АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СОБРАНИЕ ТРУДОВ

АКАДЕМИКА

А. Н. КРЫЛОВА

ДОПОЛНЕНИЕ

К ТТ. V И VI

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА — ЛЕНИНГРАД
1937

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Апрель 1937 г.

Непременный секретарь академик *Н. Горбунов.*

Редактор издания акад. А. Н. Крылов

Технический редактор С. А. Шабуневич. — Ученый корректор Е. В. Ростовцева

Начато набором 27 июня 1936 г. — Подписано к печати 2 апреля 1937 г.

VIII + 248 стр. (25 фиг.)

Формат бум. 72 × 110 см. — 16 печ. л. — 16.22 уч.-авт. л. — 40545 тип. зн. — Тираж 1500

Ленгорлит № 1336. — АНИ № 62. — Заказ № 1335

Типография Академии Наук СССР. Ленинград, В. О., 9 линия, 12

В виду того, что перевод математической части сочинения Эйлера «Новая теория Луны», с прибавлением извлечений из лекций Адамса, Дж. Дарвина и из сочинений Хилла, может быть отнесен одинаково как к математике, так и к астрономии, он выделен в отдельный том, составляющий дополнение к томам V и VI собрания моих трудов.

Академик А. Крылов.

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

НОВАЯ ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛУНЫ

ПЕРЕВОД С ЛАТИНСКОГО

ПЕРВОЙ ЧАСТИ КНИГИ ПЕРВОЙ И ИЗВЛЕЧЕНИЙ ИЗ ЧАСТЕЙ ВТОРОЙ И ТРЕТЬЕЙ С ПРИМЕЧАНИЯМИ И ПОЯСНЕНИЯМИ ПЕРЕВОДЧИКА

академика **А. Н. КРЫЛОВА**

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ 3-я

Численное развитие уравнения, коим определяется координата z

ПРИБАВЛЕНИЯ И ПРИМЕЧАНИЯ ПЕРЕВОДЧИКА

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

На торжественном заседании Академии Наук, посвященном памяти Эйлера по случаю исполнившейся 18 сентября 1933 г. 150-й годовщины со дня его смерти, мне было поручено прочесть общее обозрение его жизни и трудов, а затем охарактеризовать более подробно следующие его сочинения: 1) «Введение в анализ бесконечно малых», 2) *«Дифференциальное исчисление»*, 3) «Интегральное исчисление», 4) «Механика», 5) «Теория движения Луны».

При изучении этого последнего сочинения, я невольно обратил внимание на то, что Эйлер, рассматривая это движение в прямолинейных прямоугольных координатах, получает для определения этих координат дифференциальные уравнения, представляющие весьма общий случай уравнений колебательного движения материальных систем. Эйлер, с полною подробностью и изумительною простотою, развивает общий метод решения этих уравнений и доводит его до конца, т. е. до численных результатов.

Колебательное движение приобретает все бо́льшее и бо́льшее значение в технике благодаря введению самых разнообразных мощных и быстроходных механизмов, и во многих случаях приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями нелинейными, а если и линейными, то с переменными коэффициентами, т. е. как раз с уравнениями того вида, которые рассматривает Эйлер в своей теории Луны.

Само собою разумеется, что едва ли какой-либо техник или инженер, встретив в своем деле уравнения, подобные рассмотренным Эйлером, станет искать их решение в сочинении, изданном в 1772 г. под заглавием «Theoria Motuum Lunae nova methodo pertractata»; по большей части, он не будет иметь к тому и возможности, ибо это сочинение можно найти в очень немногих библиотеках.

Сочинение Эйлера представляет собою огромный том в 790 страниц in-4° и состоит из предисловия и двух книг.

Предисловие автора служит вместе с тем и обстоятельным введением, в котором автор излагает содержание своего сочинения и метод, применяемый им для исследования движения Луны. Это предисловие занимает 15 страниц.

Книга первая подразделена, в свою очередь, на три части, в первой из которых заключается составление уравнений движения Луны и изложение общего метода их решения, в остальных двух — численное развитие этого метода и получение решения в численном виде, причем со всею подробностью приведены все вычисления со всеми их деталями, схемами и логарифмами. Эти вычисления занимают 450 страниц.

Книга вторая содержит астрономические приложения развитой теории, т. е. изложение способов вычисления обычных астрономических координат, долготы и широты Луны помощью найденных прямоугольных прямолинейных, сличение теории автора с теорией Клеро и составление и объяснение таблиц, упрощающих производство этих вычислений.

Мой перевод предназначен не для астрономов, а для техников и инженеров, его назначение — сделать для них доступными методы Эйлера в его собственном, столь полном и ясном, изложении, поэтому из первой книги первая часть переведена целиком, из второй же части взяты лишь типичные численные вычисления, а остальные, представляющие повторение этих типичных, отброшены, чтобы сократить объем книги и не загромождать ее излишними подробностями.

Книга вторая, как чисто астрономическая, опущена почти целиком, ибо для намеченной цели она интереса не представляет.

Эйлер предназначал свое сочинение для астрономов, поэтому предполагает у читателя достаточное знакомство с этим предметом. Объем этих знаний может превышать тот, которым обладают многие техники и инженеры, поэтому к своему переводу я присоединил прибавление, в котором вкратце изложены необходимые для ясного понимания текста Эйлера сведения из астрономии.

При применении методы разложения решений дифференциальных уравнений в ряды, расположенные по степеням малых параметров, которою пользуется Эйлер, возникает то затруднение, что могут появиться так называемые вековые члены, т. е. содержащие время вне знаков синуса и косинуса; чтобы от них избавиться, Эйлер указывает, что есть возможность составить некоторое уравнение, заменяющее собою обыкновенное характеристическое для уравнений с постоянными коэффициентами; это уравнение и доставляет измененное присутствием нелинейных членов значение частоты основных колебаний системы; введение этой частоты избавляет от вековых членов в разложениях. Этого уравнения по его сложности Эйлер, как он говорит, составлять «не отваживается» (non sumus ausi), а определяет нужную ему величину на основании астрономических наблюдений или, как он выражается, берет ее «с неба» (ex coelo).

Технику и инженеру в подобном случае пришлось бы прибегнуть к опыту, когда такой опыт возможен, но иногда производство этого опыта неосуществимо, тогда надо применить другой путь.

Через 100 лет после Эйлера американский астроном Хилль (G. W. Hill) дал метод составления и решения если не того уравнения, составлять которое Эйлер не отваживался, то уравнения, ему равносильного, поэтому как естественное дополнение к сочинению Эйлера я присоединил краткое изложение методы Хилля, следуя лекциям, читанным по теории Луны в Кэмбриджском университете Адамсом и сэром Дж. Дарвином.

Наконец, если бы оказалось, что и метода Хилля не ведет к цели, то возникнет вопрос об устойчивости рассматриваемого движения, и тогда придется прибегнуть к методам А. М. Ляпунова, излагаемым в его знаменитой докторской диссертации «Общая задача об устойчивости движения», которая будет переиздана Академией Наук; но изучение этого сочинения несравненно труднее, нежели изучение сочинения Эйлера, которое, однако, явится весьма существенным подспорьем в этом деле.

Обыкновенно Академия Наук не издает переводных сочинений, но в данном случае Редакционно-издательский совет Академии Наук признал, что издание сокращенного перевода сочинения Эйлера, изданного самой же Академией Наук более 150 лет тому назад, с указанными прибавлениями, чтобы сделать его методы доступными техникам и инженерам, — вполне соответствует потребностям нашего великого строительства и самой цели научно-технической серии изданий Академии, в которую это сочинение и включено.

Акад. А. Крылов.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Сколько раз в продолжение сорока лет я ни пытался развивать теорию Луны и определять, на основании законов тяготения, ее движение, всякий раз возникали такие трудности, что мне приходилось прерывать работу и дальнейшее исследование.

На основании начал механики, весь вопрос немедленно приводится к трем дифференциальным уравнениям второго порядка, однако их не только никаким способом не удается интегрировать, но даже нахождение приближений, которыми в этом случае можно довольствоваться, сопровождалось такими препятствиями, что я никак не мог усмотреть, каким образом это исследование не только могло бы быть закончено, но даже сколь-нибудь приспособлено к использованию.

Вначале я, главным образом, трудился над тем, чтобы привести сказанные уравнения к интегрируемой форме, однако в дальнейшем я все более и более убеждался, что все подобного рода попытки не только для приложений бесполезны, но что такое интегрирование и не особенно желательно, ибо нетрудно видеть, что интегральные формулы будут столь длинны и сложны, что от них для астрономии никакой пользы ожидать нельзя.

Хотя лет тридцать тому назад я составил таблицы Луны, а затем даже издал теорию Луны, но этот предмет не был полностью исчерпан, ибо весьма многие неравенства остались совершенно неизвестными, хотя я и стремился их обнаружить.

Впоследствии с тем же неудобством встретились знаменитые Майер и Клеро, стяжавшие такую славу своими таблицами Луны, — многие неравенства, которые следовало бы вывести теоретически, получены ими из наблюдений, как бы догадкою.

Эти трудности возникают по большей части от того, что Луне приписывалась движущаяся по плоскости эклиптики орбита, наклоненная к ней под изменяющимся углом, так что для всякого момента времени надо сперва определить пересечение этой орбиты с эклиптикою, т. е. линию узлов, затем наклонность, — по нескольким уравнениям, после этого опять-таки по многим уравнениям находится место Луны на ее орбите, и наконец, по этому месту приходится определять широту и долготу Луны.

Недавно я вновь стал заниматься этим вопросом, и, по обстоятельном обсуждении всех этих трудностей, я понял, что всю работу надо начать заново на совершенно других основаниях, чтобы достигнуть цели с большим успехом. Поэтому я рассматриваю в любой заданный момент времени среднюю долготу Луны в плоскости эклиптики, пусть это будет прямая $♁M$, Луна же пусть находится в ☽ (см. фиг. 4 § 556); из этой точки на плоскость эклиптики опускается перпендикуляр ☽l, и из точки l проводится к прямой $♁M$ нормаль lL, тогда, по обычному для геометров способу, место Луны определяется тремя координатами $♁L$, Ll, l☽, по нахождении которых истинное место Луны легко определяется, ибо по углу $M♁l$, тангенс которого есть $\frac{Ll}{♁L}$, сейчас же становится известной долгота Луны, точно так же угол $l♁$☽, тангенс которого есть $\frac{☽L}{♁l}$, доставит широту Луны.

Таким образом все дело сводится к определению для любого заданного времени этих трех координат; с этою целью я привел те три дифференциальных уравнения второго порядка, которые доставляются непосредственно механикою, к сказанным трем координатам, причем, хотя я опять пришел к сложным уравнениям, однако в них я достигаю явной выгоды, состоящей в следующем: так как прямая $♁M$ представляет среднюю долготу Луны, то если на ней взять отрезок $♁O$, равный среднему расстоянию от Земли до Луны, все три прямые OL, Ll, l☽ все время остаются настолько малыми, что высшие их степени образуют весьма быстро сходящиеся ряды. После этого общего замечания необходимо, наряду с теми тремя неизвестными, которыми определяется место Луны, рассматривать известные величины, по коим эти неизвестные находятся. Этих известных величин два рода: одни — постоянные, другие — переменные. Здесь входят четыре постоянные, величины которых необходимо определять из наблюдений: *во-первых*, та, которая обозначена буквою K и которая представляет эксцентриситет орбиты Луны. Величина его зависит от движения, сообщенного Луне вначале, и значит, она могла бы быть больше или меньше теперь имеющейся; значение этой постоянной, выведенное из многих наблюдений, есть

$$K = 0.05445$$

т. е. настолько малое, что высшие его степени можно принимать исчезающими. *Второе* постоянное количество, *обозначенное буквою* i, охватывает наклонение движения Луны к плоскости эклиптики, которого величина была бы большею или меньшею, если бы наклонность (орбиты) была большей или меньшей; из многих наблюдений найдено значение

$$i = 0.08964$$

которого также высшие степени быстро приближаются к нулю. *Третья* постоянная есть эксцентриситет орбиты Земли, обозначенный буквою $\varkappa$, который, без сомнения, ничтожен, ибо

$$\varkappa = 0.01679$$

Четвертая постоянная, входящая в определение положения Луны, зависит от параллакса Солнца, ибо заключает отношение среднего расстояния Земли до Солнца к среднему расстоянию Луны до Земли; я его обозначаю через $a:1$, и так как теперь это отношение можно считать известным с достаточною точностью, то можно положить

$$a = \frac{1}{390}$$

так что можно пренебречь даже второю его степенью.

Кроме этих четырех постоянных, необходимо для того времени, для которого требуется место Луны, еще знать четыре угла, пропорциональные времени, которые легко находятся по таблицам средних движений Луны.

Из этих углов *первый*, который я обозначаю буквою p, представляет элонгацию Луны от Солнца, т. е. разность, получаемую вычитая из средней долготы Луны среднюю долготу Солнца; *второй* угол, обозначенный буквою q, *есть средняя аномалия Луны, которая для любого момента времени обыкновенно* показывается в таблицах, но так как они между собою не вполне согласуются, то легко может произойти, что эти углы q окажутся или немного больше, или немного меньше, если их выбирать из той или другой таблицы, *третий* угол, обозначенный буквою r, совпадает с тем, который в таблицах именуется средним аргументом широты, и получается вычитая среднюю долготу восходящего узла из средней долготы Луны, этот угол, сообразно тому, как таблицы составлены, может требовать небольших поправок. *Четвертый* угол, обозначенный буквою t, представляет среднюю аномалию Солнца и, следовательно, ни в каких поправках не нуждается.

Таким образом надо вести весь анализ так, чтобы для любого времени определялись через указанные постоянные и переменные значения трех вышеупомянутых координат, для которых я полагаю:

$$\text{♁}L = 1 + x$$

$$Ll = y$$

$$L\text{☽} = z$$

принимая $\text{♁}O = 1$, представляющую среднее расстояние от Земли до Луны. Все эти величины выбраны соответственно тем неравенствам, которыми движение Луны возмущается и между которыми иначе едва ли было бы возможно установить какой-либо порядок. Главную помощь в этом деле мне оказало надлежащее распределение всех неравенств на определенные классы. К первому классу я отношу все неравенства, которые зависят только от угла p, т. е, от средней элонгации Луны от Солнца, и которые в астрономии называются *вариацией*. Второй класс содержит те неравенства, которые зависят только от эксцентриситета K лунной орбиты, их следует подразделить на порядки соответственно тому, содержат ли они или самое величину K, или ее квадрат K^2, или куб K^3, причем легко видеть, что нет надобности брать степени K выше третьей; эти неравенства можно просто назвать *эксцентрическими*. Третий класс относится к эксцентриситету $\varkappa$ Солнца; эти неравенства можно назвать *солнечными*. Четвертый класс содержит букву a, поэтому относящиеся к нему неравенства называются *параллактическими*. Наконец к пятому классу мы относим неравенства, зависящие от постоянной i, т. е. от наклонности орбиты Луны, и поскольку они влияют на долготу Луны, их совокупность обыкновенно называют *редукцией*; очевидно, что широта Луны определяется, главным образом, по этому классу. После того как эти классы установлены, они могут между собою разным образом сочетаться, отчего происходят как бы смешанные неравенства, которые я отношу к нескольким порядкам.

Эти порядки надо различать, поскольку они относятся к долготе Луны, или, что то же, к координатам x и y; широта же, или третья координата $l\text{☽} = z$, содержит свои отдельные классы.

Для долготы, или для координат x и y, я установил следующие порядки:

$$x = \mathfrak{O} + K\mathfrak{P} + K^2\mathfrak{Q} + K^3\mathfrak{R} + a\mathfrak{S} + aK\mathfrak{T} + \varkappa\mathfrak{U} + \varkappa K\mathfrak{V} + \varkappa K^2\mathfrak{W}$$
$$+ a\varkappa\mathfrak{w} + i^2\mathfrak{X} + i^2 K\mathfrak{Y} + i^2\varkappa\mathfrak{Z}$$

$$y = O + KP + K^2Q + K^3R + aS + aKT + \varkappa U + \varkappa KV + \varkappa K^2 W$$
$$+ a\varkappa w + i^2X + i^2 KY + i^2\varkappa Z$$

для широты же, или третьей координаты z, порядки составляются так:

$$z = i\mathfrak{p} + iK\mathfrak{q} + iK^2\mathfrak{r} + i\varkappa\mathfrak{s} + i^3 u + ia\mathfrak{t}$$

Такое распределение по порядкам в весьма большой мере способствует доведению вычисления до счастливого успеха, ибо общие формулы для трех координат настолько длинны и сложны, что они заполняли бы целую страницу и даже продолжались бы до бесконечности; после же того, как мы их привели к различным порядкам, они почти, вопреки ожиданиям, приняли настолько сжатый вид, что для любого порядка можно было установить отдельное исследование, тогда как такую работу для самих уравнений никто не был бы в состоянии выполнить.

Причина такого сокращения заключается в том, что величины, обозначенные буквами O и $\mathfrak{O}$, едва превосходят одну сотую часть единицы, поэтому кубы их приблизительно равны одной миллионной, так что ими, и тем более высшими степенями этих величин, можно пренебречь, ибо одна стотысячная в месте Луны составляет около 2 секунд. Отсюда видно, что величины отдельных членов, входящих в выражения O и $\mathfrak{O}$, достаточно вычислять до шестого десятичного знака.

Кроме того, для развития отдельных членов вышеприведенных порядков я нашел простое правило, которое содержит в себе общее основание интегрирований, так что при помощи его возможно достаточно быстро определять все члены, тогда как такой прием для общих уравнений совершенно не приложим.

Таким образом мы последовательно определяли члены различных порядков, и так как члены первого порядка вычислялись до шестого десятичного знака, то члены второго порядка, содержащие множитель K, достаточно вычислять до пятого десятичного знака, в виду того, что они умножаются на K. В величинах же $\mathfrak{Q}$ и Q, умножаемых на K^2, достаточно иметь четвертый знак, ибо от умножения на K^2 погрешность не достигает 1 секунды; таким образом, чем выше порядок члена, тем с меньшим числом знаков надо его вычислять; однако я добавляю, что попадаются такие члены, в которых, вследствие особенной сложности, получается меньшая точность. Вследствие этой причины, в членах, содержащих $\mathfrak{R}$ и R, погрешность может достигать нескольких секунд. То же неудобство происходит и в членах, содержащих множители $\mathfrak{V}$ и V, которые можно было бы иметь с точностью, не большей 1 секунды, что само по себе малое имеет значение, но так как эти величины входят затем в состав множителей $\mathfrak{W}$ и W, то в них погрешность накопляется до нескольких секунд, чего по простому развитию этих величин предвидеть было невозможно. Затем мы заметили, что опущен член с множителем $i^2 K^2$, который следовало удержать.

Это опущение в нашем выводе несущественно, ибо неравенства этого порядка сами по себе весьма малые и в крайнем случае не достигают одной четверти минуты, поэтому мы не сочли нужным все наше длинное вычисление производить наново и доводить до бо́льшей степени точности, тем более, что два или три неравенства, подверженные этой погрешности, легко могут быть выведены из наблюдений.

Однако весьма желательно ради теории, чтобы впоследствии опытные вычислители предприняли бы эту работу и определили бы все величины с бо́льшею степенью точности. Для этого необходимо, чтобы в простейших членах удерживались кубы величин $\mho$ и O и вычисление в них доводилось бы до восьмого знака, таким же образом и при определении всех дальнейших членов надо получать в 100 раз бо́льшую точность, чтобы иметь полную уверенность, что все обнаруженные неравенства определены точнейшим образом.

Такая работа, однако, будет, несомненно, тяжелой и трудной, так что ее едва ли можно исполнить меньше, нежели в течение одного года, главным образом потому, что при этом отдельные вычисления надо повторять 2 или 3 раза. Предприняв нашу работу, мы не подозревали, каких утомительных вычислений и какого громадного труда она потребует, если же кто, хотя бы слегка, изучит изложенные здесь вычисления, тот легко убедится, что едва ли существует какой-либо аналитический вопрос, доселе рассмотренный, который потребовал бы столь сложных исследований и столь длинных вычислений.

Однако многое из того, что требуется для самой теории и для приложения найденных значений x, y, z, определяется с большим трудом; во-первых, из наблюдений необходимо вывести истинные значения постоянных, обозначенных буквами K и i, т. е. средние места апогея и узлов Луны для любого заданного времени, однако в этих элементах может заключаться погрешность, достигающая 1 минуты. Но эти определения могли бы быть без большого труда выполнены, если бы имелось достаточное число точнейших наблюдений Луны. На самом же деле, как мне сообщено, обыкновенно производимые астрономические наблюдения доставляют результаты, которые могут отличаться от истинных на целую минуту; это, главным образом, относится до результатов, выводимых из наблюдений кульминаций Луны, при которых определяется сперва высота верхнего или нижнего края, затем прохождение через меридиан левого или правого края лунного диска. В высоте же как наблюденной, так и исправленной рефракцией, едва ли можно избежать погрешности, достигающей до $10''$, затем в моменте прохождения через меридиан может, наверное, быть погрешность до 1 секунды времени, отчего в месте Луны происходит погрешность в $15''$. Кроме того, надо точнейшим образом знать видимый диаметр Луны, в котором также едва ли возможно избежать погрешностей, затем для определения геоцентрического места Луны требуется точное значение ее параллакса, зависящего от самой теории и в величине которого наверное может заключаться погрешность в несколько секунд. Сопоставив все эти погрешности, едва ли можно ожидать, чтобы наблюденные места Луны согласовались с истинными до 1 минуты. Отсюда понятно, что эти погрешности переходят в упомянутые выше элементы, определяемые непосредственно или по уравнениям, если только не взять весьма большое число наблюдений. Поэтому те определения этих элементов, которые произведены на основании различных наблюдений и которыми мы в этом сочинении пользуемся, мы отнюдь не считаем вполне точными и не сомневаемся, что они требуют значительных исправлений, ибо мы не слишком доверяем даже тем точным наблюдениям, которыми мы пользовались. Может оказаться, что наши таблицы несколько отличаются от других, что, однако, не должно быть относимо к недостаткам теории, тем более, что места апогея и узлов мы брали те, которые показаны в таблицах Майера, требующих значительных исправлений. Тем не менее, прилагаемые к этому сочинению таблицы в редких случаях дают результаты, отличающиеся от наблюдений более, чем на 1 минуту, так что астрономы могут ими пользоваться вместо таблиц Майера или Клеро, тем более, что вычисление по нашим таблицам значительно проще, ибо все величины определяются по четырем углам, пропорциональным времени, и даже самая широта Луны находится непосредственно по этим же углам, тогда как иначе нужно производить довольно утомительное вычисление поправок для узлов и места Луны на ее орбите. Но я добавляю, что нетрудно видеть, что если бы кто пожелал сопоставить эти таблицы с многочисленными наблюдениями, то, добавив к этим таблицам некоторые малые поправки, он довел бы эти таблицы до гораздо большего совершенства и тем принес бы весьма большую пользу астрономии.

КНИГА ПЕРВАЯ

ЧАСТЬ 1-я

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЛУНЫ

ГЛАВА I

Предварительные сведения о движении Луны

§ **1.** Точное и совершенное познание движения Луны, на основании которого можно было бы составить астрономические таблицы, точнейшим образом согласующиеся с истиной, сопряжено с такими существенными и величайшими трудностями, что представляется превосходящим силы человеческого ума.

§ **2.** Без сомнения, наибольшая трудность сводится к решению знаменитейшей задачи о движении трех взаимно притягивающихся тел; полное решение ее оказывается превосходящим силы анализа, несмотря на величайшие усилия геометров. Все, что ими достигнуто, ограничивается развитием весьма частных случаев, причем их отнюдь не удалось разрешить в общем виде, а лишь привести к приближениям, и до сих пор нет никого, кто мог бы похвалиться, что обладает решением этого вопроса.

§ **3.** Поэтому, пока не удастся полностью справиться с этою задачею, мы останемся далеко от полного познания движения Луны хотя бы потому, что в этой задаче принимается, что силы, с которыми тела взаимно притягиваются, обратно пропорциональны квадратам расстояний, что на самом деле имеет лишь тогда место, когда тела вполне сферические. Теперь же, вне всякого сомнения, определено, что небесные тела от этой формы более или менее отличаются; так, в частности, из явлений либрации Луны следует, что ее форма заметно отличается от сферической, поэтому силы, которыми Луна притягивается как к Солнцу, так и к Земле, несколько отступают от указанного обратного отношения квадратов расстояний, и надо присовокупить силы, обратно пропорциональные четвертой степени расстояния. Правда, это отклонение весьма малое, но так как здесь дело идет о совершеннейшем познании движений Луны, то это обстоятельство отнюдь нельзя опускать.

§ **4.** Кроме того, Луна подвержена действию не только притяжения Солнца и Земли, но и других планет, в особенности Юпитера и Венеры, так что сказанное исследование не содержится полностью в задаче трех тел. Наконец, если бы случилось, что какая-либо комета прошла недалеко от Луны, то от этого в движении Луны могли бы произойти значительные возмущения; такого рода влияния, однако, никоим образом в таблицах привести нельзя.

§ **5.** Вследствие указанных причин нельзя ожидать такого полного познания движений Луны, в котором все упомянутые весьма малые отклонения были бы точно выражены в числах, поэтому мы удовольствуемся, если нам удастся достигнуть достаточно близкого приближения.

Это, к счастию, удается потому, что все упомянутые отклонения настолько малы, что в месте Луны они едва достигают 1 минуты, все же астрономы весьма охотно соглашаются с такою погрешностью. Поэтому весьма высоко ставился бы тот, кто был бы в состоянии дать такие таблицы Луны, которые нигде не отступали бы от истины более чем на 1 минуту, тем более если бы эти погрешности удалось низвести до полуминуты.

§ **6.** Руководствуясь этими соображениями, мы рассматриваем лишь три тела, т. е. Солнце, Землю и Луну, которые взаимно притягиваются с силами, обратно пропорциональными квадратам расстояния, при этом даже оказывается то весьма большое удобство, что не только масса Солнца весьма велика по сравнению с массою Земли и Луны, но и расстояние до Солнца как бы бесконечно больше расстояния от Земли до Луны; если бы этих двух обстоятельств не было, то наверное все наши усилия в этом исследовании оказались бы совершенно тщетными.

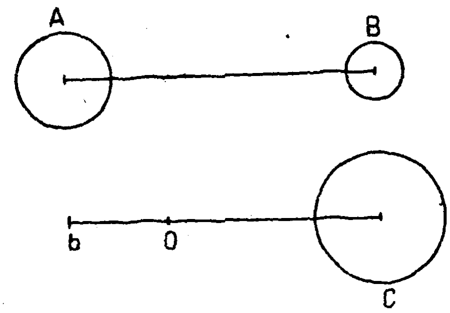
§ **7.** Масса Луны, которою нельзя пренебрегать по сравнению с массою Земли, вносила бы значительные затруднения в наше исследование, если бы не было способа к устранению этого неудобства, именно при рассмотрении этого вопроса можно так распорядиться, что масса Луны совершенно исчезает из вычислений.

§ **8.** Рассмотрим, как это может происходить. Если два тела, взаимно притягивающихся, обращаются около общего центра тяжести каждое по своей орбите, то их относительное движение получится, если масса их обоих, сосредоточенная в центре одного из них, находится в покое, другое же, лишенное всякой инерции, как бы простая точка около него обращается. Итак, если имеются два тела в A и B (фиг. 1), массы коих обозначены этими же буквами, которые как-то движутся около общего центра тяжести O, то мы легко определим это движение вычислением, если вообразим, что в точке C соединены обе массы $A + B$, и будем исследовать движение материальной точки b, ибо ее движение относительно C вполне соответствует движению, совершаемому точкою B вокруг точки A, если расстояние Cb будет равно расстоянию AB и в начале точке b будет придано движение, одинаковое с тем, которым тело B обладает при своем движении вокруг A. Так, если в какой-либо момент место точки b известно, то, положив $Cb = z$, проведем через центр тяжести O прямую AOB, параллельную CB, и возьмем на ней отрезки

$$OA = \frac{B}{A + B} \cdot z$$

и

$$OB = \frac{A}{A + B} \cdot z$$



Фиг. 1.

тогда точки A и B представят положения рассматриваемых двух тел в этот момент.

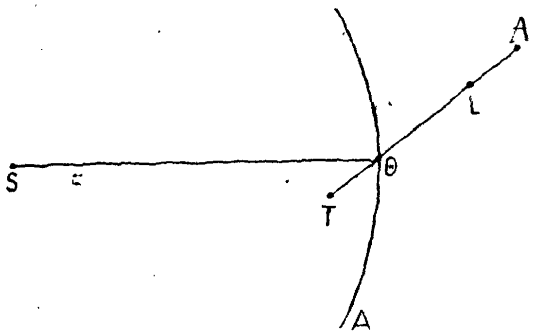
§ **9.** Чтобы применить это рассуждение к нашему случаю, надо, прежде всего, заметить, что движение Луны так связано с движением Земли, что их общий центр тяжести движется по коническому сечению вокруг Солнца по законам Кеплера. Хотя это и не соответствует истине с полною строгостью, но так как расстояние до Солнца настолько превышает расстояние от Луны до Земли и масса его весьма велика, то это предположение столь мало отличается от истины, что происходящие от этого погрешности можно считать равными нулю, тем более, что мы не стремимся к высшей степени точности.

§ **10.** Поэтому повторим здесь наши рассуждения о движении Луны: пусть кривая $A\Theta$ есть то коническое сечение (фиг. 2), которое описывается общим центром тяжести Земли и Луны вокруг Солнца, находящегося в S. Обозначим массу Солнца через S, массу Земли — через T и массу Луны — через L и вообразим в точке Θ тело, масса коего есть $T + L$ и движение которого вокруг Солнца совершается по законам Кеплера, после чего, вместо Луны, поместим в Λ точку или частицу, лишенную массы, которая притягивается как к Солнцу, так и к сказанной массе Θ обратно пропорционально квадратам расстояний. Условившись в этом, если мы сможем определить движение сказанной точки Λ и указать ее место в любой момент, то отсюда сможем определить и движение Луны, каковым оно представляется из центра Земли. С этою целью достаточно продолжать прямую $\Lambda\Theta$ до T так, чтобы было

$$\Theta T = \frac{L}{T+L} \cdot \Theta\Lambda$$

Затем отложить по тому же направлению $L\Lambda = \Theta T$, иначе

$$\Theta L = \frac{T}{T+L} \cdot \Theta\Lambda$$



Фиг. 2.

Таким образом T представит истинное место центра Земли, L — истинное место центра Луны, причем очевидно, что расстояние TL равно расстоянию $\Theta\Lambda$ и одинаково с ним направлено.

§ **11.** Таким образом мы не только определим то движение, которое Луна совершает вокруг Земли, но и движение самой Земли, поскольку она притяжением Луны отклоняется от Кеплеровой орбиты, *ибо Земля не находится в точке* Θ, *как то дается обыкновенными* таблицами, а в точке T; в этом и состоит влияние возмущающей силы Луны. Отсюда также можно заключить, что это возмущение движения Земли настолько мало, что им можно смело пренебречь, в особенности когда вопрос относится к Луне. Обыкновенно массу Луны считают в 70 раз меньше массы Земли, так что будет $L = \frac{1}{70} T$; по значению параллакса Солнца найдено, что расстояние $S\Theta$ в 400 раз превосходит среднее расстояние от Луны до Земли. Итак, расстояние

$$\Theta T = \frac{1}{71} \Theta\Lambda$$

наибольшее влияние это оказывает на долготу Земли, когда Луна находится в квадратурах, ибо тогда угол $S\Theta T$ прямой и погрешность в долготе Солнца будет равна углу, тангенс которого есть

$$\frac{\Theta T}{S\Theta} = \frac{1}{71 \cdot 400} = \frac{1}{28400}$$

каковой угол составляет 7″.3; такою погрешностью по отношению к Луне можно вполне пренебречь. Кроме того, очевидно, что от действия Луны Земля может немного выходить из плоскости эклиптики, причем расстояние её от этой плоскости будет приблизительно в 70 раз меньше расстояния Луны от той же плоскости. Таким образом, если широта Луны равна $5^\circ \frac{3}{4}$, т. е. ее расстояние от эклиптики равно $\frac{1}{10}\Theta\Lambda$, то Земля будет отстоять на $\frac{1}{700}\Theta\Lambda$, что, по разделении на $S\Theta$, дает широту, под которою Земля усматривается из Солнца. Эта широта, следовательно, будет $\frac{1}{700 \cdot 400}$, т. е. в 10 раз меньше сказанной величины 7″.3 и, значит, не может даже составить 1 секунды.

§ **12.** Прежде всего надо заметить, что таким образом определяется геоцентрическое место Луны, т. е. та точка неба, в которой *наблюдатель*, находящийся в центре Земли, усмотрел бы Луну, кроме того расстояние Луны до центра Земли постоянно равно сказанной величине $\Theta\Lambda$. Следовательно, если нам удастся определить движение точки Λ, притягиваемой точками S и Θ, то мы вполне достигнем нашей цели, ибо в любой момент времени будет известно не только геоцентрическое место Луны, но и ее истинное расстояние до центра Земли.

§ **13.** По должном рассмотрении всего вышеизложенного очевидно, что все дело, которым мы занялись, сводится к решению следующей задачи.

Задача. Если тело Θ, масса которого равна $T + L$, описывает вокруг Солнца, *находящегося в S и масса которого равна S*, тот эллипс, по которому представляется, что Солнце движется вокруг Земли, и если ничтожно малой частице Λ будет сообщено какое-либо движение и она непрестанно притягивается точками Θ и S с известными силами $\frac{T+L}{\Theta\Lambda^2}$ и $\frac{S}{S\Lambda^2}$, то *требуется определить движение сказанной частицы Λ так, чтобы не только можно было указать место точки Λ на небе, но и ее расстояние $\Theta\Lambda$.*

К решению этой задачи мы и направим все наши силы, как то будет видно из следующих глав.

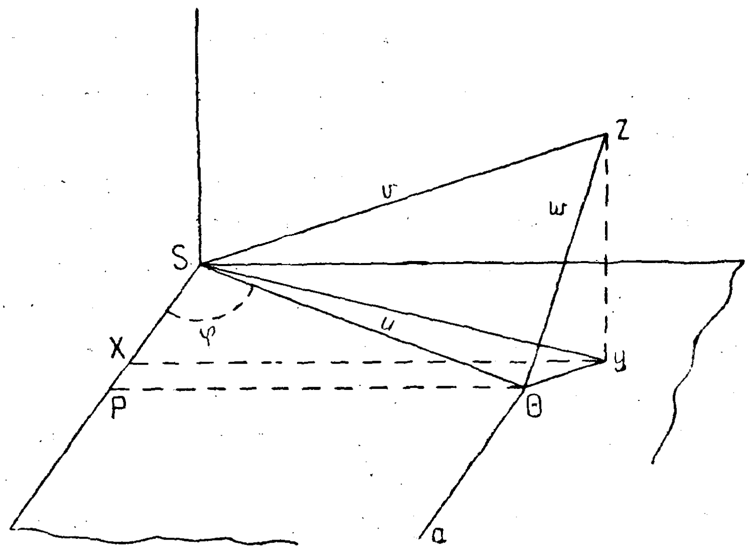
ГЛАВА II

Основные формулы для движения Луны

§ **14.** Предполагая, что центр Солнца в точке S и что $A\Theta$ есть эллиптическая орбита, описываемая общим центром тяжести Земли и Луны, мы примем плоскость чертежа (фиг. 3) за плоскость эклиптики. Пусть в какой-либо точке Z вне ее находится центр Луны или, точнее говоря, та точка, которой мы заменили Луну. Из этой точки Z опускаем на плоскость эклиптики перпендикуляр ZY и из точки Y на постоянную ось SA проводим перпендикуляр YX, так что место Луны Z определяется координатами:

$$SX = x, \quad XY = y, \quad YZ = z$$

причем, само собою разумеется, прямая SA направлена в точку весеннего равноденствия.



Фиг. 3.

§ **15.** Проводим прямые $S\Theta$; SY; ΘY; ΘZ и SZ, и из точки Θ — прямую Θa, параллельную SA, которая, следовательно, также направлена в начало счета долгот. Таким образом угол $AS\Theta$ представляет гелиоцентрическую долготу Земли или, точнее, долготу того общего центра тяжести, который мы рассматриваем вместо Земли, так что долгота (геоцентрическая) Солнца получится придав 180° к сказанному углу $AS\Theta$, вместе с тем угол $Y\Theta Z$ представляет широту и угол $a\Theta Y$ — долготу Луны. Положим затем:

$$S\Theta = u, \quad AS\Theta = \varphi; \quad SZ = v, \quad \Theta Z = w$$

и опустим на ось SA из точки Θ перпендикуляр ΘP, так что будет

$$\Theta P = u \sin \varphi \quad \text{и} \quad SP = u \cos \varphi$$

и так как

$$PX = x - u \cos \varphi$$

то будет:

$$\overline{\Theta Y}^2 = (x - u\cos\varphi)^2 + (y - u\sin\varphi)^2$$

$$\overline{\Theta Z}^2 = w^2 = z^2 + (x - u\cos\varphi)^2 + (y - u\sin\varphi)^2$$

очевидно, что

$$\overline{SY}^2 = x^2 + y^2$$

и

$$\overline{SZ}^2 = v^2 = z^2 + x^2 + y^2$$

§ **16.** Чтобы теперь приложить начала механики, обозначим попрежнему через S — массу Солнца, T — массу Земли, L — массу Луны, а так как мы рассматриваем в точке Θ тело, составленное из массы Земли и Луны, $T+L$, то обозначим для краткости $\Theta = T+L$, ибо масса точки Z считается ничтожно малой. Как видно, на точку Z действуют две ускорительные силы; одна — направленная к Солнцу по прямой ZS и равная $\frac{S}{v^2}$, другая — направленная к точке Θ и равная $\frac{\Theta}{w^2}$, поэтому, разложив эти силы параллельно нашим координатным осям, получим:

по направлению XS силу $\frac{Sx}{v^3}$

» » YX » $\frac{Sy}{v^3}$

» » ZY » $\frac{Sz}{v^3}$

Подобным же образом от второй силы получаем:

по направлению XS силу $\frac{\Theta(x - u\cos\varphi)}{w^3}$

» » YX » $\frac{\Theta(y - u\sin\varphi)}{w^3}$

» » ZY » $\frac{\Theta \cdot z}{w^3}$

§ **17.** Хотя масса Солнца и весьма велика по сравнению с массою Θ, так что Солнце от силы, притягивающей его к точке Θ, почти не получает движения, тем не менее, согласно правилам механики, переносим силу, с которою S притягивается к Θ и которая равна $\frac{\Theta}{u^2}$, в точку Z по обратному направлению, тогда к этой точке, сверх вышеприведенных сил, прилагаются еще силы:

$$\text{по } PS \text{ сила } \frac{\Theta \cos\varphi}{u^2}$$

$$\text{» } \Theta P \text{ » } \frac{\Theta \sin\varphi}{u^2}$$

так что всего на точку Z действуют такие три силы:

$$\text{I) по направлению } XS \ldots \frac{Sx}{v^3} + \frac{\Theta(x - u\cos\varphi)}{w^3} + \frac{\Theta\cos\varphi}{u^2}$$

$$\text{II) » » } YX \ldots \frac{Sy}{v^3} + \frac{\Theta(y - u\sin\varphi)}{w^3} + \frac{\Theta\sin\varphi}{u^2}$$

$$\text{III) » » } ZY \ldots \frac{Sz}{v^3} + \frac{\Theta z}{w^3}$$

§ **18.** Обозначим через τ — время и примем его за переменную независимую, тогда, на основании известных правил, имеем следующие три дифференциальных уравнения второго порядка:

$$\text{I)} \quad \alpha\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{Sx}{v^3} + \frac{\Theta(x - u\cos\varphi)}{w^3} + \frac{\Theta\cos\varphi}{u^2} = 0$$

$$\text{II)} \quad \alpha\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{Sy}{v^3} + \frac{\Theta(y - u\sin\varphi)}{w^3} + \frac{\Theta\sin\varphi}{u^2} = 0$$

$$\text{III)} \quad \alpha\frac{d^2z}{d\tau^2} + \frac{Sz}{v^3} + \frac{\Theta z}{w^3} = 0$$

Этими тремя уравнениями движение Луны вполне определяется. Здесь α есть некоторая постоянная, зависящая от тех единиц, в которых выражается время τ, как будет подробнее объяснено. Таким образом все дело сведено к интегрированию этих трех уравнений, но мы не имеем ни малейшей надежды когда-либо выполнить это интегрирование, поэтому и не будем пытаться интегрировать эти уравнения.

