формулу

$$\Phi(\xi) = Z_1 Y_1 + Z_2 Y_2 + Z_3 Y_3 + Z_4 Y_4 \tag{65}$$

или короче

$$\Phi(\xi) = \Sigma Z Y \tag{65'}$$

мы стали бы искать неизвестные Z по методе Лагранжа; тогда для их определения мы поставили бы условия, что первые три производные $\Phi(\xi)$ представляются при переменных Z так же, как и при Z постоянных, что и дает первые три уравнения Лагранжевой методы, а именно:

$$\begin{aligned} \Sigma Z' Y &= 0 \\ \Sigma Z' Y' &= 0 \\ \Sigma Z' Y'' &= 0 \end{aligned} \tag{66}$$

так что, на основании этих условий, будет:

$$\begin{aligned} \Phi'(\xi) &= \Sigma Z Y' = Z_1 Y_1' + Z_2 Y_2' + Z_3 Y_3' + Z_4 Y_4' \\ \Phi''(\xi) &= \Sigma Z Y'' = Z_1 Y_1'' + Z_2 Y_2'' + Z_3 Y_3'' + Z_4 Y_4'' \\ \Phi'''(\xi) &= \Sigma Z Y''' = Z_1 Y_1''' + Z_2 Y_2''' + Z_3 Y_3''' + Z_4 Y_4''' \end{aligned}$$

В § 4 приведены формулы (58'), коими выражаются производные функций Y_k через эти функции; на основании этих выражений получим:

$$\begin{aligned} \Phi'(\xi) &= -4Z_1 Y_4 + Z_2 Y_1 + Z_3 Y_2 + Z_4 Y_3 \\ \Phi''(\xi) &= -4Z_1 Y_3 - 4Z_2 Y_4 + Z_3 Y_1 + Z_4 Y_2 \\ \Phi'''(\xi) &= -4Z_1 Y_2 - 4Z_2 Y_3 - 4Z_3 Y_4 + Z_4 Y_1 \end{aligned} \tag{67}$$

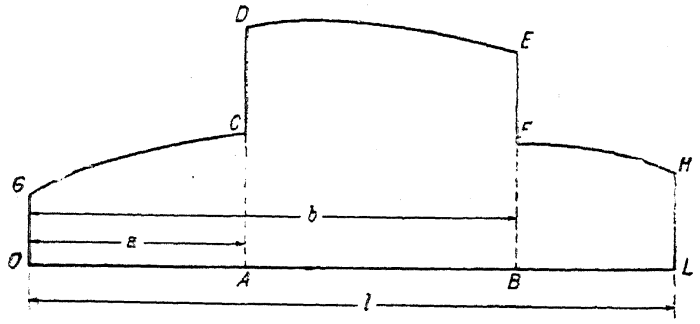
Эти формулы показывают, что для вычисления написанных производных — других функций, кроме Z_k и Y_k, входящих в выражение самого $\Phi(\xi)$, не требуется.

Таким образом вычисление $\Phi(\xi)$ приводится в общем случае к вычислению функций Z по формуле (62), которое затруднений не представляет.

§ **6.** Мы предполагали во всех предыдущих рассуждениях, что нагрузка распределена непрерывно по всей длине балки, т. е. что фун-

кция $F(x)$ непрерывна на всем протяжении от $x=0$ до $x=l$, а значит, функция $f(\xi)$ непрерывна на всем протяжении от $\xi=0$ до $\xi=\lambda$.

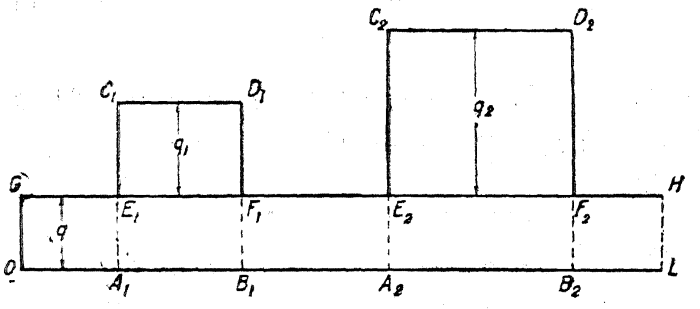
Покажем теперь, каким образом это ограничение для *всех* встречающихся в практике[1] случаев прерывной нагрузки отпадает и как в этом случае выражаются функции Z_k и функция $\Phi(\xi)$.



Фиг. 1.

Типичные, встречающиеся в практике случаи прерывной нагрузки следующие.

1°) Нагрузка на различных участках балки непрерывна на каждом участке в отдельности, но на разных участках представляется различным образом и в ряде точек имеет скачки конечной величины и схематически



Фиг. 2.

изображается, напр. для трех участков, чертежом фиг. 1, т. е. на протяжении от $x=0$ до $x=a$ нагрузка изображается кривою GC, от $x=a$ до $x=b$ — кривою DE, от $x=b$ до $x=l$ — кривою FH, таких участков может быть сколько угодно.

---

[1] Наши формулы, да и всякие другие, не применимы для таких, напр., функций, как $\operatorname{tang}\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)$, которые представляют скорее аналитические курьезы, чем функции, нужные для практических приложений. Такие функции из нашего рассмотрения исключаются.

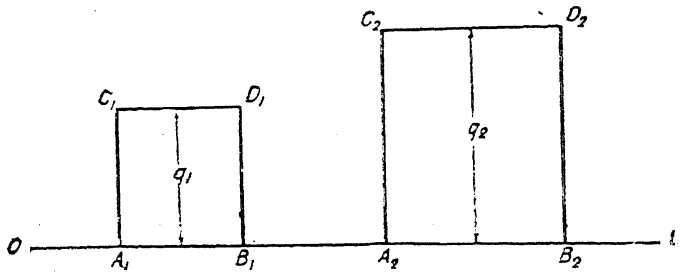
Наиболее часто встречающиеся случаи такой прерывной нагрузки таковы.

а) По всей балке действует постоянная нагрузка, а на ней местами также постоянная добавочная нагрузка, что, напр., изображается чертежом фиг. 2, причем абсциссы точек A_1, B_1, A_2, B_2, соответственно, суть a_1, b_1, a_2, b_2 или для переменной ξ: α_1, β_1, α_2, β_2.

б) В частном случае ордината OG может равняться нулю, так что нагружены будут отдельные места балки, как показывает чертеж фиг. 3.

2°) Кроме нагрузок предыдущего рода, имеются нагрузки сосредоточенными силами P_1, P_2, P_3, ... P_i, приложенными, соответственно, в точках:

$$x = a_1, \quad x = a_2, \quad x = a_3, \quad \ldots \quad x = a_i$$



Фиг. 3.

Мы и рассмотрим все эти типичные случаи, чаще всего встречающиеся в практике.

§ **7.** Для первого случая, принимая для простоты три участка, аналитическое задание нагрузки будет таково:

$$\begin{array}{lll} \text{для } 0 \leqq x \leqq a & \text{функция} & F(x) = F_1(x) \\ \text{» } a \leqq x \leqq b & \text{»} & F(x) = F_2(x) \\ \text{» } b \leqq x \leqq l & \text{»} & F(x) = F_3(x) \end{array}$$

соответственно чему будет:

$$\begin{array}{lll} \text{для } 0 \leqq \xi \leqq \alpha & \text{функция} & f(\xi) = f_1(\xi) \\ \text{» } \alpha \leqq \xi \leqq \beta & \text{»} & f(\xi) = f_2(\xi) \\ \text{» } \beta \leqq \xi \leqq \lambda & \text{»} & f(\xi) = f_3(\xi) \end{array}$$

причем, как и раньше,

$$\frac{x}{L} = \xi; \quad \frac{a}{L} = \alpha; \quad \frac{b}{L} = \beta; \quad f_1(\xi) = \frac{4}{K} F_1(x); \ldots \text{ и т. д.}$$

На основании этих заданий, функции Z_k и $\Phi(\xi)$ будут выражаться так:

Первый участок: $0 \leqq \xi \leqq \alpha$, на нем $f(\xi) = f_1(\xi)$.

$$
\begin{aligned}
Z_{11} &= -4\int_0^{\xi} Y_4(t)\cdot f_1(t)\,dt \\
Z_{21} &= 4\int_0^{\xi} Y_3(t)\cdot f_1(t)\,dt \\
Z_{31} &= -4\int_0^{\xi} Y_2(t)\cdot f_1(t)\,dt \\
Z_{41} &= 4\int_0^{\xi} Y_1(t)\cdot f_1(t)\,dt
\end{aligned}
\tag{68}
$$

$$\Phi(\xi) = Z_{11}Y_1 + Z_{21}Y_2 + Z_{31}Y_3 + Z_{41}Y_4 \tag{69}$$

Второй участок: $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$, на нем $f(\xi) = f_2(\xi)$.

$$
\begin{aligned}
Z_{12} &= -4\int_0^{\alpha} Y_4(t)\,f_1(t)\,dt - 4\int_{\alpha}^{\xi} Y_4(t)\cdot f_2(t)\cdot dt \\
Z_{22} &= 4\int_0^{\alpha} Y_3(t)\,f_1(t)\,dt + 4\int_{\alpha}^{\xi} Y_3(t)\,f_2(t)\cdot dt \\
Z_{32} &= -4\int_0^{\alpha} Y_2(t)\cdot f_1(t)\,dt - 4\int_{\alpha}^{\xi} Y_2(t)\cdot f_2(t)\,dt \\
Z_{42} &= 4\int_0^{\alpha} Y_1(t)\cdot f_1(t)\,dt + 4\int_{\alpha}^{\xi} Y_1(t)\cdot f_2(t)\,dt
\end{aligned}
\tag{70}
$$

$$\Phi(\xi) = Z_{12}Y_1 + Z_{22}Y_2 + Z_{32}Y_3 + Z_{42}Y_4 \tag{71}$$

Третий участок: $\beta \leqq \xi \leqq l$, на нем $f(\xi) = f_3(\xi)$.

$$Z_{13} = -4\int_0^{\alpha} Y_4(t)\cdot f_1(t)\,dt - 4\int_{\alpha}^{\beta} Y_4(t)\cdot f_2(t)\,dt - 4\int_{\beta}^{\xi} Y_4(t)\cdot f_3(t)\,dt$$

$$Z_{23} = \quad 4\int_0^{\alpha} Y_3(t)\,f_1(t)\,dt + 4\int_{\alpha}^{\beta} Y_3(t)\cdot f_2(t)\,dt + 4\int_{\beta}^{\xi} Y_3(t)\,f_3(t)\,dt$$

(72)

$$Z_{33} = -4\int_0^{\alpha} Y_2(t)\cdot f_1(t)\,dt - 4\int_{\alpha}^{\beta} Y_2(t)\cdot f_2(t)\,dt - 4\int_{\beta}^{\xi} Y_2(t)\cdot f_3(t)\,dt$$

$$Z_{43} = \quad 4\int_0^{\alpha} Y_1(t)\cdot f_1(t)\,dt + 4\int_{\alpha}^{\beta} Y_1(t)\cdot f_2(t)\,dt + 4\int_{\beta}^{\xi} Y_1(t)\cdot f_3(t)\,dt$$

(73) $$\Phi(\xi) = Z_{13}Y_1 + Z_{23}Y_2 + Z_{33}Y_3 + Z_{43}Y_4$$

Совершенно подобным же образом составляются общие формулы для любого числа участков.

§ 8. Переходя к рассмотрению частных случаев нагрузки, заметим, что тогда проще пользоваться формулой (60)

$$\Phi(\xi) = \int_0^{\xi} Y_4(\xi - t) f(t)\,dt$$

ибо в этих частных случаях функция $f(t)$ на отдельных участках имеет постоянное значение, на основании же таблицы производных функций Y_k имеем

(74) $$\int Y_4(\xi - t)\cdot dt = \frac{1}{4} Y_1(\xi - t) + C$$

причем C — произвольная постоянная.

На основании этой формулы имеем следующие результаты:

а) *Нагрузка постоянная по всей длине балки:*

$$0 \leqq \xi \leqq \lambda \quad \text{функция} \quad f(\xi) = q$$

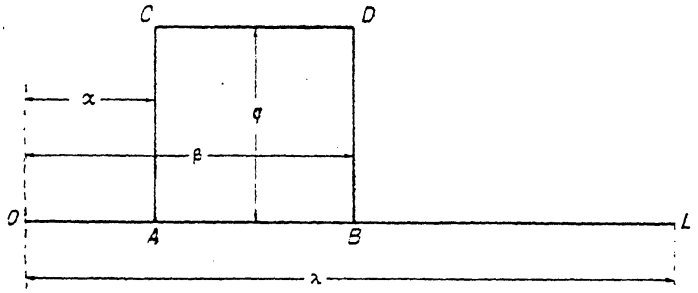
(75) $$\Phi(\xi) = q\int_0^{\xi} Y_4(\xi - t)\,dt = \frac{1}{4} q\,[1 - Y_1(\xi)]$$

б) *Нагрузка, постоянная на протяжении от $x=a$ до $x=b$, в остальных местах равна нулю.*

Пусть $\frac{a}{L}=\alpha$; $\frac{b}{L}=\beta$, тогда функция $f(\xi)$ изображается чертежом фиг. 4, следовательно имеется три участка:

Первый участок: $0\leqq\xi\leqq\alpha$, на нем $f(\xi)=0$, следовательно

$$\Phi(\xi)=0$$



Фиг. 4.

Второй участок: $\alpha\leqq\xi\leqq\beta$, на нем $f(\xi)=q$, следовательно

$$\Phi(\xi)=\int_0^{\xi} Y_4(\xi-t)\cdot f(t)\,dt=\int_0^{\alpha}+\int_{\alpha}^{\xi}=$$

$$=q\int_{\alpha}^{\xi} Y_4(\xi-t)\,dt=\frac{1}{4}q\,[1-Y_1(\xi-\alpha)] \tag{76}$$

Третий участок: $\beta\leqq\xi\leqq\lambda$, на нем $f(\xi)=0$, следовательно

$$\Phi(\xi)=\int_0^{\xi}=\int_0^{\alpha}+\int_{\alpha}^{\beta}+\int_{\beta}^{\xi}=$$

$$=q\int_{\alpha}^{\beta} Y_4(\xi-t)\,dt=\frac{1}{4}q\,[Y_1(\xi-\beta)-Y_1(\xi-\alpha)] \tag{77}$$

в) *Нагрузка состоит из двух местных, равномерно распределенных, неравных нагрузок.*

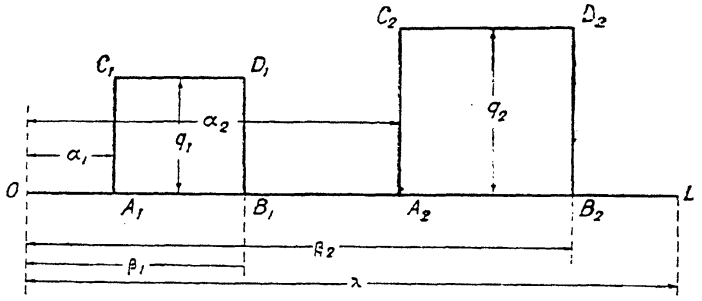
Положим, что в этом случае функция $f(\xi)$ изображается чертежом фиг. 5, и значит, имеется *пять* участков, тогда будет:

Первый участок: $0 \leqq \xi \leqq \alpha_1$, на нем $f(\xi) = 0$, следовательно

$$\Phi(\xi) = 0$$

Второй участок: $\alpha_1 \leqq \xi \leqq \beta_1$, на нем $f(\xi) = q_1$, следовательно

$$\Phi(\xi) = \int_0^{\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\xi} = q_1 \int_{\alpha_1}^{\xi} Y_4(\xi - t)\, dt = \frac{1}{4} q_1 [1 - Y_1(\xi - \alpha_1)] \tag{78}$$



Фиг. 5.

Третий участок: $\beta_1 \leqq \xi \leqq \alpha_2$, на нем $f(\xi) = 0$, следовательно

$$\Phi(\xi) = \int_0^{\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} + \int_{\beta_1}^{\xi} = q_1 \int_{\alpha_1}^{\beta_1} Y_4(\xi - t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{4} q_1 [Y_1(\xi - \beta_1) - Y_1(\xi - \alpha_1)] \tag{79}$$

Четвертый участок: $\alpha_2 \leqq \xi \leqq \beta_2$, на нем $f(\xi) = q_2$, следовательно

$$\Phi(\xi) = \int_0^{\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} + \int_{\beta_1}^{\alpha_2} + \int_{\alpha_2}^{\xi} =$$

$$= \frac{1}{4} q_1 [Y_1(\xi - \beta_1) - Y_1(\xi - \alpha_1)] + \frac{1}{4} q_2 [1 - Y_1(\xi - \alpha_2)] \tag{80}$$

Пятый участок: $\beta_2 \leqq \xi \leqq \lambda$, на нем $f(\xi) = 0$, следовательно

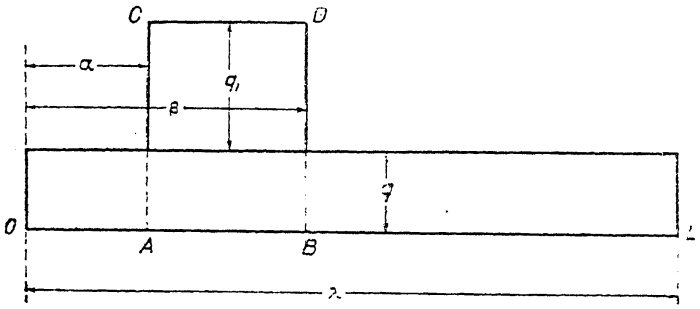
$$\Phi(\xi) = \int_0^{\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} + \int_{\beta_1}^{\alpha_2} + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} + \int_{\beta_2}^{\xi} = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} =$$

$$= \frac{1}{4} q_1 [Y_1(\xi - \beta_1) - Y_1(\xi - \alpha_1)] + \frac{1}{4} q_2 [Y_1(\xi - \beta_2) - Y_1(\xi - \alpha_2)] \tag{81}$$

Само собою очевидно, каким образом эти формулы обобщаются на любое число участков.

г) *Нагрузка состоит из равномерно распределенной по всей длине балки и местной на одном участке.*

Пусть $f(\xi)$ изображается чертежом фиг. 6.

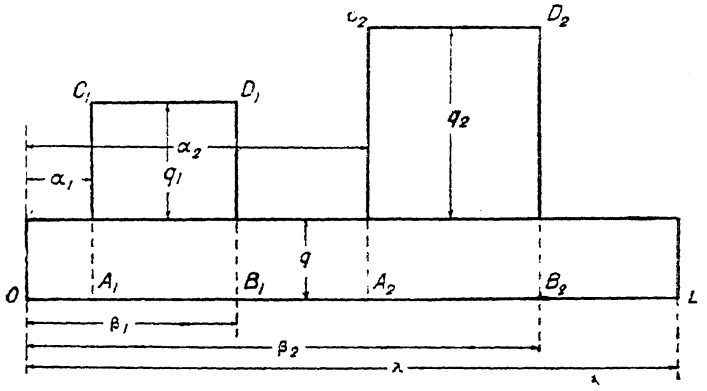


Фиг. 6.

В этом случае, очевидно, $\Phi(\xi)$ получится как «наложение» на равномерную нагрузку q по всей длине балки местной нагрузки q_1, значит будет:

Первый участок: $0 \leqq \xi \leqq \alpha_1$, на нем $f(\xi) = q$, следовательно

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi)] \tag{82}$$



Фиг. 7.

Второй участок: $\alpha_1 \leqq \xi \leqq \beta_1$, на нем $f(\xi) = q + q_1$, следовательно

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi)] + \frac{1}{4} q_1 [1 - Y_1(\xi - \alpha_1)] \tag{83}$$

Третий участок: $\beta_1 \leqq \xi \leqq \lambda$, на нем $f(\xi) = q$, следовательно

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi)] + \frac{1}{4} q_1 [Y_1(\xi - \beta_1) - Y_1(\xi - \alpha_1)] \tag{84}$$

д) *Нагрузка состоит из равномерно распределенной на всей длине балки и местной на двух участках.*

Пусть $f(\xi)$ изображается чертежом Фиг. 7, так что получается пять участков, на коих будет:

Первый участок: $0 \leqq \xi \leqq \alpha_1$, на нем $f(\xi) = q$, следовательно

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi)] \tag{85}$$

Второй участок: $\alpha_1 \leqq \xi \leqq \beta_1$, на нем $f(\xi) = q + q_1$, следовательно

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi)] + \frac{1}{4} q_1 [1 - Y_1(\xi - \alpha_1)] \tag{86}$$

Третий участок: $\beta_1 \leqq \xi \leqq \alpha_2$, на нем $f(\xi) = q$, следовательно

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi)] + \frac{1}{4} q_1 [Y_1(\xi - \beta_1) - Y_1(\xi - \alpha_1)] \tag{87}$$

Четвертый участок: $\alpha_2 \leqq \xi \leqq \beta_2$, на нем $f(\xi) = q + q_2$, следовательно

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi)] + \frac{1}{4} q_1 [Y_1(\xi - \beta_1) - Y_1(\xi - \alpha_1)] + \frac{1}{4} q_2 [1 - Y_1(\xi - \alpha_2)] \tag{88}$$

Пятый участок: $\beta_2 \leqq \xi \leqq \lambda$, на нем $f(\xi) = q$, следовательно

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi)] + \frac{1}{4} q_1 [Y_1(\xi - \beta_1) - Y_1(\xi - \alpha_1)] + \frac{1}{4} q_2 [Y_1(\xi - \beta_2) - Y_1(\xi - \alpha_2)] \tag{89}$$

Само собою очевидно, как эти формулы обобщаются на любое число местных нагрузок поверх равномерно распределенной по всей длине балки.

Заметим, что все эти формулы пишутся сразу, без всяких вычислений, не требуя составления каких бы то ни было уравнений, выражающих условия сопряжения различных участков, а таких уравнений при обычной методе пришлось бы для последнего случая составить 16 с 16 неизвестными.

§ **9.** Остается показать, как представляется функция $\Phi(\xi)$ для сосредоточенных сил.

Рассмотрим сперва одну силу, приложенную в точке $x = a$. Для этого стоит только обратиться к случаю нагрузки, изображенному на чертеже фиг. 8, и вообразить, что точки A и B, соответствующие абсциссам

$$x = a \quad \text{и} \quad x = b$$

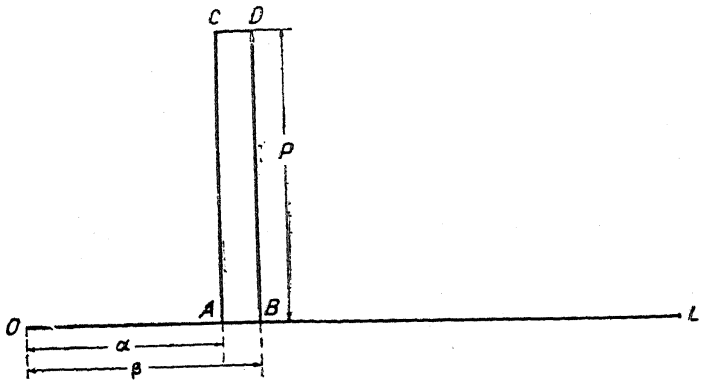
неопределенно сближаются, полная же величина нагрузки, т. е. площадь $ACDB$, остается при этом постоянно равной P.

Обозначая ординату

$$AC = BD = P$$

и разность

$$b - a = s$$



Фиг. 8.

будем, следовательно, иметь равенство

(*) $$ps = P$$

При переходе от уравнения

(1) $$EI\frac{d^4y}{dx^4} + Ky = F(x)$$

к переменной

$$\xi = \frac{x}{L}$$

и уравнению

(4) $$\frac{d^4y}{d\xi^4} + 4y = f(\xi)$$

будет

$$f(\xi) = \frac{4}{K} \cdot F(x)$$

значит в нашем случае в уравнении

$$y^{IV} + 4y = q$$

будет

$$q = \frac{4p}{K} \tag{90}$$

Положив

$$\frac{a}{L} = \alpha; \quad \frac{b}{L} = \beta; \quad \frac{s}{L} = \sigma$$

будем иметь

$$\beta = \alpha + \sigma$$

при условии

$$p \cdot \sigma \cdot L = P \tag{91}$$

Обращаясь к формулам (77), (78) и (79), видим, что при всяком σ будет:

1) при $0 \leqq \xi \leqq \alpha$ $\quad \Phi(\xi) = 0$

2) » $\alpha \leqq \xi \leqq \alpha + \sigma$ $\quad \Phi(\xi) = \frac{1}{4} q - \frac{1}{4} q \cdot Y_1(\xi - \alpha)$

3) » $\alpha + \sigma \leqq \xi \leqq \lambda$ $\quad \Phi(\xi) = \frac{1}{4} q [Y_1(\xi - (\alpha + \sigma)) - Y_1(\xi - \alpha)]$

При бесконечно малом σ первый участок остается без перемены, второй в пределе исчезает, для третьего, который тогда становится вторым, будет

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4} q \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} [Y_1(\xi - \alpha)] \cdot \sigma = q\sigma \cdot Y_4(\xi - \alpha) = \frac{4ps}{KL} Y_4(\xi - \alpha)$$

но произведение ps по условию остается при неопределенном уменьшении s постоянным и равным P, значит в пределе будет

$$\Phi(\xi) = \frac{4P}{KL} \cdot Y_4(\xi - \alpha) \tag{92}$$

Положим теперь, что имеется несколько сосредоточенных сил:

$$P_1, \; P_2, \; P_3, \; \ldots \; P_j$$

приложенных, соответственно, в точках:

$$x = \alpha_1; \quad x = a_2; \quad x = a_3; \quad \ldots \quad x = a_j$$

для которых значения переменной ξ суть:

$$\frac{a_1}{L} = \alpha_1; \quad \frac{a_2}{L} = \alpha_2; \quad \frac{a_3}{L} = \alpha_3; \quad \ldots \quad \frac{a_j}{L} = \alpha_j$$

Составив схему нагрузки и распределения участков по наложении (фиг. 9), получим:

Первый участок: $0 \leqq \xi \leqq \alpha_1$,

$$\Phi(\xi) = 0$$

Второй участок: $\alpha_1 \leqq \xi \leqq \alpha_2$,

$$\Phi(\xi) = \frac{4P_1}{KL} Y_4(\xi - \alpha_1)$$

Третий участок: $\alpha_2 \leqq \xi \leqq \alpha_3$,

$$\Phi(\xi) = \frac{4}{KL}[P_1 Y_4(\xi - \alpha_1) + P_2 Y_4(\xi - \alpha_2)] \tag{93}$$

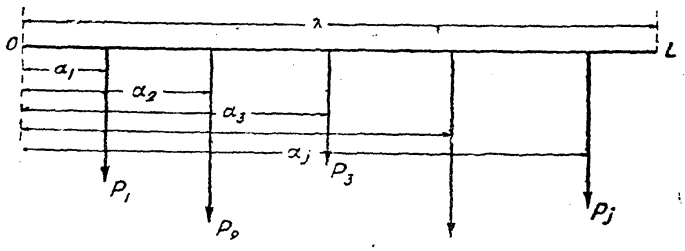
. . . . . .

$(j-1)$-й участок: $\alpha_{j-1} \leqq \xi \leqq \alpha_j$,

$$\Phi(\xi) = \frac{4}{KL} \sum_{n=1}^{n=j-1} P_n Y_4(\xi - \alpha_n)$$

j-й участок: $\alpha_j \leqq \xi \leqq \lambda$,

$$\Phi(\xi) = \frac{4}{KL} \sum_{n=1}^{n=j} P_n Y_4(\xi - \alpha_n)$$



Фиг. 9.

Как видно, и эти формулы пишутся сразу без всяких вычислений и не требуют ни составления, ни решения каких бы то ни было уравнений, выражающих условия сопряжения.

§ 10. Мы привели в § 5 формулы (67), дающие общие выражения производных $\Phi'(\xi)$; $\Phi''(\xi)$ и $\Phi'''(\xi)$, которые нужны как для составления граничных условий, так и для вычисления изгибающих моментов и срезывающих сил.

Все эти формулы являются в сущности следствием общего выражения

$$\Phi(\xi) = \int_0^{\xi} Y_4(\xi - t) \cdot f(t)\, dt \tag{60}$$

от которого если брать производную по переменной ξ, то получим

$$\Phi'(\xi) = \int_0^{\xi} Y_4'(\xi - t) f(t) \cdot dt + Y_4(0) \cdot f(\xi) \tag{94}$$

но $Y_4(0) = 0$, поэтому будет

$$\Phi'(\xi) = \int_0^{\xi} Y_4'(\xi - t) \cdot f(t)\, dt = \int_0^{\xi} Y_3(\xi - t) \cdot f(t)\, dt \tag{95}$$

Совершенно так же будет:

$$\Phi''(\xi) = \int_0^{\xi} Y_4''(\xi - t) f(t)\, dt = \int_0^{\xi} Y_2(\xi - t) f(t)\, dt \tag{96}$$

$$\Phi'''(\xi) = \int_0^{\xi} Y_4'''(\xi - t) f(t)\, dt = \int_0^{\xi} Y_1(\xi - t) f(t)\, dt \tag{97}$$

ибо

$$Y_3(0) = Y_2(0) = 0$$

Все эти выражения безусловно справедливы, когда функция $f(\xi)$ в пределах изменения переменной ξ от 0 до λ повсюду *непрерывна*, но для функции разрывной эти формулы требуют проверки.

Таким образом надо рассмотреть, которые же из формул (94)—(97) имеют место для прерывной нагрузки и для какой; для этого надо обратиться к самому определению производной

$$\Phi'(\xi) = \text{пред}\, \frac{\Phi(\xi + \varepsilon) - \Phi(\xi)}{\varepsilon}$$

и, составив отношение

$$\frac{\Phi(\xi + \varepsilon) - \Phi(\xi)}{\varepsilon}$$

перейти к его пределу при $\varepsilon = 0$.

Удерживая лишь члены первого порядка относительно ε, получим

$$\Phi(\xi + \varepsilon) - \Phi(\xi) = \int_0^{\xi+\varepsilon} Y_4(\xi + \varepsilon - t) f(t)\, dt - \int_0^{\xi} Y_4(\xi - t) f(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{\xi} [Y_4(\xi + \varepsilon - t) - Y_4(\xi - t)] f(t)\, dt + \int_{\xi}^{\xi+\varepsilon} Y_4(\xi + \varepsilon - t) \cdot f(t)\, dt =$$

$$\int_0^{\xi} Y_4'(\xi - t) \cdot f(t)\, dt + \int_{\xi}^{\xi+\varepsilon} Y_4(\xi - t) f(t)\, dt + \varepsilon \int_{\xi}^{\xi+\varepsilon} Y_4'(\xi - t) \cdot f(t)\, dt$$

Но по теореме о средней будет:

$$(98)\quad \begin{cases} \int_{\xi}^{\xi+\varepsilon} Y_4(\xi-t)f(t)\,dt = Y_4(-\theta\varepsilon)\cdot\int_{\xi}^{\xi+\varepsilon} f(t)\,dt & 0<\theta<1 \\ \int_{\xi}^{\xi+\varepsilon} Y_4'(\xi-t)\cdot f(t)\,dt = Y_4'(-\theta_1\varepsilon)\int_{\xi}^{\xi+\varepsilon} f(t)\,dt & 0<\theta_1<1 \end{cases}$$

Когда функция $f(t)$ такова, что при $t=\xi$ она претерпевает разрыв непрерывности, то в нашем случае этот разрыв может быть двоякого рода:

1°) При переходе через значение $t=\xi$ функция $f(t)$ делает скачок *конечной* величины, как на чертежах фиг. 1—7.

2°) При точке $t=\alpha$ приложена сосредоточенная сила (фиг. 8 и 9).

В первом случае, при бесконечно малом ε, будет при обычном обозначении:

$$\int_{\xi}^{\xi+\varepsilon} f(t)\,dt = \varepsilon\cdot f(\xi+\theta\varepsilon) = \varepsilon f(\xi) + \text{беск. мал. высш. пор.}$$

причем $f(\xi)=q_1$ есть величина *конечная.*

Во втором случае, хотя и можно было бы рассматривать сосредоточенную силу как предельный случай «криволинейной» нагрузки при условии, что

$$(99)\quad \operatorname*{пред}_{\sigma=0}\int_{\alpha}^{\alpha+\sigma} f(t)\,dt = q$$

но проще ограничиться случаем нагрузки по «прямоугольнику», как показано в § 9, а тогда все доказанное для такой прерывной нагрузки будет относиться и к силам сосредоточенным.

Итак, для разрыва первого рода имеем

$$\frac{\Phi(\xi+\varepsilon)-\Phi(\xi)}{\varepsilon} = \int_{0}^{\xi} Y_4'(\xi-t)f(t)\,dt + q_1 Y_4(-\theta\varepsilon) + q_1 Y_4'(-\theta\varepsilon)\cdot\varepsilon$$

В пределе, при $\varepsilon=0$, будет $\theta\varepsilon=\theta_1\varepsilon=0$, но

$$Y_4(0)=0;\quad Y_4'(0)=0$$

и останется

$$(100)\qquad \operatorname*{пред}\frac{\Phi(\xi+\varepsilon)-\Phi(\xi)}{\varepsilon} = \Phi'(\xi) = \int_{0}^{\xi} Y_4'(\xi-t)f(t)\,dt$$

В виду того, что

$$Y_4'(0) = Y_4''(0) = 0 \quad \text{и} \quad Y_4'''(0) = 1$$

совершенно так же будет:

$$\Phi''(\xi) = \int_0^{\xi} Y_4''(\xi - t) f(t) \cdot dt$$

(101)

$$\Phi'''(\xi) = \int_0^{\xi} Y_4'''(\xi - t) f(t)\, dt$$

и значит, при разрывах *первого* рода имеют место *все* наши формулы как и для непрерывной функции $f(t)$. Таким образом, в частности, для нагрузки «по прямоугольнику» имеет место формула (77), поэтому, рассматривая сосредоточенную силу как предельный случай такой «прямоугольной» нагрузки, видим, что формула (92) справедлива, когда справедливы формулы (100) и (101), т. е. для производных до третьего порядка включительно, которые только нам и нужны.

§ 11. Покажем теперь, каким образом определяются постоянные произвольные по граничным условиям.

Возможных комбинаций при обычных условиях закрепления концов балки (граничные условия) *шесть*, а именно:

№	Род закрепления	
	конца $x = a$	конца $x = l$
1	Заделан	Заделан
2	»	Подперт
3	»	Свободен
4	Подперт	Подперт
5	»	Свободен
6	Свободен	»

Соответственно этим случаям, граничные условия выражаются так:

№	Конец $\xi = 0$	Конец $\xi = \lambda$
1	$y(0) = 0;\quad y'(0) = 0$	$y(\lambda) = 0;\quad y'(\lambda) = 0$
2	$y(0) = 0;\quad y'(0) = 0$	$y(\lambda) = 0;\quad y''(\lambda) = 0$
3	$y(0) = 0;\quad y'(0) = 0$	$y''(\lambda) = 0;\quad y'''(\lambda) = 0$
4	$y(0) = 0;\quad y''(0) = 0$	$y(\lambda) = 0;\quad y''(\lambda) = 0$
5	$y(0) = 0;\quad y''(0) = 0$	$y''(\lambda) = 0;\quad y'''(\lambda) = 0$
6	$y''(0) = 0;\quad y'''(0) = 0$	$y''(\lambda) = 0;\quad y'''(\lambda) = 0$

Мы имели

$$y = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3 + A_4 Y_4 + \Phi(\xi)$$

Возьмем первый случай. Уравнения для определения постоянных будут:

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 Y_1(0) + A_2 Y_2(0) + A_3 Y_3(0) + A_4 Y_4(0) + \Phi(0) \\ 0 &= A_1 Y_1'(0) + A_2 Y_2'(0) + A_3 Y_3'(0) + A_4 Y_4'(0) + \Phi'(0) \\ 0 &= A_1 Y_1(\lambda) + A_2 Y_2(\lambda) + A_3 Y_3(\lambda) + A_4 Y_4(\lambda) + \Phi(\lambda) \\ 0 &= A_1 Y_1'(\lambda) + A_2 Y_2'(\lambda) + A_3 Y_3'(\lambda) + A_4 Y_4'(\lambda) + \Phi'(\lambda) \end{aligned} \tag{102}$$

Обращаясь к таблице (41) и формулам (36″), видим, что

$$\begin{cases} Y_1(0)=1; & Y_2(0)=0; & Y_3(0)=0; & Y_4(0)=0; & \Phi(0)=0 \\ Y_1'(0)=0; & Y_2'(0)=1; & Y_3'(0)=0; & Y_4'(0)=0; & \Phi'(0)=0 \end{cases} \tag{103}$$

поэтому из первых двух уравнений следует:

$$A_1 = 0; \quad A_2 = 0 \tag{104}$$

и остается *два* уравнения:

$$\begin{aligned} A_3 Y_3(\lambda) + A_4 Y_4(\lambda) &= -\Phi(\lambda) \\ A_3 Y_3'(\lambda) + A_4 Y_4'(\lambda) &= -\Phi'(\lambda) \end{aligned} \tag{105}$$

с неизвестными A_3 и A_4, *какова бы нагрузка ни была*, и мы получаем:

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{\Phi'(\lambda)\cdot Y_4(\lambda) - \Phi(\lambda)\cdot Y_4'(\lambda)}{Y_3(\lambda)\cdot Y_4'(\lambda) - Y_4(\lambda)\, Y_3'(\lambda)} \\ A_4 &= \frac{\Phi(\lambda)\, Y_3'(\lambda) - \Phi'(\lambda)\cdot Y_3(\lambda)}{Y_3(\lambda)\, Y_4'(\lambda) - Y_4(\lambda)\, Y_3'(\lambda)} \end{aligned} \tag{106}$$

и значит, будет

$$y = A_3 Y_3 + A_4 Y_4 + \Phi(\xi) \tag{107}$$

Нужный для расчета балки изгибающий момент найдется по формуле

$$M = EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{EI}{L^2}\cdot\frac{d^2y}{d\xi^2} = \frac{EI}{L^2}[A_3 Y_3'' + A_4 Y_4'' + \Phi''(\xi)] \tag{108}$$

срезывающее усилие — по формуле

$$S = EI\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{EI}{L^3}\cdot\frac{d^3y}{d\xi^3} = \frac{EI}{L^3}[A_3 Y_3''' + A_4 Y_4''' + \Phi'''(\xi)] \tag{109}$$

какова бы нагрузка ни была.

Выражения производных функций Y_k и производных функций $\Phi(\xi)$ даны выше.

Какова бы ни была нагрузка — непрерывная, прерывная, сосредоточенными силами — решение вопроса, как видно, не требует составления *многочисленных уравнений, выражающих условия сопряжения в местах разрыва нагрузки,* и число постоянных произвольных при любых условиях закрепления концов будет *два*, для которых и пишутся *два* уравнения с двумя неизвестными для конца $\xi = \lambda$.

Нет надобности обращаться к системе (102), чтобы написать решение

$$(*) \qquad y = A_i Y_i + A_j Y_j + \Phi(\xi)$$

с *двумя* произвольными постоянными (ибо другие две равны нулю по условиям закрепления конца $\xi = 0$), стоит только, взглянув на схему (41), выбрать те две функции, которые удовлетворяют обоим граничным условиям для конца $\xi = 0$; эти две функции и войдут в состав формулы (*), представляющей общее решение, удовлетворяющее граничным условиям при $\xi = 0$. О функции $\Phi(\xi)$ заботиться нечего, ибо при $\xi = 0$ как эта функция, так и *три* первые ее производные равны нулю, и значит, она всякой комбинации граничных условий при $\xi = 0$ удовлетворяет.

При обычном способе решения, излагаемом Хаяси, а значит, и всеми авторами, на коих он ссылается, в общем случае, если балка по роду нагрузки (т. е. мест ее разрыва и приложения сосредоточенных сил) подразделяется на k участков, то для определения постоянных произвольных надо составить: *четыре* уравнения, выражающих условия граничные, и по *четыре* уравнения для каждой из $k - 1$ точек сопряжения, а всего $4k$ уравнений с таковым же числом неизвестных.

По нашей же методе, *при всяком* числе участков, надо составить, как уже сказано, *два* и только *два* уравнения с двумя неизвестными.

Напр., для балки, схема нагрузки которой такова, как показано на фиг. 10, состоящей из пяти участков, пришлось бы составить по Хаяси *двадцать* уравнений с *двадцатью* неизвестными.

Решение таких систем требует громадной вычислительной работы и специальных приемов.

§ **12.** В случае симметричной нагрузки очевидно, что и форма упругой линии будет симметрична относительно точки $\xi = \frac{\lambda}{2}$, т. е. середины балки; понятно, что и расчет тогда надо вести только для половины от $\xi = 0$ до $\xi = \frac{\lambda}{2}$, причем в точке $\xi = \frac{\lambda}{2}$ должна быть: а) касательная горизон-

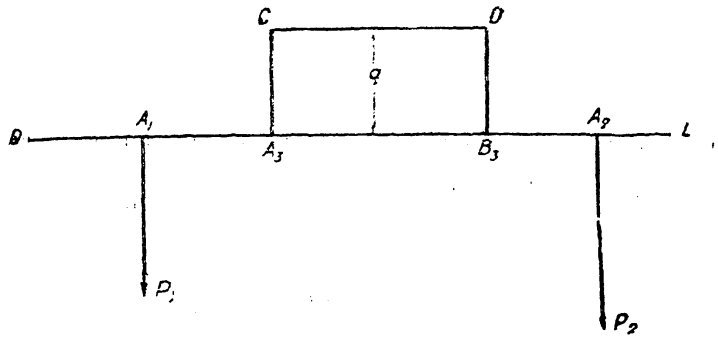
тальна и б) срезывающая сила равна нулю; значит, граничными условиями для этой точки будут уравнения: при $\xi = \frac{\lambda}{2}$ должно быть

$$y'\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 0 \quad \text{и} \quad y'''\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 0$$

Все остальное остается без перемены.

Понятно, что при симметрии сокращается самое число участков; так, будет: вместо трех — два, вместо пяти — три и т. п.

§ 13. Чтобы дать пример приложения изложенной выше общей методы, возьмем известную задачу о железнодорожной шпале.



Фиг. 10.

Пусть расстояние рельса от конца шпалы равно a, длина шпалы l, и пусть $b = \frac{1}{2}l$.

Так как оба конца шпалы свободны, то надо сперва сделать «приведение» по формулам (17), которые в нашем случае, означая давление на рельс через P, будут:

$$2P - K\int_0^l (h_0 + g_0 x)\,dx = 0$$

$$Pa + P(l-a) - K\int_0^l (h_0 + g_0 x)\,x\,dx = 0$$

и дают:

$$g_0 = 0; \quad h_0 = \frac{2P}{Kl} = \frac{P}{Kb} \tag{110}$$

что по симметрии нагрузки можно было бы написать сразу.

Таким образом нагрузка $F(x)$ такова:

1°) Равномерно распределенная по всей длине шпалы и равная

$$-Kh_0 = p = -\frac{P}{b}$$

2°) Сосредоточенная P в точках $x = a$ и $x = l - a$.

Следовательно, нагрузка $f(\xi)$ будет:

1°) Равномерная на всей длине балки и равная

$$q = -\frac{4P}{Kb}$$

2°) Сосредоточенная в точках

$$\xi = \frac{a}{L} = \alpha \quad \text{и} \quad \xi = \frac{l-a}{L} = \lambda - \alpha \quad \text{и равная} \quad \frac{4P}{KL}$$

Так как нагрузка симметричная, то достаточно рассмотреть половину шпалы от $\xi = 0$ до $\xi = \frac{b}{L} = \beta = \frac{\lambda}{2}$, соответственно чему граничные условия будут:

(111) $$y''(0) = 0; \quad y'''(0) = 0$$

(112) $$y'(\beta) = 0; \quad y'''(\beta) = 0$$

следовательно величина y будет вида

$$y = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + \Phi(\xi) + h_0$$

Функция будет:

1°) Для равномерной нагрузки q по формуле (76):

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4} q - \frac{1}{4} Y_1(\xi) \qquad (0 \leqq \xi \leqq \lambda)$$

2°) Для сосредоточенной нагрузки по формуле (92) имеем:

$$0 \leqq \xi \leqq \alpha \qquad \Phi(\xi) = 0$$

$$0 \leqq \xi \leqq \lambda - \alpha \qquad \Phi(\xi) = \frac{4P}{KL} Y_4(\xi - \alpha)$$

Таким образом будет:

для $0 \leqq \xi \leqq \alpha$ $$y_1 = h_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi)]$$

» $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$ $$y_2 = h_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + \frac{1}{4} q [1 - Y_1(\xi)] + \frac{4P}{KL} \cdot Y_4(\xi - \alpha)$$

Но заметив, что

$$h = \frac{P}{Kb} \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{4}q = -\frac{P}{Kb}$$

и положив

$$A_1 - \frac{1}{4}q = A \qquad \text{и} \qquad A_2 = B$$

напишем предыдущие формулы так:

$$(113)^1 \qquad \begin{aligned} &0 \leqq \xi \leqq \alpha; \qquad y_1 = AY_1 + BY_2 \\ &\alpha \leqq \xi \leqq \beta; \qquad y_2 = AY_1 + BY_2 + \frac{4P}{KL} \cdot Y_4(\xi - \alpha) \end{aligned}$$

причем, где аргумент не написан, подразумевается ξ. По симметрии нагрузки, как уже сказано, граничные условия суть

$$y_2'(\beta) = 0 \quad \text{и} \quad y_2'''(\beta) = 0$$

Выполняя дифференцирование и заменив производные функций Y_k самими функциями, получим:

$$(114) \qquad \begin{aligned} &4AY_4(\beta) - B \cdot Y_1(\beta) = \frac{4P}{KL} Y_3(\beta - \alpha) \\ &4AY_2(\beta) + 4B \cdot Y_3(\beta) = \frac{4P}{KL} \cdot Y_1(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

---

[1] Заметим, что, на основании второго из граничных условий (114), условие статического равновесия балки

$$P = K \int_0^{\frac{l}{2}} y\,dx$$

будет выполнено само собою. В самом деле,

$$\int_0^{\beta} y\,d\xi = \int_0^{\beta} [AY_1(\xi) + BY_2(\xi)]\,d\xi + \frac{4P}{KL} \int_{\alpha}^{\beta} Y_4(\xi - \alpha)\,d\xi =$$

$$= AY_2(\beta) + BY_3(\xi) - \frac{P}{KL}[Y_1(\beta - \alpha) - 1] = -\frac{P}{KL}$$

Но

$$\int_0^{\beta} y\,d\xi = \frac{1}{L} \int_0^{\frac{l}{2}} y\,dx$$

следовательно

$$(113') \qquad K \int_0^{\frac{l}{2}} y\,dx = P$$

как и должно быть.

откуда следует:

$$(115)\qquad \begin{aligned} A &= \frac{4P}{KL}\cdot\frac{4Y_3(\beta-\alpha)\cdot Y_3(\beta)+Y_1(\beta-\alpha)\cdot Y_1(\beta)}{\Delta} \\ &= \frac{4P}{KL}\cdot\frac{4Y_4(\beta)\cdot Y_1(\beta-\alpha)-4Y_3(\beta-\alpha)\,Y_2(\beta)}{\Delta} \end{aligned}$$

$$\Delta = 16\,Y_4(\beta)\,Y_3(\beta)+4Y_1(\beta)\cdot Y_2(\beta) = \operatorname{Sh}2\beta+\sin 2\beta = \operatorname{Sh}\lambda+\sin\lambda$$

как то получается заменив Y_k их выражениями и сделав приведение членов.

Формулы (113) и (115) и дают полное решение задачи и притом в виде, удобном для численных вычислений.

Эта задача решена обычною методою в книге Хаяси. Вместо наших уравнений (113), он пишет вследствие симметрии:

$$(116)\qquad \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}\left[(A_1 e^{\xi}+A_2 e^{-\xi})\cos+2A_3\operatorname{Ch}\xi\sin\xi\right] \\ y_2 &= \frac{1}{2}\left[(B_1 e^{\xi_1}+B_2 e^{-\xi_1})\cos\xi_1+(B_2 e^{\xi_1}+B_4 e^{-\xi_1})\sin\xi_1\right] \end{aligned}$$

причем $\xi_1 = \xi-\alpha$ (мы несколько изменили обозначения), и для определения семи произвольных постоянных составляет семь уравнений, выражающих граничные условия и условия сопряжения.

Решения этих уравнений получаются у него, напр., в таком виде:

$$\begin{aligned} A_1 = \frac{P}{KL(\operatorname{Sh}\lambda+\sin\lambda)}\big[&\operatorname{Ch}\alpha\cos(\lambda-\alpha)+\sin(\lambda-\alpha)+ \\ &+\operatorname{Ch}(\lambda-\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)+e^{-\alpha}\cos(\lambda-\alpha)+e^{-(\lambda-\alpha)}\cos\alpha\big] \end{aligned}$$

и т. п., само собою разумеется после длинных выкладок и приведений. Затем уравнение упругой линии для первого участка он пишет в таком виде:

$$\begin{aligned} y = y_1 = \frac{P}{KL[\operatorname{Sh}\lambda+\sin\lambda]}\{&\operatorname{Ch}\alpha\operatorname{Ch}\xi\cos(\lambda-\alpha-\xi)+ \\ &+\cos\alpha\cos\xi\operatorname{Ch}(\lambda-\alpha-\xi)+ \\ &+\operatorname{Ch}(\lambda-\alpha)\operatorname{Ch}\xi\cos(\alpha-\xi)+\cos(\lambda-\alpha)\cos\xi\operatorname{Ch}(\alpha-\xi)+ \\ &+\operatorname{Ch}\alpha\operatorname{Sh}\xi\cos\xi\sin(\lambda-\alpha)-\cos\alpha\sin\xi\operatorname{Ch}\xi\operatorname{Ch}(\lambda-\alpha)+ \\ &+\sin\alpha\cos\xi\operatorname{Ch}(\lambda-\alpha)\operatorname{Sh}\xi-\operatorname{Sh}\alpha\operatorname{Ch}\xi\cos(\lambda-\alpha)\sin\xi\} \end{aligned}$$

Ясно, что эта формула и все другие, ей подобные, для численных вычислений не пригодна по своей сложности, и мы увидим, что в числах Хаяси имеется существенная ошибка.

Чтобы избавиться от ошибок в вычислении, необходимо производить ту непосредственную поверку, которая будет показана ниже, для чего надо вычислить достаточное число ординат упругой линии, а по формуле в роде приведенной выше это вычисление потребовало бы громадной работы. Между тем, вычисление по нашим формулам (13) весьма просто и хорошо укладывается в схему, как то и показано на численном примере, приведенном со всею подробностью.

Для численного примера возьмем дубовую железнодорожную шпалу прусского образца, для которой в книге Хаяси приведены следующие численные данные:

$$a = 59.65 \text{ см}, \quad l = 270 \text{ см}, \quad b = \frac{1}{2} = 135 \text{ см}$$

$$I = \frac{25 \times 16^3}{12} = 8533 \text{ см}^4; \quad E = 100\,000 \text{ кг/см}^2$$

(в книге напечатано $E = 1\,000\,000$, но в расчетах взято верное значение)

$$K = 8 \times 25 = 200; \quad P = 10\,000 \text{ кг}$$

Затем по табличке, помещенной в книге, получено:

$$y(a) = 0.856 \text{ см}, \quad y(b) = 0.156 \text{ см}$$

и еще отдельно там же исчислена разность

$$y(a) - y(b) = 1.75 \times 10^{-3} \times 400 = 0.70 \text{ см}$$

Чтобы проверить эти числа по нашим формулам, надо произвести следующие вычисления, которые приводим полностью по логарифмам с точностью, далеко превышающей практическую потребность, но в данном случае необходимой, чтобы не было сомнений в ошибочности результатов Хаяси:

$$L^4 = \frac{4 \times E \times I}{K} = \frac{4 \times 8\,533 \times 100\,000}{200} = 17\,066\,000$$

$$4 \log L = 7.23213; \quad \log L = 1.80803; \quad \operatorname{colog} L = \bar{2}.19197$$

$\log l = 2.43136$,	$\log \lambda = 0.62333$,	$\lambda = 4.2008$,	$\operatorname{Sh} \lambda = 33.37$
$\log a = 1.77561$,	$\log \alpha = \bar{1}.96758$,	$\alpha = 0.9281$,	$\sin \lambda = -\ 0.87$
$\log b = 2.13033$,	$\log \beta = 0.32230$,	$\beta = 2.1004$,	$\Delta = 32.50$
$\log (b - a) = 1.87708$,	$\log (\beta - \alpha) = 0.06905$,	$\beta - \alpha = 1.1723$,	$\log \Delta = 1.51188$

$$\frac{4P}{K} = \frac{40000}{200} = 200, \qquad \log \frac{4P}{K} = 2.30103$$

$$\operatorname{colog} L = \bar{2}.19197$$

$$\log \frac{4P}{KL} = 0.49300; \quad \frac{4P}{KL} = 3.112$$

$$\operatorname{colog} \Delta = \bar{2}.48812$$

$$\log \frac{4P}{KL} \cdot \frac{1}{\Delta} = \bar{2}.98112 = \log N$$

Вычисление[1] *A.*

$$A = \frac{4P}{KL} \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot [4Y_3(\beta - \alpha)\, Y_3(\beta) + Y_1(\beta - \alpha) \cdot Y_1(\beta)]$$

			log			log
$\beta - \alpha = 1.1723$	Sh · sin	1.3455	0.12889	Ch cos	0.6867	$\bar{1}.83677$
$\beta = 2.1004$	Sh · sin	3.4723	0.54062	Ch cos	— 2.0945	0.32108 n
			$\log I = 0.66951$			$\log II =$ 0.15785 n
			$I = 4.6721$			$II = -1.4383$

$I + II = 3.2338$; $\log [\ ] = 0.50971$

$\log N = \bar{2}.98112$

$\log A = \bar{1}.49083$ $\quad A = 0.3096 = y_1(0)$

Вычисление B.

$$B = \frac{4P}{KL} \cdot \frac{1}{\Delta} [4Y_4(\beta)\, Y_1(\beta - \alpha) - 4Y_3(\beta - \alpha)\, Y_2(\beta)]$$

$\beta = 2.1004$	Ch · sin	3.5779		Ch · sin	3.5779	
	— Sh cos	2.0326	log	Sh · cos	— 2.0326	log
		$4Y_4(\beta) = 5.6103$	0.74898		$2Y_2(\beta) = 1.5453$	0.18902
$\beta - \alpha = 1.1723$	Ch cos	0.6867	$\bar{1}.83677$	Sh sin	= 1.3455	0.12889
		$\log I = 0.58575$				$\log II = 0.31791$
		$I = 3.8526$				$II = 2.0793$
		$I - II = 1.7733$	0.24879			
		$\log N$	$\bar{2}.98112$			
		$\log B$	$\bar{1}.22991$: $B = 0.1698$			

---

[1] При нашем обозначении и формулах

$$A = y(0)$$

В книге Хаяси приведена [стр. 85, форм. (6)] формула

$$y(0) = \frac{2P}{KL(\mathrm{Sh}\,\lambda + \sin\lambda)} [\mathrm{Ch}\,\alpha \cos(\lambda - \alpha) + \cos\alpha\, \mathrm{Ch}(\lambda - \alpha)]$$

Эта формула верна и следует непосредственно из нашей. В самом деле,

$$4Y_3(\beta - \alpha) \cdot Y_3(\beta) + Y_1(\beta - \alpha)\, Y_1(\beta) =$$

$$= \mathrm{Sh}(\beta - \alpha)\, \mathrm{Sh}\,\beta \cdot \sin(\beta - \alpha) \sin\beta + \mathrm{Ch}(\beta - \alpha)\, \mathrm{Ch}\,\beta \cos(\beta - \alpha) \cos\beta =$$

$$= \frac{1}{2} [\mathrm{Sh}(\beta - \alpha)\, \mathrm{Sh}\,\beta (\cos\alpha - \cos(2\beta - \alpha)) + \mathrm{Ch}(\beta - \alpha)\, \mathrm{Ch}\,\beta (\cos\alpha + \cos(2\beta - \alpha))] =$$

$$= \frac{1}{2} [\cos\alpha (\mathrm{Ch}(\beta - \alpha) \cdot \mathrm{Ch}\,\beta + \mathrm{Sh}(\beta - \alpha)\, \mathrm{Sh}\,\beta) +$$

$$+ \cos(2\beta - \alpha) (\mathrm{Ch}(\beta - \alpha)\, \mathrm{Ch}\,\beta - \mathrm{Sh}(\beta - \alpha)\, \mathrm{Sh}\,\beta)] =$$

$$= \frac{1}{2} [\cos\alpha\, \mathrm{Ch}(2\beta - \alpha) + \cos(2\beta - \alpha) \cdot \mathrm{Ch}\,\alpha] = \frac{1}{2} [\cos\alpha\, \mathrm{Ch}(\lambda - \alpha) + \cos(\lambda - \alpha)\, \mathrm{Ch}\,\alpha]$$

ибо $2\beta = \lambda$, значит будет

$$A = y(0) = \frac{2P}{KL(\mathrm{Sh}\,\lambda + \sin\lambda)} [\cos\alpha\, \mathrm{Ch}(\lambda - \alpha) + \cos(\lambda = \alpha)\, \mathrm{Ch}\,\alpha]$$

Таким образом будет:

$$0 \leqq x \leqq 60 \text{ см}; \qquad y = 0.3096\, Y_1(\xi) + 0.1698\, Y_2(\xi)$$

$$(117)\quad 60 \leqq x \leqq 135 \text{ »}; \qquad y = 0.3096\, Y_1(\xi) + 0.1698\, Y_2(\xi) + 3.112\, Y_4(\xi - 0.9281)$$

причем напомним, что

$$Y_1(\xi) = \operatorname{Ch}\xi \cdot \cos\xi$$

$$Y_2(\xi) = \frac{1}{2}[\operatorname{Ch}\xi \sin\xi + \operatorname{Sh}\xi \cos\xi]$$

$$Y_4(\xi) = \frac{1}{4}[\operatorname{Ch}\xi \sin\xi - \operatorname{Sh}\xi \cos\xi]$$

К этой книге приложены взятые из сочинения Хаяси таблицы, в которых по аргументу ξ даны натуральные величины тригонометрических и гиперболических функций и их произведений попарно, так что вычисление функций Y_k сводится к выборке из таблиц в крайнем случае двух чисел, рядом стоящих. Отсюда простота наших формул, по сравнению с обычными, становится очевидной.

Вычислим теперь $y(0)$, $y(\alpha)$ и $y(\beta)$.

Имеем

$$y(0) = 0.3096$$

без всякого вычисления.

Затем для $\alpha = 0.9281$ будет по обеим формулам:

$$y(\alpha) = 0.3096 \cdot Y_1(\alpha) + 0.1698\, Y_2(\alpha)$$

		log			
$\alpha = 0.9281.$	$Y_1(\alpha) = 0.8763$	$\bar{1}.94285$	$\operatorname{Ch}\alpha \sin\alpha$	1.1707	log
	$\log A$	$\bar{1}.49083$	$\operatorname{Sh}\alpha \cos\alpha$	0.6397	
		$\bar{1}.43368$	$2Y_2 = 1.8104$		0.25778
	$AY_1(\alpha) = 0.2714$		$\log \frac{1}{2}B$		$\bar{2}.92892$
			$\log BY_2$		$\bar{1}.18670$
	$y(\alpha) = 0.4244$		$BY_2 = 0.1530$		

		log			
$\beta = 2.1004;$	$Y_1\beta = -2.0945$	1.32108 (n)	Ch · sin	3.5779	
	$\log A$	$\bar{1}.49083$	+ Sh cos	− 2.0326	log
	$\log AY_1$	$\bar{1}.81191$ (n)	$2Y_2$	1.5453	0.18902
	$AY_1 = -0.6485$			$\log \frac{1}{2}B$	$\bar{2}.92888$
				$\log BY_2$	$\bar{1}.11790$
				$BY_2 = 0.1312$	

$\beta-\alpha=1.1723$: Ch sin	1.6309		
— Sh cos	— 0.5672		$AY_1=-0.6485$
$4Y_4$	1.0637	0.02683	$BY_2=0.1312$
	$\log\frac{1}{4}C$	$\bar{1}.89094$	$CY_4=0.8275$
	$\log CY_4$	1.91777	$y(\beta)=0.3102$

$$CY_4=0.8275$$

Таким образом имеем:

$$y(0)=0.3096 \text{ см};\quad y(a)=0.4244 \text{ см};\quad y(b)=0.3102 \text{ см}$$

Между тем, в книге Хаяси по его таблице получается:

$$y(a)=0.856 \text{ см};\quad y(b)=0.156 \text{ см}$$

и вместе с тем приведена разность этих чисел:

$$y(a)-y(b)=0.700 \text{ см}$$

Мы покажем непосредственной проверкой, что наши числа *верны*. Так как в таблице у Хаяси эти числа, соответствующие его аргументу $K=8$ (наше $K=8\times 25$, где 25 см есть ширина балки), не выделяются из ряда прочих, то значит вся его таблица *не верна*, а это заставляет относиться с осторожностью и к прочим результатам и формулам книги, ибо они везде одинаково сложны и, значит, легко подвержены ошибкам.

Для примера приложения наших формул провычислен подробно численный пример той же шпалы, но несколько округлив числа, а именно взято:

$$a=60 \text{ см};\quad b-a=75 \text{ см};\quad b=135 \text{ см};\quad l=270 \text{ см}$$

т. е. изменено только a и взято 60 см, вместо 59.65 см; тогда получается:

$$\alpha=0.9335,\quad A=0.3042$$
$$\beta=2.1004,\quad B=0.1743$$

все остальные числа остаются без перемены.

Таким образом будет:

$$0<x\leqq a;\quad y=0.3042\,Y_1(\xi)+0.1743\,Y_2(\xi)$$

$$a\leqq x\leqq b;\quad y=0.3042\,Y_1(\xi)+0.1743\,Y_2(\xi)+ \tag{118}$$
$$+3.112\,Y_4(\xi-0.9335)$$

Вычисление по этим формулам со всею подробностью показано в табл. 1 в том самом виде, как оно произведено, т. е. никаких побочных вычислений не производилось. Умножения выполнены на большой логарифмической линейке.

Схема этого вычисления настолько проста, что пояснений не требует. Аргументы (абсциссы) x взяты через 10 см для удобства поверительного

расчета; можно бы было упростить выборку из таблиц, взяв величины ξ, напр., через 0.15 см; тогда не приходилось бы интерполировать при выборке значений функций:

$$\mathrm{Ch}\,\xi\cos\xi,\quad \mathrm{Ch}\,\xi\sin\xi,\quad \mathrm{Sh}\,\xi\cos\xi$$

Само собою разумеется, что весь этот расчет произведен с точностью, далеко превышающей практическую потребность (было бы нелепо рассчитывать прогиб шпалы с точностью до 0.001 мм), но приведенный расчет служит примером для установления и пояснения нашей методы.

§ **14.** Как общее правило, всякий расчет необходимо подвергать проверке, которая наглядно обнаружила бы всякую случайную ошибку и вместе с тем давала ясное представление о степени точности полученного результата.

В нашем случае такая проверка может быть произведена следующим образом: мы имеем основное уравнение

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} + Ky = F(x) \tag{1}$$

и мы для величины y получили решение вида

$$y = \varphi(x) \tag{119}$$

в численной табличной форме, вычислив достаточное число ординат; положим, что величина y в члене Ky заменена ее значением (119) и уравнение (1) написано в виде

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = F(x) - K\varphi(x) \tag{120}$$

Тогда, положив

$$F(x) - K\varphi(x) = G(x) \tag{121}$$

имеем уравнение

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = G(x) \tag{122}$$

представляющее уравнение упругого равновесия балки под действием нагрузки $G(x)$, нам теперь известной. Рассчитав обычными приемами (четырехкратным численным интегрированием, проще всего по правилу трапеций) величину y по уравнению (122), мы должны вновь получить

$$y = \varphi(x)$$

в той же табличной форме, из которой мы исходили. Сличение обоих результатов даст как требуемую проверку, так и суждение о степени точности расчета, так попутно и величины изгибающего момента во всех сечениях балки, срезывающей силы и уклона касательной. Такая проверка результатов расчета, данного в табл. 1, произведена в таблицах 2 и 2 bis, пояснения к которым даны в примечаниях к этим таблицам.

Вычисление формы

Уравнения: $0 \leqslant x \leqslant 60$ см

$60 \leqslant x \leqslant 135$,

1	2	3	4	5	6	7	8
x, см	ξ	$\mathrm{Ch}\,\xi \cdot \cos\xi = Y_1(\xi)$	$\mathrm{Ch}\,\xi \sin\xi$	$\mathrm{Ch}\,\xi \cos\xi$	$(4)+(5) = 2Y_2(\xi)$	$(3)\cdot A = AY_1(\xi)$	$(6)\cdot\frac{1}{2}B = B_1Y_2(\xi)$
0	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3042	0.0000
10	0.1556	0.9999	0.1567	0.1544	0.3111	0.3042	0.0271
20	0.3112	0.9984	0.3210	0.3012	0.6222	0.3038	0.0542
30	0.4668	0.9921	0.5001	0.4322	0.9323	0.3019	0.0812
40	0.6224	0.9765	0.6996	0.5390	1.2386	0.2972	0.1080
50	0.7780	0.9376	0.9252	0.6119	1.5371	0.2853	0.1340
60	0.9335	0.8737	1.1800	0.6397	1.8197	0.2658	0.1586
70	1.0891	0.7663	1.4659	0.6104	2.0763	0.2331	0.1810
80	1.2447	0.6020	1.8021	0.5098	2.3119	0.1832	0.2015
90	1.4003	0.3651	2.1202	0.3231	2.4433	0.1111	0.2130
100	1.5559	0.0368	2.4749	0.0338	2.5087	0.0112	0.2187
110	1.7115	— 0.4009	2.8307	— 0.3756	2.4551	— 0.1220	0.2140
120	1.8670	— 0.9667	3.1674	— 0.9216	2.2458	— 0.2941	0.1958
130	2.0226	— 1.6788	3.4593	— 1.6211	1.8382	— 0.5108	0.1602
135	2.1004	— 2.0945	3.5779	— 2.0326	1.5453	— 0.6373	0.1347

Примечание. На основании формулы (113′), эта сумма должна бы равняться 50.000. Погрешность накопилась вследствие приближенного вычисления площади по правилу трапеций Соответствующая величина δ должна быть 0. Для проверки, чтобы показать степень приближения при интегрировании по правилу трапеций, мы подвергаем проверке обе величины, т. е. с поправкой (табл. 2, стлб. 16) и без поправки (табл. 2 bis, стлб. 16).

Таблица 1

упругой линии

$y = 0.3042\ Y_1(\xi) + 0.1743\ Y_2(\xi)$,

$y = 0.3042\ Y_1(\xi) + 0.1743\ Y_2(\xi) + 3.112\ Y_4(\xi - 0.9335)$

9	10	11	12	13	14	15	16
(7) + (8)	$\xi - \alpha$	Ch(10)·sin(10)	Sh(10)·cos(10)	(11)—(12) = $= 4\,Y_4(10)$	(13)·$\frac{1}{4}\,C$ = $= -C \cdot Y_4(\xi - \alpha)$	(9) + (14)	y = = (15) + δ
0.3042						0.3042	0.3047
0.3313						0.3313	0.3318
0.3580						0.3580	0.3585
0.3831						0.3831	0.3836
0.4052						0.4052	0.4057
0.4193						0.4193	0.4198
0.4244	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.4244	0.4249
0.4141	0.1556	0.1567	0.1544	0.0023	0.0018	0.4159	0.4164
0.3847	0.3112	0.3210	0.3012	0.0198	0.0154	0.4001	0.4006
0.3241	0.4668	0.5001	0.4322	0.0679	0.0528	0.3769	0.3774
0.2299	0.6224	0.6996	0.5390	0.1606	0.1249	0.3548	0.3553
0.0920	0.7780	0.9252	0.6119	0.3133	0.2437	0.3357	0.3362
— 0.0983	0.9335	1.1800	0.6397	0.5403	0.4203	0.3220	0.3225
— 0.3506	1.0891	1.4659	0.6104	0.8555	0.6652	0.3146	0.3151
— 0.5026	1.1668	1.6196	0.5700	1.0496	0.8165	0.3139	0.3144
						5.1455	
						0.1571	
						5.3026	
						— 0.3094	
						4.9932*	

$$\delta = \frac{5.0000 - 4.9932}{135} = + 0.0005$$

Поверка резуль

1	2	3	4	5	6	7	8	9
x, см	Действ. нагрузка $-Ky$	Суммы (2) попарно	Суммы (3) сверху	Срезыв. сила $S=\frac{1}{2}h\cdot(4)$, кг	Суммы (5) попарно	Суммы (6) сверху	Изг. мом. $M=(7)\cdot\frac{\frac{1}{2}h}{1000}$ тсм	Суммы (8) попарно
0	—60.94		0.00	0.0	— 636	0	0.00	
		—127.30						— 3.18
10	66.36		— 127.30	— 636.5	— 1963	— 636	— 3.18	
		138.06						— 16.18
20	71.70		— 265.36	— 1326.8	— 3396	— 2599	— 13.00	
		148.42						— 42.97
30	76.72		— 413.78	— 2068.9	— 4927	— 5995	— 29.97	
		157.86						— 84.58
40	81.14		— 571.64	— 2858.2	— 6542	— 10922	— 54.61	
		165.10						— 141.93
50	83.96		— 736.74	— 3683.7	— 8212	— 17464	— 87.32	
		168.94						— 215.70
60	84.98		— 905.68	— 4528.4	—	— 25676	— 128.38	
		—						—
60	84.98		+1094.32	+ 5471.6	+10102	— 25676	— 128.38	
		168.26						— 206.25
70	83.28		926.06	+ 4630.3	+ 8444	— 15574	— 77.87	
		163.40						— 113.52
80	80.12		762.66	+ 3813.3	+ 6849	— 7130	— 35.65	
		155.60						— 37.05
90	75.48		607.06	+ 3035.3	+ 5338	— 281	— 1.40	
		146.54						+ 23.89
100	71.06		460.52	+ 2302.6	+ 3914	+ 5057	+ 25.29	
		138.30						+ 70.14
110	67.24		322.22	+ 1611.1	+ 2563	+ 8971	+ 44.85	
		131.74						+ 102.52
120	64.50		190.48	+ 952.4	+ 1267	+ 11534	+ 57.67	
		127.52						+ 121.67
130	63.02		62.96	+ 314.8	+ 315	+ 12801	+ 64.00	
		125.90						+ 128.79
135	62.88		+ 00.01	0.5		+ 12958	+ 64.79	

Примечания: 1) разность ϵ накопилась от интегрирования по правилу трапеций и от присовокупления к числам стлб. 15 табл. 1 величины $\delta = 0.0005$; 2) в табл. 2 bis приведен расчет без этой поправки.

тата таблицы 1

Таблица 2

10	11	12	13	14	15	16	17
Суммы (9) снизу	$1000\,y' = (10)\cdot\frac{1000\,h}{2EI}$	Суммы (11) попарно	Суммы (12) сверху	$(13)\cdot\frac{1}{2}\,h$	$(14)+f=Y$	y	$\varepsilon = Y - y^*$
+ 476.74	2.794		0.000	0.000	0.3024	0.3047	—0.0023
		5.569					
+ 473.56	2.775		5.569	0.0278	0.3302	0.3318	— 16
		5.455					
+ 457.38	2.680		11.024	0.0551	0.3576	0.3585	— 11
		5.108					
+ 414.41	2.428		16.132	0.0807	0.3831	0.3836	— 5
		4.361					
+ 329.83	1.933		20.493	0.1025	0.4049	0.4057	— 8
		3.034					
+ 187.90	1.101		23.527	0.1176	0.4200	0.4193	+
		0.838					
— 27.80	— 0.163		24.365	0.1218	0.4242	0.4249	— 7
		— 1.534					
— 234.05	— 1.371		22.831	0.1147	0.4171	0.4164	+ 7
		— 3.408					
— 347.57	— 2.037		19.423	0.0971	0.3995	0.4006	— 11
		— 4.279					
— 382.62	— 2.242		15.144	0.0757	0.3781	0.3774	+ 7
		— 4.344					
— 358.73	— 2.102		10.800	0.0540	0.3564	0.3553	+ 11
		— 3.704					
— 288.59	— 1.692		7.096	0.0355	0.3379	0.3362	+ 17
		— 2.782					
— 186.07	— 1.090		4.314	0.0216	0.3240	0.3225	+ 15
		— 1.467					
— 64.40	— 0.377		2.847	0.0142	0.3166	0.3151	+ 14
		— 0.377					
0.00	0.0000		2.658	0.0133	0.3157	0.3144	+ 13
				0.9183			
				—71			
				+69			
				0.9181			

$$Q = \frac{0.9181 \cdot 10 \cdot 200 \cdot 270}{135} = 3672$$

$$F = \frac{20000 - 3672}{200 \cdot 270} = 0.3024$$

Поверка резуль

1	2	3	4	5	6	7	8	9
x, см	Действ. нагрузка $-Ky$	Суммы (2) попарно	Суммы (3) сверху	Срезыв. сила $S=(4)\cdot\frac{1}{2}h$, кг	Суммы (5) попарно	Суммы (6) сверху	Изг. мом. $M=(7)\cdot\frac{1}{2}\frac{h}{1000}$ тсм	Суммы (8) попарно
0	—60.84		0.00	0.0		0.0	0.00	
		— 127.10			— 636			— 3.18
10	66.26		— 127.10	— 635.5		— 636	— 3.18	
		— 137.86			— 1960			— 16.16
20	71.60		— 264.96	— 1324.8		— 2596	— 12.98	
		— 148.22			— 3390			— 42.91
30	76.62		— 413.18	— 2065.9		— 5986	— 29.93	
		— 157.66			— 4920			— 84.46
40	81.04		— 570.84	— 2854.2		— 10906	— 54.53	
		— 164.90			— 6533			— 141.73
50	83.86		— 735.74	— 3678.7		— 17439	— 87.20	
		— 168.74			— 8201			— 215.40
60	84.88		— 904.48	— 4522.4				
		—			—	— 25640	— 128.20	
60	84.88		+1095.52	+ 5477.6				— 205.82
		— 168.06			+10115			
70	83.18		+ 927.46	+ 4637.3		— 15525	— 77.62	
		— 163.20			+ 8459			— 112.95
80	80.02		+ 764.26	+ 3821.3		— 7066	— 35.33	
		— 155.40			+ 6866			— 36.33
90	75.38		+ 608.86	+ 3044.3		— 200	— 1.00	
		— 146.34			+ 5357			+ 24.78
100	70.96		+ 462.52	+ 2312.6		+ 5157	+ 25.78	
		— 138.10			+ 3935			+ 71.24
110	67.14		+ 324.42	+ 1622.1		+ 9092	+ 45.46	
		— 131.54			+ 2586			+ 103.85
120	64.40		+ 192.88	+ 964.4		+ 11678	+ 58.39	
		— 127.38			+ 1292			+ 123.24
130	62.92		+ 65.56	+ 327.8		+ 12970	+ 64.85	
		— 125.70			+ 341			+ 130.55
135	62.78		+ 2.71	+ 13.5		+ 13140	+ 65.70	

Примечание. Срезывающая сила при $x=135$ должна бы быть равна нулю. Получилось 13.5 кг вследствие интегрирования по правилу трапеций. Понятно, что практического значения при полной нагрузке в 20 000 кг эта невязка не имеет.

тата таблицы 1

Таблица 2 bis

10	11	12	13	14	15	16	17
Суммы (9) снизу	$1000\,y' = = (10)\cdot\frac{1000\,h}{2EI}$	Суммы (11) попарно	Суммы (12) сверху	$(13)\cdot\frac{1}{2}h$	$(14)+f=Y$	y	$\delta = Y-y$
+470.56	+2.758		0.000	0.000	0.3044	0.3042	+0.0002
		5.498					
+467.38	2.740		5.498	0.0275	0.3319	0.3313	6
		5.386					
+451.22	2.646		10.884	0.0544	0.3588	0.3580	8
		5.039					
+408.31	2.393		15.923	0.0796	0.3840	0.3831	9
		4.290					
+323.85	1.897		20.213	0.1011	0.4055	0.4052	3
		2.964					
+182.12	+1.067		23.177	0.1159	0.4203	0.4193	10
		+0.872					
— 33.28	—0.195		24.049	0.1202	0.4246	0.4244	2
		—1.597					
—239.10	—1.402		22.452	0.1123	0.4167	0.4159	+ 8
		—3.467					
—352.05	—2.065		18.985	0.0949	0.3993	0.4001	— 8
		—4.343					
—388.38	—2.278		14.642	0.0732	0.3776	0.3769	+ 7
		—4.410					
—363.60	—2.132		10.232	0.0512	0.3556	0.3548	+ 8
		—3.847					
—292.36	—1.715		6.385	0.0319	0.3363	0.3357	+ 6
		—2.820					
—188.51	—1.105		3.565	0.0178	0.3222	0.3220	+ 2
		—1.489					
— 65.27	—0.384		2.076	0.0104	0.3148	0.3146	+ 2
		—0.384					
0.00	0.000		1.884	0.0094	0.3138	0.3139	— 1
				0.8904			
				—52			
				+49			
				0.8901			

$$Q = \frac{0.8901 \cdot 10.200 \cdot 270}{135} = 3560$$

$$f = \frac{20.000 - 3560}{200 \cdot 270} = 0.3044$$

На этом мы и закончим изложение общей «точной» теории расчета балок постоянного сечения, лежащих на упругом основании, и перейдем к «приближенным» методам.

Эти «приближенные» методы во многих случаях упрощают численные вычисления, а главное обобщаются на балки переменного сечения, изменяющегося по *любому* закону, что для точных методов в общем виде сделать невозможно.

§ **15.** Лет тридцать пять тому назад на практических занятиях со слушателями кораблестроительного отдела Морской Академии, которыми я в то время руководил совместно с И. Г. Бубновым, по моим указаниям была разработана метода, при которой для балки, лежащей на упругом основании и нагруженной сосредоточенными силами или иною прерывною нагрузкою, нет надобности составлять уравнения сопряжения различных участков и, следовательно, нет надобности решать для определения постоянных произвольных многочисленные системы уравнений со многими неизвестными.

Сущность этой методы состоит в разложении уравнения упругой линии, в которую обращается первоначально прямолинейная ось балки, в ряд по тем фундаментальным функциям, соответствующим условиям закрепления концов балки и не зависящим от ее нагрузки, которые служат для представления колебательного ее движения.

Зная уравнение упругой линии, находим и все прочие, необходимые для расчета балки, элементы.

§ **16.** Около двухсот лет тому назад Эйлер показал, что рассмотрение упругих колебаний однородной балки приводится к решению уравнения вида

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = f(x, t) \tag{123}$$

причем свободные колебания балки определяются уравнением

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0 \tag{123'}$$

граничными и начальными условиями.

Для уравнения (123′) ищется решение вида

$$z = \Sigma XT$$

в котором X означает функцию одной только переменной x, T — функция только времени t. Эти функции определяются обыкновенными линейными уравнениями:

$$(124)\qquad \begin{cases} T'' + \dfrac{m^4}{l^4} c^2 T = 0 \\ X^{IV} - \dfrac{m^4}{l^4} X = 0 \end{cases}$$

причем m — пока неизвестное отвлеченное число, могущее принимать какое угодно значение.

Функции X надо определить так, чтобы каждая из них в отдельности удовлетворяла граничным условиям.

Соответственно шести возможным комбинациям этих условий, указанным выше, получается для каждой комбинации трансцендентное уравнение для определения значений m, отвечающих задаче.

Пусть эти значения суть:

$$m_1,\ m_2,\ m_3, \ldots m_k, \ldots$$

Каждому из них соответствует «фундаментальная» функция X; эти функции мы обозначим:

$$X_1,\ X_2,\ X_3, \ldots X_k$$

Все эти функции обладают свойством ортогональности, т. е.

$$\int_0^l X_h X_j\, dx = 0, \qquad \text{если } h \neq j$$

На основании этого свойства определяются коэффициенты ряда

$$f(x) = A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots + A_k X_k + \ldots$$

при разложении заданной функции $f(x)$ в ряд по фундаментальным функциям, а именно будет

$$(125)\qquad A_k = \frac{\int_0^l f(x) X_k \cdot dx}{\int_0^l X_k^2 \cdot dx}$$

В главе VIII «Theory of Sound» Rayleigh'a даны как выражения функций X_k, так и значения интеграла в знаменателе формулы (125) для

всех комбинаций граничных условий. Мы даем сводку этих формул и чисел в § 24.

§ **17.** При рассмотрении вынужденных колебаний балки, как оно изложено мною, т. е. когда надо решать уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = f(x, t) \tag{126}$$

действующая нагрузка $f(x, t)$ разлагается в ряд по фундаментальным функциям, соответствующим рассматриваемым граничным условиям, т. е. в ряд вида

$$f(x, t) = H_1 X_1 + H_2 X_2 + \ldots + H_k X_k + \ldots$$

причем, когда нагрузка зависит от времени, коэффициенты H будут функциями времени t, если же нагрузка времени t не содержит, то величины H постоянные.

Вот это-то разложение и было естественно применить к решению статической задачи

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F(x) \tag{*}$$

о равновесии балки, в частности при рассмотрении вопроса «о перекрестных связях», с которым приходится иметь дело в кораблестроении. Этот последний вопрос, когда число связей весьма велико, приводится к предельному случаю бесконечно большого числа их, а тогда, вместо уравнения (*), приходится рассматривать уравнение

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + Ky = F(x) \tag{1}$$

т. е. балки, лежащей на упругом основании. Это выполняется следующим образом.

Написав уравнение (1) под видом

$$y^{\mathrm{IV}} + c^2 y = f(x) \tag{4}$$

причем положено

$$\frac{K}{EI} = c^2; \quad \frac{1}{EI} F(x) = f(x)$$

представляем сперва *заданную* функцию $f(x)$ в виде ряда

$$f(x) = A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots + A_k X_k + \ldots$$

расположенного по фундаментальным функциям, соответствующим условиям закрепления концов балки, определяя коэффициенты A_k по формуле (125). Тогда уравнение (4) принимает вид

$$y^{IV} + c^2 y = \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k X_k$$

Решение этого уравнения ищем под видом

$$y = \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k X_k$$

а так как

$$X_k^{IV} = \frac{m^4}{l^4} X_k$$

то будет

$$B_k = \frac{A_k l^4}{m_k^4 + c^2 l^4}$$

и значит,

(127) $$y = l^4 \sum \frac{A_k}{m_k^4 + c^2 l^4} X_k$$

Так как каждая из функций X_k удовлетворяет граничным условиям, то и величина (127) им удовлетворяет, и значит, это и есть искомое решение уравнения (4), удовлетворяющее граничным условиям, притом решение единственное, т. е. всякое другое по форме решение ему эквивалентно.

Этот метод нашел отражение в моей статье «Über erzwungene Schwingungen von elastischen Stäben» (Math. Ann., 1905) и в курсе И. Гр. Бубнова по строительной механике корабля, читанном в Морской академии.

Выгода этого способа решения та же, что и точного, изложенного выше, т. е. когда нагрузка прерывная [функция $f(x)$ между значениями $x = 0$ и $x = l$ разрывная] ход выкладки остается попрежнему «прямой», не требующий решения систем уравнений со многими неизвестными.

Способ этот является обобщением методы, изложенной Пуассоном в его «Механике».[1]

§ **18.** Поясним сперва эту методу на простейшем примере — балки, подпертой на обоих концах. Тогда:

$$X_k = \sin \frac{k\pi x}{l}; \quad m_k = k\pi \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

(128) $$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot dx$$

[1] См.: S. D. Poisson. Traité de Mécanique, t. I, 1833, § 323.

и будет

$$y = l^4 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k}{k^4\pi^4 + c^2 l^4} \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{129}$$

Разрывность функции $f(x)$ не составляет препятствия при вычислении интеграла в формуле (128); ряд (129) — быстро сходящийся, причем его сходимость может быть усилена как угодно, что будет показано ниже.

Положим теперь, что нагрузка

$$F(x) = EIf(x)$$

состоит из сосредоточенной силы P_1, приложенной в точке $x = a$.

Рассматривая сперва эту нагрузку как равномерно распределенную на участке

$$\text{от } x = a \text{ до } x = a + \sigma$$

так что

$$p\sigma = P \tag{*}$$

и переходя затем к пределу, считая σ бесконечно малым, при условии (*) получим

$$\frac{l}{2} \cdot A = p\int_a^{a+\sigma} \sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{lp}{k\pi}\left[\cos\frac{k\pi a}{l} - \cos\frac{k\pi(a+\sigma)}{l}\right] =$$

$$= \frac{2l}{k\pi} p \cdot \sin\frac{k\pi\sigma}{2l} \cdot \sin\frac{k\pi}{l}\left(a + \frac{\sigma}{2}\right)$$

так что

$$A_k = \frac{4}{k\pi} \cdot p \sin\frac{k\pi\sigma}{2l} \cdot \sin\frac{k\pi}{l}\left(a + \frac{\sigma}{2}\right)$$

В том случае, когда σ бесконечно малое, будет, на основании (*),

$$\frac{4p}{k\pi} \cdot \sin\frac{k\pi\sigma}{2l} = \frac{4p}{k\pi} \cdot \frac{k\pi\sigma}{2l} = \frac{2P}{l}$$

Значит, при сосредоточенной силе будет

$$A_k = \frac{2P}{l} \sin\frac{k\pi a}{l}$$

следовательно

$$y = \frac{2Pl^3}{EI} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin\frac{k\pi a}{l}}{k^4\pi^4 + c^2 l^4} \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{130}$$

Положим теперь, что на балку действует несколько сил, напр.:

P_1 приложенная в точке $x = a_1$
P_2 » » » $x = a_2$
P_3 » » » $x = a_3$

Тогда, на основании формулы (130), будет

$$(131) \qquad y = \frac{2l^3}{EI} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{P_1 \sin \frac{k\pi a_1}{l} + P_2 \sin \frac{k\pi a_2}{l} + P_3 \sin \frac{k\pi a_3}{l}}{k^4\pi^4 + c^2 l^4} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

Подобная формула может быть написана сразу для любого числа сил, что при обычной методе было бы невозможно.

Так, напр., для двух равных и симметрично расположенных сил будет:

$$P_1 = P_2 = P; \; a_1 = a; \; a_2 = l - a$$

$$P_1 \sin \frac{k\pi a_1}{l} + P_2 \sin \frac{k\pi a_2}{l} = P \sin \frac{k\pi a}{l} + P \sin \left(k\pi - \frac{k\pi a}{l} \right)$$

при $k = 2n$ эта величина равна нулю

» $k = 2n + 1$ » » » $2P \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi}{l} a$

Таким образом будет

$$(132) \qquad y = \frac{4l^3 P}{EI} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi a}{l}}{(2n+1)^4\pi^4 + c^2 l^4} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

Положим, что в точке $x = a_3 = \frac{2}{l}$ поставлен упор (анкер) так, чтобы для этой точки было $y = 0$, тогда, на основании формул (131) и (132), получим, для определения давления P_3 на анкер, уравнение

$$\frac{4l^3 P}{EI} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi a}{l} \cdot \sin \frac{2n+1}{2}\pi}{(2n+1)^4\pi^4 + c^2 l^4} + \frac{2P_3 l^3}{EI} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^4\pi^4 + c^2 l^4} = 0$$

Найдя P_3, находим затем y по формуле (131).

Нетрудно, на основании известных разложений в тригонометрические ряды, проверить, что все эти результаты эквивалентны тем, которые получаются по первой методе нашей. На этом мы останавливаться не будем, но обратим внимание на простоту выкладок, даже по сравнению с нашею первою методою, не говоря уже об обычной.

§ **19.** Покажем теперь, каким образом усилить быстроту сходимости рядов, к которым эта метода приводит. Для этого стоит только вернуться к исходному уравнению

(4) $$y^{IV} + c^2 y = f(x)$$

и, положив в нем

(133) $$y = y_0 + \eta$$

определить y_0 так, чтобы было

(134) $$y_0^{IV} = f(x)$$

иначе

(135) $$EIy_0^{IV} = F(x)$$

и чтобы y_0 удовлетворяло граничным условиям, т. е. условиям закрепления концов балки.

Уравнение (135) представляет уравнение равновесия «свободной», т. е. не опирающейся на упругое основание балки, и величина y_0 рассчитывается по обычным для таких балок приемам; пусть будет

(136) $$y_0 = f_0(x)$$

тогда будет

$$\eta^{IV} + y_0^{IV} + c^2\eta + c^2 y_0 = f(x)$$

или, на основании уравнения (134),

(137) $$\eta^{IV} + c^2\eta = -c^2 f_0(x)$$

Так как $f_0(x)$ удовлетворяет граничным условиям, то и для неизвестной η они останутся те же, что и для y.

Положим в уравнении (137)

$$\eta = y_1 + \eta_1$$

и определим y_1 так, чтобы было

(138) $$y_1^{IV} = -c^2 f_0(x)$$

причем y_1 должно удовлетворять граничным условиям. Уравнение (138), будучи написано так:

(139) $$EIy_1^{IV} = -Ky_0$$

показывает, что y_1 представляет упругую линию «свободной» балки под действием нагрузки $-Ky_0$, т. е. той, которая происходит от оседания в упругое основание балки, имеющей форму y_0.

Составив по известной величине

$$y_0 = f_0(x)$$

нагрузку $-Ky_0$, рассчитываем по уравнению (139) функцию y_1 как форму упругой линии «свободной» балки под этою нагрузкою.

На основании уравнений (138) и (139), неизвестная η_1 будет определяться уравнением

$$\eta_1^{IV} + c^2 \eta_1 = -c^2 y_1 \tag{140}$$

и граничными условиями, и продолжаем этот процесс сколь угодно далеко.

Таким образом приходим к такому результату: решение уравнения

$$y^{IV} + c^2 y = f(x)$$

удовлетворяющее граничным условиям, может быть получено в такой форме:

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + \eta_n \tag{141}$$

причем $y_0, y_1, y_2, \ldots$ рассчитываются последовательно, как прогибы (форма упругой линии) обыкновенной «свободной» балки при заданных граничных условиях, по формулам:

$$\begin{aligned} EIy_0^{IV} &= F(x) \\ EIy_1^{IV} &= -Ky_1 \\ EIy_2^{IV} &= -Ky_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ EI\eta_n^{IV} + K\eta_n &= -Ky_n \end{aligned} \tag{142}$$

Этому процессу можно придать другой вид. Положим, что по заданной функции $f(x)$ составлялись бы последовательно функции

$$f_0(x),\ f_1(x), \ldots f_n(x)$$

по уравнениям:

$$\begin{aligned} f_0^{IV}(x) &= f(x) \\ f_1^{IV}(x) &= f_0(x) \\ f_2^{IV}(x) &= f_1(x) \\ &\ldots\ldots \end{aligned} \tag{143}$$

и граничным условиям; тогда, сопоставляя эти уравнения с (141), видно, что будет:

$$\begin{aligned} y_0 &= f_0(x) \\ y_1 &= -c^2 f_1(x) \\ y_2 &= c^4 f_2(x) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= (-1)^n \cdot c^{2n} f_n(x) \end{aligned} \tag{144}$$

Тогда будет

$$y = f_0(x) - c^2 f_1(x) + c^4 f_2(x) + \ldots + (-1)^n \cdot c^{2n} f_n(x) + \eta_n \tag{145}$$

причем η_n определяется уравнением

$$\eta_n^{\,\mathrm{IV}} + c^2 \eta_n = (-1)^{n+1} \cdot c^{2n+2} \cdot f_n(x) \tag{146}$$

и граничными условиями.

§ **20.** Может представиться, что это преобразование не доставляет никакой выгоды, ибо величина η_n определяется уравнением совершенно того же вида, как и y, и теми же граничными условиями, но стоит только сопоставить формулу (146) с формулой (127), чтобы видеть, что определение неизвестной η_n выполняется при достатично большом n весьма просто.

В самом деле, здесь может быть два случая:

1°) Когда отношение

$$\frac{c^2 l^4}{m_1^{\,4}} < 1$$

и притом значительно меньше, напр. в 10 или 15 раз, что мы будем обозначать знаком $\ll$.

2°) Когда это отношение или *больше* 1, а если и меньше, то близко к 1.

В первом случае члены ряда (141), а значит, и ряда (144), будут быстро убывать и η_n будет быстро приближаться к нулю.

Во втором случае члены ряда (141) будут итти возрастая или убывать столь медленно, что пришлось бы взять слишком много членов этого ряда для получения требуемой степени точности, но зато в этом случае члены того ряда, которым представляется η_n, убывают столь быстро, что в этом ряду достаточно будет взять лишь один *первый* член.

В самом деле, мы имели формулу

$$y = l^4 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k}{m_k^4 + c^2 l^4} \cdot X_k \tag{127}$$

Положим, для краткости письма, $c^2 l^4 = b^2$, так что будет

$$m_k^4 + c^2 l^4 = m_k^4 + b^2$$

но

$$\frac{1}{m_k^4 + b^2} = \frac{1}{m_k^4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{b^2}{m_k^4}} =$$

$$= \frac{1}{m_k^4}\left[1 - \frac{b^2}{m_k^4} + \frac{b^4}{m_k^8} - \frac{b^6}{m_k^{12}} + \cdots + (-1)^n \frac{b^{2n}}{m_k^{4n}} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{b^{2n+2}}{m_k^{4n}(m_k^4 + b^2)}\right]$$

следовательно будет

$$\frac{1}{l^4} y = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k}{m_k^4} X_k - b^2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k}{m_k^8} X_k + b^4 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k}{m_k^{12}} X_k - \ldots +$$

$$+ (-1)^{n+1} \cdot b^{2n+2} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k \cdot X_k}{m_k^{4n}(m_k^4 + b^2)}$$

Сличая эту формулу с формулой (145) и заметив, что $b^2 = c^2 l^4$, видим, что имеют место равенства:

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k X_k}{m_k^4}$$

$$c^2 f_1(x) = c^2 l^4 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k X_k}{m_k^8}$$

$$c^4 f_2(x) = c^4 l^8 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k X_k}{m_k^{12}} \tag{147}$$

. . . . . .

$$\eta_n = c^{2n+2} \cdot l^{4n+4} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k X_k}{m_k^{4n}(m_k^4 + c^2 l^4)}$$

Числа m_k, при различных граничных условиях, приведены в § 24. Они выражаются одною из следующих формул:

$$m_k = k\pi; \quad m_k = \frac{2k-1}{2}\pi; \quad m_k = \frac{2k+1}{2}\pi; \quad m_k = \frac{4k+1}{4}\pi$$

причем первая формула точная, последние три — приближенные.

Поэтому в том случае, когда отношение

$$c^2 l^4 : m_1^4 \leqslant 1$$

напр. когда $\frac{\sqrt{c \cdot l}}{m_1}$ меньше $\frac{1}{2}$ или еще меньше, функции $f_0(x)$, $f_1(x), \ldots$ быстро убывают, и напр., уже при $n = 3$ будет

$$\left(\frac{c^2 l^4}{m_1^4}\right)^n = \left(\frac{c^2 l^4}{m_1^4}\right)^3 < \frac{1}{4096}$$

и сумма

$$c^6 l^{12} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k X_k}{m_k^{12} (m_k^4 + c^2 l^4)}$$

по своей малости может быть отброшена, т. е. величина η_3 может быть заменена нулем.