§ **19.** Если бы мы когда-либо достигли того, что могли бы определить интегралы этих уравнений, или какой-либо добрый гений нам их открыл, то от этого мы не извлекли бы ни малейшей пользы, ибо, без сомнения, все три неизвестные x, y, z в этих интегралах были бы так между собою перемешаны, что нельзя было бы указать никакого способа, по которому можно бы было выразить каждую из них в отдельности.

ГЛАВА III

Более обстоятельное рассмотрение движения Земли или тела Θ

§ **20.** Важно сперва рассмотреть движение Земли, а затем перейти к движению Луны. Необходимо не только точно определить значения величин u и φ, но мы из них же выведем удобную и подходящую для нашей цели меру времени, иначе определим значение постоянной α.

§ **21.** К этому случаю легко приложить вышенайденные формулы, устранив тело Z, так что взаимно притягиваются только тела Θ и S; а чтобы точка S оставалась в покое, надо вообразить, что в ней сосредоточена масса $S+\Theta$. Приняв это, будем иметь для двух координат

$$SP = X;\ P\Theta = Y$$

следующие два уравнения:

$$\text{I)}\quad \alpha\frac{d^2X}{d\tau^2} + (S+\Theta)\cdot\frac{X}{u^3} = 0$$

$$\text{II)}\quad \alpha\frac{d^2Y}{d\tau^2} + (S+\Theta)\frac{Y}{u^3} = 0;$$

так как

$$X = u\cos\varphi;\quad Y = u\sin\varphi$$

то будет:

$$X\cos\varphi + Y\sin\varphi = u$$

$$X\sin\varphi - Y\cos\varphi = 0$$

Дифференцирование этих выражений дает

$$dX\cdot\cos\varphi + dY\cdot\sin\varphi - (X\sin\varphi - Y\cos\varphi)\,d\varphi = du$$

т. е.

$$dX\cdot\cos\varphi + dY\cdot\sin\varphi = du \tag{1}$$

Точно так же

$$dX\cdot\sin\varphi - dY\cos\varphi + (X\cos\varphi + Y\sin\varphi)\,d\varphi = 0$$

т. е.

$$dX\cdot\sin\varphi - dY\cdot\cos\varphi + u\,d\varphi = 0 \tag{2}$$

Дифференцируя формулы (1) и (2), имеем

$$d^2X\cdot\cos\varphi + d^2Y\cdot\sin\varphi + (dY\cdot\cos\varphi - dX\cdot\sin\varphi)\,d\varphi = d^2u$$

т. е.

$$d^2X\cdot\cos\varphi + d^2Y\cdot\sin\varphi + u\cdot d\varphi^2 = d^2u \tag{3}$$

точно так же

$$d^2X \cdot \sin\varphi - d^2Y \cdot \cos\varphi + (dX \cdot \cos\varphi + dY \cdot \sin\varphi)\,d\varphi +$$
$$+ du \cdot d\varphi + u\,d^2\varphi = 0$$

т. е.

$$d^2X \cdot \sin\varphi - d^2Y \cdot \cos\varphi + 2du\,d\varphi + u\,d^2\varphi = 0 \tag{4}$$

§ **22.** Так как из наших дифференциальных уравнений следует:

$$d^2X = -\frac{(S+\Theta)X \cdot d\tau^2}{\alpha u^3}; \qquad d^2Y = -\frac{(S+\Theta)Y d\tau^2}{\alpha u^3}$$

то, поставив эти величины в формулы (3) и (4), получим

$$-(S+\Theta)(X\cos\varphi + Y\sin\varphi)\frac{d\tau^2}{\alpha u^3} + u\,d\varphi^2 = d^2u$$

т. е.

$$-\frac{(S+\Theta)\,d\tau^2}{\alpha u^2} + u\,d\varphi^2 = d^2u \tag{5}$$

$$-\frac{(S+\Theta)}{\alpha u^3}(X\sin\varphi - Y\cos\varphi)\cdot d\tau^2 + 2du\,d\varphi + u\,d^2\varphi = 0$$

т. е.

$$2du\,d\varphi + u\,d\varphi^2 = 0 \tag{6}$$

Вследствие этого, уравнения нашей задачи будут:

$$\text{I)} \quad \alpha\,\frac{d^2u - u\,d\varphi^2}{d\tau^2} = -\frac{S+\Theta}{u^2}$$

$$\text{II)} \quad \alpha\,\frac{u d^2\varphi + 2du d\varphi}{d\tau^2} = 0$$

§ **23.** Хотя эти уравнения и нетрудно интегрировать, но для нашей цели нет надобности к этому прибегать, и мы поступим следующим образом. Так как установлено, что орбита есть эллипс малого эксцентриситета, то для нас достаточно взять лишь те члены, которые имеют множителем первую степень эксцентриситета, отбрасывая все члены, содержащие квадрат и высшие его степени.

Так как до сих пор единица времени оставлена неопределенной, то примем в дальнейшем за переменную независимую среднюю аномалию Солнца, обозначив ее буквою t, и так как она пропорциональна времени, то будет

$$d^2t = 0$$

Затем полагаем: среднее расстояние от Земли до Солнца, равным 1 и эксцентриситет равным $\varkappa = 0.01678$, как то следует из наблюдений; приняв это, по известным законам Кеплера имеем

$$u = 1 + \varkappa \cos t$$

затем, обозначая среднюю долготу Земли через ζ, также, как известно, имеем

$$\varphi = \zeta - 2\varkappa \sin t$$

но приближенно будет $d\zeta = dt$, и следовательно:

$$\frac{du}{dt} = -\varkappa \sin t \quad \text{и} \quad \frac{d^2u}{dt^2} = -\varkappa \cos t$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 1 - 2\varkappa \cos t \quad \text{и} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2\varkappa \sin t$$

§ **24.** Подставив эти значения в наши уравнения, не только убедимся, что они удовлетворяются, но мы определим и постоянную α и ее отношение к массе $S + \Theta$, в чем и состоит сущность дела. Так, первое уравнение, отбросив члены, содержащие вторую степень эксцентриситета, принимает вид

$$\alpha (2\varkappa \cos t - 1) = -\frac{S + \Theta}{2\varkappa \cos t + 1} = (S + \Theta)(2\varkappa \cos t - 1)$$

следовательно

$$\alpha = S + \Theta$$

второе же уравнение обращается в тожество. Таким образом мы достигли следующей выгоды: в дальнейшем время τ мы выражаем через среднюю аномалию Солнца, вместо постоянной α можем писать $S + \Theta$, причем среднее расстояние от Земли до Солнца полагается равным 1. Установив это, получим для определения движения Земли уравнения:

$$\text{I)} \quad \frac{d^2u - u\,d\varphi^2}{dt^2} = -\frac{1}{u^2}$$

$$\text{II)} \quad \frac{u\,d^2\varphi + 2du\,d\varphi}{dt^2} = 0$$

Эти уравнения имеют место при всяком значении $\varkappa$ эксцентриситета. Когда же эксцентриситет весьма малый, то будет:

$$u = 1 + \varkappa \cos t; \quad u^2 = 1 + 2\varkappa \cos t$$

$$\frac{1}{u} = 1 - \varkappa \cos t; \quad \frac{1}{u^2} = 1 - 2\varkappa \cos t$$

$$\frac{du}{dt} = -\varkappa \sin t; \quad \frac{d^2u}{dt^2} = -\varkappa \cos t$$

также

$$\varphi = \zeta - 2\varkappa \sin t; \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1 - \varkappa \cos t$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2\varkappa \sin t$$

Отсюда следует

$$u^2 \frac{d\varphi}{dt} = 1 - 4\varkappa^2 \cos^2 t = 1;$$

вообще значение этой величины должно быть постоянное, как то следует из уравнения II), которое, будучи умножено на u, по интегрировании, дает

$$u^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}$$

§ **25.** Обратимся теперь опять к Луне и, воспользовавшись мерою времени, выведенной из средней аномалии Солнца, положив среднее расстояние от Земли до Солнца равным 1 и $\alpha = S + \Theta$, как то получено выше, разделим уравнения § 18 на $S + \Theta$ и, для краткости положив

$$\frac{S}{S+\Theta} = \mu; \quad \frac{\Theta}{S+\Theta} = \nu$$

так что будет

$$\mu + \nu = 1$$

получим:

$$\text{I)} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{x}{v^3} + \nu \frac{x - u\cos\varphi}{w^3} + \nu \frac{\cos\varphi}{u^2} = 0$$

$$\text{II)} \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \mu \frac{y}{v^3} + \nu \frac{y - u\sin\varphi}{w^3} + \nu \frac{\sin\varphi}{u^2} = 0$$

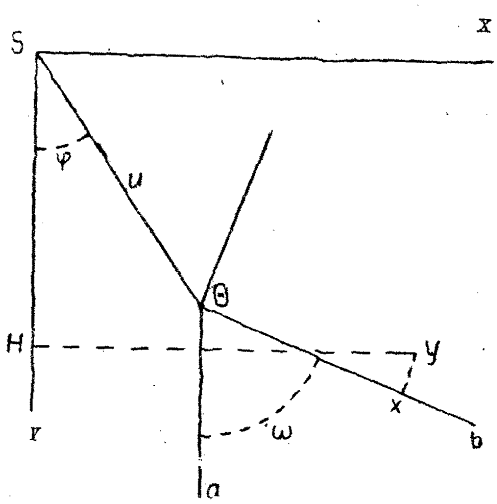
$$\text{III)} \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \mu \frac{x}{v^3} + \nu \frac{z}{w^3} = 0$$

и так как масса Солнца весьма велика по сравнению с Θ, то очевидно, что величина μ отличается весьма мало от 1, величина же ν есть весьма малая дробь.

ГЛАВА IV

Общее преобразование найденных формул

§ **26.** Так как в уравнениях § 25 координаты x и y изменяются на протяжении всей орбиты Земли, то они мало пригодны для приближений, поэтому необходимо ввести в наши уравнения новые координаты. Чтобы это проще выполнить, проведем из точки Θ, к которой следует относить движение Луны, в плоскости эклиптики какую-нибудь прямую Θb, которая около точки Θ как угодно вращается, и обозначим угол $a\Theta b$ через ω (фиг. 4 и 5) и примем эту прямую за ось ΘX; опустив на эту ось из точки Y перпендикуляр Yx, обозначим новые координаты так:



Фиг. 4.

$$\overline{\Theta x} = X; \ \overline{xY} = Y; \ \overline{YZ} = Z$$

так что будет $z = Z$, и очевидно,

$$\overline{\Theta Z} = w = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

§ **27.** Рассмотрим теперь зависимость между новыми координатами и предыдущими, на которую нужно обратить серьезное внимание; имеем:

$$x = u\cos\varphi + X\cos\omega - Y\sin\omega$$
$$y = u\sin\varphi + X\sin\omega + Y\cos\omega$$
$$z = Z$$

Так как мы имели

$$\overline{SZ}^2 = v^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

то в новых координатах будет

$$\begin{aligned} v^2 = u^2 &+ 2uX(\cos\varphi\cdot\cos\omega + \sin\varphi\cdot\sin\omega) \\ &- 2uY(\cos\varphi\cdot\sin\omega - \sin\varphi\cdot\cos\omega) \\ &+ X^2 + Y^2 + Z^2 \end{aligned}$$

положим для краткости:

$$\omega - \varphi = \psi$$

получим

$$v^2 = u^2 + 2uX\cos\psi - 2uY\sin\psi + X^2 + Y^2 + Z^2$$

§ 28. Чтобы легче ввести новые координаты в наши дифференциальные уравнения, заметим, что

$$x\cos\omega + y\sin\omega = u\cos\psi + X$$

$$x\sin\omega - y\cos\omega = u\sin\psi - Y$$

дифференцируя первую из этих формул, получаем

$$dx\cdot\cos\omega + dy\cdot\sin\omega = (x\sin\omega - y\cos\omega)\,d\omega + du\cdot\cos\psi$$
$$- u\,d\psi\cdot\sin\psi + dX$$

т. е.

$$dx\cdot\cos\omega + dy\cdot\sin\omega = (u\sin\psi - Y)\cdot d\omega + du\cdot\cos\psi$$
$$- u\,d\psi\cdot\sin\psi + dX$$

а так как

$$d\psi = d\omega - d\varphi$$

то будет

$$dx\cdot\cos\omega + dy\cdot\sin\omega = du\cdot\cos\psi + u\,d\varphi\cdot\sin\psi + dX - Y\,d\omega \qquad (1)$$

Совершенно так же из второй формулы получим

$$dx\cdot\sin\omega - dy\cdot\cos\omega = -(x\cos\omega + y\sin\omega)\,d\omega + du\cdot\sin\psi$$
$$+ u\,d\psi\cdot\cos\psi - dY$$

т. е.

$$dx\cdot\sin\omega - dy\cdot\cos\omega = du\cdot\sin\psi - u\,d\varphi\cdot\cos\psi - X\,d\omega - dY \qquad (2)$$

§ 29. Дифференцируя формулы (1) и (2), получаем

$$d^2x\cdot\cos\omega + d^2y\cdot\sin\omega = d^2u\cdot\cos\psi + du\cdot\sin\psi\,(d\varphi - d\psi) + ud^2\varphi\cdot\sin\psi$$
$$+ u\,d\varphi\,d\psi\cdot\cos\psi - (dy\cdot\cos\omega - dx\cdot\sin\omega + dY)\,d\omega$$
$$- Y\cdot d^2\omega + d^2X$$

Заменив $d\psi$ его величиною

$$d\psi = d\omega - d\varphi$$

имеем

$$d^2x\cdot\cos\omega + d^2y\cdot\sin\omega = (d^2u - ud\varphi^2)\cos\psi + (ud^2\varphi + 2dud\varphi)\sin\psi$$
$$-(du\cdot\sin\psi - ud\varphi\cdot\cos\psi +$$
$$+ dy\cdot\cos\omega - dx\cdot\sin\omega + dY)\,d\omega\cdot$$
$$- Y\cdot d^2\omega + d^2X$$

из формулы (2) следует

$$X\,d\omega + dY = du\cdot\sin\psi - u\,d\varphi\cdot\cos\psi + dy\cdot\cos\omega - dx\cdot\sin\omega$$

в § 24 доказано, что

$$d^2u - u\,d\varphi^2 = -\frac{dt^2}{u^2}$$
$$u\,d^2\varphi + 2du\,d\varphi = 0$$

по подстановке этих значений получаем

$$d^2x\cdot\cos\omega + d^2y\cdot\sin\omega = -\frac{\cos\psi}{u^2}\cdot dt^2 + d^2X - 2dY\cdot d\omega - Yd^2\omega - X\,d\omega^2$$

Подобным же образом дифференцирование формулы (2) дает

$$d^2x\cdot\sin\omega - d^2y\cdot\cos\omega = (d^2u - u\,d\varphi^2)\sin\psi - (u\,d^2\varphi + 2du\,d\varphi)\cos\psi$$
$$- d^2Y - 2dX\cdot d\omega - X\,d^2\omega + Y\,d\omega^2$$

т. е.

$$d^2x\cdot\sin\omega - d^2y\cdot\cos\omega = -\frac{\sin\psi}{u^2}dt^2 - d^2Y - 2dX\,d\omega - X\,d^2\omega + Y\,d\omega^2$$

§ **30**. Составим теперь из дифференциальных уравнений § 25 подобные же комбинации, т. е.

$$\mathrm{I}\cdot\cos\omega + \mathrm{II}\cdot\sin\omega$$
$$\mathrm{I}\cdot\sin\omega - \mathrm{II}\cdot\cos\omega$$

и мы получим:

$$\frac{d^2x\cdot\cos\omega + d^2y\cdot\sin\omega}{dt^2} + \mu\frac{u\cos\psi + X}{v^3} + \nu\frac{X}{w^3} + \nu\frac{\cos\psi}{u^2} = 0$$
$$\frac{d^2x\cdot\sin\omega - d^2y\cdot\cos\omega}{dt^2} + \mu\frac{u\sin\psi - Y}{v^3} - \nu\frac{Y}{w^3} + \nu\frac{\sin\psi}{u^2} = 0$$

Подставляя сюда выражения, полученные в § 29, мы будем иметь следующие уравнения в новых координатах:

$$\text{I)}\quad -\frac{\cos\psi}{u^2}+\frac{d^2X}{dt^2}-2\frac{dY\,d\omega}{dt^2}-Y\frac{d^2\omega}{dt^2}-X\frac{d\omega^2}{dt^2}+\mu\frac{u\cos\psi+X}{v^3}$$

$$+\nu\frac{X}{w^3}+\nu\frac{\cos\psi}{u^2}=0$$

$$\text{II)}\quad -\frac{\sin\psi}{u^2}-\frac{d^2Y}{dt^2}-2\frac{dX\,d\omega}{dt^2}-X\frac{d^2\omega}{dt^2}+Y\frac{d\omega^2}{dt^2}+\mu\frac{u\sin\varphi-Y}{v^3}$$

$$-\nu\frac{Y}{w^3}+\nu\frac{\sin\psi}{u^2}=0$$

Третье же уравнение, так как $z=Z$, остается без перемены:

$$\text{III)}\qquad \frac{d^2Z}{dt^2}+\mu\frac{Z}{v^3}+\nu\frac{Z}{w^3}=0$$

§ **31**. Переменим знаки во втором уравнении и расположим члены иначе, так чтобы уравнения движения Луны в новых координатах X, Y, Z приняли следующий вид:

$$\text{I)}\quad \frac{d^2X}{dt^2}-2\frac{dY\,d\omega}{dt^2}-X\frac{d\omega^2}{dt^2}-Y\frac{d^2\omega}{dt^2}-\mu\frac{\cos\psi}{u^2}+$$

$$+\mu\frac{u\cos\psi+X}{v^3}+\nu\frac{X}{w^3}=0$$

$$\text{II)}\quad \frac{d^2Y}{dt^2}+2\frac{dX\,d\omega}{dt^2}-Y\frac{d\omega^2}{dt^2}+X\frac{d^2\omega}{dt^2}+\mu\frac{\sin\psi}{u^2}$$

$$-\mu\frac{u\sin\psi-Y}{v^3}+\nu\frac{Y}{w^3}=0$$

$$\text{III)}\quad \frac{d^2Z}{dt^2}+\mu\frac{Z}{v^3}+\nu\frac{Z}{w^3}=0$$

при этом вместо $1-\nu$ мы написали μ, ибо, как указано,

$$\mu+\nu=1$$

ГЛАВА V

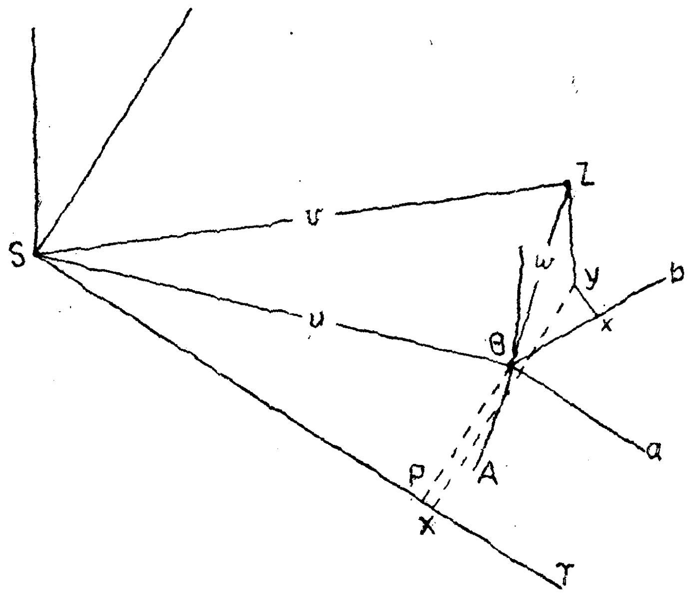
Приведение предыдущих координат к средней долготе Луны

§ **32**. Возьмем теперь ось Θb так, чтобы она всегда была направлена по средней долготе Луны, а так как прямая Θa направлена в точку весеннего равноденствия, что угол $a\Theta b=\omega$ представит среднюю долготу Луны, и так как она пропорциональна времени, то будет $\frac{d^2\omega}{dt^2} = 0$, и уравнения для координат X, Y, Z примут следующий вид:

$$\text{I)}\quad \frac{d^2X}{dt^2} - 2\frac{dY\,d\omega}{dt^2} - X\frac{d\omega^2}{dt^2} - \mu\frac{\cos\psi}{u^2} + \mu\frac{u\cos\psi + X}{v^3} + \nu\frac{X}{w^3} = 0$$

$$\text{II)}\quad \frac{d^2Y}{dt^2} + 2\frac{dX\,d\omega}{dt^2} - Y\frac{d\omega^2}{dt^2} + \mu\frac{\sin\psi}{u^2} - \mu\frac{u\sin\psi - Y}{v^3} + \nu\frac{Y}{w^3} = 0$$

$$\text{III)}\quad \frac{d^2Z}{dt^2} + \mu\frac{Z}{v^3} + \nu\frac{Z}{w^3} = 0$$



Фиг. 5.

§ **33.** Заметим, прежде всего, что

$$w^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$
$$v^2 = u^2 + 2u(X\cos\psi - Y\sin\psi) + X^2 + Y^2 + Z^2$$

Затем, так как движение Земли известно и среднее расстояние ее до Солнца положено равным 1, то обозначая через t — среднюю аномалию Земли или Солнца и пренебрегая степенями $\varkappa$, высшими первой, имеем:

$$u = 1 + \varkappa\cos t$$
$$u^2 = 1 + 2\varkappa\cos t$$
$$\frac{1}{u^2} = 1 - 2\varkappa\cos t$$
$$\frac{1}{u^3} = 1 - 3\varkappa\cos t$$

Выше мы обозначили среднюю долготу Земли через ζ и истинную через φ и получили

$$\varphi = \zeta - 2\varkappa \sin t.$$

и значит, будет

$$\psi = \omega - \zeta + 2\varkappa \sin t$$

а так как член $2\varkappa \sin t$ весьма малый и степенями $\varkappa$ выше первой можно пренебречь, то мы получим следующие формулы:

$$\sin\psi = \sin(\omega - \zeta) - 2\varkappa \sin t \cdot \cos(\omega - \zeta)$$

$$\cos\psi = \cos(\omega - \zeta) - 2\varkappa \sin t \cdot \sin(\omega - \zeta)$$

34. Но угол $\omega - \zeta$ представляет среднюю долготу Луны за вычетом средней гелиоцентрической долготы Земли, в астрономических же вычислениях принято пользоваться геоцентрической долготой Солнца, обозначив которую через ϑ будем иметь

$$\zeta = \vartheta \pm 180^\circ$$

следовательно

$$\omega - \zeta = \omega - \vartheta \mp 180^\circ$$

и значит,

$$\sin(\omega - \zeta) = -\sin(\omega - \vartheta); \quad \cos(\omega - \zeta) = -\cos(\omega - \vartheta)$$

и последние две формулы § 33 примут вид:

$$\sin\psi = -\sin(\omega - \vartheta) - 2\varkappa \sin t \cdot \cos(\omega - \vartheta)$$

$$\cos\psi = -\cos(\omega - \vartheta) + 2\varkappa \sin t \cdot \sin(\omega - \vartheta)$$

§ **35.** Положим теперь

$$\omega - \vartheta = p$$

так что угол p получается вычитая из средней долготы Луны ω среднюю долготу Солнца ϑ; так как этот угол пропорционален времени, то положим

$$\frac{dp}{dt} = m$$

и так как $d\vartheta = dt$, *ибо* чрезвычайно медленным движением апогея Солнца можно пренебречь, то будет

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{dp}{dt} + \frac{d\vartheta}{dt} = m + 1$$

Поэтому, исключая $\frac{d\omega}{dt}$ из наших уравнений, мы получим:

$$\text{I)}\quad \frac{d^2X}{dt^2}-2(m+1)\frac{dY}{dt}-(m+1)^2X-\mu\frac{\cos\psi}{u^2}+$$
$$+\mu\frac{u\cos\psi+X}{v^3}+\nu\frac{X}{w^3}=0$$

$$\text{II)}\quad \frac{d^2Y}{dt^2}+2(m+1)\frac{dX}{dt}-(m+1)^2Y+\mu\frac{\sin\psi}{u^2}$$
$$-\mu\frac{u\sin\psi-Y}{v^3}+\nu\frac{Y}{w^3}=0$$

$$\text{III)}\quad \frac{d^2Z}{dt^2}+\mu\frac{Z}{v^3}+\nu\frac{Z}{w^3}=0$$

Из наблюдений установлено, что величина m, которая представляет отношение звездного года к синодическому месяцу, есть

$$m=12.3689539;$$

вместе с тем, вводя угол p, имеем:

$$\sin\psi=-\sin p-2\varkappa\sin t\cdot\cos p$$
$$\cos\psi=-\cos p+2\varkappa\sin t\cdot\sin p$$

таким образом в наши формулы углы ζ, ϑ, ω больше входить не будут, и наши координаты будут выражаться через углы p и t, пропорциональные времени.

ГЛАВА VI

Развитие членов, заключающих делитель v^3

§ **36**. Так как ось Θb направлена по средней долготе Луны, то очевидно, что ордината Y теперь не может выходить из определенных достаточно тесных пределов, также и абсцисса X не выходит из определенных границ, наконец и третья координата Z содержится также в достаточно тесных границах. Из этих трех величин наибольшею всегда будет абсцисса X, которая все-таки остается весьма малой по сравнению с расстоянием $S\Theta=u$. Так как мы имели

$$v^2=u^2+2u(X\cos\psi-Y\sin\varphi)+X^2+Y^2+Z^2$$

причем мы оставляем угол ψ, ибо значения $\sin\psi$ и $\cos\psi$ приведены выше, то ясно, что в этом выражении первый член u^2 во много раз больше второго члена $2u(X\cos\psi-Y\sin\psi)$, который, в свою очередь, во много раз больше члена

$$X^2+Y^2+Z^2$$

§ **37**. На основании этого, выражение $\frac{1}{v^3}$ весьма удобно развить в ряд *весьма быстро сходящийся*, и чтобы это было яснее, положим для сокращения:

$$v^2 = u^2 + 2Pu + Q$$

так что будет:

$$P = X\cos\psi - Y\sin\psi; \qquad Q = X^2 + Y^2 + Z^2$$

и так как

$$\frac{1}{v^3} = (u^2 + 2Pu + Q)^{-3/2}$$

то, на основании хорошо известного правила, имеем

$$\frac{1}{v^3} = \frac{1}{u^3} - \frac{3}{2}\cdot\frac{2Pu + Q}{u^5} + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{(2Pu+Q)^2}{u^7}$$

ибо дальше итти незачем.

Отсюда следует

$$\frac{1}{v^3} = \frac{1}{u^3} - \frac{3P}{u^4} + \frac{15P^2 - 3Q}{2u^5}$$

и, подставив вместо P и Q их значения, получим

$$\frac{1}{v^3} = \frac{1}{u^3} - \frac{3(X\cos\psi - Y\sin\psi)}{u^4} + \frac{3X^2(5\cos^2\psi - 1)}{2u^5}$$
$$- \frac{15XY\sin\psi\cos\psi}{u^5} + \frac{3Y^2(5\sin^2\psi - 1)}{2u^5} - \frac{3Z^2}{2u^5}$$

причем удержаны даже члены со вторыми степенями X, Y и Z.

§ **38**. Подставим теперь это выражение в каждое из наших уравнений, и так как в первом уравнении содержится член $\mu\frac{u\cos\psi + X}{v^3}$, состоящий *из двух слагаемых*, то каждое из них разовьем в отдельности, тогда получим

$$\mu\frac{u\cos\psi}{v^3} = \frac{\mu\cos\psi}{u^2} - \frac{3\mu X\cos^2\psi}{u^3} + \frac{3\mu Y\sin\psi\cos\psi}{u^3}$$
$$+ \frac{3\mu X^2\cos\psi(5\cos^2\psi - 1)}{2u^4} - \frac{15\mu XY\sin\psi\cos^2\psi}{u^4}$$
$$+ \frac{3\mu Y^2\cos\psi(5\sin^2\psi - 1)}{2u^4} - \frac{3\mu Z^2\cos\psi}{2u^4}$$

подобно этому будет

$$\frac{\mu X}{v^3} = \frac{\mu X}{u^3} - \frac{3\mu X^2\cos\psi}{u^4} + \frac{3\mu XY\sin\psi}{u^4}$$

следовательно

$$\frac{\mu(u\cos\psi + X)}{v^3} = \frac{\mu\cos\psi}{u^2} - \frac{\mu X(5\cos^2\psi - 1)}{u^3} + \frac{3\mu Y\sin\psi\cos\psi}{u^3}$$
$$+ \frac{3\mu X^2\cos\psi(5\cos^2\psi - 3)}{2u^4} - \frac{3\mu XY\sin\psi(5\cos^2\psi - 1)}{u^4}$$
$$+ \frac{2\mu Y^2\cos\psi(5\sin^2\psi - 1)}{2u^4} - \frac{3\mu Z^2\cos\psi}{2u^4}$$

по подстановке в уравнение I) § 35 получается

Первое уравнение

$$\frac{d^2X}{dt^2}-2(m+1)\frac{dY}{dt}-(m+1)^2X+\nu\frac{X}{w^3}-\frac{\mu X(3\cos^2\psi-1)}{u^3}+\frac{3\mu Y\sin\psi\cos\psi}{u^3}$$
$$+\frac{3\mu X^2\cos\psi(5\cos^2\psi-3)}{2u^4}-\frac{3\mu XY\sin\psi(5\cos^2\psi-1)}{u^4}$$
$$+\frac{3\mu Y^2\cos\psi(5\sin^2\psi-1)}{2u^4}-\frac{3\mu Z^2\cos\psi}{2u^4}=0$$

§ **39**. Подобным же образом выполним эту подстановку и во второе уравнение, в которое входит член $-\frac{\mu(u\sin\psi-Y)}{v^3}$, который также разбивая по частям получим:

$$-\frac{\mu u\sin\psi}{v^3}=-\frac{\mu\sin\psi}{u^2}+\frac{3\mu X\sin\psi\cos\psi}{u^3}-\frac{3\mu Y\sin^2\psi}{u^3}-\frac{3\mu X^2\sin\psi(5\cos^2\psi-1)}{2u^4}$$
$$+\frac{15\mu XY\sin^2\psi\cos\psi}{u^4}-\frac{3\mu Y^2\sin\psi(5\sin^2\psi-3)}{2u^4}+\frac{3\mu Z^2\sin\psi}{2u^4}$$
$$\frac{\mu Y}{v^3}=\frac{\mu Y}{u^3}-\frac{3\mu XY\cos\psi}{u^4}+\frac{3\mu Y^2\sin\psi}{u^4}$$

так что весь член составит

$$-\frac{\mu(u\sin\psi-Y)}{v^3}=-\frac{\mu\sin\psi}{u^2}+\frac{3\mu X\sin\psi\cos\psi}{u^3}-\frac{\mu Y(3\sin^2\psi-1)}{u^3}$$
$$-\frac{3\mu X^2\sin\psi(5\cos^2\psi-1)}{2u^4}+\frac{3\mu XY\cos\psi(5\sin^2\psi-1)}{u^4}$$
$$-\frac{3\mu Y^2\sin\psi(5\sin^2\psi-3)}{2u^4}+\frac{3\mu Z^2\sin\psi}{2u^4}$$

таким образом получится

Второе уравнение

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+2(m+1)\frac{dX}{dt}-(m+1)^2Y+\nu\frac{Y}{w^3}+\frac{3\mu X\sin\psi\cos\psi}{u^3}-\frac{\mu Y(3\sin^2\psi-1)}{u^3}$$
$$-\frac{3\mu X^2\sin\psi(5\cos^2\psi-1)}{2u^4}+\frac{3\mu XY\cos\psi(5\sin^2\psi-1)}{u^4}$$
$$-\frac{3\mu Y^2\sin\psi(5\sin^2\psi-3)}{2u^4}+\frac{3\mu Z^2\sin\psi}{2u^4}=0$$

§ **40**. Третье уравнение не представляет затруднений, ибо член, содержащий $\frac{1}{v^3}$, есть $\frac{\mu Z}{v^3}$, поэтому будет

Третье уравнение

$$\frac{d^2Z}{dt^2}+\frac{\nu Z}{w^3}+\frac{\mu Z}{u^3}-\frac{3\mu Z(X\cos\psi-Y\sin\psi)}{u^4}=0$$

ГЛАВА VII

Исключение величин u и ψ из предыдущих уравнений

§ **41**. Так как

$$\frac{1}{u^3} = 1 - 3\varkappa \cos t$$

$$\frac{1}{u^4} = 1 - 4\varkappa \cos t$$

$$\sin\psi = -\sin p - 2\varkappa \sin t \cos p; \quad \cos\psi = -\cos p + 2\varkappa \sin t \sin p$$

то подставим эти значения в те отдельные члены наших уравнений, где они встречаются. Таким образом в первом уравнении для члена

$$\frac{-\mu X(3\cos^2\psi - 1)}{u^3}$$

составляем

$$3\cos^2\psi - 1 = 3\cos^2 p - 12\varkappa \sin t \sin p \cos p - 1$$

так что будет

$$\frac{-\mu X(3\cos^2\psi - 1)}{u^3} = -X(3\cos^2 p - 1) + 12\varkappa X \sin t \sin p \cos p$$
$$+ 3\varkappa X \cos t (3\cos^2 p - 1)$$

Для члена $\frac{3\mu Y \sin\psi \cos\psi}{u^3}$ имеем

$$\sin\psi\cos\psi = \sin p \cos p + 2\varkappa \sin t (\cos^2 p - \sin^2 p)$$

так что будет

$$\frac{3\mu Y \sin\psi \cos\psi}{u^3} = 3Y \sin p \cos p + 6\varkappa Y \sin t (\cos^2 p - \sin^2 p) -$$
$$- 9\varkappa Y \cos t \sin p \cos p$$

подобным же образом для члена

$$\frac{3\mu X^2 \cos\psi (5\cos^2\psi - 3)}{2u^4}$$

имеем:

$$5\cos^2\psi - 3 = 5\cos^2 p - 3 - 20\varkappa \sin t \cos p \sin p$$

$$\cos\psi(5\cos^2\psi - 3) = -\cos p(5\cos^2 p - 3) + 6\varkappa \sin t \sin p (5\cos^2 p - 1)$$

так что будет

$$\frac{3\mu X^2 \cos\psi(5\cos^2\psi - 3)}{2u^4} = -\frac{3}{2} X^2 \cos p \cdot (5\cos^2 p - 3)$$
$$+ 9\varkappa X^2 \sin t \sin p (5\cos^2 p - 1)$$
$$+ 6\varkappa X^2 \cos t \cos p (5\cos^2 p - 3)$$

Для члена

$$-\frac{3\mu XY\sin\psi(5\cos^2\psi-1)}{u^4}$$

имеем

$$(5\cos^2\psi-1)\sin\psi=-\sin p(5\cos^2 p-1)$$
$$-2\varkappa\sin t\cos p(5\cos^2 p-10\sin^2 p-1)$$

и, по умножении на

$$-\frac{3\mu XY}{u^4}=-3XY+12\varkappa XY\cos t$$

получим

$$-\frac{3\mu XY\sin\psi(5\cos^2\psi-1)}{u^4}=3XY\sin p(5\cos^2 p-1)$$
$$-12\varkappa XY\cos t\sin p(5\cos^2 p-1)$$
$$+6\varkappa XY\sin t\cos p(5\cos^2 p-10\sin^2 p-1)$$

Затем для члена

$$\frac{3\mu Y^2\cos\psi(5\sin^2\psi-1)}{2u^4}$$

имеем

$$5(\sin^2\psi-1)\cos\psi=-\cos p(5\sin^2 p-1)$$
$$-2\varkappa\sin t\sin p(10\cos^2 p-5\sin^2 p+1)$$

что, по умножении на $\frac{3\mu Y^2}{2u^4}$, дает

$$\frac{3\mu Y^2\cos\psi(5\sin^2\psi-1)}{2u^4}=-\frac{3}{2}Y^2\cos p(5\sin^2 p-1)$$
$$-3\varkappa Y^2\sin t\sin p(10\cos^2 p-5\sin^2 p+1)$$
$$+6\varkappa Y^2\cos t\cos p(5\sin^2 p-1)$$

наконец последний член будет

$$-\frac{\mu Z^2\cos\psi}{2u^2}=\frac{3}{2}Z^2\cos p-3\varkappa Z^2\sin t\sin p-6\varkappa Z^2\cos t\cos p$$

ибо

$$\frac{\cos\psi}{u^4}=-\cos p+2\varkappa\sin t\sin p+4\varkappa\cos t\cos p$$

§ **42**. Члены первого уравнения, таким образом развитые, подразделим на четыре рода, из которых первый содержит те члены, в которых X и Y входят в первой степени и буквы $\varkappa$ не содержат; совокупность членов этого рода обозначим буквою $\mathfrak{A}$. Второй род составляют члены второй степени относительно X, Y, Z, но не содержащие множителя $\varkappa$; сумму их обозначим буквою $\mathfrak{B}$. К третьему роду относим члены первой степени относительно X, Y, Z, содержащие множитель $\varkappa$, их сумму обозначаем буквою $\mathfrak{C}$.

Наконец, четвертый род содержит члены второй степени относительно X, Y, Z, умноженные на $\varkappa^2$, их сумму обозначим буквою $\mathfrak{D}$. Таким образом получаем:

$$\mathfrak{A} = -X(3\cos^2 p - 1) + 3Y\sin p\cos p$$

$$\mathfrak{B} = -\frac{3}{2}X^2\cos p(5\cos^2 p - 3) + 3XY\sin p(5\cos^2 p - 1)$$
$$-\frac{3}{2}Y^2\cos p(5\sin^2 p - 1) + \frac{3}{2}Z^2\cos p$$

$$\mathfrak{C} = +3\varkappa X(4\sin t\sin p\cos p + 3\cos t\cos^2 p - \cos t)$$
$$+3\varkappa Y[2\sin t(\cos^2 p - \sin^2 p) - 3\cos t\sin p\cos p]$$

$$\mathfrak{D} = +3\varkappa X^2[3\sin t\sin p(5\cos^2 p - 1) + 2\cos t\cos p(5\cos^2 p - 3)]$$
$$+6\varkappa XY[\sin t\cos p(5\cos^2 p - 10\sin^2 p - 1) - 2\cos t\sin p(5\cos^2 p - 1)]$$
$$-3\varkappa Y^2[\sin t\sin p(10\cos^2 p - 5\sin^2 p + 1) - 2\cos t\cos p(5\sin^2 p - 1)]$$
$$-3\varkappa Z^2(\sin t\sin p + 2\cos t\cos p)$$

Заметив эти значения, имеем

Первое уравнение

$$\frac{d^2X}{dt^2} - 2(m+1)\frac{dY}{dt} - (m+1)^2 X + \frac{\nu X}{u^3} + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} = 0$$

§ **43**. Подобным же образом поступим и со вторым уравнением, и так как

$$\frac{\sin\psi\cos\psi}{u^3} = \sin p\cos p + 2\varkappa\sin t(\cos^2 p - \sin^2 p) - 3\varkappa\cos t\sin p\cos p$$

то первый член будет

$$\frac{3\mu X\sin\psi\cos\psi}{u^3} = 3X\sin p\cos p + 6\varkappa X\sin t(\cos^2 p - \sin^2 p)$$
$$-9\varkappa X\cos t\sin p\cos p \qquad (1)$$

Для второго члена

$$-\frac{\mu Y(3\sin^2\psi - 1)}{u^3}$$

имеем:

$$3\sin^2\psi - 1 = 3\sin^2 p - 1 + 12\varkappa\sin t\sin p\cos p$$
$$-\frac{\mu Y}{u^3} = -\mu Y + 3\mu\varkappa Y\cos t$$

по перемножении и замене μ через 1 имеем второй член равным

$$-Y(3\sin^2 p - 1) - 12\varkappa Y\sin t\sin p\cos p + 3\varkappa Y\cos t(3\sin^2 p - 1) \quad (2)$$

Для третьего члена

$$-\frac{3\mu}{2}\cdot\frac{X^2\sin\psi(5\cos^2\psi-1)}{u^4}$$

имеем

$$\sin\psi(5\cos^2\psi-1)=-\sin p(5\cos^2 p-1)$$
$$-2\varkappa\sin t\cos p(5\cos^2 p-10\sin^2 p-1)$$

что, по умножении на

$$-\frac{3\mu X^2}{2u^4}=-\frac{3}{2}X^2(1-4\varkappa\cos t)$$

дает такое значение третьего члена:

$$\frac{3}{2}X^2\sin p(5\cos^2 p-1)+3\varkappa X^2\sin t\cos p(5\cos^2 p-10\sin^2 p-1)$$
$$-6\varkappa X^2\cos t\sin p(5\cos^2 p-1) \tag{3}$$

Для четвертого члена

$$+\frac{3\mu XY\cos\psi(5\sin^2\psi-1)}{u^4}$$

имеем

$$\cos\psi(5\sin^2\psi-1)=-\cos p(5\sin^2 p-1)$$
$$-2\varkappa\sin t\sin p(10\cos^2 p-5\sin^2 p+1)$$

и, по умножении на

$$\frac{3\mu XY}{u^4}=3XY(1-4\varkappa\cos t)$$

получаем

$$-3XY\cos p(5\sin^2 p-1)-6\varkappa XY\sin t\sin p(10\cos^2 p-5\sin^2 p+1)$$
$$+12\varkappa XY\cos t\cos p(5\sin^2 p-1) \tag{4}$$

Для пятого члена

$$-\frac{3\mu Y^2\sin\psi(5\sin^2\psi-3)}{2u^4}$$

имеем

$$\sin\psi(5\sin^2\psi-3)=-\sin p(5\sin^2 p-3)-6\varkappa\sin t\cos p(5\sin^2 p-1)$$

что, по умножении на

$$-\frac{3\mu Y^2}{2u^4}=-\frac{3}{2}Y^2(1-4\varkappa\cos t)$$

дает

$$\frac{3}{2}Y^2\sin p(5\sin^2 p-3)+9\varkappa Y^2\sin t\cos p(5\sin^2 p-1)$$
$$-6\varkappa Y^2\cos t\sin p(5\sin^2 p-3) \tag{5}$$

Наконец, для шестого и последнего члена

$$\frac{3\mu Z^2 \sin\psi}{2u^4}$$

имеем

$$\sin\psi = -\sin p - 2\varkappa \sin t \cos p$$

что, по умножении на

$$\frac{3\mu Z^2}{2u^4} = \frac{3}{2} Z^2 (1 - 4\varkappa \cos t)$$

дает

$$-\frac{3}{2} Z^2 \sin p - 3\varkappa Z^2 \sin t \cos p + 6\varkappa Z^2 \cos t \sin p \qquad (6)$$

§ **44**. После того как эти члены развиты, распределяем их подобно предыдущему на четыре рода, которые обозначим буквами A, B, C, D, так что будет:

$$A = 3X \sin p \cos p - Y(3\sin^2 p - 1)$$

$$B = \frac{3}{2} X^2 \sin p (5\cos^2 p - 1) - 3XY \cos p (5\sin^2 p - 1)$$
$$+ \frac{3}{2} Y^2 \sin p (5\sin^2 p - 3) - \frac{3}{2} Z^2 \sin p$$

$$C = 3\varkappa X[2\sin t(\cos^2 p - \sin^2 p) - 3\cos t \sin p \cos p]$$
$$+ 3\varkappa Y[\cos t(3\sin^2 p - 1) - 4\sin t \sin p \cos p]$$

$$D = 3\varkappa X^2[\sin t \cos p(5\cos^2 p - 10\sin^2 p - 1) - 2\cos t \sin p(5\cos^2 p - 1)]$$
$$- 6\varkappa XY[\sin t \sin p(10\cos^2 p - 5\sin^2 p + 1) - 2\cos t \cos p(5\sin^2 p - 1)]$$
$$+ 3\varkappa Y^2[3\sin t \cos p(5\sin^2 p - 1) - 2\cos t \sin p(5\sin^2 p - 3)]$$
$$+ 3\varkappa Z^2(2\cos t \sin p - \sin t \cos p)$$

Заметив эти выражения, имеем

Второе уравнение

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + 2(m+1)\frac{dX}{dt} - (m+1)^2 Y + \frac{\nu Y}{w^3} + A + B + C + D = 0$$

§ **45**. Для подобного же преобразования третьего уравнения, сразу имеем, что первый член

$$\frac{\mu Z}{u^3} = Z - 3\varkappa Z \cos t \qquad (1)$$

Для второго члена

$$-\frac{3\mu XZ\cos\psi}{u^4}$$

имеем:

$$\cos\psi = -\cos p + 2\varkappa \sin t \sin p$$

$$-\frac{3\mu XZ}{u^4} = -3XZ(1 - 4\varkappa\cos t)$$

и, по перемножении, получаем

$$3XZ\cos p - 6\varkappa XZ\sin t\sin p - 12\varkappa XZ\cos t\cos p \tag{2}$$

наконец третий член

$$\frac{3\mu YZ\sin\psi}{u^4}$$

получается перемножив выражения:

$$\sin\psi = -\sin p - 2\varkappa\sin t\cos p$$

$$\frac{3\mu YZ}{u^4} = 3YZ(1 - 4\varkappa\cos t)$$

что дает

$$-3YZ\sin p - 6\varkappa YZ\sin t\cos p + 12\varkappa YZ\cos t\sin p \tag{3}$$

§ **46.** Распределив эти члены на четыре рода, обозначенные буквами $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, так что

$$\mathfrak{a} = Z$$

$$\mathfrak{b} = 3XZ\cos p - 3YZ\sin p$$

$$\mathfrak{c} = -3\varkappa Z\cos t$$

$$\mathfrak{d} = -6\varkappa XZ(\sin t\sin p + 2\cos t\cos p) - 6\varkappa YZ(\sin t\cos p - 2\cos t\sin p)$$

и заметив эти выражения, имеем

Третье уравнение

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{\nu Z}{w^3} + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = 0$$

ГЛАВА VIII

Приведение предыдущих формул к синусам и косинусам первой степени

§ **47.** Чтобы привести предыдущие выражения к синусам и косинусам *первой степени*, заметим следующие известные формулы:

$$\sin^2 p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2p$$

$$\sin p \cos p = \frac{1}{2}\sin 2p$$

$$\cos^2 p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2p$$

$$\sin^3 p = \frac{3}{4}\sin p - \frac{1}{4}\sin 3p$$

$$\sin^2 p \cos p = \frac{1}{4}\cos p - \frac{1}{4}\cos 3p$$

$$\sin p \cos^2 p = \frac{1}{4}\sin p + \frac{1}{4}\sin 3p$$

$$\cos^3 p = \frac{3}{4}\cos p + \frac{1}{4}\cos 3p$$

а кроме того, и следующие:

$$\sin t \sin P = \frac{1}{2}\cos(P-t) - \frac{1}{2}\cos(P+t)$$

$$\sin t \cos P = -\frac{1}{2}\sin(P-t) + \frac{1}{2}\sin(P+t)$$

$$\cos t \sin P = \frac{1}{2}\sin(P-t) + \frac{1}{2}\sin(P+t)$$

$$\cos t \cos P = \frac{1}{2}\cos(P-t) + \frac{1}{2}\cos(P+t)$$

§§ **48—56.** Пользуясь этими выражениями, последовательно преобразуются величины $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, причем эти преобразования приведены у Эйлера с полною подробностью, но так как они никаких затруднений не представляют, то для краткости мы помещаем лишь окончательные результаты, а именно:

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{2}X(1+3\cos 2p)+\frac{3}{2}Y\sin 2p$$

$$\mathfrak{B} = -\frac{3}{8}X^2(3\cos p+5\cos 3p)+\frac{3}{4}XY(\sin p+5\sin 3p)$$
$$-\frac{3}{8}Y^2(\cos p-5\cos 3p)+\frac{3}{2}Z^2\cos p$$

$$\mathfrak{C} = \frac{3}{4}\varkappa X[2\cos t+7\cos(2p-t)-\cos(2p+t)]$$
$$-\frac{3}{4}\varkappa Y[7\sin(2p-t)-\sin(2p+t)]$$

$$\mathfrak{D} = \frac{3}{8}\varkappa X^2[9\cos(p-t)+25\cos(3p-t)+3\cos(p+t)-5\cos(3p+t)]$$
$$-\frac{3}{4}\varkappa XY[3\sin(p-t)+25\sin(3p-t)+\sin(p+t)-5\sin(3p+t)]$$
$$+\frac{3}{8}\varkappa Y^2[3\cos(p-t)-25\cos(3p-t)+\cos(p+t)+5\cos(3p+t)]$$
$$-\frac{3}{2}\varkappa Z^2[3\cos(p-t)+\cos(p+t)]$$

$$A = +\frac{3}{2}X\sin 2p-\frac{1}{2}Y(1-3\cos 2p)$$

$$B = \frac{3}{8}X^2(\sin p+5\sin 3p)-\frac{3}{4}XY(\cos p-5\cos 3p)$$
$$+\frac{3}{8}Y^2(3\sin p-5\sin 3p)-\frac{3}{2}Z^2\sin p$$

$$C = -\frac{3}{4}\varkappa X[7\sin(2p-t)-\sin(2p+t)]$$
$$+\frac{3}{4}\varkappa Y[2\cos t-7\cos(2p-t)+\cos(2p+t)]$$

$$D = -\frac{3}{8}\varkappa X^2[3\sin(p-t)+25\sin(3p-t)+\sin(p+t)-5\sin(3p+t)]$$
$$+\frac{3}{4}\varkappa XY[3\cos(p-t)-25\cos(3p-t)+\cos(p+t)+5\cos(3p+t)]$$
$$-\frac{3}{8}\varkappa Y^2[9\sin(p-t)-25\sin(3p-t)+3\sin(p+t)+5\sin(3p+t)]$$
$$+\frac{3}{2}\varkappa Z^2[3\sin(p-t)+\sin(p+t)]$$

$$\mathfrak{a} = Z$$
$$\mathfrak{b} = 3XZ\cos p-3YZ\sin p$$
$$\mathfrak{c} = -3\varkappa Z\cos t$$
$$\mathfrak{d} = -3\varkappa XZ[3\cos(p-t)+\cos(p+t)]+3\varkappa YZ[3\sin(p-t)+\sin(p+t)]$$

§ 57. Три наши уравнения приведены выше в §§ 42, 44 и 46, надо теперь в них под буквами $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ разуметь значения, показанные в этой главе.

ГЛАВА IX

Приведение трех наших уравнений к трем другим более удобным координатам

§ 58. Так как среднее расстояние от Земли до Солнца принято за единицу, то положим среднее расстояние от Луны до Земли равным a, тогда $1:a$ представит отношение параллакса Луны к параллаксу Солнца, откуда следует, что a приблизительно равно $\frac{1}{390}$. При таких условиях нетрудно видеть, что все три координаты, которыми определяется место Луны, выгодно выразить через a.

§ 59. Что касается первой из этих координат $\Theta x = X$, то среднее ее значение приблизительно равно a, будучи то больше, то меньше этой величины; остальные же две координаты Y и Z принимают то положительные, то отрицательные значения, поэтому полагаем:

$$X = a(1 + x); \quad Y = ay; \quad Z = az;$$

таким образом мы в дальнейшем будем рассматривать отвлеченные числа x, y, z как координаты Луны, причем они не только малы по сравнению с 1, представляющей расстояние от Земли до Солнца, но и по сравнению с a, каковое обстоятельство весьма важно для последующих приближений. Кроме того, обратим внимание, что введенные здесь величины x, y, z не следует смешивать с теми, которые были обозначены этими же буквами в одной из предыдущих глав.

§ 60. На основании указанной подстановки, будет:

$$dX = a\,dx; \quad d^2X = a\,d^2x$$

поэтому все те члены наших уравнений, в которые буквы X, Y, Z входят в первой степени, получат после подстановки множитель a; это относится также до выражений, обозначенных буквами $\mathfrak{A}$, A, $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{C}$, C, $\mathfrak{c}$, выражения же $\mathfrak{B}$, B, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{D}$, D и $\mathfrak{d}$ получат множитель a^2.

§ 61. После подстановки будет

$$w^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = a^2\left[(1 + x)^2 + y^2 + z^2\right]$$

значит

$$w^3 = a^3\left[(1 + x)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}$$

Так как ν есть весьма малая дробь, то положим

$$\frac{\nu}{a^3} = \lambda$$

оказывается, что приблизительно $\lambda = 180$. Заметив это, имеем:

$$\frac{\nu X}{w^3} = \frac{\lambda a (1 + x)}{[(1 + x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$\frac{\nu Y}{w^3} = \frac{\lambda a y}{[(1 + x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$\frac{\nu Z}{w^3} = \frac{\lambda a z}{[(1 + x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

§ **62.** На основании этого, наши уравнения, по разделении на a, примут следующий вид:

Первое уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2(m+1)\frac{dy}{dt} - (m+1)^2(1+x) + \frac{\lambda(1+x)}{[(1+x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$
$$+ \frac{\mathfrak{A}}{a} + \frac{\mathfrak{B}}{a} + \frac{\mathfrak{C}}{a} + \frac{\mathfrak{D}}{a} = 0$$

Второе уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2(m+1)\frac{dx}{dt} - (m+1)^2 y + \frac{\lambda y}{[(1+x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$
$$+ \frac{A}{a} + \frac{B}{a} + \frac{C}{a} + \frac{D}{a} = 0$$

Третье уравнение

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\lambda z}{[(1+x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{\mathfrak{a}}{a} + \frac{\mathfrak{b}}{a} + \frac{\mathfrak{c}}{a} + \frac{\mathfrak{d}}{a} = 0$$

Это и суть те три основных уравнения, из которых надо определить движение Луны.

§§ **63—65.** Выполним ту же подстановку в выражениях $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots \mathfrak{d}$, расположим их затем по степеням величин x, y, z, тогда, отделив для ясности запятыми члены разных порядков, получим:

$$\frac{\mathfrak{A}}{a} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos 2p, \quad -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x\cos 2p + \frac{3}{2}y\sin 2p$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{a} = -\frac{3}{8}a(\cos p + 5\cos 3p),$$
$$-\frac{3}{4}ax(3\cos p + 5\cos 3p) + \frac{3}{4}ay(\sin p + 5\sin 3p),$$
$$-\frac{3}{8}ax^2(3\cos p + 5\cos 3p) + \frac{3}{4}axy(\sin p + 5\sin 3p)$$
$$-\frac{3}{8}ay^2(\cos p - 5\cos 3p) + \frac{3}{2}az^2\cos p$$

$$\frac{\mathfrak{C}}{a} = +\frac{3}{4}\varkappa[2\cos t + 7\cos(2p - t) - \cos(2p + t)],$$
$$+\frac{3}{4}\varkappa x[2\cos t + 7\cos(2p - t) - \cos(2p + t)]$$
$$-\frac{3}{4}\varkappa y[7\sin(2p - t) - \sin(2p + t)]$$

$$\frac{\mathfrak{D}}{a} = \frac{3}{8}a\varkappa[9\cos(p - t) + 25\cos(3p - t) + 3\cos(p + t) - 5\cos(3p + t)],$$
$$+\frac{3}{4}a\varkappa x[9\cos(p - t) + 25\cos(3p - t) + 3\cos(p + t) - 5\cos(3p + t)]$$
$$-\frac{3}{4}a\varkappa y[3\sin(p - t) + 25\sin(3p - t) + \sin(p + t) - 5\sin(3p + t)],$$
$$+\frac{3}{8}a\varkappa x^2[9\cos(p - t) + 25\cos(3p - t) + 3\cos(p + t) - 5\cos(3p + t)]$$
$$-\frac{3}{4}a\varkappa xy[3\sin(p - t) + 25\sin(3p - t) + \sin(p + t) - 5\sin(3p + t)]$$
$$+\frac{3}{8}a\varkappa y^2[3\cos(p - t) - 25\cos(3p - t) + \cos(p + t) + 5\cos(3p + t)]$$
$$-\frac{3}{8}a\varkappa z^2[3\cos(p - t) + \cos(p + t)]$$

$$\frac{A}{a} = +\frac{3}{2}\sin 2p, \quad +\frac{3}{2}x\sin 2p - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}y\cos 2p$$

$$\frac{B}{a} = \frac{3}{8}a(\sin p + 5\sin 3p),$$
$$+\frac{3}{4}ax(\sin p + 5\sin 3p) - \frac{3}{4}ay(\cos p - 5\cos 3p),$$
$$+\frac{3}{8}ax^2(\sin p + 5\sin 3p) - \frac{3}{4}axy(\cos p - 5\cos 3p)$$
$$+\frac{3}{8}ay^2(3\sin p - 5\sin 3p) - \frac{3}{8}az^2\sin p$$

$$\frac{C}{a} = -\frac{3}{4}\varkappa[7\sin(2p - t) - \sin(2p + t)],$$
$$-\frac{3}{4}\varkappa x[7\sin(2p - t) - \sin(2p + t)]$$
$$+\frac{3}{4}\varkappa y[2\cos t - 7\cos(2p - t) + \cos(2p + t)]$$

$$\frac{D}{a} = -\frac{3}{8}a\varkappa[3\sin(p-t)+25\sin(3p-t)+\sin(p+t)-5\sin(3p+t)],$$
$$-\frac{3}{4}a\varkappa x[3\sin(p-t)+25\sin(3p-t)+\sin(p+t)-5\sin(3p+t)]$$
$$+\frac{3}{4}a\varkappa y[3\cos(p-t)-25\cos(3p-t)+\cos(p+t)+5\cos(3p+t)],$$
$$-\frac{3}{8}a\varkappa x^2[3\sin(p-t)+25\sin(3p-t)+\sin(p+t)-5\sin(3p+t)]$$
$$+\frac{3}{4}a\varkappa xy[3\cos(p-t)-25\cos(3p-t)+\cos(p+t)+5\cos(3p+t)]$$
$$-\frac{3}{8}a\varkappa y^2[9\sin(p-t)-25\sin(3p-t)+3\sin(p+t)+5\sin(3p+t)]$$
$$+\frac{3}{2}a\varkappa z^2[3\sin(p-t)+\sin(p+t)]$$

$$\frac{\mathfrak{a}}{a} = z$$
$$\frac{\mathfrak{b}}{a} = 3az\cos p, \; +3axz\cos p - 3ayz\sin p$$
$$\frac{\mathfrak{c}}{a} = -3\varkappa z\cos t$$
$$\frac{\mathfrak{d}}{a} = -3a\varkappa z[3\cos(p-t)+\cos(p+t)],$$
$$-3a\varkappa xz[3\cos(p-t)+\cos(p+t)]+3a\varkappa yz[3\sin(p-t)+\sin(p+t)]$$

§ **66.** Было весьма важно расположить в этих выражениях члены по степеням букв x, y, z, ибо значения этих букв весьма малы по сравнению с единицею, поэтому здесь виднее, какие члены малы по сравнению с прочими. Отсюда ясно, что первые члены $\frac{\mathfrak{A}}{a}$, $\frac{A}{a}$ и $\frac{\mathfrak{a}}{a}$ больше остальных, ибо величины a и $\varkappa$ весьма малые; вместе с тем отсюда следует, что последние члены выражений $\frac{\mathfrak{D}}{a}$, $\frac{D}{a}$ и $\frac{\mathfrak{d}}{a}$ много меньше прочих и ими можно без всякой погрешности пренебречь.

ГЛАВА X

Развитие членов, содержащих делитель w^3, иначе членов, содержащих множитель λ

§ **67.** Так как числа x, y, z весьма малые по сравнению с единицею, то выгодно разложить иррациональное выражение

$$[(1+x)^2+y^2+z^2]^{-3/2}$$

в ряд, который будет весьма быстро сходящимся; чтобы это проще выполнить, не будем сперва разлагать члена $(1+x)^2$, по сравнению с которым величина y^2+z^2 малая, таким образом получим

$$[(1+x)^2+y^2+z^2]^{-3/2}=\frac{1}{(1+x)^3}-\frac{3}{2}\frac{y^2+z^2}{(1+x)^5}+$$
$$+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{(y^2+z^2)^2}{(1+x)^7}-\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{(y^2+z^2)^3}{(1+x)^9}$$

Более чем достаточно доводить этот ряд лишь до шестых степеней y и z, ибо, как дальше окажется, даже шестые степени не нужны.

§ **68**. Выполнив это разложение, имеем затем для знаменателей следующие разложения:

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+7x^6$$

$$\frac{1}{(1+x)^3}=1-3x+6x^2-10x^3+15x^4-21x^5$$

$$\frac{1}{(1+x)^4}=1-4x+10x^2-20x^3+35x^4$$

$$\frac{1}{(1+x)^5}=1-5x+15x^2-35x^3$$

$$\frac{1}{(1+x)^6}=1-6x+21x^2$$

$$\frac{1}{(1+x)^7}=1-7x$$

$$\frac{1}{(1+x)^9}=1$$

§ **69**. В нашем первом уравнении содержится член

$$\frac{\lambda(1+x)}{[(1+x)^2+y^2+z^2]^{3/2}}$$

имеем

$$\frac{1+x}{[(1+x)^2+y^2+z^2]^{3/2}}=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{3}{2}\frac{y^2+z^2}{(1+x)^4}+$$
$$+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{(y^2+z^2)^2}{(1+x)^6}-\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{(y^2+z^2)^3}{(1+x)^8}$$

развивая каждый из членов правой части в отдельности по степеням x, y, z, имеем:

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+7x^6$$

$$-\frac{3}{2}\cdot\frac{y^2+z^2}{(1+x)^4}=-\frac{3}{2}(y^2+z^2)+6x(y^2+z^2)-15x^2(y^2+z^2)$$
$$+30x^3(y^2+z^2)-\frac{105}{2}x^4(y^2+z^2)$$

$$+\frac{15}{8}\cdot\frac{(y^2+z^2)^2}{(1+x)^6}=+\frac{15}{8}(y^2+z^2)^2-\frac{45}{4}x(y^2+z^2)^2+\frac{315}{8}x^2(y^2+z^2)^2$$

$$-\frac{35}{16}\cdot\frac{(y^2+z^2)^3}{(1+x)^8}=-\frac{35}{16}(y^2+z^2)^3$$

следовательно этот член, располагая его по степеням букв x, y, z, будет[1]

$$\lambda,\quad -2\lambda x,\quad +3\lambda x^2-\frac{3}{2}\lambda(y^2+z^2),\quad -4\lambda x^3+6\lambda x(y^2+z^2),$$
$$+5\lambda x^4-15\lambda x^2(y^2+z^2)+\frac{15}{8}\lambda(y^2+z^2)^2,$$
$$-6\lambda x^5+30\lambda x^3(y^2+z^2)-\frac{45}{4}\lambda x(y^2+z^2)^2,$$
$$+7\lambda x^6-\frac{105}{2}\lambda x^4(y^2+z^2)+\frac{315}{8}\lambda x^2(y^2+z^2)^2-\frac{35}{16}\lambda(y^2+z^2)^3$$

§§ **70—72**. Развив подобным же образом все члены, входящие во второе и в третье уравнения, подставляем полученные разложения в основные уравнения, которые тогда, при расположении членов по их порядкам, получают следующий вид:

Первое уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2(m+1)\frac{dy}{dt},\quad +\left(\lambda-m^2-2m-\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}\cos 2p,$$
$$-\left(2\lambda+m^2+2m+\frac{3}{2}\right)x-\frac{3}{2}x\cos 2p+\frac{3}{2}y\sin 2p,$$
$$+3\lambda x^2-\frac{3}{2}\lambda(y^2+z^2),\quad -4\lambda x^3+6\lambda x(y^2+z^2),$$
$$+5\lambda x^4-15\lambda x^2(y^2+z^2)+\frac{15}{8}\lambda(y^2+z^2)^2,\quad -6\lambda x^5+30\lambda x^3(y^2+z^2)$$
$$-\frac{45}{4}\lambda x(y^2+z^2)^2,\quad +7\lambda x^6-\frac{105}{2}\lambda x^4(y^2+z^2)+\frac{315}{8}\lambda x^2(y^2+z^2)^2$$
$$-\frac{35}{16}\lambda(y^2+z^2)^3,\quad +\frac{\mathfrak{B}}{a}+\frac{\mathfrak{C}}{a}+\frac{\mathfrak{D}}{a}=0$$

член же $\frac{\mathfrak{A}}{a}$ вошел в состав написанных выше.

[1] В последнем члене у Эйлера пропущен множитель λ. Этот пропуск повторяется и в дальнейшем в основном уравнении первом. На результаты это влияния не оказало, ибо затем члены шестого порядка отброшены.

Второе уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2(m+1)\frac{dx}{dt}, \quad + \frac{3}{2}\sin 2p, \quad + \left(\lambda - m^2 - 2m - \frac{3}{2}\right) y$$
$$+ \frac{3}{2} x \sin 2p + \frac{3}{2} y \cos 2p,$$
$$- 3\lambda xy, \quad + 6\lambda x^2 y - \frac{3}{2}\lambda y(y^2 + z^2), \quad - 10\lambda x^3 y + \frac{15}{2}\lambda xy(y^2 + z^2),$$
$$+ 15\lambda x^4 y - \frac{45}{2}\lambda x^2 y(y^2 + z^2) + \frac{15}{8}\lambda y(y^2 + z^2)^2,$$
$$- 21\lambda x^5 y + \frac{105}{2}\lambda x^3 y(y^2 + z^2) - \frac{105}{8}\lambda xy(y^2 + z^2)^2,$$
$$+ \frac{B}{a} + \frac{C}{a} + \frac{D}{a} = 0$$

Третье уравнение

$$\frac{d^2z}{dt^2}, \quad + (\lambda + 1) z, \quad - 3\lambda xz, \quad + 6\lambda x^2 z - \frac{3}{2}\lambda z(y^2 + z^2), \quad - 10\lambda x^3 z$$
$$+ \frac{15}{2}\lambda xz(y^2 + z^2), \quad + 15\lambda x^4 z - \frac{45}{2}\lambda x^2 z(y^2 + z^2) +$$
$$+ \frac{15}{8}\lambda z(y^2 + z^2)^2,$$
$$- 21\lambda x^5 z + \frac{105}{2}\lambda x^3 z(y^2 + z^2) - \frac{105}{8}\lambda xz(y^2 + z^2)^2 +$$
$$+ \frac{\mathfrak{b}}{a} + \frac{\mathfrak{c}}{a} + \frac{\mathfrak{d}}{a} = 0$$

причем члены разных порядков отделены запятыми.

ГЛАВА XI

Определение значения буквы λ, введенной в наши уравнения

§ **73**. Хотя в § 25 положено

$$\lambda = \frac{\nu}{a^3} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{\Theta}{S + \Theta}$$

и последняя дробь имеет некоторое вполне определенное значение, но это значение не иначе может быть найдено, как на основании наблюдений, тем более, что самое отношение массы Θ к S определяется по значению ν, находимому также на основании наблюдений. Необходимо заметить, что S обозначает массу Солнца, Θ — сумму масс Земли и Луны.

§ **74**. Что касается величины a, которую мы принимаем за среднее расстояние от Земли до Солнца, почему мы и положили $X = a(1 + x)$, то легко видеть, что эта величина сама по себе определенного значения не имеет, а зависит от нашего произвола, ибо нет необходимости приписывать величине a значение, в точности равное средней арифметической между наибольшим и наименьшим значениями X. Если значение a немного отличается от сказанной средней, то это отнюдь не нарушает результата наших вычислений, ибо соответственно приписанному букве a значению получаются и значения величины x. Таким образом мы можем по желанию принять для a значение или немногим бо́льшее, или немногим меньшее указанной средней арифметической. Отсюда видно, что и величина λ зависит от нашего выбора, лишь бы она не выходила из некоторых определенных границ.

§ **75**. Вскоре нам потребуется выразить величину x рядом косинусов некоторых углов, причем вторая координата y представляется подобным же рядом синусов, ибо синусы и косинусы принимают то положительные, то отрицательные значения и через них значения величин x и y всего удобнее выражаются. Если бы величина x, помимо сказанных косинусов, содержала бы еще какую-нибудь постоянную, то, как легко видеть, ее положительные значения были бы или больше, или меньше отрицательных, поэтому надо всячески стараться, чтобы такая постоянная или совершенно исчезала, или же была весьма малой.

§ **76**. Если мы примем, что величина x выражается рядом косинусов, y — подобным же рядом синусов углов, пропорциональных времени, то очевидно, что в первом нашем уравнении член $\frac{d^2x}{dt^2}$ будет выражаться только через косинусы, так же выразится и член $\frac{dy}{dt}$, от других же членов, в которых x и y содержатся во второй и в высших степенях, при развитии их могут произойти и постоянные количества, но они будут весьма малыми, ибо самые те члены весьма малы. В первом нашем уравнении содержится еще член

$$\lambda - m^2 - 2m - \frac{3}{2}$$

ясно, что если он не будет весьма малым, то наше уравнение не может иметь места, а так как величиною λ мы можем распорядиться по желанию, то следует положить

$$\lambda - m^2 - 2m - \frac{3}{2} = 0$$

откуда следует

$$\lambda = m^2 + 2m + \frac{3}{2} = (m+1)^2 + \frac{1}{2}$$

При таком выборе мы можем быть уверены, что в величине x или совершенно не будет содержаться постоянного члена, или же он будет весьма малый.

§ **77**. Поэтому во всем дальнейшем мы полагаем, что

$$\lambda = (m+1)^2 + \frac{1}{2}$$

и прежде всего необходимо определить численное его значение. Выше мы положили, что

$$m = \frac{dp}{dt}$$

поэтому величина $1:m$ представляет отношение средней аномалии Солнца к среднему движению Луны от Солнца, совершаемому в течение того же времени. Возьмем за это время обыкновенный год в 365 дней; по таблицам движения Солнца находим, что изменение аномалии Солнца в течение этого времени составляет $359°44'39''$; придав к этому перемещение апогея, равное $1'1''$, получим среднее движение Солнца за указанное время равным

$$359°45'40''$$

Истинное же движение Луны за это время составляет

$$360°.13 + (129°23'3'')$$

следовательно движение ее, считаемое от Солнца, есть

$$360°.12 + (129°37'23'')$$

значит будет

$$m = \frac{16018643''}{1295079} = 12.368854$$

следовательно:

$$m+1=13.36885$$

$$(m+1)^2=178.7263$$

$$\lambda=(m+1)^2+\frac{1}{2}=179.2263$$

§ 78. Однако относительно этого определения необходимо заметить, что величина $m+1$, от которой λ, главным образом, зависит, здесь обозначает $\frac{d\omega}{dt}$, где ω есть средняя долгота Луны, а так как среднее годовое движение Луны составляет

$$360^{\circ}.13+(129^{\circ}23'3'')$$

то эта величина, по разделении на среднее годовое изменение аномалии Солнца, равное

$$359^{\circ}44'39''$$

доставляет для $m+1$ значение

$$m+1=13.368903$$

которому соответствует

$$\lambda=(m+1)^2+\frac{1}{2}=179.228928$$

Этим значением мы и будем в дальнейшем пользоваться.

§ 79. Установив таким образом значение величины λ, мы можем написать три наши уравнения в совершенно развитом виде, причем в первом уравнении член, содержащий x, мы отнесем к первым двум членам, содержащим производные, что, как впоследствии окажется, делается ради интегрирования или действий, ему равнозначных, прочие же члены мы расположим по их порядкам, присовокупив к ним и члены, умноженные на a, $\varkappa$ и $a\varkappa$. В дальнейшем мы увидим, что оказывается весьма выгодным, что во втором уравнении члена с y в первой степени не содержится.

Таким образом наши уравнения будут:

Первое уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{2(m+1)\,dy}{dt}-3\lambda x, \quad -\frac{3}{2}\cos 2p, \quad -\frac{3}{2}x\cos 2p+\frac{3}{2}y\sin 2p,$$

$$+3\lambda x^2-\frac{3}{2}\lambda(y^2+z^2), \quad -4\lambda x^3+6\lambda x(y^2+z^2),$$

$$+5\lambda x^4-15\cdot\lambda x^2(y^2+z^2)+\frac{15}{8}\lambda(y^2+z^2)^2,$$

$$-6\lambda x^5+30\cdot\lambda x^3(y^2+z^2)-\frac{45}{4}\lambda x(y^2+z^2)^2,$$

$$+7\lambda x^6-\frac{105}{2}\lambda x^4(y^2+z^2)+\frac{315}{8}\lambda x^2(y^2+z^2)^2-\frac{35}{16}\lambda(y^2+z^2)^2,$$

$$-\frac{3}{8}a(3\cos p+5\cos 3p),$$

$$-\frac{3}{4}ax(3\cos p+5\cos 3p)+\frac{3}{4}ay(\sin p+5\sin 3p),$$

$$-\frac{3}{8}ax^2(3\cos p+5\cos 3p)+\frac{3}{4}axy(\sin p+5\sin 3p)$$

$$-\frac{3}{8}ay^2(\cos p-5\cos 3p)+\frac{3}{2}az^2\cos p,$$

$$+\frac{3}{4}\varkappa[2\cos t+7\cos(2p-t)-\cos(2p+t)]$$

$$+\frac{3}{4}\varkappa x[2\cos t+7\cos(2p-t)-\cos(2p+t)]$$

$$-\frac{3}{4}\varkappa y[7\sin(2p-t)-\sin(2p+t)]$$

$$+\frac{3}{8}a\varkappa[9\cos(p-t)+3\cos(p+t)+25\cos(3p-t)-5\cos(3p+t)]$$

$$+\frac{3}{4}a\varkappa x[9\cos(p-t)+3\cos(p+t)+25\cos(3p-t)-5\cos(3p+t)]$$

$$-\frac{3}{4}a\varkappa y[3\sin(p-t)+\sin(p+t)+25\sin(3p-t)-5\sin(3p+t)],$$

$$+\frac{3}{8}a\varkappa x^2[9\cos(p-t)+3\cos(p+t)+25\cos(3p-t)-5\cos(3p+t)]$$

$$-\frac{3}{4}a\varkappa xy[3\sin(p-t)+\sin(p+t)+25\sin(3p-t)-5\sin(3p+t)]$$

$$+\frac{3}{8}a\varkappa y^2[3\cos(p-t)+\cos(p+t)-25\cos(3p-t)+5\cos(3p+t)]$$

$$-\frac{3}{4}a\varkappa z^2[3\cos(p-t)+\cos(p+t)]=0$$

Второе уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2(m+1)\,dx}{dt}, \qquad +\frac{3}{2}\sin 2p, \qquad +\frac{3}{2}x\sin 2p+\frac{3}{2}y\cos 2p,$$

$$-3\lambda xy, \qquad +6\lambda x^2y-\frac{3}{2}\lambda y(y^2+z^2),$$

$$-10\lambda x^3y+\frac{15}{2}\lambda xy(y^2+z^2),$$

$$+15\lambda x^4y-\frac{45}{2}\lambda x^2y(y^2+z^2)+\frac{15}{8}\lambda y(y^2+z^2)^2,$$

$$-21\cdot\lambda x^5y+\frac{105}{2}\lambda x^3y(y^2+z^2)-\frac{105}{8}\lambda xy(y^2+z^2)^2,$$

$$+\frac{3}{8}a(\sin p+5\sin 3p),$$

$$+\frac{3}{4}ax(\sin p+5\sin 3p)-\frac{3}{4}ay(\cos p-5\cos 3p),$$

$$+\frac{3}{8}ax^2(\sin p+5\sin 3p)-\frac{3}{4}axy(\cos p-5\cos 3p)$$

$$+\frac{3}{8}ay^2(3\sin p-5\sin 3p)-\frac{3}{2}az^2\sin p,$$

$$-\frac{3}{4}\varkappa[7\sin(2p-t)-\sin(2p+t)]$$

$$-\frac{3}{4}\varkappa x[7\sin(2p-t)-\sin(2p+t)]$$

$$+\frac{3}{4}\varkappa y[2\cos t-7\cos(2p-t)+\cos(2p+t)],$$

$$-\frac{3}{8}a\varkappa[3\sin(p-t)+\sin(p+t)+25\sin(3p-t)-5\sin(3p+t)],$$

$$-\frac{3}{4}a\varkappa x[2\sin(p-t)+\sin(p+t)+25\sin(3p-t)-5\sin(3p+t)]$$

$$+\frac{3}{4}a\varkappa y[3\cos(p-t)+\cos(p+t)-25\cos(3p-t)+5\cos(3p+t)]$$

$$-\frac{3}{8}a\varkappa x^2[3\sin(p-t)+\sin(p+t)+25\sin(3p-t)-5\sin(3p+t)]$$

$$+\frac{3}{4}a\varkappa xy[3\cos(p-t)+\cos(p+t)-25\cos(3p-t)+5\cos(3p+t)]$$

$$-\frac{3}{8}a\varkappa y^2[9\sin(p-t)+3\sin(p+t)-25\sin(3p-t)+5\sin(3p+t)]$$

$$+\frac{3}{2}a\varkappa z^2[3\sin(p-t)+\sin(p+t)]=0$$

Третье уравнение

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (\lambda + 1)z,$$

$$- 3\lambda xz + 6\lambda x^2 z - \frac{3}{2}\lambda z(y^2 + z^2) - 10\lambda x^3 z + \frac{15}{2}\lambda xz(y^2 + z^2),$$

$$+ 15\lambda x^4 z - \frac{45}{2}\lambda x^2 z(y^2 + z^2) + \frac{15}{8}\lambda z(y^2 + z^2)^2,$$

$$- 21\lambda x^2 z + \frac{105}{2}\lambda x^3 z(y^2 + z^2) - \frac{105}{8}\lambda xz(y^2 + z^2)^2,$$

$$+ 3az\cos p, \quad + 3axz\cos p - 3ayz\sin p,$$

$$- 2\varkappa z\cos t, \quad - 3a\varkappa z[3\cos(p - t) + \cos(p + t)],$$

$$- 3a\varkappa xz[3\cos(p - t) + \cos(p + t)]$$

$$+ 3a\varkappa yz[3\sin(p - t) + \sin(p + t)] = 0$$

ГЛАВА XII

Общие правила решения наших уравнений

§ **80**. Мы уже указали, что величина x выражается рядом косинусов некоторых углов, величина же y — рядом синусов этих углов. Причина этого заключается в том, что в первом уравнении члены, не содержащие неизвестных, содержат лишь косинусы углов:

$$2p, \ p, \ 3p, \ t, \ 2p \mp t, \ p \mp t, \ 3p \mp t$$

тогда как во втором уравнении содержатся синусы этих же углов. Отсюда необходимо, чтобы x содержало только косинусы и y — только синусы этих углов. Кроме того, видно, что от весьма сложных членов обоих уравнений, при перемножении синусов и косинусов, произойдут углы, составленные из предыдущих сложением или вычитанием, и притом в первом уравнении их косинусы, во втором — синусы. Поэтому необходимо, чтобы величина x содержала также и косинусы всех этих углов, величина y — их синусы, откуда, при дальнейших комбинациях, произойдут новые углы, которых косинусы должны входить в состав величины x, синусы — в состав y, так что число этих углов может простираться до бесконечности.