Положим теперь, что

$$\frac{c^2 l^4}{m_1^4} > 1$$

или близко к 1.

Так как числа m_k^4 идут быстро возрастая, то найдется такое значение k, при котором будет

$$m_k^4 \geqslant c^2 l^4$$

Пусть, напр.,

$$m_3^4 \geqslant c^2 l^4 > m_2^4 > m_1^4$$

тогда будет

$$\eta_n = c^{2n+2} l^{4n+4} \left[\frac{A_1 X_1}{m_1^{4n} (m_1^4 + c^2 l^4)} + \frac{A_2 X_2}{m_2^{4n} (m_2^4 + c^2 l^4)}\right] + \sum_{k=3}^{k=\infty} \frac{A_k X_k}{m_k^{4n} (m_k^4 + c^2 l^4)}$$

Сумма

$$c^{2n+2} l^{4n+4} \sum_{k=3}^{k=\infty} \frac{A_k X_k}{m_k^{4n} (m_k^4 + c^2 l^4)}$$

при возрастании числа n будет быстро убывать, как показано выше, сумма же первых двух членов

$$c^{2n+2} l^{4n+4} \left[\frac{A_1 X_1}{m_1^{4n} (m_1^4 + c^2 l^4)} + \frac{A_2 X_2}{m_2^{4n} (m_2^4 + c^2 l^4)}\right]$$

будет возрастать, но так как отношение $m_2^{4n} : m_1^{4n}$ с увеличением числа n быстро возрастает, то второй член станет малым по сравнению с первым и выйдет за пределы точности расчета, так что будет

$$f_n(x) = \frac{A_1 X_1}{m_1^{4n}} = B \cdot X_1 \tag{148}$$

где B — некоторая постоянная.

При вычислении функций $f_n(x)$, имея таблицу значений функции X_1, легко убедиться, имеет ли место равенство (148) с требуемой степенью точности, или нет.

Если бы такой таблицы под руками не было, то и тогда по самому ходу вычислений функции $f_n(x)$ нетрудно заметить, имеет ли место равенство (148), или нет.

В самом деле, если это равенство имеет место с требуемой точностью (т. е. с тою, с которою расчет ведется), то будет иметь место и равенство

$$f_{n+1}(x) = \frac{BX_1}{m_1^{4n+4}}$$

и значит, будет

$$f_n(x) : f_{n+1}(x) = m_1^4$$

Если же, что обыкновенно удобнее, вычисляются величины

$$y_0, y_1, y_2, \cdots y_n, y_{n+1}$$

то будет

$$y_{n+1} : y_n = \frac{c^2 l^4}{m_1^4}$$

Как только равенство (148) достигнуто, то уравнение (146) будет

$$EI\eta_n^{IV} + K\eta_n = -KCX_1$$

ибо в этом случае $y_n = CX_1$, причем C — постоянная, а так как

$$X_1^{IV} = \frac{m_1^4}{l^4} X_1$$

то интеграл этого уравнения, удовлетворяющий граничным условиям, будет

$$\eta_n = -\frac{l^4 \cdot K \cdot C}{EIm_1^4 + Kl^4} = -\frac{Kl^4}{EIm^4 + Kl^4} \cdot y_n \tag{149}$$

и требуемое решение будет найдено, ибо y_n уже известно.

§ **21**. Для пояснения сказанного, возьмем сперва простейший пример — балки, подпертой в обоих концах и нагруженной сосредоточенной силой в точках $x = a$.

Мы видели, что в этом случае

$$y = \frac{2Pl^3}{EI} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin\frac{k\pi a}{l}}{k^4\pi^4 + c^2 l^4} \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{*}$$

Чтобы усилить быстроту сходимости этого ряда, выделяем функцию $f_0(x)$, представляющую форму равновесия нашей балки, свободно лежащей на опорах. В любом справочнике находим, что в этом случае:

$$y_0 = f_0(x) = \frac{2P}{EI} \cdot \frac{l-a}{6l} \cdot [x^3 - a(2l-a)x], \text{ когда } 0 \leqq x \leqq a$$

$$y_0 = f_0(x) = \frac{2P}{EI} \cdot \frac{a}{6l} \cdot [(l-x)^3 - (l^2-a^2)(l-x)], \text{ когда } a \leqq x \leqq l$$

и у нас будет

$$y = y_0 - \frac{2Pl^3}{EI} \cdot c^2 l^4 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin \frac{k\pi a}{l}}{k^8 \pi^8 + k^4 \pi^4 c^2 l^4} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

Ряд в этой формуле сходится гораздо быстрее, нежели в формуле (*), и в нем достаточно будет удержать лишь один или два первых члена.

Возьмем для примера балку, рассматриваемую в § 14 книги Хаяси. Для этой балки:

$$K = 15 \text{ кг/см}^3; \quad I = 47\,430 \text{ см}^4$$
$$l = 820 \text{ см}; \quad E = 140\,000 \text{ кг/см}$$

(величины K и I относятся к 1 см ширины балки).

По этим данным

$$l^4 c^2 = \frac{Kl^4}{EI} = \frac{15 \cdot 820 \cdot 820 \cdot 820 \cdot 820}{140\,000 \cdot 47430} = 1180$$

Следовательно,

$$c^2 l^4 \sum_{k=1}^{k=\infty} = 1180 \left[\frac{\sin \frac{\pi a}{l} \cdot \sin \frac{\pi x}{l}}{\pi^8 + 1180\pi^4} + \frac{\sin \frac{2\pi a}{l} \cdot \sin \frac{2\pi x}{l}}{(2\pi)^8 + 1180\,(2\pi)^4} + \cdots \right] \tag{150}$$

Подставляя числа, получим приближенно:

$$c^2 l^4 \sum_{k=1}^{k=\infty} = \frac{\sin \frac{\pi a}{l}}{109} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{\sin \frac{2\pi a}{l}}{3770} \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{\sin \frac{3\pi a}{l}}{63700} \sin \frac{3\pi x}{l} + \cdots \tag{151}$$

При вычислении срезывающей силы и изгибающего момента по формулам

$$S = EIy''' \text{ и } M = EIy''$$

вошли бы вторая и третья производные, которые представились бы рядами, значительно медленнее сходящимися, поэтому изгибающий момент и срезывающую силу надо вычислять не по этим производным, а по формулам:

$$S = \int_0^x [F(x) - Ky\,dx]$$

(152)

$$M = \int_0^x S\,dx$$

куда войдут интегралы предыдущей суммы, которые будут представляться такими рядами:

$$l\left[\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\frac{\pi a}{l}}{109}\cdot\left(1-\cos\frac{\pi x}{l}\right)+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi a}{l}}{3770}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{l}\right)+\cdots\right]$$

и

$$\left[\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\frac{\pi a}{l}}{109}+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi a}{l}}{3770}+\cdots\right]\cdot x -$$

$$-l^2\left[\frac{1}{\pi^2}\frac{\sin\frac{\pi a}{l}}{109}\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi a}{l}}{3770}\sin\frac{2\pi x}{l}+\cdots\right]$$

сходимость которых более быстрая, нежели первоначального ряда.

§ **22**. Чтобы дать пример последовательного вычисления функций

$$y_0, y_1, y_2, \cdots$$

возьмем опять железнодорожную шпалу, для которой в § 13 приведен расчет по точной формуле нашей. Расчет этот будем делать не производя интегрирований аналитически, а приближенно по правилу трапеций, так что схема этого расчета остается без изменения для любой нагрузки, а также и для балки переменного сечения, как увидим в главе II.

Данные для этой шпалы приведены в § 13, самый расчет произведен в таблицах 3, 4 и 5, относительно которых дадим необходимые пояснения.

Таблица 3. В табл. 3 вычисляется функция y_0. В стлб. 2 таблицы вписана отнесенная на погонный сантиметр длины балки, направленная вверх (а потому знак —) сила поддержания от грунта, соответствующая постоянному оседанию k_0 (см. § 13). В стлб. 3 показана срезывающая сила, происходящая как от этого поддержания, так и от сосредоточенной силы $P = 10$ т, приложенной в точке $x = 60$ см.

По срезывающим силам, интегрированием по правилу трепеций, исчислен, как показано, изгибающий момент (стлб. 6), причем, в виду того, что конец $x = 0$ свободен, то при $x = 0$ должно быть $M = 0$; это значение и вписано, как начальное, в стлб. 5, и суммирование ведется сверху.

По изгибающему моменту, опять интегрированием по правилу трапеций, исчислен уклон касательной y_0' (во избежание малых чисел вычислено $1000\ y_0'$). Здесь, в виду симметрии балки, известно значение $y_0' = 0$ при $x = 135$ см, поэтому оно принято за исходное и суммирование в стлб. 8 ведено «снизу».

По величине y_0' вычисляется сперва стлб. 12, в котором за исходное значение принято $y_0 = 0$. Чтобы определить истинное значение $y_0 = f_0$ этой величины, вычисляем площадь, ограниченную кривою Y_0, ординаты коей вписаны в стлб. 12, по правилу трапеций, обратив внимание, что последний промежуток (от $x = 130$ см до $x = 135$ см) вдвое меньше остальных, тогда будет

$$f_0 = \frac{10\Sigma}{135}$$

где Σ есть сумма ординат стлб. 12 с «поправкой». Тогда будет

$$y_0 = Y_0 - f_0$$

Эти числа и вписаны в стлб. 13.

Обратим еще раз внимание, что при суммировании как «сверху», так и «снизу» от нижнего числа, в столбцах 5, 8, 11, т. е. от чисел 0.37; 149.6; — 0.44, берется половина, ибо в нашем примере последний промежуток между ординатами 5 см, а не 10, как в остальных местах.

Таблица 4. Эта таблица содержит вычисление функции y_1 по y_0. Для этого принимаем за нагрузку $-Ky_0$ и вписываем эти значения в стлб. 2. Затем производим по правилу трапеций 4 раза подряд интегрирование, которое и доставляет срезывающее усилие, изгибающий момент, уклон касательной ординаты y_1 для каждой из указанных в стлб. 1 абсцисс.

Таблица 5. Эта таблица служит для вычисления y_2 по y_1, так что в ней за нагрузку принято $-Ky_1$. В остальном вычисление произведено как в табл. 4.

§ **23**. В нашем примере:

$$c^2 l^4 = \frac{K}{EI} \cdot l^4 = \frac{200 \cdot 270 \cdot 270 \cdot 270 \cdot 270}{100\,000 \cdot 8533} = 1246$$

$$m_1^4 = 500.6$$

Таким образом $c^2 l^4 > m_1^4$, поэтому величины $y_1, y_2, \ldots$ идут возрастая, причем, согласно сказанному в § 20, функция y_n должна приближаться к CX_1, где C есть постоянная, X_1 — первая фундаментальная функция колеблющегося стержня, оба конца коего свободны, т. е.

$$X_1 = (\mathrm{Ch}\, m_1 - \cos m_1)\left(\mathrm{Sh}\frac{m_1 x}{l} + \sin\frac{m_1 x}{l}\right) - (\mathrm{Sh}\, m_1 - \sin m_1)\left(\mathrm{Ch}\frac{m_1 x}{l} + \cos\frac{m_1 x}{l}\right)$$

причем m_1 есть наименьший отличный от нуля корень уравнения

$$\cos m \cdot \mathrm{Ch}\, m = 1$$

именно:

$$m_1 = 4.7300$$

В «Theory of Sound» Rayleigh'a имеется следующая таблица значений этой функции:

$\frac{x}{l}$	X_1	$\frac{x}{l}$	X_1	$\frac{x}{l}$	X_1
0.000	+ 1.6452	0.175	0.3342	0.350	— 0.6815
.025	1.4542	.200	+ 0.1608	.375	— 0.7767
.050	1.2631	.225	— 0.0055	.400	— 0.8559
.075	1.0722	.250	— 0.1632	.425	— 0.9184
.100	1.8838	.275	— 0.3110	.450	— 0.9636
.125	0.6969	.300	— 0.4475	.475	— 0.9909
.150	0.5133	.325	— 0.5714	.500	— 1.0000

В нашем расчете значения $\frac{x}{l}$ суть: $0, \frac{1}{27}, \frac{2}{27}, \cdots \frac{13}{27}, \frac{1}{2}$. Пользуясь приведенной таблицей по простой интерполяции, составляем нужные нам значения X_1 при $l = 270$ см и x через 10 см.

x, см	X_1	x, см	X_1	x, см	X_1
0	+ 1.645	50	0.262	100	— 0.760
10	1.362	60	+ 0.014	110	— 0.874
20	1.080	70	— 0.221	120	— 0.953
30	0.800	80	— 0.430	130	— 0.993
40	0.527	90	— 0.607	135	— 1.000

Взяв для $x = 0$ и $x = 135$ см отношение $y_2 : X_1$, получаем, соответственно, 0.0925 и 0.0942.

Вычисление

1	2	3	4	5	6	7
Абсц. x, см	Нагрузка $F(x)$, кг/см	Срезыв. сила, тонны	Суммы (3) попарно	Суммы (4) сверху	(4) $\times h = M$ изг. мом., тсм ($h = 5$)	Суммы (6) попарно
0	— 74.07	0.00		0.00	0.0	
			— 0.74			— 3.7
10	»	— 0.74		— 0.74	— 3.7	
			2.22			18.5
20	»	1.48		2.96	14.8	
			3.70			48.1
30	»	2.22		6.66	33.3	
			5.18			92.5
40	»	2.96		11.84	59.2	
			6.66			151.7
50	»	3.70		18.50	92.5	
			— 8.14			225.7
60	»	— 4.44		26.64	133.2	
60	»	+ 5.56		26.64	133.2	
			+ 10.38			214.5
70	»	4.82		16.26	81.3	
			8.90			118.1
80	»	4.08		— 7.36	— 36.8	
			7.42			— 36.5
90	»	3.34		+ 0.06	+ 0.3	
			5.93			+ 30.3
100	»	2.59		5.99	30.0	
			4.44			82.1
110	»	1.85		10.43	52.1	
			2.96			119.1
120	»	1.11		13.39	67.0	
			1.48			141.4
130	»	0.37		14.87	74.4	
			0.37			149.6
135	»	0.00		15.05	75.2	

$f_0(x)$ по $f(x)$

Таблица 3

8	9	10	11	12	13
Суммы (7) снизу	$\frac{(8)\cdot h}{EI}\cdot 1000 = 1000\,y'$	Суммы (9) попарно	Суммы (10) сверху	$(11)\times h = Y_0$	$y_0 = (12) - f_0$
+ 461.6	+ 2.70		0.00	0.0000	— 0.0543
		+ 5.38			
457.9	2.68		5.38	0.0269	— 0.0274
		5.25			
439.4	2.57		10.63	0.0532	— 0.0011
		4.86			
391.3	2.29		15.49	0.0775	+ 0.0232
		4.04			
298.8	1.75		19.53	0.0976	+ 0.0433
		2.61			
+ 147.1	+ 0.86		22.14	0.1107	+ 0.0564
		+ 0.40			
— 78.6	— 0.46		22.54	0.1127	+ 0.0583
— 78.6	— 0.46		22.54	0.1127	+ 0.0583
		— 2.18			
293.1	1.72		20.36	0.1018	+ 0.0475
		4.13			
411.2	2.41		16.23	0.0811	+ 0.0268
		5.03			
447.7	2.62		11.20	0.0560	+ 0.0017
		5.07			
417.4	2.45		6.13	0.0307	— 0.0236
		4.41			
335.3	1.96		1.72	0.0086	— 0.0457
		3.23			
216.2	1.27		— 1.51	— 0.0075	— 0.0618
		1.71			
— 74.8	0.44		— 3.22	— 0.0161	— 0.0704
		— 0.44			
00.0	0.00		— 3.44	— 0.0172	— 0.0715

Вычисление

1	2	3	4	5	6	7	8
Абсц. x, см	Нагрузка $F(x)$	Суммы (2) попарно	Суммы (3) сверху	Срезыв. сила $S=(4)\times h$, кг ($h=5$)	Суммы (5) попарно	Суммы (6) сверху	$\frac{(7)\times h}{1000}=M$ изг. мом., тсм
0	+ 10.86		0.00	0.0		0.0	0.00
		+ 16.34			+ 81.7		
10	+ 5.48		+ 16.34	+ 81.7		+ 81.7	+ 0.41
		5.70			191.9		
20	+ 0.22		+ 22.04	+ 110.2		273.6	1.37
		— 4.42			198.3		
30	— 4.64		17.62	+ 88.1		471.9	2.36
		— 13.30			109.7		
40	— 8.66		+ 4.32	+ 21.6		581.6	2.91
		— 19.94			— 56.5		
50	— 11.28		— 15.62	— 78.1		525.1	2.63
		— 22.94			— 270.9		
60	— 11.66		— 38.56	— 192.8		+ 254.2	+ 2.72
		— 21.16			— 491.4		
70	— 9.50		— 59.72	— 298.6		— 237.2	— 1.19
		— 14.86			— 671.5		
80	— 5.36		— 74.58	— 372.9		— 908.7	— 4.54
		— 5.70			— 774.3		
90	— 0.34		— 80.28	— 401.4		— 1683.0	— 8.41
		+ 4.38			— 780.9		
100	+ 4.72		— 75.90	— 379.5		— 2463.9	— 12.32
		+ 13.86			— 689.7		
110	+ 9.14		— 62.04	— 310.2		— 3153.6	— 15.77
		+ 21.50			— 512.9		
120	+ 12.36		— 40.54	— 202.7		— 3666.5	— 18.33
		+ 26.44			— 273.2		
130	+ 14.08		— 14.10	— 70.5		— 3939.7	— 19.97
		+ 28.38			— 70.0		
135	+ 14.30		+ 0.09	+ 0.5		— 3974.7	— 19.87

$f_1(x)$ по $f_0(x)$ Таблица 4

9	10	11	12	13	14	15
Суммы (8) попарно	Суммы (9) снизу	$\frac{(10)\cdot h}{EI}\cdot 1000 = 1000\,y'$	Суммы (11) попарно	Суммы (12) сверху	$(13)\times h$ Y_1	$y_1 = (14) - f_1$
	+ 135.21	0.792		0.000	0.0000	— 0.0554
+ 0.41			+ 1.586			
	+ 135.62	0.794		1.586	0.0079	— 0.0475
1.78			1.599			
	+ 137.40	0.805		3.185	0.0159	— 0.0395
3.73			1.631			
	+ 141.13	0.826		4.816	0.0241	— 0.0313
5.27			1.684			
	+ 146.40	0.858		6.500	0.0325	— 0.0229
5.54			1.748			
	+ 151.94	0.890		8.248	0.0412	— 0.0142
5.35			1.811			
	+ 157.29	0.921		10.059	0.0503	— 0.0051
+ 2.53			1.858			
	+ 159.82	0.937		11.917	0.0596	+ 0.0042
— 5.73			1.840			
	+ 154.09	0.903		13.757	0.0688	+ 0.0134
— 12.95			1.730			
	+ 141.14	0.827		15.487	0.0774	+ 0.0220
— 20.73			1.533			
	+ 120.41	0.706		17.020	0.0851	+ 0.0297
— 28.09			1.253			
	+ 92.32	0.547		18.273	0.0914	+ 0.0360
— 34.10			0.888			
	+ 58.22	0.341		19.161	0.0958	+ 0.0404
— 38.30			0.458			
	+ 19.92	0.117		19.619	0.0981	+ 0.0427
— 39.84			0.117			
	0.00	0.000		19.678	0.0984	+ 0.0430

Вычисление

1	2	3	4	5	6	7	8
Абсц. x, см	Нагрузка, кг/см	Суммы (2) попарно	Суммы (3) сверху	Срезыв. сила $S=(4)\times h$, кг	Суммы (5) попарно	Суммы (6) сверху	$\frac{(7)\times 4}{1000}=M$ изг. мом., тсм
0	+ 11.08		0.00	0.0		0.0	0.00
		20.58			102.9		
10	9.50		20.58	102.9		102.9	0.51
		17.40			292.8		
20	7.90		37.98	189.9		395.7	1.98
		14.16			450.6		
30	6.26		52.14	260.7		846.3	4.23
		10.84			575.6		
40	4.58		62.98	314.9		1421.9	7.11
		7.42			666.9		
50	2.84		70.40	352.0		2088.8	10.44
		3.86			723.3		
60	+ 1.02		74.26	371.3		2812.1	14.06
		+ 0.18			743.5		
70	— 0.84		74.44	372.2		3555.6	17.78
		— 3.52			726.8		
80	2.68		70.92	354.6		4282.4	21.41
		7.08			673.3		
90	4.40		63.84	319.2		4956.2	24.78
		10.34			586.7		
100	5.94		53.50	267.5		5542.9	27.71
		13.14			469.3		
110	7.20		40.36	201.8		6012.2	30.06
		15.28			327.2		
120	8.08		25.08	125.4		6339.4	31.70
		16.62			168.2		
130	8.54		8.56	42.8		6507.6	32.54
		17.14			42.8		
135	8.60		0.00	0.0		6529.0	32.64

$f_2(x)$ по $f_1(x)$ Таблица 5

9	10	11	12	13	14	15
Суммы (8) попарно	Суммы (9) снизу	$\frac{(10)\cdot h\cdot 1000}{EI} = y_2'\cdot 1000$	Суммы (11) попарно	Суммы (12) сверху	$(13)\times h$	$y_2 = (14) - f_2$
	— 447.67	— 2.624		0.000	0.0000	+ 0.1531
0.51			— 5.245			
	447.16	2.621		— 5.245	— 0.0262	0.1269
2.49			— 5.222			
	445.67	2.601		10.467	— 0.0523	0.1008
6.21			— 5.176			
	439.46	2.575		15.643	— 0.0782	0.0749
11.34			— 5.083			
	428.12	2.508		20.726	— 0.1036	0.0495
17.55			— 4.914			
	410.57	2.406		25.640	— 0.1282	0.0249
24.50			— 4.668			
	386.07	2.262		30.308	— 0.1515	+ 0.0016
31.84			— 4.374			
	354.22	2.112		34.682	— 0.1734	— 0.0203
39.19			— 3.958			
	315.04	1.846		38.640	— 0.1932	— 0.0401
46.19			— 3.421			
	268.85	1.575		42.061	— 0.2103	— 0.0572
52.49			— 2.843			
	216.36	1.268		44.904	— 0.2245	— 0.0714
57.77			— 2.198			
	158.59	0.930		47.102	— 0.2355	— 0.0824
61.76			— 1.497			
	96.83	0.567		48.599	— 0.2430	— 0.0899
64.24			— 0.758			
	32.59	0.191		49.357	— 0.2468	— 0.0937
65.18			— 0.191			
	0.00	0.000		49.452	— 0.2473	— 0.0942

Берем среднее 0.0935 и составляем следующую таблицу:

x, см	0.0935 X_1 см	y_2, см	x, см	0.0935 X_1 см	y_2, см	x, см	0.0935 X_1 см	y_2, см
0	+ 0.1536	0.1531	50	0.0245	0.0249	100	— 0.0710	— 0.0714
10	0.1272	0.1269	60	+ 0.0013	+ 0.0016	110	— 0.0818	— 0.0824
20	0.1010	0.1008	70	— 0.0206	— 0.0203	120	— 0.0891	— 0.0899
30	0.0748	0.0749	80	— 0.0402	— 0.0401	130	— 0.0928	— 0.0937
40	0.0493	0.0495	90	— 0.0568	— 0.0572	135	— 0.0935	— 0.0942

Эта таблица показывает, что формулою

$$y_2 = 0.0935 X_1$$

функция y_2 представляется с погрешностью, не превышающей 0.0008 см, т. е. меньшей $\frac{1}{100}$ мм. В подобном вопросе, как наш, эта величина не только не имеет никакого практического значения, но находится на пределе точности самого вычисления.

Приняв

(153) $$y_2 = 0.0935 X_1$$

мы будем иметь для определения η_2 уравнение

(154) $$EI\frac{d^4\eta_2}{dx^4} + K\eta_2 = -0.0935 K X_1$$

интеграл которого, удовлетворяющий граничным условиям, на основании формулы (149), будет

(155) $$\eta_2 = -0.0935 \cdot \frac{Kl^4}{EI} \cdot \frac{1}{EIm_1^4 + Kl^4} X_1$$

Подставляя числа, получим

(155′) $$\eta_2 = -0.0667 X_1$$

и значит, будет

(156) $$y = h_0 + y_0 + y_1 + y_2 + \eta_2 = h_0 + y_0 + y_1 + 0.0268 X_1$$

Если заменить X_1 его величиною через y_2 по формуле (153), то будет

(157) $$y = h_0 + y_0 + y_1 + 0.287 y_2$$

В § 13, табл. 1, приведен расчет величины y по формуле (117), с которым и сличим эти величины, рассчитанные по формуле (157).

Получим

x	y форм. (117)	y форм. (157)	x	y форм. (117)	y форм. (157(	x	y форм. (117)	y форм. (757)
0	0.3042	0.3042	50	0.4193	0.4199	100	0.3548	0.3560
10	0.3313	0.3318	60	0.4244	0.4240	110	0.3357	0.3367
20	0.3580	0.3586	70	0.4159	0.4164	120	0.3220	0.3232
30	0.3831	0.3837	80	0.4001	0.3991	130	0.3146	0.3159
40	0.4052	0.4050	90	0.3769	0.3778	135	0.3139	0.3149

Это сличение показывает, что наибольшая разность этих величин, рассчитанных совершенно различными способами, не превышает 0.0013 см, т. е. находится на пределе точности самого вычисления.

Само собою понятно, что величины y, рассчитанные по формуле (157), можно подвергнуть описанной в § 14 проверке, которая не зависит от того, каким образом функция y вычислена. Эта проверка, ничем не отличающаяся от приведенной в табл. 2, исполнена в табл. 6 (стр. 300—301).

Эта проверка и сличение результатов, полученных совершенно различными методами, служат наглядным подтверждением верности наших формул и вычислений.

§ **24.** Приведем в заключение этой главы таблицы фундаментальных функций для всех шести комбинаций граничных условий для балки постоянного сечения.

Характеристические уравнения и корни их

№	Род закрепления		Характеристическое уравнение	Корни характеристических уравнений		
	конца $x=0$	конца $x=l$		m_1	m_2	m_k $(k>2)$
1	Свободен	Свободен	$\mathrm{Ch}\, m \cdot \cos m = 1$	4.7300	7.8532	$\frac{2k+1}{2}\pi$
2	Подперт	Подперт	$\sin m = 0$	π	2π	$k\pi$
3	Заделан	Заделан	$\mathrm{Ch}\, m \cdot \cos m = 1$	4.7300	7.8532	$\frac{2k+1}{2}\pi$
4	»	Подперт	$\mathrm{tang}\, m = \mathrm{Th}\, m$	3.9266	7.0685	$\frac{4k+1}{4}\pi$
5	»	Свободен	$\mathrm{Ch} m \cdot \cos m = -1$	1.8751	4.6941	$\frac{2k-1}{2}\pi$
6	Свободен	Подперт	$\mathrm{tang}\, m = \mathrm{Th}\, m$	3.9266	7.0685	$\frac{4k+1}{4}\pi$

Поверка величины Y,

$Y = 0.3703 + y_0$

1	2	3	4	5	6	7	8
Абсц. x, см	Нагрузка $F(x)$, кг/см	Суммы (2) попарно	Суммы (3) сверху	$S = (4) \times h$ Срезыв. сила	Суммы (5) попарно	Суммы (6) сверху	$\frac{(7) \times h}{1000} = M$ изг. мом.
0	— 60.84		0.00	0.0		0	0.00
		— 127.20			— 636		
10	66.36		— 127.20	— 636.0		— 636	— 3.18
		138.08			1962		
20	71.72		265.28	1326.4		— 2598	12.99
		148.46			3395		
30	76.74		413.74	2068.7		— 5993	29.97
		157.74			4926		
40	81.00		571.48	2857.4		— 10919	54.59
		164.98			6540		
50	83.98		736.46	3682.3		— 17459	87.30
		168.78			— 8208		
60	84.80		905.24	— 4526.2		— 25667	— 128.33
60	84.80		+ 1094.76	+ 5473.8		— 25667	— 128.33
		168.08			+ 10107		
70	83.28		926.68	4633.4		— 15560	77.80
		163.10			8451		
80	79.82		763.58	3817.9		— 7109	35.54
		155.38			6859		
90	75.56		608.20	3041.0		— 250	— 1.25
		146.76			5348		
100	71.20		461.44	2307.2		+ 5098	+ 25.49
		138.64			3921		
110	67.44		322.80	1614.0		+ 9019	+ 45.10
		132.08			2568		
120	64.64		190.72	953.6		+ 11587	+ 57.93
		127.82			1268		
130	63.18		62.90	314.5		+ 12855	+ 64.28
		126.16			+ 3136		
135	62.98		— 0.18	0.9		+ 13012	+ 65.06

рассчитанной по формуле

$+ y_1 + 0.287\, y_2$

Таблица 6

9	10	11	12	13	14	15	16	17
Суммы (8) попарно	Суммы (9) снизу	$(10)\cdot\frac{h}{EI}\cdot 1000 = 1000\, y'$	Суммы (11) попарно	Суммы (12) сверху	$(13)\times h$	$(14) - f = Y$	y	$\delta = y - Y$
	+ 475.91	+ 2.790		0.000	0.0000	0.3026	0.3042	+ 0.0016
— 3.18			+ 5.560					
	+ 472.73	2.770		5.560	0.0278	0.3304	0.3318	+ 14
16.17			5.445					
	+ 456.56	2.675		11.005	0.0550	0.3576	0.3586	+ 10
42.96			5.098					
	+ 413.60	2.423		16.103	0.0805	0.3831	0.3837	+ 6
84.56			4.352					
	+ 329.04	1.929		20.455	0.1023	0.4049	0.4050	+ 1
141.89			3.025					
	+ 187.15	+ 1.096		23.480	0.1174	0.4200	0.4199	— 1
215.63			+ 0.929					
	— 28.48	— 0.167		24.409	0.1220	0.4246	0.4240	— 6
	— 28.48	— 0.167		24.409	0.1220	0.4246	0.4240	— 6
206.13			— 1.542					
	— 234.61	1.375		22.867	0.1143	0.4169	0.4164	— 5
113.34			3.415					
	— 347.95	2.040		19.452	0.0973	0.3999	0.3991	— 8
— 36.79			4.295					
	— 384.74	2.255		15.157	0.0758	0.3784	0.3778	— 6
+ 24.24			4.368					
	— 360.50	2.113		10.789	0.0539	0.3565	0.3560	— 5
70.59			3.806					
	— 289.91	1.693		6.983	0.0349	0.3375	0.3367	— 8
103.03			2.788					
	— 186.88	1.095		4.195	0.0210	0.3236	0.3232	— 4
122.21			1.474					
	— 64.67	— 0.379		2.721	0.0136	0.3162	0.3159	— 3
129.34			0.379					
	0.00	0.000		2.531	0.0127	0.3153	0.3149	— 4

№	X
1	$(\mathrm{Ch}\, m - \cos m)\left(\mathrm{Sh}\, \frac{mx}{l} + \sin \frac{mx}{l}\right) - (\mathrm{Sh}\, m - \sin m)\left(\mathrm{Ch}\, \frac{mx}{l} + \cos \frac{mx}{l}\right)$
2	$\sin \frac{mx}{l}$
3	$(\mathrm{Sh}\, m + \sin m)\left(\mathrm{Ch}\, \frac{mx}{l} + \cos \frac{mx}{l}\right) - (\mathrm{Ch}\, m - \cos m)\left(\mathrm{Sh}\, \frac{mx}{l} - \sin \frac{mx}{l}\right)$
4	$(\mathrm{Sh}\, m + \sin m)\left(\mathrm{Ch}\, \frac{mx}{l} - \cos \frac{mx}{l}\right) - (\mathrm{Ch}\, m + \cos m)\left(\mathrm{Sh}\, \frac{mx}{l} - \sin \frac{mx}{l}\right)$
5	$(\mathrm{Sh}\, m + \sin m)\left(\mathrm{Ch}\, \frac{mx}{l} - \cos \frac{mx}{l}\right) - (\mathrm{Ch}\, m + \cos m)\left(\mathrm{Sh}\, \frac{mx}{l} - \sin \frac{mx}{l}\right)$
6	$(\mathrm{Sh}\, m + \sin m)\left(\mathrm{Ch}\, \frac{mx}{l} + \cos \frac{mx}{l}\right) - (\mathrm{Ch}\, m + \cos m)\left(\mathrm{Sh}\, \frac{mx}{l} + \sin \frac{mx}{l}\right)$

Примечание. Для простоты набора значок k при букве m опущен. Функция X может быть умножена на любой постоянный множитель.

Для вычисления интегралов

$$\int_0^l X_k^2\, dx \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Rayleigh дает следующее правило и таблицу: в выражении фундаментальной функции X_k, приведенной выше, надо аргумент $\frac{m_k x}{l}$ заменить через z, обозначить полученную функцию через $U_k(z)$ и ее производные по переменной z обозначать значками, тогда значения вышеуказанных интегралов найдутся из следующей таблицы:

Значения интеграла $\frac{4}{l}\int_0^l X_k^2 \cdot dx$

№	Род закрепления		$\frac{4}{l}\int_0^l X^2\, dx$
	конца $x = 0$	конца $x = l$	
1	Свободен	Свободен	$[U_k(0)]^2$
2	Подперт	Подперт	$2[U_k'(0)]^2 = -2U_k'(l) \cdot U_k'''(l)$
3	Заделан	Заделан	$[U_k''(0)]^2$
4	»	Подперт	$[U_k''(0)]^2 = -2U_k'(l) \cdot U_k'''(l)$
5	»	Свободен	$[U_k''(0)]^2 = [U_k(l)]^2$
6	Свободен	Подперт	$[U_k(0)]^2 = -2U_k'(l) \cdot U_k'''(l)$

Когда интеграл

$$\int_0^l f(x) X_k \, dx$$

вычисляется по какой-нибудь приближенной формуле, то полезно по той же формуле и при том же числе ординат вычислить и интеграл

$$\int_0^l X_k^2 \, dx$$

и, сличив полученное значение со значением, вычисленным по приведенной таблице, получить суждение о степени точности, примененной для вычисления приближенной формулы.

Как видно, фундаментальные функции, в особенности для $k > 1$, представляются в виде разности двух членов, каждый из которых большой, а разность их малая, поэтому для численного вычисления, пользуясь приложенными к книге таблицами Хаяси функций показательной, тригонометрических, гиперболических,[1] надо эти формулы преобразовать.

Возьмем для примера первую формулу, в которой для краткости положим $\frac{x}{l} = z$, так что будет

$$X = (\mathrm{Ch}\, m - \cos m)(\mathrm{Sh}\, mz + \sin mz) - (\mathrm{Sh}\, m - \sin m)(\mathrm{Ch}\, mz + \cos mz)$$

Полагаем

$$\frac{\mathrm{Sh}\, m - \sin m}{\mathrm{Ch}\, m - \cos m} = 1 - \alpha$$

тогда

$$\alpha = \frac{e^{-m} + \sin m - \cos m}{\mathrm{Ch}\, m - \cos m}$$

есть малая величина, по этой формуле хорошо вычисляемая; затем будет

$$\frac{1}{\mathrm{Ch}\, m - \cos m} X = \mathrm{Sh}\, mz + \sin mz - (1 - \alpha)(\mathrm{Ch}\, mz + \cos mz) =$$
$$= \sin mz + \alpha(\mathrm{Ch}\, mz + \cos mz) - e^{-mz}$$

Все входящие во вторую часть этого равенства функции выбираются прямо из таблиц по аргументу mz, и вычисление не представит никаких затруднений.

---

[1] Хороши также таблицы гиперболических функций Лиговского: Dr. W. Ligowski. Tafeln der Hyperbelfunctionen und der Kreisfunctionen, Berlin, 1890.

После того как правая часть вычислена, нет надобности ее множить на $\mathrm{Ch}\, m - \cos m$, а лучше составить отношение

$$\frac{X(z)}{X(0)} \quad \text{или} \quad \frac{X(z)}{X\left(\frac{l}{2}\right)}$$

т. е. принять за единицу или начальное значение $X(0)$, или же соответствующее середине балки, при этом, чтобы избегнуть в дальнейшем интерполяции, следует сразу брать те значения аргумента mz, которые потребуются в дальнейшем расчете.

Все прочие формулы преобразуются подобным же образом, и тогда вычисление по ним настолько просто, что дальнейших пояснений не требует и для практических целей может быть выполнено логарифмической линейкой.

ГЛАВА II

Расчет балок переменного сечения

§ **25.** При расчете балок переменного сечения надо различать два случая: а) переменным является лишь профиль балки, ширина же нижней ее панели, которой она опирается на грунт, и жесткость грунта постоянные; б) переменные и профиль балки и ширина ее нижней панели.

Пусть будет M изгибающий момент в сечении, соответствующем абсциссе x, считаемой от одного из концов балки, $EI = \sigma(x)$ — произведение модуля упругости на момент инерции площади сечения балки, $K = \theta(x)$ — отнесенная на погонный сантиметр сила поддержания грунта при прогибе в этом месте, равном одному сантиметру, $F(x)$ — внешняя нагрузка также на погонный сантиметр, наконец y — ордината упругой линии в рассматриваемом сечении.

Общие уравнения упругого равновесия балки

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = F(x) - Ky \tag{158}$$

при сделанных обозначениях примут вид:

$$\sigma(x)\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} + \theta(x)y = F(x) \tag{158'}$$

или, исключая M,

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right]+\theta(x)y=F(x) \tag{159}$$

Очевидно по самому виду этого уравнения, что его интегрирование в конечном виде или в квадратурах возможно лишь в весьма ограниченном числе случаев, разбирать которые бесполезно, ибо в практике они не встречаются. Поэтому к решению уравнения (159) надо применять приближенные приемы, являющиеся обобщением изложенных в главе I.

Рассмотрение свободных упругих колебаний нашей балки, обозначая через $p(x)$ — массу ее, приходящуюся на 1 см длины, в сечении коего абсцисса есть x, приводится к уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\theta(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]+p(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0 \tag{160}$$

Граничные условия для стержня или балки переменного сечения выражаются теми же уравнениями, как и для балки сечения постоянного.

Решение уравнения (160) ищут под видом

$$y=\Sigma XT$$

где X — функция только одной переменной x, T — функция только одной переменной t, так чтобы каждый член этой суммы в отдельности удовлетворял уравнению (160) и граничным условиям. Тогда, обозначая через m — некоторое пока неизвестное отвлеченное число, получим для определения функций T и X обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\frac{m^4}{l^4}T=0 \tag{161}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2X}{dx^2}\right]-\frac{m^4}{l^4}p(x)X=0 \tag{162}$$

Функция X должна удовлетворять граничным условиям, что, подобно как для балки постоянного сечения, приводит к тому, что числа m определяются как корни некоторого трансцендентного уравнения.

Пусть эти корни будут:

$$m_1, m_2, m_3, \ldots m_k \ldots$$

каждому корню соответствует фундаментальная функция, эти функции мы обозначим через

$$X_1, X_2, X_3, \ldots X_k, \ldots$$

Эти функции обладают свойством ортогональности в отношении функции $p(x)$, т. е.

$$\int_0^l p(x) X_h X_j \cdot dx = 0, \quad \text{если } h \neq j$$

что дает возможность разлагать заданную функцию $F(x)$ в ряд вида

$$F(x) = A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots + A_k X_k + \ldots$$

по фундаментальным функциям, определяя коэффициенты по формуле

$$A_k = \frac{\int_0^l F(x) \cdot p(x) \cdot X_k \, dx}{\int_0^l p(x) X_k^2 \cdot dx} \tag{163}$$

На основании этих свойств фундаментальных функций, мы покажем, что для того случая, когда ширина опорной панели и жесткость грунта постоянная, т. е. величина K не есть функция $\theta(x)$, а есть величина *постоянная*, метода, изложенная в §§ 17—21, распространяется целиком и на балки переменного профиля.

§ **26.** Итак, положим, что величина K постоянная; обозначим ее, по аналогии с главой I, через c^2, тогда уравнение равновесия балки будет

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right] + c^2 y = F(x) \tag{164}$$

Вообразим, что составлены фундаментальные функции

$$X_1, X_2, \ldots X_k, \ldots$$

для балки той же жесткости $\sigma(x)$, как и заданная, но масса которой, отнесенная на единицу длины, — *постоянная* и равна единице; тогда эти функции будут удовлетворять уравнениям вида

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2X_k}{dx^2}\right] = \frac{m_k^4}{l^4} X_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{165}$$

и граничным условиям.

Положим, что заданная нагрузка $F(x)$ представлена в виде ряда, расположенного по этим фундаментальным функциям, так что

$$F(x) = A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots + A_k X_k + \ldots$$

Здесь коэффициенты A_k будут определяться равенствами

$$A_k = \frac{\int_0^l F(x) X_k \, dx}{\int_0^l X_k^2 \cdot dx} \tag{166}$$

совершенно подобными равенству (125) для балки постоянного сечения, ибо $p(x) = 1$ при всяком x между 0 и l.

Уравнение (164) примет вид

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right] + c^2 y = \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k X_k$$

Будем искать его решение под видом

$$y = \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k X_k$$

Тогда, на основании уравнения (165), получим

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\left(\frac{m_k^4}{l^4} + c^2\right) B_k - A_k\right] X_k = 0$$

откуда следует

$$B_k = \frac{l^4 \cdot A_k}{m_k^4 + c^2 l^4} \tag{167}$$

и значит, будет

$$y = l^4 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k}{m_k^4 + c^2 l^4} X_k \tag{168}$$

т. е. совершенно та же формула, как и для балки постоянного профиля, а так как формула эта относится к *любому* виду фундаментальных функций, то и все следствия, которые мы из формулы (127) в §§ 17—21 вывели, относятся и к этому случаю, с тою лишь разницею, что в этом случае вид фундаментальных функций не известен; поэтому придется пользоваться формулой (149), а не формулой (147).

Функции

$$y_0, y_1, y_2, \ldots y_n, \eta_n$$

будут определяться уравнениями:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2y_0}{dx^2}\right]=F(x) \tag{169}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2y_1}{dx^2}\right]=-c^2y_0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2y_2}{dx^2}\right]=-c^2y_1 \tag{170}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2y_n}{dx^2}\right]=-c^2y_{n-1}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2\eta_n}{dx^2}\right]+c^2\eta_n=-c^2y_n \tag{171}$$

из которых все, кроме последнего, представляют не что иное, как уравнения упругого равновесия нашей балки переменного профиля под действием известной нагрузки; вопрос этот приводится к очевидным квадратурам и определению постоянных произвольных (в крайнем случае для каждой функции y_0, y_1, y_2, . . . двух) по граничным условиям.

Квадратуры следует выполнять не аналитически, а приближенно по правилу трапеций; определение постоянных мы поясним ниже.

Если бы оказалось, что c^2l^4 значительно меньше m_1^4, то величины y_1, y_2, . . . шли бы быстро убывая, приближаясь к нулю, значит в этом случае и величина η_n, определяемая уравнением (171), приближалась бы к нулю, и с принятою для расчета точностью, после некоторого определенного значения n, могла бы быть отброшена.

В более общем случае, когда $c^2l^4 > m_1^4$ или если и меньше, то близко к m_1^4, так что числа y_1, y_2, . . . или шли бы возрастая, или убывали бы столь медленно, что пришлось бы итти до слишком больших значений n, пока y_n стало бы ничтожно малым, то совершенно так же, как для балки постоянного сечения, раньше будет достигнуто равенство

$$y_{n-1}=CX_1$$

причем C есть постоянная; тогда уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2y_n}{dx^2}\right]=-c^2y_{n-1}$$

имело бы своим решением

$$y_n=-\frac{c^2l^4}{m_1^4}CX_1$$

значит *при всяких* x между 0 и l имело бы место соотношение

$$y_n : y_{n-1} = -\frac{c^2 l^4}{m_1^4} \tag{172}$$

которое доставило бы значение m_1^4, ибо $c^2 l^4$ задано, после чего нашли бы η_n по формуле

$$\eta_n = -\frac{c^2 l^4}{m_1^4 + c^2 l^4} y_n \tag{173}$$

Заметим, что этот процесс попутно дает и функцию X_1.

Как видно, этот способ расчета применим только в том случае, когда величина K есть *постоянная*.

Жесткость балки $\sigma(x)$ при этом способе расчета может быть задана как угодно, даже графически, — нам этой функции дифференцировать не приходится. Эта функция может быть и прерывной, может быть ступенчатой, состоя из отдельных прямолинейных участков, и т. п., — расчет остается без изменения, какова бы нагрузка ни была, и не требует составления условий сопряжения.

§ **27.** Остается показать, каким образом в тех случаях закрепления концов балки, которые делают ее статически неопределимой, находятся постоянные произвольные, вводимые интегрированием при вычислении величин $y_0, y_1, y_2, \ldots$

Положим для определенности рассуждения, что оба конца балки заделаны так, что граничные условия выражаются уравнениями:

при $x = 0$ должно быть $y'(0) = 0$ и $y(0) = 0$
« $x = l$ » » $y'(l) = 0$ и $y(l) = 0$

Имеем уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2 y_0}{dx^2}\right] = F(x) \tag{174}$$

Первое интегрирование дает

$$\frac{d}{dx}\left[\sigma(x)\frac{d^2 y_0}{dx^2}\right] = \int_0^x F(t)\,dt + A \tag{175}$$

причем A есть произвольная постоянная, значение же интеграла

$$\int_0^x F(t)\,dt = S(x)$$

представляющего срезывающую силу в сечении x, происходящую от данной нагрузки $F(x)$, найдется выполняя интегрирование как обыкновенно или аналитически, или по правилу трапеций приближенно.

Второе интегрирование дает

$$\sigma(x)\frac{d^2y_0}{dx^2} = \int_0^x S(t)\,dt + Ax + B \tag{176}$$

причем интеграл

$$\int_0^x S(t)\,dt = M(x)$$

представляющий производимый заданной нагрузкою в сечении x изгибающий момент, найдется как обыкновенно.

Затем будет

$$\frac{d^2y_0}{dx^2} = \frac{M(x)}{\sigma(x)} + A\cdot\frac{x}{\sigma(x)} + B\cdot\frac{1}{\sigma(x)} \tag{177}$$

следовательно

$$\frac{dy_0}{dy} = \int_0^x \frac{M(t)}{\sigma(t)}\,dt + A\int_0^x \frac{t}{\sigma(t)}\,dt + B\int_0^x \frac{1}{\sigma(t)}\,dt + C \tag{178}$$

Пусть будет:

$$T(x) = \int_0^x \frac{M(t)}{\sigma(t)}\,dt$$

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{t}{\sigma(t)}\,dt \tag{179}$$

$$\psi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sigma(t)}\,dt$$

Все эти интегралы найдутся или точно, или приближенно по правилу трапеций, как обыкновенно.

Наконец будет

$$y_0 = \int_0^x T(t)\,dt + A\int_0^x \varphi(t)\,dt + B\int_0^x \psi(t)\,dt + Cx + D$$

Пусть будет:

$$Y_0(x) = \int_0^x T(t)\,dt$$

(180)
$$\varphi_1(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt$$

$$\psi_1(x) = \int_0^x \psi(t)\,dt$$

тогда будет

(181) $$y_0 = Y_0(x) + A\varphi_1(x) + B\psi_1(x) + Cx + D$$

Заметим, что, на основании равенств (179) и (180), будет:

$$Y_0(0)=0;\quad Y_0'(0)=0;\quad \varphi_1(0)=0;\quad \varphi_1'(0)=0;\quad \psi_1(0)=0;\quad \psi_1'(0)=0$$

Обращаясь к граничным условиям, получим:

$$y_0(0) = 0 = D$$
$$y_0'(0) = 0 = C$$

Затем

(182)
$$y_0(l) = Y_0(l) + A\varphi_1(l) + B\psi_1(l) = 0$$
$$y_0'(l) = T(l) + A\varphi(l) + B\psi(l) = 0$$

откуда и найдутся постоянные A и B.

Само собою понятно, что подобным же образом определяются постоянные, вводимые интегрированием в функции y_1, y_2, и т. д.

Для ясности прилагаем схемы, по которым, пользуясь правилом трапеций, вычисляются все входящие в предыдущие уравнения величины.

Численного примера не приводим, так как, кроме некоторой длинноты и утомительного однообразия, вычисление по приведенным схемам никаких трудностей не представляет.

§ **28.** Второй случай, т. е. когда и жесткость балки и ширина панели, на коей она лежит, — переменные, является самым общим и требует применения способа численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Из различных приемов такого интегрирования мы воспользуемся методою Адамса-Штёрмера, изложение которой можно найти во многих статьях моих в применении к техническим вопросам.

Схема 1. Вычисление функций $S(x)$, $M(x)$, $T(x)$, $Y_0(x)$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
x	$\frac{1}{\sigma(x)}$	$F(x)$	Суммы (3) поперечно	Суммы (4) сверху	$(5)\cdot\frac{1}{2}h = S(x)$	Суммы (6) поперечно	Суммы (7) сверху	$(8)\cdot\frac{1}{2}h = M(x)$	$(9)\cdot(2) = M(x):\sigma(x)$	Суммы (10) поперечно	Суммы (11) сверху	$(12)\cdot\frac{1}{2}h = T(x)$	Суммы (13) поперечно	Суммы (14) сверху	$(15)\cdot\frac{1}{2}h = Y_0(x)$

Схема 2. Вычисление функций $\psi(x)$, $\psi_1(x)$, $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x	$\frac{1}{\sigma(x)}$	Суммы (2) поперечно	Суммы (3) сверху	$(4)\cdot\frac{1}{2}h = \psi(x)$	Суммы (5) поперечно	Суммы (6) сверху	$(7)\cdot\frac{1}{2}h = \psi_1(x)$	$(1)\cdot(2) = \frac{x}{\sigma(x)}$	Суммы (9) поперечно	Суммы (10) сверху	$(11)\cdot\frac{1}{2}h = \varphi(x)$	Суммы (12) поперечно	Суммы (13) сверху	$(14)\cdot\frac{1}{2}h = \varphi_1(x)$

В этом случае мы будем иметь уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right]+\theta(x)\,y=F(x) \tag{183}$$

причем $\sigma(x)$, $\theta(x)$ и $F(x)$ — заданные функции переменной x; задание это может быть табличное и графическое.

К этому уравнению надо присовокупить граничные условия, относящиеся к концам $x=0$ и $x=l$ балки.

Для определенности и ясности рассуждения, положим, что оба конца балки свободные, так что граничные условия суть:

при $x=0$ должно быть $y'''(0)=0$; $y''(0)=0$
» $x=l$ » » $y'''(l)=0$; $y''(l)=0$

Расчет следует вести в такой последовательности:

1°) Положить

$$y_0=Cx+D$$

и определить постоянные C и D так, чтобы было:

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^l[F(x)-(Cx+D)\,\theta(x)]\,dx=0\\[2ex]\displaystyle\int_0^l[F(x)-(Cx+D)\,\theta(x)]\,x\,dx=0\end{cases} \tag{184}$$

Этими уравнениями определяется такое оседание бесконечно жесткой балки (недеформируемой), имеющей ту же форму нижней панели, при котором при данной нагрузке удовлетворяются условия статического равновесия.

2°) Положить в уравнении (183):

$$y=Cx+D+Y$$

тогда неизвестная функция Y будет определяться уравнением

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2Y}{dx^2}\right]+\theta(x)\,Y=F(x)-\theta(x)(Cx+D)$$

3°) Обозначив для краткости

$$F(x)-\theta(x)\cdot(Cx+D)=F_1(x)$$

полагаем

$$Y=Y_0+z$$

и определяем Y_0 по методе, указанной в § 27, так, чтобы было

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2Y_0}{dx^2}\right]=F_1(x)$$

тогда неизвестная z будет определяться уравнением

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2z}{dx^2}\right]+\theta(x)z=-\theta(x)\,Y_0 \tag{185}$$

Может представиться, что этим последним преобразованием расчет только напрасно удлиняется, ибо уравнение (185) того же вида, как и предложенное (183). Но дело в том, что в предложенном уравнении в состав функции $F(x)$ могут входить сосредоточенные силы, эта функция может быть разрывная и т. п., при вычислении Y_0 все эти обстоятельства никаких затруднений не представляют и не требуют составления условий сопряжения, но при численном интегрировании уравнения (183) разрывность функции $F(x)$ и сосредоточенные силы доставляют ряд затруднений, разбирать которые нет надобности, ибо описанным преобразованием они устраняются. Функция $\theta(x)\,Y_0$ будет, так сказать, «сглаженная», и при численном интегрировании можно будет брать бо́льший табличный промежуток h, что сокращает работу.

4°) После описанной подготовки полагаем

$$\theta(x)\cdot Y_0=f(x) \tag{186}$$

тогда уравнение (185) будет

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2z}{dx^2}\right]+\theta(x)\cdot z=f(x) \tag{187}$$

Неизвестная функция z определяется этим уравнением и граничными условиями, которые в нашем предположении суть:

при $x=0$ должно быть $z'''(0)=0$; $z''(0)=0$
» $x=l$ » » $z'''(l)=0$; $z''(l)=0$

Уравнение (187) есть линейное с последним членом, следовательно общий его интеграл будет вида

$$z=A_1Z_1+A_2Z_2+A_3Z_3+A_4Z_4+\Phi(x) \tag{188}$$

причем A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные, $\Phi(x)$ есть любое частное решение уравнения (187) с последним членом, причем нет надобности, чтобы это частное решение удовлетворяло граничным условиям (если бы

это было, — вопрос был бы решен), Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 — частные решения, линейно между собою независимые, уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2Z}{dx^2}\right]+\theta(x)Z=0 \tag{189}$$

без последнего члена, соответствующего уравнению (187). Опять-таки нет надобности, чтобы эти решения удовлетворяли граничным условиям: этим условиям должна удовлетворять функция z, а не каждая из составных частей ее в отдельности. В нашем случае граничные условия будут:

$$\begin{aligned}
&A_1Z_1''(0)+A_2Z_2''(0)+A_3Z_3''(0)+A_4Z_4''(0)+\Phi''(0)=0\\
&A_1Z_1'''(0)+A_2Z_2'''(0)+A_3Z_3'''(0)+A_4Z_4'''(0)+\Phi'''(0)=0\\
&A_1Z_1''(l)+A_2Z_2''(l)+A_3Z_3''(l)+A_4Z_4''(l)+\Phi''(l)=0\\
&A_1Z_1'''(l)+A_2Z_2'''(l)+A_3Z_3'''(l)+A_4Z_4'''(l)+\Phi'''(l)=0
\end{aligned} \tag{190}$$

Вид этих условий показывает, что при численном интегрировании уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right]+\theta(x)\Phi=f(x) \tag{191}$$

которым определяется функция $\Phi(x)$, и уравнения (189), которым определяется Z, надо распорядиться так, чтобы были известны и значения производных этих функций и их не приходилось бы находить по правилам дифференцирования табличных функций, пользуясь формулами теории конечных разностей.

Начальными (соответствующими $x=0$) значениями функций Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 и Φ мы можем распоряжаться как угодно, заботясь, однако, чтобы между решениями Z_k не было линейного соотношения. Мы этого наверное достигнем, подчинив, следуя Коши, начальные значения функций Z_k тем же условиям (единичная матрица), которым мы в § 4 подчинили функции Y_k, что нам и дало возможность решить в простом и самом общем виде вопрос о балке постоянного сечения, т. е. пишем такую схему этих начальных значений:

$$\begin{aligned}
&Z_1(0)=1;\ Z_1'(0)=0;\ Z_1''(0)=0;\ Z_1'''(0)=0\\
&Z_2(0)=0;\ Z_2'(0)=1;\ Z_2''(0)=0;\ Z_2'''(0)=0\\
&Z_3(0)=0;\ Z_3'(0)=0;\ Z_3''(0)=1;\ Z_3'''(0)=0\\
&Z_4(0)=0;\ Z_4'(0)=0;\ Z_4''(0)=0;\ Z_4'''(0)=1
\end{aligned} \tag{192}$$

Функцию же $\Phi(x)$ мы подчиним тем же самым условиям (36″), как и раньше, а именно:

$$\Phi(0)=\Phi'(0)=\Phi''(0)=\Phi'''(0)=0 \tag{192'}$$

тогда в граничные условия для $x=0$ эта функция входить не будет.

При таком выборе начальных значений на основании граничных условий, относящихся к $x=0$ при любой их комбинации, *две* из постоянных произвольных A_1, A_2, A_3, A_4 будут равны нулю. Так, в нашем случае очевидно будет

$$A_3=0 \quad \text{и} \quad A_4=0$$

значит нет надобности вычислять те две функции Z_3 и Z_4, которые на эти постоянные умножаются, так что искомое решение, удовлетворяющее граничным условиям при $x=0$, будет заключать не четыре, а *две* постоянные произвольные, в нашем случае A_1 и A_2, и значит, это решение будет вида

$$z=A_1Z_1+A_2Z_2+\Phi(x) \tag{193}$$

причем постоянные произвольные A_1 и A_2 определятся по граничным условиям для $x=l$, которые в нашем случае будут:

$$\begin{aligned} &A_1Z_1''(l)+A_2Z_2''(l)+\Phi''(l)=0 \\ &A_1Z_1'''(l)+A_2Z_2'''(l)+\Phi'''(l)=0 \end{aligned} \tag{194}$$

Таким образом все свелось к вычислению функций Z_1, Z_2 и Φ, определяемых уравнениями (189) и (191) и начальными их значениями, указанными в схеме (192), что производится по методе численного интегрирования уравнений без всяких затруднений.

Хотя в нашем случае для численного интегрирования уравнений (189) и (191) можно бы было привести каждое из них к системе двух уравнений второго порядка и применить методу Штёрмера, но, в виду надобности иметь значения производных этих функций, в общем случае выгоднее привести каждое из этих уравнений к системе уравнений *первого* порядка и применить методу Адамса, для которой мы ниже приведем схемы, не приводя таковых для методы Штёрмера.

Положим, что надо определить функцию Z_1 по уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2Z_1}{dx^2}\right]+\theta(x)Z_1=0 \tag{189}$$

Это уравнение заменяем системою:

$$(195)\qquad \frac{dZ_1}{dx}=u;\quad \frac{du}{dx}=\frac{1}{\sigma(x)}\cdot v;\quad \frac{dv}{dx}=w;\quad \frac{dw}{dx}=-\theta(x)Z_1$$

для которой начальные условия таковы:

при $x=0$ должно быть $Z_1(0)=1;\ u(0)=v(0)=w(0)=0$

Чтобы применить к этой системе методу Адамса, которую предполагаем известной, полагаем, выбрав достаточно малый табличный промежуток h:

$$(196)\qquad \alpha_n=u_n h;\quad \beta_n=\frac{1}{\sigma(x_n)}v_n h;\quad \gamma_n=w_n h:\quad \varepsilon_n=-\theta(x_n)\cdot Z_{1,n}h$$

и для каждой из неизвестных u, v, w, Z_1 составляем таблицу, подобную следующей для переменной Z_1 (стр. 318—319), причем $\Delta Z_{1,n}$ вычисляется по

1	2	3	4	5	6	7
№	x	α_n	$\Delta\alpha_n$	$\Delta^2\alpha_n$	$\Delta Z_{1,n}$	$Z_{1,n}$
. .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
. . . .	. . . .	. . .	. . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
$n-2$	x_{n-3}	α_{n-2}	$\Delta\alpha_{n-2}$	$\Delta^2\alpha_{n-2}$	$\Delta Z_{1,n-2}$	$Z_{1,n-2}$
$n-1$	x_{n-1}	α_{n-1}	$\Delta\alpha_{n-1}$	$\Delta^2\alpha_{n-1}$	$\Delta Z_{1,n-1}$	$Z_{1,n-1}$
n	x_n	α_n	$\Delta\alpha_n$		$\Delta Z_{1,n}$	$Z_{1,n}$
$n+1$	x_{n+1}	α_{n+1}				$Z_{1,n+1}$

формуле

$$(197)\qquad \Delta Z_{1,n}=\alpha_n+\frac{1}{2}\Delta\alpha_n+\frac{5}{12}\Delta^2\alpha_{n-2}$$

Таким образом полная схема для нашего вычисления будет такова, как в приложенной таблице (стр. 318 и 319).

При вычислении по этой схеме служат формулы:

$$\Delta Z_{1,n}=\alpha_n+\frac{1}{2}\Delta\alpha_{n-1}+\frac{5}{12}\Delta^2\alpha_{n-2}\qquad Z_{1,n+1}=Z_{1,n}+\Delta Z_{1,n}$$

$$\Delta w_n=\varepsilon_n+\frac{1}{2}\Delta\varepsilon_{n-1}+\frac{5}{12}\Delta^2\varepsilon_{n-2}\qquad w_{n+1}=w_n+\Delta w_n$$

$$\Delta v_n=\gamma_n+\frac{1}{2}\Delta\gamma_{n-1}+\frac{5}{12}\Delta^2\gamma_{n-2}\qquad u_{n+1}=u_n+\Delta u_n$$

$$\Delta u_n=\beta_n+\frac{1}{2}\Delta\beta_{n-1}+\frac{5}{12}\Delta^2\beta_{n-2}\qquad v_{n+1}=v_n+\Delta v_n$$

Схема вычисления

Данные				Вычисление Z_1					Вычисле		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
№	x_n	$\frac{h}{\sigma(x_n)}$	$\frac{h}{\theta(x_n)}$	$\alpha_n = u_n \cdot h = (24) \cdot h$	$\Delta\alpha_n$	$\Delta^2\alpha_n$	$\Delta Z_1, n$	Z_1, n	$\varepsilon_n = \frac{Z_{1n} \cdot h}{\theta(x_n)} = (9) \cdot (4)$	$\Delta\varepsilon_n$	$\Delta^2\varepsilon_n$
. .	. . .	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$n-2$	x_{n-2}	$\frac{h}{\sigma(x_{n-2})}$	$\frac{h}{\theta(x_{n-2})}$	α_{n-2}		$\Delta^2\alpha_{n-3}$		$Z_1, n-2$	ε_{n-2}		$\Delta^2\varepsilon_{n-3}$
					$\Delta\alpha_{n-2}$		$\Delta Z_{1,n-2}$			$\Delta\varepsilon_{n-2}$	
$n-1$	x_{n-1}	$\frac{h}{\sigma(x_{n-1})}$	$\frac{h}{\theta(x_{n-1})}$	α_{n-1}		$\Delta^2\alpha_{n-2}$		$Z_1, n-1$	ε_{n-1}		$\Delta^2\varepsilon_{n-2}$
					$\Delta\alpha_{n-1}$		$\Delta Z_{1,n-1}$			$\Delta\varepsilon_{n-1}$	
n	x_n	$\frac{h}{\sigma(x_n)}$	$\frac{h}{\theta(x_n)}$	α_n		$\Delta^2\alpha_{n-1}$		Z_1, n	ε_n		$\Delta^2\varepsilon_{n-1}$
					$\Delta\alpha_n$		$\Delta Z_1, n$			$\Delta\varepsilon_n$	
$n+1$	x_{n+1}	$\frac{h}{\sigma(x_{n+1})}$	$\frac{h}{\theta(x_{n+1})}$	α_{n+1}				$Z_1, n+1$	ε_{n+1}		
$n+2$	. . .	. . .	. . . .								

В этой схеме показан процесс перехода от значений $Z_{1,n}$, w_n, v_n, u_n, соответствующих абсцисс x_n, к значениям $Z_{1,n+1}$, w_{n+1}, v_{n+1}, u_{n+1}, когда вычисление в ходу, и значит, все таблицы заполнены так, как показано для u. По формулам (196) вычисляются значения:

$$\alpha_n,\ \beta_n,\ \gamma_n,\ \varepsilon_n$$

вписываются в свои места, затем по формуле (197) и ей подобным вычисляются разности:

$$\Delta u_n,\ \Delta v_n,\ \Delta w_n,\ \Delta Z_{1,n}$$

вписываются в свои места, после чего получаются:

$$u_{n+1},\ v_{n+1},\ w_{n+1},\ Z_{1,n+1}$$

вписываются в свои места; по этим значениям вычисляются:

$$\alpha_{n+1},\ \beta_{n+1},\ \gamma_{n+1},\ \varepsilon_{n+1}$$

и разности, как показано в первых трех таблицах, которые заполнены, а последняя для ясности оставлена не заполненной, и таким образом процесс продолжается дальше.

Совершенно подобным же образом вычисляются Z_2 и Ф.

функций Z_1, w, v, u

ние w		Вычисление v					Вычисление u				
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Δw_n	w_n	$\gamma_n = w_n \cdot h =$ (14)·h	$\Delta\gamma_n$	$\Delta^2\gamma_n$	Δv_n	v_n	$\beta_n = \frac{v_n h}{\sigma(x_n)} =$ (19)·(3)	$\Delta\beta_n$	$\Delta^2\beta_n$	Δu_n	u_n
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
Δw_{n-2}	w_{n-2}	γ_{n-2}	$\Delta\gamma_{n-2}$	$\Delta^2\gamma_{n-3}$	Δv_{n-2}	v_{n-2}	β_{n-2}	$\Delta\beta_{n-2}$	$\Delta^2\beta_{n-3}$	Δu_{n-2}	u_{n-2}
Δw_{n-1}	w_{n-1}	γ_{n-1}	$\Delta\gamma_{n-1}$	$\Delta^2\gamma_{n-2}$	Δv_{n-1}	v_{n-1}	β_{n-1}	$\Delta\beta_{n-1}$	$\Delta^2\beta_{n-2}$	Δu_{n-1}	u_{n-1}
Δw_n	w_n	γ_n	$\Delta\gamma_n$	$\Delta^2\gamma_{n-1}$	Δv_n	v_n	β_n				u_n
	w_{n+1}	γ_{n+1}				v_{n+1}					

В схемах показано, каким образом *продолжать* вычисление, когда оно в ходу. Начало таблиц, т. е. числа, соответствующие значениям $n = 0$, $n = 1$ и $n = 2$, составляются последовательными приближениями следующим образом.

Значения u_0, v_0, w_0, $Z_{1,0}$ заданы, вписываем их в свои места, вычисляем по ним α_0, β_0, γ_0, ε_0, которые также вписываем в свое место. Затем ведем отдельно следующий расчет.

Полагаем в первом приближении:

$$\Delta u_0 = \beta_0, \quad \Delta v_0 = \gamma_0, \quad \Delta w_0 = \varepsilon_0, \quad \Delta Z_{1,0} = \alpha_0$$

и пишем приближенно:

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0, \quad v_1 = v_0 + \Delta v_0, \quad w_1 = w_0 + \Delta w_0, \quad Z_{1,1} = Z_{1,0} + \Delta Z_{1,0}$$

Вычисляем по этим значениям величины:

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1, \quad \varepsilon_1$$

составляем разности:

$$\Delta\alpha_0, \quad \Delta\beta_0, \quad \Delta\gamma_0, \quad \Delta\varepsilon_0$$

и пишем более точные равенства:

$$\Delta u_0 = \beta_0 + \frac{1}{2}\Delta\beta_0 \quad \text{и} \quad \Delta u_1 = \beta_1 + \frac{1}{2}\Delta\beta_0$$

$$\Delta v_0 = \gamma_0 + \frac{1}{2}\Delta\gamma_0 \qquad \Delta v_1 = \gamma_1 + \frac{1}{2}\Delta\gamma_0$$

$$\Delta w_0 = \varepsilon_0 + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon_0 \qquad \Delta w_1 = \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon_0$$

$$\Delta Z_{1,0} = \alpha_0 + \frac{1}{2}\Delta\alpha_0 \qquad \Delta Z_{1,1} = \alpha_1 + \frac{1}{2}\Delta\alpha_0$$

и по ним находим значения:

$$u_1,\ u_2,\ v_1,\ v_2,\ w_1,\ w_2,\ Z_{1,1},\ Z_{1,2}.$$

и затем

$$\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ \varepsilon_2$$

составляем вновь разности:

$$\Delta\alpha_0,\ \Delta\alpha_1,\ \Delta^2\alpha_0;\quad \Delta\beta_0,\ \Delta\beta_1,\ \Delta^2\beta_0,\ \ldots$$

и затем

$$\Delta Z_{1,0} = \alpha_0 + \frac{1}{2}\Delta\alpha_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\alpha_0$$

$$\Delta w_0 = \varepsilon_0 + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\varepsilon_0$$

$$\Delta v_0 = \gamma_0 + \frac{1}{2}\Delta\gamma_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\gamma_0$$

$$\Delta u_0 = \beta_0 + \frac{1}{2}\Delta\beta_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\beta_0$$

$$\Delta Z_{1,1} = \alpha_1 + \frac{1}{2}\Delta\alpha_0 + \frac{5}{12}\Delta^2\alpha_0$$

$$\Delta w_1 = \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon_0 + \frac{5}{12}\Delta^2\varepsilon_0$$

$$\Delta v_1 = \gamma_1 + \frac{1}{2}\Delta\gamma_0 + \frac{5}{12}\Delta^2\gamma_0$$

$$\Delta u_1 = \beta_1 + \frac{1}{2}\Delta\beta_0 + \frac{5}{12}\Delta^2\beta_0$$

По этим разностям перевычисляем:

$$Z_{1,1} \text{ и } Z_{1,2};\ w_1 \text{ и } w_2;\ v_1 \text{ и } v_2;\ u_1\, u_2,$$

вписываем их в свои места схемы, после чего продолжаем вычисление по этой схеме.

Как видно, процесс вычисления весьма прост и симметричен.

Если окажутся очень малые числа, то надо вычислять, напр., не β_n, а $\beta_n \cdot 10^k$, взяв подходящее значение k. Привычный вычислитель сам найдется как сократить работу и придавать вычислению удобный вид.

Понятно, что все вычисление надо вести логарифмической линейкой 50 см длиною; точность его будет больше, нежели в этом вопросе практикою требуется.

После того как вычислены функции Z_1, Z_2 и Φ, составляем уравнения (195) для определения постоянных произвольных, взяв входящие в эти уравнения значения производных из наших таблиц. Так, напр., мы имеем на основании равенств (194):

$$\frac{d^2 Z_1}{dx^2} = Z_1'' = \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sigma(x)} \cdot v \tag{198}$$

значит будет

$$Z''(l) = \frac{1}{\sigma(l)} \cdot v(l) \tag{199}$$

Чтобы найти $Z'''(l)$, надо обратиться к формуле

$$\sigma(x) Z_1'' = v$$

из которой следует

$$\sigma'(l) Z_1''(l) + \sigma(l) Z_1'''(l) = \left(\frac{du}{dx}\right)_l = w(l) \tag{200}$$

Величина $\sigma'(l)$ по заданной функции $\sigma(x)$ найдется или аналитически, или графически, тогда предыдущее уравнение даст величину $Z_1'''(l)$.

Совершенно так же найдутся и прочие значения производных, входящие в уравнения (195).

После того как постоянные определены, надо по формуле

$$y = A_1 Z_1 + A_2 Z_2 + \Phi(x) \tag{201}$$

вычислить величину y и затем проверить ее как объяснено выше, пользуясь уравнением

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma(x)\frac{d^2 y}{dx^2}\right] = F(x) - \theta(x) \cdot y \tag{202}$$

в правую часть которого надо подставить величину y, рассчитываемую по формулам (201).

В том случае, когда функции $\sigma(x)$ и $\theta(x)$ заданы таблично или графически, так что нахождение их частных значений весьма просто, можно численное интегрирование системы уравнений (195) производить по методе Эйлера, взяв достаточно мелкие промежутки.

По этой методе, сохраняя обозначения (196), вычисление производится по следующей схеме,

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{№}{n}$	x	$\frac{h}{\sigma x}$	$h\theta(x)$	α_n	u_n	β_n	v_n	γ_n	$w_{1,\,n}$	ε_n	$Z_{1,\,n}$
. . .	.	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	x_n	$\frac{h}{\sigma(x_n)}$	$h\theta(x_n)$	α_n	u_n	β_n	v_n	γ_n	w_n	ε_n	$Z_{1,\,n}$
$n+1$					u_{n+1}		v_{n+1}		w_{n+1}		$Z_{1,\,n+1}$

причем:

$$u_{n+1} = u_n + \alpha_n$$
$$v_{n+1} = v_n + \beta_n$$
$$w_{n+1} = w_n + \gamma_n$$
$$Z_{1,\,n+1} = Z_{1,\,n} + \varepsilon_n$$

Вычисление по этой схеме настолько просто, что никаких пояснений не требует.

§ **29.** Мы развили несколько метод расчета балки на упругом основании. Спрашивается, которою же методою пользоваться?

Первая метода — составления точного решения — приложима только для балок *постоянного* сечения.

Вторая метода — разложения заданной нагрузки по фундаментальным функциям — приложима также только для балок постоянного сечения, для которых эти функции известны; эта метода особенно удобна, когда балка *подперта* в обоих концах — тогда эта метода быстро и просто ведет к цели.

Остальные методы основаны на приближенном численном интегрировании или функций (метода, изложенная в §§ 16—21), или уравнений. Последняя метода является, так сказать, универсальною и приложима ко *всякому* случаю расчета балок на упругом основании, т. е. как балок постоянного, так и переменного сечения, постоянной или переменной ширины опорной панели при любой нагрузке.

Метода §§ 16—21, которую можно назвать методою последовательных приближений, приложима для балок постоянного сечения и при переменном сечении для балок с постоянною шириною опорной панели и однородном грунте, что является, однако, довольно обычным случаем.

Необходимо, однако, обратить внимание, что при переменном K метода последовательных приближений вообще не применима: процесс, представляемый формулами (170), может оказаться расходящимся, и без рассмотрения дополнительного члена η_n, определяемого уравнением (171), этот процесс не может считаться обоснованным.

Вычислительный процесс в обоих методах разнится в том, что в методе последовательных приближений вычисление ведется по «столбцам», т. е. один и тот же процесс, напр. «суммирование попарно» или «суммирование сверху», ведется в одном столбце с верху до низу таблицы, *не перебиваясь другими процессами*. В методе численного интегрирования уравнений вычисление ведется по *строкам*, сказанного однообразия процесса нет и он идет, так сказать, с *постоянными перебоями*, что делает его требующим бо́льшего внимания, а значит, и вызывающим бо́льшее утомление, вследствие чего при одинаковом числе написанных цифр (что по Гауссу[1] является мерою вычислительной работы) этот процесс требует приблизительно на 50% больше времени, нежели предыдущий.

На основании этих замечаний можно сказать вообще: 1°) для балок постоянного сечения следует вообще пользоваться «точною» методою, как она у нас изложена, за исключением случая балки, подпертой в обоих концах, когда разложение по фундаментальным функциям $\left(\text{в этом случае } \sin\frac{k\pi x}{l}\right)$ ведет проще и быстрее к цели; 2°) для балки переменного сечения и переменной ширины нижней панели единственной методой, практически применимой, является метода численного интегрирования уравнения. Таким образом остается только случай балки переменного профиля и постоянной ширины опорной панели, к которому приложимы обе методы: последовательных приближений и численного интегрирования уравнений.

Чтобы в каждом частном случае сделать обоснованный выбор между этими методами, надо поступать так:

а) определить, как показано ниже, сколько приближений надо взять для получения требуемой точности, предполагая, что вычисление ведется на четыре знака, причем последний сомнительный;

б) составить схему и по ней сосчитать, сколько придется всего написать цифр, причем учесть и необходимый поверительный расчет,

[1] 5 апреля 1812 г. Гаусс, приступив к вычислению возмущений Паллады Юпитером, рассчитал, сколько весь расчет потребует цифр — оказалось 338 400. По пробному вычислению он определил, что всю работу окончит 12 июля, что и записал в своем дневнике, в который затем вносил ход действительного исполнения работы. 13 июля он написал Ольберсу, что эту работу он в намеченный срок окончил! (Gauss. Werke, Bd. VII, 1906, p. 605.)

производимый как объяснено в § 14, приняв, напр., табличный промежуток h в $\frac{1}{24} l$;

в) для методы численного интегрирования учесть, составив схему, сколько цифр придется написать для вычисления величины Y_0 квадратурами для «приведения» нагрузки;

г) по схеме § 28 сосчитать, сколько цифр придется написать для вычисления функций Z_i, Z_j и $\Phi(x)$, входящих в состав величины y по роду граничных условий; при этом счете надо принимать, что в столбцах 3, 4, 5, 10, 15, 20, 9, 14, 19 и 24 будет по 4 значащих цифры в каждой строке, в столбцах 6, 11, 16, 21, 8, 13, 18 и 23 — по 3 цифры, в столбцах 7, 12, 17 и 22 — по 2 цифры, а всего в строке будет

$$4 \times 10 + 3 \times 8 + 2 \times 4 = 72$$

т. е. по 72 цифры, а во всей схеме при 24 строках:

$$72 \times 24 = 1728 \text{ цифры,}$$

что равносильно

$$1728 \times 1.50 = 2592$$

или кругло 2600 цифрам схем в расчете по простым квадратурам. Таких схем надо заполнить три, значит всю эту работу надо оценивать в 7800 цифр. К этому надо присовокупить одну схему квадратур на приведение нагрузки, т. е. 1600 цифр, и одну схему для поверительного расчета — 1600 цифр, так что всего при 24 точках будет 11 000 цифр.

При расчете по последовательному приближению каждое приближение требует заполнения схемы в 1600 цифр, когда число точек 24, значит расчет по численному интегрированию уравнения равносилен по затрате работы получению четырех приближений, т. е. y_0, y_1, y_2 и y_4 и поверительному расчету для y_4.

Чтобы определить, доставит ли это требуемую степень точности, надо взять отношение

$$m_2^{4k}\left[m_2^4 + c^2 l^4\right] : m_1^{4k}\left[m_1^4 + c^2 l^4\right]$$

при значениях $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$ и выбрать то значение k, при котором это отношение становится равным и бо́льшим 5000.

Характеристические числа можно для приближения брать для случая однородной балки при одинаковых граничных условиях с данною.

Так, напр., положим, что рассчитывается фундамент, шириною 200 см, при сопротивлении грунта 8 кг/см², так что наше

$$k = c^2 = 8 \times 200 = 1600$$

Оба конца свободны, тогда:

$$m_1 = 4.73; \qquad m_2 = 7.85$$
$$m_1^4 = 500 \qquad m_2^4 = 3800$$
$$m_1^4 + c^2 = 2100; \quad m_1^4 + c^2 = 5400$$
$$m_2^4 (m_2^4 + c^2) : m_1^4 (m_1^4 + c^2) = 13.8$$
$$m_2^8 (m_2^4 + c^2) : m_1^8 (m_1^4 + c^2) = 105$$
$$m_2^{12} (m_2^4 + c^2) : m_1^{12} (m_1^4 + c^2) = 794$$
$$m_2^{16} (m_2^4 + c^2) : m_1^{16} (m_1^4 + c^2) = 6040$$
$$m_2^{20} (m_2^4 + c^2) : m_1^{20} (m_1^4 + c^2) = 45\,880$$

Из этой таблицы видно, что надо вычислить y_4 и y_5, отношение которых будет постоянное в пределах точности вычисления и, значит, доставит нужное значение m_1^4. Таким образом потребуется заполнить *шесть* схем для получения y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 и y_5 и еще одну для проверки полученного результата, что составит

$$1600 \times 7 = 11.200 \text{ цифр}$$

т. е. столько же, как и при методе численного интегрирования уравнения. Но в виду того, что процесс вычисления по последовательным приближениям более прост и может быть поручен менее искусному вычислителю, то в данном случае следовало бы применить этот способ.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

О расчете перекрестных связей и набора судового днища

§ **1.** Методы, изложенные в первой главе, можно обобщить и применить к расчету перекрестных связей, что мы и поясним, изложив вкратце сущность расчета набора судового днища и показав на этом примере то упрощение, которое вносится, если решение выражать в функциях, обозначенных через Y_1, Y_2, Y_3, Y_4.

Подробно этот вопрос рассмотрен в книге Dr. Ing. W. Schilling'a — «Statik der Bodenkonstruction der Schiffe» (J. Springer, Berlin, 1925), но здесь применены обычные приемы, ведущие к напрасному усложнению дела, как будет отмечено в своем месте далее.

§ **2.** Днищевой набор коммерческого судна обыкновенной системы постройки состоит из среднего киля, нескольких параллельных ему продольных балок, называемых стрингерами, и многочисленных поперечных балок, называемых шпангоутами.

Опорами для киля и стрингеров служат поперечные переборки, на которых, смотря по относительной жесткости, считают, что продольные балки *подперты* или *заделаны*.

Расположение шпангоутов между переборками равномерное, поэтому, когда пиллерсов нет, то нагрузка продольных балок симметрична относительно плоскости, проходящей через середину длины их параллельно переборкам. В виду большого числа шпангоутов воображают, что число их бесконечно большое и, таким образом, приводят вопрос к рассмотрению системы балок, лежащих на упругом основании.

Не входя в изложение самого способа составления уравнений упругого равновесия такой системы, мы ограничимся лишь методою их интегрирования и определения постоянных произвольных по условиям закрепления продольных балок на поперечных переборках.

§ **3.** Мы начнем с рассмотрения того случая, когда в данном трюме *пиллерсов нет*.

Для каждой балки абсциссы x будем считать от ее середины, полудлину балки обозначим через l и, вместо переменной x, введем переменную z уравнением

$$lz = x$$

и производные по этой переменной будем обозначать значками.

Вследствие симметрии, для каждой балки, при любом их числе, одна пара граничных условий будет:

$$\text{при } z = 0 \text{ должно быть } y'(0) = 0;\ y'''(0) = 0$$

Вторая пара граничных условий будет выражаться различно, смотря по тому, считается ли конец $z = 1$ подпертым, или заделанным, и эти условия будут:

а) если конец *подперт*:

$$\text{при } z = 1 \text{ должно быть: } y(1) = 0;\ y''(1) = 0$$

б) если конец *заделан*:

$$\text{при } z = 1 \text{ должно быть: } y(1) = 0;\ y'(1) = 0$$

В этом вопросе нам придется пользоваться функциями Y_k от аргумента αz, поэтому приведем сводку главнейших формул, к ним относящихся.

Очевидно, что начальные значения этих функций и их производных первых трех порядков будут заключаться в той же единичной матрице:

	Y_k	Y_k'	Y_k''	Y_k'''
Y_1	1	0	0	0
Y_2	0	1	0	0
Y_3	0	0	1	0
Y_4	0	0	0	1

Сами же функции и их производные суть:

K	Функции $Y_k(\alpha z)$	Y_k'	Y_k''	Y_3'''
1	$Y_1(\alpha z) = \operatorname{Ch}\alpha z \cos\alpha z$	$-4\alpha\, Y_4$	$-4\alpha^2\, Y_3$	$-4\alpha^3\, Y_2$
2	$Y_2(\alpha z) = \frac{1}{2}(\operatorname{Ch}\alpha z \sin\alpha z + \operatorname{Sh}\alpha z \cos\alpha z)$	$\alpha\, Y_1$	$-4\alpha^2 Y_4$	$-4\alpha^3\, Y_3$
3	$Y_3(\alpha z) = \frac{1}{2}\operatorname{Sh}\alpha z \sin\alpha z$	$\alpha\, Y_2$	$\alpha^2\, Y_1$	$-4\alpha^3\, Y_4$
4	$Y_4(\alpha z) = \frac{1}{4}(\operatorname{Ch}\alpha z \sin\alpha z - \operatorname{Sh}\alpha z \cos\alpha z)$	$\alpha\, Y_3$	$\alpha^2\, Y_2$	$\alpha^3\, Y_1$

Заметим также, что вообще

$$Y_k^{\mathrm{IV}}(\alpha z) = -4\alpha^4 Y_k(\alpha z) \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

После этих предварительных замечаний перейдем к рассмотрению частных случаев, встречающихся в практике, на которых и поясним нашу методу.

А) *Один средний киль.*

В этом случае мы имеем дело с одним уравнением вида

$$ay^{\mathrm{IV}} + y = f \tag{1}$$

причем a и f — заданные постоянные.

Хотя и очевидно, что случай этот уже рассмотрен в главе I, но мы рассмотрим его в соответствии с прочими.

Характеристическое уравнение для (1) есть

$$as^4 + 1 = 0 \tag{2}$$

Положив в нём

$$\frac{1}{a} = 4\alpha^4$$

будем иметь корни, отличающиеся от корней уравнения

$$s^4 + 4 = 0$$

лишь множителем α.

Значит, частные решения уравнения без последнего члена, соответствующего (1), имеющие единичную матрицу, будут:

$$Y_1(\alpha z);\ Y_2(\alpha z);\ Y_3(\alpha z);\ Y_4(\alpha z)$$

Из рассмотрения этой матрицы видно, что для того, чтобы были удовлетворены граничные условия

$$y'(0) = 0 \quad \text{и} \quad y'''(0) = 0$$

надо в составе общего интеграла оставить лишь функции $Y_1(\alpha z)$ и $Y_3(\alpha z)$ и брать

$$y = A_1 Y_1(\alpha z) + A_3 Y_3(\alpha z) + f \tag{3}$$

причем A_1 и A_3 — произвольные постоянные, которые определяются по второй паре граничных условий, а именно:

Если конец $z = 1$ подперт:

$$y(1) = 0;\ y''(1) = 0$$

т. е.

$$\begin{aligned} A_1 Y_1(\alpha) + A_3 Y_3(\alpha) + f &= 0 \\ A_1 Y_1''(\alpha) + A_3 Y_3''(\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

На основании таблицы производных функций $Y_k(\alpha z)$, последнее уравнение перепишется так:

$$-4A_1 Y_3(\alpha) + A_3 Y_1(\alpha) = 0$$

так что для определения постоянных служат уравнения:

$$\begin{aligned} A_1 Y_1(\alpha) + A_3 Y_3(\alpha) + f &= 0 \\ 4A_1 Y_3(\alpha) - A_3 Y_1(\alpha) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Совершенно так же для того случая, когда конец $z = 1$ заделан, получим:

$$\begin{aligned} A_1 Y_1(\alpha) + A_3 Y_3(\alpha) + f &= 0 \\ 4A_1 Y_4(\alpha) - A_3 Y_2(\alpha) &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Уравнения (3) и (4) и (3) и (5) представляют решение вопроса при обоих случаях закрепления. В дальнейшие подробности здесь нет надобности входить, заметив лишь, что, на основании таблицы производных функций Y_k,

срезывающие силы и изгибающие моменты выражаются через самые функции Y_k.

Б) *Киль и по одному стрингеру с каждого борта.*

В этом случае вопрос приводится к системе уравнений вида:

$$(6)\qquad \begin{aligned} a_1 y_1^{IV} + b_1 y_2^{IV} + y_1 &= f_1 \\ a_2 y_1^{IV} + b_2 y_2^{IV} + y_3 &= f_2 \end{aligned}$$

причем a_1, b_1, a_2, b_2, f_1, f_2 — заданные постоянные.

Соответствующая система уравнений без последнего члена, написанных символически, есть:

$$(7)\qquad \begin{aligned} (a_1 \delta^4 + 1) u_1 + b_1 \delta^4 u_2 &= 0 \\ a_2 \delta^4 u_1 + (b_2 \delta^4 + 1) u_2 &= 0 \end{aligned}$$

По исключении неизвестной u_2, имеем, для определения u_1, уравнение

$$(8)\qquad [(a_1 \delta^4 + 1)(b_2 \delta^4 + 1) - a_2 b_1 \delta^8] u_1 = 0$$

и характеристическое уравнение

$$(9)\qquad (a_1 s^4 + 1)(b_2 s^4 + 1) - a_2 b_1 s^8 = 0$$

которое пишется так:

$$(9')\qquad s^8 + \frac{a_1 + b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} s^4 + \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = 0$$

Во всех случаях практики левая часть этого уравнения разлагается на множители

$$(10)\qquad (s^4 + \omega_1)(s^4 + \omega_2) = 0$$

причем

$$\omega_1 > 0 \quad \text{и} \quad \omega_2 > 0$$

поэтому, положив

$$(11)\qquad \omega_1 = 4\alpha_1^4 \quad \text{и} \quad \omega_2 = 4\alpha_2^4$$

видим, что у нас получаются две группы решений с единичною матрицею: первая — с аргументом $\alpha_1 z$, вторая — с аргументом $\alpha_2 z$, т. е.

$$Y_1(\alpha_1 z);\ Y_2(\alpha_1 z);\ Y_3(\alpha_1 z);\ Y_4(\alpha_1 z)$$

и

$$Y_1(\alpha_2 z);\ Y_2(\alpha_2 z);\ Y_3(\alpha_2 z);\ Y_4(\alpha_2 z)$$

так что решение нашей системы, удовлетворяющее граничным условиям при $z = 0$, будет:

$$(12)\quad \begin{aligned} y_1 &= A_1 Y_1(\alpha_1 z) + A_3 Y_3(\alpha_1 z) + B_1 Y_1(\alpha_2 z) + B_3 Y_3(\alpha_2 z) + f_1 \\ y_2 &= \sigma_1 [A_1 Y_1(\alpha_1 z) + A_3 Y_3(\alpha_1 z)] + \sigma_2 [B_1 Y_1(\alpha_2 z) + B_3 Y_3(\alpha_2 z)] + f_2 \end{aligned}$$

причем σ_1 и σ_2 определяются уравнениями:

$$(13)\quad \begin{aligned} -4\alpha_1^4 a_2 - 4\alpha_1^4 b_2 \sigma_1 + 1 &= 0 \\ -4\alpha_2^4 a_2 - 4\alpha_2^4 a_2 \sigma_3 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

A_1, A_3, B_1, B_3 — произвольные постоянные.

Положим теперь, что балки при конце $z = 1$ подперты, так что граничные условия для этого конца суть:

$$(14)\quad \begin{aligned} y_1(1) = 0;\ y_1''(1) &= 0 \\ y_2(1) = 0;\ y_2''(1) &= 0 \end{aligned}$$

которые в нашем случае будут:

$$\begin{aligned} [A_1 Y_1(\alpha_1) + A_3 Y_3(\alpha_1)] + [B_1 Y_1(\alpha_2) + B_3 Y_3(\alpha_2)] + f_1 &= 0 \\ \sigma_1 [A_1 Y_1(\alpha_1) + A_3 Y_3(\alpha_1)] + \sigma_2 [B_1 Y_1(\alpha_2) + B_3 Y_3(\alpha_2)] + f_2 &= 0 \\ [4A_1 Y_3(\alpha_1) - A_3 Y_1(\alpha_1)] + [4B_1 Y_3(\alpha_2) - B_3 Y_1(\alpha_2)] &= 0 \\ \sigma_1 [4A_1 Y_3(\alpha_1) - A_3 Y_1(\alpha_1)] + \sigma_2 [4B_1 Y_3(\alpha_2 - B_3 Y_1(\alpha_2)] &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$(15)\quad \begin{aligned} 4A_1 Y_3(\alpha_1) - A_3 Y_1(\alpha_1) &= 0 \\ 4B_1 Y_3(\alpha_2) - B_3 Y_1(\alpha_2) &= 0 \end{aligned}$$

$$(16)\quad \begin{aligned} A_1 Y_1(\alpha_1) + A_3 Y_3(\alpha_1) + \frac{\sigma_2 f_1 - f_2}{\sigma_2 - \sigma_1} &= 0 \\ B_1 Y_1(\alpha_2) + B_3 Y_3(\alpha_2) + \frac{f_2 + \sigma_1 f_1}{\sigma_2 - \sigma_1} &= 0 \end{aligned}$$

Положив

$$\frac{\sigma_2 f_1 - f_2}{\sigma_2 - \sigma_1} = h_1 \quad \text{и} \quad \frac{f_2 - \sigma_1 f_1}{\sigma_2 - \sigma_1} = h_2$$

видим, что постоянные A_1, A_3, B_1, B_3 определяются уравнениями:

$$(17)\quad \begin{aligned} A_1 Y_1(\alpha_1) + A_3 Y_3(\alpha_1) + h_1 &= 0 \\ 4A_1 Y_3(\alpha_1) - A_3 Y_1(\alpha_1) &= 0 \end{aligned}$$

$$(18)\quad \begin{aligned} B_1 A_1(\alpha_2) + B_3 Y_3(\alpha_2) + h_2 &= 0 \\ 4A_1 Y_3(\alpha_2) - B_3 Y_1(\alpha_2) &= 0 \end{aligned}$$

того же вида как и для одной балки.

Совершенно так же увидим, что для случая, когда конец $z = 1$ считается заделанным, постоянные будут определяться уравнениями:

$$A_1 Y_1(\alpha) + A_3 Y_3(\alpha_1) + h_1 = 0 \tag{19}$$
$$4A_1 Y_4(\alpha_1) - A_3 Y_2(\alpha_1) = 0$$

$$B_1 Y_1(\alpha_2) + B_3 Y_3(\alpha_2) + h_2 = 0 \tag{20}$$
$$4B_1 Y_4(\alpha_2) - B_3 Y_2(\alpha_2) = 0$$

Таким образом вопрос решен, причем для определения постоянных произвольных служат в обоих случаях весьма простые уравнения.