§ **81**. Чтобы это яснее показать, надо сперва в обоих уравнениях, т. е. в первом и во втором, выделить главные части, а именно для первого уравнения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2(m + 1)\frac{dy}{dt} - 3\lambda x$$

и во втором уравнении:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2(m+1)\frac{dx}{dt}$$

все же остальные члены надо рассматривать как часть добавочную или присоединенную. Главные части в наших уравнениях отделены от прочих запятыми.

§ **82**. Как уже сказано, в присоединенных членах, в которых наши координаты разнообразным образом между собою сочетаются, появляются новые углы, которые надо вводить затем в выражения x и y. Пусть, при указанном развитии, в первом уравнении появился член $\mathfrak{M}\cos\omega$, причем $\mathfrak{M}$ есть постоянное число, ω — какой-либо угол, изменяющийся пропорционально времени, как это всегда будет, и пусть

$$\frac{d\omega}{dt} = \mu$$

тогда, при развитии второго уравнения, в нем появится член $M\sin\omega$, у которого коэффициент M также постоянный. В этом случае очевидно, что в выражениях x и y должны войти подобные же члены, ибо иначе сказанные члены в добавочной части уравнений не будут уничтожаться первыми, как того требует самая природа уравнений.

§ **83**. Таким образом положим, что в выражение x вводится член $\mathfrak{N}\cos\omega$ и в выражение y — член $N\sin\omega$, тогда возникает весьма важный вопрос, каким способом по данным членам $\mathfrak{M}\cos\omega$ и $N\sin\omega$, содержащимся в добавочных частях уравнений, определить члены $\mathfrak{N}\cos\omega$ и $N\sin\omega$, входящие в самые выражения x и y. Этот вопрос легко разрешается следующим образом: надо подставить величины $\mathfrak{N}\cos\omega$ и $N\sin\omega$ в главные части обоих уравнений вместо x и y, получаемые члены и должны уничтожить те, которые содержатся в добавочных частях.

Полагая

$$x = \mathfrak{N}\cos\omega; \quad y = N\sin\omega; \quad d\omega = \mu\, dt$$

имеем:

$$\frac{dx}{dt} = -\mu\mathfrak{N}\sin\omega; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu^2\mathfrak{N}\cos\omega$$

$$\frac{dy}{dt} = \mu N\cos\omega; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu^2 N\sin\omega$$

Отсюда следуют уравнения:

$$\text{I)}\quad -\mu^2\mathfrak{N}\cos\omega - 2(m+1)\mu N\cos\omega - 3\lambda\mathfrak{N}\cos\omega + \mathfrak{M}\cos\omega = 0$$

$$\text{II)}\quad -\mu^2 N\sin\omega - 2(m+1)\mu\mathfrak{N}\sin\omega + M\sin\omega = 0$$

§ **84**. Эти два уравнения приводятся к следующим:

$$(\mu^2+3\lambda)\mathfrak{N}+2(m+1)\mu N=\mathfrak{M}$$

$$2(m+1)\mu\mathfrak{N}+\mu^2 N=M$$

Из последнего уравнения следует

$$N=-\frac{2(m+1)}{\mu}\mathfrak{N}+\frac{M}{\mu^2}$$

по подстановке в первое уравнение имеем

$$[\mu^2-4(m+1)^2+3\lambda]\mathfrak{N}=-\frac{2(m+1)}{\mu}M+\mathfrak{M}$$

Но мы имели

$$\lambda=(m+1)^2+\frac{1}{2}$$

следовательно предыдущее уравнение будет

$$(\mu^2-\lambda+2)\mathfrak{N}=-\frac{2(m+1)}{\mu}M+\mathfrak{M}$$

откуда получаем

$$\mathfrak{N}=\frac{\frac{2(m+1)}{\mu}M-\mathfrak{M}}{\lambda-\mu^2-2}$$

и, после того как величина $\mathfrak{N}$ найдена, имеем

$$N=-\frac{2(m+1)}{\mu}\mathfrak{N}+\frac{M}{\mu^2}$$

§ **85**. Итак, всякий раз, когда при развитии первого и второго уравнений в их присоединенных частях встретится в первом член $\mathfrak{M}\cos\omega$, во втором член $M\sin\omega$, причем $d\omega=\mu dt$, то надо ввести подобные же члены в состав x и y, именно: для x — член $\mathfrak{N}\cos\omega$, причем должно быть

$$\mathfrak{N}=\frac{\frac{2(m+1)}{\mu}M-\mathfrak{M}}{\lambda-2-\mu^2}$$

и для y — член $N\sin\omega$, причем

$$N=\frac{M}{\mu^2}-\frac{2(m+1)}{\mu}\mathfrak{N}$$

§ **86**. Для первого уравнения может оказаться, что при развитии присоединенной части появится постоянный член, скажем α; так как во втором уравнении такого члена появиться не может, то в этом случае будет:

$$\mathfrak{M} = \alpha; \qquad M = 0; \qquad \mu = 0$$

Если эти значения подставить в предыдущие формулы, то мы ничего *не получим*, ибо $\frac{M}{\mu}$ обращается в $\frac{0}{0}$. Однако исходные уравнения § 84 тотчас же устраняют сомнение, ибо первое дает

$$-3\lambda\mathfrak{N} + \alpha = 0$$

значит

$$\mathfrak{N} = \frac{\alpha}{3\lambda}$$

вместе с тем само собою очевидно, что

$$N = 0$$

§ **87**. Заметив это, необходимо тщательно рассмотреть, что произойдет, когда μ будет или близко к нулю, или же μ^2 будет близко к $\lambda - 2$; в обоих случаях значение $\mathfrak{N}$ может весьма сильно возрастать и вместе с тем и значение N. Поэтому эти два случая, т. е. когда значение μ или весьма малое, или приблизительно равно $\sqrt{\lambda - 2}$, заслуживают особенного внимания, ибо в оба количества x и y тогда могут войти громадные члены, которые даже могут стать бесконечными, если будет в точности или $\mu = 0$, или $\mu = \sqrt{\lambda - 2}$. Первый случай не представляет никаких затруднений, ибо сводится к уже рассмотренному случаю, когда $\mu = 0$. Второй же случай в гораздо большей мере заслуживает рассмотрения, ибо тогда уже не косинус или синус ω, а самый угол ω будет входить в состав x и y, ибо когда δ исчезает, то значение $\frac{\sin \delta\omega}{\delta}$ обращается в ω.

§ **88**. Однако подобного случая в движении Луны и других действительно совершающихся движениях никогда произойти не может, ибо в противном случае следовало бы заключить, что когда x и y содержат какой-либо угол ω вне знаков косинуса и синуса, то с течением времени эти члены возрастали бы до бесконечности. Кроме того, в присоединенных частях уравнений появились бы члены, пропорциональные квадрату, кубу и вообще всем высшим степеням сказанного угла, и значит, подобные же члены должны бы входить и в самые выражения x и y, что будет совершенно нелепо.

§ **89**. После того как изложен этот изящный способ решения первых двух уравнений, гораздо легче подобным же образом решить третье наше уравнение.

Так как в нем главная часть есть

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + (\lambda + 1) z$$

прочие же члены относятся к присоединенной части, то если сама величина z выражается рядом синусов некоторых углов, то при развитии присоединенной части также произойдут только члены с синусами, и если среди них окажется, напр., член $M \sin \omega$, причем $d\omega = \mu\, dt$, то надо в составе величины z взять член $N \sin \omega$, и по подстановке будет

$$(-\mu^2 + \lambda + 1) N \sin \omega + M \sin \omega = 0$$

откуда следует

$$N = \frac{M}{\mu^2 - \lambda - 1}$$

и по известной величине M легко находится и значение N.

ГЛАВА XIII

Введение средней аномалии Луны и, сверх того, аргумента широты

§ **90**. Углы, синусы и косинусы которых до сих пор содержатся в наших уравнениях, суть, во-первых, средняя элонгация Луны от Солнца, равная p, и во-вторых, средняя аномалия Солнца, равная t, и различные сочетания этих углов. Но так как надо эти уравнения интегрировать, то легко видеть, что при полном интегрировании необходимо будет ввести в выражения x и y еще один угол, и хотя нет надобности предпринимать самого интегрирования, однако мы обозначим этот угол буквою q и положим

$$dq = n\, dt$$

Этот угол мы без интегрирования определим, пользуясь следующим рассуждением.

§ **91**. Положим, что в первую нашу неизвестную x входит член $K \cos q$, и так как он происходит от интегрирования, то коэффициент K обозначает произвольную постоянную, значение которой должно быть определено на основании наблюдений движения Луны. Если мы даже слегка вникнем в эти обстоятельства, то легко придем к заключению, что этот постоянный коэффициент K представляет то, что в астрономии обыкновенно именуется эксцентриситетом, тогда как угол q, очевидно, представляет среднюю аномалию Луны, ибо этот угол пропорционален времени, так как положено

$$dq = n\,dt$$

§ **92.** В виду того, что в ряду тех косинусов, через которые выражается величина x, содержится член $K\cos q$, в ряду же синусов для величины y — соответствующий ему член $N\sin q$, то при развитии присоединенной части первого уравнения может появиться несколько членов с $\cos q$, — совокупность их обозначим через $\mathfrak{M}\cos q$. Подобным же образом для второго уравнения совокупность всех членов, содержащих $\sin q$, обозначим через $M\sin q$, после чего мы можем применить следующее рассуждение.

§ **93.** Так как по предположению величина x содержит член $K\cos q$, причем K должно оставаться неопределенным, то применим правило § 85 и положим затем $\mathfrak{N} = K$ и $\mu = n$; получим

$$K = \frac{\frac{2(m+1)}{n}M - \mathfrak{M}}{\lambda - 2 - n^2}$$

Из этого уравнения подлежит определению не коэффициент K, а число n, и легко заключить, что всегда число n может быть так определено, чтобы оно этому уравнению удовлетворяло; после того как это число будет найдено, получим для N значение

$$N = \frac{M}{n^2} - \frac{2(m+1)}{n}K$$

§ **94.** Однако таким образом трудно найти истинное значение n, ибо для $\mathfrak{M}$ и M надо брать совокупность всех членов указанного вида, происходящих при развитии уравнений, поэтому истинное значение величины n узнать нельзя иначе, как выведя ее из наблюдений.

Так как средняя аномалия q получается вычитая из средней долготы Луны долготу апогея, то, взяв из таблиц для промежутка времени в 365 дней эти значения, имеем:

среднее движение Луны:	$360^\circ \cdot 13 + 129^\circ 23' \; 3''$
движение апогея:	$40^\circ 39' 50''$
Изменение средней аном. $q =$	$360^\circ \cdot 13 + 88^\circ 43' 13''$

по разделении этой величины на $359°44'39''$, соответствующих значению t, представляющему среднюю аномалию Солнца, получаем

$$n = \frac{17167393}{1295079} = 13.255865$$

95. Хотя значение это и взято с самого неба, но если мы желаем это дело исследовать точнейшим образом, то указанным значением пользоваться не следует, ибо на Луну действует не только притяжение Солнца и Земли, но движение ее апогея возмущается еще и другими, весьма малыми, силами, поэтому движение, выбранное из таблиц, заключает совокупное влияние всех этих сил. От этого происходит, что значение величины n, определяемое уравнением

$$K = \frac{\frac{2(m+1)}{n} M - \mathfrak{M}}{\lambda - 2 - n^2}$$

должно несколько отличаться от табличного — на столько именно, на сколько указанные малые силы влияют на величину n, поэтому не следует удивляться, если вышеуказанная величина n, полученная на основании наблюдений, не вполне удовлетворяет уравнениям.

§ **96.** Нам для нашего вычисления надо приписать n то значение, которое соответствует действию сил, происходящих только от Солнца и от Земли, что может быть выполнено вычитая из годового движения лунного апогея влияние сказанных посторонних сил. Известно, что от этих сил афелии всех планет весьма медленно перемещаются, тогда как если бы на главные планеты действовало только притяжение Солнца, то апсиды их оставались бы неподвижными по отношению к звездам. Поэтому нет никакого сомнения, что эти малые возмущающие силы несколько перемещают и лунный апогей.

§ **97.** Так как афелий Земли от действия сказанных сил перемещается ежегодно по отношению к звездам приблизительно на $13''$, то влияние этих сил на Луну надо считать кругло в 13 раз больше, ибо Луна в течение года совершает около тринадцати оборотов, поэтому годовое перемещение апогея по отношению к звездам, происходящее от сказанных сил, должно бы составлять около $170''$, следовательно относительно точек равноденствий на $221'' = 3'41''$. Поэтому вычитаем это значение из показанного в таблицах годового движения апогея, или, что то же, придадим $221''$ к годовому изменению аномалии, тогда числитель указанной в § 94 дроби будет $17167614''$ и значение n получится равным

$$n = 13.25604$$

§ **98.** Поскольку речь идет о неравенствах в движении Луны, то безразлично, которым из двух значений n пользоваться, ибо вся разница в месте Луны составила бы лишь несколько секунд, тогда как, как мы уже указали, при нашем способе расчета отклонения в месте Луны могут составлять не менее $20''$ или $30''$.

§ **99.** Введение сказанного угла q относится лишь до двух первых наших уравнений, в третье же уравнение надо ввести новый угол, который обозначим буквою r, причем легко видеть, что этот угол соответствует тому, который в астрономии называется средним аргументом широты и который получается, если из средней долготы Луны вычтем долготу восходящего узла. Поэтому положим, что третья наша координата содержит главный член $i \sin r$, причем i есть наклонение орбиты Луны к эклиптике, которое, подобно величине K, должно рассматривать как произвольную постоянную.

§ **100.** Для теоретического определения этого угла полагаем

$$dr = l\,dt$$

и после развития присоединенных членов третьего уравнения собираем все члены с множителем $\sin r$, пусть их сумма составляет $M \sin r$, и так как само количество z содержит член $i \sin r$, то, применяя правило § 89, полагаем:

$$\omega = r; \qquad \mu = l; \qquad N = i$$

тогда получится уравнение

$$i = \frac{M}{l^2 - \lambda - l}$$

и из этого уравнения надо определить не i, а l.

§ **101.** Значение, получаемое таким образом для величины l, едва отличается от имеющего место в действительности, но будет лучше, учитывая действие вышеуказанных весьма малых сил, принять значение, выводимое из наблюдений, а именно:

среднее годовое движение Луны:	$360^\circ \cdot 13 + 129^\circ 23' \; 3''$
годовое движение узла (попятное):	$19^\circ 19' 43''$
Годовое изменение аргум. широты:	$360^\circ \cdot 13 + 148^\circ 42' 46''$

отсюда заключаем

$$l = \frac{17383366}{1295079} = 13.42263$$

Этим значением и будем пользоваться в дальнейшем.

ГЛАВА XIV

О различных порядках лунных неравенств

§ **102**. Нами уже указано, что три наши координаты x, y, z выражаются через бесконечные ряды косинусов и синусов некоторых углов, теперь же мы покажем, что эти ряды можно с удобством подразделить на определенные порядки или классы, а именно: для x и y, прежде всего, те члены, которые не содержат ни букв a и $\varkappa$, ни выше введенных элементов K и i, эти члены мы назовем абсолютными, они составят наш первый порядок; очевидно, они происходят от абсолютных членов самих дифференциальных уравнений, т. е.

$$-\frac{3}{8}\cos 2p \quad \text{и} \quad +\frac{3}{2}\sin 2p$$

§ **103**. Затем, после того как введен эксцентриситет K, в выражениях x и y будут заключаться члены, которые не только будут содержать множитель K, но и множители K^2 и K^3 и все прочие высшие его степени. Но, как ниже увидим, значение K есть приблизительно $\frac{1}{18}$, поэтому достаточно удержать только члены с K^3, ибо всеми прочими можно пренебречь по малости их, поэтому мы составим три порядка членов, сообразно входящим в них множителям K, K^2 или K^3.

§ **104**. Затем войдут такие члены, которые содержат множитель или a, или $\varkappa$, или их произведение $a\varkappa$, ибо такие члены входят в самые дифференциальные уравнения. Кроме того, будут члены, в которых предыдущие коэффициенты умножены на K или степени этой величины, но так как значение a есть приблизительно $\frac{1}{390}$, то достаточно взять лишь порядок aK, для членов же, содержащих множитель $\varkappa$, надо присоединить и множитель K^2; таким образом получатся члены, характеризуемые множителями:

$$a,\ aK,\ \varkappa,\ \varkappa K,\ \varkappa K^2 \quad \text{и} \quad a\varkappa$$

§ **105**. Так как третья наша координата определяется, главным образом, третьим нашим дифференциальным уравнением, все члены которого содержат множитель z, который, в свою очередь, так зависит от наклонности i, что эта величина везде входит множителем, следовательно при

$$i=0$$

и величина z должна обращаться в нуль, поэтому члены бесконечного ряда, представляющего величину z, должны содержать множители или i, или iK, или iK^2, или ia, или $i\varkappa$, или i^3. Но легко видеть, что по малости величины ia соответствующий член может быть отброшен, таким образом получатся члены, порядки которых определяются множителями: [1]

$$i,\ iK;\ iK^2,\ i\varkappa,\ i^3$$

§ **106**. Составим таким образом для величины z члены указанных пяти порядков, представим величину z так:

$$z = i\mathfrak{p} + iK\mathfrak{q} + iK^2\mathfrak{r} + i\varkappa\mathfrak{s} + i^3\mathfrak{t}$$

а так как в предыдущие два уравнения входит лишь вторая степень z, то положим для краткости:

$$z^2 = i^2\,\text{♄} + i^2K\,\text{♃} + i^2K^2\,\text{♂} + i\varkappa\,\text{♁}$$

отбрасывая прочие члены по их малости, получим:

$$\begin{aligned} \text{♄} &= \mathfrak{p}^2 \\ \text{♃} &= 2\mathfrak{p}\mathfrak{q} \\ \text{♂} &= 2\mathfrak{p}\mathfrak{r} + \mathfrak{q}^2 \\ \text{♁} &= 2\mathfrak{p}\mathfrak{s} \end{aligned}$$

§ **107**. Но так как величина z^2 входит в первые два уравнения, то от третьего уравнения к величинам x и y добавляются члены новых порядков, поэтому мы примем для величин x и y следующий вид:

$$\begin{aligned} x &= \mathfrak{O} + K\mathfrak{P} + K^2\mathfrak{Q} + K^3\mathfrak{R} + a\mathfrak{S} + aK\mathfrak{T} + \varkappa\mathfrak{U} \\ &\quad + \varkappa K\mathfrak{V} + \varkappa K^2\mathfrak{W} + a\varkappa\mathfrak{w} + i^2\mathfrak{X} + i^2K\mathfrak{Y} + i^2K^2\mathfrak{Z} \\ y &= O + KP + K^2Q + K^3R + aS + aKT + \varkappa U \\ &\quad + \varkappa KV + \varkappa K^2W + a\varkappa w + i^2X + i^2KY + i^2K^2Z \end{aligned}$$

Ниже будет показано, что значения величин $\mathfrak{O}$ и O немногим больше одной сотой, поэтому члены второй степени относительно этих букв настолько малы, что члены высших относительно этих букв порядков могут

---

[1] Здесь у Эйлера вкралась та ошибка, о которой он говорит в предисловии, именно пропущены члены с множителем i^2K, который, как показывает таблица § 637, равен 0.00043792, тогда как множитель $iK^2 = 0.00026625$, поэтому величину z следовало бы писать так:

$$z = i\mathfrak{p} + iK\mathfrak{q} + i^2K\mathfrak{r} + iK^2\mathfrak{s} + i\varkappa\mathfrak{t} + i^3\mathfrak{v}$$

но величина z^2 сохраняет нижеуказанное значение, поэтому этот пропуск не оказывает влияния на неизвестные x и y.

быть отброшены, значения же прочих букв могут достигать единицы и даже больше, поэтому их степени могут быть отбрасываемы лишь в том случае, когда коэффициенты при них весьма малы.

§ **108**. Составив эти выражения для наших координат x, y, z и подставив их в наши уравнения, мы отнесем происходящие от перемножений члены к определенным порядкам, даже весьма сложным, однако из них мы не введем в наши вычисления иных, кроме указанных выше. Заметив это, мы развиваем произведения координат, входящие в наши уравнения, и распределяем их по выше установленным порядкам, отбрасывая члены, степень которых относительно букв $\mathfrak{O}$ и O выше второй, таким образом мы получаем следующие распределения:

§ **109**. *Порядок первый, абсолютные члены.*

$$x = \mathfrak{O};\ y = O;\ x^2 = \mathfrak{O}^2;\ xy = \mathfrak{O}O;\ y^2 = O^2$$

более сложные произведения отбрасываются. К этому же порядку должны быть отнесены и абсолютные члены наших уравнений.

§ **110**. *Второй порядок, множитель K.*

x доставляет $\mathfrak{P}$; $y \ldots P$
$x^2 \ldots 2\mathfrak{O}\mathfrak{P}$; $xy \ldots \mathfrak{O}P + O\mathfrak{P}$; $y^2 \ldots 2OP$
$x^3 \ldots 3\mathfrak{O}^2\mathfrak{P}$; $x^2y \ldots 2\mathfrak{O}O\mathfrak{P} + \mathfrak{O}^2P$
$xy^2 \ldots 2\mathfrak{O}OP + O^2\mathfrak{P}$; $y^3 \ldots 3O^2P$

§ **111**. *Третий порядок, множитель K^2.*

x доставляет $\mathfrak{O}$
$y \ldots Q$
$x^2 \ldots 2\mathfrak{O}\mathfrak{Q} + \mathfrak{P}$
$xy \ldots O\mathfrak{Q} + \mathfrak{P}P + \mathfrak{O}Q$
$y^2 \ldots 2OQ + P^2$
$x^2 \ldots 3\mathfrak{O}^2\mathfrak{Q} + 3\mathfrak{O}\mathfrak{P}^2$
$x^2y \ldots 2\mathfrak{O}OQ + \mathfrak{O}P^2 + 2O\mathfrak{P}P + O^2\mathfrak{Q}$
$y^2 \ldots 3O^2Q + 3O \cdot P^2$
$x^4 \ldots 6 \cdot \mathfrak{O}^2\mathfrak{P}^2$
$x^3y \ldots 3 \cdot \mathfrak{O} \cdot O \cdot \mathfrak{P}^2 + 3 \cdot \mathfrak{O}^2 \cdot \mathfrak{P} \cdot P$
$x^2y^2 \ldots O^2\mathfrak{P}^2 + 4\mathfrak{O}O\mathfrak{P}P + \mathfrak{O}^2P^2$
$xy^3 \ldots 3\mathfrak{O}OP^2 + 3O^2\mathfrak{P} \cdot P$
$y^4 \ldots 6 \cdot O^2P^2$

§ **112**. *Четвертый порядок, множитель* K^3.

x доставляет $\mathfrak{R}$

$y \ldots R$

$x^2 \ldots 2\mathfrak{O}\mathfrak{R} + 2\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{Q}$

$xy \ldots O\mathfrak{R} + \mathfrak{Q}P + \mathfrak{P}\cdot Q + \mathfrak{O}R$

$y^2 \ldots 2OR + 2PQ$

$x^3 \ldots 3\mathfrak{O}^2\mathfrak{R} + 6\cdot\mathfrak{O}\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{Q} + \mathfrak{P}^3$

$x^2y \ldots 2O\mathfrak{O}\mathfrak{R} + 2O\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{Q} + 2\mathfrak{O}P\mathfrak{Q} + P\cdot\mathfrak{P}^2$
$\quad + 2\mathfrak{O}\mathfrak{P}\cdot Q + \mathfrak{O}^2R$

$xy^2 \ldots 2\mathfrak{O}OR + 2\mathfrak{O}PQ + 2O\mathfrak{P}Q + \mathfrak{P}\cdot P^2$
$\quad + 2\cdot OP\cdot\mathfrak{Q} + O^2\cdot\mathfrak{R}$

$y^3 \ldots 3O^2R + 6\cdot OPQ + P^3$

$x^4 \ldots 12\cdot\mathfrak{O}^2\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{Q} + 4\mathfrak{O}\mathfrak{P}^3$

$x^3y \ldots 6\cdot\mathfrak{O}O\cdot\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{Q} + O\cdot\mathfrak{P}^3 + 3\mathfrak{O}^2P\mathfrak{Q}$
$\quad + 3\mathfrak{O}\cdot P\mathfrak{P} + 3\cdot\mathfrak{O}^2\mathfrak{P}\cdot Q$

$x^2y^2 \ldots 2\cdot O^2\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{Q} + 4\mathfrak{O}OP\cdot\mathfrak{Q} + 2\cdot O\cdot\mathfrak{P}^2\cdot P$
$\quad + 2\cdot\mathfrak{O}^2\cdot PQ + 4\mathfrak{O}O\cdot\mathfrak{P}\cdot Q + 2\mathfrak{O}\mathfrak{P}\cdot P^2$

$xy^3 \ldots 6\cdot\mathfrak{O}O\cdot PQ + \mathfrak{O}P^3 + 3O^2\mathfrak{P}\cdot Q$
$\quad + 3O\cdot\mathfrak{P}\cdot P^2 + 3O^2P\cdot\mathfrak{Q}$

$y^4 \ldots 12O^2PQ + 4\cdot OP^3$

$x^5 \ldots 10\cdot\mathfrak{O}^2\cdot\mathfrak{P}^3$

$x^4y \ldots 4\cdot\mathfrak{O}O\cdot\mathfrak{P}^3 + 6\cdot\mathfrak{O}^2\mathfrak{P}^2\cdot P$

$x^3y^2 \ldots O^2\mathfrak{P}^3 + 6\cdot\mathfrak{O}O\mathfrak{P}^2P + 3\cdot\mathfrak{O}^2\cdot\mathfrak{P}\cdot P^2$

$x^2y^3 \ldots \mathfrak{O}^2P^3 + 6\cdot\mathfrak{O}O\cdot\mathfrak{P}\cdot P^2 + 3\cdot O^2\mathfrak{P}^2\cdot P$

$xy^4 \ldots 4\mathfrak{O}OP^3 + 6\cdot O^2\mathfrak{P}\cdot P^2$

$y^5 \ldots 10\cdot O^2\cdot P^3$

§ **113**. *Пятый порядок, множитель* a.

x доставляет $\mathfrak{S}$

$y \ldots S$

$x^2 \ldots 2\mathfrak{O}\mathfrak{S}$; $xy \ldots \mathfrak{O}S + O\mathfrak{S}$; $y^2 \ldots 2OS$

$x^2 \ldots 3\mathfrak{O}^2\mathfrak{S}$; $x^2y \ldots 2\mathfrak{O}O\mathfrak{S} + \mathfrak{O}^2S$

$xy^2 \ldots 2\mathfrak{O}OS + O^2\mathfrak{S}$; $y^3 \ldots 3O^2S$

§ **114**. *Шестой порядок, множитель aK.*

x доставляет $\mathfrak{T}$; $y \dots T$; $x^2 \dots 2\mathfrak{O}\mathfrak{T} + 2\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{S}$

$xy \dots O\mathfrak{T} + \mathfrak{S}P + \mathfrak{P}\cdot S + \mathfrak{O}T$

$y^2 \dots 2OT + 2PS$; $x^3 \dots 3\mathfrak{O}^2\mathfrak{T} + 6\cdot\mathfrak{O}\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{S}$;

$x^2y \dots 2\mathfrak{O}O\mathfrak{T} + 2O\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{S} + 2\mathfrak{O}\mathfrak{S}\cdot P$
$+ 2\mathfrak{O}\mathfrak{P}\cdot S + \mathfrak{O}^2T$

$xy^2 \dots 2\mathfrak{O}OT + 2\mathfrak{O}PS + 2O\mathfrak{P}\cdot S$
$+ 2OP\mathfrak{S} + O^2\cdot\mathfrak{T}$

$y^3 \dots 3O^2T + 6\cdot OP\cdot S$

$x^4 \dots 12\cdot\mathfrak{O}^2\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{S}$;

$x^3y \dots 6\cdot\mathfrak{O}O\cdot\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{S} + 3\mathfrak{O}^2P + \mathfrak{S} + 3\mathfrak{O}^2\mathfrak{P}\cdot S$

$x^2y^2 \dots 2O^2\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{S} + 4\mathfrak{O}OP\mathfrak{S} + 4\mathfrak{O}O\mathfrak{P}\cdot S$
$+ 2\mathfrak{O}^2PS$

$xy^3 \dots 6\mathfrak{O}OPS + 3\cdot O^2\mathfrak{P}\cdot S + 3O^2P\cdot\mathfrak{S}$

$y^4 \dots 12O^2P\cdot S$

§ **115**. *Седьмой порядок, множитель $\varkappa$.*

x доставляет $\mathfrak{U}$; $y \dots U$; $x^2 \dots 2\mathfrak{O}\mathfrak{U}$;

$xy \dots \mathfrak{O}U + O\mathfrak{U}$; $y^2 \dots 2OU$;

$x^3 \dots 3\mathfrak{O}^2\mathfrak{U}$; $x^2y \dots 2\mathfrak{O}O\mathfrak{U} + \mathfrak{O}^2U$;

$xy^2 \dots 2\mathfrak{O}O\cdot U + O^2\mathfrak{U}$; $y^3 \dots 3O^2U$

§ **116**. *Восьмой порядок, множитель $\varkappa K$.*

x доставляет $\mathfrak{V}$; $y \dots V$; $x^2 \dots 2\mathfrak{O}\mathfrak{V} + 2\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{U}$

$xy \dots O\mathfrak{V} + P\mathfrak{U} + \mathfrak{P}U + \mathfrak{O}V$

$y^2 \dots 2OV + 2PU$; $x^3 \dots 3\mathfrak{O}^2\mathfrak{V} + 6\mathfrak{O}\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{U}$;

$x^2y \dots 2\mathfrak{O}O\mathfrak{V} + 2O\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{U} + 2\mathfrak{O}P\mathfrak{U} + 2O\mathfrak{P}\cdot U$
$+ O^2\mathfrak{V}$

$xy^2 \dots 2\mathfrak{O}OV + 2\mathfrak{O}PU + 2O\mathfrak{P}\mathfrak{U} + 2OPU$
$+ O^2\mathfrak{V}$

$y^3 \dots 3O^2\cdot V + 6\cdot OP\cdot U$

$x^4 \dots 12\cdot\mathfrak{O}^2\mathfrak{P}\mathfrak{U}$

$x^3y \dots 6\cdot\mathfrak{O}O\mathfrak{P}\mathfrak{U} + 3\mathfrak{O}^2P\mathfrak{U} + 3\mathfrak{O}^2\mathfrak{P}\cdot U$

$x^2y^2 \dots 2O^2\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{U} + 4\mathfrak{O}OP\mathfrak{U} + 4\mathfrak{O}O\mathfrak{P}\cdot U$
$+ 2\mathfrak{O}^2PU$

$xy^3 \dots 6\cdot\mathfrak{O}OPU + 3O^2\mathfrak{P}U + 3O^2P\cdot\mathfrak{U}$

$y^4 \dots 12\cdot O^2P\cdot U$

$x^3 \dots 3\mathfrak{O}^2\cdot\mathfrak{V} + 6\cdot\mathfrak{O}\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{U}$

§ **117**. *Девятый порядок, множитель $\varkappa K^2$.*

x доставляет $\mathfrak{W}$; $y \ldots W$

$x^2 \ldots 2\mathfrak{O}\mathfrak{W} + 2\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{V} + 2\mathfrak{Q}\mathfrak{U}$

$xy \ldots \mathfrak{O}W + O\mathfrak{W} + \mathfrak{P}\cdot V + P\mathfrak{V} + \mathfrak{Q}U + Q\mathfrak{U}$

$y^2 \ldots 2OW + 2PV + 2QU$

$x^3 \ldots 3\mathfrak{O}^2\mathfrak{W} + 6\cdot\mathfrak{O}\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{V} + 3\cdot\mathfrak{P}^2\mathfrak{U} + 6\mathfrak{O}\mathfrak{Q}\mathfrak{U}$

$$\begin{aligned}
x^2y \ldots\ & 2\mathfrak{O}O\mathfrak{W} + 2O\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{V} + 2O\mathfrak{Q}\mathfrak{U}\\
& + 2\mathfrak{O}P\mathfrak{V} + 2\mathfrak{P}\cdot P\cdot\mathfrak{U} + 2\mathfrak{O}Q\mathfrak{U}\\
& + 2\mathfrak{O}\mathfrak{Q}U + \mathfrak{P}^2\cdot U + 2\mathfrak{O}\mathfrak{P}\cdot V + \mathfrak{O}^2W
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
xy^2 \ldots\ & 2\mathfrak{O}OW + 2\mathfrak{O}PV + 2\mathfrak{O}QU\\
& + 2O\mathfrak{P}\cdot V + 2\mathfrak{P}\cdot P\cdot U + 2O\mathfrak{Q}U\\
& + 2OQ\mathfrak{U} + P^2\mathfrak{U} + 2OP\mathfrak{V} + O^2\cdot\mathfrak{W}
\end{aligned}$$

$y^3 \ldots 3O^2W + 6\cdot OPV + 3P^2\cdot U + 6\cdot OQU$

$x^4 \ldots 12\mathfrak{O}^2\cdot\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{V} + 12\cdot\mathfrak{O}\mathfrak{P}^2\cdot\mathfrak{U} + 12\cdot\mathfrak{O}^2\mathfrak{Q}\mathfrak{U}$

$$\begin{aligned}
x^3y \ldots\ & 6\cdot\mathfrak{O}O\cdot\mathfrak{P}\mathfrak{V} + 3O\mathfrak{P}^2\cdot\mathfrak{U}\\
& + 6\cdot\mathfrak{O}\cdot O\cdot\mathfrak{Q}\mathfrak{U} + 3\mathfrak{O}^2P\mathfrak{V} + 6\cdot\mathfrak{O}\mathfrak{P}\cdot P\mathfrak{U}\\
& + 3\cdot\mathfrak{O}^2Q\mathfrak{U} + 3\mathfrak{O}^2\mathfrak{Q}U + 3\mathfrak{O}\mathfrak{P}^2\cdot U\\
& + 3\mathfrak{O}^2\mathfrak{P}\cdot V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2y^2 \ldots\ & 2O^2\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{V} + 2O^2\mathfrak{Q}\mathfrak{U} + 2\mathfrak{O}OP\mathfrak{V}\\
& + 4O\cdot\mathfrak{P}P\cdot\mathfrak{U} + 4\mathfrak{O}OQ\mathfrak{U} + 2\mathfrak{O}P^2\mathfrak{U}\\
& + 2\mathfrak{O}^2PV + 2\mathfrak{O}^2QU + 2\mathfrak{O}O\mathfrak{P}\cdot V\\
& + 4\mathfrak{O}\mathfrak{P}\cdot P\cdot U + 4\cdot\mathfrak{O}O\mathfrak{Q}U + 2O\mathfrak{P}^2\cdot U
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
xy^3 \ldots\ & 6\mathfrak{O}OPV + 3\mathfrak{O}P^2U + 6\cdot\mathfrak{O}OQU\\
& + 3O^2\mathfrak{P}\cdot V + 6\cdot O\mathfrak{P}\cdot P\cdot U + 3\cdot O^2\mathfrak{Q}U\\
& + 3O^2Q\mathfrak{U} + 3\cdot O\cdot P^2\mathfrak{U} + 3O^2P\cdot\mathfrak{V}
\end{aligned}$$

$y^4 \ldots 12\cdot O^2P\cdot V + 12\cdot O\cdot P^2\cdot U + 12\cdot O^2\cdot Q\cdot U$

Сюда надо было бы присовокупить члены пятой степени, но так как все они умножаются на вторые степени букв O и $\mathfrak{O}$, то их можно здесь тем более опустить, что и самые неравенства Луны, относящиеся к этому порядку, весьма малы, и при их определении не требуется той точности, как для предыдущих порядков, поэтому в дальнейших порядках мы можем эти члены отбросить. Впрочем, в последующем легко эти недостающие члены и добавить.