B) *Средний киль и по два стрингера с каждого борта.*

В этом случае система уравнений будет вида:

$$\begin{aligned} a_1 y_1^{IV} + b_1 y_2^{IV} + c_1 y_3^{IV} + y_1 &= f_1 \\ a_2 y_1^{IV} + b_2 y_2^{IV} + c_2 y_3^{IV} + y_2 &= f_2 \\ a_3 y_1^{IV} + b_3 y_2^{IV} + c_3 y_3^{IV} + y_3 &= f_3 \end{aligned} \tag{21}$$

Соответствующая система однородных уравнений, написанных в символической форме, есть:

$$\begin{aligned} (a_1 \delta^4 + 1) u_1 + b_1 \delta^4 u_2 + c_1 \delta^4 u_3 + u_1 &= 0 \\ a_2 \delta^4 u_1 + (b_2 \delta^4 + 1) u_2 + c_2 \delta^4 u_3 + u_2 &= 0 \\ a_3 \delta^4 u_1 + b_3 \delta^4 u_2 + (c_3 \delta^4 + 1) u_3 &= 0 \end{aligned} \tag{22}$$

Характеристическое уравнение будет

$$\begin{vmatrix} a_1 s^4 + 1, & b_1 s^4, & c_1 s^4 \\ a_2 s^4, & b_2 s^4 + 1, & c_2 s^4 \\ a_3 s^4, & b_3 s^4, & c_3 s^4 + 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{23}$$

Первая часть этого уравнения разлагается для случаев, имеющих место на практике, на множители

$$(s^4 + \omega_1)(s^4 + \omega_2)(s^4 + \omega_3) = 0 \tag{24}$$

причем

$$\omega_1 > 0; \ \omega_2 > 0; \ \omega_3 > 0$$

поэтому, положив

$$\omega_1 = 4\alpha_1^4; \ \omega_2 = 4\alpha_2^4; \ \omega_3 = 4\alpha_3^4 \tag{25}$$

получим три группы частных решений с единичною матрицею, а именно:

$$\begin{array}{llll} Y_1(\alpha_1 z); & Y_2(\alpha_1 z); & Y_3(\alpha_1 z); & Y_4(\alpha_1 z) \\ Y_1(\alpha_2 z); & Y_2(\alpha_2 z); & Y_3(\alpha_2 z); & Y_4(\alpha_2 z) \\ Y_1(\alpha_3 z); & Y_2(\alpha_3 z); & Y_3(\alpha_3 z); & Y_4(\alpha_3 z) \end{array}$$

и решения, удовлетворяющие граничным условиям при $z = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} y_1'(0) &= 0; \quad y_1'''(0) = 0 \\ y_2'(0) &= 0; \quad y_2'''(0) = 0 \\ y_3'(0) &= 0; \quad y_3'''(0) = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

будут:

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 Y_1(\alpha_1 z) + A_3 Y_3(\alpha_1 z) + B_1 Y_1(\alpha_2 z) + B_3 Y_3(\alpha_2 z) + \\ &\quad + C_1 Y_1(\alpha_3 z) + D_3 Y_3(\alpha_3 z) + f_1 \\ y_2 &= \sigma_1 [A_1 Y_1(\alpha_1 z) + A_3 Y_3(\alpha_1 z)] + \sigma_2 [B_1 Y_1(\alpha_2 z) + B_3 Y_3(\alpha_1 z)] + \\ &\quad + \sigma_3 [C_1 Y_1(\alpha_3 z) + D_3 Y_3(\alpha_3 z)] + f_2 \\ y_3 &= \tau_1 [A_1 Y_1(\alpha_1 z) + A_3 Y_3(\alpha_1 z)] + \tau_2 [B_1 Y_1(\alpha_2 z) B_3 Y_3(\alpha_2 z)] + \\ &\quad + \tau_3 [C_1 Y_1(\alpha_3 z) + D_3 Y_3(\alpha_3 z)] + f_3 \end{aligned} \tag{27}$$

причем множители σ_1, σ_2, σ_3; τ_1, τ_2, τ_3 определяются уравнениями вида:

$$\begin{aligned} &-4a_2 \alpha_j^4 + (-4b_2 \alpha_j^4 + 1)\sigma_j - 4c_2 \alpha_j^4 \tau_j = 0 \\ &-4a_3 \alpha_j^4 - 4b_3 \alpha_j^4 \sigma_j + (-4c_3 \alpha_j^4 + 1)\tau_j = 0 \end{aligned} \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{28}$$

Когда конец $z = 1$ подперт, граничные условия будут:

$$\begin{aligned} &[A_1 Y_1(\alpha_1) + A_2 Y_3(\alpha_1)] + [B_1 Y_1(\alpha_2) + B_3 Y_3(\alpha_2)] + \\ &\quad + [C_1 Y_1(\alpha_3) + D_3 Y_3(\alpha_3)] + f_1 = 0 \\ &\sigma_1 [A_1 Y_1(\alpha_1) + A_2 Y_3(\alpha_1)] + \sigma_2 [B_1 Y_1(\alpha_2) + B_3 Y_3(\alpha_2)] + \\ &\quad + \sigma_3 [C_1 Y_1(\alpha_3) + D_3 Y_3(\alpha_3)] + f_2 = 0 \\ &\tau_1 [A_1 Y_1(\alpha_1) + A_3 Y_3(\alpha_1)] + \tau_2 [B_1 Y_1(\alpha_1) B_3 Y_3(\alpha_2)] + \\ &\quad + \tau_3 [C_1 Y_1(\alpha_3) + D_3 Y_3(\alpha_3)] + f_3 = 0 \\ &[4A_1 Y_4(\alpha_1) - A_3 Y_2(\alpha_1)] + [4B_1 Y_4(\alpha_2) - B_3 Y_2(\alpha_2)] + \\ &\quad + [4C_1 Y_4(\alpha_3) - D_3 Y_2(\alpha_3)] = 0 \\ &\sigma_1 [4A_1 Y_4(\alpha_1) - A_3 Y_2(\alpha_1)] + \sigma_2 [4B_1 Y_4(\alpha_1) - B_3 Y_2(\alpha_2)] + \\ &\quad + \sigma_3 [4C_1 Y_4(\alpha_3) - D_3 Y_2(\alpha_3)] = 0 \\ &\tau_1 [4A_1 Y_4(\alpha_1) - A_3 Y_2(\alpha_1)] + \tau_2 [4B_1 Y_4(\alpha_2) - B_3 Y_2(\alpha_2)] + \\ &\quad + \tau_3 [4C_1 Y_4(\alpha_3) - D_3 Y_2(\alpha_3)] = 0 \end{aligned}$$

Очевидно, что эти уравнения распадаются на частные системы такого вида:

$$(29)\qquad \begin{aligned} A_1 Y_1(\alpha_1) + A_3 Y_3(\alpha_1) + h_1 &= 0 \\ 4A_1 Y_4(\alpha_1) - A_3 Y_2(\alpha_1) &= 0 \end{aligned}$$

и т. п., выписывать которые нет надобности, чтобы видеть, что определение постоянных A_1, A_3, B_1, B_3, C_1, D_3 никаких трудностей не представляет, а после того как оно выполнено вопрос может считаться решенным.

Совершенно подобные же уравнения получаются и для того случая, когда конец $z = 1$ заделан.

Как видно, все дело свелось к решению характеристического уравнения (23), но если это уравнение писать в этой форме, то даже для случая, когда определитель состоит из трех строк и трех столбцов, развитие его приводит к довольно длинной выкладке.

Чтобы этой выкладки избежать, надо поступать следующим образом:

1°) Систему (21) решить относительно величин

$$y_1^{IV},\ y_2^{IV},\ y_3^{IV}$$

рассматриваемых как неизвестные, таким образом эта система приведется к виду:

$$(21')\qquad \begin{aligned} y_1^{IV} &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 + F_1 \\ y_2^{IV} &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 + F_2 \\ y_3^{IV} &= a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3 + F_3 \end{aligned}$$

причем $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{33}, F_1, F_2, F_3$ будут постоянные.

2°) Соответствующая система уравнений без последнего члена будет:

$$(22')\qquad \begin{aligned} u_1^{IV} &= a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + a_{13} u_3 \\ u_2^{IV} &= a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + a_{23} u_3 \\ u_3^{IV} &= a_{31} u_1 + a_{32} u_2 + a_{33} u_3 \end{aligned}$$

3°) Введем вспомогательную неизвестную v, положив

$$(*)\qquad v = u_1$$

4°) Дифференцируем это уравнение 4 раза и заменяем u_1^{IV} его величиною из системы (22′), тогда будет

$$(**)\qquad v^{IV} = a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + a_{13} u_3$$

5°) Дифференцируем это уравнение 4 раза и заменяем u_1^{IV}, u_2^{IV}, u_3^{IV} их значениями из уравнений (22′), тогда будет

$$v^{VIII} = a_{11}(a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3) + a_{12}(a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3) + \\ + a_{13}(a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3)$$

или иначе

$$(***) \qquad v^{VIII} = b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}u_3$$

причем положено:

$$(B) \qquad \begin{cases} b_{21} = a_{11} \cdot a_{11} + a_{12} \cdot a_{21} + a_{13} \cdot a_{31} \\ b_{22} = a_{11} \cdot a_{12} + a_{12} \cdot a_{22} + a_{13} \cdot a_{32} \\ b_{23} = a_{11} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} + a_{12} \cdot a_{33} \end{cases}$$

6°) Уравнение (***) дифференцируем 4 раза и заменяем u_1^{IV}, u_2^{IV}, u_3^{IV} их значениями из уравнений (22′), тогда по приведении получим

$$(****) \qquad v^{XII} = c_{31}u_1 + c_{32}u_2 + c_{33}u_3$$

причем положено:

$$(C) \qquad \begin{cases} c_{31} = b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23} \cdot a_{31} \\ c_{32} = b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23} \cdot a_{32} \\ c_{33} = b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + b_{23} \cdot a_{33} \end{cases}$$

7°) Таким образом система (22′) заменится ей эквивалентной:

$$(22'') \qquad \begin{cases} v = u_1 \\ v^{IV} = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 \\ v^{VIII} = b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}u_3 \\ v^{XII} = c_{31}u_1 + c_{32}u_2 + c_{33}u_3 \end{cases}$$

8°) Из полученной системы (22″) исключаем неизвестные: u_1, u_2, u_3, и получаем для определения v дифференциальное уравнение

$$(22''') \qquad \begin{vmatrix} -v, & 1, & 0, & 0 \\ -v^{IV}, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ -v^{VIII}, & b_{21}, & b_{22}, & b_{23} \\ -v^{XII}, & c_{31}, & c_{32}, & c_{33} \end{vmatrix} = 0$$

9°) Характеристическое уравнение для (22‴) есть

$$(23') \qquad \begin{vmatrix} -1, & 1, & 0, & 0 \\ -s^4, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ -s^8, & b_{21}, & b_{22}, & b_{23} \\ -s^{12}, & c_{31}, & c_{32}, & c_{33} \end{vmatrix} = 0$$

10°) Придаем первый столбец ко второму и вычеркиваем первый столбец и верхнюю строку, тогда получим

$$(23'') \qquad \Delta(s^4) = \begin{vmatrix} a_{11} - s^4, & a_{12}, & a_{13} \\ b_{21} - s^8, & b_{22}, & b_{23} \\ c_{31} - s^{12}, & c_{32}, & c_{33} \end{vmatrix} = 0$$

11°) Развитие этого определителя, в котором неизвестная s^4 находится не в диагонали, а в первом столбце, совершается весьма просто и будет

$$\Delta(s^4) = (a_{11} - s^4)\Delta_1 + (b_{21} - s^8)\Delta_2 + (c_{31} - s^{12})\Delta_3 = 0$$

где:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_{22}, & b_{23} \\ c_{32}, & c_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = -\begin{vmatrix} a_{12}, & a_{13} \\ c_{32}, & c_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{12}, & a_{13} \\ b_{22}, & b_{23} \end{vmatrix}.$$

12°) Положив

$$\Delta_0 = a_{11} \cdot \Delta_1 + b_{21} \cdot \Delta_2 + c_{31}\Delta_3$$

получаем, для определения s^4, уравнение

$$\Delta_3 \cdot s^{12} + \Delta_2 \cdot s^8 + \Delta_1 \cdot s^4 - \Delta_0 = 0$$

или

$$(23''') \qquad s^{12} + B_1 s^8 + B_1 s^4 - B_3 = 0$$

причем

$$(D) \qquad B_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta_3}$$

$$B_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta_3}$$

$$B_3 = \frac{\Delta_0}{\Delta_3}$$

Вычислив корни уравнения (23'''), доканчиваем решение как показано выше.

Г) *Киль и три стрингера с каждого борта.*

В этом случае уравнения равновесия будут вида

$$a_1 y^{IV} + b_1 y_2^{IV} + c_1 y_3^{IV} + d_1 y_4^{IV} + y_1 = f_1 \tag{30}$$

и три подобных, которых для краткости не выписываем.

Здесь выкладку надо вести в следующем порядке.

1°) Систему уравнений (30) надо решить относительно

$$y_1^{IV},\ y_2^{IV},\ y_3^{IV},\ y_4^{IV}$$

рассматриваемых как неизвестные, так что будет:

$$\begin{aligned} y_1^{IV} &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 + a_{14} y_4 + F_1 \\ y_2^{IV} &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 + a_{24} y_4 + F_2 \\ y_3^{IV} &= a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3 + a_{34} y_4 + F_3 \\ y_4^{IV} &= a_{41} y_1 + a_{42} y_2 + a_{43} y_3 + a_{44} y_4 + F_4 \end{aligned} \tag{31}$$

и соответствующая система уравнений без последнего члена будет:

$$\begin{aligned} u_1^{IV} &= a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + a_{13} u_3 + a_{14} u_4 \\ u_2^{IV} &= a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + a_{23} u_3 + a_{24} u_4 \\ u_3^{IV} &= a_{31} u_1 + a_{32} u_2 + a_{33} u_3 + a_{34} u_4 \\ u_4^{IV} &= a_{41} u_1 + a_{42} u_2 + a_{43} u_3 + a_{44} u_4 \end{aligned} \tag{31'}$$

2°) По отношению к этой системе поступаем совершенно так же, как указано выше, т. е. положив

$$v = u_1$$

дифференцируем это уравнение 4 раза и после дифференцирования заменяем производные

$$u_1^{IV},\ u_2^{IV},\ u_3^{IV},\ u_4^{IV}$$

их величинами из уравнений (31'), тогда получится уравнение

$$v^{IV} = a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + a_{13} u_3 + a_{14} u_4 \tag{*}$$

С этим уравнением поступаем так же, и получим уравнение

$$v^{VIII} = b_{21} u_1 + b_{22} u_2 + b_{23} u_3 + b_{24} u_4 \tag{**}$$

причем коэффициенты b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{24} вычисляются по такой схеме:

Схема вычисления b_{2i}

i	$a_{11} =$	$a_{12} =$	$a_{13} =$	$a_{14} =$	b_{2i}
1	$a_{11} \cdot a_{11}$	$a_{12} \cdot a_{21}$	$a_{13} \cdot a_{31}$	$a_{14} \cdot a_{41}$	b_{21}
2	$a_{11} \cdot a_{12}$	$a_{12} \cdot a_{22}$	$a_{13} \cdot a_{32}$	$a_{14} \cdot a_{42}$	b_{22}
3	$a_{11} \cdot a_{13}$	$a_{12} \cdot a_{23}$	$a_{13} \cdot a_{33}$	$a_{14} \cdot a_{43}$	b_{23}
4	$a_{11} \cdot a_{14}$	$a_{12} \cdot a_{24}$	$a_{13} \cdot a_{34}$	$a_{14} \cdot a_{44}$	b_{24}

Числа b_{2i} последнего столбца представляют суммы соответствующих строк. С уравнением (**) поступаем так же, и получим уравнение (***)

$$(***) \qquad v^{\mathrm{XII}} = c_{31} u_1 + c_{32} u_2 + c_{33} u_3 + c_{34} u_4$$

причем коэффициенты

$$c_{31},\ c_{32},\ c_{33},\ c_{34}$$

вычисляются по следующей схеме:

Схема вычисления c_{3i}

i	$b_{21} =$	$b_{22} =$	$b_{23} =$	$b_{24} =$	c_{3i}
1	$b_{21} \cdot a_{11}$	$b_{22} \cdot a_{21}$	$b_{23} \cdot a_{31}$	$b_{24} \cdot a_{41}$	c_{31}
2	$b_{21} \cdot a_{12}$	$b_{22} \cdot a_{22}$	$b_{23} \cdot a_{32}$	$b_{24} \cdot a_{42}$	c_{32}
3	$b_{21} \cdot a_{13}$	$b_{22} \cdot a_{23}$	$b_{23} \cdot a_{33}$	$b_{24} \cdot a_{43}$	c_{33}
4	$b_{21} \cdot a_{14}$	$b_{22} \cdot a_{24}$	$b_{23} \cdot a_{34}$	$b_{24} \cdot a_{44}$	c_{34}

Уравнение (***) дифференцируем 4 раза, и заменив производные

$$u_1^{\mathrm{IV}},\ u_2^{\mathrm{IV}},\ u_3^{\mathrm{IV}},\ u_4^{\mathrm{IV}}$$

их величинами из системы (31′), получим

$$(****) \qquad v^{\mathrm{XVI}} = d_{41} u_1 + d_{42} u_2 + d_{43} u_3 + d_{44} u_4$$

причем коэффициенты

$$d_{41},\ d_{42},\ d_{43},\ d_{44}$$

вычисляются по следующей схеме:

Схема вычисления d_{4i}

i	$c_{31} =$	$c_{32} =$	$c_{33} =$	$c_{34} =$	d_{4i}
1	$c_{31} \cdot a_{11}$	$c_{32} \cdot a_{21}$	$c_{33} \cdot a_{31}$	$c_{34} \cdot a_{41}$	d_{41}
2	$c_{31} \cdot a_{12}$	$c_{32} \cdot a_{22}$	$c_{33} \cdot a_{32}$	$c_{34} \cdot a_{42}$	d_{42}
3	$c_{31} \cdot a_{13}$	$c_{32} \cdot a_{23}$	$c_{33} \cdot a_{33}$	$c_{34} \cdot a_{43}$	d_{43}
4	$c_{31} \cdot a_{14}$	$c_{32} \cdot a_{24}$	$c_{33} \cdot a_{34}$	$c_{34} \cdot a_{44}$	d_{44}

Таким образом первоначальная система заменится ей эквивалентной:

$$\begin{aligned} v &= u_1 \\ v^{\mathrm{IV}} &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + a_{14}u_4 \\ v^{\mathrm{VIII}} &= b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}u_3 + b_{24}u_4 \\ v^{\mathrm{XII}} &= c_{31}u_1 + c_{32}u_2 + c_{33}u_3 + c_{34}u_4 \\ v^{\mathrm{XVI}} &= d_{41}u_1 + d_{42}u_2 + d_{43}u_3 + d_{44}u_4 \end{aligned}$$

Исключая неизвестные

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\begin{vmatrix} -v, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ -v^{\mathrm{IV}}, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ -v^{\mathrm{VIII}}, & b_{21}, & b_{22}, & b_{23}, & b_{24} \\ -v^{\mathrm{XII}}, & c_{31}, & c_{32}, & c_{33}, & c_{34} \\ -v^{\mathrm{XVI}}, & d_{41}, & d_{42}, & d_{43}, & d_{44} \end{vmatrix} = 0$$

и характеристическое, ему соответствующее,

$$\Delta(s^4) = \begin{vmatrix} -1, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ -s^4, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ -s^8, & b_{21}, & b_{22}, & b_{23}, & b_{24} \\ -s^{12}, & c_{31}, & c_{32}, & c_{33}, & c_{34} \\ -s^{16}, & d_{41}, & d_{42}, & d_{43}, & d_{44} \end{vmatrix} = 0$$

придав первый столбец ко второму, придадим этому уравнению вид

$$\Delta(s^4) = \begin{vmatrix} a_{11} - s^4, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ b_{21} - s^8, & b_{22}, & b_{23}, & b_{24} \\ c_{31} - s^{12}, & c_{32}, & c_{33}, & c_{34} \\ d_{41} - s^{16}, & d_{42}, & d_{43}, & d_{44} \end{vmatrix} = 0 \tag{32}$$

Это уравнение без всяких затруднений развивается по элементам первого столбца, сперва к виду

$$(a_{11} - s^4)\Delta_1 + (b_{21} - s^8)\Delta_2 + (c_{31} - s^{12})\Delta_3 + (d_{41} - s^{16})\Delta_4 = 0$$

где Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 — миноры, соответствующие элементам первого столбца, а затем к виду

$$s^{16} + B_1 s^{12} + B_2 s^8 + B_3 s^4 + B_4 = 0 \tag{32'}$$

причем

$$B_1 = \frac{\Delta_3}{\Delta_4}; \quad B_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_4}; \quad B_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta_4}$$

и

$$B_4 = -\frac{\Delta_0}{\Delta_4}$$

где

$$\Delta_0 = a_{11} \cdot \Delta_1 + b_{21} \cdot \Delta_2 + c_{31} \cdot \Delta_3 + c_{41} \cdot \Delta_4 \tag{33}$$

Первую часть уравнения (32′) разлагаем на множители

$$(s^4 + \omega_1)(s^4 + \omega_2)(s^4 + \omega_3)(s^4 + \omega_4) = 0$$

и, сделав

$$\omega_1 = 4\alpha_1^4; \quad \omega_2 = 4\alpha_2^4; \quad \omega_3 = 4\alpha_3^4; \quad \omega_4 = 4\alpha_4^4$$

мы получим, соответственно значениям α_1, α_2, α_3, α_4, четыре группы решений, имеющих единичную матрицу, после чего выкладка ничем не будет отличаться от предыдущих.

Само собою разумеется, что эта метода без всяких изменений распространяется на любое число бортовых стрингеров.

Подробности о решении характеристического уравнения можно видеть в моей статье «О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем».

§ 4. Положим теперь, что в рассматриваемом трюме *пиллерсы имеются*, иными словами к балкам приложены в заданных местах сосредоточенные силы. Мы видели, что сосредоточенная сила является предельным случаем равномерно распределенной на бесконечно малом участке, поэтому положим, что на каждую продольную балку действует вообще переменная нагрузка, величина которой задается в функции абсциссы x, считаемой от одного из концов балки.

Методу решения поясним на примере, когда по каждому борту имеется по одному стрингеру.

В этом случае уравнения упругого равновесия будут вида:

$$\begin{aligned} a_1 y_1^{IV} + b_1 y_2^{IV} + y_1 &= f_1(z) \\ a_2 y_1^{IV} + b_2 y_2^{IV} + y_2 &= f_2(z) \end{aligned} \tag{34}$$

причем, как и раньше, a_1, b_1, a_2, b_2 — известные постоянные, $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — заданные функции переменной $z = \frac{x}{l}$.

Написав эти уравнения в символической форме

$$\begin{aligned}(a_1\delta^4 + 1)\,y_1 + b_1\delta^4 y_2 &= f_1(z)\\ a_2\delta^4 y_1 + (b_2\delta^4 + 1)\,y_2 &= f_2(z)\end{aligned} \tag{35}$$

получаем для определения их частного решения символические уравнения:

$$[(a_1\delta^4 + 1)(b_2\delta^4 + 1) - a_2 b_1\delta^8]\,y_1 = (b_2\delta^4 + 1)f_1(z) - b_1\delta^4 f_2(z)$$
$$[(a_1\delta^4 + 1)(b_2\delta^4 + 1) - a_2 b_1\delta^8]\,y_2 = -a_2\delta^4 f_1(z) + (a_1\delta^4 + 1)f_2(z)$$

Но мы видели, что

$$(a_1\delta^4 + 1)(b_2\delta^4 + 1) - a_2 b_1\delta^8 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(\delta^4 + 4\alpha_1^4)(\delta^4 + 4\alpha_2^4)$$

так что будет

$$(a_1 b_2 + a_2 b_1)\,y_1 = [(\delta^4 + 4\alpha_1^4)(\delta^4 + 4\alpha_2^4)]^{-1}[(b_2\delta^4 + 1)f_1(z) - b_1\delta^4 f_2(z)] =$$
$$= \frac{b_2\delta^4 + 1}{(\delta^4 + 4\alpha_1^4)(\delta^4 + 4\alpha_2^4)}\cdot f_1(z) - \frac{b_1\delta^4}{(\delta^4 + 4\alpha_1^4)(\delta^4 + 4\alpha_2^4)}\cdot f_2(z)$$

Возьмем алгебраические дроби

$$\frac{b_2 s^4 + 1}{(s^4 + 4\alpha_1^4)(s^4 + 4\alpha_2^4)} \quad \text{и} \quad \frac{-b_1 s^4}{(s^4 + 4\alpha_1^4)(s^4 + 4\alpha_2^4)}$$

и разложим их на частные; пусть будет:

$$\begin{aligned}\frac{b_2 s^4 + 1}{(s^4 + 4\alpha_1^4)(s^4 + 4\alpha_2^4)} &= \frac{A}{s^4 + 4\alpha_1^4} + \frac{B}{s^4 + 4\alpha_2^4}\\ \frac{-b_1 s^4}{(s^4 + 4\alpha_1^4)(s^4 + 4\alpha_2^4)} &= \frac{C}{s^4 + 4\alpha_1^4} + \frac{D}{s^4 + 4\alpha_2^4}\end{aligned} \tag{36}$$

так что коэффициенты A, B, C, D определяются уравнениями:

$$\begin{aligned}A + B &= b_2\\ 4\alpha_2^4 A + 4\alpha_1^4 B &= 1\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}C + D &= b_1\\ 4\alpha_2^4 C + 4\alpha_1^4 B &= 0\end{aligned} \tag{38}$$

тогда будет

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\,y_1 = A\cdot(\delta^4 + 4\alpha_1^4)^{-1} f_1(z) + B\cdot(\delta^4 + 4\alpha_2^4)^{-1}\cdot f_2(z),$$

обозначив первый член правой части через v, второй через w, видим, что эти функции определяются уравнениями

$$(\delta^4 + 4\alpha_1^4)\,v = A f_1(z)$$

и

$$(\delta^4 + 4\alpha_2^4)\,w = B f_2(z)$$

т. е.

$$v^{IV} + 4\alpha_1^4 v = Af_1(z)$$
$$w^{IV} + 4\alpha_2^4 w = Bf_2(z)$$

Положив на время в этих уравнениях, соответственно,

$$\alpha_1 z = \xi \quad \text{и} \quad \alpha_2 z = \xi_1$$

видим, что они принимают вид:

$$(39) \quad \begin{cases} \dfrac{d^4 v}{d\xi^4} + 4v = \dfrac{1}{\alpha_1^4} Af_1\left(\dfrac{\xi_1}{\alpha_1}\right) \\ \dfrac{d^4 w}{d\xi^4} + 4w = \dfrac{1}{\alpha_2^4} Af_2\left(\dfrac{\xi}{\alpha_2}\right) \end{cases}$$

и значит, по формуле (60) искомые частные решения будут:

$$(40) \quad \begin{cases} v = \dfrac{A}{\alpha_1^4} \int_0^{\xi} Y_4(\xi - \tau) f_1\left(\dfrac{\tau}{\alpha_1}\right) d\tau \\ w = \dfrac{B}{\alpha_2^4} \int_0^{\xi} Y_4(\xi_1 - \tau) f_2\left(\dfrac{\tau}{\alpha_2}\right) d\tau \end{cases}$$

или, возвращаясь к переменной z:

$$(41) \quad \begin{cases} v = \dfrac{A}{\alpha_1^3} \int_0^{z} Y_4[\alpha_1(z - t)] f_1(t)\, dt \\ w = \dfrac{A}{\alpha_2^3} \int_0^{z} Y_4[\alpha_2(z - t)] f_2(t)\, dt \end{cases}$$

Таким образом, положив

$$(42) \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = \Delta$$

видим, что частное решение для y_1 будет

$$(43) \quad \Phi_1(z) = \frac{A}{\alpha_1^3 \Delta} \int_0^{z} Y_4[\alpha_1(z - t)] f_1(t)\, dt + \frac{B}{\alpha_2^3 \Delta} \int_0^{z} Y_4[\alpha_2(z - t)] f_2(t)\, dt$$

т. е. формы, подобной той, как в первой главе для одной балки, значит и все частные виды этой общей формулы для различных случаев нагрузок, в том числе и для сосредоточенных сил, сами собою распространяются и сюда.

Очевидно, что для y_2 частное решение будет

$$(44) \quad \Phi_2(z) = \frac{C}{\alpha_1^3 \Delta} \int_0^{z} Y_4[\alpha_1(z - t)] f_1(t)\, dt + \frac{D}{\alpha_2^3 \Delta} \int_0^{z} Y_4[\alpha_2(z - t)] f_2(t)\, dt$$

Так как при $z = 0$ функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ и их производные первых трех порядков равны нулю, то при составлении граничных условий, относящихся до $z = 0$, они не войдут, и неизвестные y_1 и y_2 будут выражаться следующими формулами:

а) Когда конец $z = 0$ подперт:

$$(45)\quad \begin{aligned} y_1 &= A_2 Y_2(\alpha_1 z) + A_4 Y_4(\alpha_1 z) + B_2 Y_2(\alpha_2 z) + B_4 Y_4(\alpha_2 z) + \Phi_1(z) \\ y_2 &= \sigma_1 [A_2 Y_2(\alpha_1 z) + A_4 Y_4(\alpha_1 z)] + \sigma_2 [B_2 Y_2(\alpha_2 z) + B_4(\alpha_2 z)] + \Phi_2(z) \end{aligned}$$

ибо мы не предполагаем симметричной нагрузки.

б) Если же конец $z = 0$ считается заделанным, то будет:

$$(46)\quad \begin{aligned} y_1 &= A_3 Y_3(\alpha_1 z) + A_4 Y_4(\alpha_1 z) + B_3 Y_3(\alpha_2 z) + B_4 Y_4(\alpha_2 z) + \Phi_1(z) \\ y_2 &= \sigma_1 [A_3 Y_3(\alpha_1 z) + A_4 Y_4(\alpha_1 z)] + \sigma_2 [B_3 Y_3(\alpha_2 z)] + B_4 Y_4(\alpha_2 z) + \Phi_2(z) \end{aligned}$$

Граничные условия для конца $z = 1$ будут напр.:

в) Когда конец $z = 1$ считается также заделанным:

$$(47)\quad \begin{aligned} A_3 Y_3(\alpha_1) + A_4 Y_4(\alpha_1) + B_3 Y_3(\alpha_2) + B_4 Y_4(\alpha_2) + \Phi_1(1) &= 0 \\ \sigma_1 [A_3 Y_3(\alpha_1) + A_4 Y_4(\alpha_1)] + \sigma_2 [B_3 Y_3(\alpha_2) + B_4 Y_4(\alpha_2)] + \Phi_2(1) &= 0 \\ A_3 Y_2(\alpha_1) + A_4 Y_3(\alpha_1) + B_3 Y_2(\alpha_2) + B_4 Y_3(\alpha_2) + \Phi_1'(1) &= 0 \\ \sigma_1 [A_3 Y_2(\alpha_1) + A_4 Y_3(\alpha_1)] + \sigma_2 [B_3 Y_2(\alpha_2) + B_4 Y_3(\alpha_2)] + \Phi_2'(1) &= 0 \end{aligned}$$

Очевидно, что эта система четырех уравнений распадается на две системы из двух уравнений с двумя неизвестными каждая, чем решение значительно упрощается.

Отсюда ясно, что сколько бы ни было сосредоточенных сил (пиллерсов), как бы они расположены ни были, рассматривать отдельные участки нет надобности.

Само собою понятно, каким образом рассмотреть случай, когда днищевых стрингеров будет по два по обе стороны киля; ясно, что в этом случае нам придется определять шесть постоянных, но не придется решать системы шести уравнений с шестью неизвестными, а три отдельные системы, каждая с двумя неизвестными, и две системы, каждая из которых будет заключать по три неизвестных и по три уравнения, каково бы *число пиллерсов ни было*.

При обычной же методе, даже для того случая, когда имеется по одному пиллерсу на киле и на каждом стрингере, расположенных в плоскости одного шпангоута, надо определять 24 постоянных по более сложным системам уравнений, как это, напр., указывается на стр. 102 книги Schilling'a.

Но если бы пиллерсов был не один ряд, что редко бывает, а напр., два, по углам грузового люка, как обыкновенно, то по обычной методе

пришлось бы определять 36 постоянных из довольно сложных систем уравнений, хотя и распадающихся на более простые.

Мы не будем здесь входить в специальные детали этого вопроса, так как наша цель состояла в изложении общих методов расчета, приложимых во всех частных случаях.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Таблицы круговых и гиперболических функций и функций e^x и e^{-x} с численными аргументами

Формулы

Круговые функции

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$2 \cos x \sin x = \sin 2x$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}[\cos x + 1]$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}[1 - \cos x]$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

Гиперболические функции

$$\mathrm{Ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\mathrm{Sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\mathrm{Ch}^2 x - \mathrm{Sh}^2 x = 1$$

$$\mathrm{Ch}^2 x + \mathrm{Sh}^2 x = \mathrm{Ch}\, 2x$$

$$2\, \mathrm{Ch}\, x\, \mathrm{Sh}\, x = \mathrm{Sh}\, 2x$$

$$\mathrm{Ch}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}[\mathrm{Ch}\, x + 1]$$

$$\mathrm{Sh}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}[\mathrm{Ch}\, x - 1]$$

$$\mathrm{Ch}(x \pm y) = \mathrm{Ch}\, x\, \mathrm{Ch}\, y \pm \mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Sh}\, y$$

$$\mathrm{Sh}(x \pm y) = \mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Ch}\, y \pm \mathrm{Ch}\, x\, \mathrm{Sh}\, y$$

$$\mathrm{Ch}\, x + \mathrm{Ch}\, y = 2\, \mathrm{Ch} \frac{x+y}{2} \cdot \mathrm{Ch} \frac{x-y}{2}$$

$$\mathrm{Ch}\, x - \mathrm{Ch}\, y = 2\, \mathrm{Sh} \frac{x+y}{2} \cdot \mathrm{Sh} \frac{x-y}{2}$$

$$\mathrm{Sh}\, x + \mathrm{Sh}\, y = 2\, \mathrm{Sh} \frac{x+y}{2} \cdot \mathrm{Ch} \frac{x-y}{2}$$

$$\mathrm{Sh}\, x - \mathrm{Sh}\, y = 2\, \mathrm{Ch} \frac{x+y}{2} \cdot \mathrm{Sh} \frac{x-y}{2}$$

$$e^{\pm x} \cos x = \mathrm{Ch}\, x \cos x \pm \mathrm{Sh}\, x \cos x$$

$$e^{\pm x} \sin x = \mathrm{Ch}\, x \sin x \pm \mathrm{Sh}\, x \sin x$$

x	x (в градусах)	x	x (в градусах)	x	x (в градусах)
0	0	1.00	57° 17′ 44.81″	0.100	5° 43′ 46.48″
0.1	05° 43′ 46.48″	0.01	0 34 22.65	0.001	0 03 26.26
0.2	11 27 32.96	1.02	1 08 45.30	0.002	0 06 52.53
0.4	17 11 19.44	0.03	1 43 07.94	0.003	0 10 18.79
0.4	22 55 05.92	0.04	2 17 30.59	0.004	0 13 45.06
0.5	28 38 52.40	0.05	2 51 53.24	0.005	0 17 11.32
0.6	34 22 38.88	0.06	3 26 15.89	0.006	0 20 37.59
0.7	40 06 25.36	0.07	4 00 38.54	0.007	0 24 03.85
0.8	45 50 11.84	0.08	4 35 01.18	0.008	0 27 30.12
0.9	51 33 58.33	0.09	5 09 23.83	0.009	0 30 56.38

x	$\cos x$	$\sin x$	e^{x}	e^{-x}	$\mathrm{Ch}\, x$	$\mathrm{Sh}\, x$	$\mathrm{Ch}\, x \cos x$	$\mathrm{Ch}\, x \sin x$	$\mathrm{Sh}\, x \cos x$	$\mathrm{Sh}\, x \sin x$
0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0.001	1.00000	0.00100	1.00100	1.99900	1.00000	0.00100	1.00000	0.00100	0.00100	0.00000
0.002	1.00000	0.00200	1.00200	1.99800	1.00000	0.00200	1.00000	0.00200	0.00200	0.00000
0.003	1.00000	0.00300	1.00300	0.99700	1.00000	0.00300	1.00000	0.00300	0 00300	0.00001
0.004	0.99999	0.00400	1.00401	0.99601	1 00000	0.00400	1.00000	0.00400	0.00400	0.00002
0.005	0.99999	0.00500	1.00501	0.99501	1.00001	0.00500	1.00000	0.00500	0.00500	0.00003
0.006	0.99998	0.00600	1.00602	0.99402	1.00002	0.00600	1.00000	0.00600	0.00600	0.00004
0.007	0.99998	0.00700	1.00702	0.99302	1.00002	0.00700	1.00000	0.00700	0.00700	0.00005
0.008	0.99997	0.00800	1.00803	0.99203	1.00003	0.00800	1.00000	0.00800	0.00800	0.00006
0.009	0.99996	0.00900	1.00904	0.99104	1.00004	0.00900	1.00000	0.00900	0.00900	0.00008
0.010	0.99995	0 01000	1.01005	0.99005	1.00005	0.01000	1.00000	0.01000	0.01000	0.00010
0.011	0.99994	0.01100	1.01106	0.98906	1.00006	0.01100	1.00000	0.01100	0.01100	0.00012
0.012	0.99993	0.01200	1.01207	0.98807	1.00007	0.01200	1.00000	0.01200	0.01200	0.00014
00.13	0.99992	0.01300	0.01308	0.98708	1.00008	0.01300	1.00000	0.01300	0.01300	0.00017
0.014	0.99990	0.01400	1.01410	0.98610	1.00010	0.01400	1.00000	0.01400	0.01400	0.00020
0.015	0.99989	0.01500	1.01511	0.98511	1.00011	0.01500	1.00000	0.01500	0.01500	0.00023
0.016	0.99987	0.01600	1.01613	0.98413	1.00013	0.01600	1.00000	0.01600	0.01600	0.00026
0.017	0.99986	0.01700	1.01715	0.98314	1.00014	0.01700	1.00000	0.01700	0.01700	0.00029
0.018	0.99984	0.01800	1.01816	0.98216	1.00016	0.01800	1.00000	0.01800	0.01800	0.00032
0.019	0.99982	0.01900	1.01918	0.98118	1.00018	0.01900	1.00000	0.01900	0.01900	0.00036
0.020	0.99980	0.02000	1.02020	0.98020	1.00020	0.02000	1.00000	0.02000	0.02000	0.00040
0.030	0.99955	0.03000	1.03045	0.97045	1.00045	0.03000	1.00000	0.03001	0.02999	0.00160
0.040	0.99920	0.03999	1.04081	0.96079	1.00080	0.04001	1.00000	0.04002	0.03998	0.00090
0.05	0.99875	0.04998	1.05127	0.95123	1.00125	0.05002	1.0000	0.0500	0.0500	0.0025
0.06	0.99820	0.05996	1.06184	0.94176	1.00180	0.06004	1.0000	0.0601	0.0599	0.0036
0.07	0.99755	0.06994	1.07251	0.93239	1.00245	0.07006	1.0000	0.0701	0.0699	0.0049
0.08	0.99680	0.07991	1.08329	0.92312	1.00320	0.08009	1.0000	0.0802	0.0798	0.0064
0.09	0.99595	0.08988	1.09417	0.91393	1.00405	0.09012	1.0000	0.0902	0.0897	0.0081
0.10	0.99500	0.09983	1.10517	0.90484	1.00500	0.10017	1.0000	0.1003	0.0997	0.0100
0.11	0.99396	0.10978	1.11628	0.89583	1.00606	0.11022	1.0000	0.1104	0.1096	0.0121
0.12	0.99281	0.11971	1.12750	0.88692	1.00721	0.12029	1.0000	0.1206	0.1194	0.0144
0.13	0.99156	0.12963	1.13883	0.87810	1.00846	0.13037	0.9999	0.1307	0.1293	0.0169
0.14	0.99022	0.13954	1.15027	0.86936	1.00982	0.14046	0.9999	0.1409	0.1391	0.0196
0.15	0.98877	0.14944	1.16183	0.86071	1.01127	0.15056	0.9999	0.1511	0.1489	0.0225
0.16	0.98723	0.15932	1.17351	0.85214	1.01283	0.16068	0.9999	0.1614	0.1586	0.0256
0.17	0.98558	0.16918	1.18530	0.84366	1.01448	0.17082	0.9999	0.1716	0.1684	0.0289
0.18	0.98384	0.17903	1.19722	0.83527	1.01624	0.18097	0.9998	0.1819	0.1780	0.0324
0.19	0.98200	0.18886	1.20925	0.82696	1.01810	0.19115	0.9998	0.1923	0.1877	0.0361

0.20	0.98007	0.19867	1.22140	0.81873	1.02007	0.20134	0.9997	0.2027	0.1973	0.0400
0.21	0.97803	0.20846	1.23368	0.81058	1.02213	0.21155	0.9997	0.2131	0.2069	0.0441
0.22	0.97590	0.21823	1.24608	0.80252	1.02430	0.22178	0.9996	0.2235	0.2164	0.0484
0.23	0.97367	0.22798	1.25860	0.79453	1.02657	0.23203	0.9995	0.2340	0.2259	0.0529
0.24	0.97134	0.23770	1.27125	0.78663	1.02894	0.24231	0.9995	0.2446	0.2354	0.0576
0.25	0.96891	0.24740	1.28403	0.77880	1.03141	0.25261	0.9993	0.2552	0.2448	0.0625
0.26	0.96639	0.25708	1.29693	0.77105	1.03399	0.26294	0.9992	0.2658	0.2541	0.0676
0.27	0.96377	0.26673	1.30996	0.76338	1.03667	0.27329	0.9991	0.2765	0.2634	0.0729
0.28	0.96106	0.27636	1.32313	0.75578	1.03946	0.28367	0.9990	0.2873	0.2726	0.0784
0.29	0.95824	0.28595	1.33643	0.74826	1.04235	0.29408	0.9988	0.2981	0.2818	0.0841
0.30	0.95534	0.29552	1.34986	0.74082	1.04534	0.30452	0 9987	0.3089	0.2909	0.0900
0.31	0.95233	0.30506	1.36343	0.73345	1.04844	0.31499	0.9985	0.3198	0.3000	0 0961
0.32	0.94924	0.31457	1.27713	0.72615	1.05164	0.32549	0.9983	0.3308	0.3090	0.1024
0.33	0.94604	0.32404	1.39097	0.71892	1.05495	0.33602	0.9980	0.3418	0.3179	0.1089
0.34	0.94275	0.33349	1.40495	0.71177	1.05836	0.34659	0.9978	0.3530	0.3267	0.1156
0.35	0.93937	0.34290	1.41907	0.70469	1.06188	0.35719	0.9975	0.3641	0.3355	0.1225
0.36	0.93590	0.35227	1.43333	0.69768	1.06550	0.36783	0.9972	0.3753	0.3443	0.1296
0.37	0.93233	0.36162	1.44773	0.69073	1.06923	0.37850	0.9969	0.3867	0.3529	0.1369
0.38	0.92866	0.37092	1.46228	0.68386	1.07307	0.38921	0.9965	0.3980	0.3614	0.1444
0.39	0.92491	0.38019	1.47698	0.67706	1.07702	0.39996	0.9961	0.4095	0.3699	0.1521
0.40	0.92106	0.38942	1.49182	0.67032	1.08107	0.41075	0.9957	0.4210	0.3783	0.1600
0.41	0.91712	0.39861	1.50682	0.66365	1.08523	0.42158	0.9953	0.4326	0.3866	0.1680
0.42	0.91309	0.40776	1.52196	0.65705	1.08950	0.43246	0.9948	0.4443	0.3949	0.1763
0.43	0.90897	0.41687	1.53726	0.65051	1.09388	0.44337	0.9943	0.4560	0.4030	0.1848
0.44	0.90475	0.42594	1.55271	0.64404	1.09837	0.45434	0.9938	0.4678	0.4111	0.1935
0.45	0.90045	0.43497	1.56831	0.63763	1.10297	0.46534	0.9932	0.4798	0.4190	0.2024
0.46	0.89605	0.44395	1.58407	0.63128	1.10768	0 47640	0.9925	0.4918	0.4269	0.2115
0.47	0.89157	0.45289	1.59999	0.62500	1.11250	0.48750	0.9919	0.5038	0.4346	0 2208
0.48	0.88699	0.46178	1.61607	0.61878	1.11743	0.49865	0.9911	0.5159	0.4423	0.2303
0.49	0.88233	0.47063	1.63232	0.61263	1.12247	0.50984	0.9904	0.5283	0.4498	0.2399
0.50	0.87758	0.47943	1.64872	0.60653	1.12763	0.52110	0.9895	0.5406	0.4573	0.2498
0.51	0.87274	0.48818	1.66529	0.60050	1.13289	0.53240	0.9887	0.5531	0.4646	0.2599
0.52	0.86782	0.49688	1.68203	0.59452	1.13827	0.54375	0.9878	0.5656	0.4719	0.2702
0.53	0.86281	0.50553	1.69893	0.58860	1.14377	0.55516	0.9869	0.5782	0.4790	0.2807
0.54	0.85771	0.51414	1.71601	0.58275	1.14938	0.56663	0.9858	0.5909	0.4860	0.2913
0.55	0.85252	0.52269	1.73325	0.57695	1.15510	0.57815	0.9847	0.6038	0.4929	0.3022
0.56	0.84726	0.53119	1.75067	0.57121	1.16094	0.58973	0.9836	0.6167	0.4997	0.3133
0.57	0.84190	0 53963	1.76827	0.56553	1.16690	0.60137	0.9824	0.6297	0.5063	0.3245
0.58	0.83646	0.54802	1.78604	0.55990	1.17297	0.61307	0.9811	0.6428	0 5128	0.3360
0.59	0.83094	0.55636	1.80399	0.55433	1.17916	0.62483	0.9898	0.6560	0.5192	0.3476

(*Продолжение*)

x	$\cos x$	$\sin x$	e^x	e^{-x}	$\mathrm{Ch}\, x$	$\mathrm{Sh}\, x$	$\mathrm{Ch}\, x \cos x$	$\mathrm{Ch}\, x \sin x$	$\mathrm{Sh}\, x \cos x$	$\mathrm{Sh}\, x \sin x$
0.60	0.82534	0.56464	1.82212	0.54881	1.18547	0.63665	0.9784	0.6694	0.5255	0.3595
0.61	0.81965	0.57287	1.84043	0.54335	1.19189	0.64854	0.9769	0.6821	0.5316	0.3715
0.62	0.81388	0.58104	1.85893	0.53794	1.19844	0.66049	0.9754	0.6963	0.5376	0.3838
0.63	0.80803	0.58914	1.87761	0.53259	1.20510	0.67251	0.9738	0.7100	0.5434	0.3962
0.64	0.80210	0.59720	1.89648	0.52729	1.21189	0.68459	0.9721	0.7237	0.5491	0.4088
0.65	0.79608	0.60519	1.91554	0.52205	1.21879	0.79675	0.9703	0.7376	0.5547	0.4217
0.66	0.78999	0.61312	1.93479	0.51685	1.22582	0.70897	0.9684	0.7516	0.5601	0.4347
0.67	0.78382	0.62099	1.95424	0.51171	1.23297	0.72126	0.9664	0.7657	0.5653	0.4479
0.68	0.77757	0.62879	1.97388	0.50662	1.24025	0.73363	0.9644	0.7799	0.5704	0.4613
0.69	0.77125	0.63654	1.99372	0.50158	1.24765	0.74607	0.9623	0.7942	0.5754	0.4749
0.70	0.76484	0.64422	2.01375	0.49659	1.25517	0.75858	0.9600	0.8086	0.5802	0.4887
0.71	0.75836	0.65183	2.03399	0.49164	1.26282	0.77117	0.9577	0.8231	0.5848	0.5027
0.72	0.75181	0.65938	2.05443	0.48675	1.27059	0.78384	0.9552	0.8378	0.5893	0.5168
0.73	0.74517	0.66687	2.07508	0.48191	1.27849	0.79659	0.9527	0.8526	0.5936	0.5312
0.74	0.73847	0.67429	2.09594	0.47711	1.28652	0.80941	0.9501	0.8675	0.5977	0.5458
0.75	0.73169	0.68164	2.11700	0.47237	1.29468	0.82232	0.9473	0.8825	0.6017	0.5605
0.76	0.72484	0.68892	2.13828	0.46767	1.30297	0.83530	0.9444	0.8976	0.6055	0.5755
0.77	0.71791	0.69614	2.15977	0.46301	1.31139	0.84838	0.9415	0.9129	0.6091	0.5906
0.78	0.71091	0.70328	2.18147	0.45841	1.31994	0.86153	0.9384	0.9283	0.6125	0.6059
0.79	0.70385	0.71035	2.20340	0.45384	1.32862	0.87478	0.9351	0.9438	0.6157	0.6214
0.80	0.69671	0.71736	2.22554	0.44933	1.33743	0.88811	0.9318	0.9594	0.6188	0.6371
0.81	0.68950	0.72429	2.24791	0.44486	1.34638	0.90152	0.9283	0.9752	0.6216	0.6530
0.82	0.68222	0.73115	2.27050	0.44043	1.35547	0.91503	0.9247	0.9911	0.6243	0.6690
0.83	0.67488	0.73793	2.29332	0.43605	1.36468	0.92863	0.9210	1.0070	0.6267	0.6853
0.84	0.66746	0.74464	2.31637	0.43171	1.37404	0.94233	0.9171	1.0232	0.6290	0.7017
0.85	0.65998	0.75128	2.33965	0.42741	1.38353	0.95612	0.9131	1.0394	0.6310	0.7183
0.86	0.65244	0.75784	2.36316	0.42316	1.39316	0.97000	0.9090	1.0558	0.6329	0.7351
0.87	0.64483	0.76433	2.38691	0.41895	1.40293	0.98398	0.9047	1.0723	0.6345	0.7521
0.88	0.63715	0.77074	2.41090	0.41478	1.41284	0.99806	0.9002	1.0889	0.6359	0.7692
0.89	0.62941	0.77707	2.43513	0.41066	1.42289	1.01224	0.8956	1.1057	0.6371	0.7866
0.90	0.62162	0.78333	2.45960	0.40657	1.43309	1.02652	0.8931	1.1226	0.6381	0.8041
0.91	0.61375	0.78950	2.48434	0.40252	1.44342	1.04090	0.8859	1.1396	0.6389	0.8218
0.92	0.60582	0.79560	2.50929	0.39852	1.45390	1.05539	0.8808	1.1567	0.6394	0.8397
0.93	0.59783	0.80162	2.53451	0.39455	1.46453	1.06998	0.8753	1.1740	0.6397	0.8577
0.94	0.58979	0.80756	2.55998	0.39063	1.47530	1.08468	0.8701	1.1914	0.6397	0.8759

0.95	0.58168	0.81342	2.58571	0.38674	1.48623	1.09948	0.8645	1.2089	0.6395	0.8943
0.96	0.57352	0.81919	2.61170	0.38289	1.49729	1.11440	0.8587	1.2266	0.6391	0.9129
0.97	0.56530	0.82489	2.63794	0.37908	1.50851	1.12943	0.8528	1.2444	0.6385	0.9317
0.98	0.55702	0.83050	2.66446	0.37531	1.51988	1.14457	0.8466	1.2623	0.6375	0.9506
0.99	0.54869	0.83603	2.69123	0.37158	1.53141	1.15983	0.8339	1.2707	0.6364	0.9697
1.00	0.54030	0.84147	2.71828	0.36788	1.54308	1.17520	0.8337	1.2985	0.6350	0 9889
1.01	0.53186	0.84683	2 74560	0.36422	1.55491	1.19069	0.8270	1.3167	0.6333	1.0083
1.02	0.52337	0.85211	2.77319	0.36059	1.56689	1.20630	0.8201	1.3352	0.6313	1.0279
1.03	0.51482	0.85730	2.80107	0.35701	1.57904	1.22203	0.8129	1.3537	0.6291	1.0476
1.04	0.50622	0.86240	2.82922	0.35345	1.59134	1 23788	0.8056	1.3724	0.6266	1.0675
1.05	0.49757	0.86742	2.85765	0.34994	1.60379	1.25386	0.7980	1.3912	0.6239	1.0876
1.06	0.48887	0.87236	2.88637	0.34646	1.61641	1.26996	0.7902	1.4101	0 6208	1.1079
1.07	0.48012	0.87720	2.91538	0.34301	1.62919	1.28619	0 7822	1.4291	0.6175	1.1282
1.08	0.47133	0.88196	2.94468	0.33960	1.64214	1.30254	0.7740	1.4483	0.6139	1.1488
1.09	0.46249	0.88663	2.97427	0.33622	1.65525	1.31903	0.7655	1.4676	0.6100	1.1695
1.10	0.45360	0.89121	3.00417	0.33287	1.66852	1.33565	0.7568	1.4870	0.6059	1.1903
1.11	0.44466	0.89570	3.03436	0.32956	1.68196	1.35240	0.7479	1.5065	0.6014	1.2113
1.12	0.43568	0.90010	3.06485	0.32628	1.69557	1.36929	0.7387	1.5260	0.5966	1.2325
1.13	0.42666	0.90441	3.09566	0 32303	1.70934	1.38631	0.7293	1.5456	0.5915	1.2538
1.14	0.41759	0.90863	3.12677	0.31982	1.72329	1.40347	0.7196	1 5658	0.5861	1.2752
1.15	0.40849	0.91276	3.15819	0.31664	1.73741	1.42078	0.7097	1.5858	0 5804	1.2968
1.16	0.39934	0.91680	3.18993	0.31349	1.75171	1.43822	0.6995	1.6060	0.5743	1.3186
1.17	0.39015	0 92075	3.22199	0.31037	1.76618	1.45581	0.6891	1.6262	0 5680	1.3404
1.18	0.38092	0.92461	3.25437	0.30728	1.78083	1.47355	0.6784	1.6466	0.5613	1.3625
1.19	0.37166	0.92837	3.28708	0.30422	1.79565	1.49143	0.6674	1.6670	0.5543	1.3846
1.20	0.36236	0.93204	3.32012	0.30119	1.81066	1.50946	0.6561	1 6876	0.5470	1.4069
1.21	0.35302	0.93562	3.35348	0.29820	1.82584	1.52764	0.6446	1.7083	0.5393	1.4293
1.22	0.34365	0.93910	3.38719	0 29523	1.84121	1.54598	0.6330	1.7299	0 5313	1.4518
1.23	0.33424	0.94249	3.42123	0.29229	1 85676	1.56447	0.6206	1.7500	0.5229	1.4745
1.24	0 32480	0.94578	3.45561	0.28938	1.87250	1.58311	0.6082	1.7710	0.5142	1.4973
1.25	0.31532	0.94898	3.49031	0.28650	1.88842	1.60192	0.5955	1.7921	0.5051	1.5202
1.26	0.30582	0.95209	3.52542	0.28365	1.90454	1.62088	0.5824	1.8133	0.4957	1.5432
1.27	0.29628	0.95510	3.56085	0.28083	1.92084	1.64001	0.5691	1.8346	0.4858	1.5664
1.28	0.28672	0.95802	3.59664	0.27804	1.93734	1.65930	0.5555	1.8560	0.4758	1.5896
1.29	0.27712	0.96084	3.63279	0.27527	1.95403	1.67876	0.5415	1.8775	0.4652	1.6130
1.30	0.26750	0.96356	3.66930	0.27253	1.97091	1.69838	0.5272	1.8991	0.4543	1.6365
1.31	0.25785	0.96618	3.70617	0.26982	1.98800	1.71818	0.5126	1.9208	0.4430	1.6601
1.32	0.24818	0.96872	3.74342	0.26714	2.00528	1.73814	0.4977	1.9426	0.4314	1.6838
1.33	0.23848	0.97115	3.78104	0.26448	2.02276	1.75828	0.4824	1.9644	0.1193	1.7076
1.34	0.22875	0.97348	3.81904	0.26185	2.04044	1.77860	0.4668	1.9863	0.4069	1.7314

(*Продолжение*)

x	cos x	sin x	e^x	e^{-x}	Ch x	Sh x	Ch x cos x	Ch x sin x	Sh x cos x	Sh x sin x
1.35	0.21901	0.97572	3.85743	0.25924	2.05833	1.79909	0.4508	2.0084	0.3940	1.7554
1.36	0.20924	0.97786	3.89619	0.25666	2.07643	1.81977	0.4345	2.0305	0.3808	1.7795
1.37	0.19945	0.97991	3.93535	0.25411	2.09473	1.84062	0.4178	2.0526	0.3671	1.8036
1.38	0.18964	0.98185	3 97490	0.25158	2.11324	1.86166	0.4008	2.0749	0.3530	1.8279
1.39	0.17981	0.98370	4.01485	0.24908	2.13196	1.88289	0.3833	2.0972	0.3386	1.8522
1.40	0.16997	0.98545	4.05520	0.24660	2.15090	1.90430	0.3656	2.1196	0.3237	1.8766
1.41	0.16010	0 98710	4.00596	0.24414	2.17005	1.92591	0.3474	2.1421	0.3083	1.9011
1.42	0.15023	0 98865	4.13712	0.24171	2.18942	1.94770	0.3289	2.1646	0.2926	1.9256
1.43	0.14033	0.99010	4.17870	0.23931	2.20900	1.96970	0.3100	2.1871	0.2764	1.9502
1.44	0.13042	0.99146	4.22070	0.23693	2.22881	1.99188	0.2907	2.2098	0 2569	1.9529
1.45	0.12050	0.99271	4.26311	0.23457	2.24884	2.01427	0.2710	2.2324	0.2427	1.9996
1.46	0.11057	0.99387	4.30596	0.23224	2.26910	2.03686	0.2509	2.2552	0.2252	2.0244
1.47	0.10063	0.99492	4.34924	0.22993	2.28958	2.05965	0.2304	2.2779	0.2073	2.0492
1.48	0.09067	0.99588	4.39295	0.22764	2.31029	2.08265	0.2095	2.3008	0.1888	2.0741
1.49	0.08071	0.99674	4.43710	0.22537	2.33123	2.10586	0.1882	2.3236	0.1700	2.0990
1.50	0.07074	0 99749	4.48169	0.22313	2.35241	2.12928	0.1664	2.3465	0.1506	2.1239
1.51	0.06076	0.99815	4.52673	0.22091	2.37382	2.15291	0.1442	2.3694	0.1308	2.1489
1.52	0.05077	0.99871	4.57223	0.21871	2.39547	2.17676	0.1216	2.3924	0.1105	2.1740
1.53	0.04079	0.99917	4.61818	0.21654	2.41736	2.20082	0.0986	2.4154	0.0898	2.1990
1.54	0.03079	0.99953	4.66459	0.21438	2.43949	2.22510	0.0746	2.4383	0.0685	2.2241
1.55	0 02079	0.99978	4.71147	0.21225	2.46186	2.24961	0.0512	2.4613	0.0468	2.2491
1.56	0.01090	0.99994	4.75882	0.21014	2.48448	2.27434	0.0268	2.4843	0.0246	2.2742
1.57	0.00080	1.00000	4.80665	0.20805	2.50735	2.29930	0.0020	2.5074	0.0018	2.2993
$1/2\pi$	0	1	4.81049	0.20788	2.50918	2.30130	0	2.5092	0	2.3013
1.58	— 0.00920	0.99996	4.85496	0.20598	2.53047	2.32449	— 0.0233	2.5304	— 0.0214	2.3244
1.59	— 0.01920	0.99982	4.90375	0.20393	2.55384	2.34991	— 0.0490	2.5534	— 0.0451	2.3495
1.60	— 0.02920	0.99957	4.95303	0.20190	2.57746	2.37557	— 0.0753	2.5764	— 0.0694	2.3745
1.61	— 0.03919	0.99923	5.00281	0.19989	2.60135	2.40146	— 0.1019	2.5993	— 0.0941	2.3996
1 62	— 0.04918	0.99879	5.05309	0.19790	2.62549	2.42760	— 0.1291	2.6223	— 0,1194	2.4247
1.63	— 0.05917	0.99825	5.10387	0.19593	2.64990	2.45397	— 0.1568	2.6453	— 0.1452	2.4497
1.64	— 0.06915	0.99761	5.15517	0.19398	2.67457	2.48059	— 0.1849	2.6682	— 0.1715	2.4747
1.65	— 0.07912	0.99687	5.20698	0.19205	2.69951	2.50746	— 0.2136	2.6911	— 0.1984	2.4996
1 66	— 0.08909	0.99602	5.25931	0.19014	2.72472	2.53459	— 0.2427	2.7139	— 0.2258	2.5245
1.67	— 0.09904	0.99508	5.31217	0.18825	2.75021	2.56196	— 0.2724	2.7367	— 0.2537	2.5494
1.68	— 0.10899	0.99404	5.36556	0.18637	2.77596	2.58959	— 0.3029	2.7594	— 0.2822	2.5742
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

1.70	— 0.12884	0.99166	5.47395	0.18268	2.82832	2.64563	— 0.3644	2.8047	— 0.3404	2.6236
1.71	— 0.13875	0.99033	5.52896	0.18087	2.85491	2.67405	— 0.3961	2.8273	— 0.3710	2.6482
1.72	— 0.14865	0.98889	5.58453	0.17907	2.88180	2.70273	— 0.4284	2.8498	— 0.4018	2.6727
1.73	— 0.15853	0.98735	5.64065	0.17728	2.90897	2.73168	— 0.4612	2.8722	— 0.4331	2.6971
1.74	— 0.16840	0.98572	5.69734	0.17552	2.93643	2.76091	— 0.4945	2.8945	— 0.4649	2.7215
1.75	— 0.17825	0.98399	5.75460	0.17377	2.96419	2.79041	— 0.5284	2.9167	— 0.4974	2.7457
1.76	— 0.18808	0.98215	5.81244	0.17204	2.99224	2.82020	— 0.5628	2.9388	— 0.5304	2.7699
1.77	— 0.19789	0.98022	5.87085	0.17033	3.02059	2.85026	— 0.5977	2.9608	— 0.5640	2.7939
1.78	— 0.20768	0.97820	5.92986	0.16864	3.04925	2.88061	— 0.6333	2.9828	— 0.5982	2.8178
1.79	— 0.21745	0.97607	5.98945	0.16696	3.07821	2.91125	— 0.6694	3.0045	— 0.6331	2.8416
1.80	— 0.22720	0.97385	6.04965	0.16530	3.10747	2.94217	— 0.7060	3.0262	— 0.6685	2.8652
1.81	— 0.23693	0.97153	6.11045	0.16365	3.13705	2.97340	— 0.7433	3.0477	— 0.7045	2.8887
1.82	— 0.24663	0.96911	6.17186	0.16203	3.16694	3.00492	— 0.7811	3.0691	— 0.7411	2.9121
1.83	— 0.25631	0.96659	6.23389	0.16041	3.19715	3.03674	— 0.8195	3.0903	— 0.7783	2.9353
1.84	— 0.26596	0.96398	6.29654	0.15882	3.22768	3.06886	— 0.8584	3.1114	— 0.8162	2.9583
1.85	— 0.27559	0.96128	6.35982	0.15724	3.25853	3.10120	— 0.8980	3.1324	— 0.8547	2.9812
1.86	— 0.28519	0.95847	6.42374	0.15567	3.28970	3.13403	— 0.9382	3.1531	— 0.8938	3.0039
1.87	— 0.29476	0.95557	6.48830	0.15412	3.32121	3.16709	— 0.9790	3.1736	— 0.9335	3.0264
1.88	— 0.30430	0.95258	6.55350	0.15259	3.35305	3.20046	— 1.0203	3.1940	— 0.9739	3.0487
1.89	— 0.31381	0.94949	6.61937	0.15107	3.38522	3.23415	— 1.0623	3.2142	— 1.0149	3.0708
1.90	— 0.32329	0.94630	6.68589	0.14957	3.41773	3.26816	— 1.1049	3.2342	— 1.0566	3.0927
1.91	— 0.33274	0.94302	6.75309	0.14808	3.45058	3.30250	— 1.1481	3.2540	— 1.0989	3.1143
1.92	— 0.34215	0.93965	6.82096	0.14661	3.48378	3.33718	— 1.1920	3.2735	— 1.1418	3.1358
1.93	— 0.35153	0.93618	6.88951	0.14515	3.51733	3.37218	— 1.2364	3.2929	— 1.1854	3.1570
1.94	— 0.36087	0.93261	6.95875	0.14370	3.55123	3.40752	— 1.2815	3.3119	— 1.2297	3.1779
1.95	— 0.37018	0.92896	7.02869	0.14227	3.58548	3.44321	— 1.3273	3.3308	— 1.2746	3.1986
1.96	— 0.37945	0.92521	7.09933	0.14086	3.62009	3.47923	— 1.3736	3.3493	— 1.3202	3.2190
1.97	— 0.38868	0.92137	7.17068	0.13946	3.65507	3.51561	— 1.4207	3.3677	— 1.3664	3.2392
1.98	— 0.39789	0.91744	7.24274	0.13807	3.69041	3.55234	— 1.4683	3.3857	— 1.4134	3.2591
1.99	— 0.40703	0.91341	7.31553	0.13670	3.72611	3.58942	— 1.5116	3.4035	— 1.4610	3.2786
2.00	— 0.41615	0.90930	7.38906	0.13534	3.76220	3.62686	— 1.5656	3.4208	— 1.5093	3.2979
2.01	— 0.42522	0.90509	7.46332	0.13399	3.79865	3.66466	— 1.6153	3.4381	— 1.5583	3.3168
2.02	— 0.43425	0.90079	7.53833	0.13266	3.83549	3.70283	— 1.6656	3.4550	— 1.6080	3.3355
2.03	— 0.44323	0.89641	7.61409	0.13133	3.87271	3.74138	— 1.7165	3.4715	— 1.6583	3.3538
2.04	— 0.45218	0.89193	7.69061	0.13003	3.91032	3.78029	— 1.7682	3.4877	— 1.7094	3.3718
2.05	— 0.46107	0.88736	7.76790	0.12873	3.94832	3.81958	— 1.8205	3.5036	— 1.7611	3.3893
2.06	— 0.46992	0.88271	7.84597	0.12745	3.98671	3.85926	— 1.8734	3.5191	— 1.8135	3.4066
2.07	— 0.47873	0.87796	7.92482	0.12619	4.02550	3.89932	— 1.9271	3.5342	— 1.8667	3.4234
2.08	— 0.48748	0.87313	8.00447	0.12493	4.06470	3.93977	— 1.9815	3.5490	— 1.9206	3.4399
2.09	— 0.49619	0.86821	8.08491	0.12369	4.10430	3.98061	— 2.0365	3.5629	— 1.9751	3.4560

(*Продолжение*)

x	$\cos x$	$\sin x$	e^x	e^{-x}	$\mathrm{Ch}\ x$	$\mathrm{Sh}\ x$	$\mathrm{Ch}\ x \cos x$	$\mathrm{Ch}\ x \sin x$	$\mathrm{Sh}\ x \cos x$	$\mathrm{Sh}\ x \sin x$
2.10	— 0.50485	0.86321	8.16617	0.12246	4.14431	4.02186	— 2.0923	3.5774	— 2.0304	3.4717
2.11	— 0.51345	0.85812	8.24824	0.12124	4.18474	4.06350	— 2.1487	3.5910	— 2.0864	3.4870
2.12	— 0.52201	0.85294	8.33114	0.12003	4.22558	4.10555	— 2.2058	3.6042	— 2.1431	3.5018
2.13	— 0.53051	0.84768	8.41487	0.11884	4.26685	4.14801	— 2.2636	3.6169	— 2.2006	3.5162
2.14	— 0.53896	0.84233	8.49944	0.11765	4.30855	4.19089	— 2.3221	3.6292	— 2.2587	3.5301
2.15	— 0.54736	0.83690	8.58486	0.11648	4.35067	4.23419	— 2.3814	3.6111	— 2.3176	3.5436
2.16	— 0.55570	0.83138	8.67114	0.11533	4.39323	4.27791	— 2.4413	3.6524	— 2.3772	3.5566
2.17	— 0.56399	0.82579	8.75828	0.11418	4.43623	4.32205	— 2.5020	3.6634	— 2.4376	3.5691
2.18	— 0.57221	0.82010	8.84631	0.11304	4.47967	4.36663	— 2.5633	3.6738	— 2.4986	3.5811
2.19	— 0.58039	0.81434	8.93521	0.11192	4.52356	4.41165	— 2.6254	3.6837	— 2.5605	3.5926
2.20	— 0.58850	0.80850	9.02501	0.11080	4.56791	4.45711	— 2.6882	3.6932	— 2.6230	3.6036
2.21	— 0.59656	0.80257	9.11572	0.10970	4.61271	4.50301	— 2.7518	3.7020	— 2.6863	3.6140
2.22	— 0.60455	0.79657	9.20733	0.10861	4.65797	4.54936	— 2.8160	3.7101	— 2.7503	3.6239
2.23	— 0.61249	0.79048	9.29987	0.10753	4.70370	4.59617	— 2.8810	3.7182	— 2.8151	3.6332
2.24	— 0.62036	0.78432	9.39333	0.10646	4.74989	4.64344	— 2.9466	3.7254	— 2.8806	3.6419
2.25	— 0.62817	0.77807	9.48774	0.10540	4.79657	4.69117	— 3.0131	3.7321	— 2.9469	3.6501
2.26	— 0.63592	0.77175	9.58309	0.10435	4.84372	4.73937	— 3.0802	3.7381	— 3.0139	3.6576
2.27	— 0.64361	0.76535	9.67940	0.10331	4.89136	4 78804	— 3.1481	3.7436	— 3.0816	3.6645
2.28	— 0.65123	0.75888	9.77668	0.10228	4.93948	4.83720	— 3.2167	3.7485	— 3.1501	3.6709
2.29	— 0.65879	0.75233	9.87494	0.10127	4.98810	4.88684	— 3.2861	3.7527	— 3.2194	3.6765
2.30	— 0.66628	0.74571	9.97418	0.10026	5.03722	4.93696	— 3.3562	3.7567	— 3.2894	3.6815
2.31	— 0.67370	0.73901	10.07442	0.09926	5.08684	4.98758	— 3.4270	3.7592	— 3.3601	3.6859
2.32	— 0.68106	0.73223	10.17567	0.09827	5.13697	5.03870	— 3.4986	3.7614	— 3.4317	3.6895
2 33	— 0.68834	0.72538	10.27794	0.09730	5 18762	5.09032	— 3.5708	3.7630	— 3.5039	3.6924
2.34	— 0.69556	0.71846	10.38124	0.09623	5.23878	5.14245	— 3.6439	3.7639	— 3.5769	3.6946
2.35	— 0.70271	0.71147	10.48557	0.09537	5.29047	5.19510	— 3.7177	3.7640	— 3.6506	3.6962
2.36	— 0.70979	0.70441	10.59095	0.09442	5.34269	5.24827	— 3.7922	3.7634	— 3.7252	3.6969
2.37	— 0.71680	0.69728	10.69739	0.09348	5.39544	5.30196	— 3.8675	3.7621	— 3.8004	3.6970
2.38	— 0.72374	0.69007	10.80490	0.09255	5 44873	5.35618	— 3.9435	3.7600	— 3.8765	3.6961
2.39	— 0.73060	0.68280	10.91349	0.09163	5.50256	5.41093	— 4.0202	3.7571	— 3.9532	3.6946
2.40	— 0.73739	0 67546	11.02318	0.09072	5.55695	5.46623	— 4.0976	3.7535	— 4.0307	3.6922
2.41	— 0.74411	0.66806	11.13396	0.08982	5.61189	5.52207	— 4.1759	3.7491	— 4.1090	3.6891
2.42	— 0.75075	0.66058	11.24586	0.08892	5.66739	5.57847	— 4.2548	3.7438	— 4.1880	3.6850
2.43	— 0.75732	0.65304	11.35888	0.08804	5.72346	5.63542	— 4.3345	3.7376	— 4.2678	3.6802
2.44	— 0.77382	0.64544	11.47304	0.08716	5.78010	5.69294	— 4.1150	3.7307	— 4.3484	3.6745

2.45	— 0.77023	0.63776	11.58835	0.08629	5.83732	5.75103	— 4.1961	3.7228	— 4.4296	3.6678
2.46	— 0.77657	0.63003	11.70481	0.08543	5.89512	5.80969	— 4.5780	3.7141	— 4.5116	3.6603
2.47	— 0.78283	0.62223	11.82245	0 08458	5.95352	5.86893	— 4.6606	3.7045	— 4.5944	3.6518
2.48	— 0.78901	0.61437	11.94126	0.08374	6.01250	5.92876	— 4.7439	3.6939	— 4.6779	3.6425
2.49	— 0.79512	0.60645	12.06128	0.08291	6.07209	5.98918	— 4.8280	3.6824	— 4.7621	3.6321
2.50	— 0.80114	0.59847	12.18249	0.08208	6.13229	6.05020	— 4.9128	3.6700	— 4.8470	3.6209
2.51	— 0.80709	0.59043	12.30493	0.08127	6.19310	6.11183	— 4.9984	3.6566	— 4.9328	3.6086
2.52	— 0.81295	0.58233	12.42860	0.08046	6.25453	6.17407	— 5.0846	3.6422	— 5.0192	3.5953
2.53	— 0.81873	0.57417	12.55351	0.07966	6.31658	6.23692	— 5.1716	3.6268	— 5.1064	3.5811
2.54	— 0.82444	0.56596	12.67967	0.07887	6.37927	6.30040	— 5.2593	3.6104	— 5.1943	3.5658
2.55	— 0.83005	0.55768	12.80710	0.07808	6.44259	6.36451	— 5.3477	3.5929	— 5.2829	3.5494
2.56	— 0.83559	0.54936	12.93582	0.07730	6.50656	6.42926	— 5.4368	3.5744	— 5.3722	3.5320
2.57	— 0.84104	0.54097	13.06582	0.07654	6.57118	6.49464	— 5.5266	3.5548	— 5.4623	3.5134
2.58	— 0.84641	0.53253	13.19714	0.07577	6.63646	6.56068	— 5.6172	3.5341	— 5.5530	3.4938
2.59	— 0.85169	0.52404	13.32977	0.07502	6.70240	6.62738	— 5.7084	3.5123	— 5.6445	3.4730
2.60	— 0.85689	0.51550	13.46374	0.07427	6.76901	6.69473	— 5.8003	3.4894	— 5.7366	3.4511
2.61	— 0.86200	0.50691	13.59905	0.07353	6.83629	6.76276	— 5.8929	3.4654	— 5.8295	3.4281
2.62	— 0.86703	0.49826	13.73572	0.07280	6.90426	6.83146	— 5.9862	3.4401	— 5.9231	3.4038
2.63	— 0.87197	0.48957	13.87377	0.07208	6.97292	6.90085	— 6.0802	3 4137	— 6.0173	3.3784
2.64	— 0.87682	0.48082	14.01320	0.07136	7.04228	6.97092	— 6.1748	3.3861	— 6.1122	3.3518
2 65	— 0.88158	0.47203	14.15404	0.07065	7.11234	7.04169	— 6.2701	3.3572	— 6.2078	3.3239
2.66	— 0.88626	0.46319	14.29629	0.06995	7.18312	7.11317	— 6.3661	3.3271	— 6.3040	3.2947
2.67	— 0.89085	0.45431	14.43997	0.06925	7.25461	7.18536	— 6.4628	3.2958	— 6.4011	3.2644
2.68	— 0.89534	0.44537	14.58509	0.06856	7.32683	7.25827	— 6.5600	3.2632	— 6.4986	3.2326
2.69	— 0.89975	0 43640	14.73168	0.06788	7.39978	7.33190	— 6.6580	3.2293	— 6.5969	3.2654
2.70	— 0.90407	0.42738	14.87973	0.06721	7.47347	7.40626	— 6.7565	3.1940	— 6.6958	3.1653
2.71	— 0.90830	0.41832	15.02927	0.06654	7.54791	7.48137	— 6.8558	3.1574	— 6.7953	3.1296
2.72	— 0.91244	0.40921	15.18032	0.06587	7.62310	7.55722	— 6.9556	3.1194	— 6.8955	3.0925
2.73	— 0.91648	0.40007	15.33289	0.06522	7.69905	7.63383	— 7.0560	3.0802	— 6.9963	3.0541
2.74	— 0.92044	0.39088	15.48699	0.06457	7.77578	7.71121	— 7.1571	3.0394	— 7.0977	3.0142
2.75	— 0.92430	0.38166	15.64263	0.06393	7.85328	7.78935	— 7.2588	2.9973	— 7.1997	2.9729
2.76	— 0.92807	0.37240	15.79984	0.06329	7.93157	7.86828	— 7.3611	2 9537	— 7.3023	2.9301
2.77	— 0.93175	0.36310	15.95863	0 06266	8.01065	7.94799	— 7.4639	2.9087	— 7.4055	2.8859
2.78	— 0.93533	0.35376	16.11902	0.06204	8.09053	8.02849	— 7.5673	2.8621	— 7.5093	2.8402
2.79	— 0.93883	0.34439	16.28102	0.06142	8.17122	8.10980	— 7.6714	2.8141	— 7.6137	2.7929
2.80	— 0.94222	0.33499	16.44465	0.06081	8.25273	8.19192	— 7.7759	2.7646	— 7.7186	2.7442
2.81	— 0.94553	0.32555	16.60992	0.06021	8.33506	8.27486	— 7.8810	2.7135	— 7.8241	2.6939
2.82	— 0.94837	0.31608	16.77685	0.05961	8.41823	8.35862	— 7.9866	2.6608	— 7.9301	2.6420
2.83	— 0.95185	0.30658	16.94546	0 05901	8.50224	8.44322	— 8.0929	2.6066	— 8.0367	2.5885
2.84	— 0.95486	0.29704	17.11577	0.05843	8.58710	8.52867	— 8.1995	2.5507	— 8.1437	2.5334

(*Продолжение*)

x	$\cos x$	$\sin x$	e^x	e^{-x}	$\mathrm{Ch}\, x$	$\mathrm{Sh}\, x$	$\mathrm{Ch}\, x \cos x$	$\mathrm{Ch}\, x \sin x$	$\mathrm{Sh}\, x \cos x$	$\mathrm{Sh}\, x \sin x$
2.85	— 0.95779	0.28748	17.28778	0.05784	8.67281	8.61497	— 8.3067	2.4933	— 8.2513	2.4766
2.86	— 0.96061	0.27789	17.46153	0.05727	8.75940	8.70213	— 8.4144	2.4341	— 8.3594	2.4182
2.87	— 0.96334	0.26827	17.63702	0.05670	8.84686	8.79016	— 8.5225	2.3733	— 8.4679	2.3581
2.88	— 0.96598	0.25862	17.81427	0.05613	8.93520	8.87907	— 8.6312	2.3108	— 8.5770	2.2963
2.89	— 0.96852	0.24895	17.99331	0.05558	9.02444	8.96887	— 8.7404	2.2466	— 8.6865	2.2328
2 90	— 0.97096	0.23925	18.17415	0.05502	9.11458	9.05956	— 8.8471	2.1807	— 8.7965	2.1675
2.91	— 0.97330	0.22953	18.35680	0.05448	9.20564	9.15116	— 8.9598	2.1130	— 8.9068	2.1005
2.92	— 0.97555	0.21978	18.54129	0.05393	9.29761	9.24368	— 9.0703	2.0434	— 9.0177	2.0316
2.93	— 0.97770	0.21002	18.72763	0.05340	9.39051	9.33712	— 9.1811	1.9722	— 9.1289	1.9609
2.94	— 0.97975	0.20023	18.91585	0.05287	9.48436	9.43149	— 9.2923	1.8991	— 9.2405	1.8885
2.95	— 0.98170	0.19042	19.10595	0.05234	9.57915	9.52681	— 9.4039	1.8241	— 9.3525	1.8141
2.96	— 0.98356	0.18060	19.29797	0.05182	9.67490	9.62308	— 9.5158	1.7473	— 9.4649	1.7379
2.97	— 0.98531	0.17075	19.49192	0.05130	9.77161	9.72031	— 9.6281	1.6685	— 9.5775	1.6597
2.98	— 0.98697	0.16089	19.68782	0.05079	9.86930	9.81851	— 9.7407	1.5879	— 9.6906	1.5797
2.99	— 0.98853	0.15101	19.88568	0.05029	9.96798	9.91770	— 9.8536	1.5053	— 9.8039	1.4977
3.00	— 0.98999	0.14112	20.08554	0.04979	10.06766	10.01787	— 9.9669	1.4207	— 9.9176	1.4137
3.01	— 0.99135	0.13121	20.28740	0.04929	10.16835	10.11905	— 10.0804	1.3342	— 10.0315	1.3277
3.02	— 0.99262	0.12129	20.49129	0.04880	10.27005	10.22125	— 10.1943	1.2457	— 10.1458	1.2397
3.03	— 0.99378	0.11136	20.69723	0.04832	10.37277	10.32446	— 10.3083	1.1551	— 10.2602	1.1497
3.04	— 0.99484	0.10142	20.90524	0.04783	10.47654	10.42870	— 10.4225	1.0625	— 10.3749	1.0577
3.05	— 0.99581	0.09146	21.11534	0.04736	10.58135	10.53399	— 10.5317	0.9678	— 10.4899	0.9634
3.06	— 0.99667	0.08150	21.32756	0.04689	10.68722	10.64033	— 10.6516	0.8710	— 10.6049	0.8672
3.07	— 0.99744	0.07153	21.54190	0.04642	10.79416	10.74774	— 10.7665	0.7721	— 10.7202	0.7688
3.08	— 0.99810	0.06155	21.75840	0.04596	10.90218	10.85622	— 10.8815	0.6710	— 10.8356	0.6682
3.09	— 0.99867	0.05157	21.97708	0.04550	11.01129	10.96579	— 10.9966	0.5679	— 10.9512	0.5655
3.10	— 0.99914	0.04158	22.19795	0.04505	11.12150	11.07645	— 11.1119	0.4624	— 11.0669	0.4606
3.11	— 0.99950	0.03159	22.42104	0.04460	11.23282	11.18822	— 11.2272	0.3548	— 11.1826	0.3534
3.12	— 0.99977	0.02159	22.64638	0.04416	11.34527	11.30111	— 11.3427	0.2449	— 11.2985	0.2440
3.13	— 0.99993	0.01159	22.87398	0.04372	11.45885	11.41513	— 11.4580	0.1328	— 11.4143	0.1323
3.14	— 1.00000	0.00159	23.10387	0.04328	11.57357	11.53029	— 11.5736	0.0184	— 11.5303	0.0183
π	— 1	0	23.14069	0.04321	11.59195	11.54874	— 11.5919	0	— 11.5487	0
3.15	— 0.99996	— 0.00841	23.33606	0.04285	11.68946	11.64661	— 11.6890	— 0.0983	— 11.6461	— 0.0979
3.16	— 0.99988	— 0.01841	23.57060	0.04243	11.80651	11.76409	— 11.8045	— 0.2174	— 11.7621	— 0.2166
3.17	— 0.99960	— 0.02840	23.80748	0.04200	11.92474	11.88274	— 11.9200	— 0.3387	— 11.8780	— 0.3375
3.18	— 0.99926	— 0.03840	24.04675	0.04159	12.04417	12.00258	— 12.0353	— 0.4625	— 11.9937	— 0.4609
3.19	— 0.99883	— 0.04839	24.28843	0.04117	12.16480	12.12868	— 12.1506	— 0.5887	— 12.1094	— 0.5867

3.20	— 0.99829	— 0.05837	24.53253	0.04076	12.28665	12.24588	— 12.2656	— 0.7172	— 12.2249	— 0.7148
3.21	— 0.99766	— 0.06835	24.77909	0.04036	12.40972	12.36936	— 12.3807	— 0.8482	— 12.3404	— 0.8454
3.22	— 0.99693	— 0.07833	25.02812	0.03996	12.53404	12.49408	— 12.4956	— 0.9818	— 12.4557	— 0.9787
3.23	— 0.99609	— 0.08829	25.27966	0.03956	12.65961	12.62005	— 12.6101	— 1.1177	— 12.5707	— 1.1142
3.24	— 0.99516	— 0.09825	25.50372	0.03916	12.78644	12.74728	— 12.7373	— 1.2563	— 12.6856	— 1.2524
3.25	— 0.99413	— 0.10820	25.79034	0.03877	12.91456	12.87578	— 12.8388	— 1.3974	— 12.8002	— 1.3932
3.26	— 0.99300	— 0.11813	26.04954	0.03839	13.04396	13.00557	— 12.9527	— 1.5409	— 12.9145	— 1.5363
3.27	— 0.99177	— 0.12805	26.31134	0.03801	13.17467	13.13667	— 13.0662	— 1.6870	— 13.0286	— 1.6822
3.28	— 0.99044	— 0.13797	26.57577	0.03763	13.30670	13.26907	— 13.1795	— 1.8359	— 13.1422	— 1.8307
3.29	— 0.98901	— 0.14786	26.84286	0.03725	13.44006	13.40280	— 13.2934	— 1.9872	— 13.2555	— 1.9817
3.30	— 0.98748	— 0.15775	27.11264	0.03688	13.57476	13.53788	— 13.4048	— 2.1414	— 13.3684	— 2.1356
3.31	— 0.98585	— 0.16761	27.38513	0.03652	13.71082	13.67430	— 13.5168	— 2.2981	— 13.4808	— 2.2919
3.32	— 0.98413	— 0.17746	27.66035	0.03615	13.84825	13.81210	— 13.6285	— 2.4575	— 13.5929	— 2.4511
3.33	— 0.98230	— 0.18729	27.93834	0.03579	13.98707	13.95127	— 13.7395	— 2.6196	— 13.7043	— 2.6129
3.34	— 0.98038	— 0.19711	28.21913	0.03544	14.12728	14.09185	— 13.8501	— 2.7846	— 13.8154	— 2.7776
3.35	— 0.97836	— 0.20690	28.50273	0.03508	14.26891	14.23382	— 13.9601	— 2.9522	— 14.9258	— 2.9450
3.36	— 0.97624	— 0.21668	28.78919	0.03474	14.41196	14.37723	— 14.0695	— 3.1228	— 14.0356	— 3.1153
3.37	— 0.97403	— 0.22643	29.07853	0.03439	14.55646	14.52207	— 14.1784	— 3.2960	— 14.1449	— 3.2882
3.38	— 0.97172	— 0.23665	29.37077	0.03405	14.70241	14.66836	— 14.2866	— 3.4721	— 14.2533	— 3.4611
3.39	— 0.96931	— 0.24586	29.66595	0.03371	14.84983	14.81612	— 14.3941	— 3.6510	— 14.3614	— 3.6427
3.40	— 0.96680	— 0.25554	29.96410	0.03337	14.99874	14.96536	— 14.5008	— 3.8328	— 14.4685	— 3.8242
3.41	— 0.96419	— 0.26520	30.26524	0.03304	15.14914	15.11610	— 14.6066	— 4.0176	— 14.5748	— 4.0088
3.42	— 0.96149	— 0.27482	30.56942	0.03271	15.30106	15.26835	— 14.7118	— 4.2050	— 14.6804	— 4.1960
3.43	— 0.95870	— 0.28443	30.87664	0.03239	15.45451	15.42213	— 14.8162	— 4.3957	— 14.7852	— 4.3865
3.44	— 0.95581	— 0.29400	31.18696	0.03206	15.60951	15.57745	— 14.9197	— 4.5892	— 14.8891	— 4.5789
3.45	— 0.95282	— 0.30354	31.50039	0.03175	15.76607	15.73432	— 15.0222	— 4.7856	— 14.9920	— 4.7760
3.46	— 0.94974	— 0.31305	31.81698	0.03143	16.92420	15.89277	— 15.1238	— 4.9851	— 15.0940	— 4.9752
3.47	— 0.94656	— 0.32254	32.13674	0.03112	16.08393	16.05281	— 15.2244	— 5.1877	— 15.1949	— 5.1777
3.48	— 0.94328	— 0.33199	32.45972	0.03081	16.24526	16.21446	— 15.3238	— 5.3933	— 15.2948	— 5.3830
3.49	— 0.93992	— 0.34140	32.78595	0.03050	16.40822	16.37772	— 15.4224	— 5.6018	— 15.3937	— 5.5914
3.50	— 0.93646	— 0.35078	33.11545	0.03020	16.57282	16.54263	— 15.5198	— 5.8134	— 15.4915	— 5.8028
3.51	— 0.93290	— 0.36013	33.44827	0.02990	16.73908	16.70919	— 15.6159	— 6.0282	— 15.5880	— 6.0175
3.52	— 0.92925	— 0.36944	33.78443	0.02960	16.90701	16.87741	— 15.7108	— 6.2461	— 15.6833	— 6.2352
3.53	— 0.92551	— 0.37871	34.12397	0.02930	17.07664	17.04733	— 15.8046	— 6.4671	— 15.7775	— 6.4560
3.54	— 0.92168	— 0.38795	34.46692	0.02901	17.24797	17.21895	— 15.8971	— 6.6913	— 15.8704	— 6.6801
3.55	— 0.91775	— 0.39715	34.81332	0.02872	17.42102	17.39230	— 15.9881	— 6.9188	— 15.9618	— 6.9074
3.56	— 0.91374	— 0.40631	35.16320	0.02844	17.59582	17.56738	— 16.0780	— 7.1494	— 16.0520	— 7.1378
3.57	— 0.90963	— 0.41542	35.51659	0.02816	17.77237	17.74422	— 16.1663	— 7.3830	— 16.1407	— 7.3713
3.58	— 0.90543	— 0.42450	35.87354	0.02788	17.95071	17.92283	— 16.2531	— 7.6201	— 16.2279	— 7.6082
3.59	— 0.90114	— 0.43353	36.23408	0.02760	18.13084	18.10324	— 16.3384	— 7.8603	— 16.3136	— 7.8483

(*Продолжение*)

x	$\cos x$	$\sin x$	e^x	e^{-x}	$\mathrm{Ch}\, x$	$\mathrm{Sh}\, x$	$\mathrm{Ch}\, x \cos x$	$\mathrm{Ch}\, x \sin x$	$\mathrm{Sh}\, x \cos x$	$\mathrm{Sh}\, x \sin x$
3.60	— 0.89676	— 0.44252	36.59823	0.02732	18.31278	18.28546	— 16.4218	— 8.1038	— 16.3977	— 8.0917
3.61	— 0.89229	— 0.45147	36.96605	0.02705	18.49655	18.46950	— 16.5043	— 8.3506	— 16.4802	— 8.3384
3.62	— 0.88773	— 0.46037	37.33757	0.02678	18.68218	18.65539	— 16.5847	— 8.6007	— 16.5609	— 8.5884
3.63	— 0.88308	— 0.46922	37.71282	0.02652	18.86967	18.84315	— 16.6636	— 8.8540	— 16.6400	— 8.8416
3.64	— 0.87835	— 0.47803	38.09184	0.02625	19.05904	19.03279	— 16.7405	— 9.1108	— 16.7175	— 9.0982
3.65	— 0.87352	— 0.48679	38.47467	0.02599	19.25033	19.22434	— 16.8155	— 9.3709	— 16.7928	— 9.3582
3.66	— 0.86861	— 0.49550	38.86134	0.02573	19.44354	19.41781	— 16.8889	— 9.6343	— 16.8665	— 9.6215
3.67	— 0.86361	— 0.50416	39.25191	0.02548	19.63869	19.61321	— 16.9602	— 9.9010	— 16.9382	— 9.8882
3.68	— 0.85853	— 0.51277	39.64639	0.02522	19.83581	19.81059	— 17.0296	— 10.1712	— 17.0080	— 10.1583
3.69	— 0.85336	— 0.52133	40.04485	0.02497	20.03491	20.00994	— 17.0970	— 10.2733	— 17.0757	— 10.4318
3.70	— 0.84810	— 0.52984	40.44730	0.02472	20.23601	20.21129	— 17.1622	— 10.7218	— 17.1412	— 10.7087
3.71	— 0.84276	— 0.53829	40.85381	0.02448	20.43914	20.41466	— 17.2253	— 11.0022	— 17.2047	— 10.9890
3.72	— 0.83733	— 0.54669	41.26439	0.02423	20.66431	20.62008	— 17.2861	— 11.2860	— 17.2658	— 11.2728
3.73	— 0.83183	— 0.55504	41.67911	0.02399	20.85155	20.82756	— 17.3449	— 11.5734	— 17.3250	— 11.5601
3.74	— 0.82623	— 0.56333	42.09799	0.02375	21.06087	21.03712	— 17.4022	— 11.8642	— 17.3815	— 11.8508
3.75	— 0.82056	— 0.57156	42.52108	0.02352	21.27230	21.24878	— 17.4552	— 12.1584	— 17.4359	— 12.1450
3.76	— 0.81480	— 0.57974	42.94843	0.02328	21.48585	21.46257	— 17.5067	— 12.4562	— 17.4877	— 12.4427
3.77	— 0.80896	— 0.58786	43.38006	0.02305	21.70156	21.67851	— 17.5557	— 12.7575	— 17.5370	— 12.7439
3.78	— 0.80305	— 0.59592	43.81604	0.02282	21.91943	21.89661	— 17.6024	— 13.0622	— 17.5841	— 13.0486
3.79	— 0.79705	— 0.60392	44.25640	0.02260	21.13950	22.11690	— 17.6463	— 13.3705	— 17.6283	— 13.3568
3.80	— 0.79097	— 0.61186	44.70118	0.02237	22.36178	22.33941	— 17.6875	— 13.6823	— 17.6698	— 13.6686
3.81	— 0.78481	— 0.61974	45.15044	0.02215	22.58629	22.56415	— 17.7259	— 13.9976	— 17.7086	— 13.9839
3.82	— 0.77857	— 0.62755	45.60421	0.02193	22.81307	22.79414	— 17.7616	— 14.3163	— 17.7445	— 14.3026
3.83	— 0.77226	— 0.63531	46.06254	0.02171	23.04212	23.02041	— 17.7945	— 14.6389	— 17.7777	— 14.6251
3.84	— 0.76587	— 0.64300	46.52547	0.02149	23.27348	23.25199	— 17.8245	— 14.9648	— 17.8080	— 14.9510
3.85	— 0.75940	— 0.65063	46.99306	0.02128	23.50717	23.48589	— 17.8513	— 15.2945	— 17.8352	— 15.2806
3.86	— 0.75285	— 0.65819	47.46535	0.02107	23.74321	23.72214	— 17.8751	— 15.6275	— 17.8592	— 15.6137
3.87	— 0.74624	— 0.66568	47.94239	0.02086	23.98162	23.96076	— 17.8960	— 15.9641	— 17.8805	— 15.9502
3.88	— 0.73954	— 0.67311	48.42421	0.02065	24.22243	24.20178	— 17.9135	— 16.3044	— 17.8982	— 16.2905
3.89	— 0.73277	— 0.68047	48.91089	0.02045	24.46567	24.44522	— 17.9277	— 16.6482	— 17.9127	— 16.6342
3.90	— 0.72593	— 0.68777	49.40254	0.02024	24.71135	24.69110	— 17.9387	— 16.9957	— 17,9240	— 16.9818
3.91	— 0.71902	— 0.69499	49.89895	0.02004	24.95950	24.93946	— 17.9464	— 17.3466	— 17.9320	— 17.3327
3.92	— 0.71203	— 0.70215	50.40045	0.01984	25.21014	25.19030	— 17.9504	— 17.7013	— 17.9362	— 17.6874
3.93	— 0.70498	— 0.70923	50.90698	0.01964	25.46331	25.44367	— 17.9511	— 18.0593	— 17.9373	— 18.0454
3.94	— 0.69785	— 0.71625	51.41860	0.01945	25.71902	25.69958	— 17.9480	— 18.4212	— 17.9345	— 18.4073