§ **118**. *Порядок десятый. Множитель* $a\varkappa$.

x доставляет $\mathfrak{w}$; $y \ldots w$; $x^2 \ldots 2\mathfrak{O}\mathfrak{w} + 2\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{U}$

$xy \ldots O\mathfrak{w} + \mathfrak{S}U + S\mathfrak{U} + \mathfrak{O}w$

$y^2 \ldots 2Ow + 2SU$

$x^3 \ldots 6\cdot\mathfrak{O}\cdot\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{U}$

$x^2y \ldots 2\mathfrak{O}\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{U} + 2\mathfrak{O}\mathfrak{S}\cdot U + 2\mathfrak{O}S\cdot\mathfrak{U}$

$xy^2 \ldots 2OSU + 2OS\mathfrak{U} + 2O\mathfrak{S}U$

$y^3 \ldots 6\cdot O\cdot S\cdot U$

§ **119**. *Одиннадцатый порядок, множитель* i^2.

x доставляет $\mathfrak{X}$; $y \ldots X$;

$x^2 \ldots 2\mathfrak{O}\mathfrak{X}$; $xy \ldots \mathfrak{O}X + O\mathfrak{X}$

$y^2 \ldots 2OX$; $z^2 \ldots \mathfrak{h}$

$xz^2 \ldots \mathfrak{O}\cdot\mathfrak{h}$; $yz^2 \ldots O\cdot\mathfrak{h}$

§ **120**. *Двенадцатый порядок, множитель* i^2K.

x доставляет $\mathfrak{Y}$; $y \ldots Y$; $x^2 \ldots 2\mathfrak{O}\mathfrak{Y} + 2\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{X}$

$xy \ldots \mathfrak{O}Y + O\mathfrak{Y} + \mathfrak{P}\cdot X + P\mathfrak{X}$

$y^2 \ldots 2OY + 2PX$; $z^2 \ldots ♃$

$x^3 \ldots 6\cdot\mathfrak{O}\mathfrak{P}\mathfrak{X}$

$x^2\cdot y \ldots 2O\cdot\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{X} + 2\mathfrak{O}P\mathfrak{X} + 2\mathfrak{O}\mathfrak{P}\cdot X$

$xy^2 \ldots 2\mathfrak{O}PX + 2O\mathfrak{P}\cdot X + 2O\cdot P\cdot\mathfrak{X}$

$y^3 \ldots 6\cdot OPX$

$xz^2 \ldots \mathfrak{O}\cdot ♃ + \mathfrak{P}\cdot\mathfrak{h}$

$yz^2 \ldots O♃ + P\cdot\mathfrak{h}$

$x^2z^2 \ldots 2\mathfrak{O}\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{h}$

$xyz^2 \ldots \mathfrak{O}P\cdot\mathfrak{h} + O\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{h}$

$y^2z^2 \ldots 2OP\cdot\mathfrak{h}$

§ **121**. *Тринадцатый порядок, множитель i^2K^2.*

x доставляет $\mathfrak{Z}$; $y \ldots Z$; $x^2 \ldots 2\mathfrak{O}\mathfrak{Z} + 2\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{Y} + 2\mathfrak{Q}\mathfrak{X}$

$xy \ldots \mathfrak{O}Z + O\mathfrak{Z} + \mathfrak{P}\cdot Y + P\cdot\mathfrak{Y} + \mathfrak{Q}X + Q\mathfrak{X}$;

$y^2 \ldots 2OZ + 2PY + 2QX$

$z^2 \ldots ♂$

$x^3 \ldots 6\cdot\mathfrak{O}\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{Y} + 6\,\mathfrak{O}\mathfrak{Q}\mathfrak{X} + 3\cdot\mathfrak{P}^2\cdot\mathfrak{X}$

$x^2y \ldots 2O\mathfrak{P}\mathfrak{Y} + 2O\mathfrak{Q}\mathfrak{X} + 2\mathfrak{O}P\cdot\mathfrak{Y} + 2\mathfrak{P}\cdot P\cdot\mathfrak{X}$

$+ 2\mathfrak{O}Q\cdot\mathfrak{X} + 2\mathfrak{O}\mathfrak{P}\cdot Y + 3\mathfrak{O}\mathfrak{Q}X + \mathfrak{P}^2X$

$xy^2 \ldots 2\mathfrak{O}PY + 2\mathfrak{O}QX + 2O\mathfrak{P}\cdot Y$

$+ 2\mathfrak{P}\cdot P\cdot X + 2O\mathfrak{Q}X + 2OP\mathfrak{Y}$

$+ 2OQ\mathfrak{X} + P^2\mathfrak{X}$

$y^3 \ldots 6\cdot O\cdot P\cdot Y + 6\cdot OQX + 3P^2X$

$xz^2 \ldots \mathfrak{O}\cdot ♂ + \mathfrak{P}\cdot ♃ + \mathfrak{Q}♄$

$yz^2 \ldots O\cdot ♂ + P\cdot ♃ + Q\cdot ♄$

$x^4 \ldots 12\cdot\mathfrak{O}\cdot\mathfrak{P}^2\cdot\mathfrak{X}$

$x^3y \ldots 3\mathfrak{O}\cdot\mathfrak{P}^2\cdot X + 6\cdot\mathfrak{O}\mathfrak{P}\cdot P\cdot\mathfrak{X} + 3\cdot O\cdot\mathfrak{P}^2\mathfrak{X}$

$x^2y^2 \ldots 4O\mathfrak{P}\cdot P\cdot\mathfrak{X} + 2\mathfrak{O}P^2\mathfrak{X}$

$+ 4\mathfrak{O}\mathfrak{P}\cdot P\cdot X + 2O\cdot\mathfrak{P}^2\cdot X$

$xy^3 \ldots 3OP^2\mathfrak{X} + 6\cdot O\mathfrak{P}\cdot P\cdot X + 3\cdot\mathfrak{O}P^2X$

$y^4 \ldots 12\cdot OP^2\cdot X$

§ **122**. Итак, вот те тринадцать порядков, на которые распределяются все члены двух первых уравнений при развитии их; ими мы и будем пользоваться при решении этих уравнений.

Третье уравнение надо решать отдельно от первых двух, и для него достаточно рассматривать члены пяти порядков, показанных ниже.

Третье уравнение

Порядок первый, множитель i.

x доставляет $\mathfrak{p}$; $xz \ldots \mathfrak{O}\mathfrak{p}$; $yz \ldots O\mathfrak{p}$

$x^2z \ldots \mathfrak{O}^2\mathfrak{p}$; $xyz \ldots \mathfrak{O}O\mathfrak{p}$; $y^2z \ldots O^2\mathfrak{p}$

§ **123**. *Порядок второй, множитель iK.*

z доставляет $\mathfrak{q}$; $xz \dots \mathfrak{O}\mathfrak{q} + \mathfrak{P}\mathfrak{p}$; $yz \dots O\mathfrak{q} + P\mathfrak{p}$

$x^2 z \dots \mathfrak{O}^2\mathfrak{q} + 2\mathfrak{O}\mathfrak{P}\mathfrak{p}$

$xyz \dots \mathfrak{O}O \cdot \mathfrak{q} + \mathfrak{O}P\mathfrak{p} + O \cdot \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{p}$

$y^2 z \dots O^2\mathfrak{q} + 2OP \cdot \mathfrak{p}$

$x^3 z \dots 3 \cdot \mathfrak{O}^2 \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{p}$

$x^2 yz \dots 2\mathfrak{O}O \cdot \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{p} + \mathfrak{O}^2 P \cdot \mathfrak{p}$

$xy^2 \cdot z \dots 2\mathfrak{O}OP\mathfrak{p} + O^2 \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{p}$

$y^3 \cdot z \dots 3O^2 P \cdot \mathfrak{p}$

§ **124**. *Порядок третий, множитель iK^2* (члены второй степени относительно $\mathfrak{O}$ и O отброшены).

z доставляет $\mathfrak{r}$; $xz \dots \mathfrak{O}\mathfrak{r} + \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{q} + \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{p}$

$yz \dots O\mathfrak{r} + P \cdot \mathfrak{q} + Q\mathfrak{p}$

$x^2 \cdot z \dots 2\mathfrak{O}\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{q} + 2\mathfrak{O}\mathfrak{Q}\mathfrak{p} + \mathfrak{P}^2 \cdot \mathfrak{p}$

$xyz \dots \mathfrak{O}P \cdot \mathfrak{q} + O\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{q} + O\mathfrak{Q}\mathfrak{p} + \mathfrak{P} \cdot P \cdot \mathfrak{p} + \mathfrak{O} Q\mathfrak{p}$

$y^2 \cdot z \dots 2 \cdot OP \cdot \mathfrak{q} + 2 \cdot OQ\mathfrak{p} + P^2 \cdot \mathfrak{p}$

$x^3 z \dots 3\mathfrak{O} \cdot \mathfrak{P}^2 \cdot \mathfrak{p}$

$xy^2 z \dots \mathfrak{O} \cdot P^2 \cdot \mathfrak{p} + 2 \cdot O \cdot \mathfrak{P} \cdot P \cdot \mathfrak{p}$

§ **125**. *Порядок четвертый, множитель $i\varkappa$.*

z доставляет $\mathfrak{s}$; $xz \dots \mathfrak{O}\mathfrak{s} + \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{p}$

$yz \dots O\mathfrak{s} + U \cdot \mathfrak{p}$

$x^2 z \dots 2 \cdot \mathfrak{O}\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{p}$

$xyz \dots \mathfrak{O}U\mathfrak{p} + O\mathfrak{U}\mathfrak{p}$

$y^2 z \dots 2OU\mathfrak{p}$

§ **126**. *Порядок пятый, множитель i^3.*

z доставляет $\mathfrak{t}$; $xz \dots \mathfrak{O}\mathfrak{t} + \mathfrak{X}\mathfrak{p}$

$yz \dots O\mathfrak{t} + X\mathfrak{p}$

$x^2 z \dots 2\mathfrak{O}\mathfrak{X}\mathfrak{p}$

$xyz \dots \mathfrak{O}X\mathfrak{p} + O\mathfrak{X}\mathfrak{p}$

$y^2 z \dots 2OX\mathfrak{p}$

$z^3 \dots \mathfrak{p}\mathfrak{h}$

$xz^3 \dots \mathfrak{O}\mathfrak{p}\mathfrak{h}$

ГЛАВА XV

Отдельные дифференциальные уравнения для каждого из членов установленных выше порядков

§ **127**. После того как установлены порядки членов для всех трех координат x, y, z, полагаем:

$$x = \mathfrak{O} + K\mathfrak{P} + K^2\mathfrak{Q} + K^3\mathfrak{R} + a\mathfrak{S} + aK\mathfrak{T} + \varkappa\mathfrak{U}$$
$$+ \varkappa K\mathfrak{V} + \varkappa K^2\mathfrak{W} + a\varkappa\mathfrak{w} + i^2\mathfrak{X} + i^2K\mathfrak{Y} + i^2K^2\mathfrak{Z}$$
$$y = O + KP + K^2Q + K^3R + aS + aKT + \varkappa U$$
$$+ \varkappa KV + \varkappa K^2W + a\varkappa w + i^2X + i^2KY + i^2K^2Z$$
$$z = i\mathfrak{p} + iK\mathfrak{q} + iK^2\mathfrak{r} + i\varkappa\mathfrak{s} + i^3\mathfrak{t}$$

составляем выражение

$$z^2 = i^2\mathfrak{h} + i^2K\mathfrak{L} + i^2K^2\mathfrak{d} + i^2\varkappa\mathfrak{b}$$

причем

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{p}^2;\quad \mathfrak{L} = 2\mathfrak{p}\mathfrak{q};\quad \mathfrak{d} = 2\mathfrak{p}\mathfrak{r} + \mathfrak{q}^2;\quad \mathfrak{b} = 2\mathfrak{p}\mathfrak{s}$$

подставляем все эти выражения в три наших дифференциальных уравнения и располагаем все члены по их порядкам. После того как это сделано, ясно, что в каждом уравнении члены каждого порядка в отдельности должны равняться нулю; таким образом получается столько отдельных уравнений, сколько членов различных порядков. Из этих уравнений и определяются вновь введенные неизвестные:

$$\mathfrak{O},\ \mathfrak{P}, \ldots O,\ P, \ldots \mathfrak{p},\ \mathfrak{q}, \ldots \mathfrak{t}$$

§ **128**. Прежде всего подставим указанные выражения в первые два уравнения, и для каждого из тринадцати отдельных порядков, выше установленных, пишем свою пару отдельных уравнений, следующую из уравнений I) и II), таким образом получаем:

Для первого порядка абсолютного:

$$\text{I)}\quad \frac{d^2\mathfrak{O}}{dt^2} - 2(m+1)\frac{dO}{dt} - 3\lambda\mathfrak{O}, \quad -\frac{3}{2}\cos 2p, \quad -\frac{3}{2}\mathfrak{O}\cos 2p + \frac{3}{2}O\sin 2p,$$
$$+ 3\lambda\mathfrak{O}^2 - \frac{3}{2}\lambda O^2 = 0$$

$$\text{II)}\quad \frac{d^2O}{dt^2} + 2(m+1)\frac{d\mathfrak{O}}{dt}, \quad +\frac{3}{2}\sin 2p, \quad +\frac{3}{2}\mathfrak{O}\sin 2p + \frac{3}{2}O\cos 2p,$$
$$- 3\lambda\mathfrak{O}O = 0$$

§ **129.** *Для второго порядка, с множителем K:*

$$\text{I)}\quad \frac{d^2\mathfrak{P}}{dt^2} - \frac{2\,(m+1)\,dP}{dt} - 3\lambda\mathfrak{P},$$
$$+\,\mathfrak{P}\left(-\frac{3}{2}\cos 2p + 6\lambda\mathfrak{O} + 12\lambda\mathfrak{O}^2 + 6\lambda O^2\right)\ldots\ \mathfrak{A})$$
$$+\,P\left(\frac{3}{2}\sin 2p - 3\lambda O + 12\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(\mathfrak{B})$$
$$= 0$$

$$\text{II)}\quad \frac{d^2P}{dt^2} + \frac{2\,(m+1)\,d\mathfrak{P}}{dt^2},$$
$$+\,\mathfrak{P}\left(\frac{3}{2}\sin 2p - 3\lambda O + 12\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(A)$$
$$+\,P\left(\frac{3}{2}\cos 2p - 3\lambda\mathfrak{O} + 6\lambda\mathfrak{O}^2 - \frac{9}{2}\lambda O^2\right)\ldots(B)$$
$$= 0$$

§ **130.** *Для третьего порядка с множителем K^2:*

$$\text{I)}\quad \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dt^2} - \frac{2\,(m+1)\,dQ}{dt} - 3\lambda\mathfrak{Q}$$
$$+\,\mathfrak{Q}\left(-\frac{3}{2}\cos 2p + 6\lambda\mathfrak{O} - 12\lambda\mathfrak{O}^2 + 6\lambda O^2\right)\ldots(\mathfrak{A})$$
$$+\,Q\left(\frac{3}{2}\sin 2p - 3\lambda O + 12\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(\mathfrak{B})$$
$$+\,\mathfrak{P}^2(3\lambda - 12\lambda\mathfrak{O} + 30\lambda\mathfrak{O}^2 - 15\lambda O^2\ldots(\mathfrak{C})$$
$$+\,\mathfrak{P}\cdot P(12\lambda O - 60\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(\mathfrak{D})$$
$$+\,P^2\left(-\frac{3}{2}\lambda + 6\lambda\mathfrak{O} - 15\lambda\mathfrak{O}^2 + \frac{45}{4}\lambda O^2\right)\ldots(\mathfrak{E})$$
$$= 0$$

$$\text{II)}\quad \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{2\,(m+1)\,dQ}{dt},$$
$$+\,\mathfrak{Q}\left(\frac{3}{2}\sin 2p - 3\lambda O + 12\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(A)$$
$$+\,O\left(\frac{3}{2}\cos 2p - 3\lambda\mathfrak{O} + 6\lambda\mathfrak{O}^2 - \frac{3}{2}\lambda O^2\right)\ldots(B)$$
$$+\,\mathfrak{P}^2(6\lambda O - 30\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(C)$$
$$+\,\mathfrak{P}\cdot P\left(-3\lambda + 12\lambda\mathfrak{O} - 30\lambda\mathfrak{O}^2 + \frac{45}{2}\lambda O^2\right)\ldots(D)$$
$$+\,P^2\left(-\frac{9}{2}\lambda O + \frac{45}{2}\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(E)$$
$$= 0$$

§ **131**. *Для четвертого порядка, с множителем* K^3:

$$\text{I)}\quad \frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} - \frac{2(m+1)\,dR}{dt} - 3\lambda\cdot\mathfrak{R},$$

$$+\mathfrak{R}\left(-\frac{3}{2}\cos 2p + 6\lambda\mathfrak{O} - 12\lambda\mathfrak{O}^2 + 6\lambda O^2\right)\ldots(\mathfrak{A})$$

$$+R\left(\frac{3}{2}\sin 2p - 3\lambda O + 12\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(\mathfrak{B})$$

$$+\mathfrak{P}\mathfrak{Q}(6\lambda - 24\lambda\mathfrak{O} + 60\lambda\mathfrak{O}^2 - 30\lambda O^2)\ldots(2\mathfrak{C})$$

$$+(\mathfrak{P}\cdot Q + P\mathfrak{Q})(12\lambda O - 60\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(\mathfrak{D})$$

$$+PQ\left(-3\lambda + 12\lambda\mathfrak{O} - 30\lambda\mathfrak{O}^2 + \frac{45}{2}\lambda O^2\right)\ldots(2\mathfrak{E})$$

$$+\mathfrak{P}^3(-4\lambda + 20\lambda\mathfrak{O} - 60\lambda\mathfrak{O}^2 + 30\lambda O^2)\ldots(\mathfrak{F})$$

$$+\mathfrak{P}^2P(-30\lambda O + 180\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(\mathfrak{G})$$

$$+\mathfrak{P}\cdot P^2\left(6\lambda - 30\lambda\mathfrak{O} + 90\lambda\mathfrak{O}^2 - \frac{135}{2}\lambda O^2\right)\ldots(\mathfrak{H})$$

$$+P^3\left(\frac{15}{2}\lambda O - 45\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(\mathfrak{I}) = 0$$

$$\text{II)}\quad \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{2(m+1)\,d\mathfrak{R}}{dt}$$

$$+\mathfrak{R}\left(\frac{3}{2}\sin 2p - 3\lambda O + 12\mathfrak{O}O\right)\ldots(A)$$

$$+R\left(\frac{3}{2}\cos 2p - 3\lambda\mathfrak{O} + 6\lambda\mathfrak{O}^2 - \frac{9}{2}\lambda O^2\right)\ldots(B)$$

$$+\mathfrak{P}\mathfrak{Q}(12\lambda O - 60\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(2C)$$

$$+(\mathfrak{P}Q + P\mathfrak{Q})\left(-3\lambda + 12\lambda\mathfrak{O} - 30\lambda\mathfrak{O}^2 + \frac{45}{2}\lambda O^2\right)\ldots(D)$$

$$+PQ(-9\lambda O + 45\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(2E)$$

$$+\mathfrak{P}^3(-10\lambda O + 60\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(F)$$

$$+\mathfrak{P}^2\cdot P\left(6\lambda - 30\lambda\mathfrak{O} + 90\lambda\mathfrak{O}^2 - \frac{135}{2}\lambda O^2\right)\ldots(G)$$

$$+\mathfrak{P}\cdot P^2\left(\frac{45}{2}\lambda O - 135\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(H)$$

$$+P^3\left(-\frac{3}{2}\lambda + \frac{15}{2}\lambda\mathfrak{O} - \frac{45}{2}\lambda\mathfrak{O}^2 + \frac{75}{4}\lambda O^2\right)\ldots(I) = 0$$

§ **132.** *Для пятого порядка, с множителем a:*

$$\text{I)}\quad \frac{d^2\mathfrak{S}}{dt^2}-\frac{2(m+1)\,dS}{dt}-3\lambda\mathfrak{S},$$
$$-\mathfrak{S}\left(-\frac{3}{2}\cos 2p+6\lambda\mathfrak{O}-12\lambda\mathfrak{O}^2+6\lambda O^2\right)\dots(\mathfrak{A})$$
$$+S\left(\frac{3}{2}\sin 2p-3\lambda O+12\lambda\mathfrak{O}O\right)\dots(\mathfrak{B})$$
$$-\frac{3}{8}(3\cos p+5\cos 3p)(1+2\mathfrak{O}+\mathfrak{O}^2)$$
$$+\frac{3}{4}(\sin p+5\cdot\sin 3p)(O+\mathfrak{O}O)$$
$$-\frac{3}{8}(\cos p-5\cos 3p)\,O^2=0$$

$$\text{II)}\quad \frac{d^2S}{dt^2}+\frac{2(m+1)\,d\mathfrak{S}}{dt},$$
$$+\mathfrak{S}\left(\frac{3}{2}\sin 2p-3\lambda O+12\lambda\mathfrak{O}O\right)\dots(A)$$
$$+S\left(\frac{3}{2}\cos 2p-3\lambda\mathfrak{O}+6\lambda\mathfrak{O}^2-\frac{9}{2}\lambda O^2\right)\dots(B)$$
$$+\frac{3}{8}(\sin p+5\sin 3p)(1+2\mathfrak{O}^2+\mathfrak{O}^2)$$
$$-\frac{3}{4}(\cos p-5\cos 3p)(O+\mathfrak{O}O)$$
$$+\frac{3}{8}(3\sin p-5\sin 3p)\,O^2=0$$

§ **133.** *Для шестого порядка, с множителем aK:*

$$\text{I)}\quad \frac{d^2\mathfrak{T}}{dt^2}-\frac{2(m+1)\,dT}{dt}-3\lambda\mathfrak{T},$$
$$+\mathfrak{T}\left(-\frac{3}{2}\cos 2p+6\lambda\mathfrak{O}-12\lambda\mathfrak{O}^2+6\lambda O^2\right)\dots(\mathfrak{A})$$
$$+T\left(\frac{3}{2}\sin 2p-3\lambda O+12\lambda\mathfrak{O}O\right)\dots(\mathfrak{B})$$
$$+\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{S}(6\lambda-24\lambda\mathfrak{O}+60\lambda\mathfrak{O}^2-30\lambda O^2)\dots(2\mathfrak{C})$$
$$+(\mathfrak{P}S+P\mathfrak{S})(12\lambda O+60\lambda\mathfrak{O}O)\dots(\mathfrak{D})$$
$$+PS\left(-3\lambda+12\lambda\mathfrak{O}-30\lambda\mathfrak{O}^2+\frac{45}{2}\lambda O^2\right)\dots(2\mathfrak{C})$$
$$-\frac{3}{4}(3\cos p+5\cos 3p)(\mathfrak{P}+\mathfrak{O}\mathfrak{P})$$
$$+\frac{3}{4}(\sin p+5\sin 3p)(P+\mathfrak{O}P+O\mathfrak{P})$$
$$-\frac{3}{4}(\cos p-5\cos 3p)\,OP=0$$

II) $\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{2(m+1)\,d\mathfrak{T}}{dt},$

$$+ \mathfrak{T}\left(\frac{3}{2}\sin 2p - 3\lambda O + 12\lambda\mathfrak{O}O\right) \ldots (A)$$

$$+ T\left(\frac{3}{2}\cos 2p - 3\lambda\mathfrak{O} + 6\lambda\mathfrak{O}^2 - \frac{9}{2}\lambda O^2\right) \ldots (B)$$

$$+ \mathfrak{P}\mathfrak{S}(12\lambda O - 60\lambda\mathfrak{O}O) \ldots (2C)$$

$$+ (\mathfrak{P}S + P\mathfrak{S})\left(-3\lambda + 12\lambda\mathfrak{O} - 30\lambda\mathfrak{O}^2 + \frac{45}{2}\lambda O^2\right) \ldots (D)$$

$$+ PS(-9\lambda O + 46\lambda\mathfrak{O}O) \ldots (2E)$$

$$+ \frac{3}{4}(\sin p + 5\sin 3p)(\mathfrak{P} + \mathfrak{O}\mathfrak{P})$$

$$- \frac{3}{4}(\cos p - 5\cos 3p)(P + \mathfrak{O}P + O\mathfrak{P})$$

$$+ \frac{3}{4}(3\sin p - 5\sin 3p)\,OP = 0$$

§ **134.** *Для седьмого порядка, с множителем* $\varkappa$:

I) $\frac{d^2\mathfrak{U}}{dt^2} - \frac{2(m+1)\,dU}{dt} - 3\lambda\mathfrak{U},$

$$+ \mathfrak{U}\left(-\frac{3}{2}\cos 2p + 6\lambda\mathfrak{O} - 12\lambda\mathfrak{O}^2 + 6\lambda O^2\right) \ldots (\mathfrak{A})$$

$$+ U\left(\frac{3}{2}\sin 2p - 3\lambda O + 12\lambda\mathfrak{O}O\right) \ldots (\mathfrak{B})$$

$$+ \frac{3}{4}[2\cos t + 7\cos(2p - t) - \cos(2p + t)](1 + \mathfrak{O})$$

$$- \frac{3}{4}[7\sin(2p - t) - \sin(2p + t)]\,O = 0$$

II) $\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{2(m+1)\,d\mathfrak{U}}{dt},$

$$+ \mathfrak{U}\left(\frac{3}{2}\sin 2p - 3\lambda O + 12\lambda\mathfrak{O}O\right) \ldots (A)$$

$$+ U\left(\frac{3}{2}\cos 2p - 3\lambda\cdot\mathfrak{O} + 6\lambda\mathfrak{O}^2 - \frac{9}{2}\lambda O^2\right) \ldots (B)$$

$$- \frac{3}{4}[7\sin(2p - t) - \sin(2p + t)](1 + \mathfrak{O})$$

$$+ \frac{3}{4}[2\cos t - 7\cos(2p - t) + \cos(2p + t)]\,O = 0$$

§ **135.** *Для восьмого порядка, с множителем* $\varkappa K$:

I) $$\frac{d^2\mathfrak{V}}{dt^2}-\frac{2(m+1)\,dV}{dt}-3\lambda\mathfrak{V},$$

$$+\mathfrak{V}\left(-\frac{3}{2}\cos 2p+6\lambda\mathfrak{O}-12\lambda\mathfrak{O}^2+6\lambda O^2\right)\ldots(\mathfrak{A})$$

$$+V\left(\frac{3}{2}\sin 2p-3\lambda O+12\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(\mathfrak{B})$$

$$+\mathfrak{P}\mathfrak{U}(6\lambda-24\lambda\mathfrak{O}+60\lambda\mathfrak{O}^2-30\lambda O^2)\ldots(2\mathfrak{C})$$

$$+(\mathfrak{P}U+P\mathfrak{U})(12\lambda O-60\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(\mathfrak{D})$$

$$+PU\left(-3\lambda+12\lambda\mathfrak{O}-30\lambda\mathfrak{O}^2+\frac{45}{2}\lambda O^2\right)\ldots(2\mathfrak{E})$$

$$+\frac{3}{4}[2\cos t+7\cos(2p-t)-\cos(2p+t)]\,\mathfrak{P}$$

$$-\frac{3}{4}[7\cdot\sin\cdot(2p-t)-\sin(2p+t)]\,P=0$$

II) $$\frac{d^2V}{dt^2}+\frac{2(m+1)\,d\mathfrak{V}}{dt},$$

$$+\mathfrak{V}\left(\frac{3}{2}\sin 2p-3\lambda O+12\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(A)$$

$$+V\left(\frac{3}{2}\cos 2p-3\lambda\mathfrak{O}+6\lambda\mathfrak{O}^2-\frac{9}{2}\lambda O^2\right)\ldots(B)$$

$$+\mathfrak{P}\mathfrak{U}(12\lambda O-60\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(2C)$$

$$+(\mathfrak{P}U+P\mathfrak{U})\left(-3\lambda+12\lambda\mathfrak{O}-30\lambda\mathfrak{O}^2+\frac{45}{2}\lambda O^2\right)\ldots(D)$$

$$+PU(-9\lambda O+45\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(2E)$$

$$-\frac{3}{4}[7\sin(2p-t)-\sin(2p+t)]\,\mathfrak{P}$$

$$+\frac{3}{4}[2\cos t-7\cos(2p-t)+\cos(2p+t)]\,P=0$$

§ **136.** *Для девятого порядка, с множителем* $\varkappa K^2$:

I) $$\frac{d^2\mathfrak{W}}{dt^2}-\frac{2(m+1)\,dW}{dt}-3\lambda\cdot\mathfrak{W},$$

$$+\mathfrak{W}\left(-\frac{3}{2}\cos 2p+6\lambda\mathfrak{O}-12\lambda\mathfrak{O}^2+6\lambda O^2\right)\ldots(\mathfrak{A})$$

$$+W\left(\frac{3}{2}\sin 2p-3\lambda O+12\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(\mathfrak{B})$$

$$+(\mathfrak{P}\mathfrak{W}+\mathfrak{Q}\mathfrak{U})(6\lambda-24\lambda\mathfrak{O}+60\lambda\mathfrak{O}^2-30\lambda O^2)\ldots(2\mathfrak{C})$$

$$+(\mathfrak{P}V+\mathfrak{Q}U+P\mathfrak{W}+Q\mathfrak{U})(12\lambda O-60\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(\mathfrak{D})$$

$$+(PV+QU)\left(-3\lambda+12\lambda\mathfrak{O}-30\lambda\mathfrak{O}^2+\frac{45}{2}\lambda O^2\right)\ldots(2\mathfrak{E})$$

$$+\mathfrak{P}^2\mathfrak{U}(-12\lambda+60\lambda\mathfrak{O}-180\lambda\mathfrak{O}^2+90\lambda O^2)\ldots(3\mathfrak{F})$$

$$+(\mathfrak{P}^2U+2\mathfrak{P}P\mathfrak{U})(-30\lambda O+180\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(\mathfrak{G})$$

$$+(P^2\mathfrak{U}+2\mathfrak{P}PU)\left(6\lambda-30\lambda\mathfrak{O}+90\lambda\mathfrak{O}^2-\frac{135}{2}\lambda O^2\right)\ldots(\mathfrak{H})$$

$$+P^2U\left(\frac{45}{2}\lambda O-135\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(3\mathfrak{I})$$

$$+\frac{3}{4}[2\cos t+7\cos(2p-t)-\cos(2p+t)]\,\mathfrak{Q}$$

$$-\frac{3}{4}[7\sin(2p-t)-\sin(2p+t)]\,Q=0$$

II) $$\frac{d^2W}{dt^2}+\frac{2(m+1)\,d\mathfrak{W}}{dt},$$

$$+\mathfrak{W}\left(\frac{3}{2}\sin 2p-3\lambda O+12\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(A)$$

$$+W\left(\frac{3}{2}\cos 2p-3\lambda\mathfrak{O}+6\lambda\mathfrak{O}^2-\frac{9}{2}\lambda O^2\right)\ldots(B)$$

$$+(\mathfrak{P}\mathfrak{W}+\mathfrak{Q}\mathfrak{U})(12\lambda O-60\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(2C)$$

$$+(\mathfrak{P}V+\mathfrak{Q}U+P\mathfrak{W}+Q\mathfrak{U})\left(-3\lambda+12\lambda\mathfrak{O}-30\lambda\mathfrak{O}^2+\frac{45}{2}\lambda O^2\right)\ldots(D)$$

$$+(PV+QU)(-9\lambda O+45\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(2E)$$

$$+\mathfrak{P}^2\mathfrak{U}(-30\lambda O+180\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(3F)$$

$$+(\mathfrak{P}^2U+2\mathfrak{P}P\mathfrak{U})\left(6\lambda-30\lambda\mathfrak{O}+90\lambda\mathfrak{O}^2-\frac{135}{2}\lambda O^2\right)\ldots(G)$$

$$+(P^2\mathfrak{U}+2\mathfrak{P}PU)\left(\frac{45}{2}\lambda O-135\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(H)$$

$$+P^2U\left(-\frac{9}{2}\lambda+\frac{45}{2}\lambda\mathfrak{O}-\frac{135}{2}\lambda\mathfrak{O}^2+\frac{225}{4}\lambda O^2\right)\ldots(3I)$$

$$-\frac{3}{4}[7\sin(2p-t)-\sin(2p+t)]\,\mathfrak{Q}$$

$$+\frac{3}{4}[2\cos t-7\cos(2p-t)+\cos(2p+t)]\,Q=0$$

§ **137.** *Для десятого порядка, с множителем ах:*

$$\text{I)}\quad \frac{d^2\mathfrak{w}}{dt^2} - \frac{2(m+1)\,dw}{dt} - 3\lambda\mathfrak{w},$$

$$+\mathfrak{w}\left(-\frac{3}{2}\cos 2p + 6\lambda\mathfrak{O} - 12\lambda\mathfrak{O}^2 + 6\lambda O^2\right)\ldots(\mathfrak{A})$$

$$+w\left(\frac{3}{2}\sin 2p - 3\lambda O + 12\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(\mathfrak{B})$$

$$+\mathfrak{S}\mathfrak{U}(6\lambda - 24\lambda\mathfrak{O} + 60\lambda\mathfrak{O}^2 - 30\lambda O^2)\ldots(2\mathfrak{C})$$

$$+(\mathfrak{S}U + S\mathfrak{U})(12\lambda O - 60\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(\mathfrak{D})$$

$$+SU\left(-3\lambda + 12\lambda\mathfrak{O} - 30\lambda\mathfrak{O}^2 + \frac{45}{2}\lambda O^2\right)\ldots(2\mathfrak{C})$$

$$-\frac{3}{4}(3\cos p + 5\cos 3p)(\mathfrak{U} + \mathfrak{O}\mathfrak{U})$$

$$+\frac{3}{4}(\sin p + 5\sin 3p)(U + \mathfrak{O}U + O\mathfrak{U})$$

$$-\frac{3}{4}(\cos p - 5\cos 3p)\,OU$$

$$+\frac{3}{4}[2\cos t + 7\cos(2p - t) - \cos(2p + t)]\,\mathfrak{S}$$

$$-\frac{3}{4}[7\sin(2p - t) - \sin(2p + t)]\,S$$

$$+\frac{3}{8}[9\cos(p - t) + 3\cos(p + t) + 25\cos(3p - t) - 5\cos(3p + t)]$$
$$(1 + 2\mathfrak{O} + \mathfrak{O}^2)$$

$$-\frac{3}{4}[3\sin(p - t) + \sin(p + t) + 25\sin(3p - t) - 5\sin(3p + t)]$$
$$(O + \mathfrak{O}O)$$

$$+\frac{3}{8}[3\cos(p - t) + \cos(p + t) - 25\cos(3p - t)$$
$$+ 5\cos(3p + t)]\,O^2 = 0$$

$$\text{II)}\quad \frac{d^2\mathfrak{w}}{dt^2}+\frac{2(m+1)\,d\mathfrak{w}}{dt},$$

$$+\mathfrak{w}\left(\frac{3}{2}\sin 2p-3\lambda O+12\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(A)$$

$$+w\left(\frac{3}{2}\cos 2p-3\lambda\mathfrak{O}+6\lambda\mathfrak{O}^2-\frac{9}{2}\lambda O^2\right)\ldots(B)$$

$$+\mathfrak{S}\mathfrak{U}(12\lambda O-60\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(2C)$$

$$+(\mathfrak{S}U+S\mathfrak{U})\left(-3\lambda+12\lambda\mathfrak{O}-30\lambda\mathfrak{O}^2+\frac{45}{2}\lambda O^2\right)\ldots(D)$$

$$+SU(-9\lambda O+45\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(2E)$$

$$+\frac{3}{4}(\sin p+5\sin 3p)(\mathfrak{U}+\mathfrak{O}\mathfrak{U})$$

$$-\frac{3}{4}(\cos p-5\cos 3p)(U+\mathfrak{O}U+O\mathfrak{U})$$

$$+\frac{3}{4}(3\sin p-5\sin 3p)\,OU$$

$$-\frac{3}{4}[7\sin(2p-t)-\sin(2p+t)]\,\mathfrak{S}$$

$$+\frac{3}{4}[2\cos t-7\cos(2p-t)+\cos(2p+t)]\,S$$

$$-\frac{3}{8}[3\sin(p-t)+\sin(p+t)+25\sin(3p-t)-5\sin(3p+t)]$$
$$(1+2\mathfrak{O}+\mathfrak{O}^2)$$

$$+\frac{3}{4}[3\cos(p-t)+\cos(p+t)-25\cos(3p-t)+5\cos(3p+t)]$$
$$(O+\mathfrak{O}O)$$

$$-\frac{3}{8}[9\sin(p-t)+3\sin(p+t)-25\sin(3p-t)+$$
$$+5\sin(3p-t)]\,O^2=0$$

§ **138.** *Для одиннадцатого порядка с множителем* i^2:

$$\text{I)}\quad \frac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2}-\frac{2(m+1)\,dX}{dt}-3\lambda\mathfrak{X}.$$

$$+\mathfrak{X}\left(-\frac{3}{2}\cos 2p+6\lambda\mathfrak{O}-12\lambda\mathfrak{O}^2+6\lambda O^2\right)\ldots(\mathfrak{A})$$

$$+X\left(\frac{3}{2}\sin 2p-3\lambda O+12\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(\mathfrak{B})$$

$$+\mathfrak{h}\left(-\frac{3}{2}\lambda+6\lambda\mathfrak{O}-15\lambda\mathfrak{O}^2+\frac{15}{4}\lambda O^2\right)=0$$

$$\text{II)}\quad \frac{d^2X}{dt^2}+\frac{2(m+1)\,d\mathfrak{X}}{dt},$$

$$+\mathfrak{X}\left(\frac{3}{2}\sin 2p-3\lambda O+12\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(A)$$

$$+X\left(\frac{3}{2}\cos 2p-3\lambda\mathfrak{O}+6\lambda\mathfrak{O}^2-\frac{9}{2}\lambda O^2\right)\ldots(B)$$

$$+\mathfrak{h}\cdot\left(-\frac{3}{2}\lambda O+\frac{15}{2}\lambda\mathfrak{O}O\right)=0$$