3.95	— 0.69065	— 0.72319	51.93537	0.01925	25.97731	25.95806	— 17.9412	— 18.7865	— 17.9279	— 18.7726
3.96	— 0.68338	— 0.73006	52.45733	0.01906	26.23819	26.21913	— 17.9307	— 19.1555	— 17.9176	— 19.1415
3.97	— 0.67605	— 0.73686	52.98453	0.01887	26.50170	26.48283	— 17.9165	— 19.5280	— 17.9037	— 19.5141
3.98	— 0.66865	— 0.74358	53.51703	0.01869	26.76786	26.74917	— 17.8983	— 19.9040	— 17.8858	— 19.8901
3.99	— 0.66118	— 0.75023	54.05489	0.01850	27.03669	27.01819	— 17.8761	— 20.2837	— 17.8639	— 20.2699
4.00	— 0.65364	— 0.75680	54.59815	0.01832	27.30823	27.28992	— 17.8498	— 20.6669	— 17.8378	— 20.6530
4.01	— 0.64604	— 0.76330	55.14687	0.01813	27.58250	27.56437	— 17.8172	— 21.0537	— 17.8077	— 21.0399
4.02	— 0.63838	— 0.76972	55.70111	0.01795	27.85953	27.84158	— 17.7850	— 21.4440	— 17.7735	— 21.4302
4.03	— 0.63065	— 0.77607	56.26091	0.01777	28.13934	28.12157	— 17.7461	— 21.8381	— 17.7349	— 21.8243
4.04	— 0.62286	— 0.78234	56.82634	0.01760	28.42197	28.40437	— 17.7029	— 22.2356	— 17.6919	— 22.2219
4.05	— 0.61500	— 0.78853	57.39746	0.01742	28.70744	28.69002	— 17.6551	— 23.6367	— 17.6444	— 22.6229
4.06	— 0.60709	— 0.79464	57.97431	0.01725	28.99578	28.97853	— 17.6030	— 23.0412	— 17.5926	— 23.0275
4.07	— 0.59911	— 0.80067	58.55696	0.01708	29.28702	29.26994	— 17.5461	— 23.4492	— 17.5359	— 23.4356
4.08	— 0.59107	— 0.80662	59.14547	0.01691	29.58119	29.56428	— 17.4846	— 23.8608	— 17.4746	— 23.8471
4.09	— 0.58298	— 0.81249	59.73989	0.01674	29.87832	29.86158	— 17.4185	— 24.2758	— 17.4087	— 24.2622
4.10	— 0.57482	— 0.81828	60.34029	0.01657	30.17843	30.16186	— 17.3472	— 24.6944	— 17.3376	— 24.6808
4.11	— 0.56661	— 0.82398	60.94672	0.01641	30.48156	30.46515	— 17.2712	— 25.1162	— 17.2619	— 25.1027
4.12	— 0.55834	— 0.82961	61.55924	0.01624	30.78774	30.77150	— 17.1900	— 25.5418	— 17.1810	— 25.5283
4.13	— 0.55002	— 0.83515	62.17792	0.01608	31.09700	31.08092	— 17.1040	— 25.9707	— 17.0951	— 25.9557
4.14	— 0.54164	— 0.84061	62.80282	0.01592	31.40937	31.39345	— 17.0126	— 26.4030	— 17.0039	— 22.3896
4.15	— 0.53321	— 0.84598	63.43400	0.01576	31.72488	31.70912	— 16.9160	— 26.8386	— 16.9076	— 26.8253
4.16	— 0.52472	— 0.85127	64.07152	0.01561	32.04357	32.02796	— 16.8139	— 27.2777	— 16.8057	— 27.2644
4.17	— 0.51618	— 0.85648	64.71545	0.01545	32.36545	32.35000	— 16.7064	— 27.7204	— 16.6984	— 27.7071
4.18	— 0.50759	— 0.86160	65.36585	0.01530	32.69058	32.67528	— 16.5934	— 28.1662	— 16.5856	— 28.1530
4.19	— 0.49895	— 0.86663	66.02279	0.01515	33.01897	33.00382	— 16.4748	— 28.6152	— 16.4673	— 28.6021
4.20	— 0.49026	— 0.87158	66.68633	0.01500	33.35066	33.33567	— 16.3505	— 29.0678	— 16.3431	— 29.0547
4.21	— 0.48152	— 0.87643	67.35654	0.01485	33.68569	33.67085	— 16.2203	— 29.5231	— 16.2132	— 29.5101
4.22	— 0.47273	— 0.88121	68.03348	0.01470	34.02409	34.00939	— 16.0842	— 29.9824	— 16.0773	— 29.9694
4.23	— 0.46390	— 0.88589	68.71723	0.01455	34.36589	34.35134	— 15.9423	— 29.4444	— 15.9355	— 30.4315
4.24	— 0.45501	— 0.89048	69.40785	0.01441	34.71113	34.69672	— 15.7939	— 29.9096	— 15.7874	— 30.8967
4.25	— 0.44609	— 0.89499	70.10541	0.01426	35.05984	35.04557	— 15.6398	— 31.3782	— 15.6335	— 31.3654
4.26	— 0.43712	— 0.89941	70.80998	0.01412	35.41205	35.39793	— 15.4793	— 31.8500	— 15.4731	— 31.8373
4.27	— 0.42810	— 0.90373	71.52164	0.01398	35.76781	35.75383	— 15.3122	— 32.3244	— 15.3062	— 32.3118
4.28	— 0.41904	— 0.90797	72.24044	0.01384	36.12714	36.11330	— 15.1387	— 32.8024	— 15.1329	— 32.7898
4.29	— 0.40994	— 0.91211	72.96647	0.01370	36.49009	36.47638	— 14.9587	— 33.2830	— 14.9531	— 33.2705
4.30	— 0.40080	— 0.91617	73.69979	0.01357	36.85668	36.84311	— 14.7722	— 33.7670	— 14.7667	— 33.7546
4.31	— 0.39162	— 0.92013	74.44049	0.01343	37.22696	37.21353	— 14.5788	— 34.2536	— 14.5736	— 34.2413
4.32	— 0.38240	— 0.92400	75.18863	0.01330	37.60096	37.58766	— 14.3786	— 34.7433	— 14.3735	— 34.7310
4.33	— 0.37314	— 0.92778	75.94429	0.01317	37.97873	37.96556	— 14.1714	— 35.2359	— 14.1665	— 35.2237
4.34	— 0.36384	— 0.93146	76.70754	0.01304	38.36029	38.34725	— 13.9570	— 35.7311	— 13.9523	— 35.7189

(*Продолжение*)

x	$\cos x$	$\sin x$	e^x	e^{-x}	$\mathrm{Ch}\, x$	$\mathrm{Sh}\, x$	$\mathrm{Ch}\, x \cos x$	$\mathrm{Ch}\, x \sin x$	$\mathrm{Sh}\, x \cos x$	$\mathrm{Sh}\, x \sin x$
4.35	— 0.35451	— 0.93505	77.47846	0.01291	38.74568	38.73278	— 13.7357	— 36.2291	— 13.7312	— 36.2171
4.36	— 0.34514	— 0.93855	78.25713	0.01278	39.13496	39.12218	— 13.5070	— 36.7301	— 13.5026	— 36.7181
4.37	— 0.33574	— 0 94196	79.04363	0.01265	39.52814	39.51549	— 13.2712	— 37.2331	— 13.2669	— 37.2220
4.38	— 0.32630	— 0.94527	79.83803	0.01253	39.92528	39.91275	— 13.0276	— 37.7402	— 13.0235	— 37.7283
4.39	— 0.31683	— 0.94848	80.64042	0.01240	40.32641	40.31401	— 13.7766	— 38.2488	— 12.7727	— 37.2370
4.40	— 0.30733	— 0.95160	81.45087	0.01228	40.73157	40.71930	— 12.5180	— 38.7602	— 12.5143	— 38.7485
4.41	— 0.29780	— 0.95463	82.26946	0.01216	41.14081	41.12865	— 12.2517	— 39.2743	— 12.2481	— 39.2626
4.42	— 0.28824	— 0.95756	83.09629	0.01203	41.55416	41.54213	— 11.9776	— 39.7906	— 11.9741	— 39.7749
4.43	— 0.27865	— 0,96039	83.93142	0.01191	41.97167	41.95975	— 11.6625	— 40.3092	— 11.6921	— 40.2977
4.44	— 0.26903	— 0.96313	84.77494	0.01180	42.39337	42.38157	— 11.4051	— 40.8303	— 11.4019	— 40.8190
4.45	— 0.25939	— 0.96577	85.62694	0.01168	42.81931	42.80763	— 11.1069	— 41.3108	— 11.1039	— 41.3423
4.46	— 0.24972	— 0.96832	86.48751	0.01156	43.24954	43.23797	— 10.8003	— 41.8794	— 10.7974	— 41.8682
4.47	— 0.24002	— 0.97077	87.35672	0.01145	43.68409	43.67264	— 10.4851	— 42.4072	— 10.4823	— 42.3961
4.48	— 0.23030	— 0.97312	88.23467	0 01133	44.12300	44.11167	— 10.1615	— 42.9370	— 10.1589	— 42.9259
4.49	— 0.22056	— 0.97537	89.12145	0.01122	44.56633	44.55511	— 9.8295	— 43.4687	— 9.8271	— 43.4577
4.50	— 0.21080	— 0.97753	90.01713	0.01111	45.01412	45.00301	— 9.4890	— 44.0027	— 9.4866	— 43.9918
4.51	— 0.20101	— 0.97959	90.92182	0.01100	45.46641	45.45541	— 9.1392	— 44.5384	— 9.1370	— 44.5277
4.52	— 0.19120	— 0.98155	91.83560	0.01089	45.92324	45.91235	— 8.7805	— 45.0760	— 8.7784	— 45.0653
4.53	— 0.18138	— 0.98341	92.75856	0.01078	46.38467	46.37380	— 8.4133	— 45.6151	— 8.4113	— 45.6045
4.54	— 0.17154	— 0.98518	93.69080	0.01067	46.85074	46.84006	— 8.0368	— 46.1564	— 8.0349	— 46.1459
4.55	— 0.16168	— 0.98684	94.63241	0.01057	47.32149	47.31092	— 7.6509	— 46.6987	— 7.6492	— 46.6883
4.56	— 0.15180	— 0.98841	95.58348	0.01046	47.79697	47.78651	— 7.2556	— 47.2430	— 7 2540	— 47.2327
4.57	— 0.14191	— 0.98988	96.54411	0.01036	48.27723	48.26688	— 6.8510	— 47.7887	— 6.8496	— 47.7784
4.58	— 0.13200	— 0.99125	97.51439	0.01025	48.76232	48.75207	— 6.4366	— 48 3356	— 6.4353	— 48.3255
4.59	— 0.12208	— 0.99252	98.49443	0.01012	49.25229	49.24214	— 6.0127	— 48.8839	— 6.0115	— 48.8738
4.60	— 0.11215	— 0.99369	99.48432	0.010052	49.74718	49 73713	— 5.5791	— 49.4333	— 5.5780	— 49.4233
4.61	— 0.10221	— 0.99476	100.48415	0 009952	50.24705	50.23710	— 5.1358	— 49.9838	— 5.1347	— 49.9739
4.62	— 0.09226	— 0.99574	101.49403	0.009853	50.75194	50.74209	— 4.8237	— 50 5357	— 4.6815	— 50.5259
4.63	— 0.08230	— 0.99661	102.51406	0.009755	51.26191	51.25215	— 4.2189	— 51.0881	— 4.2181	— 51.0784
4.64	— 0.07233	— 0.99738	103.54435	0.009658	51.77700	51.76734	— 3.7450	— 51.6413	— 3.7443	— 51.6317
4.65	— 0.06235	— 0.99805	104.58499	0.009562	52.29727	52.28771	— 3.2607	— 52.1953	— 3.2601	— 52.1857
4.66	— 0.05237	— 0.99863	105.63608	0.009466	52.82277	52.81331	— 2.7663	— 52.7504	— 2.7658	— 52.7410
4.67	— 0.04238	— 0.99910	106.69774	0.009372	53 35356	53.34419	— 2.2611	— 53.3055	— 2.2607	— 53.2962

4.68	— 0.03238	— 0.99948	107.77007	0.009279	53.88968	53.88040	— 1.7449	— 53.8617	— 1.7446	— 53.8524
4.69	— 0.02239	— 0.99975	108.85318	0.009187	54.43118	54.42200	— 1.2187	— 54.4176	— 1.2185	— 54.4084
4.70	— 0.01239	— 0.99992	109.94717	0.009095	54.97813	54.96904	— 0.6812	— 54.9737	— 0.6861	— 54.9646
4.71	— 0.00239	— 1.00000	111.05216	0.009005	55.53058	55.52158	— 0.1327	— 55.5306	— 0.1327	— 55.5216
$^3/_2\pi$	0	— 1	111.31778	0.008983	55.66338	55.65440	0	— 55.6634	0	— 55.6544
4.72	0.00761	— 0.99997	112.16825	0.008915	56.08858	56.07967	0.4268	— 56.0869	0.4268	— 56.0780
4.73	0.01761	— 0.99984	113.29556	0.008826	56.65219	56.64337	0.9976	— 56.6431	0.9975	— 56.6343
4.74	0.02761	— 0.99962	114.43420	0.003739	57.22147	57.21273	1.5799	— 57.1997	1.5796	— 57.1910
4.75	0.03760	— 0.99929	115.58428	0.008652	57.79647	57.78782	2.1731	— 57.7554	2.1728	— 57.7468
4.76	0.04759	— 0.99887	116.74593	0.008566	58.37725	58.36868	2.7782	— 58.3113	2.7778	— 58.3027
4.77	0.05758	— 0.99834	117.91924	0.008480	58.96386	58.95538	3.3951	— 58.8660	3.3947	— 58.8575
4.78	0.06756	— 0.99772	119.10435	0.008396	59.55637	59.54798	4.0236	— 59.4206	4.0231	— 59.4122
4.79	0.07753	— 0.99699	120.30137	0.008312	60.15484	60.14653	4.6638	— 59.9738	4.6632	— 59.9655
4.80	0.08750	— 0.99616	121.51042	0.008230	60.75932	60.75109	5.3164	— 60.5260	5.3157	— 60.5178
4.81	0.09746	— 0.99524	122.73162	0.008148	61.36988	61.36173	5.9811	— 61.0778	5.9803	— 61.0696
4.82	0.10740	— 0.99422	123.96509	0.008067	61.98658	61.97851	6.6574	— 61.6283	6.6565	— 61.6203
4.83	0.11734	— 0 99309	125.21096	0.007977	62.60947	62.60149	7.3466	— 62.1768	7.3457	— 62.1689
4.84	0.12726	— 0.99187	126.46935	0.007907	63.23863	63.23072	8.0477	— 62.7245	8.0467	— 62.7167
4.85	0.13718	— 0.99055	127.74032	0.007828	63.87411	63.86628	8.7623	— 63.2705	8.7612	— 63.2627
4.86	0.14708	— 0.98913	129.02420	0.007750	64.51598	64.50823	9.4890	— 63.8147	9.4879	— 63.8070
4.87	0.15696	— 0.98761	130.32092	0.007673	65.16430	65.15662	10.2282	— 64.3569	10.2270	— 64.3493
4.88	0.16683	— 0.98599	131.63066	0.007597	65.81913	65.81153	10.9806	— 64.8970	10.9793	— 64.8895
4.89	0.17668	— 0.98427	132.95357	0.007521	66.48055	66.47303	11.7458	— 65.4348	11.7445	— 65.4274
4.90	0.18651	— 0.98245	134.28978	0.007447	67.14861	67.14117	12.5239	— 65.9702	12.5225	— 65.9628
4.91	0.19633	— 0.98054	135.63941	0.007372	67.82339	67.81602	13.3158	— 66.5035	13.3143	— 66.4963
4.92	0.20612	— 0.97853	137.00261	0.007299	68.50496	68.49766	14.1202	— 67.0342	14.1187	— 67.0270
4.93	0.21590	— 0.97642	138.37951	0.007227	69.19337	69.18614	14.9388	— 67.5618	14.9373	— 67.5547
4.94	0.22565	— 0.97421	139.77025	0.007155	69.88870	69.88155	15.7704	— 68.0863	15.7688	— 68.0793
4.95	0.23538	— 0.97190	141.17496	0.007083	70.59102	70.58394	16.6157	— 68.6074	16.6140	— 68.6005
4.96	0.24509	— 0.96950	142.59380	0.007013	71.30040	71.29339	17.4750	— 69.1257	17.4733	— 69.1189
4.97	0.25477	— 0.96700	144.02689	0.006943	72.01692	72.00997	18.3478	— 69.6404	18.3460	— 69.6336
4.98	0.26443	— 0.96441	145.47438	0.006074	72.74063	72.73375	19.2348	— 70.1518	19.2330	— 70.1452
4.99	0.27406	— 0.96171	146.93642	0.006806	73.47161	73.46481	20.1356	— 70.6584	20.1338	— 70.6518
5.00	0.28366	— 0.95892	148.41316	0.006738	74.20995	74.20321	21.0504	— 71.1614	21.0485	— 71.1549
5.01	0.29324	— 0.95604	149.90474	0.006671	74.95570	74.94903	21.9800	— 71.6606	21.9781	— 71.6543
5.02	0.30278	— 0.95306	151.41130	0.006605	75.70895	75.70235	22.8474	— 72 1552	22.9212	— 72.1489
5.03	0.31230	— 0.94998	152.93301	0.006539	76.46978	76.46324	23.8415	— 72.6448	23.8795	— 72.6385
5.04	0.32130	— 0.94681	154.47002	0.006474	77.23824	77.23177	24.8537	— 73.1299	24.8516	— 73.1238

(*Продолжение*)

x	$\cos x$	$\sin x$	e^x	e^{-x}	$\mathrm{Ch}\, x$	$\mathrm{Sh}\, x$	$\mathrm{Ch}\, x \cos x$	$\mathrm{Ch}\, x \sin x$	$\mathrm{Sh}\, x \cos x$	$\mathrm{Sh}\, x \sin x$
5.05	0.33123	— 0.94355	156.02246	0.006409	78.01444	78.00803	25.8407	— 73.6105	25.8386	— 73.6045
5.06	0.34065	— 0.94019	157.59052	0.006346	78.79843	78.79209	26.8427	— 74.0855	26.8405	— 74.0795
5.07	0.35004	— 0.93674	159.17433	0.006282	79.59030	79.58402	27.8598	— 74.5554	27.8576	— 74.5495
5.08	0.35939	— 0.93319	160.77406	0.006220	80.39014	80.38392	28.8914	— 75.0193	28.8892	— 75.0135
5.09	0.36870	— 0.92955	162.38986	0.006158	81.19801	81.19185	29.9377	— 75.4776	29.9354	— 75.4719
5.10	0.37798	— 0.92581	164.02191	0.006097	82.01400	82.00791	30.9997	— 75.9294	30.9973	— 75.9237
5.11	0.38722	— 0.92199	165.67035	0.006036	82.83820	82.83216	32.0766	— 76.3760	32.0743	— 76.3704
5.12	0.39642	— 0.91807	167.33537	0.005976	83.67067	83.66470	33.1687	— 76.8155	33.1664	— 76.8101
5.13	0.40558	— 0.91406	169.01712	0.005917	84.51152	84.50560	34.2762	— 77.2486	34.2738	— 77.2432
5.14	0.41470	— 0.90996	170.71577	0.005858	85.36081	85.35496	35.3991	— 77.6749	35.3967	— 77.6696
5.15	0.42378	— 0.90577	172.43149	0.005799	86.21864	86.21285	36.5377	— 78.0943	36.5353	— 78.0890
5.16	0.43281	— 0.90148	174.16446	0.005742	87.08510	87.07936	37.6913	— 78.5055	37.6888	— 79.5003
5.17	0.44181	— 0.89711	175.91484	0.005685	87.96026	87.95458	38.8617	— 78.9100	38.8592	— 78.9049
5.18	0.45076	— 0.89265	177.68281	0.005628	88.84422	88.83859	40.0474	— 79.3068	40.0449	— 79.3018
5.19	0.45966	— 0.88810	179.46855	0.005572	89.73706	89.73149	41.2485	— 79.6955	41.2460	— 79.6905
5.20	0.46852	— 0.88345	181.27224	0.005517	90.63888	90.63336	42.4661	— 80.0749	42.4635	— 80.0700
5.21	0.47733	— 0.87873	183.09406	0.005462	91 54976	91.54430	43.6994	— 80.4475	43.6968	— 80.4427
5.22	0.48609	— 0.87391	184.93418	0.005407	92.46980	92.46439	44.9486	— 80.8103	44.9460	— 80.8056
5.23	0.49481	— 0.86900	186.79280	0.005354	93.39908	93.39373	46.2148	— 81.1638	46.2122	— 81.1592
5.24	0.50347	— 0.86401	188.67010	0.005300	94.33770	94.33240	47.4958	— 81.5081	47.4935	— 81.5041
5.25	0.51209	— 0.85893	190.56627	0.005248	95.28576	95.28051	48.7949	— 81.8438	48.7922	— 81.8393
5.26	0.52065	— 0.85377	192.48149	0.005195	96.24334	96.23815	50.1091	— 82.1697	50.1064	— 82.1652
5.27	0.52916	— 0.84852	194.41596	0.005144	97.21055	97.20541	51.4399	— 82.4851	51.4372	— 82.4807
5.28	0.53762	— 0.84319	196.36988	0.005092	98.18748	98.18239	52.7876	— 82.7907	52.7848	— 82.7864
5.29	0.54602	— 0.83777	198.34343	0.005042	99.17423	99.16919	54.1511	— 83.0852	54.1484	— 83.0810
5.30	0.55437	— 0.83227	200.33681	0.004992	100.17090	100.16591	55.5317	— 83.3692	55.5290	— 83.3651
5.31	0.56267	— 0.82668	202.35023	0.004942	101.17759	101.17264	56.9296	— 83.6415	56.9263	— 83.6374
5.32	0.57091	— 0.82101	204.38388	0.004893	102.19439	102.18949	58.3438	— 83.9026	58.3410	— 83.8986
5.33	0.57909	— 0.81526	206.43797	0.004844	103.22141	103.21657	59.7745	— 84.1523	59.7717	— 84.1483
5.34	0.58721	— 0.80943	208.51271	0.004796	104.25875	104.25396	61.2218	— 84.3902	61.2190	— 84.3863
5.35	0.59528	— 0.80352	210.60830	0.004748	105.30652	105.30177	62.6869	— 84.6159	62.6840	— 84.6121
5.36	0.60328	— 0.79753	212.72495	0.004701	106.36482	106.36012	64.1678	— 84.8291	64.1649	— 84.8254
5.37	0.61123	— 0.79145	214.86287	0.004654	107.43376	107.42911	65.6657	— 85.0284	65.6639	— 85.0248

5.38	0.61911	— 0.78530	217.02228	0.004608	108.51344	108.50883	67.1818	— 85.2156	67.1789	— 85.2120
5.39	0.62693	— 0.77907	219.20339	0.004562	109.60397	109.59941	68.7140	— 85.3892	68.7112	— 85.3856
5.40	0.63469	— 0.77276	221.40642	0.004517	110.70547	110.70095	70.2637	— 85.5488	70.2608	— 85.5453
5.41	0.64239	— 0.76638	223.61359	0.004472	111.81803	111.81356	71.8308	— 85.6951	71.8279	— 85.6917
5.42	0.65002	— 0.75992	225.87912	0.004427	112.94177	112.93735	73.4144	— 85.8267	73.4115	— 85.8234
5.43	0.65759	— 0.75338	228.14925	0.004383	114.07681	114.07243	75.0158	— 81.9432	75.0129	— 85.9399
5.44	0.66509	— 0.74677	230.44218	0.004339	115.22326	115.21892	76.6338	— 86.0453	76.6310	— 86.0420
5.45	0.67252	— 0.74008	232.75817	0.004296	116.38123	116.37693	78.2687	— 86.1314	78.2658	— 86.1283
5.46	0.67989	— 0.73332	235.09742	0.004254	117.55084	117.54659	79.9216	— 86.2024	79.9188	— 86.1993
5.47	0.68719	— 0.72648	237.46019	0.004211	118.73220	118.72799	81.5916	— 86.2566	81.5887	— 86.2535
5.48	0.69442	— 0.71957	239.84671	0 004169	119.92544	119.92127	83.2786	— 86.2947	83.2757	— 86.2917
5.49	0.70158	— 0.71259	242.25721	0.004128	121.13067	121.12654	84.9829	— 86.3165	84.9800	— 86.3136
5.50	0.70867	— 0.70554	244.69193	0.004087	122.34801	122.34392	86.7044	— 86.3214	86 7015	— 86.3185
5.51	0.71569	— 0.69842	247.15113	0.004046	123.57759	123.57354	88.4432	— 86.3091	88.4403	— 86.3062
5.52	0.72264	— 0.69123	249.63504	0.004006	124.81952	124.81552	90.1996	— 86.2790	90.1967	— 86.2762
5.53	0.72951	— 0.68397	252.14391	0.003966	126.07394	126.06997	91.9722	— 86.2308	91.9693	— 86.2281
5.54	0.73632	— 0.67664	254.67800	0.003927	127.34096	127.33704	93.7637	— 86.1640	93.6708	— 86.1613
5.55	0.74305	— 0.66924	257.23756	0.003887	128.62072	128.61683	95.5716	— 86.0781	95.5687	— 86.0755
5.56	0.74970	— 0.66178	259.82284	0.003849	129.91334	129.90949	97.3960	— 85.9741	97.3931	— 85.9715
5.57	0.75628	— 0.65425	262.43410	0.003810	131.21895	131.21514	99.2383	— 85.8500	99.2354	— 85.8475
5.58	0.76279	— 0.64665	265.07161	0.003773	132.53769	132.53392	101.0984	— 85.7055	101.0955	— 85.7031
5.59	0.76921	— 0.63899	267.73562	0.003735	133.86968	133.86594	102.9739	— 85.5414	102.9710	— 85.5390
5.60	0.77557	— 0.63127	270.42641	0.003698	135.21505	135.21135	104.8687	— 85.3572	104.8659	— 85.3549
5.61	0.78184	— 0.62348	273.14424	0.003661	136.57395	136.57029	106.7790	— 85.1511	106.7761	— 85.1488
5.62	0.78804	— 0.61563	275.88938	0.003625	137.94650	137.94288	108.7074	— 84.9240	108.7045	— 84.9218
5.63	0.79415	— 0.60772	278.66212	0.003589	139.33285	139.32926	110.6512	— 84.6754	110.6483	— 84.6732
5.64	0.80019	— 0.59975	281.46272	0.003553	140.73314	140.72958	112.6133	— 84.4047	112.6104	— 84.4026
5.65	0.80615	— 0.59172	284.29147	0.003518	142.14749	142.14397	114.5922	— 84.1115	114.5894	— 84.1094
5.66	0.81202	— 0.58362	287.14864	0.003483	143.57606	143.57258	116.5866	— 83.7939	116.5838	— 83.7918
5.67	0.81782	— 0.57548	290.03453	0.003448	145.01899	145.01554	118.5994	— 83.4555	118.5966	— 83.4553
5.68	0.82353	— 0.56727	292.94943	0.003414	146.47642	146.47301	120.6277	— 83.0917	120.6249	— 83.0897
5.69	0.82916	— 0.55900	295.89362	0.003380	147.94850	147.94512	122.6730	— 82.7032	122.6702	— 82.7013
5.70	0.83471	— 0.55069	298.86740	0.003346	149.43537	149.43203	124.7352	— 82.2926	124.7324	— 82.2907
5.71	0.84018	— 0.54231	301.87107	0.003313	150.93719	150.93388	126.8144	— 81.8544	126.8116	— 81.8530
5.72	0.84556	— 0.53388	304.90492	0.003280	152.45410	152.45082	128.9091	— 81.3922	128.9063	— 81.3904
5.73	0.85086	— 0.52540	307.96927	0.003247	153.98626	153.98301	131.0207	— 80.9044	131.0180	— 80.9027
5.74	0.85607	— 0.51687	311.06441	0.003215	155.53381	155.53060	133.1478	— 80.3908	132.9528	— 80.2730

(*Продолжение*)

x	$\cos x$	$\sin x$	e^x	e^{-x}	$\mathrm{Ch}\, x$	$\mathrm{Sh}\, x$	$\mathrm{Ch}\, x \cos x$	$\mathrm{Ch}\, x \sin x$	$\mathrm{Sh}\, x \cos x$	$\mathrm{Sh}\, x \sin x$
5.75	0.86119	— 0.50828	314.19066	0.003183	157.09692	157.09374	135.2903	— 79.8492	135.2876	— 79.8476
5.76	0.86623	— 0.49964	317.34833	0.003151	158.67574	158.67259	137.4497	— 79.2807	137.4470	— 79.2792
5.77	0.87119	— 0.49095	320.53773	0.003120	160.27043	160.26731	139.6260	— 78.6848	139.6233	— 78.6832
5.78	0.87605	— 0.48222	323.75919	0.003089	161.88114	161.87805	141.8144	— 78.0623	141.8133	— 78.0608
5.79	0.88083	— 0.47343	327.01302	0.003058	163.50804	163.50498	144.0228	— 77.4096	144.0201	— 77.4082
5.80	0.88552	— 0.46460	330.29956	0.003028	165.15129	165.14827	146.2448	— 76.7293	146.2421	— 76.7279
5.81	0.89012	— 0.45572	333.61913	0.002997	166.81106	166.80806	148.4819	— 76.0191	148.4792	— 76.0178
5.82	0.89463	— 0.44680	336.97205	0.002968	168.48751	168.48454	150.7340	— 75.2802	150.7313	— 75.2789
5.83	0.89906	— 0.43783	340.35868	0.002938	170.18081	170.17787	153.0028	— 74.5103	153.0001	— 74.5090
5.84	0.90339	— 0.42882	343.77934	0.002909	171.89112	171.88822	155.2847	— 73.7104	155.2821	— 73.7091
5.85	0.90763	— 0.41976	347.23438	0.002880	173.61863	173.61575	157.5988	— 72.8782	157.5789	— 72.8769
5.86	0.91179	— 0.41067	350.72414	0.002851	175.36350	175.36065	159.8947	— 72.0165	159.8921	— 72.0154
5.87	0.91585	— 0.40153	354.24898	0.002823	177.12590	177.12308	162.2208	— 71.1214	162.2182	— 71.1202
5.88	0.91982	— 0.39235	357.80924	0.002795	178.90602	178.90322	164.5613	— 70.1938	164.5588	— 70.1927
5.89	0.92369	— 0.38313	361.40528	0.002767	180.70403	180.70126	166.9145	— 69.2331	166.9119	— 69.2321
5.90	0.92748	— 0.37388	365.03747	0.002739	182.52010	182.51736	169.2837	— 68.2406	169.2812	— 68.2396
5.91	0.93117	— 0.36458	368.70616	0.002712	184.35443	184.35172	171.6653	— 67.2119	171.6628	— 67.2110
5.92	0.93477	— 0.35525	372.41171	0.002685	186.20720	186.20451	174.0609	— 66.1501	174.0584	— 66.1492
5.93	0.93828	— 0.34589	376.15451	0.002658	188.07859	188.07593	176.0704	— 65.0545	176.4679	— 65.0536
5.94	0.94169	— 0.33649	379.93493	0.002632	189.96878	189.96615	178.8917	— 63.9226	178.8892	— 63.9217
5.95	0.94501	— 0.32705	383.75334	0.002606	191.87797	191.87537	181.3266	— 62.7537	181.3241	— 12.7528
5.96	0.94823	— 0.31759	387.61012	0.002580	193.80635	193.80377	183.7730	— 60.3099	183.7705	— 61.5501
5.97	0.95136	— 0.30809	391.50567	0.002554	195.75411	195.75156	186.2326	— 59.6129	186.2302	— 60.3091
5.98	0.95439	— 0.29856	395.44037	0.002529	197.72145	197.71892	188.7034	— 59.0317	188.7010	— 59.0310
5.99	0.95733	— 0.28900	399.41461	0.002504	199.70856	199.70605	191.1870	— 57.7158	191.1846	— 57.7150
6.00	0.96017	— 0.27942	403.42879	0.002479	201.71564	201.71316	193.6813	— 56.3634	193.6789	— 56.4232
6.01	0.96292	— 0.26980	407.48332	0.002454	203.74289	203.74043	196.1881	— 54.9698	196.1856	— 54.9691
6.02	0.96557	— 0.26016	411.57860	0.002430	205.79051	205.78808	198.7051	— 53.5385	198.7028	— 53.5378
6.03	0.96812	— 0.25049	415.71503	0.002405	207.85872	206.85631	201.2322	— 52.0665	201.2299	— 52.0659
6.04	0.97058	— 0.24080	419.89303	0.002382	209.94771	209.94533	203.7710	— 50.5554	203.7687	— 50.5548
6.05	0.97294	— 0.23108	424.11303	0.002358	212.05769	212.05534	206.3194	— 49.0023	206.3171	— 49.0017
6.06	0.97520	— 0.22134	428.37544	0.002334	214.18889	214.18655	208.8770	— 47.4086	208.8747	— 47.4081

6.07	0.97736	— 0.21157	432.68068	0.002311	216.34150	216.33919	211.4435	— 45.7714	211.4413	— 45.7709
6.08	0.97943	— 0.20179	437.02919	0.002288	218.51574	218.51345	214.0209	— 44.0943	214.0186	— 44.0938
6.09	0.98140	— 0.19199	441.42141	0.002265	220.71184	220.70957	216.6066	— 42.3745	216.6044	— 42.3740
6.10	0.98327	— 0.18216	445.85777	0.002243	222.93001	222.92776	219.2004	— 40.6089	219.1982	— 40.6085
6.11	0.98504	— 0.17232	450.33872	0.002221	225.17047	225.16815	221.8019	— 38.8014	221.7997	— 38.8010
6.12	0.98671	— 0.16246	454.86469	0.002198	227.43345	227.43125	224.4109	— 36.9488	224.4087	— 36.9485
6.13	0.98829	— 0.15259	459.43616	0.002177	229.71917	229.71699	227.0292	— 35.0528	227.0270	— 35.0525
6.14	0.98977	— 0.14270	464.05357	0.002155	232.02786	232.02571	229.6542	— 33.1104	229.6521	— 33.1101
6.15	0.99114	— 0.13279	468.71739	0.002133	234.35976	234.35763	232.2833	— 31.1206	232.2281	— 31.1203
6.16	0.99242	— 0.12287	473.42807	0.002112	236.71509	236.71298	234.9208	— 29.0852	234.9187	— 29.0849
6.17	0.99360	— 0.11294	478.18611	0.002091	239.09410	239.09201	237.5639	— 27.0033	237.5618	— 27.0031
6.18	0.99468	— 0.10300	482.99196	0.002070	241.49701	241.49494	240.2122	— 24.8742	240.2102	— 24.8740
6.19	0.99566	— 0.09305	487.84611	0.002050	243.92408	243.92203	242.8654	— 22.6971	242.8634	— 22.6969
6.20	0.99654	— 0.08309	492.74904	0.002029	246.37554	246.37351	245.5231	— 20.1713	245.5211	— 20.4712
6.21	0.99732	— 0.07312	497.70125	0.002009	248.85163	248.84962	248.1847	— 18.1960	248.1827	— 18.1959
6.22	0.99800	— 0.06314	502.70323	0.001989	251.35261	251.35062	250.8499	— 15.8704	250.8479	— 15.8703
6.23	0.99859	— 0.05316	507.75548	0.001969	253.87873	253.87676	253.5208	— 13.4962	253.5188	— 13.4961
6.24	0.99907	— 0.04317	512.85851	0.001950	256.43023	256.42828	256.1917	— 11.0701	256.1898	— 11.0700
6.25	0.99945	— 0.03318	518.01282	0.001930	259.00738	259.00545	258.8649	— 8.5939	258.8630	— 8.5938
6.26	0.99973	— 0.02318	523.21894	0.001911	261.61043	261.60851	261.5398	— 6.0641	261.5379	— 6.0641
6.27	0.99991	— 0.01318	528.47738	0.001892	264.23964	264.23774	264.2159	— 3.4827	264.2140	— 3.4827
6.28	0.99999	— 0.00319	533.78866	0.001873	266.89527	266.89340	266.8926	— 0.8514	266.8903	— 0.8514
2π	1	0	535.49166	0.001867	267.74676	267.74489	267.7468	0	267.7449	0
6.30	0.99986	0.01681	544.57191	0.001836	272.28687	272.28503	272.2487	4.5771	272.2469	4.5771
6.40	0.99318	0.11655	601.84504	0.001662	300.94335	300.92169	298.8909	35.0750	298.8694	35.0724
6.50	0.97659	0.21512	665.14163	0.001503	332.57157	332.57006	324.7861	71.5428	324.7846	71.5425
6.60	0.95023	0.31154	735.09519	0.001360	367.54827	367.54691	349.2554	114.5060	349.2541	114.5056
6.70	0.91438	0.40485	812.40583	0.001231	406.20353	406.20230	371.4244	164.4515	371.4233	164.4510
6.80	0.86940	0.49411	897.84729	0.001114	448.92420	448.92309	390.2947	221.8179	390.2937	221.8174
6.90	0.81573	0.57844	992.27472	0.001008	496.13786	496.13685	404.7145	286.9860	407.7137	286.9854
7.00	0.75390	0.65699	1096.63316	0.0009119	548.31704	548.31612	413.3762	360.2388	413.3755	360.2382
7.10	0.68455	0.72897	1211.96707	0.0008251	605.98395	605.98312	414.8263	441.7441	414.8257	441.7435
7.20	0.60835	0.79367	1339.43076	0.0007466	669.71576	669.71501	407.4216	531.5333	407.4211	531.5327
7.30	0.52608	0.85044	1480.29993	0.0006755	740.15030	740.14963	389.3783	629.4534	389.3779	629.4529
7.40	0.43855	0.89871	1635.98443	0.0006113	817.99252	817.99191	358.7306	735.1381	358.7304	735.1375

x	$\cos x$	$\sin x$	e^x	e^{-x}	$\mathrm{Ch}\, x$	$\mathrm{Sh}\, x$	$\mathrm{Ch}\, x \cos x$	$\mathrm{Ch}\, x \sin x$	$\mathrm{Sh}\, x \cos x$	$\mathrm{Sh}\, x \sin x$
7.50	0.34664	0.93800	1808.04241	0.0005531	904.02148	904.02093	313.3700	847.9721	313.3698	847.9716
7.60	0.25126	0.96792	1998.19590	0.0005005	999.09820	999.09771	251.0334	967.0471	251.0333	967.0466
7.70	0.15337	0.98817	2208.34799	0.0004528	1104.17422	1104.17377	169.3472	1091.1118	169.3471	1091.1114
7.80	0.05386	0.99854	2440.60198	0.0004097	1220.30119	1220.30078	65.8475	1218.5196	65.8474	1218.5191
$5/2\pi$	0	1	2575.97050	0.0003882	1287.98544	1287.98505	0	1287.9854	0	1287.9851
7.90	— 0.04600	0.99894	2697.28233	0.0003707	1348.64135	1348.64098	— 62.0375	1347.2118	62.0375	1347.2114
8.00	— 0.14550	0.98936	2980.95799	0.0003355	1490.47916	1490.47883	— 216.8647	1474.6205	— 216.8647	1474.6201
8.10	— 0.24354	0.96989	3294.46808	0.0003035	1647.23419	1647.23389	— 401.1674	1597.6360	— 401.1673	1597.6357
8.20	— 0.33915	0.94073	3640.95031	0.0002747	1820.47529	1820.47502	— 617.4142	1712.5757	— 617.4141	1712.5755
8.30	— 0.43138	0.91217	4023.87239	0.0002485	2011.93632	2011.93607	— 867.9091	1815.1086	— 867.9090	1815.1084
8.40	— 0.51929	0.85460	4447.06675	0.0002249	2223.53349	2223.53326	— 1154.6587	1900.2317	— 1154.6586	1900.2315
8.50	— 0.60201	0.79849	4914.76884	0.0002035	2457.38452	2457.38432	— 1479.3701	1962.1970	— 1479.3699	1962.1968
8.60	— 0.67872	0.73440	5431.65959	0.0001811	2715.82989	2715.82970	— 1843.2880	1994.5055	— 1843.2879	1994.5053
8.70	— 0.74865	0.66297	6002.91222	0.0001666	3001.45619	3001.45603	— 2247.0402	1989.8754	— 2247.0401	1989.8753
8.80	— 0.81109	0.58492	6634.24401	0.0001507	3317.12208	3317.12193	— 2690.4845	1940.2510	— 2690.4844	1940.2510
8.90	— 0.86544	0.50102	7331.97354	0.0001364	3665.98684	3665.98670	— 3172.6917	1836.7327	— 3172.6915	1836.7327
9.00	— 0.91113	0.41212	8103.08393	0.0001234	4051.54203	4051.54190	— 3691.4815	1669.7215	— 3691.4814	1669.7214
9.10	— 0.94772	0.31910	8955.29270	0.0001117	4477.64641	4477.64630	— 4243.5551	1428.8170	— 4243.5550	1428.8169
9.20	— 0.97484	0.22289	9897.12906	0.0001010	4948.56458	4948.56448	— 4824.0587	1102.9856	— 4824.0586	1102.9855
9.30	— 0.99223	0.12445	10938.01921	0.00009142	5469.00965	5469.00956	— 5426.5154	680.6183	— 5426.5154	680.6182
9.40	— 0.99969	0.02478	12088.38073	0.00008272	6044.19041	6044.19032	— 6042.3167	149.7750	— 6042.3166	149.7750
3π	— 1	0	12391.74781	0.00008070	6195.82394	6195.82386	— 6195.8239	0	— 6195.8239	0
9.50	— 0.99717	— 0.07515	13359.72683	0.00007485	6679.86345	6679.86338	— 6660.9594	— 501.9917	— 6660.9594	— 501.9917
9.60	— 0.98469	— 0.17433	14764.78157	0.00006773	7382.39082	7382.39075	— 7269.3664	— 1286.9722	— 7269.3663	— 1286.9722
9.70	— 0.96236	— 0.27176	16317.60720	0.00006128	8158.80363	8158.80357	— 7851.7063	— 2217.2365	— 7851.7062	— 2217.2365
9.80	— 0.93043	— 0.36648	18038.74493	0.00005545	9016.87249	9016.87244	— 8389.5687	— 3304.5034	— 8389.5686	— 3304.5034
9.90	— 0.88919	— 0.45754	19930.37044	0.00005018	9965.18524	9965.18519	— 8860.9431	— 4559.4709	— 8860.9430	— 4559.4708
0.00	— 0.83907	— 0.54402	22026.46579	0.00004540	11013.23292	11013.23287	— 9240.8733	— 5991.4190	— 9240.8733	— 5991.4189

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КРИТИЧЕСКИХ СКОРОСТЕЙ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВАЛА

§ **1.** Вопрос об определении критических скоростей вращающегося вала имеет за собою целую литературу. Простейшие случаи были рассмотрены Ранкиным еще в конце 1860-х годов. Особенно обстоятельна статья Dunkerley в 185-м томе «Philosophical Transactions of the Royal Society of London» (1904), являющаяся основною, ряд статей разных авторов в «Philosophical Magazine», множество статей в технических журналах и сборниках, наконец обширная статья Th. Got'a — «Étude des vitesses critiques de flexion des arbres tournants» в «Journal de l'École Polytechnique» (2-me série, cah. 29, 1931).

Из этой последней статьи видно, что ни расчетные формулы, ни вывод их не доведены до той степени простоты и общности, которая им может быть придана.

В настоящей статье я имею в виду приложить к рассмотрению этого вопроса методу, развитую в моей книге «О расчете балок, лежащих на упругом основании», и показать те упрощения и ту общность, которые этою методою вносятся.

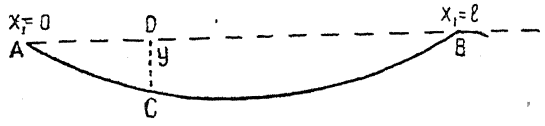
§ **2.** Известно, что у быстро вращающихся длинных и тонких валов, напр. у передаточных валиков турбин водоотливной системы на судах, наблюдается иногда следующее явление: после пуска мотора, пока он забирает ход, валик, при некотором определенном числе оборотов, начинает бить; биение это при дальнейшем увеличении числа оборотов прекращается, но может появиться вновь при другом числе оборотов, значительно бблшем первого, как это показывают на специальных лабораторных установках, служащих для изучения этого явления.

Угловые скорости вращения вала, при которых он утрачивает свою прямолинейную форму и бьет, называются **критическими.**

§ **3.** Чтобы дальнейшее стало ясным, начнем с рассмотрения простейшего случая и применим обычную методу решения.

Пусть фиг. 1 представляет первоначально прямой валик, лежащий концами в подшипниках Селлерса, так что, в смысле сопротивления изгибу, он представляет упругую балку, подпертую в своих концах A и B, абсциссы коих суть $x_1 = 0$ и $x_1 = l$.

Положим, что вес валика на погонную единицу длины p, момент инерции площади его поперечного сечения I, модуль упругости материала E, угловая скорость вращения ω; пусть $DC = y$ представляет ординату точки C оси валика, принявшего криволинейную форму динамического равновесия, $x_1 = AD$ — абсцисса этой точки.



Фиг. 1.

При таких обозначениях имеем следующее уравнение упругого равновесия:

$$EI\frac{d^4y}{dx_1^4} = \frac{p}{g}\omega^2 y \qquad (1)$$

причем в нашем случае граничные условия таковы:

$$\begin{aligned} &\text{при } x_1 = 0 \text{ должно быть: } y = 0; \quad \frac{d^2y}{dx_1^2} = 0 \\ &\text{» } x_1 = l \quad \text{» } \quad \text{» } y = 0; \quad \frac{d^2y}{dx_1^2} = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Положим

$$x_1 = lx \qquad (3)$$

примем x за переменную независимую и будем производные по этой переменной обозначать значками, тогда, положив

$$k^4 = \frac{p}{g}\frac{\omega^2 l^4}{EI} \qquad (4)$$

будем иметь уравнение

$$y^{IV} - k^4 y = 0 \qquad (5)$$

и граничные условия:

$$\begin{aligned} &\text{при } x = 0 \text{ должно быть: } \quad y(0) = 0; \quad y''(0) = 0 \\ &\text{» } x = 1 \quad \text{» } \quad \text{» } \quad y(1) = 0; \quad y''(1) = 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

Общий интеграл уравнения (1) есть

$$y = A\cos kx + B\sin kx + C\operatorname{ch} kx + D\operatorname{sh} kx$$

причем A, B, C, D — произвольные постоянные, которые определяются граничными условиями, составляющими следующие уравнения:

$$\begin{gathered} A + C = 0 \\ -A + C = 0 \\ A\cos k + B\sin k + C\operatorname{ch} k + D\operatorname{sh} k = 0 \\ -A\cos k - B\sin k + C\operatorname{ch} k + D\operatorname{sh} k = 0 \end{gathered} \tag{7}$$

Отсюда следует

$$A = C = 0$$

затем

$$\begin{gathered} B\sin k + D\operatorname{sh} k = 0 \\ -B\sin k + D\operatorname{sh} k = 0 \end{gathered} \tag{8}$$

Определитель этих уравнений есть

$$\Delta(k) = 2\operatorname{sh} k \cdot \sin k \tag{9}$$

В том случае, когда этот определитель не равен нулю, уравнения (8) имеют единственное решение

$$B = D = 0$$

которому соответствует

$$y = 0$$

т. е. валик сохраняет прямую форму.

В том же случае, когда

$$\Delta(k) = 0$$

т. е. когда k есть корень уравнения

$$\operatorname{sh} k \cdot \sin k = 0$$

иначе уравнения

$$\sin k = 0 \tag{9'}$$

ибо нам нужны лишь вещественные корни, то будет

$$D = 0$$

величина же B остается произвольной.

Корни уравнения (9'), отличные от нуля, суть:

$$k_1 = \pi;\quad k_2 = 2\pi;\quad k_3 = 3\pi;\quad \ldots\quad k_n = n\pi;\quad \ldots \tag{10}$$

и соответствующие формы равновесия суть:

$$y = B \sin \pi x = B \sin \frac{\pi x_1}{l}$$

$$y = B \sin 2\pi x = B \sin 2 \frac{\pi x_1}{l} \tag{11}$$

. . . . . .

значит при указанных значениях k валик утрачивает прямолинейную форму равновесия и бьет.

Каждому значению k соответствует значение ω, определяемое равенством

$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{gEI}{pl^4}} \tag{12}$$

так что значениям (10) соответствуют:

$$\omega_1 = \pi^2 \sqrt{\frac{gEI}{pl^4}}$$

$$\omega_2 = 4\pi^2 \sqrt{\frac{gEI}{pl^4}} \tag{13}$$

. . . . . .

это и суть критические скорости.

Совершенно подобным образом эти скорости найдутся и при других граничных условиях, из которых в практике постоянно встречается условие, соответствующее заделанному концу балки:

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = 0$$

или

$$y(1) = 0; \quad y'(1) = 0 \tag{14}$$

когда концевой подшипник обыкновенный, неподвижный.

§ 4. Положим теперь, что на вал, в расстоянии $x_1 = l_1$ от конца A, насажен шкив, который уподобляют при расчете плоскому диску; пусть вес этого шкива есть P и момент инерции его около оси, лежащей в его плоскости, есть K, тогда на валик в точке F действует центробежная сила

$$Q = \frac{P}{g} \omega^2 \cdot y(l_1)$$

и гироскопический момент

$$M = -K\omega^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx_1}\right)_{x_1=l_1}$$

Положим

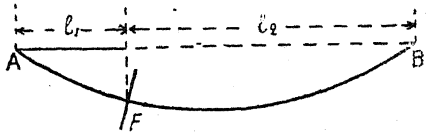
$$\frac{l_1}{l} = a$$

тогда значение абсциссы x для точки F есть $x = a$, вместе с тем будет:

$$\left(\frac{dy}{dx_1}\right)_{x=l_1} = \frac{1}{l} \cdot y'(a)$$

$$M = -\frac{K\omega^2}{l} \cdot y'(a) \quad \text{и} \quad Q = \frac{P}{g}\omega^2 \cdot y(a) \tag{15}$$

При обычном способе решения, валик подразделяют на два участка: первый от $x_1 = 0$ до $x_1 = l_1$ и второй от $x_1 = l_1$ до $x_1 = l$, иначе первый от $x = 0$ до $x = a$ и второй от $x = a$ до $x = 1$; для каждого из этих участков пишут соответствующее уравнение равновесия и граничное условие и, сверх того, условия сопряжения в точке F.



Фиг. 2.

Таким образом для нашего случая будет:

1-й участок: $0 \leqq x \leqq a$; $y = y_0$

$$y_0^{IV} - k^4 y_0 = 0 \tag{16}$$

$$y_0(0) = 0; \quad y_0''(0) = 0 \tag{17}$$

2-й участок: $a \leqq x \leqq 1$; $y = y_1$

$$y_1^{IV} - k^4 y_1 = 0 \tag{16'}$$

$$y_1(1) = 0; \quad y_1''(1) = 0 \tag{17'}$$

Условия сопряжения выражаются следующими равенствами:

$$y_0(l_1) = y_1(l_1)$$

$$\left(\frac{dy_0}{dx_1}\right)_{x_1=l_1} = \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)_{x_1=l_1}$$

$$EI\left(\frac{d^2y_1}{dx_1^2}\right)_{x_1=l_1} = EI\left(\frac{d^2y_0}{dx_1^2}\right)_{x=l_1} + M$$

$$EI\left(\frac{d^3y_1}{dx_1^3}\right)_{x_1=l_1} = EI\left(\frac{d^3y_0}{dx_1^3}\right)_{x_1=l_1} + Q$$

Заметив, что вообще

$$\frac{dy}{dx_1} = \frac{1}{l} \cdot y'; \quad \frac{d^2y}{dx_1^2} = \frac{1}{l^2} \cdot y''; \quad \frac{d^3y}{dx_1^3} = \frac{1}{l^3} y'''$$

можем условия сопряжения писать так:

$$\begin{aligned} y_0(a) - y_1(a) &= 0 \\ y_0'(a) - y_1'(a) &= 0 \\ y_1''(a) - y_0''(a) + \frac{lK\omega^2}{EI} y'_0(a) &= 0 \\ y_1'''(a) - y_0'''(a) + \frac{l^3 \cdot P\omega^2}{EI \cdot g} y_0(a) &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Общий интеграл уравнения (16) есть

$$y_0 = A \cos kx + B \sin kx + C \operatorname{ch} kx + D \operatorname{sh} kx$$

где A, B, C, D — постоянные произвольные.

Общий интеграл уравнения (16′) выгоднее писать в следующем виде:

$$y_1 = A_1 \cos k(x-1) + B_1 \sin k(x-1) + C_1 \operatorname{ch} k(x-1) + D_1 \operatorname{sh}(x-1)$$

Граничные условия выражаются тогда следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ -A + C &= 0 \\ A_1 + C_1 &= 0 \\ -A_1 + C_1 &= 0 \end{aligned}$$

откуда следует

$$A = C = A_1 = C_1 = 0$$

значит будет:

$$\begin{aligned} y_0 &= B \sin kx + D \operatorname{sh} kx \\ y_1 &= B_1 \sin k(x-1) + D_1 \operatorname{sh} k(x-1) \end{aligned} \tag{19}$$

оставшиеся четыре произвольные постоянные B, D, B_1, D_1 определяются уравнениями (18), которые в развитом виде будут:

$$\begin{aligned} &B \sin ka + D \operatorname{sh} ka + B_1 \sin k(1-a) + D_1 \operatorname{sh} k(1-a) = 0 \\ &B \cos ka + D \operatorname{ch} ka - B_1 \cos k(1-a) - D_1 \operatorname{ch} k(1-a) = 0 \\ &B(-k \sin ka + b \cos ka) + D(k \operatorname{sh} ka + b \operatorname{ch} ka) \\ &\quad - B_1 k \sin k(1-a) + D_1 k \operatorname{sh} k(1-a) = 0 \\ &B(-k^3 \cos ka + c \sin ka) + D(k^3 \operatorname{ch} ka + c \operatorname{sh} ka) + \\ &\quad + B_1 k^3 \cos k(1-a) - D_1 k^3 \operatorname{ch} k(1-a) = 0 \end{aligned} \tag{18′}$$

причем, для сокращения письма, положено:

$$b = \frac{lK\omega^2}{EI}; \quad c = \frac{l^3 P\omega^2}{EIg}$$

Пусть $\Delta(k)$ есть определитель этих уравнений, тогда уравнение

$$\Delta(k) = 0 \tag{20}$$

и дает те значения k, которыми определяются критические скорости.

Чтобы упростить развитие этого определителя, из первых двух уравнений находят величины B_1 и D_1, которые выразятся линейно через B и D, найденные значения подставляют в последние два уравнения, которые тогда примут вид:

$$\begin{aligned} B \cdot G(k) + D \cdot F(k) &= 0 \\ B \cdot G_1(k) + D \cdot F_1(k) &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

где $G(k)$, $F(k)$, $G_1(k)$, $F_1(k)$ будут известные функции k и определитель $\Delta(k)$ будет

$$\Delta(k) = G(k) \cdot F_1(k) - G_1(k) \cdot F(k) \tag{22}$$

Выражение это будет настолько сложно, что вычисление корней уравнения

$$\Delta(k) = 0$$

может быть выполнено лишь численно в каждом отдельном случае, а не в общем виде на буквах.

При численном вычислении корней этого уравнения нет надобности иметь выражение $\Delta(k)$ в развернутом виде, а достаточно иметь возможность вычислять частное значение $\Delta(\gamma)$, когда величине k будет приписано частное значение γ, а это гораздо проще достигается, приписывая букве k эти частные значения в самих уравнениях (18′).

Пусть при $k = \gamma_1$ будет

$$\Delta(\gamma_1) = N_1$$

а при $k = \gamma_2$:

$$\Delta(\gamma_2) = N_2$$

и положим, что $N_1 < N_2$, тогда за следующее приближенное значение надо брать

$$k = \gamma_3 = \gamma_1 + \frac{N_1}{N_2 - N_1} \cdot (\gamma_2 - \gamma_1)$$

т. е. применять «линейные приближения».

Совершенно подобным же образом решается вопрос и в том случае, когда один или оба концевых подшипника обыкновенные, вся разница будет состоять в том, что здесь граничные условия будут другие, как указано в § 3.

§ **5.** Изложенный в предыдущем параграфе общий ход выкладок непосредственно обобщается на тот случай, когда на вал насажено любое число шкивов; не вдаваясь в подробности, мы его и наметим.

Положим, что в точках, соответствующих значениям

$$a_1, a_2, \ldots a_n$$

переменной x, насажены шкивы, коих веса суть:

$$P_1, P_2, \ldots P_n$$

и моменты инерции:

$$K_1, K_2, \ldots K_n$$

в остальном сделанные выше обозначения сохраняются.

В этом случае, при обычной методе решения, вал подразделяют на $n+1$ участков теми точками, где насажены шкивы.

Из этих участков назовем участок от $x=0$ до $x=a_1$ *начальным*, участок от $x=a_n$ до $x=1$ — *конечным*, все прочие будем называть *промежуточными*, тогда для каждого участка будем иметь свое уравнение равновесия вида

$$y_i^{IV} - k^4 y_i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots n)$$

общие интегралы которых будут содержать

$$4n+4$$

постоянных произвольных.

Для определения этих постоянных произвольных, будем иметь следующее число условий:

при $x=0$: граничных условий	2
» $x=a_1$: условий сопряжения . . .	4
» $x=a_2$: » »	4
. . . . .	
при $x=a_n$: условий сопряжения	4
» $x=1$: граничных условий	2

т. е. полное число условий будет $4n+4$. Каждое отдельное условие, как граничное, так и сопряжения, выражается линейным однородным уравне-

нием относительно постоянных произвольных, принимаемых за неизвестные, причем правые части этих уравнений — нули, коэффициенты же при этих неизвестных будут выражены через величину k и числа $a_1, a_2, \ldots a_n$ — заданным образом.

Если определитель $\Delta(k)$ этой системы $4n + 4$ уравнений не равен нулю, то единственная система решений есть та, когда все неизвестные, т. е. постоянные произвольные, равны нулю; тогда вал сохраняет прямолинейную форму, решения же, отличные от нуля, будут при тех значениях k, при которых

$$\Delta(k) = 0$$

Эти значения и дадут критические угловые скорости, как и выше.

Само собою разумеется, что непосредственное развитие определителя из $(4n + 4)^2$ элементов было бы невозможно и к тому же бесполезно, ибо величины корней его могли бы быть вычисляемы лишь численно, а не при буквенном задании.

Даже и при численном задании, определитель вычисляется, напр. при частном значении $k = \gamma_1$, не непосредственно, а исключая последовательно переменные, относящиеся к точкам сопряжения, причем оказывается, что можно распорядиться так, что приходится решать всякий раз не четыре уравнения с четырьмя неизвестными, а лишь два — с двумя, и в окончательном результате получить два уравнения вида (21), для которых определитель и вычисляется сразу.

Мы не будем развивать этой методы, отсылая к указанной статье Th. Got'a, а покажем такую методу, при которой условий сопряжения составлять нет надобности, а значит, и нет надобности производить исключения $4n$ постоянных, относящихся к промежуточным участкам, а из оставшихся четырех постоянных две будут всегда равны нулю, так что нам придется иметь дело не с $4n + 4$ постоянными, а лишь с *двумя*.

§ **6.** Возьмем опять случай, рассмотренный в § 3, но положим, что на вал действует еще внешняя нагрузка $F(x_1)$, так что уравнение равновесия есть

$$EI\frac{d^4y}{dx_1^4} - \frac{p\omega^2}{g}y = F(x_1) \qquad (23)$$

обозначив попрежнему

$$k^4 = \frac{p}{g}\frac{l^4\omega^2}{EI}$$

и положив

$$\frac{l^4}{EI}F(x_1) = f(x) \qquad (24)$$

будем иметь уравнение

$$y^{IV} - k^4 y = f(x) \tag{23'}$$

Граничные условия будут, когда оба конца вала подперты:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0; \quad y''(0) = 0 \\ y(1) &= 0; \quad y''(1) = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Уравнение без последнего члена, соответствующее уравнению (23'), есть

$$u^{IV} - k^4 u = 0 \tag{26}$$

его общий интеграл есть

$$u = A\cos kx + B\sin kx + C\operatorname{ch} kx + D\operatorname{sh} kx$$

но вместо частных решений

$$\cos kx,\ \sin kx;\ \operatorname{ch} kx,\ \operatorname{sh} kx$$

можно взять четыре любых частных решения, линейно между собою не зависимых; пусть эти решения будут:

$$S(x),\ T(x),\ U(x),\ V(x)$$

возьмем их так, чтобы они обладали единичной матрицей, т. е. чтобы было:

$$\begin{aligned} &S(0) = 1; \quad S'(0) = 0; \quad S''(0) = 0; \quad S'''(0) = 0 \\ &T(0) = 0; \quad T'(0) = 1; \quad T''(0) = 0; \quad T'''(0) = 0 \\ &U(0) = 0; \quad U'(0) = 0; \quad U''(0) = 1; \quad U'''(0) = 0 \\ &V(0) = 0; \quad V'(0) = 0; \quad V''(0) = 0; \quad V'''(0) = 1 \end{aligned} \tag{27}$$

тогда, положив

$$S(x) = A\cos kx + B\sin kx + C\operatorname{ch} kx + D\operatorname{sh} kx$$

получим на основании условий (27):

$$S(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} kx + \cos kx)$$

и совершенно так же:

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} kx + \sin kx) \\ U(x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} kx - \cos kx) \\ V(x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} kx - \sin kx) \end{aligned} \tag{28}$$

Нам понадобятся производные этих функций, поэтому составляем следующую таблицу:

$\Omega(x)$	$\Omega'(x)$	$\Omega''(x)$	$\Omega'''(x)$
$S(x)$	$kV(x)$	$k^2\,U(x)$	$k^3\,T(x)$
$T(x)$	$kS(x)$	$k^2\,V(x)$	$k^3\,U(x)$
$U(x)$	$kT(x)$	$k^2\,S(x)$	$k^3\,V(x)$
$V(x)$	$kU(x)$	$k^2\,T(x)$	$k^3\,S(x)$

(29)

Применение этих функций дозволяет сразу писать решение уравнения (26), удовлетворяющее при $x=0$ граничным условиям, значит содержащее только две постоянные произвольные; так, в нашем случае, когда

$$u(0)=0 \quad \text{и} \quad u''(0)=0 \tag{30}$$

будет

$$u = BU(x) + DV(x)$$

как то следует из таблицы (27).

Общий интеграл уравнения (23′) есть

$$y = u + \Phi(x)$$

где $\Phi(x)$ есть частное решение уравнения (23′). Это частное решение проще всего получить символическим методом, т. е. написав уравнение (23′) в виде

$$(\delta^4 - k^4)\,y = f(x)$$

и затем

$$y = (\delta^4 - k^4)^{-1} f(x) = \frac{1}{\delta^4 - k^4} f(x) = \frac{1}{2k^2}\left[\frac{1}{\delta^2 - k^2} - \frac{1}{\delta^2 + k^2}\right] f(x)$$

Значит, будет

$$y = \frac{1}{2k^2}(\delta^2 - k^2)^{-1} f(x) - \frac{1}{2k^2}(\delta^2 + k^2)^{-1} f(x) = \frac{1}{2k^2} v - \frac{1}{2k^2} w$$

причем положено:

$$v = (\delta^2 - k^2)^{-1} f(x); \quad w = (\delta^2 + k^2)^{-1} f(x)$$

эти два уравнения, написанные не символически, суть:

$$v'' - k^2 v = f(x); \quad w'' + k^2 w = f(x)$$

из них, применив методу изменения произвольных постоянных, следует:

$$v = \frac{1}{k}\int_0^x f(t)\,\mathrm{sh}\,k(x-t)\,dt$$

$$w = \frac{1}{k}\int_0^x f(t)\sin k(x-t)\,dt$$

следовательно будет

$$\Phi(x) = \frac{1}{2k^2}(v-w) = \frac{1}{k^3}\int_0^x f(t)\,V(x-t)\,dt \tag{31}$$

составляя производные, имеем на основании таблицы (29):

$$\Phi'(x) = \frac{1}{k^2}\int_0^x f(t)\cdot U(x-t)\,dt$$

$$\Phi''(x) = \frac{1}{k}\int_0^x f(t)\cdot T(x-t)\,dt \tag{32}$$

$$\Phi'''(x) = \int_0^x f(t)\cdot S(x-t)\,dt$$

$$\Phi^{IV}(x) = f(x) + k\int_0^x f(t)\,V(x-t)\,dt$$

Эта формула показывает, что

$$\Phi^{IV}(x) = k^4\Phi(x) = f(x)$$

т. е. что выражение

$$\Phi(x) = \frac{1}{k^3}\int_0^x f(t)\,V(x-t)\,dt \tag{31}$$

где

$$V(x-t) = \frac{1}{2}[\mathrm{sh}\,k(x-t) - \sin k(x-t)]$$

есть, действительно, частное решение уравнения (23′).

Вместе с тем из этих формул следует

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = \Phi''(0) = \Phi'''(0) = 0 \tag{33}$$

т. е. присутствие функции $\Phi(x)$ в общем интеграле уравнения (23′), написанном в виде

$$y = u + \Phi(x) \tag{34}$$

не изменяет начальных условий, относящихся при $x = 0$ к функции u, которые суть:

$$\begin{aligned} &\text{для конца подпертого:} \quad u(0) = 0; \quad u''(0) = 0 \\ &\text{» » заделанного:} \quad u(0) = 0; \quad u'(0) = 0 \\ &\text{» » свободного:} \quad u''(0) = 0; \quad u'''(0) = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

поэтому можно сразу писать решение для y в виде:

$$\begin{aligned} y &= BT(x) + DV(x) + \Phi(x) \\ y &= CU(x) + DV(x) + \Phi(x) \\ y &= AS(x) + BT(x) + \Phi(x) \end{aligned} \tag{36}$$

в соответствии с условиями (35).

Эти формулы показывают, что какова бы нагрузка ни была, в решении будет содержаться *две и только две* постоянные произвольные, которые определяются по условиям закрепления конца B, для которого $x = 1$, т. е.

$$\begin{aligned} &\text{для конца подпертого:} \quad y(1) = 0; \quad y''(1) = 0 \\ &\text{» » заделанного:} \quad y(1) = 0; \quad y'(1) = 0 \\ &\text{» » свободного:} \quad y''(1) = 0; \quad y'''(1) = 0 \end{aligned} \tag{37}$$

причем, как будет показано ниже, сколько бы шкивов на валу ни было насажено, условий сопряжения нет надобности составлять.

§ **7.** Нам надо составить выражения $\Phi(x)$ для нагрузки: а) сосредоточенными силами и б) сосредоточенными парами или моментами.

Начнем с сосредоточенных сил.

Положим, что в данной точке, для которой $x = a_1$, приложена сосредоточенная сила Q_1, требуется составить выражение $\Phi(x)$ для такой нагрузки.

Положим сперва, что на протяжении от

$$x_1 = l_1 \quad \text{до} \quad x_1 = l_1 + \varepsilon$$

действует равномерная нагрузка q_1 на погонную единицу длины, так что полная нагрузка $Q_1 = q_1 \cdot \varepsilon_1$.

В этом случае функция $F(x_1)$ будет равна нулю на всем протяжении вала, кроме участка от

$$x_1 = l_1 \quad \text{до} \quad x_1 = l_1 + \varepsilon_1$$

где

$$F(x_1) = q_1$$

пусть будет

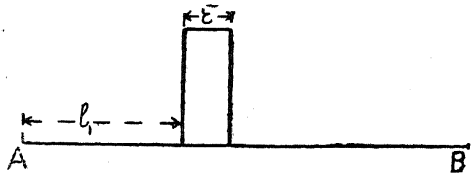
$$\frac{l_1}{l} = a_1 \quad \text{и} \quad \frac{\varepsilon}{l} = \eta$$

тогда функция $f(x)$ определяется следующими равенствами:

$$\text{для } 0 \leqq x \leqq a_1 \ldots\ldots f(x) = 0$$
$$\text{» } a_1 \leqq x \leqq a_1 + \eta \ldots\ldots f(x) = \frac{l^4}{EI} q_1$$
$$\text{» } a_1 + \eta \leqq x \leqq 1 \ldots\ldots f(x) = 0$$

соответственно этому заданию функции $f(x)$ функция $\Phi(x)$ будет:

$$\text{для } 0 \leqq x \leqq a_1 \ldots\ldots \Phi(x) = 0$$
$$\text{» } a_1 \leqq x \leqq a_1 + \eta \ldots \Phi(x) = \frac{1}{k^3} \frac{l^4}{EI} q_1 \int_{a_1}^{x} V(x - t)\, dt$$
$$\text{» } a_1 + \eta \leqq x \leqq 1 \ldots\ldots \Phi(x) = \frac{1}{k^3} \frac{l^4}{EI} q_1 \int_{a_1}^{a_1+\eta} V(x - t)\, dt$$



Фиг. 3.

для сосредоточенной силы надо предположить, что величина η бесконечно малая, но что произведение $q_1 \varepsilon$ остается постоянно равным Q_1, так что и в пределе

$$\lim_{\varepsilon = 0} (q_1 \varepsilon) = Q_1$$

и при этом условии надо найти предельное значение $\Phi(x)$ для последнего участка, ибо второй участок исчезает.

Очевидно, будет

$$\int_{a_1}^{a_1+\eta} V(x - t)\, dt = \eta \cdot V(x - a_1 - \theta\eta)$$

где

$$0 < \theta < 1$$

Таким образом имеем

$$\Phi(x) = \frac{1}{k^3} \frac{l^4}{EI} \lim_{\eta = 0} q_1 \eta \cdot V(x - a_1 - \theta\eta)$$
$$= \frac{1}{k^3} \frac{l^3}{EI} Q_1 \cdot V(x - a_1)$$

и следовательно, для нагрузки Q_1, сосредоточенной в точке $x = a_1$, функция $\Phi(x)$ определяется равенствами:

$$\begin{aligned} &\text{для } 0 \leqq x \leqq a_1 \ . \ . \ . \ \Phi(x) = 0 \\ &\text{» } a_1 \leqq x \leqq 1 \ . \ . \ . \ \Phi(x) = \frac{1}{k^3} \frac{l^3}{EI} Q_1 V(x - a_1) \end{aligned} \tag{38}$$

Положим теперь, что приложена не одна сила Q_1, а несколько, напр. четыре

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ Q_4$$

в точках, для которых x имеет значения:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$$

тогда для каждой из этих сил в отдельности, если бы эта сила была одна, мы получили бы равенства:

$$\begin{aligned} &\text{для } 0 \leqq x \leqq a_1 \ . \ . \ . \ \Phi_1(x) = 0 \\ &\text{» } a_1 \leqq x \leqq 1 \ . \ . \ . \ \Phi_1(x) = \frac{1}{k^3} \frac{l^3}{EI} Q_1 V(x - a_1) \\ &\text{для } 0 \leqq x \leqq a_2 \ . \ . \ . \ \Phi_2(x) = 0 \\ &\text{» } a_2 \leqq x \leqq 1 \ . \ . \ . \ \Phi_2(x) = \frac{1}{k^3} \frac{l^3}{EI} Q_2 V(x - a_2) \\ &\text{для } 0 \leqq x \leqq a_3 \ . \ . \ . \ \Phi_3(x) = 0 \\ &\text{» } a_3 \leqq x \leqq 1 \ . \ . \ . \ \Phi_3(x) = \frac{1}{k^3} \frac{l^3}{EI} Q_3 V(x - a_3) \\ &\text{для } 0 \leqq x \leqq a_4 \ . \ . \ . \ \Phi_4(x) = 0 \\ &\text{» } a_4 \leqq x \leqq 1 \ . \ . \ . \ \Phi_4(x) = \frac{1}{k^3} \frac{l^3}{EI} Q_4 V(x - a_4) \end{aligned} \tag{39}$$

Накладывая эти определения функций $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$ и $\Phi_4(x)$, получаем для функции $\Phi(x)$ такое определение:

$$\begin{aligned} &\text{для } 0 \leqq x \leqq a_1 \ . \ . \ . \ \Phi(x) = 0 \\ &\text{» } a_1 \leqq x \leqq a_2 \ . \ . \ . \ \Phi(x) = \Phi_1(x) \\ &\text{» } a_2 \leqq x \leqq a_3 \ . \ . \ . \ \Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x) \\ &\text{» } a_3 \leqq x \leqq a_4 \ . \ . \ . \ \Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x) + \Phi_3(x) \\ &\text{» } a_4 \leqq x \leqq 1 \ . \ . \ . \ \Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x) + \Phi_3(x) + \Phi_4(x) \end{aligned} \tag{40}$$

Отсюда само собою понятно, каким образом составить функцию $\Phi(x)$ для n сосредоточенных сил.

Перейдем теперь к случаю нагрузки парой, сосредоточенной в точке, для которой $x_1 = l_1$; пусть момент этой пары есть M_1, тогда стоит только принять, что

$$Q_2 = -Q_1; \quad l_2 = l_1 + \varepsilon; \quad Q_1\varepsilon = M_1$$

предположить, что величина ε бесконечно малая, но что

$$\lim_{\varepsilon=0} Q_1\varepsilon = M_1 \tag{41}$$

значения переменной x для точек приложения сил Q_1 и Q_2 будут

$$a_1 \quad \text{и} \quad a_1 + \eta$$

где попрежнему $\eta l = \varepsilon$, так что

$$\lim_{\eta=0} Q_1\eta = \frac{1}{l} M_1$$

тогда, на основании формул (40), получим:

$$\begin{aligned}
&\text{для } 0 \leqq x \leqq a_1 \ . \ . \ . \ \Phi(x) = 0 \\
&\text{» } a_1 \leqq x \leqq a_2 \ . \ . \ . \ \Phi(x) = \frac{1}{k^3}\frac{l^3}{EI} Q_1 \cdot V(x - a_1) \\
&\text{» } a_2 \leqq x \leqq 1 \ . \ . \ . \ \Phi(x) = \frac{1}{k^3}\frac{l^3}{EI} Q_1 \cdot [V(x - a_1) - V(x - a_2)]
\end{aligned}$$

полагая $a_2 = a_1 + \eta$ и переходя к пределу, видим, что второй участок исчезает, для третьего же будет при бесконечно малом η:

$$V(x - a_1) - V(x - a_1 - \eta) = \eta V'(x - a_1)$$

но

$$V'(x - a) = kU(x - a)$$

следовательно, на основании формулы (41), в пределе будет

$$\Phi(x) = \frac{1}{k^2}\frac{l^2}{EI} M_1 \cdot U(x - a)$$

Таким образом для момента M_1, приложенного в точке, соответствующей абсциссе $x = a_1$, имеем следующее определение функции $\Phi(x)$:

$$\begin{aligned}
&\text{для } 0 \leqq x \leqq a_1 \ . \ . \ . \ \Phi(x) = 0 \\
&\text{» } a_1 \leqq x \leqq 1 \ . \ . \ . \ \Phi(x) = \frac{1}{k^2}\frac{l^2}{EI} M_1 \cdot U(x - a_1)
\end{aligned} \tag{42}$$

В том случае, когда в точке $x = a_1$ приложены одновременно сосредоточенная сила Q_1 и момент M_1, то функция $\Phi(x)$ определяется следующими равенствами:

$$\begin{aligned} &\text{для } 0 \leqq x \leqq a_1 \ . \ . \ . \ \Phi(x) = 0 \\ &\text{» } a_1 \leqq x \leqq 1 \ . \ . \ . \ \Phi(x) = \frac{1}{k^2}\frac{l^2}{EI}\left[\frac{l}{k} Q_1 \cdot V(x-a_1) + M_1 \cdot U(x-a_1)\right] \end{aligned} \tag{43}$$

Очевидно, что когда в точках, для коих значения переменной x суть

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots a_n$$

приложены силы

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \ldots Q_n$$

и пары, коих моменты

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ \ldots M_n$$

то, положив

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{1}{k^2}\frac{l^2}{EI}\left[\frac{l}{k} Q_1 V(x-a_1) + M_1 U(x-a_1)\right] \\ \varphi_2(x) &= \frac{1}{R^2}\frac{l^2}{EI}\left[\frac{l}{k} Q_2 V(x-a_2) + M_2 U(x-a_2)\right] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x) &= \frac{1}{k^2}\frac{l^2}{EI}\left[\frac{l}{k} Q_n V(x-a_n) + M_n U(x-a_n)\right] \end{aligned} \tag{44}$$

получим, для определения функции $\Phi(x)$, следующие равенства:

$$\begin{aligned} &\text{для } 0 \leqq x \leqq a_1 \ . \ . \ . \ \Phi(x) = 0 \\ &\text{» } a_1 \leqq x \leqq a_2 \ . \ . \ . \ \Phi(x) = \varphi_1(x) \\ &\text{» } a_2 \leqq x \leqq a_3 \ . \ . \ . \ \Phi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \\ &\text{» } a_3 \leqq x \leqq a_4 \ . \ . \ . \ \Phi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\text{» } a_n \leqq x \leqq 1 \ . \ . \ . \ \Phi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots + \varphi_n(x) \end{aligned} \tag{45}$$

Уравнение упругой линии, когда конец вала, где $x = 0$, подперт, будет

$$y = BT(x) + DV(x) + \Phi(x) \tag{46}$$

когда же этот конец заделан, то

$$y = CU(x) + DV(x) + \Phi(x) \tag{47}$$

и когда этот конец свободен, то

$$y = AS(x) + BT(x) + \Phi(x) \tag{48}$$

как это уже указано в § 6 формулою (36), функция же $\Phi(x)$ во всех случаях одна и та же, определяемая формулами (45).

Постоянные произвольные определяются по граничным условиям для конца вала, соответствующего значению $x = 1$.

§ 8. Формулами § 7 задача решается, когда силы и моменты *заданы*, но для вращающегося вала ни силы, ни моменты не задаются, а известны лишь их выражения через массы и моменты инерции шкивов и прогибы и уклоны вала в местах их насадки.

Пусть места насадки шкивов заданы значениями переменной x:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots a_n$$

пусть массы шкивов:

$$m_1,\ m_2,\ \ldots m_n$$

моменты инерции их:

$$K_2 = m_1 \rho_1^2;\ K_2 = m_2 \rho_2^2;\ \ldots\ K_n = m_n \rho_n^2$$

тогда силы $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ и моменты $M_1, M_2, \ldots M_n$ выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&Q_1 = m_1 \omega^2 y_0(a_1) \qquad M_1 = -K_1 \omega^2 \left(\frac{dy}{dx_1}\right)_{x_1=l_1} = -\frac{K_1}{l} \omega^2 y_0'(a_1)\\
&Q_2 = m_2 \omega^2 y_1(a_2) \qquad M_1 = -\frac{K_2}{l} \omega^2 y_1'(a_2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Q_n = m_n \omega^2 y_{n-1}(a_n) \qquad M_n = -\frac{K_n}{l} \omega^2 y'_{n-1}(a_n)
\end{aligned} \tag{49}$$

Мы написали:

$$y_0(a_1),\ y_1(a_2), \ldots y_{n-1}(a_n);\ y_0'(a_1),\ y_1'(a_2), \ldots y_{n-1}(a_n)$$

вместо

$$y(a_1),\ y(a_2), \ldots y(a_n);\ y'(a_1),\ y'(a_2), \ldots y'(a_n)$$

чтобы обратить внимание, что, соответственно значениям функции $\Phi(x)$ для разных участков, и функция y выражается различно.

§ 9. Чтобы пояснить порядок составления выражений для функции y и дальнейшего развития формул, начнем с простейшего случая, когда на вале шкивов нет.

В этом случае для всего протяжения вала

$$\Phi(x) = 0$$

и вид уравнения упругой линии зависит только от граничных условий при конце, соответствующем значению $x = 0$, уравнения же, служащие для определения постоянных произвольных, зависят от граничных условий при $x = 1$. Возьмем следующие случаи.

1°) Оба конца подперты, т. е. лежат в подшипниках Селлерса.

Уравнение упругой линии есть

$$y = BT(x) + DV(x) \tag{50}$$

причем граничные условия

$$y(0) = 0; \quad y''(0) \tag{51}$$

на основании равенств (27), удовлетворены тождественно при всяких значениях постоянных произвольных B и D.

Граничные условия

$$y(1) = 0; \quad y''(1) = 0$$

будут:

$$BT(1) + DV(1) = 0$$
$$BT''(1) + DV''(1) = 0$$

но по таблице (29):

$$T''(1) = k^2 V(1); \quad V''(1) = k^2 T'(1)$$

так что второе уравнение будет

$$BV(1) + DT(1) = 0$$

и следовательно, критическая скорость определяется уравнением

$$T^2(1) - V^2(1) = 0$$

т. е., на основании формул (28),

$$\operatorname{sh} k \cdot \sin k = 0 \tag{52}$$

которое мы имеем в § 3 и для корней которого критические скорости даны формулами (12) и (13).

2°) Положим теперь, что левый подшипник ($x = 0$) — Селлерса, правый — обыкновенный, неподвижный, так что граничные условия при $x = 1$ суть:

$$y(1) = 0; \quad y'(1) = 0$$

т. е.

$$BT(1) + DV(1) = 0$$
$$BT'(1) + DV'(1) = 0$$

но

$$T'(1) = kS(1); \quad V'(1) = kU(1)$$

значит второе уравнение будет

$$B \cdot S(1) + DU(1) = 0$$

и критические скорости определяются по уравнению

$$T(1) \cdot U(1) - S(1) \cdot V(1) = 0 \tag{53}$$

т. е.

$$(\operatorname{sh} k + \sin k)(\operatorname{ch} k - \cos k) - (\operatorname{ch} k + \cos k)(\operatorname{sh} k - \sin k) = 0$$

или, по упрощении, будет

$$\operatorname{ch} k \sin k - \operatorname{sh} k \cos k = 0 \tag{53'}$$

Пользуясь таблицами Хаясси, приложенными к статье «О расчете балок, лежащих на упругом основании», непосредственно находим наименьший корень этого уравнения:

$$k_1 = 3.93$$

которому соответствует критическая скорость

$$\omega_1 = (3.93)^2 \cdot \sqrt{\frac{gEI}{pl^4}} = 15.4 \sqrt{\frac{gEI}{pl^4}}$$

3°) Положим теперь, что левый подшипник — обыкновенный, правый — Селлерса.

Уравнение упругой линии будет

$$y = CU(x) + DV(x) = 0$$

Граничные условия при $x = 1$ суть:

$$y(1) = 0; \quad y''(1) = 0$$

т. е. в нашем случае:

$$CU(1) + DV(1) = 0$$
$$CS(1) + DT(1) = 0$$

и уравнение, дающее критические скорости, есть

$$T(1) \cdot U(1) - S(1)\, V(1) = 0$$

т. е. то же самое, как и в примере 2°), как это, очевидно, и должно быть.

4°) Оба подшипника обыкновенные. В этом случае уравнение упругой линии есть

$$y = CU(x) + DV(x)$$

Граничные условия при $x = 1$ суть:

$$y(1) = 0; \quad y'(1) = 0$$

т. е.

$$C \cdot U(1) + D \cdot V(1) = 0$$
$$C \cdot T(1) + D \cdot U(1) = 0$$

следовательно критические скорости определяются уравнением

$$U^2(1) - T(1)\, V(1) = 0 \tag{54}$$

иначе

$$(\operatorname{ch} k - \cos k)^2 - (\operatorname{sh} k + \sin k)(\operatorname{sh} k - \sin k) = 0$$

которое, по упрощении, будет

$$\operatorname{ch} k \cos k = 1 \tag{54}$$

Наименьший отличный от нуля корень этого уравнения есть

$$k_1 = 4.73$$

и критическая скорость

$$\omega_1 = (4.73)^2 \sqrt{\frac{gEI}{pl^4}} = 22.4 \sqrt{\frac{gEI}{pl^4}}$$

§ **10.** Положим теперь, что на вале имеются насаженные шкивы, и начнем с простейшего случая, когда шкив один и насажен в точке, для которой $x = a$, масса шкива m, момент инерции его $K = m\rho^2$.

Положим, что левый конец ($x = 0$) вала подперт, тогда уравнения упругой линии, на основании формул § 7, суть:

$$\begin{aligned} &\text{для } 0 \leqq x \leqq a \ . \ . \ . \ y = y_0 = BT(x) + DV(x) \\ &\text{» } a \leqq x \leqq 1 \ . \ . \ . \ y = y_1 = BT(x) + DV(x) + \varphi_1(x) \end{aligned} \tag{55}$$

причем

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{k^2} \frac{l^2}{EI} \left[\frac{l}{k} Q \cdot V(x-a) + \frac{M}{l} \cdot U(x-a) \right] \tag{56}$$

$$Q = m\omega^2 y_0(a); \quad M = -K\omega^2 y_0'(a) \tag{57}$$

примем, что правый конец ($x = 1$) вала тоже подперт, тогда граничные условия будут:

$$y_1(1) = 0; \quad y_1''(1) = 0$$

т. е.

$$\begin{aligned} BT(1) + DV(1) &= 0 \\ BT''(1) + DV''(1) + \varphi_1''(1) &= 0 \end{aligned} \tag{58}$$

но

$$\begin{aligned} T''(1) &= k^2 V(1); \quad V''(1) = k^2 T(1) \\ V''(1-a) &= k^2 T(1-a); \quad U''(1-a) = k^2 S(1-a) \end{aligned}$$

Положив, для краткости письма,

$$1 - a = b$$

получим уравнения (58) в следующем виде:

$$BT(1) + DV(1) = 0 \tag{59}$$

$$BV(1) + DT(1) + \frac{1}{k^2}\frac{l^2}{EI}\left[\frac{l}{k} QT(b) + \frac{M}{l} S(b)\right] = 0 \tag{60}$$

вместе с тем будет:

$$\begin{aligned} Q &= m\omega^2 [BT(a) + DV(a)] \\ M &= -km\rho^2 \omega^2 [BS(a) + DU(a)] \end{aligned} \tag{41}$$

подставляя эти величины в уравнение (60), имеем

$$\begin{aligned} B\left[V(1) - \frac{m\omega^2 l^3}{k^3 EI} T(a) T(b) - \frac{m\omega^2 \rho^2 l}{kEI} S(a) S(b)\right] + \\ + D\left[T(1) - \frac{m\omega^2 l^3}{k^3 EI} V(a) T(b) - \frac{m\omega^2 \rho^2 l}{kEI} U(a) S(b)\right] = 0 \end{aligned} \tag{60}$$

Положив для краткости

$$\frac{m\omega^2 l^3}{EI} = \alpha; \quad \frac{m\omega^2 \rho^2 l}{EI} = \beta$$

получим, для определения критических скоростей, уравнение

$$\begin{aligned} \Delta(k) = T(1)\left[T(1) - \frac{\alpha}{k^3} V(a) T(b) - \frac{\beta}{k} U(a) S(b)\right] \\ - V(1)\left[V(1) - \frac{\alpha}{k^3} T(a) T(b) - \frac{\beta}{k} S(a) S(b)\right] = 0 \end{aligned} \tag{61}$$

которое для численного вычисления корней нет надобности развивать, ибо для этого вычисление придется делать последовательными приближениями, задавая величину k и сближая пределы; так, напр., взяв $k = c$, имеем:

$$\begin{aligned}
&2T(1) = \operatorname{sh} c + \sin c; \quad 2V(1) = \operatorname{sh} c - \sin c\\
&2T(a) = \operatorname{sh} ac + \sin ac; \quad 2V(a) = \operatorname{sh} ac - \sin ac\\
&2S(a) = \operatorname{ch} ac + \cos ac; \quad 2U(a) = \operatorname{ch} ac - \cos ac\\
&2S(b) = \operatorname{ch} bc + \cos bc;\\
&2T(b) = \operatorname{sh} bc + \sin bc
\end{aligned} \tag{62}$$

Все эти величины сразу выбираются по своему аргументу из таблиц Хаясси, и ясно, что развитие величины $\Delta(k)$ не внесет упрощения в ее численное вычисление и практически бесполезно.

§ 11. Покажем теперь, каким образом надо поступать, когда на валу насажено несколько шкивов; мы возьмем, для простоты рассуждений и письма, три шкива, по самому же ходу выкладок будет очевидно, каким образом поступать при любом их числе.

Итак, пусть места насадки шкивов определяются следующими значениями переменной x:

$$a_1,\ a_2,\ a_3$$

массы шкивов:

$$m_1,\ m_2,\ m_3$$

их моменты инерции:

$$m_1\rho_1^2,\ m_2\rho_2^2,\ m_3\rho_3^2$$

оба конца вала подперты, так что граничные условия суть:

$$y(1) = 0;\ y''(1) = 0 \tag{*}$$

Общие формулы, служащие для определения критических скоростей, выведены в §§ 7 и 8.

Точками насадки шкивов вал подразделяется на четыре участка, на которых уравнения упругой линии будут:

$$\begin{aligned}
&\text{для } 0 \leqq x \leqq a_1 \ldots y = y_0 = BT(x) + DV(x)\\
&\text{» } a_1 \leqq x \leqq a_2 \ldots y = y_1 = y_0 + \varphi_1(x)\\
&\text{» } a_2 \leqq x \leqq a_3 \ldots y = y_2 = y_0 + \varphi_1(x) + \varphi_2(x)\\
&\text{» } a_3 \leqq x \leqq 1 \ldots y = y_3 = y_0 + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x)
\end{aligned} \tag{63}$$

причем

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{k^2}\frac{l^2}{EI}\left[\frac{l}{k}Q_1 V(x-a_1) + M_1 U(x-a_1)\right]$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{k^2}\frac{l^2}{EI}\left[\frac{l}{k}Q_2 V(x-a_2) + M_2 U(x-a_2)\right] \qquad (64)$$

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{k^2}\frac{l}{EI}\left[\frac{l}{k}Q_3 V(x-a_3) + M_3 U(x-a_3)\right]$$

$$Q_1 = m_1\omega^2 y_0(a_1); \quad M_1 = -\frac{m_1\rho_1^2\omega^2}{l}\cdot y_0'(a_1)$$

$$Q_2 = m_2\omega^2 y_1(a_2); \quad M_2 = -\frac{m_2\rho_2^2\omega^2}{l}y_1'(a_2) \qquad (65)$$

$$Q_3 = m_3\omega^2 y_2(a_3); \quad M_3 = -\frac{m_3\rho_3^2\omega^2}{l}y_2'(a_3)$$

Из этих формул видно, что начав с y_0, последовательно можно составить остальные функции, которые все будут вида

$$BX_1 + DX_2$$

где X_1 и X_2 будут функции, определенным образом составленные из известных функций от аргумента kx.

Отсюда ясно, что граничные условия (*) будут вида:

$$BG(k) + DH(k) = 0$$
$$BL(k) + DN(k) = 0 \qquad (66)$$

и уравнение, которым определяются критические скорости, будет

$$\Delta(k) = G(k)\cdot N(k) - H(k)\cdot L(k) = 0 \qquad (67)$$

Это выражение будет настолько сложно, что решение этого уравнения возможно лишь последовательными приближениями, для которых требуется лишь возможность вычисления частных значений величины $\Delta(k)$, соответствующих задаваемым частным значениям величины k, которые обозначим через

$$\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \cdots$$

Так как развитие в общем виде величины $\Delta(k)$ практически не выполнимо, а если бы и было выполнимо, то по своей сложности для численных вычислений бесполезно, то ясно, что задав, напр.,

$$k = \gamma$$

надо вычислить величины:

$$G(\gamma),\ H(\gamma),\ L(\gamma) \quad \text{и} \quad N(\gamma)$$

Эти выражения проще вычислять в два приема порознь.

Очевидно, что положив во всех формулах

$$B=1,\ D=0$$

мы получим:

$$\begin{aligned} y_3(1) &= G(\gamma) \\ y_3''(1) &= L(\gamma) \end{aligned} \tag{68}$$

Совершенно так же, положив

$$B=0;\quad D=1$$

мы получим:

$$\begin{aligned} y_3(1) &= H(\gamma) \\ y''(1) &= N(\gamma) \end{aligned} \tag{68'}$$

после чего найдется и соответствующее частное значение

$$\Delta(\gamma) = G(\gamma)\cdot N(\gamma) - H(\gamma)\cdot L(\gamma) \tag{67}$$

Затем полагаем

$$k=\gamma_1$$

и совершенно подобным образом вычислим

$$\Delta(\gamma_1)$$

после чего линейными приближениями будем сближать пределы.

Не приводя схем, поясним достаточно подробно самую последовательность численных вычислений.

Когда положено

$$B=1;\quad D=0$$

то обозначим соответствующие величины y_0, y_1, y_2, y_3 через z_0, z_1, z_2, z_3; функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ — через $\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)$ и величины $Q_1, Q_2, Q_3, M_1, M_2, M_3$ — через $Q_1', Q_2', Q_3', M_1', M_2', M_3'$, тогда будем иметь формулы:

$$\begin{aligned} z_0 &= T(x) \\ z_1 &= z_0 + \psi_1(x) \\ z_2 &= z_0 + \psi_1(x) + \psi_2(x) \\ z_3 &= z_0 + \psi_1(x) + \psi_2(x) + \psi_3(x) \end{aligned} \tag{63'}$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{k^2}\frac{l^2}{EI}\left[\frac{l}{k}Q_1'V(x-a_1) + M_1'U(x-a_1)\right]$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{k^2}\frac{l^2}{EI}\left[\frac{l}{k}Q_2'V(x-a_2) + M_2'U(x-a_2)\right] \qquad (64')$$

$$\psi_3(x) = \frac{1}{k^2}\frac{l^2}{EI}\left[\frac{l}{k}Q_3'V(x-a_3) + M_3'U(x-a_3)\right]$$

$$Q_1' = m_1\omega^2 z_0(a_1) \quad M_1' = -\frac{m_1\rho^2}{l}\omega^2 \cdot z_0'(a_1)$$

$$Q_2' = m_2\omega^2 z_1(a_2) \quad M_2' = -\frac{m_2\rho_2^2}{l}\omega^2 \cdot z_1'(a_2) \qquad (65')$$

$$Q_3' = m_3\omega^2 z_2(a_3) \quad M_3' = -\frac{m_3\rho_3^2}{l}\cdot\omega^2 \cdot z_2'(a_3)$$

Положив

$$k = \gamma$$

вычисляем аргументы:

$$ka_1 = \gamma\frac{l_1}{l}; \quad ka_2 = \gamma\frac{l_2}{l}; \quad ka_3 = \gamma\frac{l_3}{l} \qquad (69)$$

по которым, пользуясь таблицами Хаясси, находим значения функций:

$$\begin{array}{cccc} T(a_1); & T(a_2); & T(a_3); & T(1) \\ S(a_1); & S(a_2); & S(a_3); & V(1) \end{array}$$

и по формулам

$$z_0 = T(x); \quad z_0' = kS(x); \quad z_0'' = k^2V(x)$$

находим величины:

$$\begin{array}{cccc} z_0(a_1); & z_0(a_2); & z_0(a_3); & z_0(1) \\ z_0'(a_1); & z_0'(a_2); & z_0'(a_3); & z_0''(1) \end{array} \qquad (70)$$

пользуясь которыми находим Q_1' и M_1' и по ним составляем функцию $\psi_1(x)$, которая будет иметь вид

$$\psi_1(x) = g_1V(x-a_1) + h_1U(x-a_1)$$

и ее производные:

$$\psi_1' = kg_1U(x-a_1) + kh_1T(x-a_1)$$
$$\psi_1''(x) = k^2g_1T(x-a_1) + k_2h_1S(x-a_1)$$

по этим формулам вычисляем значения:

$$\psi_1(a_2); \quad \psi_1'(a_2); \quad \psi_1(a_3); \quad \psi_1'(a_3); \quad \psi_1(1); \quad \psi''_1(1)$$

и по ним и значениям (70) находим:

$$z_1(a_2),\ z_1'(a_2);\ z_1(a_3),\ z_1'(a_3) \tag{71}$$

пользуясь которыми вычисляем Q_2' и M_2' и по ним составляем функцию

$$\psi_2(x) = g_2 V(x - a_2) + h_2 U(x - a_2)$$

с численными коэффициентами g_2 и h_2 и ее производные:

$$\psi_2' = k g_2 U(x - a_2) + k h_2 T(x - a_2)$$
$$\psi_2''(x) = k^2 g_2 T(x - a_2) + k^2 h_2 S(x - a_2)$$

По этим формулам вычисляем значения:

$$\psi_2(a_3),\ \psi_2'(a_3);\ \psi_2(1),\ \psi_2''(1)$$

Пользуясь этими значениями и значениями (70) и (71), находим:

$$z_2(a_3),\ z_2'(a_3) \tag{72}$$

по которым вычисляем Q_3' и M_3' и составляем функции

$$\psi_3(x) = g_2 V(x - a_3) + h_3 U(x - a_3)$$

и

$$\psi_3''(x) + k^2 g_3 T(x - a_3) + k^2 h_3 S(x - a_3)$$

и вычисляем

$$\psi_3(1) \quad \text{и} \quad \psi_3''(1) \tag{73}$$

тогда будет:

$$\begin{aligned} z_3(1) &= z_0(1) + \psi_1(1) + \psi_2(1) + \psi_3(1) = G(\gamma) \\ z_3''(1) &= z_0''(1) + \psi_1''(1) + \psi_2''(1) + \psi_3''(1) = L(\gamma) \end{aligned} \tag{74}$$

Совершенно так же, положив

$$B = 0 \quad D = 1$$

вычислим значения

$$H(\gamma) \quad \text{и} \quad N(\gamma)$$

по формулам, составление которых не представляет никаких затруднений.

Вычисление это может быть расположено в весьма простые схемы, составление которых, для краткости, также опускаем.

Очевидно, что при любом числе шкивов и при любых граничных условиях критические скорости найдутся по изложенному способу совершенно подобным же образом.

При численном решении того уравнения, которым определяются критические скорости вращающегося вала с насаженными на нем шкивами, вычисления значительно упрощаются, если известны исходные приближенные значения этих скоростей. В статье Dunkerley'я даны формулы, которыми для этой цели можно пользоваться.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТОКА ПО КАБЕЛЮ

§ 1. В № 8 «Zeitschrift für technische Physik» за 1928 г. помещена статья Поляшек (F. Pollaszek) — «Verfeinerung der W. Thomsonschen Kabeltheorie».

В этой статье путем не столько длинных выкладок, сколько сложных рассуждений, пользуясь, по примеру Пуанкаре (Poincaré), интегрированием по комплексной переменной, функциями Бесселя и прочим далеко не элементарным математическим аппаратом, решается система уравнений:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} &= RI + L\frac{\partial I}{\partial t} \\ -\frac{\partial I}{\partial x} &= GV + C\frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned} \tag{1}$$

в которой V и I обозначают потенциал и силу тока в момент времени t в точке кабеля, коей абсцисса есть x; R — омическое сопротивление, L — самоиндукция, C — емкость, G — проводимость изоляции на единицу длины кабеля; все эти величины предполагаются постоянными.

Уравнения (1) должны иметь место при всяком положительном значении времени t для всех значений переменной x в промежутке $0 < x < l$.

Граничные условия, которые ставит Поляшек, таковы:

$$\begin{aligned} &\text{при } x = 0 \text{ должно быть } V(0, t) = Ee^{i\omega t} \\ &\text{» } x = l \quad \text{» } \quad \text{» } V(l, t) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

для всякого положительного значения t.

Начальные условия в статье не указаны, но по сути дела, так как Поляшек рассматривает «ток замыкания», видно, что они таковы: при $t = 0$ должно быть

$$V(x, 0) = 0 \quad \text{и} \quad I(x, 0) = 0 \tag{3}$$

для всякого значения x в рассматриваемом промежутке.

Это есть известная система уравнений, определяющих распространение тока по кабелю, и было бы совершенно невозможно привести сколько-нибудь исчерпывающий перечень относящейся сюда литературы. Достаточно упомянуть: основной мемуар Кирхгофа, двухтомное исследование В. И. Коваленкова и превосходное, по краткости и ясности изложения, исследование К. А. Поссе, помещенное в «Известиях Электротехнического института» за 1904 г., но надо заметить, что результаты этого исследования уже находятся в руководстве Ваши (A. Vaschy. Traité d'électricité et de magnetisme, II, Paris, 1890). Ваши и Поссе рассматривают тот случай, когда один из концов кабеля удерживается при постоянном потенциале E, внезапно приложенном в момент $t = 0$, другой конец кабеля заземлен; их решение, подобно решению Кирхгофа, весьма просто и требует лишь применения тригонометрических рядов, которые теперь можно причислять к элементам математического анализа.

Столь же простыми средствами может быть получено и решение вопроса, рассматриваемого в статье Поляшека, и притом следуя методе Поссе, но по поводу этой методы и анализа Ваши приходится отметить некоторый недостаток со стороны математической. Показав, в чем этот недостаток состоит и каким образом он отчасти устраняется, я даю, соответственно, измененное решение для случая, рассмотренного Поссе, а затем показываю, каким образом как этот случай, так и случай, рассматриваемый в статье Поляшека, приводится к задаче о вынужденных колебаниях струны или стержня и решается по способу, изложенному в моем курсе «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах».

Здесь невольно приходят на память слова Деламбра из похвальной речи Лагранжу: «Для решения простых вопросов следует пользоваться и простыми средствами, иначе можно уподобиться тому сказочному герою, который, чтобы избавиться от блохи, требовал перуны Юпитера и палицу Геркулеса».

§ **2.** Приведем сперва решение Ваши и Поссе, вошедшее во множество руководств, и выясним, в чем состоит его недостаток.

Исключив из уравнения (1) неизвестную функцию J, получаем для определения V уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (CK + LG)\frac{\partial V}{\partial t} + RGV \qquad (4)$$

которое, положив в нем

$$LC = a^2$$
$$CR + LC = 2h \tag{4'}$$
$$RG = b^2$$

принимает вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial V}{\partial t} - b^2 V = 0 \tag{4''}$$

при следующих граничных и начальных условиях:

граничные условия:

$$\left.\begin{array}{l} \text{при } x = 0 \text{ должно быть } V = E \\ \text{» } x = l \quad \text{» } \quad \text{» } V = 0 \end{array}\right\} \text{ для всякого значения времени } t \tag{5}$$

начальные условия: при $t = 0$ должно быть

$$V = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

для всех значений x в промежутке $0 < x < l$.

Ваши и Поссе полагают

$$V = v + F(x) \tag{7}$$

и определяют функцию $F(x)$ так, чтобы она удовлетворяла уравнению $(4'')$ и следующим граничным условиям:

$$\begin{array}{l} \text{при } x = 0 \text{ должно быть } F(0) = E \\ \text{» } x = l \quad \text{» } \quad \text{» } F(l) = 0 \end{array} \tag{8}$$

тогда функция v будет определяться:

1°) *уравнением*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial v}{\partial t} - b^2 v = 0 \tag{9}$$

2°) *граничными условиями*:

$$\begin{array}{l} \text{при } x = 0 \text{ должно быть } v = 0 \\ \text{» } x = l \quad \text{» } \quad \text{» } v = 0 \end{array} \tag{10}$$

3°) *начальными условиями*: при $t = 0$ должно быть

$$v = -F(x); \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{11}$$

Это показывает, что указанною заменою «неоднородные» граничные условия (5) для функции V приводятся к «однородным» (10) для функции v; дифференциальное же уравнение, определяющее эти функции, остается без перемены.

Как видно, обозначая производные значками, для определения функции F имеем уравнение

$$F'' - b^2 F = 0 \tag{12}$$

из которого, на основании условий (8), следует

$$F(x) = E\frac{e^{b(l-x)} - e^{-b(l-x)}}{e^{bl} - e^{-bl}} = E \cdot \frac{\operatorname{Sh} b(l-x)}{\operatorname{Sh} bl} \tag{13}$$

Функция v, удовлетворяющая однородному дифференциальному уравнению (9) и однородным граничным условиям (10), находится по обычному способу, применяемому в решении задачи о колебаниях струны.

Следуя этому способу, функцию v ищут под видом суммы

$$v = \Sigma XT \tag{14}$$

в которой X зависит только от переменной x, T — только от переменной t и каждый член суммы в отдельности удовлетворяет граничным условиям (10), а вся сумма, сверх того, и начальным условиям (11).

Таким образом получаем

$$X''T - (a^2T'' + 2hT' + b^2T)X = 0$$

отсюда

$$\frac{X''}{X} = \frac{a^2T'' + 2hT' + b^2T}{T} = -m^2$$

где m^2 — какая угодно постоянная. Затем

$$X'' + m^2X = 0$$

$$a^2T'' + 2hT' + (b^2 + m^2)T = 0$$

следовательно будет:

$$\begin{aligned} X &= C\cos mx + D\sin mx \\ T &= Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} \end{aligned} \tag{15}$$

причем α и β — корни уравнения

$$a^2\lambda^2 + 2h\lambda + b^2 + m^2 = 0$$

т. е.

$$\alpha = -\frac{h}{a^2} + \frac{1}{a^2}\sqrt{h^2 - a^2(b^2 + m^2)}$$

$$\beta = \frac{h}{a^2} - \frac{1}{a^2}\sqrt{h^2 - a^2(b^2 + m^2)}$$

Граничные условия дают:

$$C = 0$$

$$D \sin ml = 0$$

откуда следует

$$m = \frac{k\pi}{l} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Таким образом будет:

$$X_k = D_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$T_k = A_k e^{\alpha_k t} + B_k e^{\beta_k t} \tag{16}$$

причем

$$\alpha_k = -\frac{h}{a^2} + \frac{1}{a^2 l}\sqrt{h^2 l^2 - a^2(b^2 l^2 + k^2\pi^2)} = -\mu + n_k$$

$$\beta_k = -\frac{h}{a^2} - \frac{1}{a^2 l}\sqrt{h^2 l^2 - a^2(b^2 l^2 + k^2\pi^2)} = -\mu - n_k \tag{17}$$

Так как произведения $A_k D_k$ и $B_k D_k$ такие же произвольные постоянные, как A_k и B_k, то без ущерба общности можно положить $D = 1$, так что будет

$$v = \sum_{k=1}^{k=\infty} (A_k e^{\alpha_k t} + B_k e^{\beta_k t}) \sin\frac{k\pi x}{l}$$

Затем начальные условия дают:

$$-F(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} (A_k + B_k) \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$0 = \sum_{k=1}^{k=\infty} (\alpha_k A_k + \beta_k B_k) \sin\frac{k\pi x}{l}$$

Отсюда следует:

$$A_k + B_k = -\frac{2}{l}\int_0 F(\xi) \sin\frac{k\pi\xi}{l} \cdot d\xi$$

$$\alpha_k A_k + \beta_k B_k = 0$$

Заметив, что при

$$F(x) = E \cdot \frac{e^{b(l-x)} - e^{-b(l-x)}}{e^{bl} - e^{-bl}}$$

интеграл

$$\frac{2}{l}\int_0 F(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\cdot d\xi = \frac{2k\pi}{b^2 l^2 + k^2\pi^2}\cdot E$$

получим окончательно:

$$v = E\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2k\pi}{b^2 l^2 + k^2\pi^2}\cdot\frac{\beta_k e^{\alpha_k t} - \alpha_k e^{\beta_k t}}{\alpha_k - \beta_k}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (18)$$

и, заменив α_k и β_k их значениями (17), на основании формулы (7), имеем

$$V = E\cdot\frac{\operatorname{Sh} b(l-x)}{\operatorname{Sh} bl} - 2Ee^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{k\pi}{b^2 l^2 + k^2\pi^2}\left[\operatorname{Ch} n_k t + \frac{\mu}{n_k}\operatorname{Sh} n_k t\right]\frac{\sin k\pi x}{l} \qquad (18')$$

Из этой формулы видно, что при неопределенном возрастании времени t функция v стремится к нулю и «установившееся» состояние провода определяется равенством

$$V = E\frac{\operatorname{Sh} b(l-x)}{\operatorname{Sh} bl} = E\cdot\frac{e^{b(l-x)} - e^{-b(l-x)}}{e^{bl} - e^{-bl}}$$

§ **3.** После того как потенциал V найден, надо найти силу тока I. Для этого Поссе пользуется первым из уравнений (1), т. е. уравнением

$$L\frac{\partial I}{\partial t} + RI = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad (19)$$

которое является по отношению к неизвестной функции I уравнением обыкновенным и, будучи написано так:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

дает

$$I = -\frac{1}{L}e^{-nt}\int_0^t e^{n\tau}\frac{\partial V(x,\tau)}{\partial x}d\tau \qquad (20)$$

причем

$$n = \frac{R}{L}$$

и надо принять, что при $t = 0$ должно быть $I = 0$.

Вот относительно этой-то формулы (20) и возникает сомнение, ибо стоящая под знаком интеграла функция $\frac{\partial V}{\partial x}$ представляется рядом *расходящимся* и результат интегрирования такого ряда, в особенности интегрирования почленного, может оказаться и неверным.

Если написать формулу (20) так:

$$I = -\frac{1}{L} e^{-nt} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t e^{n\tau} V(x, \tau)\, d\tau \qquad (20')$$

рассматривая x как параметр, то этим сказанное затруднение как будто бы формально устраняется в том смысле, что при такой последовательности действий не приходится иметь дела с расходящимися рядами, но сомнение в верности формулы (20′), тем не менее, остается.

Это затруднение имеет место и в случае пользования уравнением

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = GV + C\frac{\partial V}{\partial t}$$

ибо и здесь величина $\frac{\partial V}{\partial t}$ представляется расходящимся рядом. Написав формулу

$$I = H(t) - G\int_0^x V(\xi, t)\, d\xi - C\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x V(\xi, t)\, d\xi \qquad (21)$$

мы формально сказанное затруднение обходим, но сомнение в верности формулы (21) остается, ибо нельзя утверждать, что равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x V(\xi, t)\, d\xi = \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} V(\xi, t)\, d\xi$$

имеет место.

Тем не менее, доведем выкладку до конца, и так как пользование формулы (21) проще, нежели (20), то ее и применим. Тогда получим

$$I = H(t) + \frac{GE}{b} \cdot \frac{\operatorname{Ch} b(l-x)}{\operatorname{Sh} bl} -$$

$$- 2GlEe^{-\mu t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\operatorname{Ch} n_k t + \frac{\mu}{n_k} \operatorname{Sh} n_k t \right) \frac{\cos k\pi x}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2}$$

$$- 2CEle^{-\mu t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos \frac{k\pi x}{l}}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} \left[\frac{\mu^2 - n_k^2}{n_k} \right] \operatorname{Sh} n_k t$$

но

$$\mu^2 - n_k^2 = \frac{b^2 l^2 - k^2 \pi^2}{a^2 l^2}$$

и тогда, заметив, что $a^2 = LC$, получим

$$I = H(t) + \frac{GE}{b} \cdot \frac{\operatorname{Ch} b(l-x)}{\operatorname{Sh} bl}$$
$$- 2Gl \cdot Ee^{-\mu t} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\operatorname{Ch} n_k t + \frac{\mu}{n_k} \operatorname{Sh} n_k t \right) \frac{\cos \frac{k\pi x}{l}}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2}$$
$$- \frac{2E}{Ll} e^{-\mu t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{n_k} \operatorname{Sh} n_k t \cos \frac{k\pi x}{l}$$

Произвольная функция $H(t)$ определяется по условию

$$LH'(t) + RH(t) = 0$$

следующему из уравнения

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = RI + L\frac{\partial I}{\partial t}$$

и из начального условия, что при $t = 0$ должно быть $I(x, 0) = 0$ при всяком x в промежутке $0 < x < l$.

Отсюда получаем

$$H(t) = -\frac{E}{Rl} e^{-\frac{R}{L}}$$

Таким образом окончательно имеем:

$$V = E \cdot \frac{\operatorname{Sh} b(l-x)}{\operatorname{Sh} bl} - 2Ee^{-\mu t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k\pi \sin \frac{k\pi x}{l}}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} \left[\operatorname{Ch} n_k t + \frac{\mu}{n_k} \operatorname{Sh} n_k t \right]$$

$$I = \frac{GE}{b} \cdot \frac{\operatorname{Ch} b(l-x)}{\operatorname{Sh} bl} - \frac{E}{Rl} e^{-\frac{R}{L}}$$
$$- 2GlEe^{-\mu t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left[\operatorname{Ch} n_k t + \frac{\mu}{n_k} \operatorname{Sh} n_k t \right] \frac{\cos \frac{k\pi x}{l}}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2}$$
$$- \frac{2E}{Kl} e^{-\mu t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{n_k} \operatorname{Sh} n_k t \cos \frac{k\pi x}{l}$$

§ 4. По поводу предыдущего решения сделаем еще одно замечание: когда от предложенной системы уравнений (1)

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} &= RI + L\frac{\partial I}{\partial t} \\ -\frac{\partial I}{\partial x} &= GV + C\frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

мы переходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial V}{\partial t} - b^2 V = 0 \qquad (4'')$$

или к уравнению

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial I}{\partial t} - b^2 I = 0$$

то этим самым мы налагаем некоторые ограничения на функции V и I, а именно, что на всем протяжении от $x = 0$ до $x = l$ и при всяком значении t существуют *вторые* производные этих функций, иными словами, что производные первого порядка *непрерывны*, тогда как для предложенных уравнений этого ограничения нет, поэтому правильнее рассматривать уравнения задачи в том самом виде, как они предложены. Это же относится и до граничных и начальных условий.

Итак, будем определять искомые функции V и I:

1°) системою дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} &= RI + L\frac{\partial I}{\partial t} \\ -\frac{\partial I}{\partial x} &= GV + C\frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned} \qquad (1)$$

2°) непосредственно заданными граничными условиями:

при $x = 0$ должно быть $V(0, t) = E$
» $x = l$ » » $V(l, t) = 0$
} при всяком значении времени $t > 0$

3°) что же касается начальных условий, то можно сказать, что по условиям задачи должно быть

$$V(x, 0) = 0$$

для всех значений x в данном промежутке, *кроме значения* $x = 0$, при котором по условию $V(0, t) = E$, т. е. надо бы писать, пользуясь обычным обозначением:

$$V(x + 0, 0) = 0$$

Относительно производной $\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_0$ ничего не задано, и условие, принятое Поссе $\left(\frac{\partial V(x, t)}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$, основано лишь на допущении, что до момента $t = 0$ на всей длине кабеля потенциал $V(x, 0)$ равен нулю. Но,

очевидно, это условие не относится до точки $x = 0$, в котором при $t = 0$ потенциал V *мгновенно* становится равным E, — в этой точке производная $\frac{\partial V}{\partial t}$ при $t = 0$ не существует.

Можно рассуждать и так: пока $t < 0$ и к концу $x = 0$ напряжения не приложено, то очевидно, что для всего кабеля $V = 0$ и $I = 0$. В момент $t = 0$ значение $V(+0, +0) = E$, но для остальных значений x величина $V(x, 0) = 0$, тоже и величина $I(x, 0) = 0$.

Таким образом естественно, ничего не предполагая о начальном значении производной $\frac{\partial V}{\partial t}$, принять следующие начальные условия: при $t = 0$ должно быть

$$\left.\begin{aligned} V(x, 0) &= 0 \qquad \text{для} \quad 0 < x \leqq l \\ I(x, 0) &= 0 \qquad \text{»} \quad 0 < x \leqq l \end{aligned}\right\}$$

Если к системе (1) применить способ решения Ваши или Поссе, то надо поступить так: полагаем:

$$V = v + \varphi(x)$$
$$I = y + \psi(x)$$

и определяем функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ так, чтобы они удовлетворяли системе (1) и граничным условиям:

$$\varphi(0) = E; \quad \varphi(l) = 0$$

Тогда имеем:

$$-\varphi' = R\psi$$
$$-\psi' = Gl$$

Отсюда следует

$$\varphi'' - b^2\varphi = 0$$

причем попрежнему $b^2 = RG$, и следовательно,

$$\varphi = A \operatorname{Ch} b(l - x) + B \operatorname{Sh} b(l - x)$$

Условия (5) дают:

$$A = 0; \quad B = \frac{E}{\operatorname{Sh} bl}$$

Таким образом

$$\varphi(x) = \frac{E}{\operatorname{Sh} bl} \cdot \operatorname{Sh} b(l - x)$$

и

$$\psi(x) = \frac{Eb}{R} \cdot \frac{\operatorname{Ch} b(l - x)}{\operatorname{Sh} bl}$$

Для функций v и y имеем:

1°) *уравнения*:

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = Ry + L\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial y}{\partial x} = Gv + C\frac{\partial v}{\partial t}$$

2°) *граничные условия:*

$$\left.\begin{array}{l} \text{при } x = 0 \text{ должно быть } v = 0 \\ \text{» } x = l \quad \text{» } \quad \text{» } v = 0 \end{array}\right\} \text{ при всяком } t > 0$$

3°) *начальные условия*: при $t = 0$ должно быть

$$v = -\varphi(x); \quad y = -\psi(x)$$

Соответственно граничным условиям, полагаем:

$$v = \sum_{k=1}^{k=\infty} T_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$y = S_0(t) + \sum_{k=1}^{k=\infty} S_k \cos\frac{k\pi x}{l}$$

причем T_k и S_k — функции только переменной t.

На основании уравнения (1), имеем, для определения этих функций, уравнения:

$$-\frac{k\pi}{l}T_k = RS_k + LS'_k$$

$$\frac{k\pi}{l}S_k = GT_k + CT'_k$$

исключив неизвестную S_k, получаем уравнение

$$CLT''_k + (CR + LG)\,T'_k + \left(GR + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\right)T_k = 0$$

из которого, положив попрежнему

$$CL = a^2; \quad GR = b^2; \quad \frac{CR + LG}{2CL} = \mu = \frac{h}{a^2}$$

имеем:

$$T_k = e^{-\mu t}[A_k \operatorname{Ch} n_k t + B_k \operatorname{Sh} n_k t]$$
$$S_k = e^{-\mu t}[C_k \operatorname{Ch} n_k t + D_k \operatorname{Sh} n_k t]$$

причем

$$\mu = \frac{h}{a^2}; \quad n_k = \sqrt{\mu^2 - \frac{b^2}{a^2} - \frac{k^2\pi^2}{a^2 l^2}}$$

и между постоянными

$$A_k,\ B_k,\ C_k,\ D_k$$

имеют место соотношения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{k\pi}{l}C_k &= (G-\mu C)A_k + n_k CB_k\\ \frac{k\pi}{l}D_k &= (G-\mu C)B_k + n_k CA_k\end{aligned}\right\} \quad (*)$$

но

$$G-\mu C = G - \frac{CR+LG}{2L} = \frac{LG-CR}{2L}$$

Кроме того, для определения S_0 имеем уравнение:

$$RS_0 + LS_0' = 0$$

$$S_0 = C_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

Начальные условия дают уравнения:

$$-\varphi(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$-\psi(x) = C_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} C_k \cos\frac{k\pi x}{l}$$

Отсюда следует:

$$C_0 = -\frac{1}{l}\int_0^l \psi(\xi)\,d\xi$$

$$C_k = -\frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\cdot d\xi$$

$$A_k = -\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\cdot d\xi$$

после чего коэффициенты B_k и D_k находятся из соотношений (*).

Чтобы найти вышенаписанные интегралы, воспользуемся следующими известными разложениями, которые нам понадобятся ниже:

$$\frac{\mathrm{Ch}\,\gamma x}{\mathrm{Sh}\,\gamma\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2\gamma} - \frac{\gamma}{1+\gamma^2}\cos x + \frac{\gamma}{4+\gamma^2}\cos 2x - \frac{\gamma}{9+\gamma^2}\cos 3x + \ldots\right] \quad (2)$$

$$\frac{\mathrm{Sh}\,\gamma x}{\mathrm{Sh}\,\gamma\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1+\gamma^2} - \frac{2}{4+\gamma^2}\sin 2x + \frac{3}{9+\gamma^2}\sin 3x - \ldots\right] \quad (3)$$

Из которых, положив

$$\gamma = \frac{bl}{\pi} \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi(l-z)}{l}$$

следует:

$$\frac{\operatorname{Ch} b(l-z)}{\operatorname{Sh} bl} = \frac{1}{bl} + 2bl\left[\frac{1}{b^2l^2+\pi^2}\cos\frac{\pi z}{l} + \frac{1}{b^2l^2+4\pi^2}\cos\frac{2\pi z}{l} + \ldots\right]$$

$$\frac{\operatorname{Sh} b(l-z)}{\operatorname{Sh} bl} = 2\pi\left[\frac{1}{b^2l^2+\pi^2}\cdot\sin\frac{\pi z}{l} + \frac{2}{b^2l^2+4\pi^2}\sin\frac{2\pi z}{l} + \ldots\right]$$

На основании этих разложений имеем:

$$C_0 = -\frac{E}{Rl}$$

$$C_k = -2E\cdot G\cdot l\cdot\frac{1}{b^2l^2+k^2\pi^2}$$

$$A_k = -2E\cdot\frac{k\pi}{b^2l^2+k^2\pi^2}$$

Затем, на основании соотношений (*):

$$B_k = \frac{\mu}{n_k}A_k$$

$$D_k = \frac{\mu}{n_k}\cdot C_k - \frac{\mu^2-n_k^2}{n_k}\cdot\frac{C}{G}\cdot C_k = \frac{\mu}{n_k}C_k + \frac{2E}{Ll}\cdot\frac{1}{n_k}$$

ибо

$$\mu^2 - n^2{}_k = \frac{b^2l^2+k^2\pi^2}{a^2l^2} = \frac{b^2l^2+k^2\pi^2}{CL\cdot l^2}$$

Следовательно, будет:

$$V = E\cdot\frac{\operatorname{Sh} b(l-x)}{\operatorname{Sh} bl} - 2Ee^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{k\pi\sin\frac{k\pi x}{l}}{b^2l^2+k^2\pi^2}\left[\operatorname{Ch} n_k t + \frac{\mu}{n_k}\operatorname{Sh} n_k t\right]$$

$$I = \frac{GE}{b}\cdot\frac{\operatorname{Ch} b(l-x)}{\operatorname{Sh} bl} - \frac{E}{Rl}e^{-\frac{R}{L}}$$

$$-2GlEe^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\operatorname{Ch} n_k t + \frac{\mu}{n_k}\operatorname{Sh} n_k t\right]\frac{\cos\frac{k\pi x}{l}}{b^2l^2+k^2\pi^2}$$

$$-\frac{2E}{Kl}e^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{n_k}\operatorname{Sh} n_k t\cos\frac{k\pi x}{l}$$

т. е. самые формулы, которые мы имели в § 3.

§ **5.** Мы видели, что

$$n_k = \sqrt{\mu^2 - \frac{b^2}{a^2} - \frac{k^2\pi^2}{l^2}}$$

$$\mu^2 - \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{LG-CR}{2LC}\right)^2$$

следовательно, какова бы ни была величина $\mu^2 - \frac{b^2}{a^2}$, всегда найдется такое целое число k, начиная с которого n_k станет мнимым, — очевидно, что тогда гиперболические функции заменятся тригонометрическими.

Особенно прост тот случай, когда

$$\mu^2 - \frac{b^2}{a^2} = 0$$

иначе когда

$$LG - RC = 0$$

и в этом случае

$$n_k = \frac{k\pi}{al}\sqrt{-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Значит, будет:

$$\operatorname{Ch} n_k t = \cos\frac{k\pi t}{al}$$

$$\frac{\operatorname{Sh} n_k t}{n_k} = \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{al}\right)} \cdot \frac{e^{\frac{k\pi}{al}\sqrt{-1}} - e^{\frac{k\pi}{al}\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{al}{k\pi}\sin\frac{k\pi t}{al}$$

$$\mu = \frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$

и следовательно,

$$V = E\frac{\operatorname{Sh} b(l-x)}{\operatorname{Sh} bl} - 2Ee^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{k\pi}{b^2 l^2 + k^2\pi^2}\left[\cos\frac{k\pi t}{al} + \frac{\mu al}{k\pi}\sin\frac{k\pi t}{al}\right]\sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$I = \frac{Eb}{R}\cdot\frac{\operatorname{Ch} b(l-x)}{\operatorname{Sh} bl} - \frac{E}{Rl}e^{-\mu t} + \frac{2E}{L}\frac{a}{\pi}e^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi t}{al}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}$$

$$- 2EGle^{-\mu t}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\cos\frac{k\pi t}{al} + \frac{\mu al}{k\pi}\sin\frac{k\pi t}{al}\right)\frac{\cos\frac{k\pi x}{l}}{b^2 l^2 + k^2\pi^2}$$

Все суммы, входящие в эти формулы, находятся в конечном виде, пользуясь формулами:

$$2\cos\frac{k\pi t}{al}\sin\frac{k\pi x}{l} = \sin\frac{k\pi}{l}\left(x + \frac{t}{a}\right) - \sin\frac{k\pi}{l}\left(x - \frac{t}{a}\right)$$

$$2\sin\frac{k\pi t}{al}\cos\frac{k\pi x}{l} = \sin\frac{k\pi}{l}\left(x + \frac{t}{a}\right) + \sin\frac{k\pi}{l}\left(x - \frac{t}{a}\right)$$

$$2\sin\frac{k\pi t}{al}\sin\frac{k\pi x}{l} = \cos\frac{k\pi}{l}\left(x - \frac{t}{a}\right) - \cos\frac{k\pi}{l}\left(x + \frac{t}{a}\right)$$

$$2\cos\frac{k\pi t}{al}\cos\frac{k\pi x}{l} = \cos\frac{k\pi}{l}\left(x + \frac{t}{a}\right) + \cos\frac{k\pi}{l}\left(x - \frac{t}{a}\right)$$

и разложениями (2) и (3).

Мы не будем приводить графиков всех этих функций и их разрывов, так как вопрос этот подробно разобран в сочинении В. И. Коваленкова, а ограничимся лишь немногими примерами, чтобы показать сущность дела.

Возьмем формулу для V.

Сумма

$$\sum = 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k\pi}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} \left(\cos \frac{k\pi t}{al} \sin \frac{k\pi x}{l} + \frac{\mu al}{k\pi} \sin \frac{k\pi t}{al} \sin \frac{k\pi x}{l} \right)$$

входящая в состав функции V, разлагается на следующие четыре суммы:

$$\Sigma = S_1 + S_2 + \mu al (S_3 - S_4)$$

причем

$$S_1 = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k\pi}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi}{l} \left(x + \frac{t}{a} \right)$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k\pi}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi}{l} \left(x - \frac{t}{a} \right)$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} \cos \frac{k\pi}{l} \left(x - \frac{t}{a} \right)$$

$$S_4 = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} \cos \frac{k\pi}{l} \left(x + \frac{t}{a} \right)$$

Мы имеем разложение

$$\frac{1}{2} \frac{\operatorname{Sh} b(l-x)}{\operatorname{Sh} bl} = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k\pi}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

Это разложение имеет место для промежутка $0 < x < l$, вне же этого промежутка для значений $-l < x < 0$ ряд представляет функцию $-\varphi(x)$. Все прочие значения находятся на основании периодичности, т. е. равенства

$$\varphi(2l + x) = \varphi(x)$$

Таким образом функция, представляемая рядом, изображается графически чертежом (фиг. 1), причем в местах разрыва сумма ряда есть нуль.

Положим, что

$$0 < ct < l$$

причем $c = \frac{1}{a}$; тогда ряд S_1 представит функцию $\varphi(x + ct)$, т. е. надо всю ступенчатую кривую $\varphi(x)$ продвинуть параллельно самой себе влево на величину ct, тогда в промежутке от 0 до l ляжет участок кривой, обозначенной на фиг. 3 через $\varphi(x + ct)$.

Ряд S_2 представит функцию $\varphi(x-ct)$, т. е. надо всю кривую продвинуть вправо на величину ct, и в промежутке от 0 до l лягут части кривых, помеченные $\varphi(x-ct)$, причем на протяжении $0<x<ct$ значение функции будет отрицательное, равное $-\varphi(ct-x)$, как это и видно по чертежу.

Совершенно так же для сумм S_3 и S_4 мы будем исходить из разложения

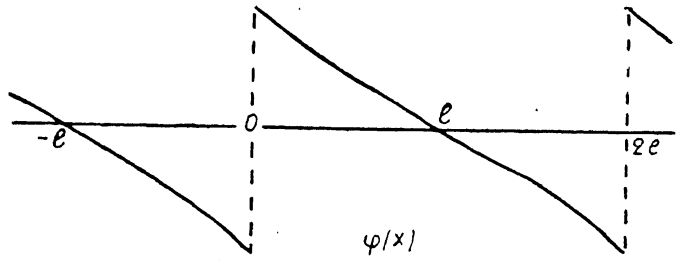
$$\frac{\operatorname{Ch} b(l-x)}{2bl\operatorname{Sh} bl}-\frac{1}{2b^2l^2}=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{b^2l^2+x^3\pi^3}\cos\frac{k\pi x}{l}=\psi(x)$$

Функция $\psi(x)$ изображена на фиг. 2.

Как видно, сама эта функция непрерывна, но в местах

$$x=0,\ 2l,\ 4l,\ \ldots,\ -2l,\ -4l,\ \ldots$$

она имеет угловые точки, т. е. разрывы первой своей производной.



Фиг. 1.

Совершенно подобно предыдущему, видим, что ряды S_3 и S_4 представляют функции $\psi(x-ct)$ и $\psi(x+ct)$ и части соответствующих кривых, лежащие в промежутке от 0 до l, помечены на фиг. 3 соответствующими значениями.

Из этого чертежа видно, что сумма Σ на участке $0<x<ct$ и на участке $ct<x<l$ выражается различно, а именно: для промежутка $0<x<ct$ будет

$$\Sigma_1=\varphi(ct+x)-\varphi(ct-x)+\mu al[\psi(ct-x)-\psi(ct+x)]$$

и для промежутка $ct<x<l$ будет

$$\Sigma_2=\varphi(ct+x)+\varphi(x-ct)+\mu al[\psi(x-ct)-\psi(x+ct]$$

но мы имеем:

$$2\operatorname{Sh} bl\cdot\varphi(ct+x)=\operatorname{Sh} b(l-x-ct)$$
$$2\operatorname{Sh} bl\cdot\varphi(ct-x)=\operatorname{Sh} b(l-ct+x)$$

следовательно

$$\operatorname{Sh} bl[\varphi(ct+x)-\varphi(ct-x)]=-\operatorname{Sh} bx\cdot\operatorname{Ch} b(l-ct)$$

Совершенно так же получим

$$\operatorname{Sh} bl\,[\psi(ct-x)-\psi\cdot(ct+x)]=\operatorname{Sh} bx\cdot\operatorname{Sh} b(l-ct)$$

следовательно

$$\Sigma_1=\frac{\operatorname{Sh} bx}{\operatorname{Sh} bl}[\operatorname{Sh} b(l-ct)-\operatorname{Ch} b(l-ct)]=-\frac{\operatorname{Sh} bx}{\operatorname{Sh} bl}\cdot e^{-b(l-ct)}=$$

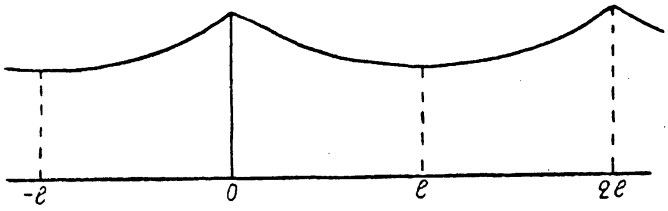
$$=-e^{-bl}\cdot e^{\mu t}\cdot\frac{\operatorname{Sh} bx}{\operatorname{Sh} bl}$$

но мы имели

$$\frac{V}{E}=\frac{\operatorname{Sh} b(l-x)}{\operatorname{Sh} bl}-e^{-\mu t}\cdot\Sigma_1=\frac{1}{\operatorname{Sh} bl}[\operatorname{Sh} b(l-x)-e^{-bl}\operatorname{Sh} bx]=e^{-bx}$$

Итак, для промежутка $0<x<ct$:

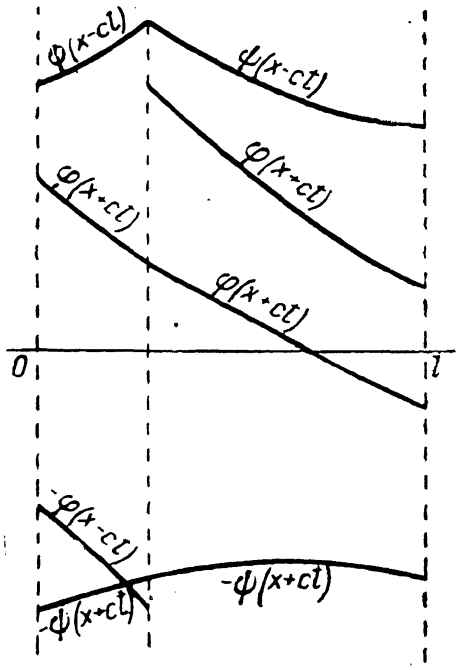
$$V=E\cdot e^{-bx}$$



Фиг. 2.

Для промежутка $ct<x<l$ имеем:

$$2\operatorname{Sh} bl\cdot\varphi(x-cl)=\operatorname{Sh} b(l-x+ct)$$
$$2\operatorname{Sh} bl\cdot\varphi(x+ct)=\operatorname{Sh} b(l-x-ct)$$



Фиг. 3.

Следовательно,

$$\operatorname{Sh} bl\cdot[\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)]=\operatorname{Sh} b(l-x)\cdot\operatorname{Ch} bct$$

Совершенно так же получим

$$\mu ab[\psi(x-ct)-\psi(x+ct)]=\frac{\operatorname{Sh} b(l-x)}{\operatorname{Sh} bl}\cdot\operatorname{Sh} bct$$

следовательно будет

$$\Sigma_2=\frac{\operatorname{Sh} b(l-x)}{\operatorname{Sh} bl}\cdot e^{bct}=e^{\mu t}\cdot\frac{\operatorname{Sh} b(l-x)}{\operatorname{Sh} bl}$$

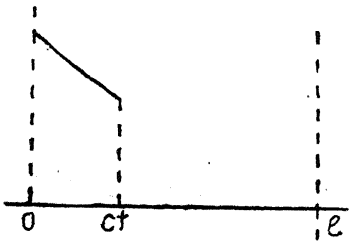
и

$$V=0$$

Таким образом V определяется такою разрывною функцией:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{для } 0 < x < ct & V = E \cdot e^{-bx} \\ \text{» } ct < x < l & V = 0 \end{array}\right\}$$

представленной на фиг. 4.



Фиг. 4.

Из уравнения

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = RI + L\frac{\partial I}{\partial t}$$

следует, что для промежутка

$$0 < x < ct$$

будет

$$I = H \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{Eb}{L} \cdot e^{-bx} = H \cdot e^{-\mu t} + \frac{Eb}{L} \cdot e^{-bx}$$

причем H есть произвольная функция от x, которая определяется из условия, что при $t = 0$ должно быть

$$I(x, 0) = 0$$

следовательно

$$H = -\frac{Eb}{L} \cdot e^{-bx}$$

Таким образом будет

$$I = \frac{Eb}{L} \cdot e^{-bx}[1 - e^{-\mu t}]$$

Для промежутка же

$$ct < x < l$$

будет

$$I = 0$$

следовательно $I(x, t)$ представляется такою разрывною функцией:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{для } 0 < x < ct & I = \frac{Eb}{L} \cdot e^{-bx}[1 - e^{-\mu t}] \\ \text{» } ct < x < l & I = 0 \end{array}\right\}$$

Заметим здесь же, что скорость, с которою бежит место разрыва, есть

$$c = \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Совершенно подобным образом найдутся выражения V и I для значений t, при которых

$$l < ct < 2l$$

Затем — для значений t, при которых

$$2l < ct < 3l$$

и т. д. На этих подробностях останавливаться не будем, отсылая к сочинению проф. В. И. Коваленкова.

§ **6.** Полученные в §§ 4 и 5 результаты показывают наглядно, что, несмотря на разрывность функций $V(x, t)$ и $I(x, t)$, система уравнений (1) и следующее из нее дифференциальное уравнение (4) равносильны, поэтому, вместо сказанной системы, можно пользоваться этим уравнением и соответствующими граничными и начальными условиями.

Является еще один вопрос: Ваши и Поссе, чтобы провести граничные условия к однородным, положив

$$V = v + \varphi(x)$$

определяют функцию $\varphi(x)$ так, чтобы она удовлетворяла дифференциальному уравнению (4).

В том частном случае, когда при $x = 0$ должно быть $V = E$, эта замена выгодна и в смысле простоты выкладок, но не следует думать, что она единственная и что условие, чтобы функция $\varphi(x)$ удовлетворяла уравнению (4), есть необходимое.

Функцию $\varphi(x)$ можно брать как угодно, важно лишь, чтобы при $x = 0$ было $\varphi(0) = E$ и при $x = l$ было $\varphi(l) = 0$, — разница будет только в том, что уравнение, коим определяется v, не будет однородным, но это обстоятельство не представляет никаких существенных затруднений.

На рассмотренном примере все это выясняется весьма просто.

Очевидно, что простейшая функция, принимающая при $x = 0$ и $x = l$ вышеуказанные значения, есть

$$\varphi(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) E$$

поэтому полагаем

$$V = v + \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot E$$

тогда функция v будет определяться дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial v}{\partial t} - b^2 v = b^2 \left(1 - \frac{x}{l}\right) E$$

и условиями:

граничными:

при $x = 0$ должно быть $v = 0$
» $x = l$ » » $v = 0$

начальными: при $t = 0$ должно быть

$$v = \left(1 - \frac{x}{l}\right) E; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

применяя общий способ разыскания «вынужденных» колебаний, полагаем

$$v = v_1 + v_2$$

и определяем этим функции так, чтобы v_1 представляло свободные колебания, v_2 — вынужденные. Для этого необходимо, чтобы эти функции определялись следующим образом.

Функция v_1:

1°) *дифференциальным уравнением без последнего члена*, т. е. уравнением

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial v_1}{\partial t} - b^2 v_1 = 0$$

2°) *граничными условиями*:

при $x = 0$ должно быть $v_1 = 0$
» $x = l$ » » $v_1 = 0$

3°) *начальными условиями*: при $t = 0$ должно быть

$$v_1 = \left(1 - \frac{x}{l}\right) E, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} = 0$$

Функция v_2 определяется:

1°) *дифференциальным уравнением с последним членом*:

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial v_2}{\partial t} - b^2 v_2 = b^2 \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot E \qquad (*)$$

2°) *граничными условиями*:

при $x = 0$ должно быть $v_2 = 0$
» $x = l$ » » $v_2 = 0$

3°) *начальными условиями*: при $t = 0$ должно быть

$$v_2 = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} = 0$$

Поступая подобно тому, как указано в § 3, ищем сперва v_1 под видом суммы

$$v_1 = \sum_{k=1}^{k=\infty} T_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

и получаем

$$v_1 = e^{-\mu t} \sum_{k=1}^{k=\infty} (A_k \operatorname{Ch} n_k t + B_k \operatorname{Sh} n_k t) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

при прежних обозначениях, т. е.

$$\mu = \frac{h}{a^2} = \frac{CR + LG}{2CL}$$

$$n_k = \frac{1}{a^2 l} \sqrt{h^2 l^2 - a^2 (b^2 l^2 + k^2 \pi^2)} = \sqrt{\mu^2 - \frac{b^2}{a^2} - \frac{k^2 \pi^2}{a^2 l^2}}$$

Затем, для определения коэффициентов A_k, B_k, по начальным условиям имеем равенства:

$$-\left(1 - \frac{x}{l}\right) E = \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$$0 = \sum_{k=1}^{k=\infty} (-\mu A_k + B_k n_k) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

которые дают:

$$A_k = -\frac{2E}{l} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = -\frac{2E}{k\pi}$$

$$B_k = -\frac{2}{k\pi} \cdot \frac{\mu}{n_k}$$

Таким образом будет

$$v_1 = -\frac{2E}{\pi} \cdot e^{-\mu t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\operatorname{Ch} n_k t + \frac{\mu}{n_k} \operatorname{Sh} n_k t\right) \frac{\sin \frac{k\pi x}{l}}{k}$$

Функцию v_2 ищем под видом суммы

$$v_2 = \sum_{k=1}^{k=\infty} S_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

тогда, представив вторую часть уравнения (*) под видом суммы

$$b^2 \left(1 - \frac{x}{l}\right) E = b^2 E \sum_{k=1}^{k=\infty} H_k(t) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} = \frac{b^2 E}{\pi} \sum \frac{2}{k} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

видим, что функции S_k определяются уравнениями

$$-\frac{k^2 \pi^2}{l^2} S_k - a^2 S_k'' - 2h S_k' - b^2 S_k = \frac{2}{k\pi} b^2 E \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

и условиями: при $t = 0$ должно быть

$$S_k = 0; \quad S_k' = 0$$

Отсюда следует

$$S_k = e^{-\mu t}[M_k \operatorname{Ch} n_k t + N_k \operatorname{Sh} n_k t] - \frac{2Eb^2 l^2}{k\pi} \cdot \frac{1}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2}$$

причем

$$M_k = \frac{2E}{k\pi} \cdot \frac{b^2 l^2}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2}$$

$$N_k = \frac{\mu}{n_k} \cdot M_k$$

Таким образом будет

$$v = -\frac{2E}{\pi} b^2 l^2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{\sin \frac{k\pi x}{l}}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} +$$

$$+ \frac{2E}{\pi} b^2 l^2 e^{-\mu t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\operatorname{Ch} n_k t + \frac{\mu}{n_k} \operatorname{Sh} n_k \right) \frac{1}{k\pi} \cdot \frac{\sin \frac{k\pi x}{l}}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2}$$

Но мы имели

$$V = \left(1 - \frac{x}{l}\right) E + v_1 + v_2$$

Заметив, что

$$\left(1 - \frac{x}{l}\right) E = \frac{2E}{\pi} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

получим

$$V = 2E \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k\pi}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$- 2Ee^{-\mu t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\operatorname{Ch} n_k t + \frac{\mu}{n_k} \operatorname{Sh} n_k t \right) \frac{k\pi \sin \frac{k\pi x}{l}}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2}$$

а так как мы имели разложение

$$2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k\pi}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi x}{l} = \frac{\operatorname{Sh} b(l - x)}{\operatorname{Sh} bl}$$

то будет

$$V = E \frac{\operatorname{Sh} b(l - x)}{\operatorname{Sh} bl} - 2Ee^{-\mu t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\operatorname{Ch} n_k t + \frac{\mu}{n_k} \operatorname{Sh} n_k t \right) \frac{k\pi \sin \frac{k\pi x}{l}}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2}$$

т. е. та самая формула (18), которую мы имели в §§ 3 и 4.

Отсюда ясно, что при решении этой задачи, за функцию $\varphi(x)$ можно брать просто линейную функцию x, выбирая ее так, чтобы граничные условия стали однородными. Таким выбором во многих случаях выкладки значительно упрощаются.

§ 7. Мы нарочно остановились столь подробно на рассмотрении простейшего случая нашей задачи, ибо на нем с полной ясностью обнаруживаются все особенности ее решения, из которых наиболее существенные следующие две:

1°) предложенную систему двух уравнений первого порядка, несмотря на разрывность решений, можно заменять одним уравнением второго порядка;

2°) чтобы сделать граничные условия однородными, нет надобности брать функции переменной x, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям задачи, можно брать любую функцию, делающую граничные условия однородными, проще всего — линейную.

§ 8. После этого разбора решение задачи, рассмотренной Поляшеком, не представляет никаких затруднений.

Исключив из предложенной системы (1) неизвестную функцию I, получаем для определения V уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial V}{\partial t} - b^2 V = 0$$

Граничные условия, как указано в § 1, суть: при $t = 0$ должно быть

$$V(x, 0) = 0; \quad \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_0 = 0$$

Чтобы сделать граничные условия однородными, полагаем

$$V = v + \left(1 - \frac{x}{l}\right) E e^{i\omega t}$$

тогда для определения неизвестной функции v служат:

1°) *дифференциальное уравнение*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial v}{\partial t} - b^2 v = \left(1 - \frac{x}{l}\right) E (b^2 - a^2 \omega^2 + 2h\omega i) e^{i\omega t}$$

2°) *граничные условия*:

при $x = 0$ должно быть $v = 0$
» $x = l$ » » $v = 0$

3°) *начальные условия:* при $t = 0$ должно быть

$$v = \left(1 - \frac{x}{l}\right) E; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -Ei\omega\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

Полагаем по общему правилу:

$$v = v_1 + v_2$$

и определяем функции v_1 и v_2 так, чтобы v_1 представляла свободные колебания, функция v_2 — вынужденные, тогда эти функции определяются:

Функция v_1:

1°) *дифференциальным уравнением без последнего члена*, т. е.

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial v_1}{\partial t} - b^2 v_1 = 0$$

2°) *граничными условиями*:

при $x = 0$ должно быть $v_1 = 0$
» $x = l$ » » $v_1 = 0$

3°) *начальными условиями*: при $t = 0$ должно быть

$$v_1 = -\left(1 - \frac{x}{l}\right) E; \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} = -Ei\omega\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

Функция v_2 определяется:

1°) *дифференциальным уравнением с последним членом*:

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial v_2}{\partial t} - b^2 v_2 = \left(1 - \frac{x}{l}\right) E (b^2 - a^2 \omega^2 + 2hi\omega) e^{i\omega t} \quad (*)$$

2°) *граничными условиями*:

при $x = 0$ должно быть $v_2 = 0$
» $x = l$ » » $v_2 = 0$

3°) *начальными условиями*: при $t = 0$ должно быть

$$v_2 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} = 0$$

Если ограничиваться только вещественною частью наших функций, как это и следует по смыслу физической задачи, то, как видно, функция v_1

определяется тем же самым уравнением и теми же самыми условиями, как в § 6, следовательно будет

$$v_1 = -\frac{2E}{} e^{-\mu t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\operatorname{Ch} n_k t + \frac{\mu}{n_k} \operatorname{Sh} n_k t \right) \frac{1}{k} \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}$$

Для нахождения функции v_2 полагаем

$$v_2 = \sum_{k=1}^{k=\infty} S_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

и, представив сперва вторую часть уравнения (*) под видом

$$E(b^2 - a^2\omega^2 + 2hi\omega)\left(1 - \frac{x}{l}\right) e^{i\omega t} = \sum_{k=1}^{k=\infty} H_k(t) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}$$

так что

$$H_k(t) = \frac{2E}{k\pi}(b^2 - a^2\omega^2 + 2hi\omega) e^{i\omega t}$$

имеем для определения S_k уравнение

$$-\frac{k^2\pi^2}{l^2} S_k - a^2 S_k'' - 2hS_k' - b^2 S_k = H_k(t)$$

и условия: при $t = 0$ должно быть

$$S_k'(0) = 0; \quad S_k''(0) = 0$$

Отсюда следует

$$S_k = e^{-\mu t}[M_k \operatorname{Ch} n_k t + N_k \operatorname{Sh} n_k t] + P_k \cos \omega t + Q_k \sin \omega_k t$$

причем, на основании начальных условий, будет:

$$M_k = -P_k$$
$$N_k = -\frac{1}{n_k}[P_k + \omega Q_k]$$

и величины P_k и Q_k будут:

$$P_k = -\frac{2E}{k\pi} \frac{(b^2 - a^2\omega^2)\left(b^2 - a^2\omega^2 + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\right) + 4h^2\omega^2}{\left(b^2 - a^2\omega^2 + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\right)^2 + 4h^2\omega^2}$$

$$Q = \frac{4E}{l^2} h\omega k\pi \cdot \frac{1}{\left(b^2 - a^2\omega^2 + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\right)^2 + 4h^2\omega^2}$$

Таким образом будет

$$V = \left(1 - \frac{x}{l}\right) E \cos \omega t + v_1 + v_2$$

причем v_1 и v_2 определяются приведенными выше формулами. Не выписывая результата подстановки вместо v_1 и v_2 их значений, заметим, что в выражении V можно будет произвести упрощение подобно тому, как в § 6.

После того как V найдено, функции $I(x, t)$ находятся совершенно подобно тому, как в § 6.

Из изложенного ясно, что рассматриваемый случай распространения тока по кабелю не требует никаких иных математических приемов, кроме разложения в тригонометрические ряды и интегрирования линейного уравнения с последним членом, каковые выполняются по правилам, изложенным в главе VII моего курса «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах», в которой излагается способ определения «вынужденных» колебаний струн и стержней, а так как вопрос о распространении тока по кабелю приводит к рассмотрению того же самого уравнения, которым определяются колебания струны в среде, сопротивление коей пропорционально первой степени скорости, то метода, в указанном сочинении изложенная, и применяется без всяких изменений, как то и сказано в заключении главы: «Понятно, что изложенный способ применим к исследованию подобного рода вопросов, относящихся к распространению тепла или электричества, к колебанию балок и т. п.».

Мы остановились в этой статье так подробно на изложенном решении, чтобы дать естественное дополнение к упомянутому курсу.

§ **9.** Уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial v}{\partial t} - b^2 V = 0$$

введением новой неизвестной функции и новых переменных независимых приводится к более простому виду, в котором оно часто и рассматривается.

Наиболее обычное приведение такое: полагают

$$V = e^{kt} U$$

и выбирают k так, чтобы в преобразованном уравнении

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - 2(a^2 k + h) \frac{\partial U}{\partial t} - (b^2 + a^2 k^2 + 2hk) U = 0 \qquad (1)$$

пропал или член, содержащий $\frac{\partial U}{\partial t}$, или член, содержащий $-U$.

В первом случае надо взять

$$k = -\frac{h}{a^2} = -\mu$$

тогда будет

$$b^2 + a^2 k^2 + 2hk = b^2 - \frac{h^2}{a^2}$$

но

$$b^2 = RG; \quad h = \frac{CR + LG}{2}; \quad a^2 = LC$$

так что

$$b^2 - \frac{h^2}{a^2} = -\frac{(CR - LC)^2}{4LG}$$

есть, очевидно, величина отрицательная, которую мы обозначим через $-b_1^2$, тогда рассматриваемое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - b_1^2 U = 0$$

Разделив на b_1^2 и полагая затем

$$b_1 x = x_1 \quad \text{и} \quad \frac{b_1 t}{a} = t_1$$

получим уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t_1^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + U$$

или, опуская значки,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U \tag{2}$$

Это есть первый вид, в котором часто пишется основное уравнение рассмотренной задачи.

Другой вид получается, если выбрать k так, чтобы было

$$a^2 k^2 + 2hk + b^2 = 0$$

иначе

$$k = -\frac{h}{a^2} \pm \frac{1}{a}\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - b^2}$$

Но мы видели, что

$$\frac{h^2}{a^2} - b^2 = \frac{(CR - LG)^2}{4LC}$$

поэтому будет

$$k = -\frac{CR + LG}{2LC} \pm \frac{CR - LG}{2LC}$$

т. е.

$$k_1 = -\frac{G}{C} \quad \text{и} \quad 2(a^2 k_1 + h) = CR - LG$$

$$k_2 = -\frac{R}{L} \quad \text{и} \quad 2(a^2 k_2 + h) = LG - CR$$

это показывает, что всегда можно взять то значение k, при котором величина

$$a^2 k + h > 0$$

обозначая эту величину через $2h_1$, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2h_1 \frac{\partial U}{\partial t}$$

разделив на h_1 и полагая

$$x = \frac{a}{h_1} x_1; \quad t = \frac{a^2}{h_1} t_1$$

получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t_1^2} + 2\frac{\partial U}{\partial t_1}$$

или, опуская значки,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\frac{\partial U}{\partial t} \tag{3}$$

а это уравнение и есть уравнение колебательного движения струны в среде, оказывающей сопротивление, пропорциональное первой степени скорости, когда же это уравнение относится к распространению электричества, то его обыкновенно называют «уравнением телеграфистов».

Таким образом для перехода от уравнения (4) к уравнению (2) или (3) служит подстановка

$$V = e^{kt} \cdot U$$

Очевидно, что если для неизвестной функции V было граничное условие: при $x = 0$ должно быть $V = E$, то для функции U оно будет $U = Ee^{-kt}$, а если бы оно было $V = -Ee^{i\omega t}$, то для U получилось бы

$$U = Ee^{(-k+i\omega)t}$$

Это показывает, что существенной разницы между задачею, рассмотренною Поссе, и задачею Поляшека нет, и если бы при решении первой задачи сперва привести основное уравнение к одному из простейших видов его, то решение второй могло бы быть получено простою заменою буквы k на $-k + i\omega$ и отделением вещественной части от мнимой. Мы ограничимся этим замечанием, соответствующих же выкладок производить не будем, так как после изложенного выше они очевидны.

НАГРЕВАНИЕ МАСЛЯНОГО КАБЕЛЯ ПРИ КОРОТКОМ ЗАМЫКАНИИ

Сообщение акад. А. Н. Крылова на заседании группы математики 20 марта 1936 г.

§ 1. Завод «Севкабель» обратился ко мне за указаниями о способе расчета нагревания масляного кабеля в течение непродолжительного времени (около 3 секунд), следующего за коротким замыканием.

Я указал на обычный прием решения подобного рода задач по методе фундаментальных функций, в данном случае Бесселевых, применяя для определения коэффициентов разложений, удовлетворяющих начальным условиям, способ наименьших квадратов, чтобы избежать трудности в представлении этих коэффициентов в виде определенных интегралов.

Некоторые предварительные расчеты, произведенные инженерами завода, давали основание полагать, что в разложениях достаточно брать восемь первых членов, а тогда вычисление по методе наименьших квадратов, производя его на три знака логарифмической линейкой, взяв 48 условных уравнений у привычного к подобного рода вычислениям астронома или геодезиста, потребует около 16—20 часов работы.

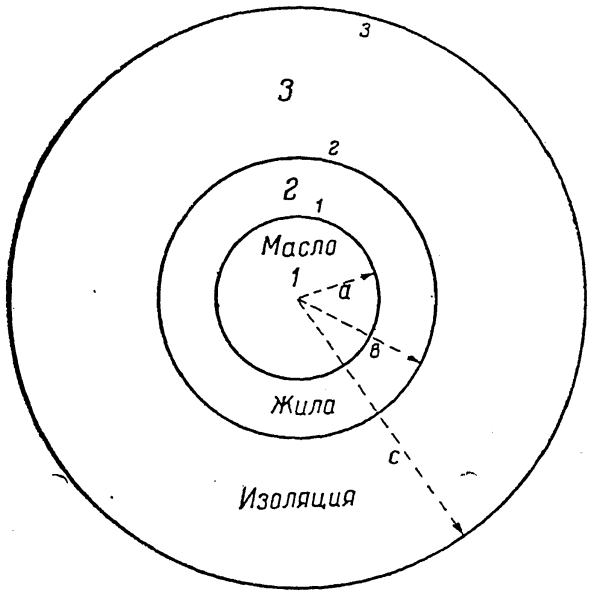
Но затем у меня возникло сомнение, не встретятся ли при решении этой задачи такие затруднения, при которых обычный способ окажется неприменимым, поэтому я попробовал развить все необходимые общие формулы, не производя самых численных вычислений. Оказалось, что такого рода затруднения, действительно, встречаются и что, строго говоря, те функции, которыми приходится пользоваться, не являются фундаментальными, ибо они между собою не ортогональны, а нахождение «весов», помощью которых достигается ортогональность, весьма затруднительно, поэтому практически возможно лишь получить, пользуясь методою наименьших квадратов, приближенные разложения, наметив в буквенной форме общий ход вычислений, как о том указывается ниже.

В виду этой особенности поставленной задачи, я и позволяю себе доложить ее математической группе Академии Наук, в надежде, что кто-либо

из членов группы укажет более изящный способ решения, а главное, требующий меньшей затраты вычислительной работы.

Может оказаться, что эта задача уже решена, но я не имел ни возможности, ни времени рыться в необъятной и мне весьма мало известной электротехнической литературе.

§ 2. Заданное поперечное сечение кабеля изображено на схематическом чертеже (фиг. 1). Напряжение весьма высокое (100 000 V), но сечение кабеля таково, что при нормальной силе тока устанавливается такое тепловое состояние кабеля, которое не вызывает его порчи.



Фиг. 1.

Не то будет при случайном коротком замыкании: ток почти мгновенно достигнет громадной силы (свыше 10 000 A), между тем автоматические выключатели требуют около 3 секунд времени, чтобы выключить генератор, отсюда — задача об определении теплового состояния кабеля в любой момент времени после короткого замыкания, причем время это не превышает 3 секунд.

Таким образом мы сделаем следующее *основное допущение:* сила тока в жиле устанавливается гораздо быстрее, нежели происходит нагревание кабеля, поэтому принимаем, что во все время процесса сила тока постоянная, а значит, с момента $t = 0$ происходит *постоянное* на каждую единицу длины кабеля выделение тепла в жиле и с этого же момента происходит усиленная, против нормальной, отдача тепла маслу и изоляции.

Кроме того, делается допущение, что все термические элементы (теплоемкость, теплопроводность, теплоотдача) от температуры не зависят и остаются постоянными. Таково задание; в какой мере оно соответствует действительности, — мне неизвестно.

Систему единиц берем CGS. Температуру выражаем в градусах Цельсия, причем за начальный уровень будем принимать не 0° (таяние льда), а температуру почвы, ибо это удобнее для вычисления. Теплоемкость будем выражать в малых калориях, относя ее к единице массы, т. е. грамму, прочие единицы будут:

Теплопроводность . . . . . $\frac{\text{М. калория}}{\text{см}^3} \cdot \frac{1}{\text{гр. С°}}$

Теплоотдача . . . . . $\frac{\text{М. калория}}{\text{см}^2} \cdot \frac{1}{\text{гр. С°}}$

Плотность . . . . . $\frac{\text{грамм}}{\text{см}^3}$.

Соответственно схеме сечения кабеля, примем следующие обозначения термических элементов разных средин:

Плотность	δ_i	$(i = 1, 2, 3)$
Теплоемкость	K_i	»
Теплопроводность	η_i	»
Теплоотдача	H_i	»
Постоянная	$k_i = \frac{\eta_i}{K_i \cdot \delta_i}$	»
Постоянная	$h_i = \frac{H_i}{K_i \delta_i}$	»

для постоянной h_i указатель i относится к соответствующей поверхности раздела как помечено на схеме, для прочих постоянных — к соответствующей среде.

§ **3.** Обозначим через $v_i(r, t) = v_i$ $(i = 1, 2, 3)$ — температуру в момент времени t в слое, лежащем в расстоянии r от центра сечения кабеля, беря значок i соответственно среде.

Поставленная задача сводится к следующей математической: требуется определить функции v_1, v_2, v_3, удовлетворяющие следующим дифференциальным уравнениям, граничным и начальным условиям:

1°) **Функция** $v_1 = v_1(r, t)$.

Дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = k_1 \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} \right) \tag{1,1}$$

Граничные условия:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{при } r = 0 \text{ должно быть} & v_1(0, t) = \text{конечной величине} \\ \text{» } r = a \text{ » » } & \left(-\frac{\partial v_1}{\partial r}\right)_{r=a} = h_1 [v_2(a, t) - v_1(a, t)] \end{array}\right\} \text{при всяком значении } t \tag{1,2}$$

Начальное условие: для $0 \leqq r \leqq a$ должно быть при $t = 0$:

$$v_1(r, 0) = \tau_0 \tag{1,3}$$

где τ_0 есть температура масла в момент $t = 0$.

2°) **Функция** $v_2(r, t)$.

Дифференциальное уравнение получается учитывая нагревание жилы током. Пусть количество тепла, выделяемого током в 1 секунду во всяком отрезке кабеля, длиною в 1 см, есть Q, тогда в цилиндрическом слое между r и $r+dr$ будет выделяться в течение времени dt количество тепла

$$\frac{2\pi r}{\pi(b^2-a^2)} \cdot Q \cdot dr \cdot dt$$

и *дифференциальное уравнение* для v_2 будет

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = k_2\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_2}{\partial r}\right) + \frac{2Qr}{K_2(b^2-a^2)} \tag{2,1}$$

Плотность тока в жиле принимается постоянной.

Граничные условия:

$$\left.\begin{array}{l} \text{при } r=a \text{ должно быть } \left(-\frac{\partial v_2}{\partial r}\right)_{r=a} = h_1[v_2(a,t)-v_1(a,t)] \\ \text{» } r=b \text{ » » } \left(\frac{\partial v_2}{\partial r}\right)_{r=b} = h_2[v_2(b,t)-v_3(b,t)] \end{array}\right\} \text{при всяком значении } t \tag{2,2}$$

Начальное условие: при $t=0$ и при всяком r, таком, что

$$a \leqq r \leqq b$$

должно быть

$$v_2(r, 0) = \tau_2 \tag{2,3}$$

где τ_2 — температура жилы.

Функция $v_3(r, t)$.

Дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} = k_3\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_3}{\partial r}\right) \tag{3,1}$$

Граничные условия:

$$\left.\begin{array}{l} \text{при } r=b \text{ должно быть } \left(\frac{\partial v_3}{\partial r}\right)_{r=b} = h_2[v_2(b,t)-v_3(b,t)] \\ \text{» } r=c \text{ » » } \left(\frac{\partial v_3}{\partial r}\right)_{r=c} = h_3[v_3(c,t)-\tau_4] \end{array}\right\} \text{при всяком значении } t \tag{3,2}$$

Здесь τ_4 есть температура почвы, которую будем считать постоянной и примем за нуль шкалы, считая все прочие температуры от этого услов-

ного нуля, ибо к величинам $v_i (i = 1, 2, 3)$ можно придавать любую *заданную* постоянную.

Начальное условие: при $t = 0$ и для r такого, что

$$b \leqq r \leqq c$$

должно быть

(3,3) $$v_3(r, 0) = f(r)$$

где $f(r)$ — известная функция для всех значений r таких, что

$$b \leqq r \leqq c$$

§ 4. Решение начинаем с определения начального теплового состояния кабеля, когда по нему идет ток нормальной силы и в жиле на 1 см длины в 1 секунду развивается количество тепла q и установилось такое тепловое состояние, что температура масла и жилы одинаковы.

В этом начальном установившемся состоянии будет:

(4) $$\begin{cases} v_1 = v_2(a) = \text{постоянной} \\ v_3 = f(r) \end{cases}$$

Тепловой поток через любой слой изоляции — постоянный и равен q, таким образом имеем уравнение

(5) $$2\pi r \cdot \gamma_3 \frac{\partial v_3}{\partial r} = q$$

Очевидно, что сквозь поверхность $r = a$ раздела масла и жилы тепловой поток равен нулю и все развивающееся в жиле тепло уходит сквозь поверхность $r = b$ в изоляцию, так что имеет место равенство

(6) $$2\pi b \cdot H_2 (v_2 - v_3(b)) = q$$

Так как тепловое состояние установившееся, то v_3 от времени t не зависит и есть функция только переменной r, определяемая уравнением

(7) $$\frac{d^2 v_3}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_3}{dr} = 0$$

и граничными условиями:

(8) $$\begin{cases} \text{при } r = b \text{ должно быть } v_3 = v_2(b) \\ \text{» } r = c \text{ » » } 2\pi c H_3 [v_3(b) - \tau_4] = q \end{cases}$$

причем, как уже сказано, температуру почвы τ_4 можно принимать за нуль.

Из уравнения (7) следует:

$$r\frac{dv_3}{dr} = G_1 \tag{9}$$

$$v_3 = G_1 \log r + G_2 = f(r) \tag{10}$$

причем G_1 и G_2 — произвольные постоянные.

Постоянная G_1 определяется из условия (5), и мы получаем

$$G_1 = \frac{q}{2\pi\eta_3} \tag{11}$$

Постоянная G_2 определяется из условия (8):

$$v_3(c) = \tau_4 + \frac{q}{2\pi c H_3} = G_1 \log c + G_2$$

и при $\tau_4 = 0$ имеем

$$G_2 = \frac{q}{2\pi}\left[\frac{1}{cH_3} - \frac{1}{\eta_3}\log c\right] \tag{12}$$

Из равенства (6) находится перепад температуры между жилой и изоляцией:

$$v_2 - v_3(c) = \frac{q}{2\pi b H_2} \tag{13}$$

и отсюда

$$v_1 = v_2 = G_1 \log b + G_2 + \frac{q}{2\pi b H_2} \tag{14}$$

После подстановки получаем:

$$\begin{aligned} v_1 = v_2 &= \frac{q}{2\pi}\left[\frac{1}{\eta_3}\log\frac{b}{c} + \frac{1}{cH_3} + \frac{1}{bH_2}\right] \\ v_3 &= \frac{q}{2\pi}\left[\frac{1}{\eta_3}\log\frac{r}{c} + \frac{1}{cH_3}\right] = f(r) \end{aligned} \tag{15}$$

§ **5.** Заменив в формуле (15) величину q через Q, получим то предельное значение функций v_1, v_2, v_3, которое они получают при $t = \infty$, но эти предельные значения имеют лишь чисто математический смысл, физического же смысла не имеют, ибо они получаются в предположении, что все термические постоянные сохраняют свои значения, *не зависимые* от температуры, сколь бы эта температура высока ни была, между тем эта температура окажется столь высока, что весь кабель сгорит и обратится в прах гораздо раньше, нежели v_1, v_2, v_3 достигнут своих предельных значений.

§ **6.** Переходя к определению неустановившегося теплового состояния кабеля, мы начнем с разыскания частных решений уравнений § 3, чтобы в дальнейшем иметь дело лишь с уравнениями однородными, т. е. без свободного члена.

Полагая

$$v_1(r, t) = u_1(r, t) + V_1(r)$$
$$v_2(r, t) = u_2(r, t) + V_2(r)$$
$$v_3(r, t) = u_3(r, t) + V_3(r)$$

мы видим, что величины $V_1(r)$, $V_2(r)$, $V_3(r)$ определяются обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d^2V_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV_1}{dr} = 0$$
$$k_2\left[\frac{d^2V_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV_2}{dr}\right] + \frac{2Q}{K_2(b^2 - a^2)} \cdot r = 0 \tag{16}$$
$$\frac{d^2V_3}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV_3}{dr} = 0$$

к которым мы присоединим граничные условия:

для $V_1(r)$: при $r = 0$ должно быть: $V_1(0) =$ конечной величине

$$\text{» } V_2\text{: » } r = a \text{ » » } \left(\frac{\partial V_1}{\partial r}\right)_{r=a} + h_1[V_2(a) - V_1(a)] = 0$$
$$\text{» } V_2\text{: » } r = a \text{ » » } \left(\frac{\partial V_2}{\partial r}\right)_{r=a} + h_1[V_2(a) - V_1(a)] = 0$$
$$\text{» } r = b \text{ » » } \left(\frac{\partial V_2}{\partial r}\right)_{r=b} - h_2[V_2(b) - V_3(b)] = 0 \tag{17}$$
$$\text{» } V_3\text{: » } r = b \text{ » » } \left(\frac{\partial V_3}{\partial r}\right)_{r=b} - h_2[V_2(b) - V_3(b)] = 0$$
$$\text{» } r = c \text{ » » } \left(\frac{\partial V_3}{\partial r}\right)_{r=c} - h_3[V_3(c) - \tau_4] = 0$$

причем можно брать $\tau_4 = 0$.

При таких граничных условиях для V_1, V_2, V_3 граничные условия для функций $u_1(r, t)$, $u_2(r, t)$, $u_3(r, t)$ будут того же вида, как для $v_1(r, t)$ $v_2(r, t)$, $v_3(r, t)$, начальные же условия изменятся, как о том будет сказано ниже.

Из уравнений (16) следует:

$$(18)\qquad \begin{cases} V_1 = L_1 \log r + L_2 \\ V_2 = -\dfrac{mr^3}{9} + L_3 \log r + L_4 \\ V_3 = L_5 \log r + L_6 \end{cases}$$

причем L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6 — произвольные постоянные и

$$(19)\qquad m = \frac{2Q}{K_2 k_2 (b^2 - a^2)} = \frac{2Q \cdot \delta_2}{\eta_2 \cdot (b^2 - a^2)}$$

Граничные условия доставляют следующие значения постоянных:

$$(20)\qquad \begin{aligned} L_1 &= 0 \\ L_2 &= \frac{ma^3 - mb^3}{3} \cdot \left[-1 + \frac{1}{bh_2} + \frac{1}{ch_3} + \log \frac{b}{c} \right] + \frac{ma^3}{3} \log \frac{a}{b} \\ L_3 &= \frac{ma^3}{3} \\ L_4 &= \frac{ma^3 - mb^3}{3} \left[\frac{1}{bh_2} + \frac{1}{ch_3} + \log \frac{b}{c} \right] + \frac{mb^3}{3} - \frac{ma^3}{3} \log b \\ L_5 &= \frac{1}{3}(ma^3 - mb^3) \\ L_6 &= \frac{1}{3}(ma^3 - mb^3) \left(\frac{1}{ch_3} - \log c \right) \end{aligned}$$

На основании этих значений имеем:

$$(21)\qquad \begin{aligned} V_1 &= \frac{ma^3 - mb^3}{3} \left[-1 + \frac{1}{bh_2} + \frac{1}{ch_3} + \log \frac{b}{c} \right] + \frac{ma^3}{3} \log \frac{a}{b} \\ V_2 &= \frac{ma^3}{3} \log \frac{r}{b} + \frac{ma^3 - mb^3}{3} \left[\frac{1}{bh_2} + \frac{1}{ch_3} + \log \frac{b}{c} \right] + \frac{mb^3}{3} \\ V_3 &= \frac{ma^3 - mb^3}{3} \left[\log \frac{r}{c} + \frac{1}{ch_3} \right] \end{aligned}$$

Эти частные решения и надо прибавить к решениям $u_1(r, t)$, $u_2(r, t)$, $u_3(r, t)$, определяемым:

однородными уравнениями:

$$(22)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= k_1\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r}\right) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= k_2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r}\right) \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} &= k_3\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_3}{\partial r}\right) \end{aligned}$$

граничными условиями:

$$(23)\qquad \left.\begin{array}{ll} \text{при } r = 0 \text{ должно быть:} & u_1(r, t) = \text{конечной величине} \\ \text{» } r = a \text{ » » } & \left(-\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_{r=a} = h_1[u_2(a, t) - u_1(a, t)] \\ \text{» } r = a \text{ » » } & \left(-\frac{\partial u_2}{\partial r}\right)_{r=a} = h_1[u_2(a, t) - u_1(a, t)] \\ \text{» } r = b \text{ » » } & \left(\frac{\partial u_2}{\partial r}\right)_{r=b} = h_2[u_2(b, t) - u_3(b, t)] \\ \text{» } r = b \text{ » » } & \left(\frac{\partial u_3}{\partial r}\right)_{r=c} = h_2[u_2(b, t) - u_3(b, t)] \\ \text{» } r = c \text{ » » } & \left(\frac{\partial u_3}{\partial r}\right)_{r=c} = h_3 u_3(c, t) \end{array}\right\} \text{при всяком значении времени}$$

начальными условиями: при $t = 0$ должно быть:

$$(24)\qquad \begin{aligned} u_1(r, 0) + V_1(r) &= v_1(r, 0) \\ u_2(r, 0) + V_2(r) &= v_2(r, 0) \\ u_3(r, 0) + V_3(r) &= v_3(r, 0) \end{aligned}$$

причем $v_1(r, 0)$, $v_2(r, 0)$, $v_3(r, 0)$ даются формулами (15) и величины $V_1(r)$, $V_2(r)$, $V_3(r)$ даются формулами (21).

§ 7. Остается найти величины $u_1(r, t)$, $u_2(r, t)$, $u_3(r, t)$, удовлетворяющие однородным дифференциальным уравнениям (22), граничным условиям (23) и начальным условиям (24).

Как видно, все три дифференциальные уравнения — одного типа, именно опустив значки:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{25}$$

Будем, как обыкновенно, искать решение этого уравнения под видом суммы

$$u = \Sigma RT \tag{26}$$

каждый член которой в отдельности удовлетворяет уравнению (25) и граничным условиям, вся же сумма, сверх того, — и начальным условиям, причем R есть функция только переменной r, T — функция только переменной t.

Отсюда следует, обозначая производные функций R и T значками,

$$RT' = kT\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right) \tag{27}$$

следовательно, должно быть

$$\frac{T'}{T} = \frac{k}{R}\left[R'' + \frac{1}{r}R'\right] = -\lambda^2 \tag{28}$$

причем λ^2 — совершенно произвольное постоянное число.

Из уравнений (28), которые напишем так:

$$\begin{aligned} T' + \lambda^2 T &= 0 \\ R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k}}\right)^2 R &= 0 \end{aligned} \tag{29}$$

имеем:

$$T = Le^{-\lambda^2 t}$$

$$R = MI_0\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k}}r\right) + NY_0\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k}}r\right)$$

причем L, M, N — произвольные постоянные, I_0 и Y_0 — Бесселевы функции нулевого индекса.

Так как в сумму ΣRT войдут лишь произведения LM и LN, которые суть такие же произвольные постоянные, как M и N, то без ущерба общности можно брать $L = 1$ и писать:

$$T = e^{-\lambda^2 t}$$

$$R = MI\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k}} r\right) + NY\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k}} r\right) \tag{30}$$

опуская индекс 0, ибо функций иного индекса, кроме нуля, в нашей задаче не будет, что же касается аргумента, то для функции $u_1(r, t)$ надо полагать $k = k_1$, для $u_2(r, t)$ и $u_3(r, t)$ — соответственно $k = k_2$ и $k = k_3$.

Таким образом будет:

$$u_1(r, t) = \sum \left[AI\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} r\right) + BY\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} r\right)\right] e^{-\lambda^2 t}$$

$$u_2(r, t) = \sum \left[CI\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} r\right) + DY\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} r\right)\right] e^{-\lambda^2 t} \tag{31}$$

$$u_3(r, t) = \sum \left[EI\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} r\right) + FY\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} r\right)\right] e^{-\lambda^2 t}$$

причем A, B, C, D, E, F и λ могут принимать какие угодно постоянные значения — выражения (31) будут удовлетворять однородным дифференциальным уравнениям, которыми определяются функции $u_1(r, t)$, $u_2(r, t)$, $u_3(r, t)$.

Чтобы удовлетворить граничным условиям (23), распоряжаемся постоянными так, чтобы каждый из отдельных членов вышенаписанных сумм удовлетворял соответствующим граничным условиям, из которых следует

$$AI(0) + BY(0) = \text{конечной величине} \tag{1}$$

значит должно быть

$$B = 0$$

Затем имеем:

$$(1') \quad A\left[\frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} I'\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} a\right) - h_1 I\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} a\right)\right] + C \cdot h_1 I\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a\right) + D \cdot h_1 Y\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a\right) = 0$$

$$(2) \quad -A \cdot h_1 I\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} a\right) + C\left[\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} I'\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a\right) + h_1 I\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a\right)\right] + D\left[\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} Y'\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a\right) + h_1 Y\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a\right)\right] = 0$$

$$(2') \quad C\left[\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} I'\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b\right) - h_2 I\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b\right)\right] + D\left[\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} Y'\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b\right) - h_2 Y\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b\right)\right] + E \cdot h_2 I\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b\right) + F Y\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b\right) \cdot h_2 = 0$$

$$(3) \quad -C \cdot h_2 I\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b\right) - D \cdot h_2 Y\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b\right) + E\left[\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} I'\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b\right) + h_2 I\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b\right)\right] + F\left[\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} Y'\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b\right) + h_2 Y\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b\right)\right] = 0$$

$$(3') \quad E\left[\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} I'\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} c\right) - h_3 I\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} c\right)\right] + F\left[\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} Y'\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} c\right) - h_3 Y\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} c\right)\right] = 0$$

Условие совместности этих уравнений выражается так:

(32) $$0 = \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} I'\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} a\right) & h_1 I\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a\right) & h_1 I\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a\right) & 0 & 0 \\ h_1 I\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} a\right) & & & & \\ -h_1 I\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} a\right) & \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} I'\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a\right) + & \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} Y'\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a\right) + & 0 & 0 \\ & + h_1 I\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a\right) & + h_1 Y\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a\right) & & \\ 0 & \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} I'\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b\right) & \frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} Y'\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b\right) & h_2 I\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b\right) & h_2 Y\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b\right) \\ & -h_2 I\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b\right) & -h_2 Y\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b\right) & & \\ 0 & -h_2 I\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b\right) & -h_2 Y\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b\right) & \frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} I'\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b\right) + & \frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} Y'\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b\right) \\ & & & + h_2 I\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b\right) & -h_2 Y\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b\right) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} I'\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} c\right) & \frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} Y'\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} c\right) \\ & & & -h_3 I\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} c\right) & -h_3 Y\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} c\right) \end{vmatrix}$$

Пусть корни этого уравнения суть:

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3, \ldots \lambda_i, \ldots \tag{33}$$

это суть так называемые характеристические числа. Обозначим через

$$\Delta_1(\lambda_i),\ \Delta_2(\lambda_i),\ \Delta_3(\lambda_i),\ \Delta_4(\lambda_i),\ \Delta_5(\lambda_i) \tag{34}$$

миноры определителя $\Delta(\lambda_i)$, соответствующие какой-либо строке, напр. первой, тогда соответствующие корню λ_i значения постоянных A, C, D, E, F будут

$$\frac{A_i}{\Delta_1(\lambda_i)} = \frac{C_i}{\Delta_2(\lambda_i)} = \frac{D_i}{\Delta_3(\lambda_i)} = \frac{E_i}{\Delta_4(\lambda_i)} = \frac{F_i}{\Delta_5(\lambda_i)} = N_i \tag{35}$$

т. е.

$$\begin{gathered} A_i = N_i\Delta_1(\lambda_i);\ C_i = N_i\Delta_2(\lambda_i);\ D_i = N_i\Delta_3(\lambda_i) \\ E_i = N_i\Delta_4(\lambda_i);\ F_i = N_i\Delta_5(\lambda_i) \end{gathered} \tag{36}$$

следовательно будет:

$$\begin{aligned} u_1(r,t) &= \sum_{i=1}^{i=\infty} N_i\Delta_1(\lambda_i) I\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_1}}r\right) e^{-\lambda_i^2 t} \\ u_2(r,t) &= \sum_{i=1}^{i=\infty} N_i\left[\Delta_2(\lambda_i) I\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_2}}r\right) + \Delta_3(\lambda_i) Y\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_2}}r\right)\right] e^{-\lambda_i^2 t} \\ u_3(r,t) &= \sum_{i=1}^{i=\infty} N_i\left[\Delta_4(\lambda_i) I\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_3}}r\right) + \Delta_5(\lambda_i) Y\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_3}}r\right)\right] e^{-\lambda_i^2 t} \end{aligned} \tag{37}$$

Эти выражения, при всяких значениях постоянных N_i, удовлетворяют дифференциальным уравнениям (22) и граничным условиям (23). Остается удовлетворить начальным условиям (24).

§ 8. На основании уравнений (37), начальные условия будут:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=\infty} N_i \cdot \Delta_1(\lambda_i) \cdot I\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_1}}r\right) = u_1(r,0) \\ &\sum_{i=1}^{i=\infty} N_i\left[\Delta_2(\lambda_i) \cdot I\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_2}}r\right) + \Delta_3(\lambda_i) Y\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_2}}r\right)\right] = u_2(r,0) \\ &\sum_{i=1}^{i=\infty} N_i\left[\Delta_4(\lambda_i) I\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_3}}r\right) + \Delta_5(\lambda_i) Y\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_3}}r\right)\right] = u_3(r,0) \end{aligned} \tag{38}$$

причем значения $u_1(r, 0)$, $u_2(r, 0)$, $u_3(r, 0)$ для соответствующих промежутков

(39) $$0 \text{ до } a;\ a \text{ до } b;\ b \text{ до } c$$

определяются формулами (15), (21), (24).

Положим, что каждый из промежутков (39) подразделен на n частей, скажем, равных между собою, и взяв в указанных суммах какое-либо *конечное* число j первых членов, выбирая это j так, чтобы при $t = 3$ всеми дальнейшими членами в суммах (37) можно было пренебречь, мы применили бы для вычисления коэффициентов N_i методу наименьших квадратов, тогда, написав $3n$ условных уравнений, мы по ним составили бы j нормальных уравнений, решение которых и дало бы нам искомые коэффициенты.

Само собою разумеется, что для этого могут служить обычные схемы, которые можно найти в любом курсе астрономии или геодезии и на которых останавливаться не будем, но можно при большом числе условных уравнений вычисления несколько упростить.

Положим для простоты письма $j = 3$, и что относится к этому числу неизвестных будет одинаково относиться и к любому их числу.

Условные уравнения будут вида:

(I)
$$\begin{aligned}
a_1 N_1 + b_1 N_2 + c_1 N_3 &= u_1(r_1)\\
a_2 N_1 + b_2 N_2 + c_2 N_3 &= u_1(r_2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_n N_1 + b_n N_2 + c_n N_3 &= u_1(r_n)
\end{aligned}$$

(II)
$$\begin{aligned}
a_{n+1} N_1 + b_{n+1} N_2 + c_{n+1} N_3 &= u_2(r_{n+1})\\
a_{n+2} N_1 + b_{n+2} N_2 + c_{n+2} N_3 &= u_2(r_{n+2})\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{2n} N_1 + b_{2n} N_2 + c_{2n} N_3 &= u_2(r_{2n})
\end{aligned}$$

(III)
$$\begin{aligned}
a_{2n+1} N_1 + b_{2n+1} N_2 + c_{2n+1} N_3 &= u_3(r_{2n+1})\\
a_{2n+2} N_1 + b_{2n+2} N_2 + c_{2n+2} N_3 &= u_3(r_{2n+2})\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{3n} N_1 + b_{3n} N_2 + c_{3n} N_3 &= u_3(r_{3n})
\end{aligned}$$

Нормальные уравнения будут:

$$N_1 \cdot \sum a^2 + N_2 \cdot \sum ab + N_3 \sum ac = \sum au$$
$$N_1 \sum ab + N_2 \sum b^2 + N_3 \sum bc = \sum bu$$
$$N_1 \sum ac + N_2 \sum bc + N_3 \sum c^2 = \sum cu$$

положим теперь, что число n неопределенно возрастает, тогда суммы заменятся соответствующими интегралами, а именно:

$$\sum a^2 = \int_0^c [a(r)]^2 \cdot dr; \quad \sum b^2 = \int_0^c [b(r)]^2 dr; \quad \sum [c^2]^2 = \int_0^c [c(r)]^2 dr$$

$$\sum ab = \int_0^c a(r) \cdot b(r)\, dr; \quad \sum ac = \int_0^c a(r) \cdot c(r)\, dr \tag{39}$$

$$\sum bc = \int_0^c b(r) \cdot c(r)\, dr$$

причем функции $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$ определяются следующими равенствами:

$0 \leqq r \leqq a \ldots$

$$a(r) = \Delta_1(\lambda_1) \cdot I\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{k_1}} r\right)$$
$$b(r) = \Delta_1(\lambda_2) \cdot I\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{k_1}} r\right) \qquad u(r) = u_1(r)$$
$$c(r) = \Delta_1(\lambda_3) \cdot I\left(\frac{\lambda_3}{\sqrt{k_1}} r\right)$$

$a \leqq r \leqq b \ldots$

$$a(r) = \left[\Delta_2(\lambda_1) \cdot I\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{k_2}} r\right) + \Delta_3(\lambda_1)\, Y\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{k_2}} r\right)\right]$$
$$b(r) = \left[\Delta_2(\lambda_2) \cdot I\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{k_2}} r\right) + \Delta_3(\lambda_2)\, Y\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{k_2}} r\right)\right] \qquad u(r) = u_2(r)$$
$$c(r) = \left[\Delta_2(\lambda_3) \cdot I\left(\frac{\lambda_3}{\sqrt{k_2}} r\right) + \Delta_3(\lambda_3)\, Y\left(\frac{\lambda_3}{\sqrt{k_2}} r\right)\right]$$

$b \leqq r \leqq c \ldots$

$$a(r) = \left[\Delta_4(\lambda_1) \cdot I\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{k_3}} r\right) + \Delta_5(\lambda_1)\, Y\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{k_3}} r\right)\right]$$
$$b(r) = \left[\Delta_4(\lambda_2) \cdot I\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{k_3}} r\right) + \Delta_5(\lambda_2)\, Y\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{k_3}} r\right)\right] \qquad u(r) = u_3(r)$$
$$c(r) = \left[\Delta_4(\lambda_3) \cdot I\left(\frac{\lambda_3}{\sqrt{k_3}} r\right) + \Delta_5(\lambda_3)\, Y\left(\frac{\lambda_3}{\sqrt{k_3}} r\right)\right]$$

Если бы удалось найти (напр. применяя методу Коши и произведя все сложные выкладки, ею вызываемые) такие «веса» $p(r)$, $q(r)$, $s(r)$, при которых все функции становятся ортогональными, то нормальные уравнения приняли бы вид:

$$N_1 \cdot \int_0^c p(r)\,[a(r)]^2 \cdot dr = \int_0^c p(r) \cdot a(r) \cdot u(r)\,dr$$

$$N_2 \cdot \int_0^c q(r)\,[b(r)]^2\,dr = \int_0^c q(r) \cdot b(r) \cdot u(r)\,dr$$

$$N_3 \cdot \int_0^c s(r)\,[c(r)]^2\,dr = \int_0^c s(r) \cdot c(r) \cdot u(r)\,dr$$

Но практически, даже при $j = 8$, потребуется меньше работы на вычисление интегралов (39) взяв $n = 7$ и распределив абсциссы по правилу Чебышева, нежели искать функции $p(r)$, $q(r)$ и $s(r)$. Решение же нормальных уравнений «приведением первого коэффициента к единице», подобно тому как изложено в моих «Лекциях о приближенных вычислениях», ведя вычисление на три знака, пользуясь 50-сантиметровой логарифмической линейкой, требует написания около 2200 цифр.

Наиболее трудная часть — вычисление корней λ трансцендентного уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ — может быть облегчена тем, что для жилы постоянная k_2 весьма велика по сравнению с k_1 и k_3 и в первом приближении можно принять $k_2 = \infty$, тогда уравнение $\Delta(\lambda)$ значительно упрощается и доставит приближенные значений корней λ, зная которые уже легко найти и более точные.

На подробностях численных вычислений, как то: их расположении, составлении схем, избежании утраты значащих цифр и пр., мы не будем останавливаться — всякий вычислитель распорядится применительно к своим навыкам и привычкам.

В заключение я считаю долгом высказать свою глубочайшую благодарность В. А. Фоку, который, бегло ознакомясь с содержанием этой работы по черновой рукописи, дал мне ряд весьма ценных указаний.

ДВЕ ЗАМЕТКИ ПО МЕХАНИКЕ

Целью настоящей статьи является внести ясность в некоторые элементарные задачи механики, так как оказывается, что во многих курсах их изложение сопровождается целым рядом ошибок. Ближайший же повод к ним мне подала известная и вообще выдающаяся по своим достоинствам книга Мюллера и Пранге — «Всеобщая механика».

§ 1. Существенная ошибка допущена в этой книге при разборе простейшего примера относительного движения — движения тяжелой материальной точки по отношению к вращающейся Земле. Действительно, на стр. 221 и следующих этот вопрос излагается так: Земля предполагается сферической и вращающейся равномерно с угловою скоростью ω. Взяв за начало координат O место наблюдения и проведя ось oz по направлению *радиуса* к центру Земли, ось Ox по меридиану к северу и Oy по параллели к востоку, авторы получают по отношению к этим, неизменно с Землею связанным, осям следующие уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X - 2m\dot{y}\omega\sin\theta - m[(R-z)\cos\theta - x\sin\theta]\,\omega^2\sin\theta \\ m\ddot{y} &= Y + 2m(\dot{x}\sin\theta + \dot{z}\cos\theta)\,\omega - my\omega^2 \\ m\ddot{z} &= Z - 2m\dot{y}\omega\cos\theta - [(R-z)\cos\theta - x\sin\theta]\,\omega^2\cos\theta \end{aligned}\right\} (127)$$

причем θ есть *геоцентрическая* широта места, которую авторы ошибочно называют *географической*, X, Y, Z — проекции на оси координат внешней действующей на точку силы.

Переходя к рассмотрению движения свободно падающего тела, авторы на стр. 222 пишут: «так как угловая скорость ω вращения Земли есть величина весьма малая, то в уравнениях (127) члены, содержащие вторую степень ω, могут быть отброшены по сравнению с членами, содержащими ω в первой степени. Когда внешняя сила есть сила тяжести (следовало сказать «сила притяжения» Земли), то будет: $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$ (следовало

написать, согласно предыдущему и последующему обозначению автора, «mg_0»), то уравнения движения будут:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -2\dot{y}\omega\sin\theta \\ \ddot{y} &= +2(\dot{x}\sin\theta + z\cos\theta)\omega \\ \ddot{z} &= g - 2\dot{y}\omega\cos\theta \end{aligned} \qquad (132)$$

(у авторов везде напечатано g вместо g_0).

По интегрировании получается:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2y\omega\sin\theta + c_1 \\ \dot{y} &= 2(x\sin\theta + z\cos\theta)\omega + c_2 \\ \dot{z} &= gt - 2y\omega\cos\theta + c_3 \end{aligned} \qquad (133)$$

Для свободного падения без начальной скорости из начала координат будет

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

и затем, пренебрегая опять членами с ω^2:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3} g\,\omega\cos\theta\cdot t^3 \\ x &= 0 \\ z &= \frac{1}{2} gt^2 \end{aligned} \qquad (135)$$

Весь этот вывод *не верен*.

В самом деле, согласно сделанному выбору осей, ось oz направлена по *радиусу* Земли к ее центру, значит уравнения (135) показывают, что свободно падающее тело отклоняется от oz, т. е. от радиуса Земли, немного к востоку $\left(\text{на величину } \frac{1}{3} g\,\omega\cos\theta\cdot t^3\right)$, отклонений же к северу или югу нет. В действительности же предыдущие формулы представляют отклонения падающего тела от *отвесной* линии, с каковою ось z не совпадает, и для сферической Земли по оси z направлена не сила тяжести, а сила притяжения Земли, угол между этими двумя направлениями в широте 45° составляет около 0°11′. Ошибка авторов произошла по следующей причине: авторы, отбрасывая в уравнении (127) члены, содержащие множитель ω^2, не обратили внимания, что множитель R — радиус Земли — *весьма велик*

не только по сравнению с x и y, но и с высотою падения z; действительно, при единицах метр и секунда имеем в круглых числах:

$$R = 6\,350\,000$$
$$\omega = \frac{1}{13\,000}$$
$$g = 9.82$$

Возьмем для примера $z = 100$ (метров), из уравнения (135) имеем

$$\dot{y} = g\omega t^2 \cos\theta = 2z\omega \cdot \cos\theta$$

подставляя эту величину в уравнение (127), имеем по сокращении на m:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -4z\omega^2 \sin\theta\cos\theta - [(R-z)\cos\theta - x\sin\theta]\,\omega^2\sin\theta \\ &= -4z\omega^2\sin\theta\cos\theta - R\omega^2\sin\theta\cos\theta + z\omega^2\sin\theta\cos\theta \\ &= -3z\omega^2\sin\theta\cos\theta - R\omega^2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

Ясно, что второй член во второй части этого уравнения во столько раз больше первого, во сколько раз R больше $3z$, т. е., примерно, в 21 000 раз в нашем случае; понятно, что это же относится и до третьего уравнения (127).

Таким образом во вторых частях уравнений (157) главный член есть $-R\omega^2\sin\theta\cos\theta$, и чтобы получить последовательные приближения, авторам следовало для первого приближения написать эти уравнения так:

$$\ddot{x} = -R\omega^2\sin\theta\cos\theta = -\rho\omega^2\sin\theta$$
$$\ddot{y} = 0$$
$$\ddot{z} = g_0 - R\omega^2\cos^2\theta = g$$

которые для свободного падения дают:

$$x = -\frac{1}{2}\rho\omega^2\sin\theta\cdot t^2$$
$$y = 0$$
$$z = \frac{1}{2}gt^2$$

причем положено $\rho = R\cos\theta$.

Эти уравнения показывают, что пренебрегая силами Кориолиса, но удерживая в рассмотрении центробежную силу переносного движения, мы получаем свободное падение по отвесной линии с ускорением g.

Для получения следующего приближения, полагаем:

$$x = -\frac{1}{2}\rho\omega^2 \sin\theta \cdot t^2 + x_1$$
$$z = \frac{1}{2} g t^2 + z_1$$
$$y = y_1$$

и по подстановке получим:

$$\ddot{x}_1 = -2\dot{y}_1 \omega \sin\theta + z\omega^2 \sin\theta\cos\theta + x\omega^2 \sin^2\theta$$
$$\ddot{y}_1 = 2g\omega t \cdot \cos\theta$$
$$\ddot{z}_1 = 0$$

откуда следует:

$$y_1 = \frac{1}{3} g\omega t^3 \cos\theta$$
$$z_1 = 0$$
$$x_1 = -\frac{1}{8} g t^4 \omega^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{1}{24}\rho\omega^4 t^4 \sin^3\theta$$

последний член можно отбросить по сравнению с первым и писать

$$x_1 = -\frac{1}{8} g\omega^2 t^4 \sin\theta\cos\theta$$

Таким образом будет:

$$x = -\frac{1}{2}\rho\omega^2 t^2 \sin\theta - \frac{1}{8} g\omega^4 t^4 \sin\theta\cos\theta$$
$$y = \frac{1}{3} g\omega t^3 \cos\theta$$
$$z = \frac{1}{2} g t^2$$

Так как уравнения отвесной линии суть

$$x = -\frac{\rho \sin\theta}{g}\omega^2 z \quad \text{и} \quad y = 0$$

(эти формулы приведены у авторов под № 131), то предыдущие уравнения напишутся так:

$$x = -\frac{\rho \sin\theta}{g}\omega^2 z - \frac{1}{8} g\omega^2 t^4 \sin\theta\cos\theta$$
$$y = \frac{1}{3} g\omega t^3 \cos\theta$$
$$z = \frac{1}{2} g t^2$$

мы и видим, что величины

$$y = \frac{1}{3} g\omega t^3 \cos\theta$$

$$x_1 = -\frac{1}{8} g\omega^2 t^4 \sin\theta\cos\theta$$

представляют отклонения свободно падающего тела от *отвесной* линии, напр. от направления нити, на которой это тело висело бы в покое, по отношению к Земле.