§ **139.** *Для двенадцатого порядка с множителем* i^2K:

$$\text{I)}\quad \frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2}-\frac{2(m+1)\,dY}{dt}-3\lambda\mathfrak{Y},$$

$$+\mathfrak{Y}\left(-\frac{3}{2}\cos 2p+6\lambda\mathfrak{O}-12\lambda\mathfrak{O}^2+6\lambda O^2\right)\ldots(\mathfrak{A})$$

$$+Y\left(\frac{3}{2}\sin 2p-3\lambda O+12\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(\mathfrak{B})$$

$$+\mathfrak{P}\mathfrak{X}(6\lambda-24\lambda\mathfrak{O}+60\lambda\mathfrak{O}^2-30\lambda O^2)\ldots(2\,.\,\mathfrak{C})$$

$$+(\mathfrak{P}X+P\mathfrak{X})(12\lambda O-60\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(\mathfrak{D})$$

$$+PX\left(-3\lambda+12\lambda\mathfrak{O}-30\lambda\mathfrak{O}^2+\frac{45}{2}\lambda O^2\right)\ldots(2\,.\,\mathfrak{E})$$

$$+\mathfrak{h}\left(6\cdot\lambda\mathfrak{P}-30\lambda\mathfrak{O}\mathfrak{P}+\frac{15}{2}\lambda OP\right)$$

$$+\mathfrak{Q}\left(-\frac{3}{2}\lambda+6\lambda\mathfrak{O}\right)=0$$

$$\text{II)}\quad \frac{d^2Y}{dt^2}+\frac{2(m+1)\,d\mathfrak{Y}}{dt},$$

$$+\mathfrak{Y}\left(\frac{3}{2}\sin 2p-3\lambda O+12\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(A)$$

$$+Y\left(\frac{3}{2}\cos 2p-3\lambda\mathfrak{O}+6\lambda\mathfrak{O}^2-\frac{9}{2}\lambda O^2\right)\ldots(B)$$

$$+\mathfrak{P}\mathfrak{X}(12\lambda O-60\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(2C)$$

$$+(\mathfrak{P}X+P\mathfrak{X})\left(-3\lambda+12\lambda\mathfrak{O}-30\lambda\mathfrak{O}^2+\frac{45}{2}\lambda O^2\right)\ldots(D)$$

$$+IX(-9\lambda O+45\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(2E)$$

$$+\mathfrak{h}\left(-\frac{3}{2}\lambda P+\frac{15}{2}\lambda\mathfrak{O}P+\frac{15}{2}\lambda O\mathfrak{P}\right)$$

$$-\frac{3}{2}\mathfrak{Q}\lambda O=0$$

§ **140.** *Для тринадцатого порядка с множителем* $i^2 K^2$:

$$\text{I)}\quad \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2} - \frac{2(m+1)\,dZ}{dt} - 3\lambda\mathfrak{Z},$$

$$+\mathfrak{Z}\left(-\frac{3}{2}\cos 2p + 6\lambda\mathfrak{O} - 12\lambda\mathfrak{O}^2 + 6\lambda O^2\right)\ldots(\mathfrak{A})$$

$$+Z\left(\frac{3}{2}\sin 2p - 3\lambda O + 12\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(\mathfrak{B})$$

$$+(\mathfrak{P}\mathfrak{Y}+\mathfrak{Q}\mathfrak{X})(6\lambda - 24\lambda\mathfrak{O} + 60\lambda\mathfrak{O}^2 - 30\lambda O^2)\ldots(2\mathfrak{C})$$

$$+(\mathfrak{P}Y + P\mathfrak{Y}) + \mathfrak{Q}X + Q\mathfrak{X})(12\lambda O - 60\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(\mathfrak{D})$$

$$+(PY+QX)\left(-3\lambda + 12\lambda\mathfrak{O} - 30\lambda\mathfrak{O}^2 + \frac{45}{4}\lambda O^2\right)\ldots(2\mathfrak{E})$$

$$+\mathfrak{P}^2\mathfrak{X}(-12\lambda + 60\lambda\mathfrak{O} - 180\lambda\mathfrak{O}^2 + 90\lambda O^2)\ldots(3\mathfrak{F})$$

$$+(\mathfrak{P}^2X + 2\mathfrak{P}P\mathfrak{X})(-30\lambda O + 180\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(\mathfrak{G})$$

$$+(P^2\mathfrak{X} + 2\mathfrak{P}PX)\left(6\lambda - 30\lambda\mathfrak{O} + 90\lambda\mathfrak{O}^2 - \frac{135}{2}\lambda O^2\right)\ldots(\mathfrak{H})$$

$$+P^2X\left(\frac{45}{2}\lambda O - 135\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(3\mathfrak{J})$$

$$+\mathfrak{h}\left[6\lambda\mathfrak{Q} - 30\lambda\mathfrak{O}\mathfrak{Q} + \frac{15}{2}\lambda OQ - 15\cdot\lambda\mathfrak{P}^2 + \frac{15}{4}\lambda P^2 + 90\lambda\mathfrak{O}\mathfrak{P}^2\right.$$

$$\left. - \frac{45}{2}\lambda\mathfrak{O}P^2 - 45\lambda O\mathfrak{P}P\right]$$

$$+\mathfrak{y}\left(6\lambda\mathfrak{P} - 30\lambda\mathfrak{O}\mathfrak{P} + \frac{15}{2}\lambda OP\right)$$

$$+\mathfrak{z}\left(-\frac{3}{2}\lambda + 6\lambda\mathfrak{O}\right) = 0$$

II) $$\frac{d^2Z}{dt^2}+\frac{2(m+1)\,d\mathfrak{Z}}{dt},$$

$$+\mathfrak{Z}\left(\frac{3}{2}\sin 2p-3\lambda O+12\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(A)$$

$$+Z\left(\frac{3}{2}\cos 2p-3\lambda\mathfrak{O}+6\lambda\mathfrak{O}^2-\frac{9}{2}\lambda O^2\right)\ldots(B)$$

$$+(\mathfrak{P}\mathfrak{Y}+\mathfrak{Q}\mathfrak{X})(12\lambda O-60\mathfrak{O}\lambda O)\ldots(2C)$$

$$+(\mathfrak{P}Y+P\mathfrak{Y}+\mathfrak{Q}X+Q\mathfrak{X})\left(-3\lambda+12\lambda\mathfrak{O}-30\lambda\mathfrak{O}^2+\frac{45}{2}\lambda O^2\right)\ldots(D)$$

$$+(PY+QX)(-9\lambda O+45\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(2E)$$

$$+\mathfrak{P}^2\mathfrak{X}(-30\lambda O+180\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(3F)$$

$$+(\mathfrak{P}^2X+2\mathfrak{P}P\mathfrak{X})\left(6\lambda-30\lambda\mathfrak{O}+90\lambda\mathfrak{O}^2-\frac{135}{2}\lambda O^2\right)\ldots(G)$$

$$+(P^2\mathfrak{X}+2\mathfrak{P}PX)\left(\frac{45}{2}\lambda O-135\lambda\mathfrak{O}O\right)\ldots(H)$$

$$+P^2X\left(-\frac{9}{2}\lambda+\frac{45}{2}\lambda\mathfrak{O}-\frac{135}{2}\lambda\mathfrak{O}^2+\frac{225}{4}\lambda O^2\right)\ldots(3I)$$

$$+\mathfrak{h}\left[-\frac{3}{2}\lambda Q+\frac{15}{2}\lambda(O\mathfrak{Q}+\mathfrak{O}Q)+\frac{15}{2}\lambda\mathfrak{P}P\right.$$

$$\left.-\frac{45}{2}\lambda(O\mathfrak{P}^2+2\mathfrak{O}\mathfrak{P}P)+\frac{45}{4}\lambda OP^2\right]$$

$$+♃\left(-\frac{3}{2}\lambda P+\frac{15}{2}\lambda(\mathfrak{O}P+O\mathfrak{P})\right)$$

$$+♂\cdot\left(-\frac{3}{2}\lambda O\right)=0$$

§ **141.** В виду того, что в предыдущих формулах часто повторяются некоторые множители, содержащие буквы $\mathfrak{O}$ и O, мы их отметили в первых уравнениях буквами $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ и пр., во вторых — буквами A, B, C; значения этих количеств приводятся ниже:

$$\mathfrak{A} = -\frac{3}{2}\cos 2p + 6\lambda\mathfrak{O} - 12\lambda\mathfrak{O}^2 + 6\lambda O^2$$

$$\mathfrak{B} = A = \frac{3}{2}\sin 2p - 3\lambda O + 12\lambda\mathfrak{O}O$$

$$B = \frac{3}{2}\cos 2p - 3\lambda\mathfrak{O} + 6\lambda\mathfrak{O}^2 - \frac{9}{2}\lambda O^2$$

$$\mathfrak{C} = 3\lambda - 12\lambda\mathfrak{O} + 30\lambda\mathfrak{O}^2 - 15\lambda O^2$$

$$\mathfrak{D} = 2C = 12\lambda O - 60\lambda\mathfrak{O}O$$

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2}D = -\frac{3}{2}\lambda + 6\lambda\mathfrak{O} - 15\lambda\mathfrak{O}^2 + \frac{45}{4}\lambda O^2$$

$$E = -\frac{3}{8}\mathfrak{D} = -\frac{9}{2}\lambda O + \frac{45}{2}\lambda\mathfrak{O}O$$

$$\mathfrak{F} = -4\lambda + 20\lambda\mathfrak{O} - 60\lambda\mathfrak{O}^2 + 30\lambda O^2$$

$$\mathfrak{G} = 3F = -30\lambda O + 180\lambda\mathfrak{O}O$$

$$\mathfrak{H} = G = 6\lambda - 30\lambda\mathfrak{O} + 90\lambda\mathfrak{O}^2 - \frac{135}{2}\lambda O^2$$

$$\mathfrak{I} = -\frac{1}{4}\mathfrak{G} = \frac{1}{3}H = \frac{15}{2}\lambda O - 45\lambda\mathfrak{O}O$$

$$I = -\frac{3}{2}\lambda + \frac{15}{2}\lambda\mathfrak{O} - \frac{45}{2}\lambda\mathfrak{O}^2 + \frac{75}{4}\lambda O^2$$

§ **142.** После того как для двух первых основных уравнений составлены те дифференциальные уравнения, которыми определяются члены различных порядков, остается выполнить подобное же развитие для третьего уравнения, в котором содержатся лишь члены пяти порядков. Мы получим:

Для первого порядка (I); *множитель* i:

$$\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} + (\lambda + 1)\mathfrak{p},$$

$$+ \mathfrak{p}\left(-3\lambda\mathfrak{O} + 6\lambda\mathfrak{O}^2 - \frac{3}{2}\lambda O^2\right) \ldots \mathfrak{a} = 0$$

Множитель при букве $\mathfrak{p}$, содержащий $\mathfrak{O}$ и O, обозначим через $(\mathfrak{a})$, подобное же обозначение будем делать и для других аналогичных множителей.

Для второго порядка (II); *множитель* iK:

$$\frac{d^2\mathfrak{q}}{dt^2}+(\lambda+1)\mathfrak{q},$$
$$+\mathfrak{q}\left(-3\lambda\mathfrak{O}+6\lambda\mathfrak{O}^2-\frac{3}{2}\lambda O^2\right)\ldots(\mathfrak{a})$$
$$+\mathfrak{P}\mathfrak{p}\left(-3\lambda+12\lambda\mathfrak{O}-30\lambda\mathfrak{O}^2+\frac{15}{2}\lambda O^2\right)\ldots(\mathfrak{b})$$
$$+P\mathfrak{p}(-3\lambda O+15\lambda\mathfrak{O}O)=0\ldots(\mathfrak{c})$$

Для третьего порядка с множителем iK^2:

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{t^2d}+(\lambda+1)\mathfrak{r},$$
$$+\mathfrak{r}\left(-3\lambda\mathfrak{O}+6\lambda\mathfrak{O}^2-\frac{3}{2}\lambda O^2\right)\ldots(\mathfrak{a})$$
$$+(\mathfrak{P}\mathfrak{q}+\mathfrak{Q}\mathfrak{p})\left(-3\lambda+12\lambda\mathfrak{Q}-30\lambda\mathfrak{O}^2+\frac{15}{2}\lambda O^2\right)\ldots(\mathfrak{b})$$
$$+(P\mathfrak{q}+Q\mathfrak{p})(-3\lambda O+15\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(\mathfrak{c})$$
$$+\mathfrak{P}^2\mathfrak{p}\left(6\lambda-30\lambda\mathfrak{O}+90\lambda\mathfrak{O}^2-\frac{45}{2}\lambda\mathfrak{O}^2\right)\ldots(\mathfrak{d})$$
$$+\mathfrak{P}P\mathfrak{p}(15\lambda O-90\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(\mathfrak{e})$$
$$+P^2\mathfrak{p}\left(-\frac{3}{2}\lambda+\frac{15}{2}\lambda\mathfrak{O}-\frac{45}{2}\lambda\mathfrak{O}^2+\frac{45}{4}\lambda O^2\right)\ldots(\mathfrak{f})=0$$

Для четвертого порядка с множителем $i\varkappa$:

$$\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}+(\lambda+1)\mathfrak{s},$$
$$+\mathfrak{s}\left(-3\lambda\mathfrak{O}+6\lambda\mathfrak{O}^2-\frac{3}{2}\lambda O^2\right)\ldots(\mathfrak{a})$$
$$+\mathfrak{U}\mathfrak{p}\left(-3\lambda+12\lambda\mathfrak{O}-30\lambda\mathfrak{O}^2+\frac{15}{2}\lambda O^2\right)\ldots(\mathfrak{b})$$
$$+U\mathfrak{p}(-3\lambda O+15\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(\mathfrak{c})$$
$$-3\mathfrak{p}\cos t=0$$

Для пятого порядка с множителем i^2:

$$\frac{d^2\mathfrak{t}}{dt^2}+(\lambda+1)\mathfrak{t},$$
$$+\mathfrak{t}\left(-3\lambda\mathfrak{O}+6\lambda\mathfrak{O}^2-\frac{3}{2}\lambda O^2\right)\ldots(\mathfrak{a})$$
$$+\mathfrak{X}\mathfrak{p}\left(-3\lambda+12\lambda\mathfrak{O}-30\lambda\mathfrak{O}^2+\frac{15}{2}\lambda O^2\right)\ldots(\mathfrak{b})$$
$$+X\mathfrak{p}(-3\lambda O+15\lambda\mathfrak{O}O)\ldots(\mathfrak{c})$$
$$+\mathfrak{h}\mathfrak{p}\left(-\frac{3}{2}\lambda+\frac{15}{2}\lambda\mathfrak{O}\right)=0$$

§ **143.** Все эти отдельные уравнения надо теперь рассмотреть, начав с последних пяти уравнений, как этого требуют уравнения трех последних порядков *для* x *и* y, *ибо* с одиннадцатого порядка уже встречается величина $\mathfrak{h}$, значение которой не иначе может быть определено, как после решения общих уравнений для переменной z, так как $\mathfrak{h} = \mathfrak{p}^2$; это же в еще большей мере относится к уравнениям для двенадцатого и тринадцатого порядков. Однако оказалось удобнее начать с первых уравнений и, дойдя до десятого порядка включительно, обратиться к последним пяти уравнениям, а затем вернуться к последним трем уравнениям первой группы.

ЧАСТЬ 2-я

ЧИСЛЕННОЕ РАЗВИТИЕ УРАВНЕНИЙ, СОСТАВЛЕННЫХ В ПРЕДЫДУЩЕЙ ЧАСТИ, ДЛЯ КООРДИНАТ x и y

ГЛАВА I

Развитие уравнений для величин $\mathfrak{O}$ и O, составляющих первый порядок

§ **144.** Те два *отдельных* уравнения, которыми определяются величины $\mathfrak{O}$ и O, суть следующие:

$$\text{I)}\quad \frac{d^2\mathfrak{O}}{dt^2} - 2(m+1)\frac{dO}{dt} - \lambda\mathfrak{O}, - \frac{3}{2}\cos 2p,$$

$$- \frac{3}{2}\mathfrak{O}\cos 2p + \frac{3}{2}O\sin 2p, \quad + 3\lambda\mathfrak{O}^2 - \frac{3}{2}\lambda O^2 = 0$$

$$\text{II)}\quad \frac{d^2O}{dt^2} + 2(m+1)\frac{d\mathfrak{O}}{dt}, \quad + \frac{3}{2}\sin 2p, \quad + \frac{2}{2}\mathfrak{O}\sin 2p + \frac{3}{2}O\cos 2p,$$

$$- 3\lambda\mathfrak{O}O = 0$$

§ **145.** Легко предвидеть, что величины $\mathfrak{O}$ и O будут весьма малые по сравнению с единицею, поэтому сперва отбрасываем последние члены (удержав в первом уравнении первые четыре и во втором — первые три члена), чтобы получить приближенные значения $\mathfrak{O}$ и O. Применим изложенное в § 85; имеем в нашем случае, для определения $\mathfrak{N}\cos\omega$ и $N\sin\omega$, $\omega = 2p$, следовательно $\mu = 2m$ и

$$\mathfrak{M} = -\frac{3}{2}; \quad M = +\frac{3}{2}$$

поэтому полагаем:

$$\mathfrak{O} = \mathfrak{N}\cos 2p; \quad O = N\sin 2p$$

§ **146.** Формулы, по которым вычисляются $\mathfrak{N}$ и N, суть (§ 85):

$$\mathfrak{N} = \frac{\frac{2(m+1)}{\mu}M - \mathfrak{M}}{\lambda - 2 - \mu^2}; \quad N = \frac{M}{\mu^2} - \frac{2(m+1)}{\mu}\mathfrak{N}$$

численные же значения, кроме вышеприведенных, суть (§ 79):

$$m + 1 = 13.36892; \quad \lambda - 2 = 177.228928$$
$$\mu = 2m = 24.73784$$

По подстановке этих значений получаем:

$$\mathfrak{N} = - 0.0071797; \quad N = 0.0102113$$

§ **147.** Таким образом первое приближение доставляет такие значения:

$$\mathfrak{O} = -0.0071797\cos 2p$$
$$O = +0.0102113\sin 2p$$

По подстановке их в первоначально отброшенные члены, для получения более близкого приближения, имеем:

$$\mathfrak{O}\cos 2p = -0.0035898 - 0.0035898\cos 4p$$
$$\mathfrak{O}\sin 2p = -0.0035898\sin 4p$$
$$O\cos 2p = +0.0051056\sin 4p$$
$$O\sin 2p = +0.0051056 - 0.0051056\cos 4p$$
$$3\lambda\mathfrak{O}^2 = 0.0138583 - 0.0138583\cos 4p$$
$$\frac{3}{2}\lambda O^2 = +0.0140162 - 0.0140162\cos 4p$$
$$3\lambda\mathfrak{O}O = -0.0197099\sin 4p$$

Подставляя эти последние выражения, получим для присоединенных частей следующие значения:

для уравнения I)

$$-1.5000000\cos 2p + 0.0128852 + 0.0256008\cos 4p$$

для уравнения II)

$$+1.5000000\sin 2p + 0.0219836\sin 4p$$

и так как первые в них члены, содержащие угол $2p$, остались прежние, то эти члены в значениях $\mathfrak{Q}$ и O остаются без изменения, так что будет для

$$\mathfrak{Q} \ldots - 0.0071797 \cos 2p$$

Кроме того, на основании § 86, сюда добавится постоянный член, равный

$$\frac{\alpha}{2\lambda} = \frac{0.0128852}{2\lambda} = 0.0000240$$

в величине же O первый член останется без изменения:

$$0.0102113 \sin 2p$$

§ **148.** К вышеприведенным членам надо добавить члены, содержащие $\cos 4p$ и $\sin 4p$, для которых, следовательно, будет $\omega = 4p$, значит $\mu = 4m$ и

$$\mathfrak{M} = 0.0256008; \quad M = 0.0219836$$

и, вычисляя по приведенным выше формулам, получим соответственно:

$$\mathfrak{N} = 0.0000060; \quad N = 0.0000057$$

Таким образом более точные значения суть:

$$\mathfrak{Q} = 0.0000240 - 0.0071797 \cos 2p + 0.0000060 \cos 4p$$
$$O = 0.0102113 \sin 2p + 0.0000057 \sin 4p$$

§ **149.** Посмотрим теперь, требуют ли эти значения дальнейших поправок. С этой целью положим для краткости письма:

$$\mathfrak{Q} = \alpha + \beta \cos 2p + \gamma \cos 4p$$
$$O = b \sin 2p + c \sin 4p$$

по подстановке этих величин имеем для первого уравнения:

$$-\frac{3}{2}\mathfrak{Q} \cos 2p = -\frac{3}{4}\beta - \frac{3}{4}\beta \cos 4p - \frac{3}{2}\alpha \cos 2p - \frac{3}{4}\gamma \cos 2p - \frac{3}{4}\gamma \cos 6p$$

$$\frac{3}{2} O \sin 2p = \frac{3}{4} b - \frac{3}{4} b \cos 4p + \frac{3}{4} c \cos 2p - \frac{3}{4} c \cos 6p$$

$$3\lambda\mathfrak{Q}^2 = \frac{3}{2}\lambda\beta^2 + \frac{3}{2}\lambda\beta^2 \cos 4p + 6\lambda\alpha\beta \cos 2p + 3\lambda\beta\gamma \cos 2p + 3\lambda\beta\gamma \cos 6p$$

$$-\frac{3}{2}\lambda O^2 = -\frac{3}{4}\lambda b^2 + \frac{3}{4}\lambda b^2 \cos 4p - \frac{3}{2}\lambda bc \cos 2p + \frac{3}{2}\lambda bc \cos 6p$$

для второго же уравнения получим:

$$+\frac{3}{2}\mathfrak{O}\sin 2p = \frac{3}{4}\beta\sin 4p + \frac{3}{2}\alpha\sin 2p + \frac{3}{4}\gamma\sin 6p - \frac{3}{4}\gamma\sin 2p$$

$$\frac{3}{2}O\cos 2p = \frac{3}{4}b\sin 4p + \frac{3}{4}c\sin 6p + \frac{3}{4}c\sin 2p$$

$$\begin{aligned}-3\lambda\mathfrak{O}O = &-\frac{3}{2}\lambda\beta b\sin 4p - 3\lambda\alpha b\sin 2p\\ &-\frac{3}{2}\lambda\gamma b\sin 6p + \frac{3}{2}\lambda\gamma b\sin 2p\\ &-\frac{3}{2}\lambda\beta c\sin 6p - \frac{3}{2}\lambda\beta c\sin 2p\end{aligned}$$

причем мы опускаем произведения из двух весьма малых величин α, γ, c, ибо они не оказывают влияния даже на седьмой десятичный знак.

§ **150.** Таким образом коэффициенты $\mathfrak{M}$ и M будут:

$$\mathfrak{M} = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{4}\gamma + \frac{3}{4}c + 6\lambda\alpha\beta + 3\lambda\beta\gamma - \frac{3}{2}\lambda bc$$

$$M = +\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{4}\gamma + \frac{3}{4}c - 3\lambda\alpha b + \frac{3}{2}\lambda\gamma b - \frac{3}{2}\lambda\beta c$$

и так как

$$\begin{aligned}\alpha &= +0.0000240 & &\\ \beta &= -0.0071797 & b &= 0.0102113\\ \gamma &= +0.0000060 & c &= 0.0000057\end{aligned}$$

то будет:

$$\mathfrak{M} = -\frac{3}{2} - 0.0002602 = -1.5002602$$

$$M = +\frac{3}{2} - 0.0000684 = +1.4999316$$

соответственно чему будет:

$$\mathfrak{N} = -0.0071801; \quad N = +0.0102117$$

§ **151.** Остальные члены величин $\mathfrak{O}$ и O не получают никаких поправок, ибо постоянная часть величины $\mathfrak{M}$, равная

$$-\frac{3}{4}\beta + \frac{3}{4}b + \frac{3}{2}\lambda\beta^2 - \frac{3}{4}\lambda b^2$$

совсем такая, как и раньше, так что коэффициенты при $\sin 4p$ и $\cos 4p$ не отличаются от прежних; добавляются еще члены с $\sin 6p$ и $\cos 6p$, но коэффициенты при них настолько малые, что мы можем их отбросить; таким образом мы можем утверждать, что истинные значения величин $\mathfrak{O}$ и O суть:

$$\mathfrak{O} = 0.0000240 - 0.0071801 \cos 2p + 0.0000060 \cos 4p$$
$$O = 0.0102117 \sin 2p + 0.0000057 \sin 4p$$

§§ **152—153.** В этих двух параграфах Эйлер составляет сводку с численнными коэффициентами нужных ему в дальнейшем выражений:

$$3\lambda\mathfrak{O},\ 3\lambda O,\ 3\lambda\mathfrak{O}^2,\ 3\lambda O^2,\ 3\lambda\mathfrak{O}O$$

и выражений, обозначенных буквами:

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \ldots\ \mathfrak{J},\ A,\ B \cdot C \ldots J$$

но так как нам из этих выражений понадобятся весьма немногие, то мы эту сводку опускаем.

ГЛАВА II

Развитие уравнений для величин $\mathfrak{P}$ и P, входящих в члены второго порядка

§ **154.** В § 129 указано, что члены второго порядка, соответственно, суть:

в координате $x \ldots K\mathfrak{P}$
» » $» \ldots KP$

причем величины $\mathfrak{P}$ и P определяются уравнениями:

$$\frac{d^2\mathfrak{P}}{dt^2} - 2(m+1)\frac{dP}{dt} - 3\lambda\mathfrak{P} + \mathfrak{A}\mathfrak{P} + \mathfrak{B}P = 0$$
$$\frac{d^2P}{dt^2} - 2(m+1)\frac{d\mathfrak{P}}{dt} + A\mathfrak{P} + BP = 0$$

причем (§ 141)

$$\mathfrak{A} = -\frac{3}{2}\cos 2p + 6\lambda\mathfrak{O} - 12\lambda\mathfrak{O}^2 + 6\lambda O^2$$

$$\mathfrak{B} = \frac{3}{2}\sin 2p - 3\lambda O + 12\lambda\mathfrak{O}O$$

$$A = \frac{3}{2}\sin 2p - 3\lambda O + 12\lambda\mathfrak{O}O$$

$$B = \frac{3}{2}\cos 2p - 3\lambda\mathfrak{O} + 6\lambda\mathfrak{O}^2 - \frac{9}{2}\lambda O^2$$

или с численными коэффициентами:

$$\mathfrak{A} = +0.0264388 - 9.2212908 \cos 2p - 0.1050568 \cos 4p$$
$$\mathfrak{B} = 3.9906964 \sin 2p - 0.0819104 \sin 4p$$
$$A = -3.9906964 \sin 2p - 0.0819104 \sin 4p$$
$$B = -0.0272367 + 5.3606454 \cos 2p + 0.0665457 \cos 4p$$

В присоединенных частях этих уравнений надо составить для отдельных углов величины коэффициентов $\mathfrak{M}$ и M при их косинусах и синусах и по ним найти величины коэффициентов $\mathfrak{N}$ и N при косинусах тех же углов в выражениях $\mathfrak{P}$ и P.

§ **155.** Так как величины $\mathfrak{P}$ и P неизвестные, то их и надо при вычислении считать таковыми, причем, как в §§ 91 и 92 указано, в состав их выражений должны входить члены, содержащие угол q, представляющий среднюю аномалию. Этот угол будет сочетаться с углами, входящими в выражения $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, A и B, так что величины $\mathfrak{P}$ и P будут вида:

$$\mathfrak{P} = \beta \cos q + \gamma \cos(2p - q) + \delta \cos(2p + q) + \varepsilon \cos(4p - q) + \\ + \zeta \cos(4p + q)$$
$$P = b \sin q + c \sin(2p - q) + d \sin(2p + q) + e \sin(4p - q) + \\ + f \sin(4p + q)$$

§ **156.** Всего удобнее это изыскание производить последовательными приближениями, удержав сперва в выражениях $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, A и B лишь главные члены, отбросив второстепенные, в которые затем можно будет подставить найденные значения $\mathfrak{P}$ и P; таким образом для первого уравнения значения буквы $\mathfrak{M}$ для разных членов получатся на основании следующей таблицы.

	Cos q	Cos $(2p - q)$	Cos $(2p + q)$
$-9.2212908 \cos 2p \cdot \mathfrak{P}$ . .	$-4.6106454\ \gamma$	$-4.6106454\ \beta$	$-4.6106454\ \beta$
	$-4.6106454\ \delta$	$-4.6106454\ \varepsilon$	$-4.6106454\ \zeta$
$-3.9906964 \sin 2p . P$ . .	$-1.9953482\ c$	$-1.9953482\ b$	$+1.9953482\ b$
	$-1.9953482\ d$	$-1.9953482\ e$	$-1.9954482\ f$

Совершенно так же для углов $4p - q$ и $4p + q$ получим:

	Cos $(4p - q)$	Cos $(4p + q)$
$-9.2212908 \cos 2p \cdot \mathfrak{P}$	$-4.6106454\ \gamma$	$-4.6106454\ \delta$
$-3.9906964 \sin 2p \cdot P$	$+1.9953482\ c$	$+1.9953482\ d$

§ **157.** Подобным же образом из второго уравнения составляются коэффициенты M для синусов различных углов, а именно:

	Sin q	Sin $(2p-q)$	Sin $2p+q$
$-3.9906964 \sin 2p\cdot\mathfrak{P}$ . .	$-1.9953482\ \gamma$	$-1.9953482\ \beta$	$-1.9953482\ \beta$
	$+1.9953482\ \delta$	$+1.9953482\ \varepsilon$	$+1.9953482\ \zeta$
$+5.36064454 \cos 2p\cdot P$ . .	$-2.6803227\ c$	$-2.6803227\ b$	$+2.6803227\ b$
	$+2.6803227\ d$	$+2.6803227\ e$	$+2.6803227\ f$

подобным же образом для углов $4p-q$ и $4p+q$ будет:

	Sin $(4p-q)$	Sin $(4p+q)$
$-3.9906964 \sin 2p\cdot\mathfrak{P}$	$-1.9953482\ \gamma$	$-1.9953482\ \delta$
$+5.3606454 \cos 2p\cdot P$	$+2.6803227\ c$	$+2.6803227\ d$

§ **158.** Численные элементы для этих пяти углов следующие, причем надо помнить, как указано в § 97, что $m=12.36892$ и $\frac{dq}{dt}=n=13.25604$:

$\frac{\omega}{\mu}$	$\frac{q}{p}$	$\frac{2p-q}{2m-n}$	$\frac{2p+q}{2m+n}$	$\frac{4p-q}{4m-n}$	$\frac{4p+q}{4m+n}$
μ	13.25604	11.48180	37.99388	36.21964	62.73172
μ^2	175.722608	131.831730	1443.53466	1311.86121	3935.26809
$\lambda-2$	177.228928	177.228928	177.22893	177.22893	177.22893
Знаменатель	+ 1.506320	+ 45.397200	−1266.30573	−1134.63228	−3758.03916

§ **159.** Для большей ясности даем сводку значений $\mathfrak{M}$ и M для отдельных углов:

I. *Для угла* q:

$$\mathfrak{M}=-4.6106454(\gamma+\delta)-1.9953482(c+d)$$
$$M=-1.9953482(\gamma-\delta)-2.6803227(c-d)$$

II. *Для угла* $2p-q$:

$$\mathfrak{M}=-4.6106454(\beta+\varepsilon)-1.9953482(b+e)$$
$$M=-1.9953482(\beta-\varepsilon)-2.6803227(b-e)$$

III. *Для угла* $2p + q$:

$$\mathfrak{M} = -4.6106454(\beta + \zeta) + 1.9953482(b - f)$$
$$M = -1.9953482(\beta - \zeta) + 2.6803227(b + f)$$

IV. *Для угла* $4p - q$:

$$\mathfrak{M} = -4.6106454\gamma + 1.9953482c$$
$$M = -1.9953482\gamma + 2.6803227c$$

V. *Для угла* $4p + q$:

$$\mathfrak{M} = -4.6106454\delta + 1.9953482d$$
$$M = -1.9953482\delta + 2.6803227d$$

§ **160.** Вычисление коэффициентов β и b, как требующих отдельных пояснений, мы выполним под конец, сперва же выполним вычисление для коэффициентов при косинусах и синусах остальных углов, т. е. величины γ, c; δ, d; ε, e; ζ, f, после чего выразим их через β и b. При этом необходимо заметить, что если и было необходимо вычислять величины $\mathfrak{O}$ и O до седьмого десятичного знака, хотя это и соответствует всего $\frac{1}{10}$ секунды в месте Луны, то здесь достаточно величины β, γ, δ, . . . вычислять лишь до шестого знака, ибо величины $\mathfrak{P}$ и P умножаются затем на K, значение которого кругло равно $\frac{1}{18}$.

§§ **161 — 165.** Упомянутые выше вычисления приведены в подлиннике со всею подробностью и исполнены по формулам § 85; мы их, как не представляющие никаких затруднений, опускаем и приводим лишь сводку полученных результатов:

Сводка

$$\gamma = -0.000792\beta + 0.203916\varepsilon - 0.093538b + 0.181444e \quad (1)$$
$$c = -0.013292\beta - 0.459727\varepsilon + 0.197491b - 0.402200e \quad (2)$$
$$\delta = -0.002532\beta - 0.004750\zeta + 0.000086b - 0.003065f \quad (3)$$
$$d = +0.000400\beta + 0.004725\zeta + 0.001796b + 0.004014f \quad (4)$$
$$\varepsilon = -0.002765\gamma + 0.000015c \quad (5)$$
$$e = +0.000520\gamma + 0.002032c \quad (6)$$
$$\zeta = -0.001000\delta + 0.000217d \quad (7)$$
$$f = -0.000081\delta + 0.000584d \quad (8)$$

Подставив значения (5) и (6), вместо ε и e, в уравнения (1) и (2), получим по упрощении:

$$\gamma = -0.000797\beta - 0.093461b \qquad (9)$$

$$c = -0.013281\beta + 0.197230b \qquad (10)$$

Подобным же образом, подставив величины ζ и f, доставляемые уравнениями (7) и (8), в уравнения (3) и (4), получим по упрощении:

$$\delta = -0.002532\beta + 0.000092b \qquad (11)$$

$$d = +0.000400\beta + 0.001796b \qquad (12)$$

§ **166**. Обратимся теперь к первому углу q, для которого, как мы видели:

$$\mathfrak{M} = -4.6106454(\gamma + \delta) - 1.9953482(c + d)$$

$$M = -1.9953482(\gamma - \delta) - 2.6803227(c - d)$$

а так как

$$\gamma + \delta = -0.003329\beta - 0.093369b$$

$$\gamma - \delta = +0.001735\beta - 0.093553b$$

$$c + d = -0.012881\beta + 0.199026b$$

$$c - d = -0.013681\beta + 0.195434b$$

то, по подстановке этих значений, получим:

$$\mathfrak{M} = +0.041049\beta + 0.033365b$$

$$M = +0.033207\beta - 0.337151b$$

§ **167**. Выведя отсюда значения $\mathfrak{N}$ и N и заметив, что $\mathfrak{N} = \beta$ и $N = b$, получаем следующие два уравнения:

$$\beta = \frac{\frac{2(m+1)}{n}M - \mathfrak{M}}{\lambda - 2 - n^2} \qquad (1)$$

$$b = \frac{M}{n^2} - \frac{2(m+1)}{n}\beta \qquad (2)$$

Последнее уравнение дает

$$b = -2.016832\beta - 0.001919b$$

т. е.

$$1.001919b = -2.016832\beta$$

откуда следует

$$b = -2.012968\beta$$

Очевидно, что если это значение подставить в выражения M и $\mathfrak{M}$, то в уравнении (1) все члены будут содержать множитель β, так что по разделении на β эта буква совершенно исчезает из вычисления и уравнение должно бы обратиться в тожество, если букве n приписано правильное ее значение, что мы и предполагаем. Однако не следует удивляться, если это не имеет места, ибо при этом предполагается, что коэффицентам приписаны истинные их значения, затем надо иметь в виду, что и в членах остальных порядков содержится тот же угол q и происходящие от этого члены надо бы присовокупить к предыдущим, чтобы получилось истинное значение буквы n. В самом деле, если в членах дальнейших порядков окажутся величины $\mathfrak{M}'$, M', $\mathfrak{M}''$, M'' и т. д., то должно иметь место тожество

$$\beta = \frac{\frac{2(m+1)}{n}(M + M' + M'' + \ldots) - (\mathfrak{M} + \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' \ldots)}{\lambda - 2 - n^2}$$

§ **168**. Посмотрим же теперь, насколько вышеуказанное равенство отличается от тожества. Мы будем иметь:

$$\mathfrak{M} = -0.026114\beta; \quad M = +0.711879\beta$$

и так как должно быть тожественно

$$(\lambda - 2 - n^2)\beta = \frac{2(m+1)}{n} \cdot M - \mathfrak{M}$$

то, после численного развития, получим

$$1.50640\beta = 1.46199\beta$$

Здесь невязка не настолько велика, чтобы нельзя было ожидать, что она исчезнет после присоединения выше сказанных поправок. Кроме того, очевидно, что если слегка изменить значение n, то все придет в полное согласие.