Отсюда ошибочность вывода Мюллера и Пранге становится очевидной.

§ 2. В эти подробности мы вошли, чтобы показать, что из уравнений (127), если их правильно трактовать, получается верный вывод, хотя и сравнительно длинным путем.

Для сокращения выкладки следует за ось z брать не направление радиуса Земли, а направление *отвесной* линии, проведенной через ту точку, из которой тело начинает падать, в этом случае для точки O сила притяжения Земли слагается с центробежною силою переносного движения точки O в силу тяжести mg, направленную по оси z-ов, так что будет:

$$X = mR\omega^2 \sin\theta\cos\theta = m\rho\omega^2 \sin\theta$$
$$Y = 0$$
$$Z = m(g_0 - \rho\omega^2\cos\theta) = mg$$

где θ есть географическая широта места, т. е. угол между отвесною линией и плоскостью экватора, иначе — высота полюса мира над горизонтом места. Уравнения движения, по приведении, будут:

$$\ddot{x} = -2\dot{y}\omega\sin\theta + z\omega^2\sin\theta\cos\theta + x\omega^2\sin^2\theta$$
$$\ddot{y} = 2\dot{x}\omega\sin\theta + 2\dot{z}\omega\cos\theta - \omega^2 y$$
$$\ddot{z} = g - 2\dot{y}\omega\cos\theta + z\omega^2\cos^2\theta + x\omega^2\sin\theta\cos\theta$$

В первом приближении последнее уравнение дает

$$z = \frac{1}{2} gt^2 \qquad \text{(a)}$$

Главный член во втором уравнении есть $2\dot{z}\omega\cos\theta$, и оно напишется так:

$$\ddot{y} = 2g\omega t\cos\theta$$

и дает

$$y = \frac{1}{3} g\omega t^3 \cos\theta \qquad \text{(b)}$$

Затем

$$\ddot{x} = -\frac{3}{2} g\omega^2 t^2 \sin\theta\cos\theta$$

откуда

$$x = -\frac{1}{8} g\omega^2 t^4 \sin\theta\cos\theta \qquad (c)$$

т. е. как раз те же величины, которые мы получили и выше для отклонений от *отвесной* линии.

Физически только эти величины и могут быть непосредственно наблюдаемы, ибо непосредственно возможно осуществить лишь отвесную линию, направление же силы притяжения или радиуса Земли может быть получено только путем вычисления, зная размеры и форму Земли.

§ **3.** По поводу рассуждения Мюллера и Пранге, при их выводе, надо сделать еще одно замечание, которое относится и к большей части курсов механики, где трактуется этот вопрос. Обыкновенно говорят: «величина ω малая, поэтому члены, содержащие ω^2, отбросим» или «будем разлагать по степеням малой величины ω и удержим только члены с низшими степенями». Эти выражения не точны, и такие рассуждения могут повести к ошибкам. Величина ω — угловая скорость — не есть *отвлеченное* число, а физическая величина, иначе — число именованное, т. е. зависящее от выбора единиц. Никто бы нам не мешал взять, напр., за единицу времени время одного полного оборота Земли, т. е. звездные сутки, и величина ω выразилась бы числом $2\pi = 6.28\ldots$, величина ω^2 была бы, примерно, равна 40, и ясно, что было бы нелепо говорить о малости ω^2 по сравнению с ω или о разложении по степеням ω.

Если можно говорить о малых или больших величинах, то надо, чтобы они выражались числами *отвлеченными*, от выбора единиц не зависящими. Только по степеням таких отвлеченных параметров и можно производить разложения.

В нашем случае таким отвлеченным параметром будет, напр.:

$$\frac{R\omega^2}{g} = \frac{1}{280}$$

независимо от выбора единиц, отвлеченным же числом будет и ωt, поэтому можно вести разложение по степеням ωt, которое также не зависит от выбора единиц, но нельзя разлагать просто по степеням ω.

§ 4. Обратимся к следующему примеру. Уравнения движения сферического маятника на стр. 181 «Механики» Мюллера и Пранге написаны в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= \lambda x \\ \ddot{y} &= \lambda y \\ \ddot{z} &= \lambda z + g \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

при условии

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \tag{2}$$

В предположении, что маятник совершает *малые* колебания, из уравнения (2) имеем

$$z = l\left(1 - \frac{x^2+y^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}} = l\left(1 - \frac{x^2+y^2}{2l^2}\right)$$

и в первом приближении, приняв $z = l$, следовательно $\ddot{z} = 0$, будет

$$\lambda = -\frac{g}{l}$$

после чего будет:

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{g}{l}y = 0$$

Делая

$$n^2 = \frac{g}{l}$$

и принимая за начальные условия: при $t=0$ должно быть

$$x = a, \quad \dot{x} = 0, \quad y = 0, \quad \dot{y} = nb$$

получаем:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos nt \\ y &= b\sin nt \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Такой вывод делается не только в рассматриваемом курсе, но можно сказать во всех курсах механики, не исключая всех трех изданий Аппеля или новейшего курса Валле Пуссена, между тем полученное решение (3) не может считаться первым приближением, ибо в нем опускается самый характер явления, иными словами, в нем отброшены не только члены высших порядков относительно малых величин $\frac{a}{l}$ и $\frac{b}{l}$, но опущены члены того же

самого порядка, как и те, кои сохранены. Это решение может лишь служить исходным приближением для получения первого.

В самом деле, поставив значения (3) в уравнение связи, имеем

$$z = l\left[1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{l^2}\cos^2 nt - \frac{1}{2}\frac{b^2}{l^2}\sin^2 nt\right] =$$
$$= l\left[1 - \frac{1}{4}\frac{a^2+b^2}{l^2} - \frac{1}{4}\frac{a^2-b^2}{l^2}\cos 2nt\right]$$

следовательно будет

$$\ddot{z} = \frac{a^2+b^2}{l^2}n^2\cos 2nt = \lambda z + g$$

откуда следует

$$\lambda = -\frac{g}{l}\left(1-\varepsilon\cos 2nt\right)\left(1-\alpha-\frac{1}{4}\varepsilon\cos 2nt\right)^{-1} =$$
$$= -\frac{g}{l}\left(1-\varepsilon\cos 2nt\right)\left(1+\alpha-\frac{1}{4}\varepsilon\cos 2nt\right)$$

причем положено:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{a^2-b^2}{l^2}\\ \alpha &= \frac{1}{4}\frac{a^2+b^2}{l^2}\end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

и степени малых отношений $\frac{a}{l}$ и $\frac{b}{l}$ выше второй отброшены.

Итак, будет

$$\lambda = -n^2(1+\alpha) + \frac{3}{4}\varepsilon n^2\cos 2nt$$
$$= -n_1^2 + \frac{3}{4}\varepsilon n^2\cos 2nt$$

где положено

$$n_1^2 = n^2(1+\alpha)$$

и уравнения движения напишутся так:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x} &= -n_1^2 x + \frac{3}{4}n^2\varepsilon x\cos 2nt\\ \ddot{y} &= -n_1^2 y + \frac{3}{4}n^2\varepsilon y\sin 2nt\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Представляется, что последние члены в этих уравнениях *третьего* порядка относительно малых величин a и b и могут быть отброшены без влияния на величины первого порядка, но это оказывается не так.

Действительно, подставляя в уравнения (4) вместо x и y их значения из исходного приближения, получим:

$$\ddot{x} + n_1^2 x = \frac{3}{4} n^2 \varepsilon a \cos nt \cos 2nt$$

$$\ddot{y} + n_1^2 y = \frac{3}{4} n^2 \varepsilon b \sin nt \cos 2nt$$

или иначе:

$$\ddot{x} + n_1^2 x = \frac{3}{8} n^2 \varepsilon a [\cos nt + \cos 3nt]$$

$$\ddot{y} + n_1^2 y = \frac{3}{8} n^2 \varepsilon b [\sin 3nt - \sin nt]$$

Общие интегралы этих уравнений суть:

$$x = C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t + \frac{3}{8} \frac{\varepsilon n^2}{n_1^2 - n^2} a \cos nt + \frac{3}{8} \frac{\varepsilon n^2}{n_1^2 - 9n^2} \cdot a \cos 3nt$$

$$y = C_3 \cos n_1 t + C_4 \sin n_1 t - \frac{3}{8} \frac{\varepsilon n^2}{n_1^2 - n^2} b \sin nt + \frac{3}{8} \frac{\varepsilon n^2}{n_1^2 - 9n^2} \cdot b \sin 3nt$$

Последние члены, действительно, содержат малый множитель второго порядка

$$\frac{\varepsilon n^2}{n_1^2 - 9n^2}$$

и могут быть отброшены, но множитель

$$\frac{\varepsilon n^2}{n_1^2 - n^2} = \frac{\varepsilon}{\alpha} = 4 \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

не есть малая, а конечная величина, и значит, члены, его содержащие, должны быть удержаны.

Полагая

$$k = \frac{3}{2} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

и определяя произвольные постоянные по приведенным выше начальным условиям, имеем:

$$\left.\begin{aligned} x &= (1 - k) a \cos n_1 t + ak \cos nt \\ y &= (1 + k) b \sin n_1 t - bk \sin nt \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

или иначе:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos n_1 t + 2ak \sin \frac{n_1 - n}{2} t \cdot \sin \frac{n_1 + n}{2} t \\ y &= b \sin n_1 t + 2bk \sin \frac{n_1 - n}{2} t \cdot \cos \frac{n_1 + n}{2} t \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Разность $n_1 - n$, по предположению, весьма мала по сравнению с n или с n_1, ибо она равна $\frac{1}{4}\alpha n$, поэтому, когда аргумент $n_1 t$ изменится на 2π, то аргумент $\frac{n_1 - n}{2} t = \frac{1}{4}\alpha n t$ изменится всего на $\alpha\frac{\pi}{2}$, поэтому в течение всего этого времени кривая (6) будет весьма близка к эллипсу:

$$x = a\cos n_1 t$$
$$y = b\sin n_1 t$$

ибо расстояние соответствующих точек будет меньше $\frac{\pi}{2}\alpha a$, но после того как аргумент $n_1 t$ получит приращение 2π, кривая (6), в отличие от эллипса, не замкнется, и значит, полученный ее завиток будет близок к сказанному эллипсу, но не замкнут и, уклоняясь от этого эллипса постепенно, может быть уподоблен тому следу, который точка оставила бы, двигаясь по этому эллипсу, который сам в это время поворачивался бы равномерно на некоторый угол. Чтобы определить этот угол поворота, надо составить уравнение

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \qquad (7)$$

и найти ближайший к 2π корень его.

По уравнению (5) имеем:

$$\dot{x} = -(1-k)an_1\sin n_1 t - nak\sin nt$$
$$\dot{y} = (1+k)bn_1\cos n_1 t - bnk\cos nt$$

положим

$$nt = 2\pi + \varphi$$

тогда

$$n_1 t = 2\pi + \omega$$

причем

$$\omega = \varphi + \alpha\pi$$

и будет:

$$\cos n_1 t = \cos nt = 1$$
$$\sin n_1 t = \omega; \quad \sin nt = \varphi$$

и уравнение (7), по приведении, будет

$$-a^2[\varphi + (1-k)\pi\alpha] + b^2[\varphi + (1+k)\pi\alpha] = 0$$

из него следует

$$\varphi = \frac{\pi}{2}\alpha = \frac{\pi}{8}\frac{a^2+b^2}{l^2}$$

Таким образом прохождение через вершину завитка (перигелий в астрономии) происходит в момент, когда

$$nt = 2\pi + \frac{\pi}{2}\alpha$$

Соответствующие координаты этой вершины будут:

$$X = a$$

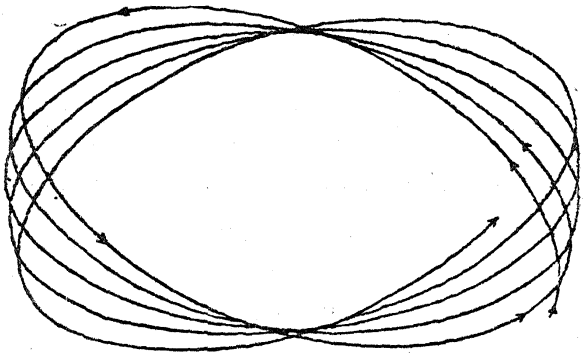
$$Y = b[(1+k)\omega - k\varphi] =$$

$$= b\left[(1+k)\pi + \frac{\pi}{2}\right]\cdot\alpha = \frac{3}{4}\pi\frac{a^2b}{l^2}$$

следовательно направление идущей в эту вершину оси завитка, т. е. угол поворота эллипса за время *полного* оборота маятника, будет

$$\psi = \frac{Y}{X} = \frac{3}{4}\pi\frac{ab}{l^2} \qquad (8)$$

причем этот эллипс поворачивается в *сторону движения* по нему маятника, ибо угол ψ положительный. Таким образом проекция траектории маятника имеет вид, показанный на фиг. 1.



Фиг. 1.

Если бы мы желали иметь угловое расстояние между двумя последовательными, наинизшей и наивысшей, точками, занимаемыми маятником на сфере, то для уравнения (7) надо бы искать корень, ближайший к $\frac{\pi}{2}$, т. е. в предыдущих формулах заменить 2π через $\frac{\pi}{2}$, т. е. π через $\frac{\pi}{4}$, и мы получим

$$\psi_1 = \frac{1}{4}\psi = \frac{3}{16}\pi\frac{ab}{l^2}$$

и полный угол будет

$$\Phi = \frac{\pi}{2} + \psi_1 = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{3}{8}\frac{ab}{l^2}\right)$$

но

$$\frac{a}{l} = \theta_1 \qquad \frac{b}{l} = \theta_2$$

суть наибольший и наименьший углы отклонения маятника от отвесной линии, и предыдущая формула напишется

$$\Phi = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{3}{8}\theta_1\theta_2\right] \qquad (8')$$

В таком виде эта формула обыкновенно и дается на основании рассмотрения точного решения этой задачи в эллиптических интегралах.

Формула (8) весьма хорошо согласуется с опытом: в моем курсе приближенных вычислений приведен снимок качаний сферического маятника. Для этого маятника было:

$$l = 3.34 \text{ м}$$

Число размахов на снимке 41
Полный угол поворота . . . . . 104°
Угол поворота за один размах . . . . . $\psi = \frac{104}{41} = 2°.54$
В начале движения . . . . . $a = 65$ мм на снимке
» » . . . . . $b = 32$ » » »
В конце движения . . . . . $a = 58$ » » »
» » . . . . . $b = 30$ » » »

Масштаб снимка $\frac{1}{10.5}$ натуры.

Отсюда имеем:

в начале движения	$ab = 2080$
в конце движения	$ab = 1740$
Среднее . . .	$ab = 1910$

Среднее значение угла поворота:

$$\psi_0 = \frac{3}{4}\pi\frac{ab}{l^2} = 135° \cdot \frac{1910}{1000000} \cdot \left(\frac{10.5}{3.34}\right)^2 = 2°.54$$

согласие получилось лучшее, чем можно было ожидать.

В эти подробности мы вошли, чтобы показать, что обычно приводимое во всех курсах как приближенное решение

$$x = a\cos nt$$
$$y = b\sin nt$$

не может считаться таковым, ибо оно не представляет существенной особенности движения, именно что этот эллипс равномерно вращается в ту же сторону, в какую его обегает маятник.

Вся поучительность задачи о малых колебаниях сферического маятника именно и состоит в том, чтобы показать, что отбрасывание малых членов в самих дифференциальных уравнениях может повести к существенно ложным выводам и что отбрасывая в дифференциальном уравнении члены высших порядков нельзя сказать с уверенностью, что и в интегралах этих уравнений будут отброшены также члены высших порядков. На этом простом примере все это показывается весьма наглядно. Полезно упомянуть, что с подобным обстоятельством встретился сперва Ньютон, а потом Клеро, в теории Луны, и притом как раз в вопросе о движении ее перигея.

§ **5.** *Маятник Фуко.* При рассмотрении вопроса о маятнике Фуко в том виде, как он изложен в книге Мюллера и Пранге, вошли, само собою разумеется, оба отмеченных недостатка, а именно:

1. Неправильный вывод уравнения движения и замена отвесной линии направлением радиуса Земли, идущего в точку подвеса маятника.

2. Неправильное приближенное решение уравнений движений сферического маятника для малых колебаний его.

Первая ошибка может быть исправлена, приняв, что ось z-ов не есть радиус, идущий в точку подвеса, а *отвесная* линия, через эту точку проведенная, тогда плоскость xOy будет горизонтальна.

Вторая ошибка несколько сложнее и является обычной почти для всех курсов механики, почему на ней мы остановимся несколько подробнее.

Для малых колебаний авторы пишут следующие два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{y} + n^2 x &= -2\omega_1 \dot{y} \\ \ddot{y} + n^2 y &= +2\omega_1 \dot{x} \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

причем

$$n^2 = \frac{g}{l} \quad \text{и} \quad \omega_1 = \omega \sin\theta$$

и делают оговорку, что члены с ω^2 отброшены. В таком виде эти уравнения пишутся и во всех курсах.

Между тем, на основании сказанного о сферическом маятнике, эти уравнения пригодны лишь для исходного приближения.

За начальные условия авторы берут две комбинации, равносильные следующим:

1) при $t = 0$ должно быть

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = nb$$

2) при $t = 0$ должно быть

$$x = a, \quad y = 0, \qquad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = nb$$

Систему уравнений (*) они интегрируют, составив интегралы живых сил и площадей, и для первого случая они получают *верный* результат благодаря тому, что при $t = 0$ и $x = 0$, а именно, если вообразить подвижную горизонтальную плоскость, которая вращалась бы равномерно с угловою скоростью ω_1 около вертикальной оси, проведенной через точку подвеса маятника, то его проекция на эту плоскость совершала бы прямолинейные гармонические колебания по постоянной прямой, проходящей через центр вращения, значит на плоскости xOy маятник описывает ряд тождественных завитков, тоже проходящих через центр вращения.

Для второго случая получают тот *неверный* результат, который можно встретить почти во всех курсах, именно, что если вообразить вышеупомянутую вращающуюся плоскость, то на ней маятник описывает постоянный *неподвижный* эллипс с полуосями a и b, следовательно на плоскости xOy он описывает ряд завитков, расположенных между двумя концентрическими кругами, описанными из центра вращения радиусами a и b, причем за время полного размаха (оборота маятника по своему эллипсу) угол поворота этого эллипса составляет $\omega_1 T$, где $T = \frac{2\pi}{n}$ есть период полного размаха.

Неверность этого результата состоит в том, что к вращению с угловою скоростью ω_1, происходящему от вращения Земли, присоединяется то вращение эллиптической траектории, которое было указано в § 7 для сферического маятника, совершающего эллиптические колебания.

Это последнее вращение происходит независимо от первого и притом в ту сторону, в какую маятник обегает свой эллипс. Таким образом за время одного полного его размаха видимый угол поворота на плоскости xOy будет

$$\omega_1 T \pm \frac{3}{4}\pi\frac{ab}{l^2}$$

причем знак + надо брать, если маятник пущен по своему эллипсу «посолонь», т. е. для северного полушария от севера через восток к югу, и знак —, если маятник описывает свой эллипс «противусолонь», полуоси a и b сами по себе считаются тогда положительными.

Очевидно, что стоит пустить маятник противусолонь и распорядиться так, чтобы было

$$\omega_1 T < \frac{3}{4}\pi\frac{ab}{l^2}$$

иначе

$$b > \frac{8}{3}\omega_1\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{l^2}{a}$$

тогда явление будет итти в сторону, обратную той, которая обычно описывается. Вот это-то обстоятельство и заставило Фуко, который не был математиком, но тонким экспериментатором, выбрать весьма длинный маятник в Пантеоне и с величайшей тщательностью разработать подвес его.

Для маятника Пантеона было:

$$l = 60 \text{ м} \qquad a = 6 \text{ м} \qquad \sin\theta = \frac{3}{4}$$

поэтому, если бы взять

$$b > \frac{8}{3}\frac{1}{13000}\cdot\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{60}{98}}\cdot\frac{60\cdot 60}{6}$$

т. е.

$$b > 0.25 \text{ м}$$

то явление шло бы в обратную сторону, если пустить маятник противусолонь.

Но если взять маятник короче, напр.:

$$l = 10 \text{ м} \qquad a = 1 \text{ м}$$

то, если будет $b > 0.016$ м, явление пойдет в обратную сторону. Вот почему и берут возможно длинный маятник и при пуске в ход принимают надлежащие предосторожности.

После сказанного о сферическом маятнике нетрудно установить аналитически все эти результаты, и мы на этом останавливаться не будем.

О ВЫЧИСЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ФУРЬЕ

§ 1. Как известно, коэффициенты ряда Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots + a_n\cos nx + \ldots$$
$$+ b_1\sin x + b_2\sin 2x + \ldots + b_n\sin nx + \ldots$$

выражаются формулами:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \tag{1}$$

которые следуют из свойства ортогональности функций $\cos nx$ и $\sin nx$, так что в полном виде эти формулы суть:

$$a_n = \frac{\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx}{\int_0^{2\pi}\cos^2 nx\,dx}; \qquad b_n = \frac{\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx}{\int_0^{2\pi}\sin^2 nx\,dx} \tag{2}$$

В том случае, когда стоящие в числителе интегралы в конечном виде не выражаются или когда функция $f(x)$ задана не аналитически, а графически, как запись какого-либо самопишущего аппарата, то прибегают к приемам так называемого гармонического анализа: подразделив полный период на k равных частей, проводят через точки деления, абсциссы коих

$$0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_{k-1}$$

ординаты кривой $f(x)$ и, применив для определения коэффициентов a_n и b_n методу наименьших квадратов, вместо формул (1) и (2), получают формулы:

$$a_n = \frac{\sum_{i=0}^{i=k-1} f(x_i)\cos nx_i}{\sum_{i=0}^{i=k-1} \cos^2 nx_i} = \frac{2}{k}\sum_{i=0}^{i=k-1} f(x_i)\cos nx_i$$

$$b_n = \frac{\sum_{i=0}^{i=k-1} f(x_i)\sin nx_i}{\sum_{i=0}^{i=k-1} \sin^2 nx_i} = \frac{2}{k}\sum_{i=0}^{i=k-1} f(x_i)\sin nx_i \qquad (3)$$

которые для функции $f(x)$, такой что

$$f(2\pi) = f(0)$$

равносильны вычислению интегралов формулы (2) по правилу трапеций.

Отсюда ясно, что при сколь-нибудь значительном n пришлось бы брать весьма большое число k, ибо иначе правило трапеций, хорошо применимое для плавной функции, плохо применимо для функции $f(x)\cos nx$ или $f(x)\sin nx$, у которых множитель $\sin nx$ и $\cos nx$ меняет $2n-1$ раза свой знак, колеблясь между $+1$ и -1, пока x изменяется от 0 до 2π.

Известно преобразование Якоби (Werke, t. VI, pp. 86—118), относящееся к тому случаю, когда разложение делается по косинусам, именно, рассматривая функцию $f(x)$ как некоторую функцию $\varphi(\cos x)$ и обозначая через $\varphi^{(n)}(z)$ — производную порядка n функции $\varphi(z)$, Якоби дает формулу

$$\int_0^{\pi} \varphi(\cos x)\cos nx\,dx = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}\int_0^{\pi} \varphi^{(n)}(\cos x)\sin^{2n} x\,dx \qquad (4)$$

Эта формула хорошо применима, когда производная $\varphi^{(n)}(z)$ легко находится и выражается просто, но когда функция $f(x)$ задана графически, то эта формула не применима, ибо сказанной производной найти нельзя.

§ 2. В этой статье я имею в виду показать преобразования, которыми вычисление коэффициентов a_n, b_n приводится к вычислению интегралов

$$\alpha_k = \int_0^{2\pi} f(x)\sin^k x\cos^{n-k} x\,dx \qquad (5)$$

или к вычислению интегралов вида:

$$\beta_k = \int_0^{2\pi} f(x)\sin^k x\,dx, \quad \gamma_k = \int_0^{2\pi} f(x)\cos x\cdot\sin^k x\,dx \tag{6}$$

в которых перемена знака у множителя $\sin^k x\cos^{n-k}x$ происходит 3 раза при значениях $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, а у множителя $\sin^k x$ — лишь один раз при значении π, да и то когда число k нечетное. Это обстоятельство дозволяет при вычислении интегралов пользоваться сравнительно небольшим числом ординат, применять любую формулу квадратур и получать результаты одинаковой точности, независимо от номера коэффициента n.

§ **3.** Около двухсот лет тому назад Моавром даны следующие две формулы:

$$\cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}x\cdot\sin^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4}x\cdot\sin^4 x - \ldots \tag{7}$$

$$\sin nx = n\cos^{n-1}x\sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3}x\sin^3 x + \ldots$$

Затем из них было выведено:

для *n нечетного*:

$$\cos nx = \cos x\left[1 - \frac{n^2-1^2}{2}\sin^2 x + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{2\cdot 3\cdot 4}\sin^4 x - \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\sin^6 x + \ldots\right]$$

$$\sin nx = n\sin x - \frac{n(n^2-1^2)}{2\cdot 3}\sin^3 x + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\sin^5 x - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\sin^7 x + \ldots \tag{8}$$

для *n четного*:

$$\cos nx = 1 - \frac{n^2}{2}\sin^2 x + \frac{n^2(n^2-2^2)}{2\cdot 3\cdot 4}\sin^4 x - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\sin^6 x + \ldots$$

$$\sin nx = \cos x\left[n\sin x - \frac{n(n^2-2^2)}{2\cdot 3}\sin^3 x + \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\sin^5 x - \ldots\right] \tag{9}$$

Стоит только подставить эти выражения в формулы (1) вместо $\cos nx$ и $\sin nx$, и мы получим для любого n, четного или нечетного:

$$\pi a_n = \alpha_0 - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha_2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\alpha_4 - \ldots$$

$$\pi b_n = n\alpha_1 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha_3 + \tag{I}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\alpha_5 - \ldots$$

и, кроме того, в отдельности:

для n *нечетного*:

$$\pi a_n = \gamma_0 - \frac{n^2-1^2}{2}\gamma_2 +$$

$$+ \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{2\cdot 3\cdot 4}\gamma_4 - \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\gamma_6 + \ldots \tag{II}$$

$$\pi b_n = n\beta_1 - \frac{n(n^2-1^2)}{2\cdot 3}\beta_3 +$$

$$+ \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\beta_5 - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\beta_7 + \ldots$$

для n *четного*:

$$\pi a_n = \beta_0 - \frac{n^2}{2}\beta_2 + \frac{n^2(n^2-2^2)}{2\cdot 3\cdot 4}\beta_4 - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\beta_6 + \ldots \tag{III}$$

$$\pi b_n = n\gamma_1 - \frac{n(n^2-2^2)}{2\cdot 3}\gamma_3 + \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\gamma_5 - \ldots$$

§ 4. Само собою разумеется, что когда разложение производится только по косинусам или только по синусам, т. е. по формулам

$$f(x) = \frac{1}{2}p_0 + p_1\cos x + p_2\cos 2x + \ldots + p_n\cos nx + \ldots$$

$$f(x) = q_1\sin x + q_2\sin 2x + \ldots + q_n\sin nx + \ldots$$

так что коэффициенты даются формулами:

$$p_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx; \quad q_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx$$

то, положив

$$\delta_k = \int_0^\pi f(x)\sin^k x\cos^{n-k}x\,dx$$

$$\varepsilon_k = \int_0^\pi f(x)\sin^k x\,dx; \quad \lambda_k = \int_0^\pi f(x)\cos x\sin^k x\,dx$$

мы получим для любого n четного или нечетного:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}p_n &= \delta_0 - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\delta_2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\delta_4 - \dots \\ \frac{\pi}{2}q_n &= n\delta_1 - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\delta_3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\delta_5 - \dots\end{aligned} \qquad (I')$$

Кроме того, имеем в отдельности:

для n *нечетного*:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}p_n &= \lambda_0 - \frac{n^2-1^2}{2}\lambda_2 + \\ &+ \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{2\cdot 3\cdot 4}\lambda_4 - \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\lambda_6 + \dots \\ \frac{\pi}{2}q_n &= n\varepsilon_1 - \frac{n(n^2-1^2)}{2\cdot 3}\varepsilon_3 + \\ &+ \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\varepsilon_5 - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\varepsilon_7 + \dots\end{aligned} \qquad (II')$$

для n *четного*:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}p_n &= \varepsilon_0 - \frac{n^2}{2}\varepsilon_2 + \frac{n^2(n^2-2^2)}{2\cdot 3\cdot 4}\varepsilon_4 - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\varepsilon_6 + \dots \\ \frac{\pi}{2}q_n &= n\lambda_1 - \frac{n(n^2-2^2)}{2\cdot 3}\lambda_3 + \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\lambda_5 - \dots\end{aligned} \qquad (III')$$

§ **5.** Выгода этих формул состоит в большом сокращении работы, когда надо иметь сколь-нибудь значительное число членов разложения: так, напр., при $n=6$, при *правильном* вычислении по формуле (1), надо бы брать не менее 120 ординат, чтобы в каждом промежутке, где $\cos nx$ и $\sin nx$ знака своего не меняют, было не менее 8 ординат, без чего правило трапеций не дает достаточно точных результатов. Если применять формулу (I), то при том же условии достаточно взять 32 ординаты, и так как вместо 13 величин

$$a_0,\ a_1, \dots a_6,\ b_1,\ b_2, \dots b_6$$

надо вычислить лишь 7, именно: $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_6$, то работа сокращается почти в 8 раз.

Вторая выгода состоит в том, что если вычислить еще величины

$$\beta_0,\ \beta_1, \dots \beta_6,\ \gamma_0,\ \gamma_1, \dots \gamma_6$$

то, воспользовавшись формулами (II) и (III), мы получим превосходный контроль вычисления и суждение о степени точности результатов, и тем не менее, работы будет в 3 раза меньше, нежели по 120 ординатам.

Работа еще может быть сокращена, если, подразделив промежуток от 0 до 2π на четыре равные части, применить правило Чебышева, беря в каждом частном промежутке по 5 ординат, так что полное число их будет 20, тогда, если ограничиться формулой (I), то работы будет в 12 раз меньше, нежели при 120 ординатах, и примерно, в 5 раз, если сделать и контрольное вычисление по формулам (II) и (III).

Обыкновенно при вычислении по формуле (3) берут ординат гораздо меньше, нежели следует, упуская из вида истинный смысл этих формул и их связь с формулой (1).

§ **6.** Недостаток формул (I) и особенно (II) состоит в том, что величины α и β входят в них со значительными коэффициентами и притом разных знаков, поэтому может оказаться, что числа a_n, b_n будут представлять малые разности двух больших величин, что в вычислительном смысле весьма невыгодно.

Этот недостаток устраняется следующим образом: положим, что вычисление производится по формуле (I), тогда, вычислив α_0 и по нему a_0, надо составить функцию

$$f_1(x) = f(x) - a_0$$

Для этой функции вычислить α_1 и α_2 и по ним a_1 и b_1 и затем составить функцию

$$f_2(x) = f_1(x) - (a_1 \cos x + b_1 \sin x)$$

Для этой функции вычислить α_3 и α_4 и по ним a_2 и b_2 и составить функцию

$$f_3(x) = f_2(x) - (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x)$$

и продолжать таким образом, пока оставшаяся функция $f_i(x)$ будет иметь столь малые значения, что ими в пределах точности вычисления можно пренебречь.

Подобным образом ведется вычисление и по формуле (II) в тех случаях, когда приходится прибегать к этому приему.

Заметим в заключение, что разложение заданной функции в ряд Фурье встречается в множестве самых разнообразных вопросов, начиная от вычисления возмущенного движения планет и комет и кончая расчетами уравновешивания морских поршневых машин, как паровых, так и внутреннего сгорания.

О ДИНАМИЧЕСКОМ УРАВНОВЕШИВАНИИ РОТОРОВ ГИРОСКОПОВ[1]

§ 1. Гироскоп, изобретенный Л. Фуко в 1852 г., лишь через 40 лет нашел себе важное техническое применение в виде прибора Обри, направляющего курс мины Уайтхеда. Затем, в 1905 г., Шлик предложил применять гироскоп для успокоения качки судов, что и было осуществлено сперва им самим в Германии, затем, в гораздо большем виде, Сперри в Америке. К этому же времени относится применение гироскопа как компаса, после того как сперва Аншютц, а затем Сперри выпустили на рынок изобретенные ими гирокомпасы, получившие вскоре широкое распространение на военных судах всех держав, а затем и на лучших коммерческих.

После мировой войны, с развитием авиации, гироскоп получил множество самых разнообразных применений в авиационном и артиллерийском деле.

Соответственно своему назначению, гироскопы делаются или малого размера, с ротором в 1—20 кг, как в гирокомпасах, или с роторами от 1 до 100 т, когда они должны служить успокоителями качки судов.

Роторы гироскопов делают весьма большое число оборотов (от 20 тыс. об/мин. для малых до 900 об/мин. для самых больших).[2] При таких больших числах оборотов развиваются весьма большие центробежные силы и роторы требуют весьма тщательного уравновешивания.

О величине этих сил можно судить по следующим примерам: ротор гирокомпаса Аншютца, при диаметре 12 см и весе 2500 г, делает 20 тыс. об/мин., и центробежная сила, происходящая от какой-либо массы, помещенной на его ободе, превышает вес этой массы в 25 тыс. раз.

Ротор гироскопического успокоителя Сперри на пароходе «Конте ди Савойа», при диаметре 4 м, весит 110 т и делает 900 об/мин.; на его ободе центробежная сила превышает вес какой-либо массы в 2 тыс. раз.

---

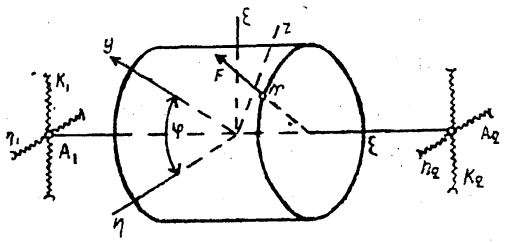
[1] Доложено на совместном заседании групп физики, математики и техники Академии Наук СССР 30 мая 1935 г.

[2] Число оборотов берется такое, чтобы окружная скорость составляла 150—200 м/сек.

Отсюда ясно, что статическое уравновешивание роторов гироскопов недостаточно, ибо остающиеся погрешности такого уравновешивания, при быстром вращении ротора, увеличиваются по своему действию в несколько тысяч раз и, постоянно изменяя свое направление, вызывают вибрацию, расстраивающую механизм, следовательно требуется «динамическое уравновешивание роторов».

Необходимо иметь в виду, что всякий маховик, всякий якорь динамомашины — есть по существу ротор, не говоря уже о «роторах» паровых турбин, так что и здесь, в особенности для турбин, тщательное уравновешивание существенно необходимо.

Для динамического уравновешивания существуют разного рода машины, но обыкновенно теория их связывается с частностями их устройства (в большей части случаев патентованного) и не излагается в достаточно общем виде, в котором главное внимание было бы обращено на самую сущность дела, так чтобы при надобности любой инженер мог спроектировать машину или приспособление, соответствующее этой надобности.



Фиг. 1.

В настоящей статье дается изложение такой общей теории, причем, главным образом, имеются в виду роторы малых гироскопов, предназначенных для гирокомпасов или авиационных приборов.

§ 2. Теория всякого приспособления или всякой машины для динамического уравновешивания сводится к решению следующего вопроса: имеется вполне уравновешенный ротор, т. е. такой, что центр тяжести его лежит на оси фигуры, около которой происходит вращение ротора и которая есть главная полярная ось инерции его; в этом случае подшипники ротора при вращении его испытывают то же самое давление, как и при покое. В данной точке ротора к нему прикрепляется грузик p, масса которого

$$m = \frac{p}{g}$$

весьма мала по сравнению с массой M ротора. Требуется определить малые колебания ротора, предполагая, что концевые подшипники его вала подвешены на пружинах заданной жесткости.

Возьмем две системы координат (фиг. 1), начало первой из них, неподвижной в пространстве, поместим в точке G_0 — центре тяжести ротора

без добавочного грузика; пусть $G_0\xi\eta\zeta$ — эти неподвижные оси; вторая система осей $Gxyz$ имеет свое начало в точке G — центре тяжести ротора, при покое его совпадающей с точкою G_0, эта система осей неизменно связана с ротором, и концы осей Gy и Gz отмечаются кернерами на поверхности ротора, оси же Gx и $G_0\xi$ при покое ротора совпадают как между собою, так и с осью вала, т. е. осью фигуры ротора.

Подшипники ротора A_1 и A_2 подвешены, как уже сказано, на пружинах, из коих одна пара с жесткостью h_1 и h_2 работает в горизонтальной плоскости, другая пара с жесткостью k_1 и k_2 работает в плоскости вертикальной, как это помечено на фиг. 1.

Координаты подшипников (для осей $Gxyz$):

$$A_1(-l_1, 0, 0);\ A_2(l_2, 0, 0)$$

При весе ротора P и покое, его давления на подшипники:

$$Z_{10} = P_{10} = \frac{Pl_2}{l_1+l_2};\quad P_{20} = Z_{20} = \frac{Pl_1}{l_1+l_2} \tag{1}$$

$$H_{10} = \Xi_{10} = 0;\ H_{20} = \Xi_{20} = 0 \tag{2}$$

Эти давления уравновешиваются начальным натяжением пружин.

Положим, что в точке

$$x = a;\ y = b;\ z = c \tag{3}$$

к ротору прикреплена весьма малая масса m, размерами которой, по сравнению с размерами ротора, можно пренебречь и принимать ее за материальную точку.

Вместо того чтобы рассматривать ротор с прикрепленной к нему массой как одно твердое тело, будем, в виду малости массы m, рассматривать ротор как уравновешенный, но находящийся под действием силы F, представляющей реакцию связи, крепящей массу m к ротору. Эта реакция есть так называемая «центробежная сила», направленная по радиусу наружу и равная

$$F = m\omega^2\sqrt{b^2+c^2} = m\omega^2\rho \tag{4}$$

так что проекции этой силы на оси подвижных координат следующие:

$$F_x = 0;\ F_y = m\omega^2 b;\ F_z = m\omega^2 c \tag{5}$$

В момент времени t положение ротора определяется:

1) Координатами его центра тяжести G:

$$\xi_0 = \xi_0(t);\ \eta_0 = \eta_0(t);\ \zeta_0 = \zeta_0(t) \tag{6}$$

причем величины η_0 и ζ_0, при всяком значении t, весьма малы по сравнению с размерами ротора, величина же $\xi_0 = 0$, как показано ниже.

2) Весьма малыми углами поворотов:

около оси $G_0\eta$

$$\theta = \theta(t)$$

около оси $G_0\zeta$

$$\psi = \psi(t) \tag{7}$$

3) Углом поворота φ около оси $G_0\xi$, причем $\varphi = \omega t$, ибо это вращение происходит равномерно. Такое определение положения ротора применимо в виду малости величин η_0, ζ_0, θ и ψ, ибо мы ограничиваемся лишь членами первого порядка относительно их.

Вследствие перемещений η_0 и ζ_0 центра тяжести G и поворотов θ и ψ, координаты точек A_1 и A_2 будут:

точки A_1

$$\xi_1 = -l_1;\ \eta_1 = \eta_0 - l_1\psi;\ \zeta_1 = \zeta_0 + l_1\theta$$

точки A_2 (8)

$$\xi_2 = l_2;\quad \eta_2 = \eta_0 + l_2\psi;\ \zeta_2 = \zeta_0 - l_2\theta$$

ограничиваясь членами первого порядка, как это и во всем дальнейшем предполагается и чего мы больше оговаривать не будем.

Вследствие этих перемещений, подвесные пружины получат добавочные натяжения:

для A_1

$$\Xi_1 = 0;\ H_1 = -h_1(\eta_0 - l_1\psi);\ Z_1 = -k_1(\zeta_0 + l_1\theta)$$

для A_2 (9)

$$\Xi_2 = 0;\ H_2 = -h_2(\eta_0 + l_2\psi);\ Z_2 = -k_2(\zeta_0 - l_2\theta)$$

Проекции силы F на оси координат $\xi\eta\zeta$:

$$F_\xi = 0;\ F_\eta = m\omega^2\rho\cdot\cos(\omega t + \alpha);\ F_\zeta = m\omega^2\rho\cdot\sin(\omega t + \alpha) \tag{10}$$

причем положено:

$$b = \rho\sin\alpha;\ c = \rho\cos\alpha;\ \rho = +\sqrt{b^2 + c^2} \tag{11}$$

следовательно уравнения движения центра тяжести ротора будут:

$$M_1\xi_0'' = -kP_1\xi_0$$

$$M_1\eta_0'' + h_1(\eta_0 - l_1\psi) + h_2(\eta_0 + l_2\psi) = m\omega^2\rho\cos(\omega t + \alpha) \tag{12}$$

$$M_1\zeta_0'' + k_1(\zeta_0 + l_1\theta) + k_2(\zeta_0 - l_2\theta) = m\omega^2\rho\sin(\omega t + \alpha)$$

где M_1 — масса ротора вместе с массою подшипников, статора и приведенной массой пружин, $P_1 = M_1 g$ и k — некоторая постоянная.

Уравнения (12) можно писать так:

$$\xi_0'' + kg\xi_0 = 0$$

$$M_1\eta_0'' + (h_1 + h_2)\eta_0 + (h_2 l_2 - h_1 l_1)\psi = m\omega^2\rho\cos(\omega t + \alpha) \qquad (13)$$

$$M_1\zeta_0'' + (k_1 + k_2)\zeta_0 + (k_1 l_1 - k_2 l_2)\theta = m\omega^2\rho\sin(\omega t + \alpha)$$

§ **3.** Для составления уравнений вращательного движения надо несколько преобразовать уравнения Эйлера, которые в нашем случае будут:

$$p = \omega = \varphi'$$

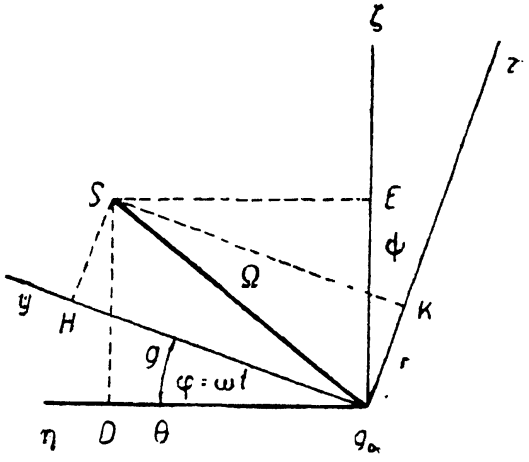
$$B\frac{dq}{dt} + (A - B)\omega r = M_y = \Sigma(zX - xZ) \qquad (14)$$

$$B\frac{dr}{dt} + (B - A)\omega q = M_z = \Sigma(xY - yX)$$

при обычных обозначениях.

Составим чертеж на плоскости $G_0\eta\zeta$ (фиг. 2). Пусть вектор $G_0S = \Omega$ представляет проекцию мгновенной угловой скорости на плоскость $G_0\eta\zeta$, совпадающую с плоскостью Gyz, тогда будет:

$$\Omega_\eta = G_0D = \theta'$$
$$\Omega_\zeta = G_0E = \psi'$$



Фиг. 2.

Проекции же угловой скорости Ω на оси G_0y и G_0z будут:

$$\Omega_y = q = G_0H = \theta'\cos\omega t + \psi'\sin\omega t$$
$$\Omega_z = r = G_0K = -\theta'\sin\omega t + \psi'\cos\omega t \qquad (15)$$

Из этих формул следует:

$$\frac{dq}{dt} = \theta''\cos\omega t + \psi''\sin\omega t + \omega(-\theta'\sin\omega t + \psi'\cos\omega t) =$$
$$= \theta''\cos\omega t + \psi''\sin\omega t + \omega r \qquad (15')$$

$$\frac{dr}{dt} = -\theta''\sin\omega t + \psi''\cos\omega t - \omega(\theta'\cos\omega t + \psi'\sin\omega t) =$$
$$= -\theta''\sin\omega t + \psi''\cos\omega t - \omega q$$

и уравнения Эйлера будут:

$$p = \varphi' = \omega$$

$$\begin{aligned} B(\theta'' \cos \omega t + \psi'' \sin \omega t) + A\omega r &= M_y \\ B(-\theta'' \sin \omega t + \psi'' \cos \omega t) - A\omega q &= M_z \end{aligned} \tag{16}$$

но, заметив, что, совершенно подобно формулам (15), будет

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_\eta &= M_y \cos \omega t - M_z \sin \omega t \\ \mathrm{M}_\zeta &= M_y \sin \omega t + M_z \cos \omega t \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\mathrm{M}_\eta = \Sigma(\zeta \Xi - \xi Z); \quad \mathrm{M}_\zeta = \Sigma(\xi H - \eta \Xi) \tag{18}$$

мы из двух последних уравнений (16) получим:

$$\begin{aligned} B\theta'' + A\omega\psi' &= \mathrm{M}_\eta \\ B\psi'' - A\omega\theta' &= \mathrm{M}_\zeta \end{aligned} \tag{19}$$

Но, на основании формул (9) и (10), будет при $\xi_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_\eta &= -l_1 k_1 (\zeta_0 + l_1 \theta) + l_2 k_2 (\zeta_0 - l_2 \theta) - m\omega^2 \rho a \sin(\omega t + \alpha) \\ \mathrm{M}_\zeta &= l_1 h_1 (\eta_0 - l_1 \psi) - l_2 h_2 (\eta_0 + l_2 \psi) + m\omega^2 \rho a \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned} \tag{19'}$$

К правым частям равенств (19') необходимо еще присовокупить величины $-B_1\theta''$ и $-B_1\psi''$, представляющие силы инерции статора, подшипников и прочих частей, увлекаемых в колебательном движении системы, но не участвующих во вращении ротора, поэтому, положив

$$B + B_1 = B_2$$

мы получим уравнения:

$$\begin{aligned} B_2\theta'' + A\omega\psi' - (l_2 k_2 - l_1 k_1)\zeta_0 + (l_1^2 k_1 + l_2^2 k_2)\theta &= \\ = -m\omega^2 \rho a \sin(\omega t + \alpha) & \\ B_2\psi'' - A\omega\theta' - (l_1 h_1 - l_2 h_2)\eta_0 + (l_1^2 h_1 + l_2^2 h_2)\psi &= \\ = m\omega^2 \rho a \cos(\omega t + \alpha) & \end{aligned} \tag{20}$$

Уравнения (13) и (20) и определяют малые колебания ротора, подвешенного на пружинах.

Величины l_1 и l_2 надо считать заданными и неизменными, величинами же h_1, h_2, k_1, k_2 мы можем распоряжаться по произволу надлежащим подбором пружин.

Очевидно, что уравнения (13) и (20) упрощаются, если взять h_1, h_2, k_1, k_2 так, чтобы было:

$$\begin{aligned} h_2 l_2 - h_1 l_1 &= 0 \\ k_1 l_1 - k_2 l_2 &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

предполагая h_1 и k_1 заданными, определяем из уравнений (21) h_2 и k_2, а именно:

$$h_2 = h_1 \frac{l_1}{l_2}; \quad k_2 = k_1 \frac{l_1}{l_2} \tag{22}$$

Тогда будет:

$$\begin{aligned} h_1 l_1^2 + h_2 l_2^2 &= h_1 l_1^2 + h_1 l_1 l_2 = h_1 l_1 (l_1 + l_2) = h_1 l_1 l \\ k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 &= k_1 l_1^2 + k_1 l_1 l_2 = k_1 l_1 (l_1 + l_2) = k_1 l_1 l \end{aligned} \tag{23}$$

причем положено

$$l = l_1 + l_2$$

Точно так же будет:

$$h_1 + h_2 = \frac{h_1 l}{l_2}; \quad k_1 + k_2 = \frac{k_1 l}{l_2} \tag{24}$$

Очевидно, что уравнения (13) и (20) еще упростятся, если взять

$$h_1 = k_1 \tag{25}$$

Тогда, положив

$$\begin{aligned} \frac{h_1 l_1}{M_1 l_2} &= \frac{k_1 l_1}{M_1 l_2} = \lambda^2; \quad \frac{m}{M_1}\rho = \mu \\ \frac{h_1 l_1 l}{B_2} &= \frac{k_1 l_1 l}{B_2} = n^2; \quad \frac{A}{B_2} = f; \quad \frac{m\rho a}{B_2} = s \end{aligned} \tag{26}$$

получим:

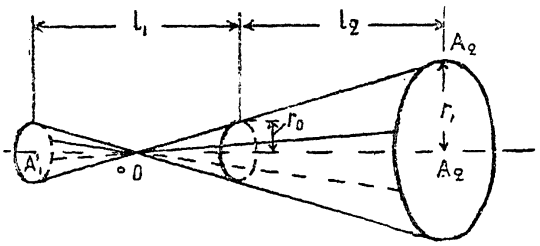
$$\begin{aligned} \xi_0'' + kg\xi_0 &= 0 \\ \eta_0'' + \lambda^2 \eta_0 &= \omega^2 \mu \cos(\omega t + \alpha) \\ \zeta_0'' + \lambda^2 \zeta_0 &= \omega^2 \mu \sin(\omega t + \alpha) \\ \theta'' + n^2 \theta + f\omega\psi' &= -\omega^2 s \sin(\omega t + \alpha) \\ \psi'' + n^2 \psi - f\omega\theta' &= \omega^2 s \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned} \tag{27}$$

Эти уравнения имеют место, когда нет сопротивления колебательному движению. На деле оно всегда есть, хотя бы весьма малое, но даже и малое

сопротивление быстро погашает свободные колебания, так что устанавливаются только вынужденные, именно:

$$\eta_0 = \frac{\mu\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2}\cos(\omega t + \alpha)$$
$$\zeta_0 = \frac{\mu\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2}\sin(\omega t + \alpha) \tag{28}$$

$$\vartheta = -\frac{\omega^2 s}{n^2 + (f-1)\omega^2}\sin(\omega t + \alpha)$$
$$\psi = \frac{\omega^2 s}{n^2 + (f-1)\omega^2}\cos(\omega t + \alpha) \tag{29}$$



Фиг. 3.

пренебрегая влиянием сопротивления, предполагаемого малым, на величину размахов.

На основании формулы (8) имеем следующие конечные уравнения движения точек A_1 и A_2:

$$\eta_1 = \left[\frac{\mu\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} - \frac{\omega^2 l_1 s}{n^2 + (f-1)\omega^2}\right]\cos(\omega t + \alpha)$$
$$\zeta_1 = \left[\frac{\mu\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} - \frac{\omega^2 l_1 s}{n^2 + (f-1)\omega^2}\right]\sin(\omega t + \alpha) \tag{30}$$

$$\eta_2 = \left[\frac{\mu\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} + \frac{\omega^2 l_2 s}{n^2 + (f-1)\omega^2}\right]\cos(\omega t + \alpha)$$
$$\zeta_2 = \left[\frac{\mu\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} + \frac{\omega^2 l_2 s}{n^2 + (f-1)\omega^2}\right]\sin(\omega t + \alpha) \tag{31}$$

Отсюда видно, что при соблюдении условий (21) и (25) траектории точек G, A_1, A_2 — круги, радиусы которых, соответственно, будут:

$$r_0 = \frac{\mu\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2}$$
$$r_1 = r_0 - \frac{l_1}{n^2 + (f-1)\omega^2}\omega^2 s = r_0 - l_1\sigma \tag{32}$$
$$r_2 = r_0 + \frac{l_2}{n^2 + (f-1)\omega^2}\omega^2 s = r_0 + l_2\sigma$$

Из формулы (32) видно, что точки A_2', G, A_1' лежат на одной прямой, которая пересекает ось $A_1 OA_2$ в такой точке O (фиг. 3), что

$$OA_2 : OA_1 = r_1 : r_2$$

Эта точка остается неподвижной, и значит, прямая $A_1' A_2'$, представляющая ось фигуры ротора, вращается равномерно с угловой скоростью ω, описывая коническую поверхность с вершиною в точке O.

§ 4. На основании сделанных обозначений (32), уравнения движения точек G, A_1, A_2 напишутся соответственно:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= r_0 \cos(\omega t + \alpha) & \zeta_0 &= r_0 \sin(\omega t + \alpha) \\ \eta_1 &= r_1 \cos(\omega t + \alpha) & \zeta_1 &= r_1 \sin(\omega t + \alpha) \\ \eta_2 &= r_2 \cos(\omega t + \alpha) & \zeta_2 &= r_2 \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \tag{33}$$

или иначе:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= r_0 \cos(\omega t + \alpha) & \zeta_0 &= r_0 \sin(\omega t + \alpha) \\ \eta_1 &= \eta_0 - l_1 \sigma \cos(\omega t + \alpha) & \zeta_1 &= \zeta_0 - l_1 \sigma \sin(\omega t + \alpha) \\ \eta_2 &= \eta_0 + l_2 \sigma \cos(\omega t + \alpha) & \zeta_2 &= \zeta_0 + l_2 \sigma \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \tag{34}$$

Положим теперь, что имеется несколько неуравновешенных масс:

$$m_1, \; m_2, \; \ldots \; m_k$$

координаты которых:

$$(a_1, \rho_1, \alpha_1), \; (a_2, \rho_2, \alpha_2), \; \ldots (a_k, \rho_k, \alpha_k)$$

тогда, по принципу наложения, получим:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \Sigma r_0^{(i)} \cos(\omega t + \alpha_i) = \cos \omega t \, \Sigma r_0^{(i)} \cos \alpha_i - \sin \omega t \, \Sigma r_0^{(i)} \sin \alpha_i \\ \zeta_0 &= \Sigma r_0^{(i)} \sin(\omega t + \alpha_i) = \sin \omega t \, \Sigma r_0^{(i)} \cos \alpha_i + \cos \omega t \, \Sigma r_0^{(i)} \sin \alpha_i \end{aligned} \tag{35,0}$$

Совершенно так же будет:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_0 - l_1 [\cos \omega t \, \Sigma \sigma_i \cos \alpha_i - \sin \omega t \, \Sigma \sigma_i \sin \alpha_i] \\ \zeta_1 &= \zeta_0 - l_1 [\sin \omega t \, \Sigma \sigma_i \cos \alpha_i + \cos \omega t \, \Sigma \sigma_i \sin \alpha_i] \end{aligned} \tag{35,1}$$

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \eta_0 + l_2 [\cos \omega t \, \Sigma \sigma_i \cos \alpha_i - \sin \omega t \, \Sigma \sigma_i \sin \alpha_i] \\ \zeta_2 &= \zeta_0 + l_2 [\sin \omega t \, \Sigma \sigma_i \sin \alpha_i + \cos \omega t \, \Sigma \sigma_i \sin \alpha_i] \end{aligned} \tag{35,2}$$

Таким образом все дело свелось к вычислению сумм:

$$\begin{aligned} &\Sigma r_0^{(i)} \cos \alpha_i; \; \Sigma r_0^{(i)} \sin \alpha_i \\ &\Sigma \sigma_i \cos \alpha_i; \quad \Sigma \sigma_i \sin \alpha_i \end{aligned}$$

На основании формулы (26) будет:

$$\left.\begin{aligned}\sum r_0^{(i)}\cos\alpha_i &= \frac{1}{M_1}\cdot\frac{\omega^2}{\lambda^2-\omega^2}\sum m_i\rho_i\cos\alpha_i = \frac{m_0}{M_1}\cdot\frac{\omega^2}{\lambda^2-\omega^2}\cdot c_0\\ \sum r_0^{(i)}\sin\alpha_i &= \frac{1}{M_1}\cdot\frac{\omega^2}{\lambda^2-\omega^2}\sum m_i\rho_i\sin\alpha_i = \frac{m_0}{M_1}\cdot\frac{\omega^2}{\lambda^2-\omega^2}\cdot b_0\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

причем положено:

$$\left.\begin{aligned}&m_1+m_2+\ldots+m_k = m_0\\ &\Sigma m_i c_i = m_0 c_0;\ \Sigma m_i b_i = m_0 b_0\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

т. е. m_0 — полная неуравновешенная масса, b_0, c_0 — координаты центра тяжести ее.

Положив

$$\left.\begin{aligned}m_0\rho_0\cos\alpha_0 &= m_0 c_0 = \Sigma m_i\rho_i\cos\alpha_i\\ m_0\rho_0\sin\alpha_0 &= m_0 b_0 = \Sigma m_i\rho_i\sin\alpha_i\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

получим:

$$\left.\begin{aligned}\eta_0 &= \frac{m_0}{M_1}\cdot\frac{\omega^2}{\lambda^2-\omega^2}\rho_0\cos(\omega t+\alpha_0)\\ \zeta_0 &= \frac{m_0}{M_1}\cdot\frac{\omega^2}{\lambda^2-\omega^2}\rho_0\sin(\omega t+\alpha_0)\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Эти уравнения показывают, что и в рассматриваемом случае центр тяжести G ротора описывает около среднего своего положения G_0 круговую орбиту, для которой радиус ρ_0 и начальная фаза α_0 определяются формулами (38).

На основании формулы (26) будет:

$$\sum\sigma_i\cos\alpha_i = \frac{1}{B_2}\cdot\frac{\omega^2}{n^2+(f-1)\omega^2}\sum m_i a_i\rho_i\cos\alpha_i = \frac{1}{B_2}\cdot\frac{\omega^2}{n^2+(f-1)\omega^2}\cdot I_{xz}$$

$$\sum\sigma_i\sin\alpha_i = \frac{1}{B_2}\cdot\frac{\omega^2}{n^2+(f-1)\omega^2}\sum m_i a_i\rho_i\sin\alpha_i = \frac{1}{B_2}\cdot\frac{\omega^2}{n^2+(f-1)\omega^2}\sigma\cdot I_{xy}$$

причем положено:

$$\left.\begin{aligned}I_{xz} &= \Sigma m_i a_i\rho_i\cos\alpha_i = \Sigma m_i a_i c_i\\ I_{xy} &= \Sigma m_i a_i\rho_i\sin\alpha_i = \Sigma m_i a_i b_i\end{aligned}\right\} \quad (38')$$

т. е. I_{xz} и I_{xy} — центробежные моменты неуравновешенных масс.

Таким образом движение точек A_1 и A_2 определяется уравнениями:

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \frac{m_0}{M_1}\cdot\frac{\omega^2}{\lambda^2-\omega^2}[c_0\cos\omega t - b_0\sin\omega t] \\
&\quad - l_1\frac{\omega^2}{n^2+(f-1)\omega^2}\left[\frac{I_{xz}}{B_2}\cos\omega t - \frac{I_{xy}}{B_2}\sin\omega t\right] \\
\zeta_1 &= \frac{m_0}{M_1}\cdot\frac{\omega^2}{\lambda^2-\omega^2}[c_0\sin\omega t + b_0\cos\omega t] \\
&\quad - l_1\frac{\omega^2}{n^2+(f-1)\omega^2}\left[\frac{I_{xz}}{B_2}\sin\omega t + \frac{I_{xy}}{B_2}\cos\omega t\right] \\
\eta_2 &= \frac{m_0}{M_1}\cdot\frac{\omega^2}{\lambda^2-\omega^2}[c_0\cos\omega t - b_0\sin\omega t] + \\
&\quad + l_2\frac{\omega^2}{n^2+(f-1)\omega^2}\left[\frac{I_{xz}}{B_2}\cos\omega t - \frac{I_{xy}}{B_2}\sin\omega t\right] \\
\zeta_2 &= \frac{m_0}{M_1}\cdot\frac{\omega^2}{\lambda^2-\omega^2}[c_0\sin\omega t + b_0\cos\omega t] + \\
&\quad + l_2\frac{\omega^2}{n^2+(f-1)\omega^2}\left[\frac{I_{xz}}{B_2}\sin\omega t + \frac{I_{xy}}{B_2}\cos\omega t\right]
\end{aligned} \tag{40}$$

Нетрудно видеть, что орбиты этих точек — также круги.

§ **5.** Положим теперь, что прибавлением или отнятием некоторых добавочных масс мы хотим уравновесить ротор. Спрашивается, как велики должны быть эти массы и где их надо к ротору прикрепить.

Легко видеть, что прибавлением или отнятием одной массы уравновесить ротор нельзя. В самом деле, положим, что в точке (x_1, y_1, z_1) мы помещаем добавочную массу q_1. Чтобы ротор стал уравновешенным, надо, чтобы, по присоединении этой массы, все три центробежных момента равнялись нулю, ибо в этом предположении выведены наши уравнения, и чтобы при всяком значении t было:

$$\eta_0 = 0;\ \zeta_0 = 0$$
$$\theta = 0;\ \psi = 0$$

Положив, по аналогии с равенствами (38′),

$$I_{zy} = \Sigma m_i b_i c_i$$

мы видим, что высказанные условия выражаются следующими равенствами:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & q_1 x_1 y_1 + I_{xy} = 0 \\ (2) & q_1 x_1 z_1 + I_{xz} = 0 \\ (3) & q_1 z_1 y_1 + I_{zy} = 0 \end{array}\right\} \text{равенство нулю центробежных моментов}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (4) & q_1 y_1 + m_0 b_0 = 0 \\ (5) & q_1 z_1 + m_0 c_0 = 0 \end{array}\right\} \eta_0 = 0;\ \zeta_0 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} q_1 x_1 y_1 + I_{xy} = 0 \\ q_1 x_1 z_1 + I_{xz} = 0 \end{array}\right\} \vartheta = 0;\ \psi = 0$$

Как видно, последние два уравнения тождественны с первыми двумя, поэтому остаются только первые пять уравнений, между тем в нашем распоряжении только четыре произвольные величины q_1, x_1, y_1, z_1, следовательно нужно, чтобы между известными величинами

$$m_0 b_0,\ m_0 c_0,\ I_{xy},\ I_{xz},\ I_{yz}$$

существовало некоторое соотношение, чего не предполагается.

Таким образом присоединение одной массы для уравновешивания недостаточно, и надо присоединять, по крайней мере, две массы; обозначая их через q_1 и q_2 и координаты их через $x_1 y_1 z_1$ и $x_2 y_2 z_2$, будем иметь в нашем распоряжении восемь произвольных величин, которые должны удовлетворять пяти уравнениям:

$$\begin{aligned} q_1 x_1 y_1 + q_2 x_2 y_2 + I_{xy} &= 0 \\ q_1 x_1 z_1 + q_2 x_2 z_2 + I_{xz} &= 0 \\ q_1 y_1 z_1 + q_2 y_2 z_2 + I_{yz} &= 0 \\ q_1 y_1 + q_2 y_2 + m_0 b_0 &= 0 \\ q_1 z_1 + q_2 z_2 + m_0 c_0 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Очевидно, что к этим пяти уравнениям можно присовокупить еще три любых уравнения, обусловленных лишь тем, чтобы полученная система допускала решение относительно наших неизвестных, т. е. чтобы уравнения были совместны, напр.:

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_1 \\ q_1 &= q \\ q_2 &= q \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

причем q — заданная величина, положительная или отрицательная.

Система уравнений (I) тогда напишется так:

$$\begin{aligned} q(y_1 - y_2)x_1 + I_{xy} &= 0 \\ q(z_1 - z_2)x_1 + I_{xz} &= 0 \\ q(y_1 z_1 + y_2 z_2) + I_{yz} &= 0 \\ q(y_1 + y_2) + m_0 b_0 &= 0 \\ q(z_1 + z_2) + m_0 c_0 &= 0 \end{aligned} \qquad (I')$$

Решение этих уравнений затруднений не представляет, ибо оно приводится к решению квадратного уравнения относительно x_1 и уравнений первой степени для остальных неизвестных.

Отсюда видно, что присоединением двух равных между собою масс произвольно избранной величины, при которой корни x_1 вещественные, симметрично расположенных относительно плоскости zGy, может быть достигнуто полное динамическое уравновешивание ротора.

Так как, вместо системы (II), три уравнения могут быть избираемы по произволу, то уравновешивание может быть осуществлено на бесчисленное множество манеров.

Как видно, при этом уравновешивании будет достигнуто:

а) центр тяжести ротора будет лежать на оси вала;

б) ось вала будет главной осью инерции;

в) оси Gy и Gz, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси вала, будут также главными осями инерции;

г) давление на концевые подшипники вала будет равно статическому, имеющему место при отсутствии вращения вала [это следует из выражений (8)].

Эти результаты, а также уравнения (1), (2), (3), (4), (5) можно было бы написать и сразу на основании известной теоремы динамики, но все предыдущие выкладки были необходимы для установления соотношений между движением точек A_1 и A_2 при неуравновешенном роторе, чтобы по наблюдению этого движения получить с требуемой степенью точности величины:

$$m_0 b_0,\ m_0 c_0,\ I_{xy},\ I_{xz}$$

которые нужны для расчета добавочных масс и положения их, ибо иначе пришлось бы делать множество попыток, прежде чем уравновешивание было бы достигнуто.

В первом приближении принимается $I_{xy} = 0$.

§ **6.** Чтобы отдать себе отчет о порядке тех величин, с которыми здесь приходится иметь дело, положим, что надо уравновесить ротор гирокомпаса, элементы которого таковы:

Вес ротора . . . . . 2500 г
Диаметр ротора . . . . . 12 см
Вес статора и камеры . . . . . 1000 г
Масса M_1 . . . . . $\frac{3500}{980} = 3.6$
Момент инерции A 56
» » B 30
» » B_2 36
Отношение $\frac{A}{B} = f = 1.87$

Как бы возмущающие массы расположены ни были, но вообразив, что они сосредоточены в одну точку вблизи наружной поверхности ротора (на самом деле они могут происходить лишь от вделанного в ротор индуктора, диаметр которого около половины диаметра ротора), мы значительно увеличим центробежные моменты и в меньшем размере статические моменты; таким образом, взяв

$$m = m_0$$

и положив

$$a = 3\,\text{см},\ b = 3\,\text{см},\ c = 4\,\text{см},\ \rho = 5\,\text{см}$$

и приняв вес грузика $p = 1\,\text{г}$, так что $m \approx \frac{1}{1000}$, мы будем иметь:

$$m_0 \rho_0 < m\rho$$
$$I_{xy} < mab;\ I_{xz} < mac;\ I_{yz} < mbc$$

Обозначив через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ — положительные правильные дроби так, что

$$0 < \varepsilon_1 < 1;\ 0 < \varepsilon_2 < 1;\ 0 < \varepsilon_3 < 1;\ 0 < \varepsilon_4 < 1$$

мы можем писать:

$$m_0 \rho_0 = \varepsilon_1 m\rho$$
$$I_{xy} = \varepsilon_2 mab;\ I_{xz} = \varepsilon_3 mac;\ I_{yz} = \varepsilon_4 mbc$$

причем будет:

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2;\ \varepsilon_1 > \varepsilon_3;\ \varepsilon_1 > \varepsilon_4$$

значит будет:

$$m_0 \rho_0 = 0.005\varepsilon_1$$
$$\frac{m_0 \rho_0}{M_1} = \frac{0.005}{3.6}\varepsilon_1 = \frac{1}{720}\varepsilon_1 \approx 0.0014\varepsilon_1$$
$$I_{xy} = 0.009\varepsilon_2;\ I_{xz} = 0.012\varepsilon_3;\ I_{zy} = 0.012\varepsilon_4$$

Положим, что дробь $\varepsilon_3 > \varepsilon_2$, тогда будет

$$\sqrt{I_{xy}^2 + I_{xz}^2} < 0.015\varepsilon_3 = 0.015\varepsilon$$

Входящие в уравнение (40) величины

$$\frac{I_{xz}}{B_2}\cos\omega t - \frac{I_{xy}}{B_2}\sin\omega t \quad \text{и} \quad \frac{I_{xz}}{B_2} + \frac{I_{xy}}{B_2}\cos\omega t$$

положив

$$I_{xz} = r\cos\beta;\ I_{xy} = r\sin\beta$$

так что

$$r = +\sqrt{I_{xy}^2 + I_{xz}^2}$$

могут быть написаны так:

$$\frac{r}{B_2}\cos(\omega t + \beta);\quad \frac{r}{B_2}\sin(\omega t + \beta)$$

причем будет

$$\frac{r}{B_2} = \frac{0.015}{36}\varepsilon \approx 0.0004\varepsilon$$

Для рассматриваемого ротора:

$$l_1 = 3\text{ см},\ l_2 = 4\text{ см}$$

Таким образом уравнения (40) в нашем случае будут:

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= 0.0014\varepsilon_1\frac{\omega^2}{\lambda^2-\omega^2}\cos(\omega t + \alpha_0)\\
&\quad - 0.0012\varepsilon\frac{\omega^2}{n^2+(f-1)\omega^2}\cos(\omega t + \beta)\\
\zeta_1 &= 0.0014\varepsilon_1\frac{\omega^2}{\lambda^2-\omega^2}\sin(\omega t + \alpha_0)\\
&\quad - 0.0012\varepsilon\frac{\omega^2}{n^2+(f-1)\omega^2}\sin(\omega t + \beta)\\
\eta_2 &= 0.0014\varepsilon_1\frac{\omega^2}{\lambda^2-\omega^2}\cos(\omega t + \alpha_0) +\\
&\quad + 0.0016\varepsilon\frac{\omega^2}{n^2+(f-1)\omega^2}\cos(\omega t + \beta)\\
\zeta_2 &= 0.0014\varepsilon_1\frac{\omega^2}{\lambda^2-\omega^2}\sin(\omega t + \alpha_0) +\\
&\quad + 0.0016\varepsilon\frac{\omega^2}{n^2+(f-1)\omega^2}\sin(\omega t + \beta)
\end{aligned} \tag{40'}$$

при этом отношение $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \approx \frac{1}{4}$.

Эти уравнения имеют место при отсутствии сопротивления колебательному движению системы, в этом случае множитель $\frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2}$ изменением угловой скорости ω может быть доведен до сколь-угодно большой величины, но на практике всегда есть сопротивление, а тогда указанный множитель заменяется следующим:

$$N = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^2 + \gamma^2 \frac{\lambda^2}{\omega^2}}} \tag{41}$$

где γ — величина, зависящая от сопротивления.

При резонансе, т. е. когда $\lambda = \omega$, множитель N достигает наибольшего своего значения

$$N_{max} = \frac{1}{\gamma} \tag{42}$$

и так как γ вообще величина очень малая (скажем $^1/_{50}$) и так как

$$\frac{\omega^2}{n^2 + (f-1)\omega^2} < \frac{1}{f-1} < 1.2$$

то амплитуда колебаний, представляемых первым членом уравнений (40'), будет приблизительно в 200 раз больше амплитуды колебаний, представляемых вторым членом этих уравнений, пока же резонанса нет, то отношение этих величин составляет около $^1/_4$.

Это обстоятелъство дозволяет определять из наблюдений начальные фазы α_0 и β в отдельности, как об этом сказано ниже, а после того как эти фазы определены, уравновешивание ротора совершается весьма просто.

§ 7. Как видно в нашем примере, даже при резком резонансе, когда

$$N_{max} = 50$$

амплитуда колебаний составляет всего 0.7 мм, поэтому измерение их требует специальных приспособлений, а именно: а) балансировочный станок, б) искровой прибор, в) визирная труба с окулярным микрометром и позиционным кругом, г) обыкновенные визирные трубы большого (25—40) увеличения для производства зеркальных отсчетов по шкалам, д) стробоскоп.

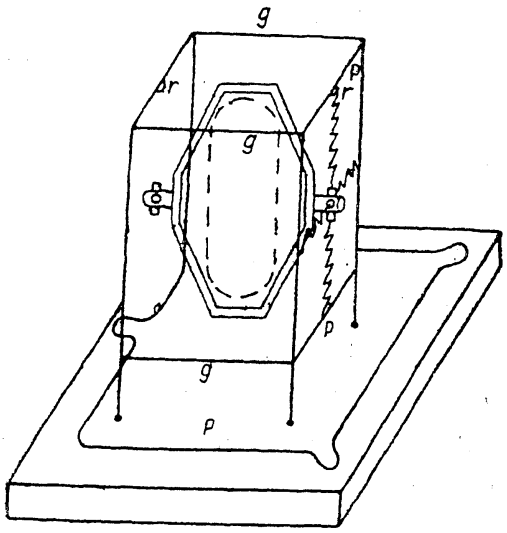
а) **Балансировочный станок** изображен схематически на фиг. 4, в предположении, что мы имеем дело с малыми роторами, приблизительно тех размеров, которые указаны выше.

Устройство этого станка таково: на фундаментной плите P, снабженной 3 установочными винтами, закрепляются 4 колонки, неизменно

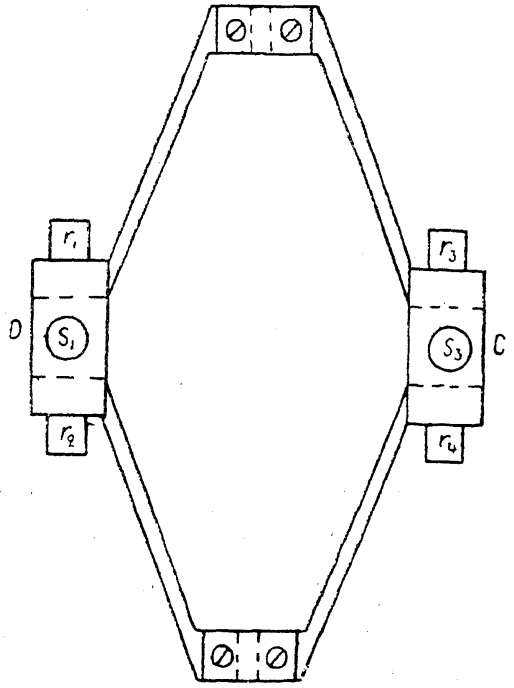
и прочно скрепленные между собою поперечинами p и продольными связями q, а если окажется нужным, то и кницами по углам, заменяющими диагонали, которые ставить не следует, ибо они мешали бы визированию.

Поперечины p снабжаются прочными захватами r, к которым укрепляются концы подвесных пружин, обделанные подобно тому, как обделываются пружины индикаторов, служащих для снятия диаграмм работы пара в цилиндре паровой машины.

Совершенно такие же захваты ставятся и на колонке посредине между поперечинами для закрепления горизонтальных пружин.



Фиг. 4.



Фиг. 4а.

К станку же принадлежит рамка, в которую закрепляется камера, заключающая в себе вполне собранный ротор, статор, подшипники и пр. Эта рамка отливается целиком из легкого металла; горизонтальные ее стороны снабжаются подцапфенниками, в которые зажимаются цапфы камеры (фиг. 4а). Боковые вертикальные ее стороны снабжаются полыми (с отверстием диаметром около 20 мм) цапфами C и D с закрепами r_1, r_2, r_3, r_4 для вертикальных и с такими же закрепами s_1, s_2, s_3, s_4 для горизонтальных пружин.

Из этой схемы само собою видно, что описанным устройством осуществляется тот способ пружинного подвеса ротора, который схематически изображен на фиг. 1 и к которому относятся все изложенные здесь расчеты.

Подвесных пружин, которые должны быть строго калиброваны и различной жесткости, изготовляется целый ассортимент, подобно тому как это делается для индикаторов.

б) **Визирная труба** делается специального устройства, так чтобы при визировании на предмет в расстоянии 50—60 см можно было давать установку окуляру, снабженному микрометром с одною неподвижною и одною подвижною нитью; увеличение самого окуляра должно быть около 20, фокусное расстояние объектива — около 30 см, диаметр объектива — около 50 мм. Труба снабжается позиционным кругом, отсчет — до 0.5′. Установка трубы на штативе или треноге.

в) **Искровой прибор** должен давать весьма яркую искру в тот момент, когда весьма нежный и легкий замыкатель, укрепленный на одном из концов вала ротора, проходит через определенное положение, давая короткий и резкий контакт. Общее устройство искрового прибора подобно тому, которое применяется для фотографирования полета пули, но главная искра должна быть более продолжительная и следовать непрерывно одна за другой при всяком замыкании.

г) **Обыкновенные визирные трубы** со шкалами для зеркального отсчета не требуют описания.

д) **Стробоскоп** должен быть снабжен электрическим мотором, который можно было бы налаживать на то же самое число оборотов, как и ротор, причем это число оборотов должно удерживаться в точности в течение приблизительно 1 минуты, чтобы поспеть произвести надлежащие отсчеты.

е) Кроме этого, надо изготовить несколько шляпок (муфт), в точности пригнанных к концам валика ротора, на который они плотно надеваются. Днище ab этих шляпок делается или черным, или матовым. В первом случае на него наносятся два взаимно перпендикулярных строго центрованных ярких штриха (фиг. 5), шириною около 0.02—0.03 мм, из которых один вблизи центра помечается черточкой. Во втором случае штрихи должны быть черные, шириною около 0.01 мм. Эти штрихи представляют оси Gy и Gz ротора, которым они ставятся параллельно.

§ 8. Наблюдения и измерения, производимые при помощи этих приборов, должны доставить значения величин

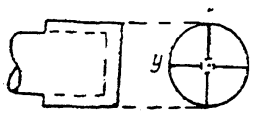
$$\alpha_0 \quad \text{и} \quad \frac{m_0}{M_1} \cdot \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \rho_0$$

или, точнее говоря, $\frac{m_0}{M_1} \cdot \frac{1}{\gamma} \rho_0$, а также величины β и r при втором члене формулы (40′).

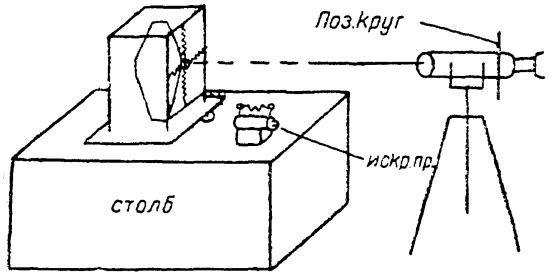
Формулы (8) показывают, что первые члены происходят от орбитального движения центра тяжести ротора, а значит, и общего с ним орбиталь-

ного движения всей системы, и при настройке «в резонанс» вторые члены формулы (40′) ничтожно малы по сравнению с первыми.

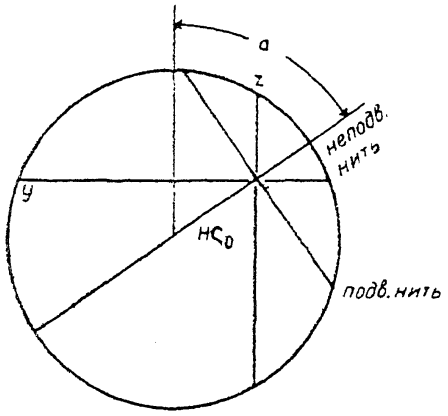
С другой стороны, вторые члены этих формул происходят от вращательных перемещений θ и ψ системы, и при l_1 и l_2 малых (3—4 см) линейные перемещения лишь в небольшое (около 4) число раз меньше первых членов, когда *резонанса нет*. При неизменных значениях *угловых* перемещений θ и ψ, при помощи *«оптических»* рычагов (зеркальный отсчет) линейные перемещения могут быть увеличены против вышеуказанных в сотни раз, причем первые члены на эти перемещения практически не влияют. Эти измерения доставят значения γ и β.



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Таким образом измерения сами собою распадаются на две серии, друг от друга не зависимые.

Серия первая. Расположение аппаратов для производства наблюдений этой серии может быть двоякое, смотря по тому, применяется ли искровой прибор, т. е. попеременное мгновенное освещение, или стробоскоп и постоянное освещение.

1. Расположение аппаратов при пользовании искровым прибором показано на схеме фиг. 6, и порядок наблюдений следующий:

а) Камера с гироскопом подвешивается в станок на избранных для наблюдений пружинах (о выборе пружин см. ниже).

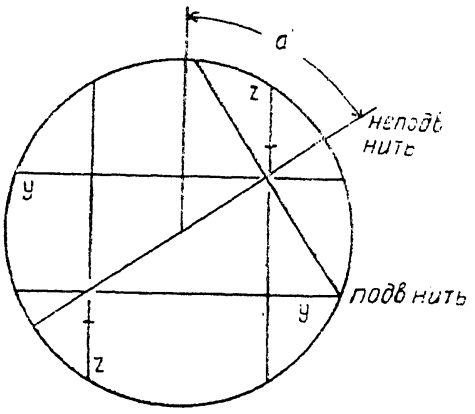
б) Позиционный круг ставят на отсчет 0°, наводят трубу на нить отвеса и, поворачивая трубу около ее продольной оси, приводят неподвижную нить микрометра в совпадение с изображением отвесной линии и закрепляют трубу в ее лагерах.

Ставят подвижную нить микрометра в среднее положение, и при покое ротора наводят образовавшееся перекрестье нитей на центр конца вала и производят отсчет по барабану микрометра.

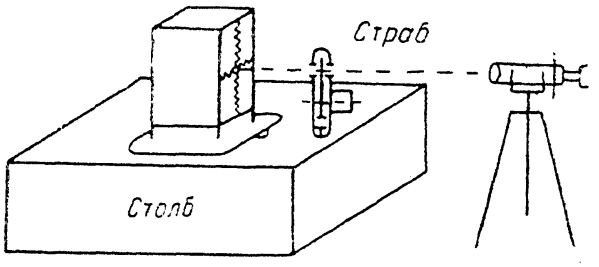
в) Выверяют контакт искрового прибора так, чтобы замыкание происходило, когда ось Gz, нанесенная на шляпке, проходит через вертикальное положение, и главная искра проскакивала бы при этом положении.

г) Пускают ротор в ход и настраивают число оборотов в резонанс, т. е. на наибольшую вибрацию.

д) Включают искровой прибор, тогда в поле зрения трубы валик будет казаться неподвижным, но центр его — смещенным с перекрестья нитей, ось же Gz будет вертикальна и Gy — горизонтальна.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

Поворачивают микрометр так, чтобы неподвижная его нить проходила через изображение центра валика, после чего подвижную нить наводят на центр валика, тогда в поле зрения трубы получится картина, представленная на фиг. 7. Производят отсчет по позиционному кругу — это будет начальная фаза α_0, отсчет же по барабану будет пропорционален величине ρ_0.

Чтобы учесть этот коэффициент пропорциональности и влияния сопротивления, укрепляют на роторе в определенной точке, напр. в конце оси z, точно взвешенный грузик. Приводят в резонанс, определяют новое значение фазы α' и отсчета по барабану, после чего легко находится величина γ и влияние сопротивления на изменение фазы, т. е. поправка в фазе.

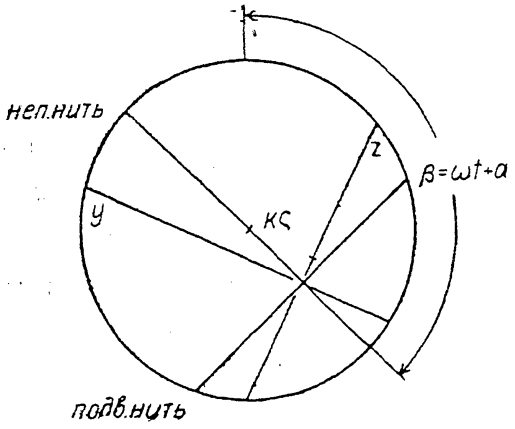
Это наблюдение можно производить и несколько иначе, если при каждом обороте ротора получать не одну искру, а две, т. е. в моменты присоединения оси Gz через верхнее и через нижнее вертикальные положения, тогда в поле зрения трубы будет дано два симметрично расположенных изображения конца валика, как показано на фиг. 8. Обмеры этих положений оче-

видны и пояснений не требуют. Способ этот предпочтительнее, ибо при нем исключается влияние смещения трубы с первоначальной ее наводки на центр валика и наводка точнее.

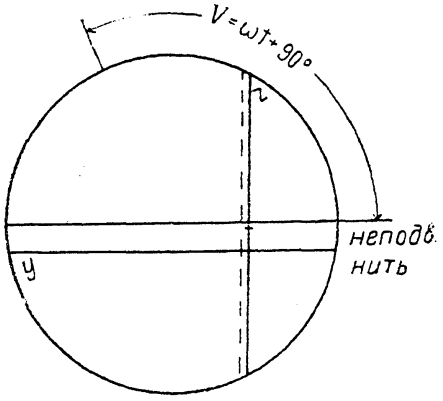
2. Расположение приборов при наблюдении стробоскопом показано на фиг. 9. Здесь картина, получаемая в поле зрения трубы, будет иная, именно ось Gz не будет направлена вертикально.

Измерение здесь надо производить в два приема, а именно (фиг. 10а и 10б):

а) Повернуть микрометр так, чтобы неподвижная его нить проходила через изображение центра валика, после чего навести подвижную нить



Фиг. 10а.



Фиг. 10б.

на эту точку и произвести отсчеты по барабану (это даст $k\rho$) и по позиционному кругу, что даст величину

$$\beta = \omega t + \alpha$$

б) Повернуть микрометр так, чтобы подвижная нить стала параллельно оси Gz, произвести отсчет по позиционному кругу, что даст величину

$$\gamma = \omega t + 90^\circ$$

По отсчетам β и γ начальная фаза α находится по формуле

$$\alpha = 90^\circ + \beta - \gamma$$

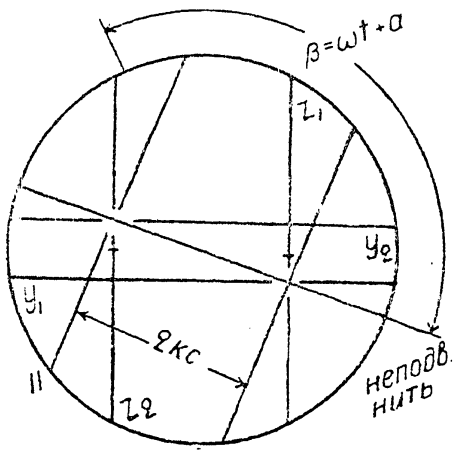
Если в стробоскопе сделать не одно, а два диаметрально противоположных окна на подвижном диске, то в поле зрения получатся два изображения, симметрично расположенные, как показано на фиг. 11. Производство обмера само собой понятно.

Примечание. Если бы в устройстве искрового прибора или в синхронизации стробоскопа встретилось затруднение, то можно воспользоваться неоновой лампой, дающей при каждом контакте вспышку.

Серия вторая. Для производства наблюдений этой серии, к камере или к несущей ее рамке прикрепляют 2 небольших зеркала, причем плоскость одного из них устанавливается перпендикулярно к оси $G_0\eta$, другого — перпендикулярно к оси $G_0\zeta$. Так, при нормальном положении плоскость первого зеркала вертикальна, второго — горизонтальна.

Первое зеркало будет показывать углы поворотов около оси ζ, т. е. углы ψ, второе — будет показывать повороты около оси η, т. е. углы θ; иными словами, будут получаться показания, пропорциональные второму члену формул (40′), в значительно увеличенном виде, т. е. величины

$$S_1 \cos(\omega t + \beta) \quad \text{и} \quad S_1 \sin(\omega t + \beta)$$



Фиг. 11.

так что все дело опять приведено к измерению амплитуд и фаз.

Расположение приборов показано на фиг. 12а и 12б. Здесь удобнее пользоваться искровым прибором или неоновой лампой, которыми будет освещаться шкала в моменты прохождения оси Gz через верхнее или нижнее положение или через то и другое, сделав два диаметрально противоположных контакта, т. е. шкала будет освещаться или в моменты, когда

$$\omega t = 2k\pi$$

где k — любое целое число, или в моменты, когда $\omega t = k\pi$.

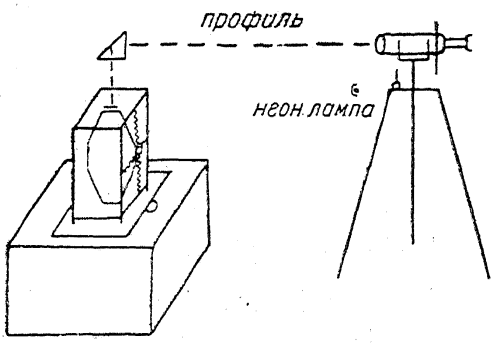
Таким образом первое зеркальце доставит величину, пропорциональную $S_1 \cos\beta$, второе зеркальце — величину, пропорциональную $S_1 \sin\beta$, причем коэффициенты пропорциональности определяются геометрически, по соответствующим обмерам расположения зеркал и шкал, значит вторые члены в уравнениях (40) будут известны, а по ним найдутся I_{xy} и I_{xz}.

Фазовый угол β может быть получен и независимо от расчетных данных и геометрических обмеров следующим образом. Возьмем наблюдения по первому зеркальцу и, убрав искровой прибор или неоновую лампу, будем освещать шкалу обыкновенной лампой; тогда, ведя по шкале указатель и визируя в трубу, легко измерить элонгацию, которая и доставит величину S_1, а значит, по сопоставлению с первым наблюдением, получим $\cos\beta$ независимо от коэффициента пропорциональности. Совершенно так же по показаниям второго зеркальца найдем $\sin\beta$, отсюда — угол β.

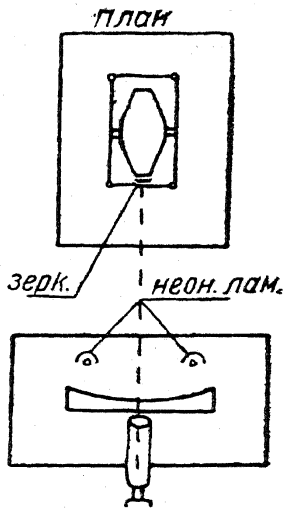
Величины I_{xy} и I_{xz} нужны нам, чтобы рассчитать величину и координаты добавочных грузиков, которые надо присоединить к ротору, чтобы уравновесить его; но, после того как фазовые углы α_0 и β определены, гораздо проще, а главное надежнее, чем пользоваться расчетными данными, определить положение и вес этих грузиков чисто экспериментальным путем.

В самом деле, настроив вибрацию в резонанс, вынимаем ротор и, отметив на нем радиус, соответствующий фазовому углу α_0, наклеиваем в избранном месте этого радиуса кусочек воска и затем подбираем вес этого кусочка так, чтобы вибрация при резонансе исчезала; определив вес этого кусочка воска, заменяем его постоянным грузиком.

Совершенно так же, изменив число оборотов так, чтобы резонанса не было, приклеиваем к ротору кусочек воска на радиусе с фазовым углом β и подгоняем его вес так, чтобы вибрация исчезла.



Фиг. 12а.



Фиг. 12б.

Чтобы не разбирать постоянно камеры, надо к самой рамке укрепить концевые подшипники ротора и статор.

§ 9. Нетрудно видеть, что применением зеркальных отсчетов (оптический рычаг) может быть достигнуто увеличение линейных перемещений в 500 и 1000 раз, тогда как настройкой в резонанс едва ли удастся достигнуть увеличения более чем в 50 раз по причине, указанной в § 6, и сам собою является вопрос, нельзя ли для определения величин η_0 и ζ_0 соединить оба метода, т. е. настройки в резонанс и зеркальных отсчетов.

Возможность к этому имеется, соединив методу механического и оптического увеличения.

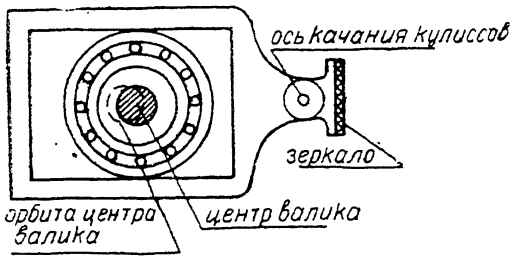
В самом деле, положим, что на конец валика, вместо шляпки, надет весьма тщательно изготовленный шариковый подшипник (в подшипниках гирокомпасов люфт меньше $^1/_{2000}$ мм). Ясно, что орбитальное движение

центра C валика около среднего его положения O совершенно подобно движению центра эксцентрика, скажем — золотниковой тяге паровой машины, значит он сейчас же преобразуется в попеременно-возвратное движение, а это последнее — в колебательное движение зеркальца по схеме, изображенной на фиг. 13, соответствующей простейшему эксцентриковому механизму, причем очевидно, что зеркало будет севершать колебательное движение около центра A вращения кулисы ab.

Способ наблюдений с искровым прибором или неоновой лампой описан выше.

§ **10.** Мы предполагали в наших выводах, что величина $I_{yz} = 0$, и у нас решена задача о малых колебаниях такого тела, у которого главные моменты инерции суть ABB и все три центробежные момента

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$



Фиг. 13.

нам же надо теперь рассмотреть движение такого тела, у которого

$$I_{xy} = I_{xz} = 0$$

центробежный же момент I_{yz} не равен нулю, а есть весьма малая величина по сравнению с B, которую мы обозначим через ε, так что

$$-I_{yz} = \varepsilon$$

В первом случае живая сила была

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Br^2$$

и уравнения вращательного движения были:

$$A = \frac{dp}{dt} = M_x = 0$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - B)pr = M_y = \sum(zX - xZ) \tag{41}$$

$$B\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = M_z = \sum(xY - yX)$$

и нами получены решения этих уравнений, которые мы обозначим так:

$$p = p_0 = \omega$$

$$q = q_0(t);\ r = r_0(t) \tag{42}$$

Во втором случае живая сила будет

$$2T_1 = Ap^2 + Bq^2 + Br^2 - 2\varepsilon qr \tag{43}$$

и нам надо рассмотреть движение такого тела.

Уравнения движения составляются по следующей схеме Лагранжа:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial p}\right) + q\frac{\partial T_1}{\partial r} - r\frac{\partial T_1}{\partial q} = M_x \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q}\right) + r\frac{\partial T_1}{\partial p} - p\frac{\partial T_1}{\partial r} = M_y \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial r}\right) + p\frac{\partial T_1}{\partial q} - q\frac{\partial T_1}{\partial p} = M_z
\end{aligned} \tag{44}$$

и мы получим:

$$\begin{aligned}
&A\frac{dp}{dt} + \varepsilon(r^2 - q^2) = M_x \\
&B\frac{dq}{dt} + (A - B)pr + \varepsilon\left(pq - \frac{dr}{dt}\right) = M_y \\
&B\frac{dr}{dt} + (B - A)pq - \varepsilon\left(pr + \frac{dq}{dt}\right) = M_z
\end{aligned} \tag{45}$$

Так как при $\varepsilon = 0$ должно быть

$$p = p_0,\ q = q_0,\ r = r_0 \tag{46}$$

причем так как p_0, q_0, r_0 нам известны, полагаем:

$$p = p_0 + \frac{\varepsilon}{B}p_1;\quad q = q_0 + \frac{\varepsilon}{B}q_1;\quad r = r_0 + \frac{\varepsilon}{B}r_1 \tag{47}$$

(делитель B введен для того, чтобы p_1, q_1, r_1 представляли угловые скорости так же, как p, q, r) и определяем p_1, q_1, r_1 так, чтобы величины (47) удовлетворяли уравнениям (15); ограничиваясь в них членами первого порядка относительно ε, мы применим для решения этого вопроса метод разыскания возмущенного движения.