§ **169**. Так как величина β остается неопределенной, как это и должно быть по самой сущности дела, то всего удобнее положить $\beta = 1$, ибо тогда, по умножении на K, войдет в состав координаты x член $K\cos q$ и буква K представит то, что в астрономии называют эксцентриситетом, который иначе выражался бы через $K\beta$. Положив $\beta = 1$, мы получим для коэффициентов значения, показанные в следующей таблице:

$\beta = +1.000000$	$b = -2.012968$
$\gamma = +0.187336$	$c = -0.410299$
$\delta = -0.002717$	$d = -0.003215$
$\varepsilon = -0.000524$	$e = -0.000739$
$\zeta = -0.000001$	$f = -0.000003$

§ **170**. До сих пор мы определили приближенные значения величин $\mathfrak{P}$ и P, но они настолько мало отличаются от истинных, что *ими можно пользоваться без чувствительной погрешности*, тем не менее надо исследовать те поправки, которые возникают от отброшенных нами первоначально малых членов в $\mathfrak{A}$, A; $\mathfrak{B}$, B, до тех же пор будем пользоваться следующими приближенными формулами:

$$\mathfrak{P} = \cos q + 0.187336\cos(2p-q) - 0.000524\cos(4p-q) - \\ - 0.002717\cos(2p+q) \\ - 0.000000\cos(4p+q)$$

$$P = -2.012960\sin q - 0.410299\sin(2p-q) - 0.003215\sin(2p+q) \\ - 0.000739\sin(4p-q) - 0.000003\sin(4p+q)$$

§ **171**. Для первого уравнения § 154 значения $\mathfrak{P}$ и P должны быть, соответственно, помножены на отброшенные члены

$$+0.0264388 - 0.1050568\cos 4p$$

и

$$-0.0819104\sin 4p$$

отчего произойдут прибавочные члены, коэффициенты которых мы обозначим через $\mathfrak{M}'$. Вычисление этих членов располагаем так:

	Cos q	Cos $(2p-q)$	Cos $(2p+q)$	Cos $(4p-q)$	Cos $(4p+q)$
$+0.02644\,\mathfrak{P}$ . .	+0.026438	+0.004953	—0.000072	—0.000014	—0.000000
$-0.105\cos 4p\cdot\mathfrak{P}$.	+0.000027	+0.000142	—0.009840	—0.052528	—0.052528
	+0.026465	+0.005095	—0.009912	—0 052542	—0.052528
$-0.082\sin 4p\cdot P$.	+0.000030	+0.000131	+0.016765	+0.082441	—0.082441
$\mathfrak{M}' =$ . .	+0.026495	+0.005226	+0.006853	+0.029899	—0.134969

§ **172**. Подобным же образом для второго уравнения надо величины $\mathfrak{P}$ и P умножить, соответственно, на члены, отброшенные первоначально в A и B, а именно:

$$-0.819104\sin 4p$$

и

$$-0.0272367 + 0.0665457\cos 4p$$

что доставит такую таблицу:

	Sin q	Sin $(2p - q)$	Sin $(2p + q)$	Sin $(4p - q)$	Sin $(4p + q)$
$-0.0819 \sin 4p \cdot \mathfrak{P}$.	+0.000021	+0.000111	−0.007672	−0.040955	−0.040955
$-0.0272 \cdot P$	+0.054824	+0.011149	+0.000088	+0.000020	
	+0.054845	+0.011260	−0.007584	−0.040935	−0.040955
$+0.0665 \cos 4p \cdot P$.	+0.000024	+0.000107	+0.013620	+0.066977	−0.066977
$M' =$ . .	+0.054869	+0.011367	+0.006036	+0.026042	−0.107932

§ **173**. Попрежнему, отлагая на время вычисление коэффициентов при $\cos q$ и $\sin q$, которое рассмотрим особо, вычислим по формулам § 85 те поправки в значениях $\mathfrak{N}$ и N, которые в каждом члене соответствуют приведенным выше значениям $\mathfrak{M}'$ и M'; обозначая эти поправки буквами $\mathfrak{N}'$ и N', получим такую табличку их:

Аргумент	$\mathfrak{N}'$	N'
$2p - q$	+0.000467	−0.001004
$2p + q$	+0.000002	+0.000003
$4p - q$	+0.000009	+0.000013
$4p + q$	−0.000024	−0.000017

§ **174**. После того как эти поправки найдены, надо величины $\mathfrak{N}'$ приложить, соответственно, к первым частям уравнений (1)—(8), и мы получим исправленные уравнения:

$$\gamma = -0.000792\beta + 0.203916\varepsilon - 0.093538b + \\ + 0.181444e + 0.000467 \qquad (1')$$

$$c = -0.013292\beta - 0.459727\varepsilon + 0.197491b - \\ - 0.402200e - 0.001004 \qquad (2')$$

$$\delta = -0.002532\beta - 0.004750\zeta + 0.000086b - \\ - 0.003065f + 0.000002 \qquad (3')$$

$$d = + 0.000400\beta + 0.004725\zeta + 0.001796b + \\ + 0.004014f + 0.000003 \qquad (4')$$

$$\varepsilon = -0.002765\gamma + 0.000015c + 0.000009 \qquad (5')$$

$$e = + 0.000520\gamma + 0.002032c + 0.000013 \qquad (6')$$

$$\zeta = -0.001000\delta + 0.000217d - 0.000024 \qquad (7')$$

$$f = -0.000081\delta + 0.000584d - 0.000017 \qquad (8')$$

§ **175**. С этими уравнениями поступим подобно предыдущему, а именно, подставим значения ε, e, ζ и f, следующие из уравнений (5′) — (8′), в уравнения (1′) — (4′); тогда, по упрощении, получим:

$$
\begin{aligned}
\gamma &= -0.000797\beta - 0.093422b + 0.000467\\
c &= -0.013281\beta + 0.197230b - 0.001013\\
\delta &= -0.002532\beta + 0.000086b + 0.000002\\
d &= +0.000400\beta + 0.001796b + 0.000003
\end{aligned}
$$

§ **176**. Подставив эти значения в первые два уравнения § 159, которые доставляют величины $\mathfrak{M}$ и M, относящиеся к углу q, мы получим:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M} &= +0.043046\beta + 0.033213b - 0.000170\\
M &= +0.035888\beta - 0.337245b + 0.001790
\end{aligned}
$$

к этим значениям надо приложить величины $\mathfrak{M}'$ и M', найденные в §§ 171 и 172, и мы получим:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M} + \mathfrak{M}' &= 0.043046\beta + 0.033213b + 0.026325\\
M + M' &= 0.035888\beta - 0.337245b + 0.056659
\end{aligned}
$$

§ **177**. По этим значениям, применяя формулы § 85, надо определить значения $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$ и $N + N'$, которые, по предположению, в силу сделанных в § 155 обозначений, должны быть

$$\mathfrak{N} + \mathfrak{N}' = \beta \quad \text{и} \quad N + N' = b$$

так что, на основании последней формулы, должно быть

$$b = \frac{M + M'}{n^2} - \frac{2(m+1)}{n}\beta$$

или, по развитии,

$$b = -2.016824\beta - 0.001919b + 0.000322$$

а так как принято

$$\beta = 1$$

то получится

$$b = -2.012639$$

§ **178**. Посмотрим теперь, во что обратится первое уравнение

$$(\lambda - 2 - n^2)\beta = \frac{2(m+1)}{n}(M + M') - (\mathfrak{M} + \mathfrak{M}')$$

и которое при $\beta = 1$ должно обращаться в тожество, при этом будет:

$$M + M' = 0.771199$$
$$\mathfrak{M} + \mathfrak{M}' = 0.002525$$

и предыдущее уравнение обращается в такое равенство:

$$1.50640 = 1.55301$$

в котором погрешность относится к правой части, и эта погрешность настолько мала, что она пропадет, когда будут приняты во внимание члены высших порядков, содержащие $\cos q$.

§ **179.** После того как истинное значение коэффициента b найдено из уравнений (1′)—(8′), найдем и те значения всех прочих, которые показаны в следующей таблице:

$$\begin{array}{ll}
\beta = +1.000000 & b = -2.012639 \\
\gamma = +0.187695 & c = -0.411247 \\
\delta = -0.002703 & d = -0.003212 \\
\varepsilon = -0.000514 & e = -0.000724 \\
\zeta = -0.000021 & f = -0.000019
\end{array}$$

§ **180.** Таким образом, на основании значений, найденных в этой и в предыдущей главах, имеем:

$$\mathfrak{O} = +0.0000240 - 0.0071801 \cos 2p + 0.0000060 \cos 4p$$
$$O = +0.0102117 \sin 2p + 0.0000057 \sin 4p$$
$$\mathfrak{P} = +\cos q + 0.187695 \cos(2p - q) - 0.002703 \cos(2p + q)$$
$$- 0.000514 \cos(4p - q) - 0.000021 \cos(4p + q)$$
$$P = -2.012639 \sin q - 0.411247 \sin(2p - q) - 0.003212 \sin(2p + q)$$
$$- 0.000724 \sin(4p - q) - 0.000019 \sin(4p + q)$$

ГЛАВЫ III—X

В этих главах, заключающих §§ 181—383, исчисляются, совершенно подобно изложенному выше, величины:

$$\mathfrak{Q},\ \mathfrak{R},\ \mathfrak{S},\ \mathfrak{T},\ \mathfrak{U},\ \mathfrak{V},\ \mathfrak{W},\ \mathfrak{w}$$

и

$$Q,\ R,\ S,\ T,\ U,\ V,\ W,\ w$$

причем Эйлер берет их в форме:

$$0 \cdot \cos q + \alpha + \beta \cos(p - q) + \gamma \cos(p + q) + \ldots$$
$$a \sin q + b \sin(p - q) + c \sin(p + q) + \ldots$$

соответственно виду присоединенной части в развитой ее форме, причем всякий раз в конце вычисления коэффициент при $\cos q$ полагается равным нулю, ибо по предположению все члены, содержащие $\cos q$, уже включены в состав величины $\mathfrak{P}$. Все вычисления приведены с полною подробностью не только алгебраической, но и численной, и видимо взяты так, как они на самом деле произведены, со всеми логарифмами и деталями их исполнения. Это занимает 242 страницы in-4°, именно — от стр. 163 до стр. 405. Мы все это опускаем, ибо применяемая метода вполне выяснена в §§ 127—180, и прямо переходим к части третьей сочинения Эйлера.

ЧАСТЬ 3-я

ЧИСЛЕННОЕ РАЗВИТИЕ УРАВНЕНИЯ, КОИМ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ КООРДИНАТА $\mathfrak{z}$

В этой части, заключающей шесть глав, составляется полное выражение для координаты $\mathfrak{z}$, определяемой третьим дифференциальным уравнением в § 79, причем эта величина пишется под видом

$$\mathfrak{z} = i\mathfrak{p} + iK\mathfrak{q} + iK^2\mathfrak{r} + i\varkappa\mathfrak{s} + i^3\mathfrak{t} + ia\mathfrak{u}$$

Величины, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ определяются дифференциальными уравнениями §§ 122—126, каждое — в своей главе. Член $ia\mathfrak{u}$ был первоначально опущен и прибавлен в этой части.

Мы приведем первые две главы, в которых метода с полною подробностью выясняется на выводе $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$, для остальных же выражений выводов приводить не будем, а дадим лишь окончательные результаты.

ГЛАВА I

Развитие уравнения для величины $\mathfrak{p}$, входящей в член первого порядка

§ **384.** Уравнение, которым определяется величина $\mathfrak{p}$, как приведено выше, есть следующее:

$$\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} + (\lambda + 1)\mathfrak{p} + \mathfrak{p}\left(-3\lambda\mathfrak{O} + 6\lambda\mathfrak{O}^2 - \frac{3}{2}\lambda O^2\right) = 0$$

причем, на основании § 152,

$$\mathfrak{A} = -3\lambda\mathfrak{O} + 6\lambda\mathfrak{O}^2 - \frac{3}{2}\lambda O^2 = +0.0007980 + 3.8606451\cos 2p$$
$$+ 0.0385110\cos 4p$$

Будем эту величину для краткости обозначать буквою $\mathfrak{a}$.

§ **385**. В этом уравнении присоединенная часть не содержит членов, свободных от множителя $\mathfrak{p}$, главный же член этой неизвестной, как указано в §§ 99—101, есть $\sin r$, причем

$$\frac{dr}{dt} = l = 13.42263$$

поэтому полагаем

$$\mathfrak{p} = \sin r + c \sin (2p - r) + d \sin (2p + r) + e \sin (4p - r) + f \sin (4p + r)$$

Эту величину надо умножить на обозначенную выше через $\mathfrak{a}$ и развить подобно тому, как делалось в предыдущих главах, причем получатся члены только с синусами выше показанных углов. Обозначая коэффициенты при этих синусах вообще буквою M и самые члены через $M \sin \omega$, где $\frac{d\omega}{dt} = \mu$, получим в выражении $\mathfrak{p}$, соответственно, члены $N \sin \omega$, причем, как показано в § 89, коэффициенты N определяются по формуле

$$N = \frac{M}{\mu^2 - \lambda - 1}$$

§ **386**. Выражение $\mathfrak{a}$ имеет своим главным членом $3.8606451 \cos 2p$. Умножив на него вышеприведенное выражение $\mathfrak{p}$, разовьем полученное произведение и, обозначая через M' коэффициенты при синусах, вычислим соответствующие им N' и таким образом определим весьма близкое к истинному значение $\mathfrak{p}$. Это вычисление располагаем так:

	Sin r	Sin $(2p - r)$	Sin $(2p + r)$
$+ 3.8606\mathfrak{p} \cos 2p$	$- 1.9303225c$ $+ 1.9303225d$	$- 1.9303225$ $+ 1.9303225e$	$+ 1.9303225$ $+ 1.9303225f$

	Sin $(4p - r)$	Sin $(4p + r)$
$+ 3.8606\mathfrak{p} \cos 2p$	$+ 1.9303225 \cdot c$	$+ 1.9303225 \cdot d$

соответственно этим значениям аргументов получим следующие значения величин:

$$\mu \quad \text{и} \quad \mu^2 - \lambda - 1$$

ω	μ	μ	μ^2	$\mu^2 - \lambda - 1$
r	l	13.42263	180.166958	— 0.061970
$2p - r$	$2m - l$	11.31521	128.03403	— 52.19490
$2p + r$	$4m + l$	38.16047	1456.22222	1275.99329
$4p - r$	$4m - l$	36.05305	1299.82239	1119.59346
$4p + r$	$4m + l$	62.89831	3956.19818	3775.96925

§§ **388—389**. *Так как определение коэффициента, относящегося к аргументу* r, требует отдельного рассмотрения, которое производим в конце, то здесь находим значения N *лишь для остальных* аргументов, и на основании выражения $\mathfrak{p}$ уравниваем их, соответственно, c, d, e и f и получаем:

$$
\begin{aligned}
c &= +0.036983 - 0.036983e \\
d &= +0.001512 + 0.001512f \\
e &= +0.001724c \\
f &= +0.000511d
\end{aligned}
$$

Отсюда находим:

$$
c = +0.036981; \qquad e = +0.000064
$$
$$
d = +0.001512 \qquad f = +0.000001
$$

На основании первой таблицы § 386 имеем для члена $M' \sin r$ значение

$$
M' = 1.9303225\,(d - c) = -0.068341
$$

эта величина должна бы быть равна знаменателю — 0.061970, и если это не вполне верно, то разница происходит, с одной стороны, потому, что коэффициенты имеют лишь приближенные значения, с другой — потому, что член $\sin r$ происходит не только от членов первого порядка, но и всех прочих порядков, ибо значение величины l определено таким образом.

§ **390**. На основании этого, приближенное выражение $\mathfrak{p}$ есть

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{p} = \sin r &+ 0.036981 \sin(2p - r) + 0.001512 \sin(2p + r) \\
&+ 0.000064 \sin(4p - r) + 0.000001 \sin(4p + r)
\end{aligned}
$$

На это выражение надо умножить первоначально опущенные члены выражения $\mathfrak{a}$, выполнив преобразование, определить коэффициенты M' и, разделив их на выше приведенные значения $\mu^2 - \lambda - 1$, определить N', таким образом получим такую таблицу:

Sin ω	$+ 0.000798\mathfrak{p}$	$+ 0.038511 \cdot \mathfrak{p} \cos 4p$	M'	$N' = \dfrac{M'}{\mu^2 - \lambda - 1}$
$\sin r$	$+ 0.000798$	$- 0.000002$	$+ 0.000796$	—
$\sin (2p - r)$.	$+ 0.000029$	$- 0.000029$	0.000000	0.000000
$\sin (2p + r)$.	$+ 0.000001$	$- 0.000712$	$- 0.000711$	0.000000
$\sin (4p - r)$.	—	$- 0.019256$	$- 0.019256$	$- 0.000017$
$\sin (4p + r)$.	—	$+ 0.019256$	$- 0.019256$	$+ 0.000005$

Коэффициент же при $\sin r$ будет вычислен ниже.

Придав найденные значения N' к определенным выше c, d, e и f, получим:

$$
\begin{aligned}
c &= + 0.036983 \;\; - 0.036983e \\
d &= + 0.001512 \;\; + 0.001512f \\
e &= + 0.001724c - 0.000017 \\
f &= + 0.000511d + 0.000005
\end{aligned}
$$

отсюда следует:

$$
\begin{aligned}
d &= + 0.036982 \qquad & e &= + 0.000047 \\
d &= + 0.001513 \qquad & f &= + 0.000006
\end{aligned}
$$

так что будет

$$M + M' = - 0.067545$$

Это значение уже ближе к значению знаменателя $- 0.061970$, и следовательно, члены высшего порядка оказывают меньшее влияние.

§ **391**. Отсюда следует, что истинная величина $\mathfrak{p}$ есть

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{p} = \sin r &+ 0.036982 \sin (2p - r) + 0.001513 \sin (2p + r) \\
&+ 0.000047 \sin (4p - r) + 0.000006 \sin (4p + r)
\end{aligned}
$$

ГЛАВА II

Развитие членов второго порядка с коэффициентом iK и множителем $\mathfrak{q}$

§ **392**. Дифференциальное уравнение, служащее для определения величины $\mathfrak{q}$, как указано в § 142, есть

$$\frac{d^2\mathfrak{q}}{dt^2} + (\lambda + 1)\,\mathfrak{q} + \mathfrak{a}\mathfrak{q} + \mathfrak{b}\mathfrak{P}\mathfrak{p} + \mathfrak{c}P\mathfrak{p} = 0$$

причем буквы $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ имеют следующие значения:

$$\mathfrak{a} = +0.0007980 + 3.8606451 \cos 2p + 0.0385110 \cos 2p$$

$$\mathfrak{b} = -3\lambda + 12\lambda\mathfrak{O} - 30\lambda\mathfrak{O}^2 + \frac{15}{2}\lambda O^2 =$$

$$= -537.7036780 - 15.4425816 \cos 2p - 0.1957813 \cos 4p$$

$$\mathfrak{c} = -3\lambda O + 15\lambda\mathfrak{O}O =$$

$$= -5.4906964 \sin 2p - 0.1016218 \sin 4p$$

§ **393.** Прежде всего надо развить члены $\mathfrak{P}\mathfrak{p}$ и $P\mathfrak{p}$, не содержащие множителя $\mathfrak{q}$, получается:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}\mathfrak{p} = -0.49653 \sin(q-r) & + 0.09461 \sin(2p-q+r) \\
& + 0.01985 \sin(2p+q-r) \\
& - 0.00011 \sin(4p-q+r) \\
& - 0.00002 \sin(4p+q-r) \\
+ 0.50019 \sin(q+r) & - 0.07536 \sin(2p-q-r) \\
& - 0.00059 \sin(2p+q+r) \\
& + 0.00377 \sin(4p-q-r) \\
& - 0.00001 \sin(4p+q+r) \\
P\mathfrak{p} = -1.01393 \cos(q-r) & + 0.20409 \cos(2p-q+r) \\
& + 0.03561 \cos(2p+q-r) \\
& + 0.00067 \cos(4p-q+r) \\
& + 0.00010 \cos(4p+q-r) \\
+ 1.00595 \cos(q+r) & - 0.24284 \cos(2p-q-r) \\
& + 0.00313 \cos(2p+q+r) \\
& + 0.00719 \cos(4p-q-r) \\
& + 0.00002 \cos(4p+q+r)
\end{aligned}$$

Из этих выражений сразу видно, что их члены подразделяются на два класса, из которых первый содержит угол $(q-r)$, второй — угол $(q+r)$. Эти классы уже потому надо один от другого различать, что они от последующих действий один в другой не переходят, вследствие чего вычисление получает не малое упрощение.

§§ **394—395.** Подобно предыдущему, сперва вычисляются коэффициенты M при синусах аргументов:

$$q-r;\quad 2p-q+r;\quad 2p+q-r;\quad 4p-q+r;\quad 4p+q-r$$

и соответствующие им делители

$$\mu^2 - \lambda - 1$$

и получаются следующие две таблицы:

I) **Значения** M

	$\sin(q-r)$	$\sin(2p-q+r)$	$\sin(2p+q-r)$	$\sin(4p-q+r)$	$\sin(4p+q-r)$
$\mathfrak{P}\mathfrak{p}(-537.703)$ . . .	$+266.98594$	-50.87214	-10.67342	$+0.05915$	$+0.01075$
$\mathfrak{P}\mathfrak{p}(-15.442\cos 2p)$.	$+0.73051$	-3.83385	$+3.83385$	-0.73051	-0.15327
	-0.15327	$+0.00085$	$+0.00015$		
$\mathfrak{P}\mathfrak{p}(-0.19578\cos 4p)$	-0.00009	$+0.00194$	$+0.00926$	-0.04861	$+0.04861$
$P\mathfrak{p}(-5.490\sin 2p)$.	-0.56030	$+2.78359$	$+2.78359$	-0.56030	-0.09776
	$+0.09776$	$+0.00184$	$+0.00027$		
$P\mathfrak{p}(-0.1016\sin 4p)$.	-0.00029	-0.00181	-0.01037	$+0.05152$	$+0.05152$
M . . .	$+267.10026$	-51.91958	-4.05667	-1.22875	-0.14015

II) **Значения знаменателя** $D=\mu^2-\lambda-1$

ω	μ	μ	μ^2	D	$N=\frac{M}{D}$
$q-r$	$n-l$	-0.16659	0.02775	-180.20118	-1.48223
$2p-q+r$	$2m-n+l$	$+24.90443$	620.23057	$+440.00164$	-0.11800
$2p+q-r$	$2m+n-l$	$+24.57125$	603.74614	$+423.51721$	-0.00958
$4p-q+r$	$4m-n+l$	$+49.64227$	2464.35543	$+2284.12650$	-0.00054
$4p+q-r$	$4m+n-l$	$+49.30909$	2431.38667	$+2251.15774$	-0.00006

Значения величин m n, l и λ, как указано выше, суть:

$$m=12.3689539 \qquad l=13.42263$$
$$n=13.255865 \qquad \lambda=179.228928$$
$$(13.25604)$$

§§ **396—399.** Полагаем теперь неизвестную $\mathfrak{q}$ равной

$$\mathfrak{q}=b\sin(q-r)+c\sin(2p-q+r)+d\sin(2p+q-r)$$
$$+e\sin(4p-q+r)+f\sin(4p+q-r)$$

и сперва умножаем эту величину на главный член количества $\mathfrak{a}$, т. е. на $3.860645\cos 2p$, и получаем следующие значения коэффициентов M' и N'', оставив коэффициент при $\sin(q-r)$ для определения под конец:

Sin ω	M'	D	N'
$\sin(2p-q+r)$	$-1.930322\,(b-e)$	440.00164	$-0.00439\,(b-e)$
$\sin(2p+q-r)$	$+1.930322\,(b+f)$	423.51721	$+0.00456\,(b+f)$
$\sin(4p-q+r)$	$+1.930322\quad c$	2284.12650	$+0.00084\quad c$
$\sin(4p+q-r)$	$+1.930322\quad d$	2251.15774	$+0.00086\quad d$
$\sin(q-r)$	$-1.930322\,(c-d)$	$-$ 180.20118	—

Придав эти значения к определенным выше значениям N и сопоставив с выражением для c и e, получаем следующие равенства:

$$c=-0.11800-0.00439\,(b-e)$$
$$e=-0.00054+0.00084c$$

Откуда следует:

$$c=-0.11800-0.00439b \tag{1}$$
$$e=-0.00064 \tag{2}$$

и

$$d=-0.00958+0.00456\,(b+f)$$
$$f=-0.00006+0.00086d$$

из которых следует:

$$d=-0.00958+0.00456b \tag{3}$$
$$f=-0.00007 \tag{4}$$

Перейдем теперь к члену с $\sin(q-r)$. Мы видели, что для этого члена

$$M'=-1.930322\,(c-d);$$

подставляя вместо c и d их значения (1) и (3), имеем

$$M'=+0.20929+0.01728b$$

и, по разделении на $D=-180.20118$, имеем

$$N'=-0.00116-0.00010b$$

значит

$$N+N'=-1.48339-0.00010b$$

Уравнивая эту величину b, имеем

$$b=-1.48339-0.00010b$$

откуда следует

$$b = 1.48324$$

и, по подстановке в формулы (1) и (3), имеем:

$$c = -0.11149;\quad d = -0.01634$$

Таким образом приближенное значение первой части выражения $\mathfrak{q}$, содержащей аргумент $q-r$, есть

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}_1 = -1.48324 \sin(q-r) & - 0.11149 \sin(2p-q+r) \\ & - 0.01634 \sin(2p+q-r) \\ & - 0.00064 \sin(4p-q+r) \\ & - 0.00007 \sin(4p+q-r)\end{aligned}$$

§§ **400—401**. Теперь следует вычислить те поправки, которые надо к этой величине присовокупить, чтобы учесть влияние первоначально отброшенных малых членов в выражении a, а именно:

$$+0.000798 + 0.038511 \cos 4p$$

Получаем такую таблицу:

ω	$\mathfrak{q}_1 \cdot (0.000798)$	$\mathfrak{q}_1 \cdot (0.385 \cos 4p)$	M'	D	N'
$q-r$	-0.00118	$+0.00001$	-0.00117	$-$ 180.20	$+0.000007$
$2p-q+r$ . .	-0.00009	$+0.00031$	$+0.00022$	$+$ 440.00	$+0.000000$
$2p+q-r$ . .	-0.00001	$+0.00215$	$+0.00214$	$+$ 423.52	$+0.000005$
$4p-q+r$ . .	—	$+0.02856$	$+0.02856$	$+2284.1$	$+0.00001$
$4p+q-r$ . .	—	-0.02856	-0.02856	$+2251.2$	-0.00001

Прибавив найденные величины к вышеполученным (1)—(4), имеем:

$$\begin{aligned} c &= -0.11800 - 0.00439b \\ d &= -0.00958 + 0.00456b \\ e &= -0.00063 \\ f &= -0.00008 \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} M' &= +0.20929 + 0.01728b \\ N' &= -0.00116 - 0.00010b \end{aligned}$$

и затем:

$$b = -1.48323;\quad c = -0.11141$$
$$d = -0.01634;\quad e = -0.00063$$
$$f = -0.00008$$

§ **402**. Таким образом исправленное значение первой части выражения $\mathfrak{q}$ есть

$$\begin{aligned}\mathfrak{q}_1 = -1.48323\sin(q-r) &- 0.11149\sin(2p-q+r)\\ &- 0.01634\sin(2p+q-r)\\ &- 0.00063\sin(4p-q+r)\\ &- 0.00008\sin(4p+q-r)\end{aligned}$$

Необходимо заметить, что поправки, найденные в предыдущем параграфе, настолько ничтожны, что ими можно бы было пренебречь, и значит, в величинах $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ можно было бы малые члены отбросить, кроме того видно, что в них члены, содержащие $\cos 4p$, сами по себе настолько малы, что совершенно не влияют на прочие. Отсюда мы с полною строгостью заключаем, что в дальнейших главах, где вычисления иначе были бы громадны, надо пользоваться этим замечанием.

§§ **403—409**. В этих параграфах, совершенно подобно предыдущему, вычисляется вторая часть выражения $\mathfrak{q}$, зависящая от аргумента $q+r$, присовокупив которую к предыдущей получается следующее полное значение выражения $\mathfrak{q}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{q} = -1.48323\sin(q-r) &- 0.11149\sin(2p-q+r)\\ &- 0.01634\sin(2p+q-r)\\ &- 0.00063\sin(4p-q+r)\\ &- 0.00008\sin(4p+q-r)\\ -0.50497\sin(q+r) &- 0.24129\sin(2p-q-r)\\ &- 0.00296\sin(2p+q+r)\\ &- 0.00364\sin(4p-q-r)\\ &- 0.00002\sin(4p+q+r)\end{aligned}$$

В следующих главах III—VI, заключающих §§ 410—457, получаются выражения $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$, а именно:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{r} = 0 \cdot \sin r &+ 0.0363 \sin(2p - r) + 0.1589 \sin(2p + r) \\
&+ 0.3425 \sin(2q - r) + 0.0498 \sin(2p - 2q + r) \\
&\qquad + 0.0125 \sin(2p + 2q - r) \\
&+ 0.3799 \sin(2q + r) + 0.1701 \sin(2p - 2q - r) \\
&\qquad + 0.0045 \sin(2p + 2q + r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s} = -0.02010 \sin(r - t) &+ 0.03994 \sin(2p - r + t) \\
&- 0.00686 \sin(2p + r - t) \\
+ 0.01676 \sin(r + t) &- 0.10960 \sin(2p - r - t) \\
&+ 0.00090 \sin(2p + r + t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= 0 \cdot \sin r + 0.0023 \sin(2p - r) - 0.0007 \sin(2p + r) &+ 0.0004 \sin 3r \\
+ 0.0175 \sin(2p - 3r)& \\
+ 0.0018 \sin(4p - 3r)&
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{u} = -0.1583 \sin(p - r) - 0.0604 \sin(p + r) - 0.0037 \sin(3p - r)$$

Получив, *таким образом*, величину z, Эйлер, как указано в § 143, возвращается к величинам x и y, составляет продолжение глав части второй и определяет величины последних членов этих выражений, что и представляет содержание §§ 458—548. Затем он составляет сводку выведенных для координат x, y, z выражений, после чего, сравнив развитую им теорию с теорией Клеро (§§ 559—636), переходит к астрономическим приложениям своей теории и к составлению вспомогательных таблиц, упрощающих вычисление места Луны, т. е. долготы и широты ее и параллакса.

Для этого он сперва развивает в §§ 550—554 выражения для x, y, z в чисто численном виде, а именно:

§ **550**. Координаты x, y, z Луны выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
x = \mathfrak{O} + K\mathfrak{P} + K^2\mathfrak{Q} + K^3\mathfrak{R} + a\mathfrak{S} + aK\mathfrak{T} + \varkappa\mathfrak{U} + \varkappa K\mathfrak{V} + \varkappa K^2\mathfrak{W} \\
+ a\varkappa\mathfrak{w} + i^2\mathfrak{X} + i^2K\mathfrak{Y} + i^2\varkappa\mathfrak{Z}
\end{aligned}$$

причем величины $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{P}$, ... $\mathfrak{Z}$ выражаются следующим образом:

$$\mathfrak{O} = +0.0000240 - 0.0071801 \cos 2p + 0.0000060 \cos 4p$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{P} = +1.000000 \cos q &+ 0.187695 \cos(2p-q) - 0.002703 \cos(2p+q) \\ &- 0.000514 \cos(4p-q) - 0.000021 \cos(4p+q)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q} = -0.53896 &+ 0.21903 \cos 2p + 0.00195 \cos 4p + 0.50967 \cos 2q \\ &- 0.20179 \cos(2p-2q) + 0.00482 \cos(2p+2q) \\ &+ 0.02278 \cos(4p-2q) + 0.00004 \cos(2p+2q)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} = +0 \cdot \cos q &- 0.1908 \cos(2p-q) - 0.2300 \cos(2p+q) \\ &- 0.0482 \cos(4p-q) - 0.0058 \cos(4p+q) \\ - 0.3807 \cos 3q &+ 0.2623 \cos(2p-3q) - 0.0068 \cos(2p+3q) \\ &- 0.0239 \cos(2p-3q) + 0.0000 \cos(4p+3q)\end{aligned}$$

$$\mathfrak{S} = +0.11419 \cos p - 0.00289 \cos 3p$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{T} = -0.0813 \cos(p-q) &+ 0.1205 \cos(p+q) - 0.0088 \cos(3p-q) \\ &+ 0.0015 \cos(3p+q)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{U} = -0.006829 \cos t &+ 0.029397 \cos(2p-t) - 0.003452 \cos(2p+t) \\ &+ 0.000046 \cos(4p-t) - 0.000004 \cos(4p+t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{V} = -0.18182 \cos(q-t) &+ 0.03084 \cos(2p-q+t) \\ &+ 0.01379 \cos(2p+q-t) \\ + 0.08427 \cos(q+t) &- 0.40759 \cos(2p-q-t) \\ &- 0.00093 \cos(2p+q+t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{W} = +0.1278 \cos t &- 0.6509 \cos(2p-t) + 0.1436 \cos(2p+t) \\ - 0.4431 \cos(2q-t) &- 0.4322 \cos(2p-2q+t) \\ &- 0.0253 \cos(2p+2q-t) \\ + 0.0642 \cos(2q+t) &+ 0.2528 \cos(2p-2q-t) \\ &+ 0.0030 \cos(2p+2q+t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{w} = +0.1164 \cos(p-t) &+ 0.6135 \cos(p+t) \\ &+ 0.0162 \cos(3p-t) - 0.0048 \cos(3p+t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{X} = -0.25019 &+ 0.01928 \cos 2p + 0.00002 \cos 4p + 0.24728 \cos 2r \\ &- 0.01242 \cos(2p-2r) + 0.00038 \cos(2p+2r) \\ &+ 0.00025 \cos(4p-2r) + 0.00000 \cos(4p+2r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{Y} = +0 \cdot \cos q &- 0.0716 \cos(2p-q) - 0.0067 \cos(2p+q) \\ - 0.0610 \cos(2q-r) &- 0.0268 \cos(2r-q+2r) \\ &- 0.1044 \cos(2p+q-2r) \\ - 0.1264 \cos(q+2r) &+ 0.0258 \cos(2p-q-2r) \\ &- 0.0009 \cos(2p+q+2r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z} = +0.0098 \cos t &- 0.0584 \cos(2p-t) + 0.0220 \cos(2p+t) \\ + 0.0189 \cos(t-2r) &- 0.0017 \cos(2p-t+2r) \\ &- 0.0096 \cos(2p+t-2r) \\ - 0.0108 \cos(t+2r) &+ 0.0288 \cos(2p-t-2r) \\ &+ 0.0001 \cos(2p+t+2r)\end{aligned}$$

§ **551.** Так как

$$a=\frac{1}{390}=\frac{1}{400}\left(1+\frac{1}{93}\right)$$

$$\varkappa=\frac{1}{60}\left(1+\frac{1}{138}\right)$$

то удобнее в тех членах, где эти величины содержатся, выполнить умножение и написать их так:

$$\begin{aligned}
a\mathfrak{S} &= +0.0002928\cos p-0.0000074\cos 3p\\
a\mathfrak{T} &= -0.000208\cos(p-q)+0.000309\cos(p+q)\\
&\qquad -0.000023\cos(3p-q)\\
&\qquad +0.000003\cos(3p+q)\\
\varkappa\mathfrak{U} &= -0.0001146\cos t+0.0004933\cos(2p-t)\\
&\qquad -0.0000579\cos(2p+t)\\
&\qquad +0.0000007\cos(4p-t)\\
&\qquad -0.0000001\cos(4p+t)\\
\varkappa\mathfrak{V} &= -0.003051\cos(q-t)+0.000518\cos(2p-q+t)\\
&\qquad +0.000231\cos(2p+q-t)\\
&\quad +0.001414\cos(q+t)-0.006839\cos(2p-q-t)\\
&\qquad -0.000016\cos(2p+q+t)\\
\varkappa\mathfrak{W} &= +0.00215\cos t-0.01162\cos(2p-t)+0.00241\cos(2p+t)\\
&\quad -0.00744\cos(2q-t)-0.00726\cos(2p-2q+t)\\
&\qquad -0.00042\cos(2p+2q-t)\\
&\quad +0.00108\cos(2q+t)+0.00424\cos(2p-2q-t)\\
&\qquad +0.00005\cos(2p+2q+t)\\
a\varkappa\mathfrak{w} &= +0.0000050\cos(p-t)+0.0000264\cos(p+t)\\
&\quad -0.0000007\cos(3p-t)-0.0000002\cos(3p+t)\\
\varkappa\mathfrak{Z} &= +0.00016\cos t-0.00098\cos(2p-t)+0.00037\cos(2p+t)\\
&\quad +0.00032\cos(t+2r)-0.00003\cos(2p-t+2r)\\
&\qquad -0.00016\cos(2p+t-2r)\\
&\quad -0.00018\cos(t+2r)+0.00048\cos(2p-t-2r)\\
&\qquad +0.00000\cos(2p+t+2r)
\end{aligned}$$

§ **552.** Совершенно так же координата y выражается формулой

$$\begin{aligned}
y &= O+KP+K^2Q+K^3R+aS+aKT+\varkappa U+\varkappa KV+\varkappa K^2W\\
&\quad +a\varkappa w+i^2X+i^2KY+i^2\varkappa Z
\end{aligned}$$

причем величины O, P, ... Z выражаются следующим образом:

$$O = +0.0102117 \sin 2p + 0.0000057 \sin 4p$$

$$\begin{aligned} P = & -2.012639 \sin q - 0.411247 \sin(2p - q) - 0.003212 \sin(2p + q) \\ & - 0.000724 \sin(4p - q) - 0.000019 \sin(4p + q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q = & +0.09800 \sin 2p + 0.00175 \sin 4p + 0.25209 \sin 2q \\ & + 0.31159 \sin(2p - 2q) + 0.00428 \sin(2p + 2q) \\ & + 0.01183 \sin(4p - 2q) + 0.00005 \sin(4p + 2q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R = & +1.3662 \sin q + 0.4255 \sin(2p - q) - 0.0353 \sin(2p + q) \\ & - 0.0377 \sin(4p - q) + 0.0010 \sin(4p + q) \\ & - 0.2955 \sin 3q - 0.2211 \sin(2p - 3q) - 0.0061 \sin(2p + 3q) \\ & - 0.0071 \sin(4p - 3q) - 0.0001 \sin(4p + 3q) \end{aligned}$$

$$S = -0.24035 \sin p + 0.00285 \sin 3p$$

$$\begin{aligned} T = & +1.8056 \sin(p - q) + 0.0720 \sin(3p - q) \\ & + 0.0603 \sin(p + q) - 0.0008 \sin(3p + q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U = & +0.190587 \sin t - 0.043312 \sin(2p - t) + 0.005525 \sin(2p + t) \\ & - 0.000143 \sin(4p - t) + 0.000005 \sin(4p + t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V = & +0.68575 \sin(q - t) - 0.13086 \sin(2p - q + t) \\ & + 0.01518 \sin(2p + q - t) \\ & - 0.44216 \sin(q + t) + 1.00824 \sin(2p - q - t) \\ & - 0.00422 \sin(2p + q + t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W = & +2.6319 \sin t - 0.3130 \sin(2p - t) + 0.0952 \sin(2p + t) \\ & - 0.1673 \sin(2q - t) - 0.0000 \sin(2p - 2q + t) \\ & - 0.0233 \sin(2p + 2q - t) \\ & + 0.3349 \sin(2q + t) - 1.7240 \sin(2p - 2q - t) \\ & + 0.0076 \sin(2p + 2q + t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w = & -0.1093 \sin(p - t) - 1.2630 \sin(p + t) - 0.0167 \sin(3p - t) \\ & + 0.0015 \sin(3p + t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X = & -0.02145 \sin 2p - 0.00003 \sin 4p - 0.24645 \sin 2r \\ & + 0.03407 \sin(2p - 2r) - 0.00037 \sin(2p + 2r) \\ & - 0.00014 \sin(4p - 2r) + 0. \sin(4p + 2r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y = & +0.0014 \sin q + 0.1917 \sin(2p - q) + 0.0095 \sin(2p + q) \\ & - 0.4965 \sin(q - 2r) + 0.0289 \sin(2p - q + 2r) \\ & + 0.1805 \sin(2p + q - 2r) \\ & + 0.1251 \sin(q + 2r) - 0.0597 \sin(2p - q - 2r) \\ & + 0.0007 \sin(2p + q + 2r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z = & -0.2496 \sin t + 0.0697 \sin(2p - t) - 0.0247 \sin(2p + t) \\ & + 0.0204 \sin(t - 2r) + 0.0017 \sin(2p - t + 2r) \\ & + 0.1016 \sin(2p + t - 2r) \\ & + 0.0099 \sin(t + 2r) - 0.0755 \sin(2p - t - 2r) \\ & - 0.0004 \sin(2p + t + 2r) \end{aligned}$$

§ **553.** Выполнив умножение на a и $\varkappa$, имеем:

$$aS = -0.0006163 \sin p + 0.0000073 \sin 3p$$

$$\begin{aligned} aT = &+ 0.004630 \sin (p - q) + 0.000155 \sin (p + q) \\ &+ 0.000185 \sin (3p - q) - 0.00002 \sin (3p + q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varkappa U = &+ 0.0031981 \sin t - 0.0007268 \sin (2p - t) + \\ &+ 0.0000928 \sin (2p + t) \\ &- 0.0000024 \sin (4p - t) + 0.0000001 \sin (4p + t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varkappa V = &+ 0.011507 \sin (q - t) - 0.002196 \sin (2p - q + t) \\ &+ 0.000255 \sin (2p + q - t) \\ &- 0.007420 \sin (q + t) + 0.016918 \sin (2p - q - t) \\ &- 0.000071 \sin (2p + q + t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varkappa W = &+ 0.04418 \sin t - 0.00526 \sin (2p - t) + 0.00160 \sin (2p + t) \\ &- 0.00281 \sin (2q - t) + 0.00000 \sin (2p - 2q + t) \\ &- 0.00039 \sin (2p + 2q - t) \\ &+ 0.00562 \sin (2q + t) - 0.02892 \sin (2p - 2q - t) \\ &+ 0.00013 \sin (2p + 2q + t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a\varkappa w = &- 0.0000047 \sin (p - t) - 0.0000544 \sin (p + t) \\ &- 0.000000 \sin (3p - t) + 0.0000001 \sin (3p + t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varkappa Z = &- 0.00419 \sin t + 0.00117 \sin (2p - t) - 0.00041 \sin (2p + t) \\ &+ 0.00034 \sin (t - 2r) + 0.00003 \sin (2p - t + 2r) \\ &+ 0.00171 \sin (2p + t - 2r) \\ &+ 0.00017 \sin (t + 2r) - 0.00127 \sin (2p - t - 2r) \\ &- 0.00001 \sin (2p + t + 2r) \end{aligned}$$