В соответствии с выражениями (47), мы положим:

$$\theta = \theta_0 + \frac{\varepsilon}{B}\theta_1;\quad \psi = \psi_0 + \frac{\varepsilon}{B}\psi_1$$

и, заметив, что выражения M_y и M_z суть функции θ и ψ, притом линейные, мы положим:

$$M_y = M_y^0 + \frac{\varepsilon}{B}M_y';\quad M_z = M_z^0 + \frac{\varepsilon}{B}M_z'$$

так что M_y^0 и M_z^0 получаются заменив в выражениях M_y и M_z буквы θ и ψ на θ_0 и ψ_0 и величины M_y' и M_z' получатся заменив в тех же выражениях θ и ψ на θ_1 и ψ_1. То же относится и к выражениям M_η и M_ζ, даваемым формулой (19′).

Таким образом, по подстановке и упрощении, удерживая лишь члены, содержащие ε в первой степени, получим:

$$A\frac{dp_0}{dt} + \varepsilon\left[\frac{A}{B}\cdot\frac{dp_1}{dt} + r_0^2 - q_0^2\right] = 0$$

$$B\frac{dq_0}{dt} + (A-B)p_0 r_0 - M_y^0 +$$

$$+ \varepsilon\left[\frac{dq_1}{dt} + \frac{A-B}{B}(p_1 r_0 + r_1 p_0) + p_0 q_0 - \frac{dr_0}{dt} - \frac{M_y'}{B}\right] = 0 \qquad (48)$$

$$B\frac{dr_0}{dt} + (B-A)p_0 q_0 - M_z^0 +$$

$$+ \varepsilon\left[\frac{dr_1}{dt} + \frac{B-A}{B}(p_1 q_0 + q_1 p_0) - p_0 r_0 - \frac{dq_0}{dt} - \frac{M_z'}{B}\right] = 0$$

Но, в виду того, что

$$p = p_0 = \omega,\quad q = q_0,\quad r = r_0$$

суть решения уравнений (41), члены, не содержащие множителя ε, равны нулю, так что первое уравнение (48) будет

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{dp_1}{dt} + r_0^2 - q_0^2 = 0$$

но величины q_0 и r_0 суть малые того же порядка, как ε, поэтому это уравнение будет

$$\frac{dp_1}{dt} = 0$$

откуда следует [1]

$$p_1 = 0$$

[1] Здесь может представиться такое возражение: величины q_0^2 и r_0^2 будут заключать не просто множитель s^2, который мал, но и множитель ω^2, который весьма велик, так что произведение этих множителей может быть и большим.

Но здесь надо иметь в виду следующее обстоятельство: указанный множитель $\omega^2 s^2$ умножается на линейную функцию, с коэффициентом нулевого порядка относительно ω, синусов и косинусов аргументов разной кратности ωt. По интегрировании, во все члены войдет делитель ω, так что p_1 будет представляться произведением ωs^2 на упомянутую периодическую функцию.

Величина p_1 нам нужна лишь для составления членов в квадратных скобках второго и третьего уравнений (48), а здесь, наряду с членами $p_1 r_0$ и $p_1 q_0$, содержащими множитель $\omega^2 s^2$, стоят члены $p_0 q_0$ и $p_0 r_0$, содержащие множитель $\omega^2 s$. Величина s есть весьма малое отвлеченное число, значит члены $p_1 r_0$ и $p_1 q_0$ будут весьма малы по сравнению с $p_0 q_0$ и $p_0 r_0$ и могут быть отброшены, а это равносильно тому, чтобы положить $p_1 = 0$.

и два последние уравнения будут:

$$B\frac{dq_1}{dt}+(A-B)\omega r_1 = M_y' + B\left(\frac{dr_0}{dt}-\omega q_0\right)$$
$$B\frac{dr_1}{dt}+(B-A)\omega q_1 = M_z' + B\left(\frac{dq_0}{dt}+\omega r_0\right) \qquad (49)$$

Сделаем:

$$\frac{dr_0}{dt}-\omega q_0 = F(t); \quad \frac{dq_0}{dt}+\omega r_0 = H(t)$$

Очевидно, что если бы этих членов не было, то уравнения (50) были бы совершенно одинаковы с уравнениями (14), и из них получились бы, поступая подобно тому как в § 3, уравнения:

$$B\theta_1'' + A\omega\psi_1' = \mathrm{M}_\zeta'$$
$$B\psi_1'' - A\omega\theta_1' = \mathrm{M}_\zeta' \qquad (50)$$

подобные уравнениям (19).

Но

$$\mathrm{M}_\eta' = \frac{\partial \mathrm{M}_\eta}{\partial\theta}\theta_1 + \frac{\partial \mathrm{M}_\zeta'}{\partial\psi}\psi_1 = -(l_1^2 k_1 + l_2^2 k_2)\theta_1 = -n^2\theta_1$$
$$\mathrm{M}_\zeta' = \frac{\partial \mathrm{M}_\zeta}{\partial\theta}\theta_1 + \frac{\partial \mathrm{M}_\eta}{\partial\psi}\cdot\psi_1 = -(l_1^2 h_1 + l_2^2 h^2)\psi = -n^2\psi_1$$

Мы имели формулы (29), которые дают:

$$\theta_0 = -\frac{\omega^2}{n^2+(f-1)\omega^2}\, s\sin(\omega t+\alpha)$$
$$\psi_0 = \frac{\omega^2}{n^2+(f-1)\omega^2}\, s\cos(\omega t+\alpha) \qquad (29')$$

и которые следуют из уравнения (27). Здесь надо обратить внимание на то обстоятельство, что хотя в уравнениях (27) правые части — второго порядка относительно ω, в уравнениях (29′) они *нулевого* порядка, и при возрастании ω коэффициенты приближаются к определенному *конечному* пределу.

На основании формул (15) и (16) мы видим, что выражения $F(t)$ и $H(t)$ будут вида:

$$F(t) = \omega^2 s F_1(t); \quad H(t) = \omega^2 s H_1(t)$$

причем $F_1(t)$ и $H_1(t)$ суть функции, представляющие суммы членов с коэффициентами нулевого порядка относительно ω при синусах и косинусах разных аргументов.

Подобные же выражения мы получим и для величин:

$$F(t)\cos\omega t - H(t)\sin\omega t$$
$$F(t)\sin\omega t + H(t)\cos\omega t$$

которые прибавляются к правым частям уравнений (49). Обозначим эти величины через

$$\omega^2 s F_2(t) \quad \text{и} \quad \omega^2 s H_2(t)$$

Функции $F_2(t)$ и $H_2(t)$ будут состоять из суммы членов периодических, с коэффициентами *нулевого* порядка относительно ω, и для определения θ_1 и ψ_1 мы получим уравнения вида:

$$\theta_1'' + n^2\theta_1 + f\omega\psi_1' = \omega^2 s F_2(t)$$
$$\psi_1'' + n^2\psi_1 - f\omega\theta_1' = \omega^2 s H_2(t)$$

Решения этих уравнений будут вида:

$$\theta_1'' = s F_3(t)$$
$$\psi_1'' = s H_3(t)$$

причем функции $F_3(t)$ и $H_3(t)$ того же вида, как $F_2(t)$ и $H_2(t)$, т. е. периодические и *нулевого* порядка относительно ω.

Отсюда следует, что «возмущения»

$$\frac{\varepsilon}{B}\theta_1 \quad \text{и} \quad \frac{\varepsilon}{B}\psi_1$$

будут *второго* порядка, ибо величина s есть малая того же порядка, как $\frac{\varepsilon}{B}$, и по своей малости эти возмущения будут вне пределов не только достижимой точности наблюдений и изготовления самого ротора, но даже и изготовления шариковых подшипников его, значит эти возмущения могут быть отброшены, а это равносильно тому, чтобы в выражении живой силы (43) положить $\varepsilon = 0$, иначе $I_{yz} = 0$, как это и сделано в нашей записке.

§ 11. В предыдущих параграфах рассмотрен самый общий случай устройства приспособления для уравновешивания роторов, пользуясь наблюдениями таких колебаний, при которых ротор обладает всеми *шестью* степенями свободы. Очевидно, что можно вообразить бесчисленное множество таких приспособлений, где число степеней свободы будет меньше шести,— все они явятся частными случаями рассмотренного.

Дадим ряд примеров, поясняющих сущность дела.

1. Положим, что ротор может колебаться только в горизонтальной плоскости, следовательно при всяком значении времени t будет:

$$\zeta_0 = 0$$
$$\theta_0 = 0$$

Чтобы перейти от общих уравнений к этому частному случаю, стоит только вообразить, что жесткость вертикальных пружин бесконечно большая, но что пружины эти не препятствуют движению в горизонтальной плоскости, т. е. что

$$k_1 = \infty;\ k_2 = \infty$$

Величины же h_1 и h_2 конечные, или, иными словами, надо принять, что

$$k_1 = K_1 \quad \text{и} \quad k_2 = K_2$$

причем величины K_1 и K_2 неопределенно возрастают *независимо одна от другой*, величины же h_1 и h_2 сохраняют свои постоянные конечные значения.

В этом случае надо исходить из общих уравнений (13) и (20), которые будут:

$$\xi_0'' + kg\xi_0 = 0$$
$$\left.\begin{aligned}\zeta_0 &= 0\\ \theta_0 &= 0\end{aligned}\right\} \text{по условию}$$
$$M_1\eta_0'' + (h_1 + h_2)\eta_0 + (h_2 l_2 - h_1 l_1)\psi = \omega^2 m\rho\cos(\omega t + \alpha)$$
$$B_2\psi'' - (h_1 l_1 - h_2 l_2)\eta_0 + (h^1 l_1^2 + h_2 l_2^2)\psi = \omega^2 m\rho a\cos(\omega t + \alpha)$$

Эти уравнения, очевидно, упрощаются, если взять

$$h_1 l_1 - h_2 l_2 = 0 \tag{21}$$

так что будет

$$h_1 + h_2 = \frac{h_1 l}{l_2} \tag{24}$$

Положив

$$\frac{h_1 l_1}{M_1 l_2} = \lambda^2;\quad \frac{m}{M_1} = \mu_1$$
$$\frac{h_1 l_1^2 + h_2 l_2^2}{B_2} = \frac{h_1 l_1 l}{B_2} = n^2;\quad \frac{m\rho a}{B_2} = s \tag{26}$$

мы получим уравнения:

$$\eta_0'' + \lambda^2\eta_0 = \omega^2\mu_1\rho\cos(\omega t + \alpha)$$
$$\psi'' + n^2\psi = \omega^2 s\cos(\omega t + \alpha)$$

пренебрегая попрежнему сопротивлением; отсюда, как и раньше, следует:

$$\xi = 0$$

$$\eta_0 = \frac{\omega^2 \mu_1}{\lambda^2 - \omega^2} \rho \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\psi = \frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2} s \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$

так что будет для концов валика:

$$\eta_1 = \left(\frac{\omega^2 \mu_1}{\lambda^2 - \omega^2} \rho - \frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2} l_1 s \right) \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\eta_2 = \left(\frac{\omega^2 \mu_1}{\lambda^2 - \omega^2} \rho + \frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2} l_2 s \right) \cos(\omega t + \alpha)$$

т. е. концы валика совершают простое гармоническое колебание с различною амплитудою, но одинаковою фазою.

От одной массы m с координатами

$$a, \ \rho \sin\alpha = b \quad \text{и} \quad \rho \cos\alpha = c$$

сейчас же переходим к случаю любого числа масс:

$$m_1, m_2, m_3, \ldots m_k$$

с координатами:

$$(a_1, \rho_1, \alpha_1); \ (a_2, \rho_2, \alpha_2); \ldots (a_k, \rho_k, \alpha_k)$$

иначе:

$$(a_1, b_1, c_1); \ (a_2, b_2, c_2); \ldots (a_k, b_k, c_k)$$

и заметив, что

$$s = \frac{1}{B_2} m \rho \alpha \quad \text{и} \quad \mu_1 = \frac{m}{M_1}$$

так что

$$s \cdot \sin\alpha = \frac{1}{B_2} mba$$

$$s \cdot \cos\alpha = \frac{1}{B_2} mca$$

мы получим, подобно тому как в § 4:

$$\eta_1 = \left[\frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \frac{m_0}{M_1} \cdot c_0 - \frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2} \cdot \frac{I_{xz}}{B_2} l_1 \right] \cos\omega t$$
$$- \left[\frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \frac{m_0}{M_1} b_0 - \frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2} \frac{I_{xy}}{B_2} l_1 \right] \sin\omega t$$

$$\eta_2 = \left[\frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cdot \frac{m_0}{M_1} c_0 + \frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2} \cdot \frac{I_{xz}}{B_2} l_2 \right] \cos\omega t$$
$$- \left[\frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cdot \frac{m_0}{M_1} b_0 + \frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2} \cdot \frac{I_{xy}}{B_2} l_2 \right] \sin\omega t$$

Здесь необходимо обратить внимание на следующие обстоятельства:

а) Резонанс здесь имеет место не только, когда $\omega^2 \approx \lambda^2$, но и при другой угловой скорости, именно — когда $\omega^2 \approx n^2$. В первом случае достигает значительной величины поступательное колебание центра тяжести, во втором случае — вращательное.

б) Если наблюдения производить с искровым прибором или неоновой лампой и замыкание производить в те моменты, когда ось z проходит через вертикальное положение, т. е. когда фаза

$$\omega t = 2k\pi$$

(k целое число), то будет:

$$\eta_1 = \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cdot \frac{m_0 c_0}{M_1} - \frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2} \cdot \frac{I_{xz}}{B_2} l_1$$

$$\eta_2 = \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cdot \frac{m_0 c_0}{M_1} + \frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2} \cdot \frac{I_{xz}}{B_2} l_2$$

Значит, настроив в резонанс ($\lambda^2 \approx \omega^2$), получим по наблюдению величину, пропорциональную $m_0 c_0$; если же настроить в резонанс $n^2 \approx \omega^2$, то получим величину I_{xy}.

в) Если замыкание искрового прибора или неоновой лампы производить когда ось z проходит через горизонтальное положение, т. е. когда

$$\omega t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

то будет

$$\cos \omega t = 0 \quad \text{и} \quad \sin \omega t = 1$$

Мы будем измерять величины:

$$\eta_1 = \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cdot \frac{m_0}{M_1} b_0 - \frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2} \cdot \frac{I_{xy}}{B_2} l_1$$

$$\eta_2 = \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cdot \frac{m_0}{M_1} \cdot b_0 + \frac{\omega^2}{n^2 - \omega^2} \cdot \frac{I_{xy}}{B_2} \cdot l_2$$

причем настройкой в резонанс можем наблюдать каждое из слагаемых в отдельности и получим величины, пропорциональные $m_0 b_0$ и I_{xy}, т. е. все то, что дает и прибор с шестью степенями свободы.

Для определения или исключения коэффициентов пропорциональности надо повторить наблюдения, прикрепив к ротору в данном месте известный точно взвешенный грузик. Этот прием «пользования вспомогательным грузиком» подробнее изложен ниже.

Схема прибора настолько очевидна, что нет надобности ее здесь приводить.

2. Устраним еще две степени свободы, установив такие связи:

$$\xi_0 = 0 \quad \text{и} \quad \eta_0 - l_1 \psi = 0$$

что соответствует тому, что ротор со своей камерой может только поворачиваться около вертикальной оси, проходящей через подшипник A_1. Здесь проще, не вводя неизвестной реакции связи, сразу написать очевидное уравнение движения:

$$(B_2 + M_1 l_1^2)\psi'' + h_2 l^2 \psi = \omega^2 m\rho (a + l_1)\cos(\omega t + \alpha)$$

Полагая

$$B_2 + M_1 l_1^2 = B_3; \quad \frac{h_2 l^2}{B_3} = n_2^2,$$

имеем уравнение

$$\psi'' + n_2^2 \psi = \frac{\omega^2 l_1}{B_3} m\rho \cos(\omega t + \alpha) + \frac{\omega^2}{B_3} m\rho a \cos(\omega t + \alpha)$$

и вынужденные колебания будут

$$\psi = \frac{\omega^2}{n_2^2 - \omega^2} \cdot \frac{l_1}{B_3} m\rho \cos(\omega t + \alpha) + \frac{\omega^2}{n_2^2 - \omega^2} \cdot \frac{m\rho a}{B_3} \cos(\omega t + \alpha)$$

Подобно предыдущему, для случая многих масс получим

$$\psi = \frac{\omega^2}{n_2^2 - \omega^2} \cdot \frac{l_1}{B_3} [m_0 c_0 \cos \omega t - m_0 b_0 \sin \omega t] + \\ + \frac{\omega^2}{n_2^2 - \omega^2} \cdot \left[\frac{I_{xz}}{B_3} \cos \omega t - \frac{I_{xy}}{B_3} \sin \omega t\right]$$

Наблюдая помощью зеркальных отсчетов и искрового прибора угол ψ в моменты, когда

$$\omega t = 2k\pi$$

и когда

$$\omega t = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

получим величины, пропорциональные значениям

$$\frac{\omega^2}{n_2^2 - \omega^2} \cdot \frac{1}{B_3} [l_1 m_0 c_0 + I_{xz}]$$

и

$$\frac{\omega^2}{n_2^2 - \omega^2} \cdot \frac{1}{B_3} \cdot [l_1 m_0 b_0 + I_{xy}]$$

Наблюдение наибольшего отклонения дает значение, пропорциональное количеству

$$\frac{\omega^2}{n_2^2-\omega^2}\cdot\frac{1}{B_3}[(l_1 m_0 c_0 + I_{xz})^2 + (l_1 m_0 b_0 + I_{xy})^2]^{1/2}$$

Как видно, мы получаем лишь комбинации

$$(l_1 m_0 c_0 + I_{xz}) \quad \text{и} \quad (l_1 m_0 b_0 + I_{xy})$$

неизвестных, а не сами величины

$$m_0 c_0,\ m_0 b_0,\ I_{xz},\ I_{xy}$$

в отдельности, вместе с тем и коэффициент пропорциональности нельзя считать точно известным, ибо если учитывать сопротивление, то более точное выражение этого коэффициента пропорциональности содержит не множитель

$$\frac{\omega^2}{n_2^2-\omega^2}$$

а множитель

$$N=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{n_2^2}{\omega^2}\right)+\gamma^2\frac{n_2^2}{\omega^2}}}$$

причем величина γ неизвестная и может быть определена на основании наблюдений колебаний, когда к ротору прикреплен неизвестный добавочный грузик в заданном месте.

Таким образом получим уравнения вида:

$$\left.\begin{aligned} l_1 m_0 c_0 + I_{xz} + \frac{q}{g}(l_1+a)\rho\cos\alpha_i &= KE_i \\ l_1 m_0 b_0 + I_{xy} + \frac{q}{g}(l_1+a)\rho\sin\alpha_i &= KF_i \end{aligned}\right\} \quad (i=1,2,3,\ldots 7)$$

где K есть пока неизвестный коэффициент пропорциональности, E_i и F_i — наблюденные величины.

Придавая углу α значения: $0,45^\circ, 90^\circ, \ldots 315^\circ$ получим две группы уравнений по восемь уравнений в каждой.

Первая группа будет:

$$\left.\begin{aligned} (l_1 m_0 c_0 + I_{xz}) - KE_0 &= -\frac{q}{g}l_1\rho - \frac{q}{g}a\rho \\ (l_1 m_0 c_0 + I_{xz}) - KE_1 &= -\frac{q}{g}(l_1+a)\rho\cos 45^\circ \\ \cdots\cdots\cdots\

Вторая группа будет:

$$\begin{aligned}
&(l_1 m_0 b_0 + I_{xy}) - KF_0 = 0\\
&(l_1 m_0 b_0 + I_{xy}) - KF_1 = -\frac{q}{g}(l_1 + a)\rho \sin 45^\circ\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(l_1 m_0 b_0 + I_{xy}) - KF_7 = -\frac{q}{g}(l_1 + a)\rho \sin 315^\circ
\end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Решение этих уравнений по методу наименьших квадратов доставит значения:

$$(l_1 m_0 c_0 + I_{xz}),\ (l_1 m_0 b_0 + I_{xy}) \quad \text{и} \quad K$$

Величина K в нашем вопросе непосредственного интереса не представляет и дает лишь суждение о сопротивлении, считая его пропорциональным угловой скорости ψ', нам же нужны в отдельности значения:

$$m_0 c_0,\ m_0 b_0,\ I_{xz},\ I_{xy}$$

Эти значения мы можем получить повторив всю серию наблюдений, произведя качания около вертикальной же оси, но не проходящей через точку A_1; проще всего перенести ось так, чтобы она проходила через точку G_0, тогда в предыдущих уравнениях надо положить $l_1 = 0$, и мы получим системы:

$$\begin{aligned}
&I_{xz} - K_1 E_0' = -\frac{q}{g} a\rho\\
&I_{xz} - K_1 E_1' = -\frac{q}{g} a\rho \cos 45^\circ\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&I_{xz} - K_1 E_7' = -\frac{q}{g} a\rho \cos 315^\circ
\end{aligned} \qquad \text{(I')}$$

и

$$\begin{aligned}
&I_{xy} - K_1 F_0' = 0\\
&I_{xy} - K_1 F_1' = -\frac{q}{g} a\rho \sin 45^\circ\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&I_{xy} - K_1 F_7' = -\frac{q}{g} a\rho \sin 315^\circ
\end{aligned} \qquad \text{(II')}$$

Решение этих уравнений по методу наименьших квадратов доставит значения I_{xz} и I_{xy}, так что, вместе с предыдущими, мы получим все величины, нужные для расчета компенсационных грузов и их положения.

Для получения же таких уравнений, которые давали бы возможность находить величины $m_0 c_0$, $m_0 b_0$, I_{xz}, I_{xy} в отдельности, надо применять прием переноса оси вращения.

Для ясности изложим эти приемы подробнее. Положим, что взят точно взвешенный грузик q, масса которого $\frac{q}{g}$, и укреплен на роторе в точке (размерами грузика пренебрегаем), координаты которой a, b, c, причем эти величины известны по обмерам, тогда упомянутые выше наблюдения углов ψ доставят значения, пропорциональные количествам

$$\frac{1}{B_3} \cdot \frac{\omega^2}{n_3^2 - \omega^2} \left[(l_1 m_0 c_0 + I_{xz}) + \frac{q}{g} (l_1 + a) c \right]$$

и

$$\frac{1}{B_3} \cdot \frac{\omega^2}{n_2^2 - \omega^2} \left[(l_1 m_0 b_0 + I_{xy}) + \frac{q}{g} (l_1 + a) b \right]$$

Понятно, что помещая грузик в разных местах, мы можем получить таких уравнений сколько угодно.

Практически удобно поступать следующим образом: на одной из торцовых поверхностей ротора, для которой координата a обмеряется, чертится круг заданного радиуса ρ и, начиная от оси z, разделяется на несколько равных частей (скажем 8); соответствующие этим точкам деления углы при центре (считая их от оси z к оси y) будут:

$$0^\circ,\ 45^\circ,\ 90^\circ,\ 135^\circ,\ 180^\circ,\ 225^\circ,\ 270^\circ,\ 315^\circ$$

Координата a для всех точек деления одна и та же; координаты c и b будут соответственно:

$$c = \rho \cos \alpha_i, \quad b = \rho \sin \alpha_i$$

где α_i принимает одно из вышеуказанных значений, сообразно тому, в которой из точек укрепляется грузик q.

Каждая пара наблюдений доставит два уравнения, из которых одно содержит неизвестные $l_1 m_0 c_0 + I_{xz}$, другое — неизвестные $l_1 m_0 b_0 + I_{xy}$.

3. Положим, что вибрационный прибор устроен так, что колебания происходят около горизонтальной оси, проходящей через точку A_1, в точке же A_2 ставится вертикальная пружина, жесткость которой есть k_2.

В этом случае будет

$$\zeta_0 = -l_1\theta$$

и уравнение движения будет

$$(B_4 + l_1^2 M_1)\theta'' + kl^2\theta = -\omega^2 m\rho(a + l_1)\sin(\omega t + \alpha)$$

Очевидно, что решение этого уравнения будет подобно предыдущему, а значит, и наблюдения и их обработка будут подобны рассмотренным в п. 2, так что повторять их описание нет надобности.

§ **12.** Само собою разумеется, что можно изменять устройство вибрационных приборов на множество различных манеров, теория их действия сейчас же получится из общей теории, здесь изложенной.

На основании этой теории и рассмотренных примеров тотчас же устанавливаются способы наблюдений и обработки их результатов, нетрудно также применительно к каждому частному случаю спроектировать наиболее подходящий прибор.

О СИЛАХ ИНЕРЦИИ И НАЧАЛЕ ДАЛАМБЕРТА[1]

(К 250-летию со времени издания «Principia» Ньютона)

§ 1. Вся рациональная и вся небесная механика выводятся из трех основных законов, или аксиом, Ньютона, предшествующих им определений и его опытов над маятниками с грузом из разных тел, повторенных Бесселем для установления пропорциональности массы тела его весу.

При обычном изложении рациональной механики об этих опытах часто не упоминают, тогда механика становится отраслью математики, а не физики, и является чисто отвлеченной наукой, а не прикладной.

Чтобы избавить читателя от необходимости наводить справки, я буду, по возможности, приводить подлинные слова тех авторов, на которых я ссылаюсь.

§ 2. Законы Ньютона высказаны им в следующей форме, приводимой здесь как в подлинных его словах, так и в переводе.

Axiomata sive leges motus

I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam quo vis illa imprimitur.

III. Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Аксиомы или законы движения

I. Всякое тело упорствует в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить свое состояние.

II. Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению прямой, по которой эта сила действует.

III. Действию всегда есть равное и противуположное противодействие, иначе взаимодействия двух тел друг на друга всегда между собою равны и направлены в противоположные стороны.

[1] Доклад, прочитанный в Математическом институте Академии Наук 26 декабря 1936 г.

§ 3. В этих аксиомах встречается ряд терминов, поэтому Ньютон, подобно Евклиду, предпосылает аксиомам определения, служащие для установления смысла употребляемых терминов.

Так, под словом «corpus» (тело) он разумеет «количество материи или массу, которая познается по *весу* тела, коему она пропорциональна, как это установлено опытами, произведенными точнейшим образом над маятниками».

О размере тела он не говорит, но, выражая в дальнейшем закон движения центра тяжести системы тел (след. IV законов и предл. LXV первой книги), он показывает, что высказанные законы относятся к движению этой точки, предполагая, что в ней сосредоточена масса всей системы. Это свойство послужило впоследствии к установлению понятия «материальная точка», каковым словом теперь и переводится слово «corpus» Ньютона.

Движение «motus» в этих законах означает «quantitas motus», т. е. количество движения, «которое пропорционально количеству материи и скорости».

«„Vis impressa“ (приложенная сила) есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного прямолинейного движения».

Силы Ньютон предполагает измеряемыми *статически* и сравнивает их с весом.

Для нас в дальнейшем особенно важно Ньютоново определение «силы инерции», высказанное следующими словами:

Definitio III	*Определение* III
Materiae vis insita est potentia resistendi qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.	Врожденная сила материи есть (присущая ей) способность сопротивления, по которой отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Это определение сопровождено следующим толкованием:

. . . «эта сила всегда пропорциональна массе и если отличается от *инерции массы*, то разве только воззрением на нее. От инерции массы происходит то, что всякое тело лишь с трудом выводится из своего покоя или движения, поэтому *врожденная сила* могла бы быть

весьма вразумительно названа *силою инерции*. Эта сила проявляется телом единственно лишь, когда другая сила, к нему приложенная, производит изменение его состояния. Проявление этой силы может быть рассматриваемо двояко: и как *сопротивление* и как *напор*. Как сопротивление — поскольку тело противится действующей на него силе, стремясь сохранить свое состояние; как напор — поскольку то же тело, с трудом уступая силе сопротивляющегося ему препятствия, стремится изменить состояние этого препятствия.

«Сопротивление приписывается обыкновенно телам покоящимся, напор — телам движущимся, но движение и покой при обычном рассмотрении различаются лишь в отношении одно к другому, ибо не всегда находится в покое то, что таковым простому взгляду представляется».

Далее следуют определения термина: «*центростремительная сила*». Это «есть такая сила, с которою тела к некоторой точке как к центру отовсюду притягиваются, гонятся или как бы то ни было стремятся».

Затем даются определения терминов: «центростремительная сила абсолютная», «ц. с. сила движущая», «ц. с. сила ускорительная», но нет определения понятия «сила центробежная», о которой писал Гюйгенс в своем сочинении: «De motu et vi centrifuga». Видимо, Ньютон считал, что это понятие содержится в понятии «врожденная сила материи», или «сила инерции», и отдельного определения не требует.

Но в поучении (scholium) к определениям, поясняя разницу между движением абсолютным и относительным, Ньютон говорит:

> . . . «effectus quibus motus absoluti et relativi distinguuntur ab invicem sunt vires recedendi ab axe motus circularis», т. е. «проявления, которыми различаются движения абсолютное и относительное, состоит в силах (стремления) удалиться от оси кругового движения».

После этого Ньютон описывает свой опыт с ведром воды, подвешанным на туго закрученной веревке.

«Вот эта-то „vis recedendi“ и есть не что иное, как Гюйгенсова «центробежная сила».

В том же поучении говорится:

> . . . «если два шара, соединенные на данном друг от друга расстоянии нитью, обращаются около их центра тяжести, то по натяжению нити познается стремление шаров удалиться от оси».

Этот опыт часто воспроизводится в разных вариантах в физических кабинетах, но не всегда получает правильное истолкование.

§ 4. Ньютон придает весьма большое значение третьему закону. В обширном поучении, изложив опыты над соударением тел, он пишет:

«Подобно тому как при ударе и отражении, тела, коих скорости обратно пропорциональны массам, равнозначущи, так и при движении механических приборов действующие силы, коих скорости, взятые по направлению самих сил (т. е. проекции скорости точки приложения каждой силы на направление этой силы), обратно пропорциональны этим силам, — равнозначущи между собою и, при стремлении в противуположные стороны, взаимно уравновешиваются».

Приведя затем ряд примеров, относящихся к рычагу, весам, блокам, вороту, зубчатым колесам, винту, клину, он продолжает:

. . . «совершенно подобно соотношение между силами и во всякого рода машинах; действительность и назначение машин в том только и состоят, чтобы, уменьшая скорость, увеличивать силу и наоборот, ибо во всех подобного рода приборах в сущности решается такая задача: заданный груз двигать заданною силою или же заданное сопротивление преодолеть заданным усилием.

«В самом деле, если машина будет устроена таким образом, что скорости точек приложения движущей силы и сопротивления обратно пропорциональны этим силам, то движущая сила уравновесит сопротивление, при большем же отношении скоростей преодолеет его. Если отступление от пропорциональности скоростям будет таково, что будут преодолеваться сопротивления, происходящие от трения соприкасающихся и скользящих друг по другу тел, от сцепления тел непрерывных и разъединяемых и от подъема грузов, то за выключением всех этих сопротивлений избыточная сила производит ускорение, пропорциональное своей величине, как в частях машины, так и в сопротивляющемся теле.

«Дальнейшее изложение учения о машинах сюда не относится, я хотел лишь показать, сколь далеко простирается и сколь благонадежен третий закон движения. Если действие движущей силы оценивать пропорционально произведению этой силы и скорости и, подобно этому, противодействие сопротивлений оценивать для каждой части в отдельности пропорционально ее скорости и встречаемому ею сопротивлению, происходящему от трения, сцепления, веса и *ускорения*, то во всякой машине действие и противодействие будут постоянно равны, и поскольку действие передается машиною и в конце концов прилагается к сопротивляющемуся телу, то это последнее его (т. е. действия) значение будет обратно значению противодействия».

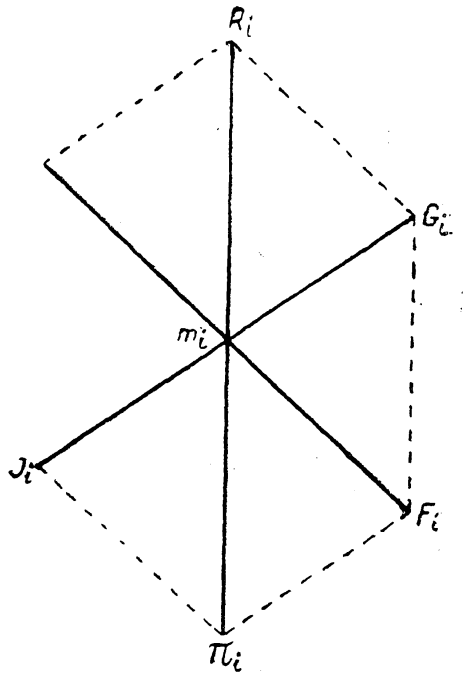
В. Томсон (лорд Кельвин) и Тет в своей «Natural Philosophy» справедливо отметили, что в приведенных словах Ньютона заключается «начало

возможных работ» для статики и «начало возможных перемещений» для динамики, но прошло 102 года после первого издания «Principia», пока Лагранж дал аналитическую формулировку этих начал, обняв в одной формуле всю статику и всю динамику указанием способа составления уравнений равновесия и дифференциальных уравнений движения любой системы тел.

Вот, чтобы иметь возможность выразить столь общий принцип, Ньютон и ввел в рассмотрение «силу инерции» как противодействие ускорению, дав свое определение III.

§ 5. Но еще за 45 лет до Лагранжа Даламберт высказал принцип, сводящий составление уравнений движения системы к составлению уравнений равновесия.

Не будем восходить до Даламберта, а возьмем одно из современных руководств по механике, напр. «*Основы аналитической механики*» проф. *Г. К. Суслова*. Это руководство является одним из наилучших на русском языке; в нем на стр. 441 читаем:



Фиг. 1.

«Пусть m_i — некоторая (материальная) точка, принадлежащая системе, и пусть к ней приложена сила $F_i(X_i Y_i Z_i)$. Если бы точка была свободна, то от этой силы она получила бы ускорение $\frac{1}{m_i} F_i$, но на самом деле ускорение $\dot{v}_i$ точки будет иное, а именно — такое, какое сообщается ей равнодействующею G_i силы F_i и силы реакции (связей) R_i, приложенной к m_i. *Фиктивная* сила I_i (фиг. 1), равная и прямопротивуположная силе G_i (силе действующей), носит название *силы инерции*; ее проекции на оси будут:

$$I_{ix} = I_i \cos(I_i x) = -m_i \dot{v} \cos(\dot{v}_i x) = -m_i x_i'' = -m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}$$

$$I_{iy} = -m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}; \quad I_{iz} = -m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}$$

«Сложим геометрически приложенную силу F_i и силу инерции I_i; как легко видеть из построения, найденная сила Π_i будет равна и прямопротивуположна силе R_i. *Фиктивная* сила Π_i называется *силою*

потерянной; проекции ее на оси будут на основании предыдущих выражений:

$$\Pi_{ix} = \Pi_i \cos(\Pi_{ix}) = F_i \cos(F_i x) + I_i \cos(I_{ix}) = X_i - m_i \frac{d^2x_i}{dt^2}$$

$$\Pi_{iy} = Y_i - m_i \frac{d^2y_i}{dt^2}; \quad \Pi_{iz} = Z_i - \frac{d^2z_i}{dt^2}$$

«Если бы связи и силы системы перестали изменяться с временем и к системе были приложены только потерянные силы, то, очевидно, несвободная система под действием сил Π_i была бы в равновесии, так как реакции связей уничтожили бы действие сил потерянных и точки системы не получили бы никаких ускорений».

Применяя затем к силам Π_i начало возможных перемещений, получают равенство

$$\sum_{i=1}^{i=n} [\Pi_{ix} \delta x_i + \Pi_{iy} \delta y_i + \Pi_{iz} \delta z_i] = 0$$

иначе — Лагранжево уравнение

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left[\left(X_i - m_i \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x_i + \left(Y_i - m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} \right) \delta y_i + \left(Z_i - m \frac{d^2z_i}{dt^2} \right) \delta z_i \right] = 0$$

из которого затем чисто аналитическими преобразованиями выводится вся рациональная или теоретическая механика.

Но Г. К. Суслов — математик, его руководство носит название: «Аналитическая механика», значит здесь физическая, реальная сторона дела отходит на второй план, уступая место анализу, т. е. математике.

Возьмем сочинение Клеменса Шефера — «Теоретическая физика» (т. I, ч. 1-я — «Общая механика»), здесь на стр. 107 читаем:

...«таким образом задача динамики сводится к задаче статики. Эта мысль — основное ядро так называемого принципа д'Аламбера. Силы: $-m \frac{d^2x}{dt^2}$, $-m \frac{d^2y}{dt^2}$, $-m \frac{d^2z}{dt^2}$, прибавляемые к реально действующим силам X, Y, Z, называются *силами инерции*. Разумеется, в действительности они не существуют, так же как и введенные нами раньше дополнительные силы (Кориолиса и центробежная), они делаются заметными только тогда, когда желают разрешать проблемы динамики методами статики. Ошибка, которая при этом делается, компенсируется введением этих сил инерции, являющихся *фиктивными* силами».

Затем на той же странице читаем:

. . . «прибавленная здесь к нормальной компоненте F_n сила инерции $+ mR\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ тожественна с *центробежной силой*. Отсюда ясно, что последняя не представляет собою реальной силы. Это есть фиктивная дополнительная сила, введение которой часто представляет большое удобство».

Таким образом физик выражается еще более решительно, нежели математик, но еще менее определенно: неужели силы, «которые в действительности не существуют . . . делаются заметными» (machen sich bemerklich) в зависимости от того, каким способом та или иная задача решается? Эти слова, чтобы придать им смысл, надо бы заменить такими: «эти силы надо вводить в рассмотрение, когда решают задачи динамики методами статики».

Курьеза ради обратимся к другому весьма знаменитому физику. Вот что мы прочтем на стр. 19 первого тома: «Kompendium der theoretischen Physik von Dr. Woldemar Voigt».

Написав уравнения

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = X; \quad M\frac{d^2y}{dt^2} = Y; \quad M\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

Voigt указывает, что по составляющим X, Y, Z силы, действующей на массу M, простыми математическими преобразованиями получаются выражения проекций этой силы на касательную, на главную нормаль и на бинормаль к траектории, а именно:

$$P = M\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$N_{\text{I}} = \frac{Mv^2}{\rho}$$

$$N_{\text{II}} = 0$$

при само собою понятных обозначениях. Далее говорится:

«Выражение (Aggregat) $\frac{Mv^2}{\rho}$ носит название „центробежная сила“ и наглядно представляется как мера стремления материальной точки отдалиться от центра кривизны; слагающая N_{I} как раз компенсирует это действие».

Очевидно, что слагающая N_{I} имеет такое же реальное существование, как и слагающие X, Y, Z силы, действующей на точку; ясно, что нечто

«фиктивное» не может быть компенсировано реальным и, наоборот, реальное — фиктивным, значит по Voigt'у центробежная сила имеет такое же реальное существование, как и сила, действующая на точку.

Таким образом вот два физика в резком противоречии один другому.

Таких противоречий можно набрать сколько угодно, ибо они продолжаются на протяжении 250 лет, восходя к Ньютону и Гюйгенсу.

Приведем еще слова из знаменитейшего руководства «Traité de Mécanique rationelle par Paul Appell»:

«Пусть на материальную точку, масса которой m, действуют силы F_1, F_2, ... F_n. Уравнения движения точки можно написать в виде:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}+\sum X_\nu=0;\quad -m\frac{d^2y}{dt^2}+\sum Y_\nu=0;\quad -m\frac{d^2z}{dt^2}+\sum Z_\nu=0$$

в которых X_ν, Y_ν, Z_ν означают проекции силы F_ν на оси координат. Рассмотрим, наряду с силами F_1, F_2, ... F_n, приложенными к точке M, вектор MJ, коего проекции суть $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z}{dt^2}$; этот вектор, равный и противуположный произведению ускорения на массу, называется *силою инерции*, хотя это отнюдь не есть сила, приложенная к точке (quoique ce ne soit nullement une force appliquée au point). Тогда вышеприведенные уравнения выражают, что геометрическая сумма векторов: MI, F_1, F_2, ... F_n есть нуль, или, иначе, что во всякое мгновение имеет место равновесие между силою инерции и силами, действительно к точке приложенными» (см. § 282).

Здесь допущена некоторая неточность выражений. Если ее устранить, то буквальный смысл сказанного есть следующий: «рассмотрим, наряду с силами F_1, F_2, ... F_n, приложенными к точке M, силу I, изображаемую векторам MI, коего проекции суть $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z}{dt^2}$. Сила I, равная и противуположная произведению массы m на ее ускорение, называется ее силою инерции, хотя эта сила приложена вовсе не к массе m. Тогда вышеприведенные уравнения выражают, что геометрическая сумма векторов: MJ, F_1, F_2, ... F_n — есть нуль или, иначе, что во всякое мгновение имеет место равновесие между силою инерции и силами, «действительно к точке приложенными».

Сила определяется тремя элементами; по отношению к силе инерции I два элемента — величина и направление — указаны, точка же приложения не указана, спрашивается, к чему же эта сила приложена? Чтобы устранить эту неясность, Аппель мелким шрифтом дает следующее пояснение:

«§ 286. *Замечание о силе инерции.* Пусть материальная точка, подверженная действию сил $F_1, F_2, \ldots F_n$, подчинена определенным начальным условиям — она примет определенное движение. При втором опыте устраним силы $F_1, F_2, \ldots F_n$; возьмем материальную точку в руку и сообщим ей рукою то же самое движение; тогда во всякий момент времени t действие руки на точку равно равнодействующей R сил $F_1, F_2, \ldots F_n$, которые действовали при первом опыте, т. е. mw, где w обозначает ускорение; следовательно, по началу равенства действия и противодействия давление точки на руку во всякий момент равно и противуположно R, т. е. mw, следовательно это давление равно силе инерции, но необходимо заметить, что это давление есть сила, действующая на руку, а не на точку».

Здесь Аппелю следовало бы прибавить слова: «роль руки при действительном движении точки m играют те связи, которым точка m подчинена, и значит, сила инерции приложена не к самой точке m, а к связям, в той их точке, с которой в рассматриваемый момент точка m совпадает».

Хотя «comparaison n'est pas raison», т. е. уподобление не есть обоснование, и воображаемый опыт Аппеля не может почитаться достаточным для установления основного понятия, но все-таки из него можно заключить, что рука, на которую давит точка m, будет ощущать это давление как реально существующее, значит действие силы инерции на связи будет реальным, на деле существующим, а не фиктивным.

Таким образом математик Аппель считает силу инерции реально существующей, а математик Суслов — фиктивной.

По отношению к системе точек о принципе Даламберта сказано:

«§ 434. Мы уже высказали принцип Даламберта для материальной точки в § 282. Если, с одной стороны, рассматривать векторы, представляющие силы, приложенные к точке m, а с другой стороны — вектор I, приложенный к этой точке, равный произведению ее массы на ускорение и направленный в обратную с ускорением сторону, то уравнения движения можно истолковать следующим образом: во всякий момент имеет место равновесие между силами и вектором I, называемым силою инерции.

«Пусть имеется система n точек $m_1, m_2, \ldots m_n$, находящихся в движении, тогда можно сказать, что во всякий момент имеет место равновесие между силами, приложенными к точкам, и силами инерции $I_1, I_2, \ldots I_n$ этих точек».

Затем в следующем параграфе условие сказанного равновесия выражается аналитически, т. е. идет уже не принципиальная, а формальная сторона дела.

Но как же согласовать сказанное здесь со сказанным в § 286, что сила инерции точки m действует не на эту точку, а на ту воображаемую руку, которая эту точку двигает? Проявляются ли силы инерции и в этом случае реально, или это *есть вектор*, т. е. отрезок прямой линии, который каким-то образом уравновешивает действующие на точку силы?

Впрочем, в «Рациональной механике» Аппеля даже не упоминается об опытах Ньютона над маятниками, коими установлена пропорциональность массы тела его весу, поэтому механика Аппеля есть чисто умозрительное превосходное по содержанию и изложению *математическое* сочинение и, значит, оперирующее над *воображаемыми* объектами независимо от того, существуют они на самом деле, или нет.

Заметим еще, что понятие о силе инерции материальной точки у Аппеля изложено в § 282, на стр. 518 тома I, *после* того как вся динамика точки изложена без упоминания об этом понятии. Для системы точек и твердого тела о силах инерции говорится на стр. 318 тома II, *после* того как вся динамика системы и твердого тела изложена. Это показывает, что в рациональной механике можно обойтись без понятия о силах инерции, значит нет необходимости его вводить и рассматривать, и было бы короче его за ненадобностью совсем исключить, т. е. математик Аппель идет еще дальше физика Шефера, — дальше Аппеля некуда итти.

§ **6.** Обратимся теперь от умозрений к практике. Любой инженер скажет: «итак, по учениям рациональной механики сила инерции в действительности не существует, есть сила фиктивная, можно обойтись без ее рассмотрения, но как же на заводе „Имярек“ разорвало маховик в 3000 пудов, осколки пробивали каменные стены как бумагу?»

Моряк парусник прибавит: «штилевали мы на „Донском“ в Атлантическом океане, и вдруг набежала откуда-то зыбь, должно быть придонная, как стало нас валять — не поспели ни брам-реев ни брам-стенег спустить, так за борт и полетели».

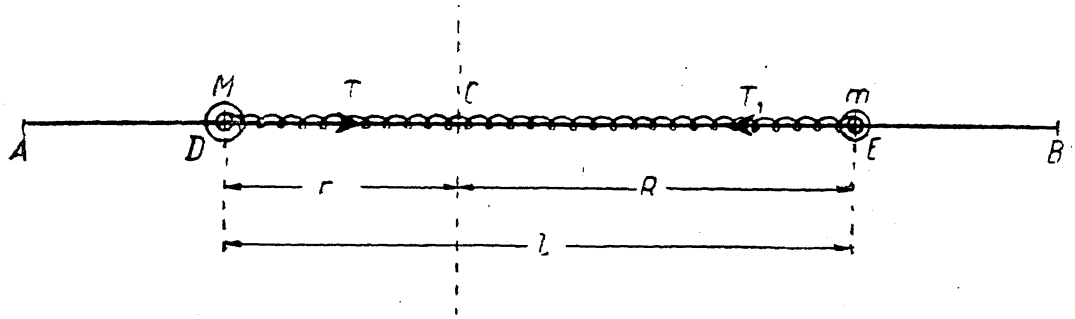
Моряк, плавающий на современных судах, прибавит: «отчего это надводные корабли, описывая циркуляцию, кренятся внутрь на манер цирковой лошади, а подводные лодки кренятся наружу, ведь не от фиктивной же силы это происходит?».

Корабельный инженер добавит: «при спуске „Измаила“ рано отдали якоря, так обе цепи как ниточки оборвало, а цепи — звенья, толщиною по 80 мм. Хороша фиктивная сила!».

Таких примеров приведут сотни. «Нет, что бы там рациональная механика ни говорила, что сила инерции в действительности не существует, что

это есть просто проявление инерции материи, для нас практиков это проявление обнаруживается в виде силы, да еще какой. Нам говорят, что рациональная механика служит основою механики прикладной, так нам надо, чтобы она не запутывала нас своими противоречиями, а способствовала уяснению сути дела».

7. Вернемся к Ньютону. Как математика и физика его ставят «рядом с Архимедом и выше всех других», но он был и замечательный инженер, ибо, когда потребовалось перечеканить на-ново всю монету Англии, то его назначили начальником монетного двора. Хотя по этому поводу ехидный Вольтер и заметил: «вот что значит иметь хорошенькую племянницу, даже



Фиг. 2.

когда ваше имя Ньютон», но Ньютон закончил всю работу в 2 года, увеличив производительность в 8 раз против крайнего предела, указываемого его предшественниками, *не прибавив при этом* ни *одного станка*. Начальником монетного двора Ньютон пробыл 35 лет. Дважды переиздав «Principia», он вносил в другие места изменения и дополнения, но сказанное о силе инерции он оставил без изменения, хотя ежесекундно видел работу своих прессов, при которой сила инерции так ясно проявляется.

Обратимся к опыту Ньютона с шариками, как его обыкновенно показывают: на стержень AB, который вращается около вертикальной оси C и, значит, описывает горизонтальную плоскость, надеты с легким трением шарики M и m, причем этими же буквами обозначим и массы их; центры этих шариков помещены, соответственно, в точках D и E и соединены ниткой, и расстояния (фиг. 2)

$$DC = r \text{ и } EC = R$$

взяты так, чтобы было

$$M : m = R : r \text{ и } R + r = l$$

т. е. точка C была в центре тяжести системы, причем массою нити, длина которой l, пренебрегают.

При вращении стержня, оба шарика сохраняют на нем свои места, причем нить будет натянута с некоторым усилием T.

Рассмотрим шарик M. Этот шарик описывает круг радиуса r около точки C как центра, следовательно во всякий момент t он обладает ускорением $\omega^2 r$, направленным по прямой DC к центру этого круга C; это ускорение происходит от натяжения T нити в точке D, следовательно будет

$$T = M \cdot \omega^2 r$$

Совершенно так же, обозначая натяжение нити в точке E через T_1, имеем для второго шарика:

$$T_1 = m \cdot \omega^2 R$$

Обращаемся теперь к нити; если нить, закрепленная своим концом D за шарик M, тянет его с силою T по направлению от D к C, то по закону III шарик M тянет этот конец нити с такою же силою $T' = T$, но по обратному направлению, т. е. от D к A.

Совершенно так же увидим, что шарик m тянет свой конец нити E с силою $T_1' = T_1$, направленной от E к B. Итак, нить DE находится под действием двух сил T' и T_1', приложенных, соответственно, к ее концам D и E и направленных по длине ее в противоположные стороны. Ясно, что если бы эти силы были не равны, то нить не была бы в состоянии равновесия по отношению к стержню, а двигалась бы в сторону бо́льшей силы, а так как она находится по отношению к стержню в покое, то должно быть

$$T' = T_1', \text{ иначе } T = T_1$$

следовательно

$$M\omega^2 r = m\omega^2 R$$

т. е.

$$Mr = mR$$

и так как нить предполагается нерастяжимой и вытянута в прямую, то

$$R + r = l$$

т. е. шарики на стержне, независимо от его вращения, сохраняют на нем свои первоначальные места, что и подтверждается опытом.[1]

---

[1] Чтобы опыт удавался, шарики и насаживаются на стержень с легким трением, ибо иначе динамическое равновесие не устойчиво.

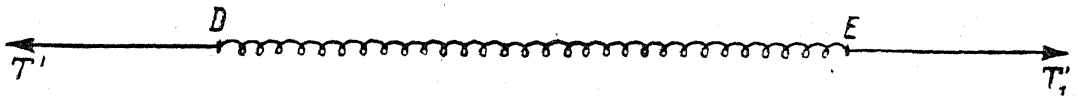
Силы T' и T_1', соответственно равные

$$T' = M\omega^2 r \quad \text{и} \quad T_1' = m\omega^2 R$$

направленные же *противоположно* соответствующим ускорениям масс M и m, и суть силы инерции этих масс, в данном случае их центробежные силы.

Как видно, их точки приложения суть точки D и E — *концы нити*, совпадающие с центрами шариков M и m, и силы эти T' и T_1' действуют *на нить*, а не на шарики, т. е. на *связь* между массами, а не на эти массы.

Пока все реально и нет ничего фиктивного, и настолько реально, что стоит увеличить угловую скорость ω вращения стержня, и нить будет оборвана.



Фиг. 3.

В приведенном рассуждении надо обратить особенное внимание на двойственность точек D и E: с каждой из них совпадает центр соответствующего шарика и конец нити, причем, повторяем, к точке D, принадлежащей шарику M, приложена действующая на нить сила T', равная и прямопротивоположная T.

Уравнение, которое доставило решение поставленной задачи, есть

$$T' = T_1'$$

мы пришли к нему после целого ряда рассуждений,—спрашивается, нельзя ли это уравнение написать сразу. Мы можем это сделать, обратив внимание на происхождение и смысл этого уравнения, а именно, оно выражает условие равновесия *сил инерции* нашей системы, принимая, что они приложены к концам D и E нашей невесомой, гибкой и нерастяжимой нити, иными словами — к *геометрическим* точкам D и E, в которых в рассматриваемый момент времени t находятся массы M и m, причем между этими геометрическими точками имеет место *та же связь*, как и между массами M и m, т. е. неизменность расстояния между ними (фиг. 3).

Вот в этом-то приеме решения, состоящем в том, что мы, вместо или, лучше сказать, наряду с заданной системой *материальных* точек, рассматриваем воображаемую систему точек геометрических и устанавливаем между обеими системами точек определенное соответствие, и

заключается тот искусственный и, надо признать, искусный способ сведения задач динамики к задачам статики.

Решение *статической* задачи, в которой масс точек рассматривать не приходится, а лишь положение их, и доставило нам уравнения как для определения движения заданных материальных точек, так и *реакции* связей между ними, т. е. как раз все то, что требуется при решении динамической задачи.

Обобщая рассуждения, которые мы применили при рассмотрении примера Ньютона, хотя бы так, как приведено выше в словах Г. К Суслова, но развивая эти слова подробнее, мы придем к следующей более полной и более ясной, нежели обычная, формулировке принципа Даламберта, которую, для большей определенности, подразделим на пункты.

1°) Условимся под силою инерции материальной точки, масса которой m и ускорение w, разуметь силу I, величина которой равна mw, направление обратно направлению ускорения, точка же приложения есть та *геометрическая* точка, в которой в рассматриваемый момент времени масса m находится, так что сила инерции I на ту материальную точку m, от которой она происходит, *не действует*.

2°) Пусть дана система материальных точек, массы коих $m_1, m_2, \ldots m_n$, к ним приложены внешние и внутренние силы, равнодействующие коих суть $F_1, F_2, \ldots F_n$, и имеют место заданные связи.

3°) Положим, что в момент времени t указанные точки занимают положения:

$$A_1(x_1, y_1, z_1);\ A_2(x_2, y_2, z_2);\ \ldots\ A_n(x_n, y_n, z_n)$$

причем $x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ \ldots x_n, y_n, z_n$ суть неизвестные функции переменной t, которые и требуется определить.

4°) Наряду с предложенной системой материальных точек вообразим ей соответствующую систему *геометрических* точек $B_1, B_2, \ldots B_n$, занимающих в рассматриваемый момент t вышеуказанные положения, т. е. в этот момент совпадающих с точками $A_1, A_2, \ldots A_n$; если между точками $B_1, B_2, \ldots B_n$ установить те связи, которые в этот момент существуют в заданной системе точек материальных, и приложить к этим геометрическим точкам: а) силы $F_1, F_2, \ldots F_n$, действующие на точки системы, б) силы инерции $I_1, I_2, \ldots I_n$ масс $m_1, m_2, \ldots m_n$, то полученная система сил будет в рассматриваемый момент t находиться в равновесии.

5°) Аналитически выраженные условия равновесия вышеперечисленных сил установят зависимость между силами инерции, действующими силами

и реакциями связей, иначе — между ускорениями масс m_1, m_2, ... m_n, действующими на них внутренними и внешними силами и реакциями связей, т. е. получатся дифференциальные уравнения движения, которые, вместе с уравнениями связей, и послужат для определения движения точек системы и реакций связей.

При такой подробной формулировке физическое реальное значение сил инерции обнаружено явно, от этих сил зависят реакции *связей системы*, поэтому часто для краткости говорят, что силы инерции приложены не к точкам системы, а к связям, т. е. действуют не на точки системы, а на связи.

В том случае, когда система свободная, т. е. связей между ее точками нет, то изложенное выше правило попрежнему доставит уравнения движения точек системы, силы же инерции проявляются в этом случае в том, что заданная сила F сообщает данной массе m ускорение w, определяемое векториальным равенством $F = mw$, иначе — равенствами:

$$mw_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = F \cdot \cos(Fx) = X$$

$$mw_y = m\frac{d^2y}{dt^2} = F \cdot \cos(Fy) = Y$$

$$mw_z = m\frac{d^2z}{dt^2} = F \cdot \cos(Fz) = Z$$

имеющим место для каждой точки системы.

Здесь необходимо обратить внимание на различие точек A_1, A_2, ... A_n, которые принадлежат, соответственно, массам m_1, m_2, ... m_n, и точек B_1, B_2, ... B_n, совпадающих с точками A_1, A_2, ... A_n, но принадлежащих связям. В том случае, который имеет место в механике прикладной, когда связи осуществлены материально (снасть и гак, тяга с проушиной и болтом, реборда колеса и рельс, ползун и параллель и т. д.), совпадение точек B_1, ... B_n с точками A_1, A_2, ... A_n получает вполне ясное физическое значение и вопрос о фиктивности точек B_1, B_2, ... B_n и сил инерции сам собою отпадает. В механике аналитической или рациональной, где связи выражаются уравнениями, введение в рассмотрение точек B_1, ... B_n также необходимо для того, чтобы были указаны все *три* элемента сил инерции, а не только их величины и направления, и тем динамическая задача приведена к статической.

В статике определяется равновесие *совокупности* сил независимо от масс тех тел, на которые эти силы действуют, точки приложения сил

рассматриваются как точки *геометрические*, а не материальные. Кроме этого, так как положение точек $B_1, \ldots B_n$ считается совпадающим с точками $A_1, \ldots A_n$ в каждое отдельное заданное мгновение t, то при вариировании уравнений связей, напр.

$$\varphi(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0$$

для нахождения «возможных перемещений» надо считать, что x_i, y_i, z_i означают координаты точки B_i, и значит, t сохраняет постоянное значение, так что будет

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\delta y_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial z_n}\delta z_n = 0$$

§ 8. В механике рациональной главное внимание обращается на определение движения заданных материальных точек или тел, т. е. на интегрирование составленных дифференциальных уравнений движения их, определение же реакций связей обыкновенно не производится. В механике прикладной система тел, составляющих машину или механизм, обладает полною связью, т. е. *одною* степенью свободы, и неизвестною является одна переменная, напр. угол поворота вала. Пользуясь интегралом живых сил, вопрос приводят к квадратурам, но в большей части случаев и этого не надо, ибо движение машины задается, и вопрос состоит в придании прочных размеров ее частям, а для этого, прежде всего, надо определить реакции связей, чтобы затем рассчитать напряжения звеньев механизма.

Так как движение машины предполагается заданным, то по правилам кинематики, графически или аналитически, определяются ускорения ее частей, значит будут известны и силы инерции их. По изложенному выше принципу Даламберта, по *правилам статики*, определятся реакции связей, ибо внешние и внутренние силы также во всякий момент известны. Отсюда ясно видно значение принципа Даламберта в прикладной механике.

Здесь возникает одно обстоятельство, которое приводит к некоторому недоразумению, особенно при графическом решении задачи или при составлении чертежа, с которого снимаются данные, нужные для расчета.

Строго говоря, на этот чертеж надо было бы вынести точки B_1, $B_2, \ldots B_n$ и к ним приложить силы инерции $I_1, I_2, \ldots I_n$, но точки $B_1, \ldots B_n$ совпадают с точками $A_1, \ldots A_n$, которые на чертеже механизма уже имеются и в которых находятся массы $m_1, m_2, \ldots m_n$, значит, когда нанесем векторы, изображающие силы инерции $I_1, I_2, \ldots I_n$, то будет казаться, что они приложены к точкам $A_1, A_2, \ldots A_n$, т. е. к массам $m_1, m_2, \ldots m_n$, но надо помнить, что силы $I_1, I_2, \ldots I_n$ действуют не

на эти массы, а на *связи*, которым эти массы подчинены. В виду такого условного составления чертежа и двойственного значения точек A_1, A_2, ... A_n, на нем нанесенных, часто неправильно говорят: «на массы m_1, m_2, ... m_n действуют заданные силы F_1, F_2, ... F_n и силы инерции I_1, I_2, ... I_n», и затем в этом предположении делают расчет, который доставит вполне правильные результаты, так что неточность выражения проявляется на словах, а не на деле.

В особенности такое неправильное выражение часто встречается при рассмотренни теории центробежных регуляторов (см., напр.: Bouasse. Cours de Mécanique rationnelle et expérimentale, §§ 368—371).

Эта же неточность встречается и в теоретической механике при рассмотрении вопроса о различии между *весом* тела и *притяжением* его Землею (см., напр.: П. О. Сомов. Основания теоретической механики, зад. 314, стр. 306).

Достойна удивления та прозорливость, которую проявил Ньютон в учении о силе инерции, и то, сколь многое он выразил в немногих словах.

ÜBER DIE ERZWUNGENEN SCHWINGUNGEN VON GLEICHFÖRMIGEN ELASTISCHEN STÄBEN

Einleitung und Problemstellung

§ **1.** Die Schwingungen, welche ein elastischer Stab um seine Gleichgewichtslage ausführen kann, werden in zwei Klassen eingeteilt: die *freien* und die *erzwungenen* Schwingungen.

Unter *freien* Schwingungen versteht man diejenigen, welche nur durch die Anfangsabweichungen des Stabes von seinem Gleichgewichtszustande bedingt werden, aber von der Wirkung der äußeren Kräfte unabhängig sind.

Erzwungen heißen diejenigen Schwingungen, welche durch die dauernde Wirkung der äußeren Kräfte entstehen, aber von dem Anfangszustande des Stabes unabhängig sind.

Die freien Schwingungen von gleichförmigen Stäben sind nach Euler in sehr ausführlicher Weise in der «Mécanique» von Poisson und in der «Theory of Sound» von Lord Rayleigh behandelt.

Erzwungene Schwingungen bieten für praktische Anwendungen bei dem Eisenbahnbau und bei dem Brücken- und Schiffbau ein ebenso großes Interesse dar wie die freien Schwingungen für die Akustik, besonders wenn man den Fall der ungleichförmigen Stäbe auch mit in Betracht zieht.

Aber sogar die Behandlung der erzwungenen Schwingungen für den einfachsten Fall der gleichförmigen Stäbe ist in den Lehrbüchern nicht zu finden.

Den Gegenstand dieser Abhandlung bildet die Auseinandersetzung einer allgemeinen Methode für die Bestimmung der erzwungenen Schwingungen eines gleichförmigen elastischen Stabes, welcher der Einwirkung einer veränderlichen Kraft unterliegt.

Man wird sich sofort überzeugen, daß die Methode in der Hinsicht eine allgemeine ist, daß sie für analoge Probleme der mathematischen Physik, z. B. die Schwingungen von Saiten, die Wärmeleitung in einem Stabe u. dgl., anwendbar ist.

Bei dieser Auseinandersetzung habe ich stets die praktischen Anwendungen und nicht die rein mathematische Seite in den Vordergrund gestellt, da die Abhandlung selbst aus einem Vorstudium für eine dienstliche Untersuchung von Schiffsvibrationen entstanden ist.

§ 2. Es sei AB ein gleichförmiger, zylindrischer, ursprünglich gerader Stab, und es liege die x-Achse in der Mittellinie des Stabes, das Ende A dem Abszissenwerte $x = 0$ und das Ende B dem Werte $x = l$ entsprechend. Es sei angenommen, daß dieser Stab einer anfänglichen (dem Augenblicke $t = 0$ entsprechenden) Störung seines Gleichgewichtszustandes und der Wirkung einer veränderlichen Kraft unterliege; es sollen seine Schwingungen bestimmt werden.

Es wird ferner angenommen, daß die Richtung der Kraft überall der z-Achse parallel ist, und daß es sich um die ebenen Quer- oder Transversalschwingungen handelt, und daß sie in der zx-Ebene vor sich gehen.

Die auf den Stab wirkende Kraft sei in jedem Punkte auf die Längeneinheit bezogen und durch die Funktion

$$Z = F(x, t)$$

wo $F(x, t)$ eine gegebene Funktion der Abszisse x und der Zeit t ist, dargestellt.

Es ist wohl bekannt, daß dieses Problem mathematisch in folgender Art ausgesprochen wird: es soll z als Funktion der Unabhängigen x und t in der Art bestimmt werden, daß sie folgenden Forderungen Genüge leiste:

1°) *Sie soll der partiellen Differentialgleichung* (der Bewegungsgleichung)[1]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \frac{1}{qs} F(x, t) \qquad (1)$$

genügen. Hier bezeichnet q die Dichtigkeit des Stabmaterials, s—die Querschnittsfläche, $b^2 = \frac{EJ}{qs}$ — eine Konstante. E ist der Elastizitätsmodul, J— das Trägheitsmoment der Fläche s um eine zu der Schwingungsebene senkrechte zentrale Achse.

2°) *Sie soll die Anfangsbedingungen, welche die Anfangsstörung darstellen, erfüllen.* Diese Bedingungen werden in folgender Art ausgesprochen: wenn t gleich Null ist, so muß z gleich einer gegebenen Funktion $\varphi(x)$ sein, und die partielle Ableitung $\frac{\partial z}{\partial t}$ muß gleich einer anderen gegebenen Fun-

[1] Poisson. Mécanique, § 519—529. — Lord Rayleigh. Theory of Sound, 2nd ed., chap. VIII.

ktion $\psi(x)$ sein. Diese Funktionen sind nur im Intervalle von $x=0$ bis $x=l$ gegeben und, eine noch anzugebende Beschränkung ausgenommen, im übrigen willkürlich.

3°) *Sie soll den Grenz- oder Befestigungsbedingungen genügen.* Diese Bedingungen beziehen sich auf die Enden $A(x=0)$ und $B(x=l)$ des Stabes und werden so ausgesprochen:

a) Für ein *freies* Ende müssen die (der Abszisse $x=0$ oder $x=l$) entsprechenden Werte von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ und von $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ gleich Null werden.

b) Für ein *gestütztes* Ende müssen die entsprechenden Werte von z und von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ gleich Null werden.

c) Für ein *eingeklemmtes* Ende müssen die entsprechenden Werte von z und von $\frac{\partial z}{\partial x}$ gleich Null werden.

Diese Bedingungen sollen für alle Werte von t gelten. Die unter 2°) besprochenen Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, welche die Anfangsstörung darstellen, müssen diesen Grenzbedingungen auch genügen.

Allgemeiner Ansatz für die Lösung

§ **3.** Die allgemeine Methode zur Lösung dieses Problems besteht im folgenden.

Man setze

$$z = z_1 + z_2 \tag{2}$$

und bestimme z_1 und z_2 durch die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 z_1}{\partial x^4} = 0 \tag{3}$$

und

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 z_2}{\partial x^4} = \frac{1}{qs} F(x, t) \tag{4}$$

Man bestimme außerdem die Grenz- und Anfangsbedingungen für z_1 und z_2 so, daß z_1 die freien und z_2 die erzwungenen Schwingungen darstelle. Das wird dadurch erreicht, daß man z_2 und z_1 folgenden Bedingungen unterwirft: 1°) z_2 allein genommen muß den gegebenen, für z geltenden Grenzbedingungen genügen, und was die Anfangsbedingungen anbetrifft, so nehme man sie für z_2 derart, daß, wenn t gleich Null wird, dann z_2 und $\frac{\partial z_2}{\partial t}$ auch

gleich Null werden. Hierdurch wird z_2 völlig bestimmt sein; 2°) z_1 allein genommen muß den gegebenen für die Summe $z = z_1 + z_2$ geltenden Grenz- und Anfangsbedingungen genügen.

Wenn die Funktionen z_1 und z_2 in dieser Art bestimmt werden, so sieht man sogleich, daß ihre Summe $z = z_1 + z_2$ der Bewegungsgleichung (1) und den Anfangs- und Grenzbedingungen genügt, so daß $z_1 + z_2$ eine Lösung unseres Problems ist. Diese Lösung ist dabei so beschaffen, daß z_1 nur von der Anfangsstörung $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ und nicht von der wirkenden Kraft $F(x, t)$ abhängt; z_2 dagegen hängt nur von dieser Kraft ab und ist im Gegenteil von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, d. h. von der Anfangsstörung unabhängig. Mit einem Wotre: z_1 *wird die freien,* z_2 *die erzwungenen Schwingungen darstellen.*

Ansatz der freien Schwingung mittels Normalfunktionen

§ **4.** Es werden zuerst die freien Schwingungen bestimmt, was auf folgende wohlbekannte Art geschieht: Man suche die allgemeinste Form des Ausdruckes

$$z_1 = \sum XT \tag{5}$$

wo X eine Funktion von x allein und T eine Funktion von t allein bezeichnet, so daß diese Form der Gleichung (3) und den Grenzbedingungen genüge. Dann werden X und T durch die Gleichungen

$$\frac{d^4X}{dx^4} - m^4 X = 0$$

und

$$\frac{d^2T}{dt^2} + b^2 m^4 T = 0 \tag{6}$$

bestimmt, wobei m einen beliebigen konstanten Wert haben kann.

Man erhält für X:

$$X = C_1 \mathfrak{Cof}\, mx + C_2 \mathfrak{Sin}\, mx + C_3 \cos mx + C_4 \sin mx \tag{7}$$

wo C_1, C_2, C_3, C_4 willkürliche Konstanten sind und $\mathfrak{Cof}$, $\mathfrak{Sin}$ in gewöhnlicher Weise die hyperbolischen Funktionen bezeichnen.

Der entsprechende Wert von T ist

$$T = D \cos m^2 bt + E \sin m^2 bt$$

Danach nimmt der Ausdruck (5) die folgende Form an:

$$z_1 = \sum DX \cos m^2 bt + \sum EX \sin m^2 bt \tag{8}$$

wo die Summen über alle möglichen Werte von m zu erstrecken sind. Um die Grenzbedingungen zu befriedigen, bestimmt man die Konstanten C derart, daß jede von den Funktionen X, allein genommen, den Grenzbedingungen genüge, was bekanntlich für jede Kombination dieser Bedingungen zu einer entsprechenden transzendenten Gleichung

$$\Phi(m) = 0 \tag{9}$$

führt.

Es wurde von Poisson[1] bewiesen, daß diese Gleichungen unendlich viele Wurzeln besitzen, die sämtlich reell und voneinander verschieden sind. Man bezeichne diese Wurzeln durch

$$m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$$

Jeder Wurzel entspricht eine Funktion X, welche bloß eine willkürliche Konstante als Faktor enthalten wird. Die Funktion X, welche der Wurzel m_k entspricht, wollen wir im folgenden durch $C_k X_k$ bezeichnen.

Setzt man

$$C_k D = A_k \quad \text{und} \quad C_k E = B_k$$

so erhält man für z_1 den Ausdruck

$$z_1 = \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k X_k \cos m_k^2 bt + \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k X_k \sin m_k^2 bt \tag{10}$$

wo A_k und B_k willkürliche Konstanten, m_k, wie gesagt, die Wurzeln der transzendenten Gleichung (9) und X_k bestimmte Funktionen von x und m_k sind. Diese Funktionen X_k sollen hier im Anschluß an die englischen Autoren «*den Grenzbedingungen entsprechende Normalfunktionen*» genannt werden.

§ **5.** Die Haupteigenschaft dieser Normalfunktionen wird durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\int_0^l X_i X_k \, dx = 0, \qquad \text{wenn } k \text{ ungleich } i \text{ ist}$$

Diese Gleichung folgt unmittelbar aus der Gleichung (6) und den Grenzbedingungen, welchen die Normalfunktionen genügen.

[1] Poisson. Mécanique, § 524.

Diese Eigenschaft liefert nach Fourier das Mittel zur Berechnung der Koeffizienten N_k bei der Darstellung einer gegebenen Funktion $f(x)$ in der Form einer nach den Normalfunktionen fortschreitenden Reihe

$$f(x) = N_1 X_1 + N_2 X_2 + \ldots + N_k X_k \ldots \qquad (11)$$

wenn man sich überzeugt oder angenommen hat, daß eine solche Darstellung möglich ist. Die Gleichung (11) wird beiderseits mit $X_k\,dx$ multipliziert und zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = l$ integriert, wodurch der Wert

$$N_k = \frac{\int_0^l f(x)\, X_k\, dx}{\int_0^l X_k^2\, dx} \qquad (12)$$

erhalten wird. Der Nenner in dieser Formel kann ein für allemal vermittels der Gleichung (6) berechnet werden, ohne daß man die Integration auszuführen braucht. In Lord Rayleighs: «Theory of Sound» (chap. VIII), findet man eine kleine Tabelle, welche die Werte dieses Nenners für alle sechs Kombinationen der Grenzbedingungen angibt.

Die erzwungene Schwingung; allgemeine Lösung des Problems

§ **6.** Der weitere Schritt in unserer Methode besteht in der Bestimmung von z_2. Das wird folgendermaßen erreicht:

1°) die auf den Stab wirkende veränderliche Kraft $F(x, t)$ (oder in technischer Ausdrucksweise — die im Augenblick t statthabende Verteilung der veränderlichen Belastung) ist in der Form einer nach den den Grenzbedingungen entsprechenden Normalfunktionen X_k fortschreitenden Reihe darzustellen.

Man setze also

$$F(x, t) = N_1 X_1 + N_2 X_2 + \ldots + N_k X_k + \ldots \qquad (13)$$

woraus

$$N_k = \frac{\int_0^l F(x, t)\, X_k\, dx}{\int_0^l X_k^2\, dx} \qquad (14)$$

folgt, was eine vollkommen bestimmte Funktion der Veränderlichen t darstellt.[1]

2°) Man setze ferner

$$z_2 = \sum_{k=1}^{k=\infty} T_k X_k \tag{15}$$

wo T_k eine noch zu bestimmende Funktion von t bedeutet.

3°) Die Ausdrücke (13) und (15) sind in die Gleichung (4) einzusetzen, dann ersieht man, daß T_k durch die folgende Gleichung

$$\frac{d^2T_k}{dt^2} + m_k^4\, b^2 T_k = \frac{1}{qs} N_k \tag{16}$$

zu bestimmen ist.

Diese Gleichung gibt

$$T_k = G_k \cos m_k^2 bt + H_k \sin m_k^2 bt + S_k.$$

wo

$$S_k = \frac{1}{qs} \cdot \frac{1}{m_k^2 b} \left[\sin m_k^2 bt \int_0^t N_k \cos m_k^2 bt\, dt - \cos m_k^2 bt \int_0^t N_k \sin m_k^2 bt\, dt \right]$$

und G_k und H_k willkürliche Konstanten sind.

Diese Konstanten sind derart zu bestimmen, daß, wenn t gleich Null wird, dann auch T_k und $\frac{dT_k}{dt}$ gleich Null werden. Diese Bedingungen folgen unmittelbar aus dem im § 3 Gesagten über die Anfangsbedingungen, welchen z_2 genügen muß. So erhält man

$$G_k = 0 \quad \text{und} \quad H_k = 0$$

und es wird

$$T_k = \frac{1}{qsm_k^2 b} \left[\sin m_k^2 bt \int_0^t N_k \cos m^2 bt\, dt - \cos m^2 bt \cdot \int_0^t N_k \sin m^2 bt\, dt \right] \tag{17}$$

---

[1] Streng mathematisch gefasst, ist eine solche Darstellung nur dann möglich, wenn die Funktion $F(x, t)$ denselben Grenzbedingungen wie die Normalfunktionen X genügt. Für die praktischen technischen Anwendungen braucht dies aber nicht der Fall zu sein. Man vergleiche hierzu die Darstellung einer Funktion $f(x)$, die bei $x = 0$ und $x = \pi$ nicht gleich Null ist, durch eine Sinusreihe. Man weiss wohl, dass in diesem Falle mit wachsender Gliederzahl der Reihe die Kurve, welche die Summe dieser Glieder repräsentiert, sich an den Punkten $x = 0$ und $x = \pi$ immer mehr einer Senkrechten zur Abszissenachse annähert, so dass diese Senkrechten die entsprechenden Punkte der Abszissenachse mit den Punkten $(0, f(0))$ und $(\pi, f(\pi))$ verbinden. In unserem Falle, wo $F(x, t)$ die Belastung auf den Stab ist, sieht man unmittelbar ein, dass $F(x, t)$ und seine Reihendarstellung (mit vertikaler Ordinate an den Endpunkten) hinsichtlich ihrer Wirkung auf den Stab gleichbedeutend sind.

Näheres darüber kann man bei Byerly: Elementary Treatise on Fourier's Series etc. (Boston, 1893), S. 64 u. 65, oder bei R. Fricke: Analytisch-funktionen-theoretische Vorlesungen (Leipzig, 1900), S. 14, finden.

4°) Es bleibt noch z_1 so zu bestimmen, daß die Summe $z = z_1 + z_2$ den Anfangsbedingungen genüge; da aber bei $t = 0$ z_2 und $\frac{\partial z_2}{\partial t}$ beide gleich Null sind, so sind diese Anfangsbedingungen, wie schon im § 3 bemerkt wurde, folgende:

$$\begin{aligned} &\text{wenn } t = 0 \text{ ist, so muß } z_1 \text{ gleich } \varphi(x) \text{ werden} \\ &\text{»} \quad t = 0 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \frac{\partial z_1}{\partial t} \quad \text{»} \quad \psi(x) \quad \text{»} \end{aligned} \tag{18}$$

Diese Bedingungen reichen aus, um die im Ausdrucke (10) noch vorhandenen willkürlichen Konstanten A_k und B_k $(k = 1, 2, \ldots)$ eindeutig zu bestimmen, denn sie liefern die zwei Gleichungen (19):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k X_k &= \varphi(x) \\ \sum_{k=1}^{k=\infty} b m_k^2 B_k X &= \psi(x) \end{aligned} \tag{19}$$

aus welchen

$$A_k = \frac{\int_0^l \varphi(x) \cdot X_k \, dx}{\int_0^l X_k^2 \, dx} \tag{20}$$

und

$$B_k = \frac{1}{b m_k^2} \cdot \frac{\int_0^l \psi(x) X_k \, dx}{\int_0^l X_k^2 \, dx}$$

folgt.

Wenn man alle diese einzelnen Resultate und Entwicklungen zusammenzieht, *so sieht man ein, dass unsere Aufgabe durch folgende Ausdrücke formal vollkommen gelöst ist:*

$$\left.\begin{aligned} z &= z_1 + z_2 \\ z_1 &= \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k X_k \cos m_k^2 b t + \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k X_k \sin m_k^2 b t \\ z_2 &= \sum_{k=1}^{k=\infty} T_k X_k \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

wobei T_k durch die Formel (17), A_k und B_k durch die Formeln (20) und m_k durch die transzendente Gleichung (9) bestimmt sind.

Wird die Lösung in dieser Form dargestellt, so ersieht man unmittelbar, daß, wenn $F(x,t)$ gleich Null gesetzt wird, z_2 verschwindet, z_1 aber unverändert bleibt; wenn man dagegen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gleich Null nimmt, so verschwindet z_1 und z_2 bleibt unverändert. Dieses zeigt, daß z_1 wirklich die freien, und z_2 wirklich die erzwungenen Schwingungen des Stabes darstellt.

Die obige Rechnung ist rein formal durchgeführt worden. In jedem einzelnen Falle, wenn die Funktionen wirklich gegeben, nicht nur bezeichnet, werden, und man dabei streng mathematisch verfahren will, müßte man beweisen, daß die in der Lösung vorkommenden unendlichen Reihen alle die Operationen (Integration und mehrfache Differentiationen nach x und t) ohne weiteres zulassen.

Ganz anders steht die Sache in den praktisch-technischen Anwendungen. Hier braucht man nur eine ziemlich grobe Annäherung, für welche schon wenige erste Glieder der Reihen genügen. *Die nötige Anzahl dieser Glieder kann durch eine unmittelbare Rechnung bestimmt werden.* Um das zu erreichen, beachte man, daß die veränderliche Belastung $F(x,t)$ praktisch niemals genau, sondern nur näherungsweise angegeben ist: man berechne also die Werte dieser Funktion, welche ihren Verlauf charakterisieren, und man vergleiche sie mit denjenigen Werten, welche durch die Summe der ersten Glieder der Reihe (13) geliefert werden, und man nehme danach so viele Glieder in der Reihe, daß die Abweichungen die praktisch zugelassenen Grenzen der Genauigkeit in der Angabe der Belastung nicht überschreiten.

Gewöhnlich genügen dazu die ersten 2 bis 6, selten 10 Glieder der Reihen. Wir wollen also im folgenden immer stillschweigend annehmen, daß unsere Reihen sich auf endliche Summen reduzieren.

Bewegung eines Stabes unter beweglicher Last

§ 7. Um die oben entwickelte allgemeine Methode an einigen Beispielen zu erläutern, werde ich die einfachsten und interessantesten Fälle untersuchen.

1. Beispiel. *Ein gleichförmiger zylindrischer Stab ist an beiden Enden frei gestützt und der Wirkung einer sich gleichförmig bewegenden punktförmigen Last unterworfen. Die Geschwindigkeit der Bewegung sei a, und die*

Last sei als eine Kraft P angesehen. Es wird verlangt, die erzwungenen Schwingungen des Stabes zu ermitteln.

Wir wollen erst die allgemeinen Formeln für einen an beiden Enden gestützten Stab entwickeln und dann diese Formeln auf das Beispiel anwenden.

Die Grenzbedingungen für einen gestützten Stab sind folgende:

$$\text{bei } x = 0 \text{ muß } z = 0 \text{ und } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \text{ werden}$$
$$\text{» } x = l \text{ » } z = 0 \text{ » } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \text{ »}$$

für jeden beliebigen Wert der anderen Veränderlichen t. Gemäß diesen Grenzbedingungen sind die Normalfunktionen zu bestimmen.

Da

$$X = C_1 \mathfrak{Cof}\, mx + C_2 \mathfrak{Sin}\, mx + C_3 \cos mx + C_4 \sin mx$$

so liefern die Grenzbedingungen folgendes System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0 \\ C_1 - C_3 &= 0 \\ C_1 \mathfrak{Cof}\, ml + C_2 \mathfrak{Sin}\, ml + C_3 \cos ml + C_4 \sin ml &= 0 \\ C_1 \mathfrak{Cof}\, ml + C_2 \mathfrak{Sin}\, ml - C_3 \cos ml - C_4 \sin ml &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

aus welchen

$$C_1 = 0 \quad \text{und} \quad C_3 = 0$$

folgt; das System (α) wird also mit dem folgenden äquivalent:

$$\begin{aligned} C_2 \mathfrak{Sin}\, ml + C_4 \sin ml &= 0 \\ C_2 \mathfrak{Sin}\, ml - C_4 \sin ml &= 0 \end{aligned}$$

die Determinante dieses Systems muß verschwinden, sie lautet aber

$$\Delta = \mathfrak{Sin}\, ml \cdot \sin ml$$

Um unnütze Transformationen vom Imaginären zum Reellen zu vermeiden, hat man nur die Gleichung $\Delta = 0$ durch die aus ihr folgende

$$\sin ml = 0 \quad (\beta)$$

zu ersetzen, dann wird $C_2 = 0$ und C_4 bleibt willkürlich.

Die Gleichung (β) ist die den Grenzbedingungen entsprechende transzendente Gleichung, welche die Werte der Konstanten m liefert.

Es folgt

$$m_k = \frac{k\pi}{l} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Die negativen Werte der ganzen Zahl k braucht man nicht zu betrachten, da die ihnen entsprechenden Glieder mit den aufgenommenen, den positiven Werten von k entsprechenden, sich vereinigen.

Also werden die Normalfunktionen

$$X_k = \sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Die Formeln (19), (20), (21) liefern dann die folgende allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} z = {} & \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{k=\infty} \sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k^2\pi^2 bt}{l^2}\cdot\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx \\ & + \frac{2l}{\pi^2 b}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k^2\pi^2 bt}{l^2}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx \\ & - \frac{1}{qs}\frac{2l}{\pi^2 b}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k^2\pi^2 bt}{l^2}\int_0^l dt\int_0^l F(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k^2\pi^2 bt}{l^2}\,dx \\ & + \frac{1}{qs}\frac{2l}{\pi^2 b}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k^2\pi^2 bt}{l^2}\int_0^l dt\int_0^l F(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k^2\pi^2 bt}{l^2}\,dx \end{aligned} \qquad (22)$$

des Problems der Schwingungen eines an beiden Enden gestützten Stabes, für welchen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ die Anfangsstörung und $F(x,t)$ die wirkende Kraft darstellen.

Um diese allgemeine Lösung für unser Beispiel zu benutzen, muß man die punktförmige Kraft P als den Grenzfall einer auf einer kurzen Strecke λ, welche den Angriffspunkt der Kraft P enthält, gleichförmig verteilten

Kraft $p = \frac{P}{\lambda}$ ansehen. Dieser Betrachtung zufolge hat man die Funktion $F(x, t)$ so zu definieren:

$$F(x,t) = 0 \qquad \text{im Intervalle von } x = 0 \text{ bis } x = at$$
$$F(x,t) = p = \frac{P}{\lambda} \quad \text{» » » } x = at - \frac{\lambda}{2} \text{ bis } x = at + \frac{\lambda}{2}\ ^{1}$$
$$F(x,t) = 0 \qquad \text{» » » } x = at + \frac{\lambda}{2} \text{ bis } x = l$$

Diese Definition gestattet eine leichte Ausführung der Quadraturen und man erhält

$$N_k = \frac{2}{l}\int_0^l F(x,\ t)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}p\int_{at-\frac{\lambda}{2}}^{at-\frac{\lambda}{2}} \sin\frac{k\pi x}{l}\cdot dx$$
$$= \frac{2p}{k\pi}\left[\cos\frac{k\pi\left(at-\frac{\lambda}{2}\right)}{l} - \cos\frac{k\pi\left(at+\frac{\lambda}{2}\right)}{l}\right] = \frac{4p}{k\pi}\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}\sin\frac{k\pi}{l}at$$

und die Formel (22) liefert, wenn man $\varphi(x) = 0$ und $\psi(x) = 0$ setzt, den Ausdruck

$$z = z_2 = \frac{4}{\pi^3}\frac{pl^4}{qs}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^3}\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{l}}{k^2\pi^2b^2 - a^2l^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi}{l}at$$
$$-\frac{4}{\pi^3}\frac{pl^4}{qs}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^3}\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}}{k^2\pi^2b^2 - a^2l^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k^2\pi^2bt}{l^2} \qquad (23)$$
$$-\frac{4}{\pi^4}\frac{pl^5}{qs}\frac{a}{b}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^4}\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}\cos\frac{k\pi\lambda}{2l}}{k^2\pi^2b^2 - a^2l^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k^2\pi^2bt}{l^2}$$

Man gelangt noch leichter zu dieser Formel, wenn man die Gleichungen (16) und (17) unmittelbar benutzt.

In unserem Falle wird nämlich die Gleichung (16)

$$\frac{d^2T_k}{dt^2} + \frac{\pi^4k^4}{l^4}b^2T_k = \frac{1}{qs}\frac{4p}{k\pi}\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}\sin\frac{k\pi}{l}at \qquad (24)$$

---

[1] Statt der Werte $at - \frac{\lambda}{2}$ und $at + \frac{\lambda}{2}$ kann man auch $at - \varepsilon$ und $at + (\lambda - \varepsilon)$ nehmen, wobei ε irgend einen Wert haben kann, welcher kleiner als λ ist. Das Resultat bleibt unabhängig von ε.

woraus man ohne Rechnung das partikuläre Integral S_k erhält

$$S_k = \frac{1}{qs}\frac{4p}{k\pi}\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}}{\frac{\pi^4 k^4}{l^4}b^2 - \frac{k^2\pi^2 a^2}{l^2}}\sin\frac{k\pi}{l}at \qquad (25)$$
$$= \frac{1}{qs}\frac{4pl^4}{\pi^3 k^3}\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}}{k^2\pi^2 b^2 - a^2 l^2}\sin\frac{k\pi}{l}at$$

und wenn man im allgemeinen Integral die willkürlichen Konstanten G_k und H_k derart bestimmt, daß für $t = 0$ T_k und $\frac{dT_k}{dt}$ auch gleich Null werden, so erhält man

$$G_k = -\frac{4}{\pi^2}\frac{pl^4}{qs}\frac{1}{k^3}\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}}{k^2\pi^2 b^2 - a^2 l^2}$$

und (25′)

$$H_k = -\frac{4}{\pi^3}\frac{pl^5 a}{qsb}\frac{1}{k^4}\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}\cos\frac{k\pi\lambda}{2l}}{k^2\pi^2 b^2 - a^2 l^2}$$

wonach die Formeln (15) und (17) die oben angeführte Form für z_2 ergeben.

Die Formel (23) liefert also die Lösung der Aufgabe über die erzwungenen Schwingungen eines Stabes unter der Wirkung einer auf einer kurzen Strecke λ gleichförmig verteilten Last, welche sich mit der Geschwindigkeit a längs des Stabes bewegt.

Die Formel (23) setzt voraus, daß keiner der im Nenner vorkommenden Ausdrücke

$$k^2\pi^2 b^2 - a^2 l^2 = 0$$

wird.[1]

Wäre eine derartige ganze Zahl $k = k_1$ vorhanden, daß

$$k_1^2\pi^2 b^2 - a^2 l^2 = 0 \qquad (26)$$

sei, dann müßte man die dem Werte $k = k_1$ entsprechenden Glieder durch folgende Glieder ersetzen:

$$-\frac{1}{qs}\frac{2pl\cdot\sin\frac{k_1\pi\lambda}{l}}{k_1^2\pi^2 a}\cdot t\cdot\sin\frac{k_1\pi x}{l}\cdot\cos\frac{k_1\pi}{l}at$$
$$+\frac{1}{qs}\frac{2pl^3}{k_1^3\pi^3 a^2}\sin\frac{k_1\pi\lambda}{2l}\cos\frac{k_1\pi\lambda}{2l}\sin\frac{k_1\pi x}{l}\sin\frac{k_1\pi at}{l}$$

[1] Das Auftreten dieser unendlichen Koeffizienten rührt bekanntlich daher, dass wir unser Problem ohne Berücksichtigung der Reibung angesetzt hatten. Es ist dies der Kürze halber geschehen, da bei Einführung von Reibungsgliedern das Problem sich ohne weitere Schwierigkeiten nach den gleichen Methoden behandeln lässt.

wie es aus (24) folgt, und alle die Summen von $k = 1$ bis $k = \infty$, $k = k_1$ ausgenommen, betrachten.

Die Formel (26) sagt eine gewisse Art von Synchronismus aus zwischen der Periode einer dem Stabe zugehörenden freien Schwingungsart und dem Zeitintervalle, in welchem die Last die ganze Stablänge l durchläuft. Die Zahl der einfachen Schwingungen, welche dem Werte $k = k_1$ entspricht, ist

$$n_1 = \frac{\pi^2 k_1^2 b}{\pi l^2} = \frac{\pi k_1^2 b}{l^2}$$

und die entsprechende halbe Schwingungsperiode

$$\tau_1 = \frac{l^2}{\pi k_1^2 b}$$

Die Zeit, welche die Belastung gebraucht, um die Länge l durchzulaufen, ist

$$T = \frac{l}{a}$$

So sieht man, daß die Relation (26) mit der folgenden

$$T = k_1 \tau_1 \tag{27}$$

gleichbedeutend ist.

Man kann dieser Relation noch eine andere anschauliche Form geben. Wenn man mit τ die halbe Periode des Grundtons ($k = 1$) des Stabes bezeichnet, so hat man

$$\tau_1 = \frac{\tau}{k_1^2}$$

und die Formel (27) nimmt die folgende Form an:

$$T = \frac{\tau}{k_1} \tag{27'}$$

oder

$$a = \frac{k_1 l}{\tau} \tag{27''}$$

Für die meisten in der Technik gebräuchlichen Fälle wird der Wert (27'') für die Geschwindigkeit a, bei welchem der oben angedeutete Synchronismus stattfinden kann, ein sehr großer, in der Praxis noch nicht vorkommender werden.

§ 8. Wollen wir jetzt zur Betrachtung der punktförmigen Belastung übergehen.

Man braucht nur in die Formel (23) für p seinen Wert

$$p = \frac{P}{\lambda}$$

einzusetzen und zur Grenze $\lambda = 0$ zu übergehen.

Man hat dann

$$\lim p \sin \frac{k\pi\lambda}{2l} = \lim \frac{P}{\lambda} \sin \frac{k\pi\lambda}{2l} = \frac{P}{2l} k\pi$$

und die Formel (23) wird

$$\left.\begin{aligned} z_2 = {} & \frac{2Pl^3}{\pi^2 qs} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^2 (k^2\pi^2 b^2 - a^2 l^2)} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi a t}{l} \\ & - \frac{2Pl^4 a}{\pi^3 qsb} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^3 (k^2\pi^2 b^2 - a^2 l^2)} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k^2\pi^2 bt}{l^2} \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

wobei im Falle des oben angedeuteten Synchronismus die zwei dem Werte $k = k_1$ entsprechenden Glieder durch die folgenden

$$- \frac{1}{qs} \frac{Pl}{k_1 \pi a} t \sin \frac{k_1 \pi x}{l} \cos \frac{k_1 \pi a t}{l} + \frac{1}{qs} \frac{Pl}{k_1 \pi^2 a^2} \sin \frac{k_1 \pi x}{l} \sin \frac{k_1 \pi a t}{l}$$

zu ersetzen und die Summen, k_1 ausgenommen, zu betrachten sind.

Diskussion der erhaltenen Resultate

§ 9. Zwei Bemerkungen bieten sich sofort dem Praktiker:

1°) Wenn die Belastung P sich *sehr langsam* längs des Stabes bewegt, so wird sie offenbar *statisch* wirken, und in jedem Augenblicke muß die Formel (28) die der statischen Belastung entsprechende Form des Stabes darstellen. Das soll geprüft werden.

2°) Bei der Behandlung des Problems wurde nur die Schwerewirkung der Last, nicht ihre Trägheitswirkung berücksichtigt.

Bei der Trägheitswirkung hängt der Druck, welchen die Last auf den Stab ausübt, von der *Beschleunigung des Angriffspunktes der Last* ab. Dieser Einfluß soll untersucht werden.

§ 10. Um die *erste von diesen Fragestellungen* zu beantworten, wollen wir vorläufig ein *Beispiel* untersuchen.

Man nehme an, daß im Zeitaugenblick t die Last P bis zur Mitte des Stabes angekommen sei, so daß $\frac{at}{l} = \frac{1}{2}$ ist. Nun wollen wir die Durchbiegung des Stabes für den Angriffspunkt der Last berechnen.

Man weiß, daß diese statische Durchbiegung gleich $\frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EJ}$ ist, und es ist nun zu prüfen, ob die Formel (28) diesen Wert geben wird.

Um die Formel (28) anzuwenden, müssen wir in dieser Formel a verschwindend klein annehmen und

$$\frac{at}{l} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{x}{l} = \frac{1}{2}$$

setzen. Die Formel (28) gibt dann

$$z_2 = \frac{2Pl^3}{\pi^2 qs} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^4 \pi^2 b^2} \sin\frac{k\pi}{2} \sin\frac{k\pi}{2}$$

oder

$$z_2 = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} \sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{1}{(2j+1)^4}$$

da $b^2 = \frac{EJ}{qs}$ ist, und alle diejenigen Glieder, für welche k eine gerade Zahl ist, verschwinden, weil dann $\sin\frac{k\pi}{2}$ gleich Null wird.

Es ist aber bekannt, daß die Summe

$$\sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{1}{(2j+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

ist, also hat man wirklich

$$z_2 = \frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EJ}$$

wie es auch sein muß.

Dieses Verfahren ist nun im *allgemeinen Falle* anzuwenden.

Man nehme also an, daß im betrachteten Zeitmomente t die Last sich im Punkte C, welcher der Abszisse $x = c$ entspricht, befinde, dann ist

$$at = c$$

Die Gleichungen der elastischen Linie sind in diesem Falle, wie bekannt, die folgenden:[1]

$$\zeta_1 = \frac{P}{EJ} \frac{c\,(l-c)}{6l} \left[(2l-c)x - \frac{x^3}{c}\right]$$

[1] Jahrbuch der Hütte. Biegungselastizität, Fall 3.

für die Strecke von $x = 0$ bis $x = c$ und

$$\zeta_2 = \frac{P}{EJ}\frac{c(l-c)}{\sigma l}\left[(l+c)(l-x) - \frac{(l-x)^3}{(l-c)}\right]$$

für die Strecke von $x = c$ bis $x = l$.

Wenn man in der Formel (28) a als verschwindend klein betrachtet, at aber gleich c setzt, so erhält man

$$z_2 = \frac{2Pl^3}{qsb^2\pi^4}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^4}\sin\frac{k\pi c}{l}\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{29}$$

und man hat zu zeigen, daß für das Intervall von $x = 0$ bis $x = c$ z_2 gleich ζ_1, und für das Intervall von $x = c$ bis $x = l$ z_2 gleich ζ_2 ist. Um das zu erreichen, braucht man nur eine Funktion $F(x)$ zu betrachten, welche folgender Art definiert ist:

$$F(x) = \zeta_1 \text{ im Intervalle von } x = 0 \text{ bis } x = c$$
$$F(x) = \zeta_2 \text{ » } \text{ » } \text{ » } x = c \text{ » } x = l$$

und die so definierte Funktion in eine Sinusreihe zu zerlegen; diese Reihe soll dieselbe wie in der Formel (29) sein.

Wenn man

$$F(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} N_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

setzt, so hat man

$$N_k = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$$

Aber der Definition der Funktion $F(x)$ zufolge hat man

$$\frac{l}{2}N_k = \int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \int_0^c \zeta_1\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx + \int_c^l \zeta_2\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$$
$$= \frac{P}{EJ}\frac{c(l-c)}{\sigma l}\cdot\left\{\int_0^c\left[(2l-c)x - \frac{x^3}{c}\right]\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx + \right.$$
$$\left. + \int_c^l\left[(l+c)(l-x) - \frac{(l-x)^3}{l-c}\right]\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx\right\}$$

und nach Ausführung der Rechnung erhält man

$$N_k = \frac{2P}{EJ}\frac{l^3}{k^4\pi^4}\sin\frac{k\pi c}{l}$$

Folglich wird die Funktion $F(x)$ so dargestellt:

$$F(x) = \frac{2P}{EJ}\frac{l^3}{\pi^4}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^4}\sin\frac{k\pi c}{l}\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (29')$$

was, mit der Formel (29) verglichen, zeigt, daß

$$z_2 = F(x)$$

ist, wenn man beachtet, daß $EJ = b^2 qs$ ist.

Diese Prüfung ist für den Mathematiker überflüssig, aber dem Techniker sagt sie viel mehr, als die strengste abstrakte Untersuchung.

§ **11.** Wollen wir jetzt die *zweite Bemerkung* erläutern.

Wenn die Belastung $F(x, t)$ auf dem Stabe unmittelbar aufläge, und das Material des Stabes so hart wäre, daß es durch die Wirkung der Last keine lokalen Eindrücke erleidet, so würde die Bewegungsgleichung, dem D'Alembertschen Prinzipe zufolge, anstatt der Form (1) die folgende Form annehmen:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + b^2\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \frac{1}{qs}F(x, t)\left[1 - \frac{1}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right] \qquad (30)$$

wo, wie früher, $F(x, t)$ die Belastung pro Längeneinheit und g die Beschleunigung der Schwerkraft bezeichnet und die z-Achse vertikal angenommen ist.

Das Vorhandensein des Gliedes

$$\frac{1}{qs}F(x, t)\frac{1}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

würde für die Integration unserer Gleichung sehr große Schwierigkeiten darbieten, aber in der Praxis der Baukonstruktionen ist dieses Glied von einem unmerkbar kleinen Einfluß.

Wollen wir erst ein *Beispiel* betrachten — nämlich die *Eisenbahnschienen*.

Hier dient als Last der Druck des Rades auf die Schiene. Diesen Druck kann man sich auf einer sehr kurzen Strecke λ in der Umgebung des Punktes, wo das Rad die Schiene berührt, irgendwie verteilt denken.

Dieser Druck beträgt im Maximum 7000 kg und die übrigen Konstanten sind: $J = 1037$ cm^4, $E = 2\,250\,000$ kg/cm^4. Das Gewicht der Schiene üblichen Profils ist 33.4 kg pro Meter, folglich ist

$$qs = \frac{33.4}{100}\cdot\frac{1}{981} = 0.00034$$

Als Länge l kann man die Entfernung zweier Querschwellen voneinander, etwa 90 cm, annehmen.

Also wenn das Kilogramm als Gewichts- und der Zentimeter als Längeneinheit angenommen wird, so hat man folgende Zahlenwerte:

$$b_2 = \frac{EJ}{qs} = \frac{2\,250\,000 \cdot 1037}{0.00034} = 6.86 \cdot 10^{12}$$

$$\frac{2Pl^3}{qsb^2\pi^4} = \frac{2 \cdot 7000 \cdot 90 \cdot 90 \cdot 90}{1037 \cdot 2\,250\,000 \cdot \pi^4} = 0.045$$

Die Formel (28) zeigt also, daß die Amplitude der Schwingungen in diesem Falle etwa den Wert 0.5 mm erreichen würde.

Wenn die Geschwindigkeit des Zuges 108 Kilometer pro Stunde wäre, dann ist

$$a = \frac{108 \cdot 1000 \cdot 100}{3600} = 3000 \text{ cm/sec.}$$

und

$$\frac{\pi a}{l} = \frac{3.14 \cdot 3000}{90} = 104$$

so daß die Beschleunigung $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ ungefähr den Wert

$$0.45 \cdot (104)^2 = 490$$

erreichen würde, und es würde $\frac{1}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ etwa $= \frac{1}{2}$ werden, was zu zeigen scheint, daß die Vernachlässigung dieses Gliedes einen beträchtlichen Fehler einführen würde.

Das wäre auch der Fall, wenn das Gewicht des Wagens oder der Lokomotive *starr* auf dem Rade liegen würde. In der Praxis ist es aber nie der Fall, der Druck wird zu den Achsenbüchsen durch die Federn übertragen.

Diese Federn sind so konstruiert, daß unter der Maximalbelastung von 7 Tonnen sie etwa 50 mm nachgeben. Wenn man diesen Umstand beachtet, so wird man zu ganz anderen Schlüssen gelangen.

Die Grundflächen der Federn sind mit den Achsenbüchsen starr verbunden, so daß sie dieselbe Bewegung in der Vertikalebene wie die Berührungspunkte der Räder mit der Schiene machen; der Wagen selbst ist aber mit den Enden der Federn verbunden und sein Schwerpunkt wird nur um soviel schwingen, wie diese Enden.

Bezeichne man durch P die auf jeder Feder aufliegende Last, durch f die durch diese Last hervorgerufene statische Durchbiegung der Feder, so erhält man unmittelbar das Resultat, daß die Periode der freien Schwingungen der Last P auf der Feder

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{f}{g}}$$

ist. Wenn die Grundfläche der Feder erzwungenen Schwingungen unterworfen wird, so werden diese Schwingungen auch ein Mitschwingen oder erzwungene Schwingungen in der Last P hervorrufen. Die Amplitude dieses Mitschwingens hat, wie bekannt, ein bestimmtes Verhältnis zu jener der Grundflächen der Federn. Man hat nämlich folgendes Resultat: Wenn die erzwungenen Schwingungen der Grundfläche der Feder aus einer Summe von Gliedern der Form

$$h \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \alpha\right)$$

bestehen, so besteht die Schwingung der Last aus einer Summe von Gliedern der Form

$$h \frac{\tau^2}{T^2 - \tau^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \alpha\right)$$

so daß die Amplituden der entsprechenden Einzelschwingungen im Verhältnisse

$$\frac{\tau^2}{T^2 - \tau^2} = \frac{\frac{\tau^2}{T^2}}{1 - \frac{\tau^2}{T^2}}$$

zueinander stehen.

In unserem Falle hat man

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{f}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{5}{981}} = 0.45 \text{ sec.}$$

Die Periode τ für die Glieder der in der Formel (28) enthaltenen Summen, welche den Faktor $\sin\frac{k\pi at}{l}$ besitzen, ist

$$\tau = \frac{2l}{ak}$$

und für jene mit dem Faktor $\sin\frac{k^2\pi^2 bt}{l^2}$ behafteten ist

$$\tau_1 = \frac{2l^2}{k^2\pi b}$$

Die Perioden τ und τ_1 erhalten ihren größten Wert für $k = 1$, nämlich:

$$\tau = \frac{2l}{a} = \frac{2 \cdot 90}{3000} = 0.06 \text{ sec.}$$

und

$$\tau_1 = \frac{2l^2}{\pi b} = \frac{2 \cdot 90 \cdot 90}{\pi \cdot \sqrt{6.86} \cdot 10^6} = 0.0022 \text{ sec.}$$

Man sieht also, daß im ersten Falle

$$\frac{\tau^2}{T^2} = \left(\frac{0.06}{0.45}\right)^2 = 0.018$$

ist, und im zweiten

$$\frac{\tau_1^2}{T^2} = \left(\frac{0.0022}{0.45}\right)^2 = 0.000025$$

ist.

Diese Resultate zeigen, daß nur $\frac{1}{50}$ der Beschleunigung der Grundflächen der Federn auf die Last übertragen wird, also daß der vom Rade auf die Schiene ausgeübte Druck sich nicht mehr als um 1% von dem Gewichte der Last unterscheidet, d. h. daß er in den Grenzen etwa von $0.99P$ bis $1.01P$ schwankt.

Zu ganz analogen Resultaten gelangt man, wenn man auch die übrigen in der Praxis vorkommenden Fälle untersucht, was in einer ziemlich allgemeinen Art durchgeführt werden kann, indem man die Durchbiegung des Stabes und die zulässige Spannung anstatt der anderen den Stab charakterisierenden Konstanten benutzt.

Man wird sich überzeugen, daß das Glied

$$\frac{1}{qs} F(x, t) \frac{1}{g} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \tag{31}$$

immer einer praktisch unmerklichen Variation der Belastung $F(x, t)$ entspricht, so daß diese Belastung als die wirkende Kraft angesehen werden kann. Wenn man aus irgend welchen Gründen den Einfluß dieser Variationen untersuchen will, so hat man nur die oben angegebenen Resultate als die erste Annäherung anzusehen, das Glied (31) als eine Störungsfunktion zu betrachten und die Methode der sukzessiven Annäherungen anzuwenden, ganz analog dem, wie es in der theoretischen Astronomie gemacht wird.

Ehe wir zum zweiten Beispiel übergehen, wollen wir noch den Einfluß der Geschwindigkeit der Last für den Fall der Eisenbahnschienen näher betrachten.

Da

$$b^2 = 6.86 \cdot 10^{12}$$

ist, so ist:

$$b = 2.62 \cdot 10^6, \quad \frac{a}{b} = \frac{3000}{2.62 \cdot 10^6} = \frac{1}{870}, \quad \frac{a^2 l^2}{\pi^2 b^2} = \frac{3000 \cdot 3000 \cdot 90 \cdot 90}{\pi^2 \cdot 6.86 \cdot 10^{12}} = \frac{1}{940}$$

und

$$\frac{al}{\pi b} = \frac{1}{31}$$

Wenn man die Formel (28) in folgender Art schreibt:

$$\left.\begin{aligned} z_2 = {} & \frac{2Pl^3}{qsb^2\pi^4} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^4 \left(1 - \frac{a^2 l^2}{k^2 \pi^2 b^2}\right)} \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{k\pi at}{l} \\ & - \frac{2Pl^3}{qsb^2\pi^4} \frac{al}{\pi b} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^5 \left(1 - \frac{a^2 l^2}{k^2 \pi^2 b^2}\right)} \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{k\pi at}{l} \end{aligned}\right\} \qquad (28')$$

so sieht man ein, daß der Faktor $1 - \frac{a^2 l^2}{k^2 \pi^2 b^2}$ sich von 1 weniger als um $\frac{1}{940}$ unterscheidet, so daß man diesen Faktor durch 1 ersetzen kann, und dieses um so mehr, da die Größe b^2 nie bis zu $\frac{1}{1000}$ ihres Wertes bekannt sein kann, weil schon eine Abnutzung um $\frac{1}{20}$ mm der oberen Fläche der Schiene das Trägheitsmoment des Querschnitts mehr als um $\frac{1}{1000}$ seines Wertes ändert.

Das zweite Glied in der Formel (28') beträgt weniger als $\frac{1}{30}$ des ersten und kann auch praktisch vernachlässigt werden.

Wenn man beachtet, daß

$$\frac{2}{\pi^4} = \frac{1}{48.7}$$

und daß

$$b^2 \cdot qs = EJ$$

ist, so kann man die angenäherte Formel schreiben:

$$z_2 = \frac{1}{48.7} \cdot \frac{Pl^3}{EJ} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^4} \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{k\pi at}{l} \qquad (32)$$

und wenn man diese Formel mit der Formel (29′) vergleicht, so sieht man, daß sogar bei der größten üblichen Geschwindigkeit des Zuges die auf die Schiene wirkende Last als eine statische angesehen werden kann.

Nähere Betrachtungen über diesen Gegenstand sind von rein praktischem Interesse und gehören nicht zum Zwecke dieser Abhandlung.

§ 12. 2. Beispiel. *Ein an beiden Enden frei gestützter Stab ist der Wirkung einer im Punkte $x = c$ angreifenden periodischen Kraft unterworfen. Diese Kraft ist der z-Achse parallel gerichtet und ihre Intensität durch die Formel*

$$F = P \sin nt$$

dargestellt. Es wird verlangt, die im Stabe erzwungenen Schwingungen zu bestimmen.

Um in diesem Falle die allgemeine Formel (22) anwenden zu können, muß man wieder die in einem Punkte konzentriert angreifende Kraft als den Grenzfall einer auf einer verschwindend kleinen Strecke λ gleichförmig verteilten Kraft ansehen.

Man setze also erst

$$p = \frac{P}{\lambda}$$

und denke sich die Funktion $F(x, t)$, welche die Belastung darstellt, in der folgenden Art definiert:

$$F(x,t) = 0 \quad \text{im Intervalle von } x = 0 \text{ bis } x = c - \frac{\lambda}{2}$$

$$F(x,t) = p \sin nt \quad » \quad » \quad » \quad x = c - \frac{\lambda}{2} \text{ bis } x = c + \frac{\lambda}{2}$$

$$F(x,t) = 0 \quad » \quad » \quad » \quad x = c + \frac{\lambda}{2} \quad » \quad x = l$$

dann hat man

$$\int_0^l F(x,t) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx = p \int_{c-\frac{\lambda}{2}}^{c+\frac{\lambda}{2}} \sin nt \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot dx$$

$$= \frac{2pl}{k\pi} \sin \frac{k\pi\lambda}{2l} \sin \frac{k\pi c}{l} \sin nt$$

Folglich

$$N_k = \frac{p}{k\pi} \sin \frac{k\pi\lambda}{2l} \sin \frac{k\pi c}{l} \sin nt$$

wonach die Formel (22) oder einfacher die Gleichungen (15) und (16) das folgende Resultat liefern:

$$\left.\begin{aligned} z_2 = &\frac{1}{qs}\frac{pl^4}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}\sin\frac{k\pi}{l}c}{k^4\pi^4b^2-n^2l^4}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin nt \\ -&\frac{1}{qs}\frac{pl^6n}{\pi^3b}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^3}\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}\sin\frac{k\pi}{l}c}{k^4\pi^4b^2-n^2l^4}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k^2\pi^2bt}{l^2} \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

wobei angenommen wird, daß es keine solche ganze Zahl k gibt, daß einer der Nenner gleich Null wäre.

Falls aber ein solcher Wert $k = k_1$ existiert, so daß

$$k_1^4\pi^4b^2 - n^2l^4 = 0 \quad (34)$$

ist, oder daß

$$\frac{k_1\pi^2b}{l^2} = n$$

ist, dann muß man die Summe der beiden dem Werte $k = k_1$ entsprechenden Glieder durch die folgenden

$$\left.\begin{aligned} -&\frac{1}{qs}\frac{pl}{k_1\pi}\frac{\sin\frac{k_1\pi\lambda}{2l}\sin\frac{k_1\pi}{l}c}{2n}t\cos nt\sin\frac{k_1\pi x}{l} \\ +&\frac{1}{qs}\frac{p}{k_1\pi}\frac{\sin\frac{k_1\pi\lambda}{2l}\sin\frac{k_1\pi}{l}c}{2n^2}\sin nt\sin\frac{k_1\pi x}{l} \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

ersetzen und in der Formel (33) die Summen, $k = k_1$ ausgeschlossen, betrachten.

Die Relation (34) zeigt den Synchronismus der Periode der Kraft mit der Periode einer der freien Schwingungen, welche der Stab ausführen kann, oder, anders gesagt, den Synchronismus mit einem der Töne, die dem Stabe entsprechen.

Die Formel (35) zeigt die bekannte Resonanzerscheinung, die bei dem Synchronismus stattfindet.

Gehen wir jetzt zum Grenzfall $\lambda = 0$ über.

Man erhält unmittelbar

$$\left.\begin{aligned} z_2 = &\frac{1}{qs}\frac{Pl^3}{2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin\frac{k\pi c}{l}}{k^4\pi^4 b^2 - n^2 l^4}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin nt \\ &-\frac{1}{qs}\frac{Pl^5}{2\pi^2}\frac{n}{b}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^2}\frac{\sin\frac{k\pi c}{l}}{k^4\pi^4 b^2 - n^2 l^4}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k^2\pi^2 b}{l^2}t \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

nur im Falle des Synchronismus hat man die Summe der zwei dem Werte $k = k_1$ entsprechenden Glieder durch die folgende Summe

$$-\frac{1}{qs}\frac{P}{4l}\frac{1}{n}t\cdot\sin\frac{k_1\pi c}{l}\cdot\cos nt\cdot\sin\frac{k_1\pi x}{l}$$
$$+\frac{1}{qs}\frac{P}{4l}\frac{1}{n^2}\sin\frac{k_1\pi c}{l}\sin nt\sin\frac{k_1\pi x}{l}$$

zu ersetzen.

Hier sieht man auch den Effekt der Resonanz deutlich ein; man bemerkt aber dabei, daß die dem Werte $k = k_1$ entsprechenden Glieder fortfallen, wenn die Kraft in dem entsprechenden Knotenpunkte angreift, denn es ist dann

$$\frac{k_1 c}{l} = \text{einer ganzen Zahl}$$

und

$$\sin\frac{k_1\pi c}{l} = 0$$

Diese Beispiele zeigen, wie die entwickelte Methode anzuwenden ist; es wurde der gestützte Stab nur wegen der Einfachheit der Rechnungen betrachtet. Die anderen Fälle bieten auch keine Schwierigkeiten dar.

Praktische Anwendungen auf Untersuchung der Wirkung der beweglichen Last im Eisenbahnbau und auf Untersuchung der Schiffsvibrationen gehören nicht zum Gegenstande und zum Zwecke dieser Abhandlung.

Marine-Akademie zu St.-Petersburg
Winter 1904—1905.

ON THE HATCHET PLANIMETER[1]

§ 1. The hatchet planimeter invented some fifteen years ago by M. Prytz, Captain of the Royal Danish Army, attracted by its excessive simplicity and by its sufficient exactitude a general attention of those, who are interested in such matters.

But in spite of the simplicity of construction the theory of the instrument seemed to be difficult and obstruse.

It was M. F. W. Hill who published in Lord Kelvin's «Philosophical Magazine» for the year 1894 a general theory of the hatchet planimeter. It is by the mean of infinite series and approximate integration of differential equations that a relation is established in this theory between the area to be measured and the angle formed by the two extreme positions of the instrument.

«The complexity of the result», — says M. Hill, — «would seem to show that no simple geometrical explanation is possible».

The subject of this note is to show that an *exact* and obvious geometrical explanation of what the hatchet planimeter really gives is not only possible, but can be obtained in a most elementary and simple manner. In order to do it I shall at first instance expose a general theory of the most usual planimeters like Amsler's ones.

§ 2. In the year 1874 M. Andrade, Sous-ingénieur de Marine, published in the «Mémorial du Génie Maritime» a very simple and general theory of the planimeters. The Mémorial, being designed for the exclusive use of French Naval Architects, is very scarce and out of trade, I give here a free exposition of M. Andrade's theory and then I apply it to the hatchet planimeter.

§ 3. M. Andrade's theory of planimeters is founded on the consideration of the area described or swept by a straight line of a given length in its motion upon a plane.

[1] Presented the 26 of November 1903.

When a straight line AB slides upon a plane every element of the line sweeps a stripe on the plane, the area of this stripe is to be regarded as positive if, looking from A towards B, this area is described by a motion the direction of which is to the right of AB, and as negative if it is to the left.

The total area described or swept by AB is the algebraical sum of all the elementary stripes taken with their proper signs. Thus if AB would only be turned on any angle, its middle point being fixed, the total area swept by AB is zero, because the sum of the negative stripes is equal to the sum of the positive ones.

This being granted we have the following theorem.

Theorem. The infinitesimal area swept by a straight line AB in its infinitely small motion from the first position A_0B_0 to the ultimate one A_1B_1 is equivalent to the area of a rectangle the one side of which is AB, the other being the projection of the space travelled by the middle point M of AB on a perpendicular to the direction of the line AB.

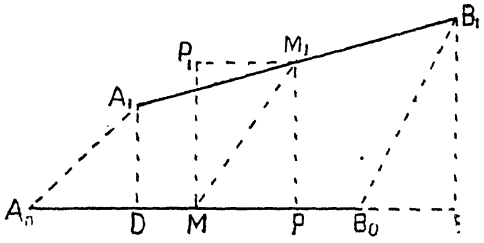


Fig. 1.

Let A_0B_0 and A_1B_1 (fig. 1) represent the two successive positions of the line AB mentioned in the theorem, then the area swept is $A_0B_0A_1B_1$; drawing the perpendiculars A_1D and B_1E we obtain the trapezium A_1DEB_1, the area of which differs from $A_0B_0A_1B_1$ by the algebraical sum of the areas A_0A_1D and B_0B_1E.

These two areas being each in the general case of the second order of magnitude, when the area $A_0B_0A_1B_1$ is of the first one, the ultimate ratio of $A_0B_0A_1B_1$ to A_1DEB_1 is unity and the two areas are equivalent. But obviously the area $A_1DEB_1 = DE \cdot M_1P = AB \cdot MP_1$, to the same order of precision as above.

Every finite area Q swept by AB is the limit of the sum of such elements as $A_0B_0A_1B_1$; by the very first principles of the calculus of limits in the process of summation every element can be replaced by its equivalent one without altering the limit of the sum. Thus

$$Q = \lim \sum A_0B_0A_1B_1 = \lim \sum A_1DEB_1 =$$
$$= \lim \sum AB \cdot MP_1 = AB \cdot \lim \sum MP_1$$

This last limit: $\lim \sum MP_1$ represents the length of the arc on which would turn a sharp edged wheel, the axis of which would be parallel

to AB, and the edge passes through M in such a manner that its point of contact with the plane on which AB slides allways coincides with M. Such a wheel may be briefly called the measuring wheel.

Thus we have the following result: the total area swept by a straight line AB of a given length l is equal to the product of l in the length s of the arc on which would turn the above mentioned measuring wheel placed at the middle point M of the line AB.

§ 4. Let us now examine what a difference there will exist in the length of the arcs on which would turn a wheel at M and an other at N, the distance MN being equal to a given length a.

Every infinitely small motion of AB can be replaced by a rotation on the angle $d\varphi$ about the corresponding momentary centre O. The elementary arcs described by the wheels M and N will be respectively ME and NF (fig. 2) but we have obviously after projection:

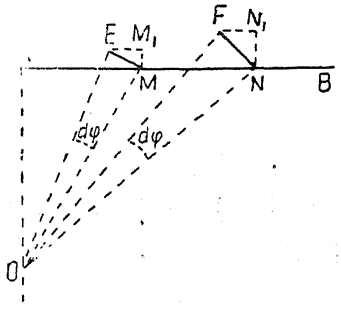


Fig. 2.

$$MM_1 = ME\cos M_1ME = OM\cdot\cos M_1ME\cdot d\varphi = KM\cdot d\varphi$$
$$NN_1 = NF\cos N_1NF = ON\cdot\cos N_1NF\cdot d\varphi = KN\cdot d\varphi$$

hence

$$NN_1 - MM_1 = (KN - KM)\,d\varphi = MN\,d\varphi = a\cdot d\varphi$$

Thus for a finite motion of AB the difference of the whole arcs through which will turn the wheels at M and at N will be equal to $a\cdot\varphi$, where φ is the angle between the initial and the ultimate positions of AB. If the ultimate position of this line is coincident with the initial one, and AB did not describe during the motion a complete revolution, the angle φ is zero, and the place of the measuring wheel is quite indifferent, the arc through which it turns remains the same. If AB had performed a complete revolution the angle $\varphi = 2\pi$, and if the measuring wheel be placed at N, the length $2\pi a$ is to be added to the length s of the arc through which the wheel N has turned, hence the value $2\pi a\cdot l$ is to be added to the area sl calculated from the immediate indication of the wheel.

§ 5. Let the point B of the straight line AB describe a closed curve C (fig. 3) the point A being astrained to remain on a given curve L, and let a measuring wheel be placed on AB at N. Then if AB, starting from the initial position A_0B_0, reaches it again, the point B having completely described the curve C, the total area swept by AB is equal to the area Q

included in the curve C, because the parts of the plane, contained between C and L, have been described by AB (fig. 3) twice and into two opposite directions, thus these parts do not contribute to the total area swept. Hence in this case Q is measured by the product ls, where s is the length of the arc through which the measuring wheel N has turned.

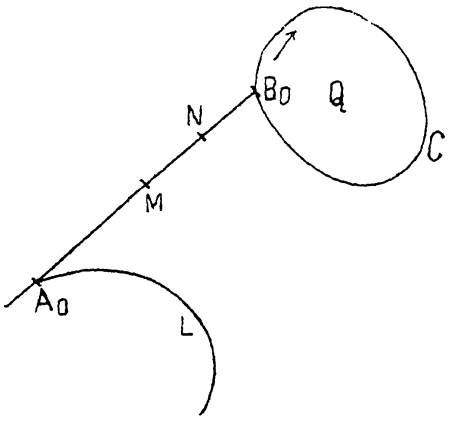


Fig. 3.

The leading curve L has been supposed above to be an open one and without loops, but when this line is also a closed one like C, then the area swept by AB (fig. 4) in its motion from the initial position A_0B_0 back to it again, as shown in the figure, the point A describing at the same time the whole leading line L, is equal to the algebraical difference of the areas Q of the curve C and P of the curve L.

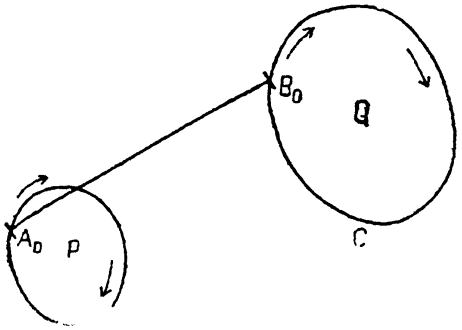


Fig. 4.

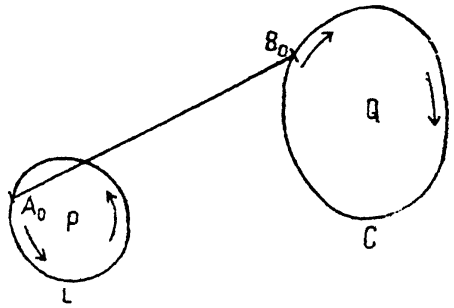


Fig. 5.

In order to determine the respective signs of P and Q it is sufficient to consider an area inclosed in the curves described by the points A or B as positive, when the corresponding boundary is described in the direction of the motion of the handles of a clock, and as negative if in the reverse one. Thus on fig. 4 both the areas P and Q are positive, on fig. 5 the area Q is positive, the area P is negative.

In the first case we have

$$Q - P = ls$$

hence

$$Q = ls + P$$

in the second one (fig. 5)

$$Q - (-P) = ls$$

hence

$$Q = ls - P$$

If the curve C, the area Q of which is to be measured, encloses completely the leading curve L then AB will make a complete revolution while describing C by the point B, and the area Q will be

$$Q = ls + P + 2\pi l \cdot a$$

This theory shows that the leading line L can be an *arbitrary* one. In the usual form of Amsler's polar planimeter this leading curve is a circle, in his integrator and in his linear planimeter the leading line is a straight line too.

The simplicity and generality of the theory above due to M. Andrade and given thirty years ago, if compared with the classical one, which can be found in the most usual text-books of applied sciences, is obvious.

§ **6.** The hatchet planimeter consists essentially of a tracing point B, with which the boundary of the area to be measured is described, this tracing point is rigidly connected to a chisel-shaped, sharp and rounded edge A, adjusted in such a manner that its plane being produced passes through the point B.

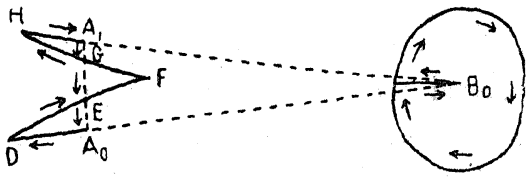


Fig. 6.

The chief propriety of such an edge is that it makes the point A, where the edge touches the plane of the drawing, to move in the direction of the straight line connecting this point with the tracing point B. Thus when B describes any line, the point A describes the corresponding curve of pursuit.

This propriety shows that in the hatchet planimeter there is no material fixed leading curve L, on the contrary this curve is a variable one depending on the curve C described by the tracing point B and on the initial position of the instrument. In a single word the leading curve L is the curve of pursuit corresponding to the curve C and to the motion of the tracing point B on it.

Let us now suppose that the point B of the planimeter starting from B_0 (fig. 6) describes the curve C and returns back to B_0, then the edge A starting from A_0 describes the corresponding curve of pursuit and arrives at A_1, so that the ultimate position of the line AB is A_1B_0. In order to bring this line in coincidence with its initial position, we have only to turn it on the angle $\varphi = A_1B_0A_0$ about the point B_0 fixed. Then the leading line

L will be closed by the circular arc A_1A_0. The total area swept by the line AB is equal to the algebraical sum of the area Q and of the areas inclosed by the parts of the leading line, each area being taken with the proper sign. Thus for our figure we have

$$\text{Area swept} = Q - (A_0DE - EFG + GHA_1)$$

As shown above the area swept is measured by the product of the length l of AB into the length of the arc s through which a measuring wheel at M would have turned.

In order to obtain this arc s we remark that if a measuring wheel be placed at A, its axis being parallel to AB, it is the plane of the wheel being perpendicular to the plane of the chisel-edge, the motion of the point of contact of the wheel with the plane of the drawing will allways be directed perpendicularly to the edge of the wheel, hence the wheel would remain at rest and its indication would be zero the whole time until the point A moves on the curve of pursuit.

From what has been said in § 4 it follows that a wheel at the middle point M would have turned on the arc $\frac{1}{2}l\varphi$ until the planimeter is arrived to the position B_0A_1.

When now the planimeter be turned about the point B_0 in order to bring its ultimate position in coincidence with the initial one, the wheel at M would obviously turn again on the arc $\frac{1}{2}l\varphi$ and in the same direction as above.

Thus the whole arc described by the measuring wheel at M (if any) will be $\frac{1}{2}l\varphi + \frac{1}{2}l\varphi = l\varphi$ and the value of the area swept is $l \cdot l\varphi = l^2\varphi = l \cdot (\text{arc } \overline{A_0A_1})$. Hence we have the following exact relation:

$$l^2\varphi = Q - (A_0DE - EFG + GHA_1)$$

When the starting point B_0 is properly chosen (it is to be taken near the centre of gravity of the area of the curve C) the algebraical sum of the areas inclosed by the different parts of the curve of pursuit and by the arc A_0A_1 will be nearly zero and Q will be given by the approximate relation

$$Q = l^2 \cdot \varphi = l \cdot \text{arc } \overline{A_0A_1}$$

When the angle φ is less than 20° the arc A_0A_1 can be practically replaced by its chord and the relation above becomes

$$Q = l \cdot \overline{A_0 A_1}$$

§ 7. In order to obtain a more assured guiding of the point A, I have modified the construction of the hatchet planimeter, having replaced the leading chisel-edge by a little sharp edged wheel or roller, the plane of which is adjusted in such a manner as to pass through the tracing point B, which is formed by the end of a pin freely revolving in its bearings.

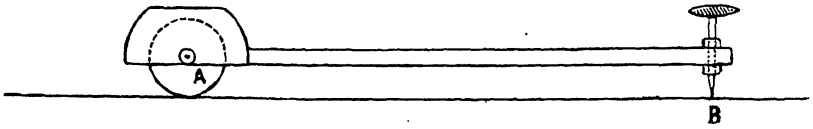


Fig. 7.

The fig. (7) represents in elevation the new instrument one quarter natural size as manufactured by M. R. Wetzer, mecanician in S. Petersburgh.

For the use of the instrument a piece of copying paper is put under the wheel, then the curve of pursuit is sharply traced, the distance A_0A_1 is easily measured, and the limit of the error committed, when neglecting the areas contained by the parts of the leading line can be clearly seen and readily ascertained if necessary.

SUR UN INTÉGRATEUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES[1]

§ **1.** Cette note a pour objet l'exposition du principe et une description sommaire d'un appareil destiné pour l'intégration mécanique des équations différentielles ordinaires de n'importe quel ordre et quelle forme.

En ce moment (janvier 1904) un appareil de ce genre est en cours de construction d'après mes plans chez M. R. Wetzer, mécanicien de précision à St.-Pétersbourg.

§ **2.** Il paraît que la première idée de l'intégration des équations différentielles à l'aide d'un appareil mécanique appartient à Lord Kelvin; le premier volume de la seconde édition de la «Natural Philosophy» de Sir W. Thomson and Tait contient la description du mécanisme en principe.

L'illustre auteur emploie dans ce but l'intégrateur de son frère le prof. James Thomson. Ce mécanisme consiste en principe des trois parties suivantes: 1°) d'un disque incliné qui reçoit un mouvement de rotation autour d'un axe passant par son centre perpendiculairement au plan du disque, 2°) d'un cylindre droit à section circulaire, dont l'axe est placé parallèlement au plan du disque, le cylindre pouvant tourner librement autour de son axe, 3°) d'un globe pesant placé entre le disque et le cylindre de manière à toucher en même temps le plan du premier et la surface du second. La fig. 1 représente le schéma de l'appareil. Le globe est maintenu par une fourche à l'aide de laquelle il peut être déplacé le long du cylindre; on règle l'appareil en telle manière que le globe parcourant la génératrice entière du cylindre, son point de contact avec le disque supposé immobile, en décrive un diamètre.

On voit aisément, qui si l'on fait tourner le disque de telle sorte que son déplacement angulaire soit proportionnel à l'abscisse x, et si en même temps on maintient à l'aide de la fourche le globe de telle sorte que la

[1] Présenté le 14 janvier 1904.

distance de son centre, au plan mené par l'axe du disque perpendiculairement à l'axe du cylindre (plan axial), soit toujours égale à l'ordonnée y, correspondant à l'abscisse x, le déplacement angulaire du cylindre sera proportionnel à la valeur de l'intégrale définie

$$\int_a^x y\,dx$$

On suppose, bien entendu, que la transmission du mouvement s'effectue sans glissement.

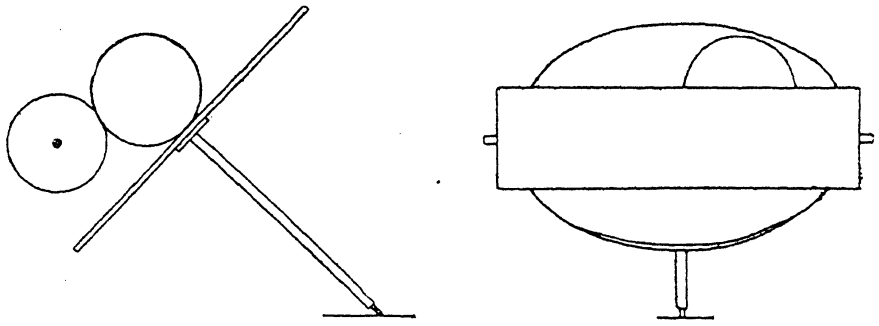


Fig. 1.

En effet soit une telle liaison cinématique établie entre le mouvement du disque et du plan sur lequel la courbe $y = f(x)$ est tracée, que le déplacement du plan s'effectue dans la direction de l'axe des x, perpendiculairement à l'axe du cylindre, et soit égal au déplacement linéaire des points du disque situés à la distance r de son centre. Soit R le rayon du cylindre; si l'on met le disque en mouvement, en poursuivant en même temps avec un bout de la fourche la courbe $y = f(x)$ et maintenant ainsi le centre du globe toujours à la distance y du plan axial mentionné plus haut, on voit, que le disque ayant tourné de l'angle $d\omega$, le déplacement linéaire de son point de contact avec le globe sera $y\,d\omega = \frac{1}{r} \cdot y\,dx$. Ce déplacement sera transmis au cylindre qui tournera de l'angle $d\varphi = \frac{1}{R} y\,d\omega = \frac{1}{Rr} y\,dx$. Donc pour un déplacement fini du mécanisme, x variant de a à x on aura

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{Rr} \cdot \int_a^x y\,dx$$

L'appareil de M. J. Thomson peut évidemment être rendu inscrivant, on prendra pour cela un point quelconque sur la base du cylindre à la di-

stance l de son centre, et on établira une telle liaison cinématique que le déplacement linéaire de ce point soit égal à celui Y du style ou de la plume inscrivante, on aura alors

$$Y = l(\varphi - \varphi_0) = \frac{l}{Rr}\int_a^x y\,dx$$

Par un choix convenable des longueurs l et r on rendra le facteur constant $\frac{l}{Rr}$ égal à l'unité de l'échelle admise pour le tracé des courbes y et Y, on aura alors simplement

$$Y = \int_a^x y\,dx$$

Nous allons dans la suite exprimer cette propriété du mécanisme brièvement en disant, que la fonction y étant fournie à la fourche c'est son intégrale, qui est rendue par le cylindre.

§ **3.** C'est à l'intégration de l'équation linéaire du second ordre et sans second membre, que Lord Kelvin applique en premier lieu une combinaison d'appareils de son frère. Soit

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 \qquad (1)$$

où p_1 et p_2 sont des fonctions données de x seul, une telle équation, qu'il s'agit d'intégrer de telle manière que pour $x = a$, y soit égal à b_0 et y' soit égal à b_1, b_0 et b_1 étant deux constantes données.

En multipliant l'équation (1) par $e^{\int p_1 dx}$, on pourra l'écrire ainsi:

$$\frac{d}{dx}\left\{e^{\int p_1 dx}\frac{dy}{dx}\right\} + p_2 e^{\int p_1 dx}\cdot y = 0$$

et en introduisant une nouvelle variable indépendante z à la place de x par l'équation

$$z = \int p_2 \cdot e^{2\int p_1 dx}\cdot dx \qquad (2)$$

on aura

$$\frac{d}{dz}\left\{p_2 e^{2\int p_1 dx}\frac{dy}{dz}\right\} + y = 0$$

Pour avoir un résultat parfaitement défini on prendra toutes les intégrales entre les limites a et x, et au moyen de l'équation (2) on

exprimera x en fonction de z; en portant ensuite cette valeur dans la fonction $p_2 e^{2\int p_1 dx}$ on l'exprimera aussi en fonction de z, que nous désignerons par $-\frac{1}{P(z)}$. On aura donc

$$p_2 e^{2\int p_1 dx} = -\frac{1}{P(z)}$$

l'équation (1) prendra alors la forme

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{P(z)} \cdot \frac{dy}{dz}\right) = y \tag{3}$$

et les conditions initiales pour $z = 0$ seront:

y soit égal à b_0
y' » » à b_1

Pour intégrer mécaniquement l'équation (3) il faut d'après l'auteur même procéder de la manière suivante: «Prenez deux intégrateurs à disque globe, cylindre de mon frère et établissez entre la fourche que guide le globe de chacun des appareils et le cylindre de l'autre une telle liaison que leurs déplacements respectifs soient égaux. Faites mouvoir le disque d'un appareil de l'angle z et en même temps le disque de l'autre d'un angle toujours égal à $\int_0^z P(z)\,dz$, alors le déplacement de la circonférence du cylindre du second appareil et celui du centre du globe du premier, représenteront chacun la valeur de y correspondant à z et satisfaisant l'équation différentielle (3).

«Pour le démontrer soient g_1 et g_2 les déplacements des deux globes comptés de leurs plans axiaux et correspondants au déplacement z du premier disque et soient dz et Pdz les accroissements infinitésimaux des déplacements angulaires des disques respectifs. Les mouvements des circonférences des cylindres seront

$$g_1\,dz \quad \text{et} \quad g_2 P(z)\,dz$$

«Mais les liaisons établies font parcourir au second globe un espace égal au déplacement de la circonférence du premier cylindre, et au premier globe un espace égal au déplacement de la circonférence du second cylindre. On a donc

$$dg_2 = g_1\,dz \quad \text{et} \quad dg_1 = g_2 P(z)\,dz$$

en éliminant g_2 on a

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{P(z)}\cdot\frac{dg_1}{dz}\right)=g_1$$

ce qui montre que g_1 satisfait bien à l'équation proposée (3)».[1]

Pour satisfaire aux conditions initiales on placera pour la valeur initiale $z=0$ les globes dans les positions respectives

$$g_1=b_0 \quad \text{et} \quad g_2=b_1P(0)$$

Ainsi l'équation linéaire sans second membre se trouve intégrée, du moins théoriquement, toutes les opérations auxiliaires n'étant que des quadratures, qui peuvent être effectuées avec le même appareil.

§ 4. Ensuite Lord Kelvin remarque que si l'on prend une chaîne de i intégrateurs et que l'on les réunisse de telle manière que la fourche du second ait un déplacement égal à celui du cylindre du premier, la fourche du troisième ait un déplacement égal à celui du cylindre du second etc.... et enfin la fourche du premier soit réuni au cylindre du dernier de manière à avoir le même déplacement, et si en outre on imprime aux disques un mouvement tel que les déplacements infinitésimaux simultanés soient: $P_1\,dx$, $P_2\,dx$, ... $P_i\,dx$, le déplacement du premier globe g_1 et celui du dernier cylindre satisferont à l'équation différentielle

$$u=\frac{1}{P_1}\frac{d}{dx}\frac{1}{P_2}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}\frac{1}{P_i}\frac{du}{dx} \tag{4}$$

Quant à l'équation linéaire générale

$$Q_1\frac{d^iu}{dx^i}+Q_2\frac{d^{i-1}u}{dx^{i-1}}+\ldots+Q_i\frac{du}{dx}-u=0 \tag{5}$$

Lord Kelvin recommande de prendre une chaîne de i intégrateurs successifs réunis de la manière indiquée plus haut et de supposer

$$P_1=P_2=P_3=\ldots=1 \tag{6}$$

c'est-à-dire à communiquer à tous les disques le même mouvement et de maintenir constamment entre les déplacements des i fourches et entre le déplacement K_i du dernier cylindre la relation

$$Q_1g_1+Q_2g_2+\ldots+Q_ig_i=K_i \tag{7}$$

alors K_i satisfera à l'équation (5).

---

[1] Natural Philosophy, part I, p. 499.

La manière de satisfaire continuellement à la relation (7) n'est pas specifiée, l'auteur s'exprimant ainsi: «Tant que l'on ne désire pas de construire actuellement une machine pour intégrer des équations différentielles du troisième ou d'un ordre supérieur il n'est pas nécessaire d'entrer dans les détails des plans pour l'exécution mécanique de la condition (7), il suffit de savoir, que cela est possible par un mécanisme travaillant d'une manière continue et lié aux disques tournants du train d'intégrateurs».

Pour une équation d'un ordre et d'une forme quelconque

$$f\left(x, \frac{d^i u}{dx^i}, \frac{d^{i-1} u}{dx^{i-1}} \cdots \frac{du}{dx}, u\right) = 0 \tag{8}$$

l'auteur propose de prendre la même chaîne de i intégrateurs réunis et de maintenir continuellement entre les déplacements $g_1, g_2, \ldots g_i$, des i globes, le déplacement K_i du dernier cylindre et le déplacement commun x des disques la relation

$$f(x, g_1, g_2, \ldots g_i, K_i) = 0 \tag{9}$$

K_i fournira la solution de l'équation (8).

Ici la manière pratique de satisfaire à la relation (9) n'est nullement indiquée, sauf en guise d'exemple pour le système:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = X_1, \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = Y_1$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = X_2; \quad \frac{d^2 y_2}{dt^2} = Y_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

où

$$\begin{aligned} X_1 = {} & (x_2 - x_1) \cdot f[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] \\ & + (x_3 - x_1) \cdot f[(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_1 = {} & (y_2 - y_1) \cdot f[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] \\ & + (y_3 - y_1) \cdot f[(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

f désignant une fonction donnée.

«Construisez en acier poli (frictionless) la surface dont l'équation soit

$$z = \xi f(\xi^2 + \eta^2)$$

et à l'aide de cette surface employée comme une came, mais à deux variables indépendantes faites mouvoir une pièce auxiliaire que je nommerai la pièce a_2, en ligne droite de telle sorte que son déplacement soit toujours égal à

$$(x_2 - x_1) f[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]$$

une autre pièce a_3 de manière qu'elle ait toujours le déplacement

$$(x_3 - x_1) f[(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2]$$

etc....

«Etablissez maintenant entre une pièce X et les pièces auxiliaires a_2, a_3, etc., ... une telle liaison, que le déplacement de la pièce X soit égal à la somme algébrique des déplacements des pièces auxiliaires, c'est-à-dire que l'on ait

$$\begin{aligned} X = {} & (x_2 - x_1) f[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] + \\ & + (x_3 - x_1) f[(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2] + \ldots \end{aligned} \tag{10}$$

«Ce qui se fera à l'aide d'une corde passant par des poulies réunies aux pièces auxiliaires a_2, a_3, ... de la même manière que dans la machine pour la prédiction des marées ...».

§ **5.** C'est avec intention que je reproduis presque textuellement dans ce qui précède les indications très succintes que l'illustre auteur propose pour la construction de la machine à intégrer les équations différentielles.

On voit que la plus grande difficulté réside dans une manière vraiment pratique à établir une relation analogue à (7) ou à (9) ou à (10), car on comprend aisément que la construction effective d'une surface en acier poli est sinon impraticable, du moins extrêmement couteuse et difficile.

Des recherches théoriques sur les vibrations des coques des navires exigeaient une intégration approximative d'une certaine équation différentielle linéaire du quatrième ordre à coefficients variables. La méthode d'approximation dite des quadratures mécaniques conduisait à des calculs fort pénibles, et j'ai résolu à recourir à la machine de Lord Kelvin et d'en faire construire une pour le Bassin Expérimental de la Marine, dont la direction m'est confiée. En étudiant le schéma du mécanisme pour en faire les plans d'exécution j'ai remarqué que le système proposé par Lord Kelvin pouvait être rendu aisément exécutable en pratique par l'introduction de deux mécanismes auxiliaires que je nomme *le multiplicateur* et *l'égaliseur* et que ces deux mécanismes augmentent notablement la portée des différentes applications de la machine.

Le premier de ces mécanismes a pour but d'effectuer automatiquement la multiplication de deux quantités variables $f_1(x)$ et $f_2(x)$, c'est-a-dire de fournir continuellement le produit $f_1(x) \cdot f_2(x)$ quand on donne les deux facteurs.

Le second a pour but de maintenir constamment la relation

$$Z_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{n-1} = 0 \qquad (11)$$

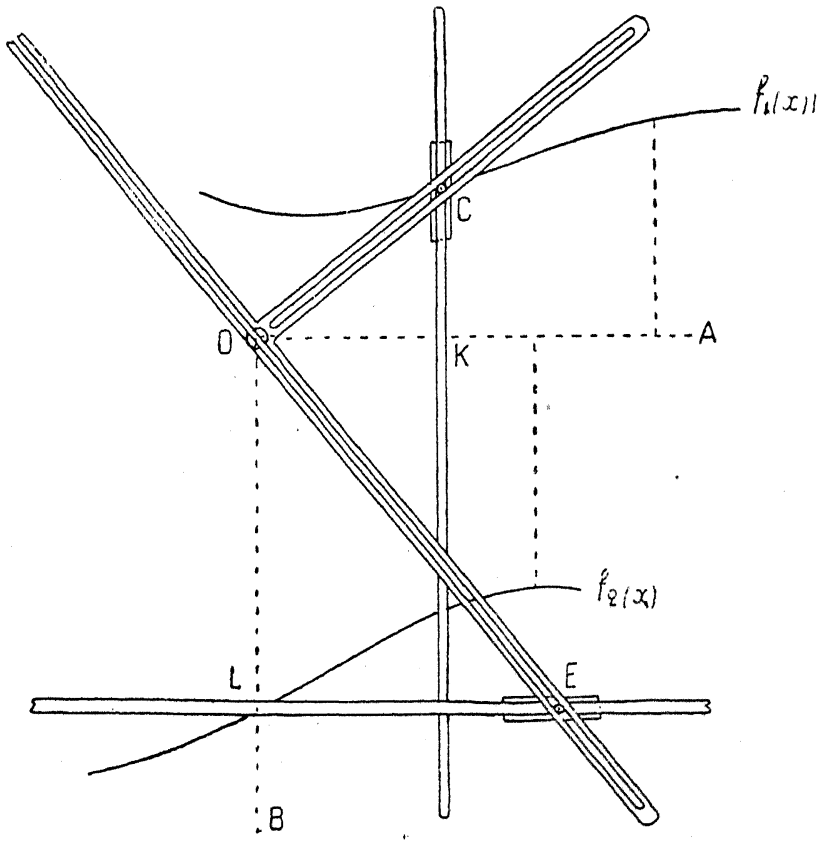


Fig. 2.

entre les variables $Z_0, Z_1, \ldots Z_n$, c'est-à-dire quand les valeurs de $n-1$ de ces quantités sont introduites dans le mécanisme, celui-ci astreigne une de ces parties à prendre une position telle qu'elle fournisse la valeur de la $n^{\text{ième}}$ quantité satisfaisant à la relation (11).

Ce dernier mécanisme n'avait pas besoin d'être inventé, il était tout indiqué dans la dernière phrase de la citation ci-dessus de la «Natural Philosophy».

Je vais montrer que l'introduction de ces deux mécanismes auxiliaires rend en effet le problème de l'intégration mécanique des équations différentielles aisément exécutable dans la pratique de la construction.

§ **6.** *Le multiplicateur* consiste en principe en un levier coudé à angle droit mobile autour du point O (fig. 2). Soit les deux droites OA et OB; portons sur la première la longueur $OK = 1$ à l'échelle du dessin pour les gabarits représentant les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$, et fixons en K une règle perpendiculairement à OA; que l'on monte sur cette règle une douille mobile portant le bouton C. Ce bouton s'engage dans une rainure correspondante du bras OC du levier coudé. En appliquant à la ligne OA le gabarit représentant la fonction $f_1(x)$ de telle manière que le point K corresponde

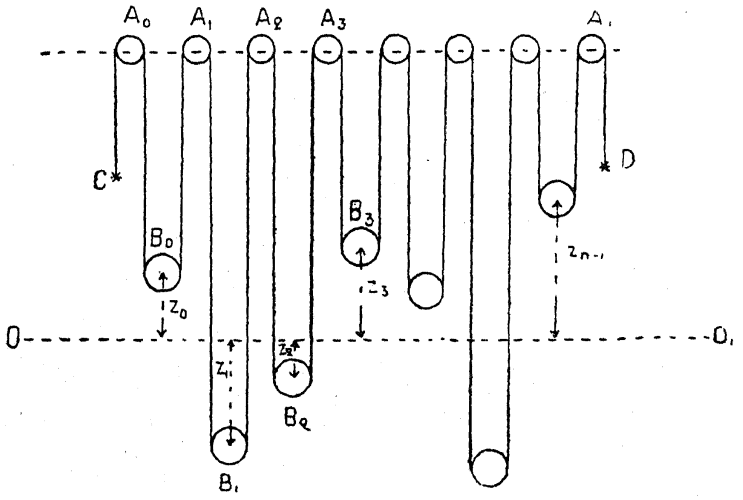


Fig. 3.

à l'abscisse x, le gabarit assujettira le bouton C à prendre une position telle que CK soit égal à $f_1(x)$, et le levier prendra une position telle que la tangente de l'angle $AOC = BOE$ sera $f_1(x)$.

Une règle mobile LE glisse le long de la droite OB en restant toujours perpendiculaire à OB. Cette règle possède une rainure dans laquelle s'engage un bouton E, qui glisse en même temps librement dans la rainure du bras OE du levier; si la position de la règle LE est régie par le gabarit $f_2(x)$ de telle sorte que OL soit toujours égale à $f_2(x)$, le bouton E prendra une position telle que $LE = f_1(x) \cdot f_2(x)$.

On voit par ceci que ni la construction du mécanisme, ni la construction des deux gabarits en *simples* cames (coordonnées polaires) ou en coordonnées rectilignes ne présentent aucune difficulté.

§ **7.** *L'égaliseur* n'est que la machine de Lord Kelvin à prédire les marées, dont on renverse le mode de fonctionnement.

Soit (fig. 3) un système de poulies fixes A_0, A_1, A_2, A_3, ... A_n rangées de manière que leurs centres soient en ligne droite horizontale, soit

$B_0, B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ n poulies mobiles; que l'on fasse passer une corde inextensible de la manière indiquée sur la figure, que l'on en fixe le bout C, que l'on amène les poulies mobiles à prendre une position telle que leur centres se trouvent tous rangés sur la droite OO_1 parallèle à $A_0 A_n$ et que l'on fixe le bout D de la corde. L'égaliseur est prêt à fonctionner, en effet, que l'on amène les poulies $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ respectivement dans les positions où les distances de leurs centres à l'axe OO_1 soient $Z_1, Z_2, \ldots Z_{n-1}$, portant les valeurs positives vers le haut et les valeurs négatives vers le bas, la poulie B_0 prendra une position telle que son ordonée Z_0 satisfera à la relation

$$Z_0 + Z_1 + \ldots + Z_{n-1} = 0$$

La «Tide predicting machine» de Lord Kelvin fonctionnant à merveille pour le calcul des «tide-tables» de l'Amirauté Anglaise, il ne peut pas y exister de doute possible sur l'exécution pratique de l'*égaliseur* et sur le mode de son fonctionnement.

§ 8. Le multiplicateur et l'égaliseur étant décrits je passe au schéma du mécanisme complet. Je reprends la question *ab ovo* et je considère en premier lieu l'équation linéaire générale avec second membre.

Soit

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y + q = 0 \qquad (12)$$

où $p_1, p_2, \ldots p_n$ et q sont des fonctions données de la variable indépendante x, l'équation proposée à intégrer de telle manière que pour $x = a$:

$$\begin{aligned} y &\quad \text{soit égal à } b_0 \\ y' &\quad \text{» » » } b_1 \\ y'' &\quad \text{» » » } b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} &\quad \text{» » » } b_{n-1} \end{aligned}$$

$b_0, b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ étant des constantes données.

En portant dans l'équation $x = a$, je calcule la valeur initiale $y^{(n)} = b_n$ (pour $x = a$) en fonction de $a, b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$.

En posant

$$z = y^{(n)}$$

et ensuite:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \int_a^x z\,dx + b_{n-1} = y^{(n-1)} \\
z_2 &= \int_a^x z_1\,dx + b_{n-2} = y^{(n-2)} \\
z^3 &= \int_a^x z_2\,dx + b_{n-3} = y^{(n-3)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
z_k &= \int_a^x z_{k-1}\,dx + b_{n-k} = y^{(n-k)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
z_n &= \int_a^x z_{n-1}\,dx + b_0 = y
\end{aligned}
\tag{13}
$$

on voit que l'équation proposée prendra la forme

$$q + z + p_1 z_1 + p_2 z_2 + \ldots + p_n z_n = 0 \tag{14}$$

En considérant le système (13) et l'équation (14) on voit que l'on a besoin des procédés élémentaires suivants, pour avoir continuellement des valeurs qui les satisfassent:

1°) z_{k-1} *étant donné — trouver* z_k, ce problème se resout immédiatement par l'intégrateur de M. J. Thomson: on fournit à la fourche la valeur z_{k-1}, le cylindre donne z_k.

2°) p_k et z_k *étant donnés trouver leur produit* $p_k z_k$. C'est dans ce but précisement que le multiplicateur est construit, son premier bouton C est lié au cylindre donnant Z_k de manière que le déplacement CK de ce bouton de sa position initiale soit égalé à la valeur de z_k, c'est-à-dire au déplacement de la circonférence du cylindre, la règle mobile étant guidée par le gabarit représentant la fonction $p_k(x)$, ce gabarit recevant son mouvement en commun avec les disques, le bouton E prendra une position telle que $LE = p_k(x) \cdot z_k$.

En faisant usage de la notation définie par le système (13), on voit qu'une telle équation pourra être réduite à la forme

$$\sum P_i(x) \cdot z_n^a \, z_{n-1}^b \ldots z^h = 0 \qquad (15)$$

$P_i(x)$ étant des fonctions données de x; $a, b, c, \ldots h$ des nombres entiers positifs ou zéro.

Le schéma général du mécanisme reste le même que ci-dessus, ce sont seulement des multiplicateurs additionnels que l'on aura à introduire de manière à former les termes correspondants. Soit pour fixer les idées un terme de la forme $P(x) \cdot z_1^2 z_3$. On l'écrira ainsi: $P(x) \cdot z_1 \cdot z_1 \cdot z_3$ et on prendra trois multiplicateurs que l'on arrangera de la manière suivante, figurée sur le schéma (fig. 5): le premier multiplicateur donne $P(x) \cdot z_1$, le second reçoit du premier le facteur $P(x) \cdot z_1$ et du cylindre correspondant le facteur z_1; il fournit donc le produit $P(x) \cdot z_1 \cdot z_1$ au troisième multiplicateur, qui reçoit en même temps de l'un des cylindres le facteur z_3 et transmet le terme $P(x) \cdot z_1 \cdot z_1 \cdot z_3$ à l'élément correspondant de l'égaliseur.

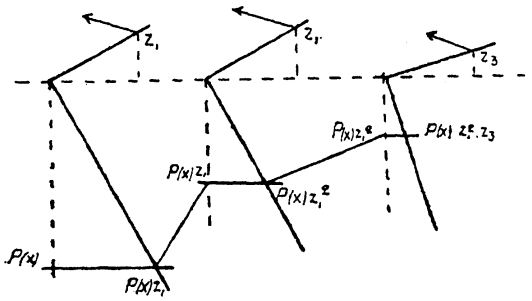


Fig. 5.

Il n'y a rien à changer au reste.

Une seule remarque est nécessaire si l'équation (15) contient la dérivée $y^{(n)} = z$ de l'ordre le plus élevé au degré k, sa valeur initiale b_n sera fournie par une équation algébrique du $k^{\text{ième}}$ degré. On trouvera donc k valeurs différentes pour b_n; on prendra successivement chacune de ces valeurs, si elles sont toutes réelles, ou celles, qui le sont, et on obtiendra successivement les branches correspondantes de l'intégrale générale.

Je n'ai pas bésoin d'exprimer le theorème sur le nombre d'éléments de la chaîne cinématique fermée, composée d'intégrateurs, de multiplicateurs et de l'égaliseur, qui fournit l'intégration de l'équation générale de l'ordre n algébrique par rapport à y et à ses dérivées, ce theorème est évident d'après ce qui précède.

Je remarquerai seulement que le mécanisme reste toujours le même, ce ne sont que les gabarits des $P(x)$, et les liaisons des pièces entre elles qui changent, ces liaisons restant toujours simples, c'est-à-dire un simple fil inextensible, qui fait que les déplacements des deux pièces reliées soient égaux.

§ **10.** Considérons maintenant une classe d'équations encore plus générales, supposons que la fonction inconnue et ses dérivées soient contenues dans l'équation, de même que la variable indépendante sous des signes de fonctions quelconques mais à variables séparées et que l'équation soit entière par rapport à ces fonctions. C'est-à-dire que l'équation soit de la forme (tenant compte du système (13))

$$\sum_i P_i(x) \cdot \varphi_{0i}(z) \cdot \varphi_{1i}(z_1) \ldots \varphi_{ni}(z_n) = 0 \qquad (16)$$

P_i, φ_{0i}, φ_{1i}, φ_{2i}, ... φ_{ni} désignant des fonctions données de leurs arguments respectifs, et ne contenant pas d'autres variables.

On construira alors non seulement les gabarits $P_i(x)$, mais aussi les gabarits représentant les fonctions $\varphi_{0i}(z)$, $\varphi_{1i}(z)$, etc., ...

Soit alors le terme $P(x) \cdot \varphi(z) \cdot \varphi_1(z_1)$, on prendra deux multiplicateurs, dans le premier on met le gabarit $P(x)$ lié au mouvement des disques pour guider la règle, et le gabarit $\varphi(z)$ relié à la fourche qui reçoit z de la poulie correspondante de l'égaliseur, ce multiplicateur donne le produit $P(x) \cdot \varphi(z)$, on le reçoit sur le multiplicateur suivant, dont le bouton C est guidé par le gabarit $\varphi_1(z_1)$ relié au cylindre donnant z_1, le bouton E de ce second multiplicateur donnera le produit $P(x) \cdot \varphi(z) \cdot \varphi(z_1)$, on le transmet à l'élément correspondant de l'égaliseur.

On pourra même prendre des équations ou des systèmes d'équations plus compliquées que celles que je viens de considérer.

Je prendrai par exemple le système des équations du mouvement d'un point matériel attiré par un centre fixe, la loi de l'attraction étant représentée par la fonction f de la distance r.

Les équations du mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r} \cdot f(r) \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r} \cdot f(r)$$

ou $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Je construis le gabarit **plan** représentant la fonction

$$\frac{1}{r} \cdot f(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2}} \cdot F(r^2)$$

et je prends quatre intégrateurs et deux égaliseurs et j'établis les liaisons représentées sur le schéma (fig. 6).

Les deux multiplicateurs auxiliaires joints au second et au quatrième cylindre me donnent x^2 et y^2; pour faire la somme $r^2 = x^2 + y^2$ je reçois

x^2 et y^2 par les deux éléments du tide-predictor, alors le bout A du fil me donne $r^2 = x^2 + y^2$.

Ce point A est relié aux gabarits représentant $\frac{1}{r} f(r)$ et les mène dans les deux multiplicateurs, dont les boutons sont joints avec le second et le quatrième cylindre en sorte que ces multiplicateurs donnent les produits

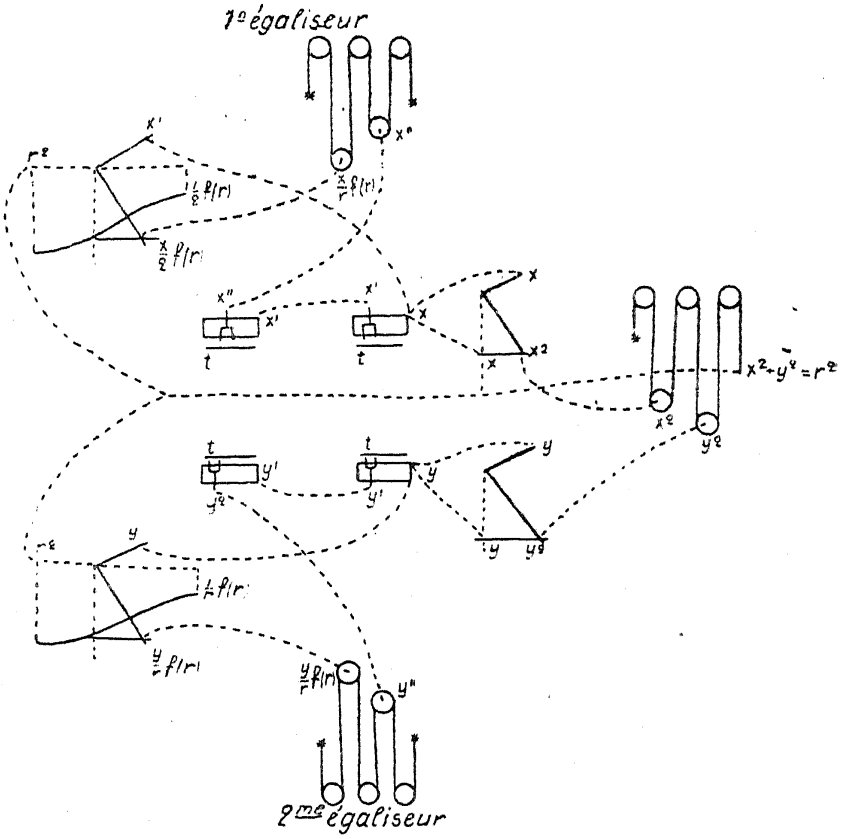


Fig. 6.

$\frac{x}{r} \cdot f(r)$, et $\frac{y}{r} \cdot f(r)$; ces produits sont transmis aux éléments des deux égaliseurs, ainsi que le schéma le montre.

On procédera d'une manière tout analogue dans des cas plus compliqués, où l'équation contiendrait par ex. la fonction

$$f[\varphi(x, z, z_1, \ldots z_k)]$$

f désignant une fonction quelconque et $\varphi(x, z, z_1, z_2, \ldots z_k)$ une fonction succeptible d'être représentée par un système de gabarits, de multiplicateurs et de tide-predictors. On construira le gabarit plan représentant

$$f(\varphi)$$

et faisant usage de multiplicateurs auxiliaires, de gabarits et de tide-predictors on formera la fonction $\varphi(x, z, z_1, \ldots z_k)$ qui sera par ex. fournie par le bout du fil du predictor, c'est le mouvement de ce point qui menera le gabarit $f(\varphi)$.

On voit par ceci que l'introduction des deux mécanismes — le multiplicateur et l'égaliseur, donne un moyen pratique permettant d'appliquer la machine pour intégrer les équations différentielles ordinaires de toutes les formes qu'il est possible de représenter par des gabarits plans et de tous les ordres, ou de systèmes de telles équations.

Le mécanisme reste toujours le même, ce ne sont que les gabarits qui changent **en restant toujours plans**, donc aisément exécutables en pratique.[1]

§ **11.** L'adjonction du multiplicateur permet immédiatement de faire usage de l'intégrateur pour l'analyse harmonique.

Soit par exemple une fonction $F(x)$ donnée dans l'intervalle de $x = 0$ à $x = l$, et il s'agit de représenter cette fonction par une série de fonctions harmoniques simples: $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ comme cela a lieu dans une foule de problèmes de physique mathématique.

La propriété fondamentale des fonctions harmoniques est exprimée par la formule

$$\int_0^l X_i X_k \, dx = 0$$

quand i et k sont différents.

On pose donc

$$F(x) = A_1 X_1 + A_2 X_2 \ldots + A_k X_k + \ldots + A_n X_n + \ldots$$

et pour calculer le coefficient A_k on multiplie l'équation précédente par $X_k \, dx$ et on l'intègre entre les limites 0 et l, et l'on obtient:

$$A_k = \frac{\int_0^l F(x) \cdot X_k \cdot dx}{\int_0^l X_k^2 \, dx}$$

---

1 La classe des fonctions représentables par les gabarits plans et leurs combinaisons au moyen de multiplicateurs et du predictor est extrêmement étendue, elle comprend entre autres les fonctions algébriques et les transcendantes usuelles et leurs combinaisons. Ce sont les fonctions dépendant essentiellement de deux arguments non isolables, par ex. sin $am(y, x)$ etc., que l'on ne saurait représenter par des gabarits plans.

C'est surtout du calcul du numérateur qu'il s'agit, le dénominateur pouvant en général être calculé sans que l'on ait besoin d'effectuer l'intégration.

On prendra donc un intégrateur, on construira les deux gabarits $F(x)$ et X_k, que l'on mettra dans les deux bras d'un multiplicateur, en reliant les deux gabarits au disque, et la fourche au bouton qui donne le produit $F(x) \cdot X_k$ et en commençant de $x = 0$ on mettra le disque en mouvement, qu'un butoir arrêtera quand x sera égal à l. Le cylindre donnera la valeur de l'intégrale

$$\int_0^l F(x) \cdot X_k \cdot dx$$

On voit par ceci que toute l'opération se fait automatiquement, l'opérateur n'a qu'à mettre les gabarits en place, à installer le butoir et à mettre en marche le mécanisme d'horlogerie faisant tourner le disque.

§ **12.** L'égaliseur combiné avec un système de multiplicateurs et de gabarits représentant les fonctions

$$x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots\ x^n$$

peut servir immédiatement pour calculer les racines réelles des équations numériques de la forme

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

En effet on fixe les règles des multiplicateurs sur les valeurs a_0, a_1, a_2, $\ldots$ a_{n-1} des coefficients de l'équation, on fixe de même une poulie de l'égaliseur sur a_n, les gabarits respectifs étant placés sous les boutons C des multiplicateurs et liés à un des disques.

On fera une marque sur un point A près du bout du fil de l'égaliseur et on rendra ce bout libre. On fera mouvoir le disque de $x = l$, où l est la limite inférieure des racines jusqu'à $x = L$, L étant la limite supérieure et on remarquera les valeurs de X, pour lesquelles la marque sur le fil passe par la position initiale du point A. Ces valeurs sont les racines.

Si la machine ne donne que les deux premiers chiffres de la racine exactement, je n'ai pas besoin d'expliquer la méthode pour avoir par la machine même les deux chiffres suivants etc. . . . cette méthode est évidente et la même, dont on fait usage, quand on calcule les racines à la main.

§ **13.** Après avoir esquisé le principe de la machine et les resultats qu'elle peut fournir je ferai quelques remarques sur la manière dont elle va être réellement construite.

En premier lieu il fallait faire un choix d'intégrateurs, car on voit bien qu'il n'est nullement indispensable de faire usage de l'intégrateur de J. Thomson. Tout appareil qui est capable de donner continuellement la valeur de l'intégrale $\int_a^x f(x)\,dx$, comme fonction de la limite supérieure, est également applicable.

Il y a même des doutes très sérieux que le mécanisme de Thomson puisse en général marcher ou fournir des résultats précis étant appliqué dans ma combinaison.

En effet quand cet intégrateur est employé pour le calcul de l'intégrale $\int_a^x f(x)\,dx$, la fourche est conduite à la main ou par un gabarit recevant son mouvement du disque, pouvant donc exercer sur la fourche n'importe quel effort. La transmission du mouvement du disque au cylindre se fait par l'intermédiaire du globe en *raison du frottement* entre la surface du globe et du disque et entre le globe et le cylindre. Il ne doit pas y avoir de *glissement*, qui fausserait les indications de l'appareil.

Tant que le dit frottement n'a qu'à vaincre la résistance dans les tourillons du cylindre et celles de la partie inscrivante, l'appareil peut très bien marcher car le frottement sur le globe peut être rendu très grand en comparaison avec ces résistances nuisibles.

Il en est tout autrement quand l'appareil fait partie de la machine à intégrer les équations différentielles, le cylindre doit alors mener tout un train de mécanismes auxiliaires, les résistances nuisibles peuvent s'accumuler notablement, le frottement entre le globe et le disque, et entre le globe et le cylindre peut devenir insuffisant et un petit glissement peut faire ecrouler tout l'échafaudage.

Il fallait donc choisir un mécanisme où l'on puisse aisément faire varier l'effort et où il y ait une transmission moins délicate qu'entre le globe et le cylindre. Je me suis arrêté sur le principe de l'intégraphe de M. Abdanck-Abakanowicz en modifiant convenablement la construction de cet appareil.

La partie intégrante de la machine en construction est représentée schématiquement en plan sur la fig. (7). Un cylindre *ABCD*, que l'on

recouvre d'une feuille de papier, pour y obtenir immédiatement le tracé graphique de la fonction inconnue et de ses dérivées, est mis en mouvement par un petit moteur électrique ou par un mécanisme d'horlogerie; contre ce cylindre sont appuyées par des ressorts, dont on règle convenablement la pression, les roulettes R de quatre intégrateurs, dont un seul est représenté sur la figure, disposés symétriquement par rapport à l'axe OO_1 du cylindre.

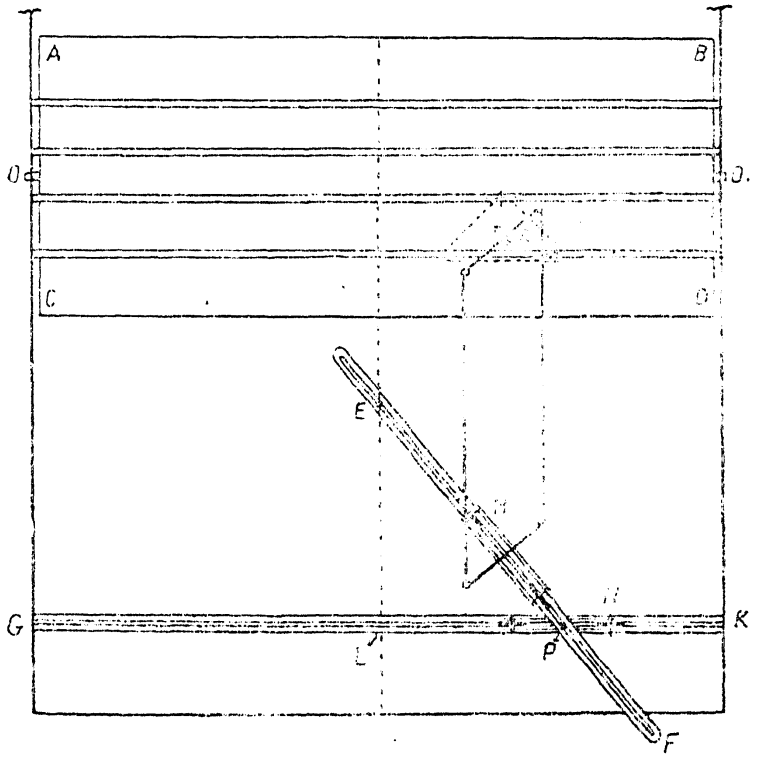


Fig. 7.

Chaque intégrateur consiste en un chariot mobile portant la roulette, ce chariot parcourt un rail parallèle à l'axe du cylindre. Une règle EF pouvant librement tourner sur l'axe E porte un second chariot H sur lequel est fixé une barre transversale, qui reste toujours perpendiculaire à l'axe de la règle; deux tirants rigides relient les extrémités de cette barre à une barre pareille, faisant corps, avec la fourche, qui porte l'axe de la roulette et est fixée paralèllement à cet axe. Ainsi les deux barres et les deux tirants forment un parallèlogramme, qui retient le plan de la roulette R parallèle à l'axe de la règle mobile.

Un troisième chariot N parcourt le rail GK. Ce chariot porte un bouton P qui s'engage dans une rainure pratiquée le long de l'axe de la règle.

Quand ce chariot occupe une position telle que la règle est perpendiculaire à l'axe du cylindre, le plan de la roulette est perpendiculaire aux

génératrices du cylindre, et pendant une rotation de celui-ci la roulette décrit une section droite du cylindre, cette section droite donne l'axe des x, quand on développe le papier de la surface du cylindre. Supposons maintenant que le troisième chariot ait une position telle que la distance du centre du bouton P à sa position initiale L mentionnée plus haut soit $PL = y$; soit l la distance EL de l'axe de rotation de la règle à la droite parcourue par le centre du bouton. La règle prendra une position telle que la cotangente de l'angle θ de son inclinaison sur l'axe du cylindre sera $\operatorname{cotg}\theta = \frac{y}{l}$, le plan de la roulette formera le même angle θ avec les génératrices du cylindre.

Supposons que le cylindre ait tourné de l'angle $d\varphi$, sa surface parcourera un chemin $r\,d\varphi = dx$, r étant le rayon du cylindre. Le frottement du charriot portant la roulette sur son rail et le frottement du chariot du parallélogramme étant extrêmement petits en comparaison avec le frottement de glissement de la roulette le long des génératrices du cylindre, ce glissement ne se produit pas et la roulette ne reste pas en place mais décrit sur la surface du cylindre un élément d'hélice, en se déplaçant dans le sens de la génératrice, ce déplacement $dz = dx \operatorname{cotg}\theta$ ou en substituant

$$dz = \frac{1}{l} \cdot y\,dx$$

donc

$$z - z_0 = \frac{1}{l} \cdot \int_a^x y\,dx$$

En prenant l égale à l'unité de longueur à l'échelle du dessin, on aura pour le déplacement de la roulette et de son chariot le long du rail la formule

$$z - z_0 = \frac{1}{l} \cdot \int_a^x y\,dx$$

Le chariot de la roulette porte un style, qui inscrit immédiatement sur le papier, recouvrant le cylindre, la valeur de $z - z_0$ à l'échelle admise.

On voit par ceci, que dans cet appareil c'est le cylindre, qui remplit le rôle du disque de l'appareil Thomson, le rôle de la fourche est rempli par le troisième chariot, le déplacement de la roulette et de son chariot représentent l'intégrale de la fonction fournie au troisième chariot.

Le rail gk portant le troisième chariot peut être installé à la distance voulue (variant entre 5 et 30 centimètres dans l'appareil en construction) pour avoir les tracés à une échelle convenable.

Dans l'étude de l'appareil un soin minutieux est apporté à construire toutes les parties importantes en se conformant aux principes généraux de la construction des instruments de précision. Ces principes sont développés d'une manière admirable au § 198 de la «Natural Philosophy».

Les fig. (2) et (3) suffisent pour rendre suffisamment claire la construction, du moins en principe, du multiplicateur et de l'égaliseur, je ne les décris par en détail.

§ **14.** Quelle est le degré de précision que l'on peut attendre d'un appareil, tel que celui dont je viens de donner la description? Ayant dans le Bassin Expérimental une expérience journalière dans le maniement de planimètres de différents modèles et ayant étudié soigneusement l'intégraphe de M. Abdank-Abakanowicz, je compte pour des équations peu compliquées, les équations linéaires par exemple, de réaliser une précision telle que l'erreur absolue dans les ordonnées des courbes représentant l'intégrale générale et ses dérivées ne surpasse pas un $^1/_2$ millimètre, c'est-à-dire que l'erreur relative pour les ordonnées moyennes d'une longueur de 100 à 150 millimètres ne surpasse pas un $^1/_2\,^0/_0$; une telle précision est plus que suffisante dans les problèmes pratiques de l'art de l'ingénieur.

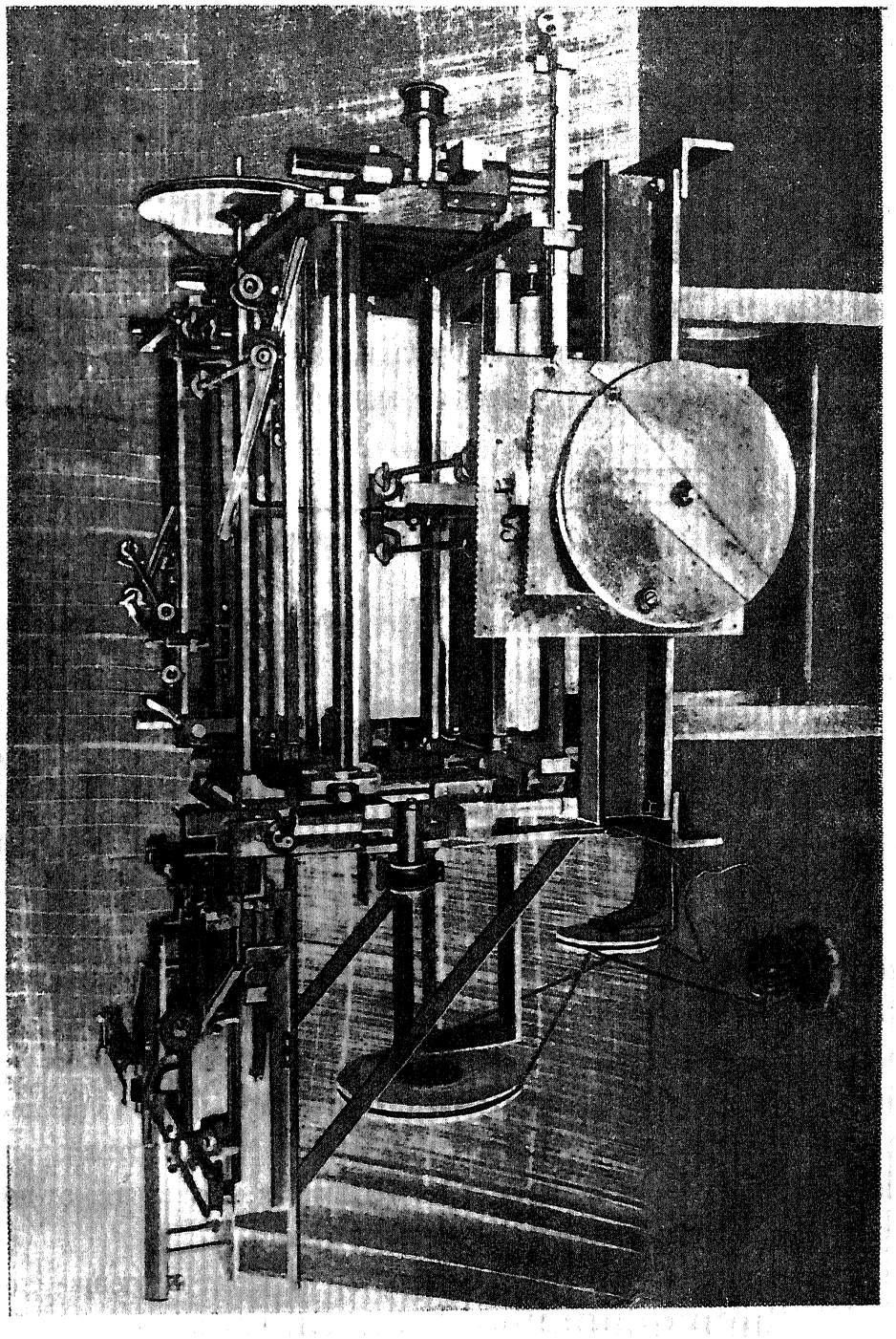
Tout le soin possible sera appliqué à obtenir la plus grande précision sans trop compliquer la construction de l'appareil; l'outillage excellent des ateliers de M. Wetzer, la manière consciencieuse avec laquelle tous ses travaux sont exécutés et son expérience pratique acquise par quarante ans de labeur m'en paraissent une garantie plus que suffisante.

ПРИБАВЛЕНИЕ

Статья «Sur un intégrateur des équations différentielles ordinaires» была представлена Академии Наук акад. А. М. Ляпуновым 14 января 1904 г.

Через 2 недели началась война с Японией, и вся деятельность завода Ветцера была обращена на военные заказы, затем на изготовление некоторых приборов, предназначенных для кораблей Черноморского флота и производства артиллерийских опытов 1906, 1907 и 1908 гг., так что к постройке прибора было приступлено осенью 1908 г.

В январе 1908 г. я был назначен и. д. главного инспектора кораблестроения, а с осени этого же года и председателя Морского технического



(Верх)

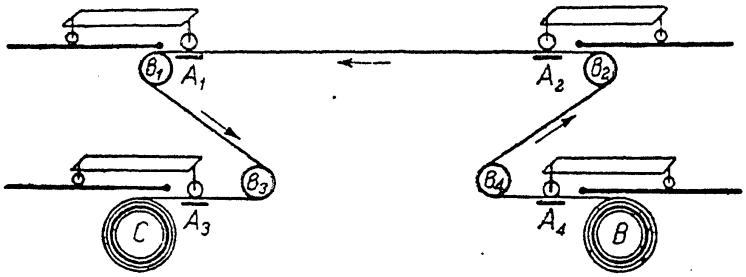
Фиг. 8.

комитета. В это время, под моим руководством, производилась разработка проектов наших первых линейных кораблей, а затем была начата и постройка их.

Само собою разумеется, что я мог уделять лишь самое ничтожное время на руководство изготовлением интегратора. Тем не менее, к 1911 г. первый прибор был закончен в главных его элементах, а именно было

изготовлено 4 интеграфа измененной системы Абданк-Абакановича, один множитель и один уравнитель и собраны на общем фундаменте для производства предварительных испытаний.

Машина построена для интегрирования уравнений до четвертого порядка включительно, имея в виду уравнения, встречающиеся в вопросах математической физики. Общий вид ее изображен на прилагаемом фотографическом снимке (фиг. 8). Схема же устройства, представленного в продольном разрезе (фиг. 9), такова: 4 совершенно одинаковых интегратора, размерами 80 см на 60 см, установлены попарно друг над другом на стальных колонках, прикрепленных к чугунной фундаментной раме всей машины;



Фиг. 9.

между этими же колонками укреплены широкие, около 10 см, стальные полосы A_1, A_2, A_3, A_4, отводные валики b_1, b_2, b_3, b_4 и приводимый во вращение электромотором главный вал C. Бумага, целый сверток которой (20 м) насаживается на валик B, обводится, как показано, около отводных валиков и проходит, с ровным нажимом, совершенно плоской над полосами A_1, A_2, A_3, A_4 и наматывается на главный вал C. Отводной валик b_3 имеет специальное устройство, он служит не только отводным, но и принимающим без скольжения движение бумаги, так что угол его поворота пропорционален пройденному бумагою пути, т. е. абсциссе x, независимо от неравномерности вращения главного вала или хода бумаги.

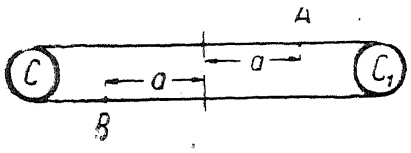
Интеграторы установлены так, чтобы их интегрирующие колесики приходились против средины полос A_1, A_2, A_3, A_4 и нажимали с желаемою степенью, которая регулируется пружинами, на бумагу.

С боков машины установлены на особых кронштейнах множители, а под фундаментною рамою, несущей интеграторы, положен горизонтально уравнитель, причем его тяги снабжены надлежащими грузами, действующими на них при помощи струн, перекинутых через отводные шкива.

Схема соединений между отдельными машинами была объяснена выше. Исполнение этих соединений представило на практике значительные затруд-

нения, о которых и упомяну в коротких словах, указав и способы, к которым пришлось прибегнуть для преодоления их.

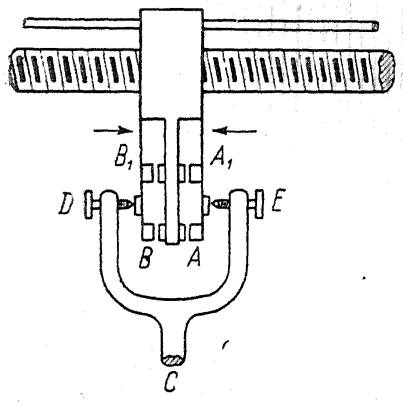
Так как все соединения должны быть одного рода, именно чтобы обе соединяемые точки, каждая из которых движется в своих направляющих прямолинейно, имели равные перемещения, причем направление перемещений безразлично, то казалось бы, что стоит их соединить нерастяжимой проволокой по такой схеме (фиг. 10), обтянув достаточно проволоку, чтобы не было слабины, и цель достигнута. Такое соединение и было бы достаточным, если бы точка A была совершенно свободна и не встречала сопротивления своему движению.



Фиг. 10.

Но если такое сопротивление есть, то натяжение проволоки, а вместе с ним и трение на шкивах, возрастает, и в ведущей точке надо приложить гораздо большее усилие, нежели сопротивление ведомой.

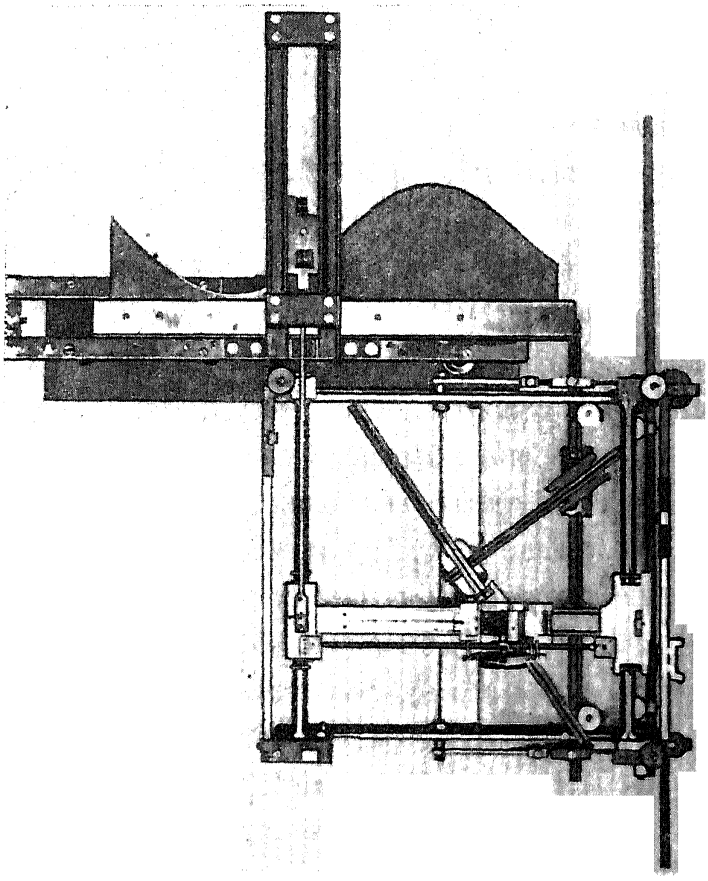
Опыт показал, что при хорошей бумаге нажатие колесика на нее может быть доводимо до такой величины, что интегрирующая тележка может преодолевать усилие до $^1/_2$ кг, причем колесико не имеет бокового скольжения. Усилие около 800 г дает уже скольжение. Усилие около 1200 г рвет бумагу. Таким образом оказалось, что интегрирующая тележка каждого интегратора может вполне свободно (требуется усилие около 200 г) вести поворотную линейку следующего интегратора, будучи соединена с ее нижнею тележкою тонкою (около $^1/_3$ мм) стальною проволокою, образующей замкнутый контур, но не может вести никаких других механизмов; поэтому для передачи движения от интегрирующих тележек другим частям машины принят такой способ (фиг. 11): перед каждой тележкой поставлен, параллельно ее



Фиг. 11.

рельсам, ходовой винт, приводимый в движение отдельным электромотором; по этому винту ходит гайка, несущая на себе 2 изолированных друг от друга контакта. К тележке же интегратора прикреплена вилка C с двумя регулировочными винтами C, D. При замыкании контакта A мотор вращает винт в такую сторону, что гайка идет влево, при замыкании контакта B эта гайка идет вправо, как показано стрелками. Положим, что от движения бумаги тележка интегратора идет вправо, ясно, что

тотчас же винт D замкнет контакт B и гайка пойдет вместе с тележкой малым ходом, но если тележка будет опережать гайку, то винт D нажмет на пружину сильнее и замкнет не только контакт B, но и контакт B_1, и тогда гайка пойдет большим ходом и будет опережать движение тележки, пока не разомкнется контакт B_1, после чего опять пойдет малым ходом.



Фиг. 12.

Но если бы гайка и на малом ходу опередила тележку, то контакт B разомкнется и гайка остановится, но если бы, напр., тележка переменила направление движения, то сейчас бы замкнулся контакт A, двигающий и гайку влево, и он бы стал управлять движениями гайки.

Таким образом гайка ведется тележкою так, что величина перемещения гайки всегда отличается весьма мало от перемещения тележки, ибо эта разность не превосходит величины зазора между контактами и регулировочными винтами, этот же зазор можно свободно доводить до величины, меньшей $^1/_4$ мм с каждой стороны.

Ясно, что гайка, ведомая ходовым винтом, получающим движение от электромотора, может передавать усилие любой величины. В построенной

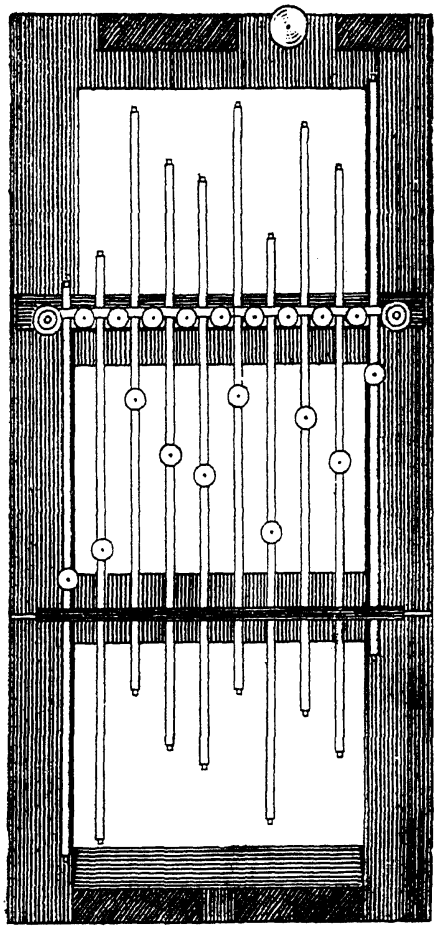
машине гайка могла бы тащить и несколько десятков килограммов, но ей приходится преодолевать усилие около 2—3 кг.

Эти гайки и передают перемещения интегрирующих тележек на множители, ведя или шаблон, или ползун.

Множители устроены согласно показанной схеме и представлены на снимке (фиг. 12). Шаблон прикрепляется к особой полосе, двигающейся на шариках в направляющих, параллельных основной раме множителя.

Вместо ползунов, сделаны двойные тележки, подобные нижней тележке интеграторов.

Передача полученной величины произведения на уравнитель делается также электрически, при помощи контактного колеса и «трехмагнитного» приемного механизма, который идет в одну или в другую сторону сообразно направлению перемещения контактного колеса и последовательности контактов. Этот приемный механизм и ведет соответствующую тягу уравнителя.



Фиг. 13.

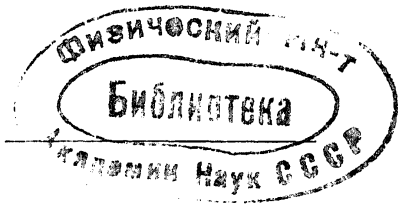
Детали описания устройства контактного колеса, приемного механизма и пр. опускаем.

Уравнитель изображен на снимке (фиг. 13), устроен во всем согласно схеме (фиг. 3). Подвижные шкивы посажены на направляющих полосах, на которых нанесено миллиметровое деление для удобства установки.

При испытаниях обнаружился ряд затруднений, которые и приходилось постепенно устранять, вырабатывая соответствующие детали общей конструкции.

В моей книге «Лекции о приближенных вычислениях» (изд. Инст. пут. сообщ., 1911) даны фотографические снимки и описание прибора, которое здесь и приводится. Испытания и последовательные улучшения прибора

продолжались до мировой войны 1914 г., с началом которой все силы завода Ветцера были употреблены на военные заказы. Затем завод Ветцера был спешно эвакуирован, и во время этой эвакуации прибор пропал неизвестно куда.



Технический редактор С. А. Шубуневич. — Ученый корректор Е. В. Ростовцева

Начало набором 27 июня 1936 г. — Подписано к печати 1 апреля 1937 г.

IV + 574 стр. (69 фиг.) и + 1 вкл.

Формат бум. 72 × 110 см. — $36^3/_4$ печ. л. — 40.52 уч.-авт. л. — 44100 тип. зн. — Тираж 1500

Ленгорлит № 856. — АНИ № 1316 — Заказ № 1987

Типография Академии Наук СССР. Ленинград, В. О., 9 линия, 12