§ **554.** Третья координата z определяется формулой

$$z = i\mathfrak{p} + iK\mathfrak{q} + iK^2\mathfrak{r} + i\varkappa\mathfrak{s} + i^3\mathfrak{t} + ia\mathfrak{u}$$

причем значения величин $\mathfrak{p}, \ldots$ и таковы:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} = &\sin r + 0.036982 \sin (2p - r) + 0.001513 \sin (2p + r) \\ &+ 0.000047 \sin (4p - r) + 0.000006 \sin (4p + r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{q} = &- 1.48323 \sin(q - r) - 0.11149 \sin(2p - q + r) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad - 0.01634 \sin(2p + q - r) \\
&- 0.50497 \sin(q + r) - 0.24129 \sin(2p - q - r) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad - 0.00296 \sin(2p + q + r) \\
&- 0.00063 \sin(4p - q + r) - 0.00364 \sin(4p - q - r) \\
&- 0.00008 \sin(4p + q - r) - 0.00002 \sin(4p + q + r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{r} = &+ 0. \sin r + 0.0363 \sin(2p - r) + 0.1589 \sin(2p + r) \\
&+ 0.3425 \sin(2q - r) + 0.0498 \sin(2p - 2q + r) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + 0.0125 \sin(2p + 2q - r) \\
&+ 0.3799 \sin(2q + r) + 0.1701 \sin(2p - 2q - r) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + 0.0045 \sin(2p + 2q + r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s} = &- 0.02010 \sin(r - t) + 0.03994 \sin(2p - r + t) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad - 0.00686 \sin(2p + r - t) \\
&+ 0.01676 \sin(r + t) - 0.10960 \sin(2p - r - t) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + 0.00090 \sin(2p + r + t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{t} = &\quad 0. \sin r + 0.0023 \sin(2p - r) - 0.0007 \sin(2p + r) \\
&+ 0.0000 \sin(4p - r) + 0.0000 \sin(4p + r) \\
&+ 0.0004 \sin 3r + 0.0175 \sin(2p - 3r) + 0.0000 \sin(2p + 3r) \\
&+ 0.0018 \sin(4p - 3r) + 0.0000 \sin(4p + 3r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{u} = &- 0.1583 \sin(p - r) - 0.0604 \sin(p + r) - 0.0037 \sin(3p - r) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad - 0.0000 \sin(3p + r)
\end{aligned}$$

Выполнив умножения на a и х, имеем:

$$\begin{aligned}
a\mathfrak{s} = &- 0.000337 \sin(t - r) + 0.000670 \sin(2p - r + t) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad - 0.000115 \sin(2p + r - t) \\
&+ 0.000281 \sin(r + t) - 0.001839 \sin(2p - r - t) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + 0.000015 \sin(2p + r + t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a\mathfrak{u} = &- 0.000405 \sin(p - r) - 0.000155 \sin(p + r) \\
&- 0.000009 \sin(3p - r) - 0.000000 \sin(3p + r)
\end{aligned}$$

Выше приведенные выражения надо, соответственно основным формулам, умножить на величины K, K^2, . . . $i\varkappa$, которых значения и логарифмы показаны в следующей таблице:

$K = 0.0545000$	$\log K = \bar{2}.7363965$
$K^2 = 0.0029703$	$\log K^2 = \bar{3}.4727930$
$K^3 = 0.0001619$	$\log K^3 = \bar{4}.2091895$
$i = 0.0896400$	$\log i = \bar{2}.9525018$
$i^2 = 0.0080353$	$\log i^2 = \bar{3}.9050036$
$i^3 = 0.0007220$	$\log i^3 = \bar{4}.8575054$
$a = 0.0025641$	$\log a = \bar{3}.4089353$
$\varkappa = 0.0167800$	$\log \varkappa = \bar{2}.2247920$
$iK = 0.0048854$	$\log iK = \bar{3}.6888983$
$iK^2 = 0.00026625$	$\log iK^2 = \bar{4}.4252948$
$i^2 K = 0.0004379$	$\log i^2 K = \bar{4}.6414001$
$aK = 0.0001397$	$\log aK = \bar{4}.1453318$
$a\varkappa = 0.0000430$	$\log a\varkappa = \bar{5}.6337273$
$aK = 0.0009145$	$\log \varkappa K = \bar{4}.9611885$
$i\varkappa = 0.0015004$	$\log i\varkappa = \bar{3}.1772938$
$ai = 0.0002298$	$\log ai = \bar{4}.3614371$
$i^2\varkappa = 0.0001348$	$\log i^2\varkappa = \bar{4}.1297956$

Мы представим окончательные выражения, полученные Эйлером, в следующем виде:

$$10^7 x = A_0 + \sum_i A_i \cos \omega_i$$

$$10^7 x = \sum_i B_i \sin \omega_i$$

$$10^7 z = \sum_i C_i \sin \omega_i$$

и соответственно каждому значению указателя i выпишем выражения аргументов ω_i и коэффициентов, таким образом получаются следующие таблицы:

$$10^7 x = A_0 + \sum_i A_i \cos\omega_i; \quad 10^7 y = \sum B_i \sin\omega_i$$

i	ω_i	A_i	B_i	i	ω_i	A_i	B_i
0	0	− 35871	0	28	$4p - t$	+ 7	− 23
1	p	+ 2928	− 6162	29	$q + t$	+ 771	− 4455
2	$2p$	− 63746	+ 103304	30	$q - t$	− 1663	+ 6053
3	$3p$	− 74	+ 73	31	$2p + q + t$	− 8	− 40
4	$4p$	+ 120	+ 107	32	$2p - q - t$	− 3727	+ 9883
5	q	+ 545000	− 1094678	33	$2p + q - t$	+ 126	+ 125
6	$2q$	+ 15139	+ 7488	34	$2p - q + t$	+ 282	− 1152
7	$3q$	− 616	− 478	35	$2r$	+ 19870	− 19830
8	$p + q$	+ 168	+ 84	36	$2p + 2r$	+ 30	− 30
9	$2p + 2q$	+ 143	+ 127	37	$2p - 2r$	− 1008	+ 2738
10	$p - q$	− 114	+ 2523	38	$4p - 2r$	+ 4	− 11
11	$2p - 2q$	− 5994	+ 9255	39	$q + 2r$	− 553	+ 548
12	$2p + q$	− 1875	− 1766	40	$q - 2r$	− 267	− 2174
13	$2p - q$	+ 101675	− 222601	41	$2p + q + 2r$	− 4	+ 3
14	$4p - 2q$	+ 677	+ 351	42	$2p - q - 2r$	+ 113	− 261
15	$4p + q$	− 20	− 8	43	$2p + q - 2r$	− 457	+ 790
16	$4p - q$	− 358	− 471	44	$2p - q + 2r$	− 118	+ 126
17	$2p + 3q$	− 11	− 9	45	$t + 2r$	− 14	+ 13
18	$2p - 8q$	+ 424	− 358	46	$t - 2r$	+ 25	+ 28
19	$4p - 3q$	− 38	− 11	47	$2p + t + 2r$	+ 1	− 1
20	t	− 1133	+ 31643	48	$2p - t - 2r$	+ 38	− 102
21	$p + t$	+ 264	− 543	49	$2p + t - 2r$	− 13	+ 137
22	$p - t$	+ 50	− 47	50	$2p - t + 2r$	− 2	+ 2
23	$2p + t$	− 549	+ 894	51	$3p + q$	0	− 1
24	$2p - t$	+ 4854	− 7174	52	$3p - q$	0	+ 101
25	$3p + t$	2	+ 1	53	$4p + 2q$	0	+ 1
26	$3p - t$	+ 7	− 7	54	$4p + 3q$	0	− 1
27	$4p + t$	− 1	+ 1				

$$10^7 z = \sum_i C_i \cos \omega_i$$

i	ω_i	C_i	i	ω_i	C_i
1	r	$+896400$	15	$2p+q-r$	-798
2	$3r$	$+3$	16	$2p-q+r$	-5447
3	$p+r$	-139	17	$2q+r$	$+1012$
4	$p-r$	-363	18	$2q-r$	$+912$
5	$2p+r$	$+1774$	19	$2p+2q+r$	$+12$
6	$2p-r$	$+33265$	20	$2p-2q-r$	$+453$
7	$3p-r$	-1	21	$2p+2q-r$	$+33$
8	$4p+r$	$+5$	22	$2p-2q+r$	$+132$
9	$4p-r$	$+42$	23	$r+t$	$+252$
10	$2p-3r$	$+127$	24	$r-t$	-302
11	$q+r$	-24669	25	$2p+r+t$	$+13$
12	$q-r$	-72460	26	$2p-r-t$	-1649
13	$2p+q+r$	-145	27	$2p+r-t$	-103
14	$2p-q-r$	-11787	28	$2p-r+t$	$+601$

По поводу этих выражений Эйлер замечает, что в них можно отбросить все члены, коэффициенты которых меньше 250, ибо это отражается меньше, нежели на $5''$, в месте Луны.

§ **555.** Чтобы приведенные выше формулы приспособить к более удобному применению в астрономии, надо несколько видоизменить введенные в начале элементы, где мы приняли за единицу среднее расстояние Земли до Солнца, так что координаты Луны выразились через $a(1+x)$, ay, az. Теперь же, в виду того, что мы будем пользоваться лишь отношениями этих величин, мы примем за единицу среднее расстояние от земли до Луны, так что $\frac{1}{a}$ будет представлять среднее расстояние от Земли до Солнца, координаты же Луны будут:

$$1+x;\ y;\ z$$

§ **556.** Чтобы представить это яснее, пусть для какого-либо момента времени ♁ есть центр Земли (фиг. 6) и прямая $♁LM$ направлена по средней долготе Луны в плоскости эклиптики, ♈ — точка весеннего равноденствия, ☽ — центр Луны.

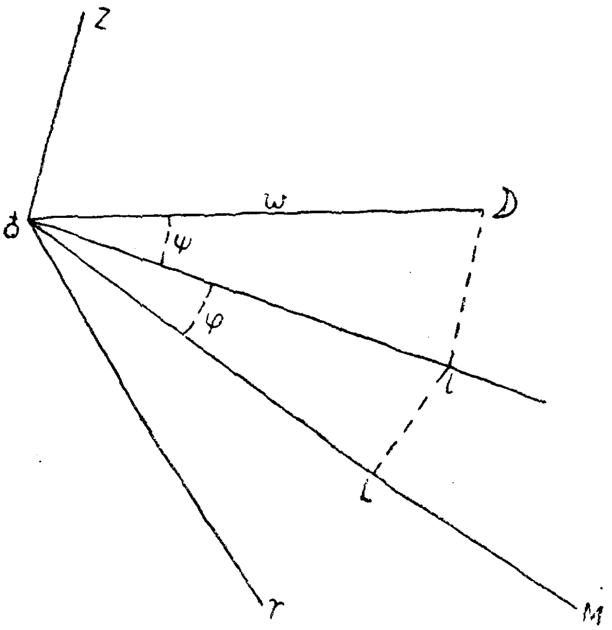
Опустив из точки ☽ на плоскость эклиптики перпендикуляр ☽l и из точки l в плоскости эклиптики — перпендикуляр lL на прямую ♁M, получим:

I) ♁$L = 1 + x$

II) $Ll = y$

III) l☽ $= z$

причем x, y, z суть те количества, значения коих приведены выше. Проведем приемы ♁l и ♁☽, тогда угол γ♁l представит истинную долготу Луны и угол l♁☽ — ее широту, длина же ♁☽ — расстояние ее до Земли, которому параллакс Луны обратно пропорционален.



Фиг. 6.

§ **557.** Обозначив угол M♁l через φ, имея

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{y}{1+x} \qquad (1)$$

откуда по известным x и y непосредственно находится угол φ, придав который к средней долготе получим истинную.

Положив l♁☽ $= \psi$, видим, что угол ψ представляет широту Луны и так как расстояние

$$♁l = \frac{1+x}{\cos\varphi}$$

то будет

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{z\cos\varphi}{1+x} \qquad (2)$$

Отсюда очевидно, насколько просто по известным значениям x, y, z находится место Луны, определяемое ее астрономическими координатами — широтою и долготою, а именно, по формулам (1) и (2) определяются углы φ и ψ, и если обозначить через ζ—среднюю долготу Луны, то истинная ее долгота будет $\zeta + \varphi$, широта же есть ψ.

§ **558.** Наконец, так как расстояние от Земли до Луны есть

$$\delta☽ = \frac{1+x}{\cos\varphi\cos\psi}$$

то обозначая через π_0 — горизонтальный экваториальный параллакс Луны, соответствующий среднему расстоянию $= 1$, в данный момент истинный экваториальный параллакс будет

$$\pi_0 \cdot \frac{\cos\varphi\cos\psi}{1+x}$$

а так как отношение его к видимому полудиаметру Луны известно из наблюдений, то сейчас же определим и видимый полудиаметр Луны.

§§ **559—636.** В этих параграфах Эйлер сравнивает результаты, получаемые по его теории, с формулами и таблицами движения Луны, составленными Клеро, после чего объясняет составление и пользование таблицами, приложенными к своему сочинению. В этих таблицах для каждого градуса значений аргументов даны произведения соответствующих коэффициентов на синусы или косинусы аргументов, и на примере показывается пользование этими таблицами. Сочинение заканчивается соображениями о степени точности результатов, доставляемых этой теорией, и о дальнейшем ее усовершенствовании на основании наблюдений Луны.

Произведенную работу по количеству затраченного на ее исполнение труда Эйлер называет «incredibilis» — «неимоверной», и на основании приведенного ее обозрения, вероятно, всякий читатель с его оценкою согласится.

ПРИБАВЛЕНИЯ И ПРИМЕЧАНИЯ ПЕРЕВОДЧИКА

ГЛАВА I

Элементарные сведения из астрономии

§ **1**. *Небесная сфера и определение положения светил.* С глубокой древности, т. е. за много столетий до нашей эры, для определения положения небесных светил установлен приводимый ниже способ, сохранившийся в принципе и поныне. Вся разница состоит лишь в степени точности этих определений. Древние производили свои наблюдения простым глазом при помощи самых примитивных приборов, современные же наблюдения производятся весьма совершенными телескопами, снабженными точнейшим образом разделенными кругами, отсчеты по которым делаются в сильные микроскопы с микрометрами, и если наблюдения древних были точны приблизительно до $\frac{1}{10}$ градуса, то точность современных наблюдений достигает до $\frac{1}{10}$ секунды дуги.

Все светила обладают двоякого рода видимым движением: во-первых — *суточным* и, во-вторых — *собственным*.

Собственные движения звезд ничтожно малы; наибольшим, в $10''$ в год, обладает одна звезда, другая — в $8''$, несколько — от $5''$ до $1''$ в год, многие тысячи — от $0''.2$ до $0''.1$ в год, поэтому можно считать, что звезды в течение значительных промежутков времени сохраняют неизменное друг относительно друга положение, и в этом смысле они называются *«неподвижными»*, хотя и обладают общим для всех их суточным движением, но это движение есть лишь кажущееся или видимое и происходит от вращения Земли около ее оси, а не от движения самих звезд.

Солнце, Луна и планеты, кроме суточного, обладают еще и значительным видимым собственным движением.

Начнем со звезд и будем рассматривать их *видимое* движение.

Всего сто лет тому назад знаменитым астрономам Бесселю в Кенигсберге и В. Я. Струве в Дерпте удалось, при помощи точнейших наблюдений, определить расстояние до некоторых ближайших к нам звезд. Наименьшее из этих расстояний оказалось приблизительно в 200 000 раз больше расстояния от Земли до Солнца, значит в 5 миллиардов раз больше радиуса Земли.

Дальнейшие исследования показали, что расстояния до других звезд нашей звездной системы в десятки, сотни и тысячи раз больше этого. Наконец есть такие звездные системы и туманности, расстояния до которых в миллионы и десятки миллионов раз больше вышеупомянутых.

Отсюда ясно, что направление луча зрения на любую звезду не зависит от положения наблюдателя при его перемещении по земной поверхности, все эти направления между собой параллельны и параллельны лучу, идущему из центра Земли к данной звезде.

Практически можно сказать, что простым наблюдениям доступно лишь определение *направления* луча зрения, идущего из глаза наблюдателя на звезду, иначе — луча света, идущего от звезды в глаз наблюдателя, или параллельного ему луча, идущего в центр Земли.

Для определения этих направлений пользуются соответствующими угломерными инструментами, описание которых не входит в нашу задачу. Измеряя надлежащие углы, относят направление луча к определенным координатным осям, причем берут различные системы полярных и соответствующих им сферических координат.

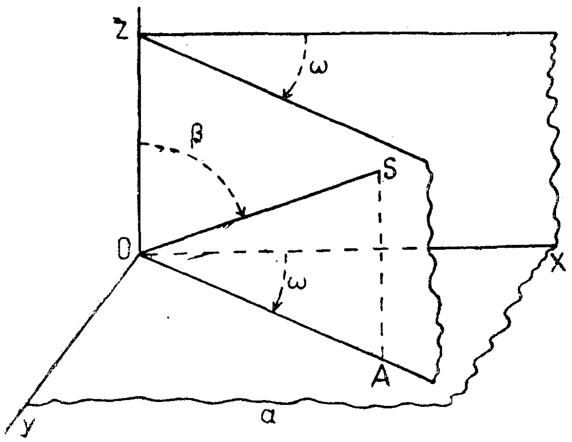
Таким образом в общем случае принимают некоторую заданную прямую OZ, проходящую через глаз наблюдателя, за основную ось и проходящую через нее определенную плоскость ZOX — за основную плоскость, тогда направление луча OS определяется углом ZOS, обозначенным на чертеже (фиг. 7) через β, составляемым направлением OS с осью OZ, причем этот угол считается от оси OZ до луча OS от 0 до $180°$, оставаясь всегда положительным. Этот угол β и есть первая координата. Второю координатою служит двугранный угол ω при ребре OZ, образуемый плоскостью ZOS, проведенной через ось OZ и луч OS, с основною плоскостью ZOX. Этот угол или соответствующий ему плоский угол считается от основной плоскости ZOX от 0 до $360°$ или «по часовой стрелке», или «против часовой стрелки», смотря по надобности, как о том будет сказано ниже.

Расстояние $OS = \rho$ от глаза наблюдателя до звезды S остается обыкновенно неизвестным и не вводится в вычисление.

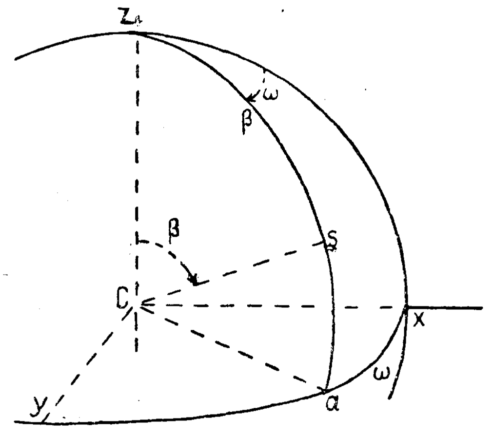
Вообразим теперь, что из точки C, представляющей центр Земли, произвольным радиусом, который, однако, принимают обыкновенно весьма большим по сравнению с радиусом Земли, описана сфера; на эту сферу и относят положение светил следующим образом.

Очевидно, что проведя через точку C луч Cs, параллельный данному OS, получим на сфере точку s, этому лучу соответствующую. Проведя через точку C плоскости, соответственно параллельные ZOX и ZOS, получим на сфере соответствующие им большие круги zsa и zx, причем сферический угол xza при вершине z будет равен углу ω между этими плоскостями; вместе с тем очевидно, что угол zCs равен углу ZOS, и значит, дуга $zs = \beta$.

Таким образом полярным координатам β и ω, показанным на фиг. 7а, соответствуют сферические координаты β и ω, показанные на фиг. 7б.



Фиг. 7а.



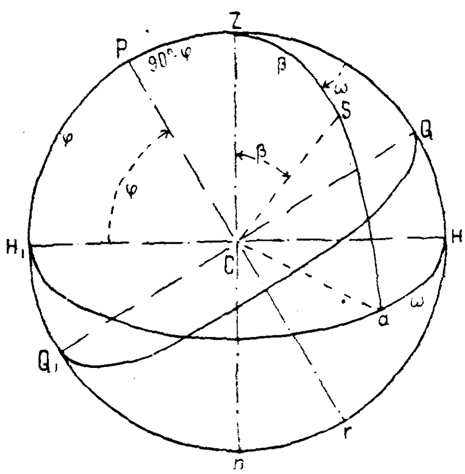
Фиг 7б.

В астрономии описанная вспомогательная сфера называется *небесной*.

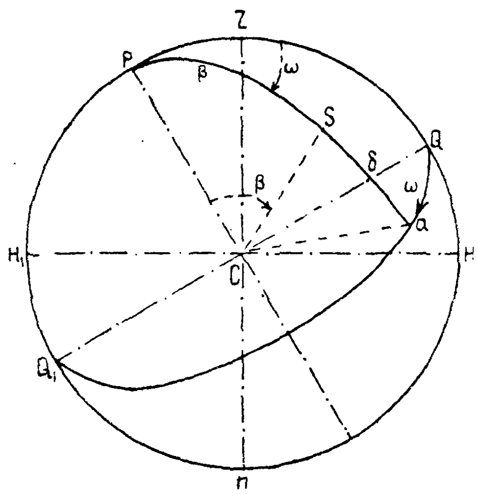
Таким образом на этой сфере положение точки s, которое принимается за место светила, определяется сферическими координатами β и ω, из которых первая представляет дугу большого круга, вторая — сферический угол; часто проводят, кроме основного круга zx, еще круг xay, плоскость которого перпендикулярна к основной оси Cz; на этом круге дуга xa служит мерою сферического угла $xza = \omega$.

В астрономии за основную ось OZ и за основную плоскость ZOX принимают или некоторые линии и плоскости, неизменно связанные с Землею и, значит, представляющиеся наблюдателю, находящемуся на земной поверхности, неподвижными, или же линии и плоскости, занимающие неизменные положения по отношению к звездам. Соответственно этому получают различные системы координат.

Начнем с первых. Для каждой точки земной поверхности, с величайшею точностью, т. е. до сотых долей секунды дуги, может быть фиксировано направление отвесной линии, как нормали к уровню спокойно стоящей жидкости, напр. ртути, налитой в небольшую ванночку. Эту прямую принимают за основную ось Cz (фиг. 8), направляя эту ось вверх; соответствующая точка z сферы небесной называется *зенит*, ей диаметрально противоположная — *надир*. За основную плоскость zCx принимают плоскость меридиана места, которая также может быть фиксирована с величайшею точностью способами, описание которых завлекло бы нас слишком далеко от нашей прямой цели.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

В этой системе угол β называется *зенитным расстоянием* светила, угол ω носит название *азимут*.

Ясно, что, вследствие видимого суточного движения небесной сферы, как зенитное расстояние, так и азимут наблюдаемого светила с течением времени непрерывно изменяются, но не равномерно, ибо видимое вращение небесной сферы происходит не около отвесной линии Cz, а около оси Cp, лежащей в плоскости меридиана и составляющей с отвесною линией угол pCz, равный дополнению до $90°$ географической широты места наблюдения.

Направление прямой Cp (фиг. 9), называемой *осью мира*, может быть для данного места наблюдения определено и фиксировано также с весьма большою точностью. Приняв его за основную ось и плоскость меридиана места — за основную плоскость, мы получим вторую систему координат, неизменно связанных с местом наблюдателя на земной поверхности, но по отношению к этой системе, в отличие от первой, необходимо иметь в виду, что направление оси Cp есть неизменное в пространстве, так что соответствующая точка p небесной сферы занимает *постоянное* положение относительно звезд или, точнее говоря, имеет по отношению к ним весьма медленное движение, о котором будет сказано ниже. Пока же мы примем эту точку p и ей диаметрально противоположную r за точки постоянные, именуемые *полюсами мира*.

В этой системе координат угол β измеряется дугою большого круга ps и называется *полярным расстоянием* светила, которое считается от северного полюса мира от 0 до 180°.

Угол $\omega = Qps$ называется *часовым* углом светила и считается от меридиана места в направлении видимого суточного движения светил (по часовой стрелке) от 0 до 360°.

Полярные расстояния звезд, если пока пренебрегать вышеупомянутым движением полюса мира, остаются *постоянными*, часовые же углы всех звезд изменяются с течением времени равномерно и вполне одинаково.

Плоскости, перпендикулярной оси мира pr, соответствуют на небесной сфере большой круг Q_1aQ, называемый *небесным экватором*, на земной же поверхности — земной экватор.

Вместо полярного расстояния светил, по большей части дается их дополнение до 90°, т. е. дуга as, *именуемая склонением светила*, считаемым от экватора от 0 до 90°, со знаком плюс для светил, лежащих в северном полушарии, и со знаком минус — в южном.

Прежде чем перейти к описанию координатных систем, неизменно связанных с небесною сферою, необходимо вкратце указать общий характер *видимого* движения Солнца по сфере небесной.

В своем годовом видимом движении Солнце описывает на сфере небесной большой круг, наклоненный к небесному экватору под углом 23°27′ причем это наклонение уменьшается весьма медленно, приблизительно на 47′ в столетие, и значит, для довольно значительных промежутков времени может считаться практически постоянным. Видимое движение Солнца по сказанному кругу совершается в сторону, обратную его видимому суточному движению, причем движение это неравномерное.

Сказанный большой круг, E_1E (фиг. 10), по которому совершается видимое годовое движение Солнца, называется *эклиптикой*. Понятно, что эклиптика и экватор, как всякие два большие круга сферы, пересекаются в двух диаметрально противоположных точках, через одну из которых Солнце проходит 21 марта, причем его склонение, обращаясь в нуль, изменяется из южного в северное, через другую — 21 сентября, причем склонение Солнца из северного переходит в южное.

Первая из этих точек ♈, с которою мы постоянно будем иметь дело, называется *точкою весеннего равноденствия*. Точка, ей диаметрально противоположная, называется точкою *осеннего* равноденствия.

Отметим на сфере небесной точку e — полюс эклиптики, и p — полюс экватора, или, что то же, полюс мира. Оказывается, что полюс эклиптики e имеет весьма медленное движение, как уже сказано — около $50''$ в столетие, полюс же мира p, оставаясь, в среднем, в постоянном расстоянии от полюса эклиптики равным $23°27'$, имеет около него медленное движение по малому кругу, описывая этот малый круг в 26 000 лет, совершая при этом в течение 18.6 лет малые колебания около своего среднего места, представляющиеся на небесной сфере в виде малого эллипса с осями в $17''$ и $9''$.

Первое движение полюса мира p называется *прецессией* и открыто Гиппархом за 130 лет до нашей эры, второе называется *нутацией* и открыто Брадлеем в 1750-х годах.

Так как эти движения подчинены определенным закономерностям, то влияние их может быть учитываемо.

Ясно, что при перемещении полюса p экватор тоже перемещается, и вместе с тем перемещаются и точки равноденствия.

Оказывается, что это перемещение совершается почти равномерно, с угловою скоростью по $50''.25$ в год, навстречу видимому годовому движению Солнца по эклиптике.

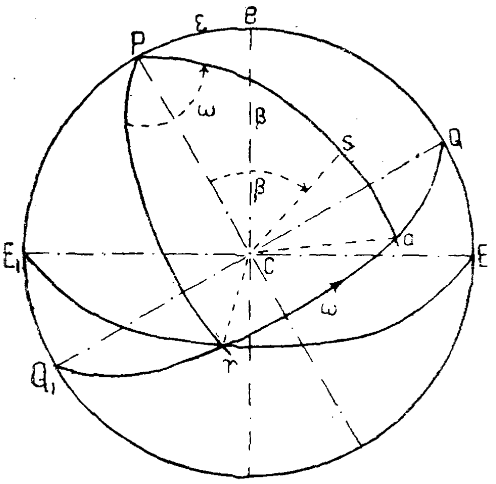
Перейдем теперь к описанию тех двух координатных систем, которые неизменно связаны с сферою небесной, иначе — с неподвижными звездами.

В первой из этих систем за основную ось принимается ось мира pr (фиг. 10), и значит, координата β будет попрежнему полярное расстояние, за основную плоскость принимается большой круг, проходящий через полюс p и точку весеннего равноденствия ♈, причем угол ω, именуемый в этом случае *прямым восхождением*, считается в сторону видимого годового движения Солнца от 0 до 360°.

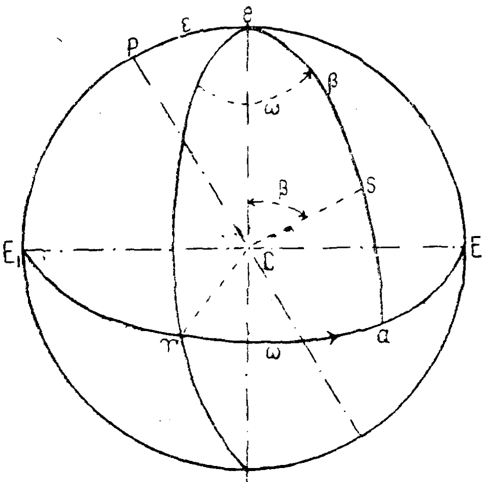
Ясно, что если бы полюс p своего места по отношению к звездам не изменял, то и склонение и прямое восхождение каждой звезды оставались бы неизменными.

Вследствие же прецессии и нутации, эти координаты претерпевают с течением времени определенные весьма медленные закономерные изменения, для учета которых задают склонение и прямое восхождение звезд в определенный момент (напр. начало 1900 г.) и расчисляют влияние прецессии и нутации на эти координаты за время, протекшее от этого начального момента до момента наблюдений.

Наконец, во второй системе координат за основную ось принимается ось Ce эклиптики (фиг. 11), т. е. прямая, перпендикулярная ее плоскости; этой прямой на сфере небесной соответствует полюс эклиптики e, сохраняющий, как указано выше, положение по отношению к неподвижным звездам, гораздо более близкое к постоянному, нежели полюс мира p. Угол β представляет тогда расстояние от полюса эклиптики до светила, но обыкновенно вместо этого расстояния берут дополнение его до $90°$, т. е. дугу $as = b$, представляющую расстояние светила от эклиптики, называемое *широтой* светила.



Фиг. 10.



Фиг. 11.

За основную координатную плоскость принимают плоскость, проходящую через ось эклиптики и *через точку весеннего равноденствия*. Ясно, что эта плоскость перпендикулярна к плоскости эклиптики, и ей на сфере небесной соответствует круг $e♈$, угол ω считается от этой плоскости в сторону видимого годового движения Солнца от 0 до $360°$ и называется *долготой* светила. Ясно, что этот угол измеряется дугою эклиптики $♈a$, причем эту дугу также зовут долготой светила.

Таким образом мы имеем следующие системы сферических координат:

1°. Зенитное расстояние и азимут.

2°. Полярное расстояние и часовой угол.

Вместо зенитного расстояния часто задают его дополнение — высоту светила над горизонтом, вместо полярного расстояния — склонение.

3°. Полярное расстояние или склонение и прямое восхождение.

4°. Широта и долгота светила.

§ 2. *Понятие об измерении времени.* Суточное видимое вращение небесной сферы около оси мира происходит равномерно, так что промежуток времени между двумя последовательными прохождениями одной и той же звезды через полуденную часть меридиана для всех звезд один и тот же, и значит, этот промежуток мог бы быть принят за единицу для измерения времени, но в виду того, что за начало счета прямых восхождений принимается точка весеннего равноденствия, то за единицу для измерения времени принимают промежуток между двумя последовательными прохождениями точки весеннего равноденствия через полуденную часть меридиана данного места. Этот промежуток, вследствие прецессии, короче приблизительно на $\frac{1}{100}$ секунды, нежели время одного полного оборота Земли около своей оси, и называется *звездными сутками.* Звездные сутки подразделяются на 24 часа, каждый час — на 60 минут, каждая минута — на 60 секунд, именуемых звездным часом, звездною минутою, звездною секундою.

В гражданском обиходе принято не звездное время, а так называемое среднее солнечное, которое считается по фиктивному телу, именуемому средним Солнцем, описывающим равномерным движением небесный экватор в тот же самый промежуток времени, в течение которого истинное Солнце между двумя последовательными прохождениями через точку весеннего равноденствия описывает эклиптику. Этот промежуток времени называется *тропическим годом* и равен 366.24220 звездным суткам.

Промежуток времени между двумя последовательными прохождениями среднего Солнца через меридиан данного места называется *средними сутками.*

Ясно, что в тропическом году средних суток 365.24220, т. е. на 1 сутки меньше, нежели звездных.

Средние сутки подразделяются, подобно звездным, на 24 часа, каждый час — на 60 минут, каждая минута — на 60 секунд, именуемых средними.

На основании продолжительности тропического года имеем соотношение

$$365.24220 \text{ средних суток} = 366.24220 \text{ звездных суток}$$

откуда следует:

$$\frac{\text{средние сутки}}{\text{звездные сутки}} = 1.0027379$$

$$\frac{\text{звездные сутки}}{\text{средние сутки}} = 0.9972696$$

иначе:

$$1 \text{ звездные сутки} = 23^ч\ 56^м\ 4.091^с \text{ средних}$$

$$1 \text{ средние сутки} = 24^ч\ 03^м\ 56.555^с \text{ звездных}$$

Эти соотношения служат для перевода промежутков, выраженных в среднем времени, в звездные и обратно, для чего составлены соответствующие таблицы.

3. *Соотношения между координатами светила.* По непосредственным наблюдениям на постоянных обсерваториях легко определяется прямое восхождение светила и его полярное расстояние или склонение; для этого служат: пассажный инструмент с меридианным кругом и идущие по звездному времени астрономические часы.

Пассажный инструмент представляет собою телескоп, труба которого снабжена цапфами, ось коих в точности перпендикулярна оптической оси телескопа. Этими цапфами труба накладывается на прочно укрепленные на каменных столбах, не *соприкасающихся к полу здания*, подцапфенники, выверенные так, чтобы ось покоящихся на них цапф трубы была горизонтальна и в точности перпендикулярна к плоскости меридиана места. Ясно, что при таком устройстве, при повороте трубы на ее цапфах, оптическая ее ось описывает *плоскость меридиана* места. На одной из цапф насажен разделенный на градусы и доли их (обыкновенно через $2'$) круг, плоскость которого перпендикулярна оси цапф. Для отсчета делений этого круга, на одном из столбов укреплены микроскопы, помощью которых отсчеты по кругу могут быть производимы с точностью до $0''.1$, причем предварительно весьма точно (автоколимацией в ртутную ванну) определяется отсчет по кругу, соответствующий вертикальному положению оси трубы объективом вниз.

Отсюда ясно, что замечая по часам, идущим по звездному времени, момент прохождения звезды через крест нитей, установленный в главном фокусе телескопа, и произведя отсчет по кругу, получим зенитное расстояние в момент прохождения (кульминации); звездное же время, т. е. показание часов непосредственно, как нетрудно видеть, дает прямое восхождение светила. По зенитному расстоянию z из соотношения

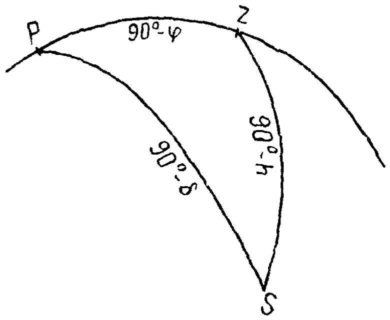
$$\delta + z = \varphi$$

находим склонение светила δ по известной широте места φ.

Если полярное расстояние светила меньше широты места, то такое светило все время находится над горизонтом и, значит, может быть наблюдаемо при обоих своих прохождениях через меридиан, или, как говорят, в верхней и нижней кульминации. Полусумма соответствующих зенитных расстояний, очевидно, равна дуге pz, т. е. дополнению широты места $90^\circ - \varphi$. Ясно, что отсюда найдется и широта места φ.

Упоминаем лишь, что при наблюдении зенитных расстояний, или, что то же, высот звезд, надо *считаться с так называемой астрономической* рефракцией, т. е. преломлением лучей света в земной атмосфере, и вводить соответствующие *поправки*, показываемые в астрономических таблицах. Мы предполагаем, что все зенитные расстояния этими поправками «исправлены».

Как легко видеть, во всякий момент времени можно для данного светила и данного места земной поверхности вообразить на сфере небесной сферический треугольник, имеющий своими вершинами: точку p — полюс мира, точку z — зенит данного места и точку s — место светила.



Фиг. 12.

Элементы этого треугольника (фиг. 12) суть:

$pz = 90^\circ - \varphi$, где φ — широта места;

$ps = 90^\circ - \delta$, где δ — склонение светила;

$zs = 90^\circ - h$, где h — высота светила;

угол zps есть часовой угол светила;

угол pzs есть азимут светила;

угол psz называется параллактическим *углом, с которым мы дела иметь не будем.*

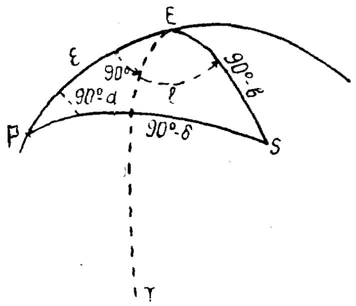
Ясно, что когда в этом сферическом треугольнике три элемента известны, то *три остальные* находятся по формулам сферической тригонометрии. Так, напр., по данной широте места φ, склонению δ и часовому *углу p, по формулам*

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos p$$
$$\operatorname{cotg} Z \sin p = \operatorname{tang}\delta \cos\varphi - \cos p \sin\varphi$$

находим координаты h и Z, т. е. высоту и азимут светила.

Все эти соотношения будут относиться к координатам, неизменно связанным с местом наблюдателя на Земле, и рассмотрение треугольника pzs, называемого полярным, исчерпывает все вопросы, относящиеся к видимому суточному движению светил.

Перейдем теперь к рассмотрению третьей и четвертой систем координат, не зависящих от места наблюдателя на Земле. Мы видели, что склонение и прямое восхождение светила определяются весьма точно непосредственными наблюдениями. В древности пользовались для определения широты и долготы светила так называемыми армиллярными (кольцевыми) сферами, но устройство таких приборов, которые давали бы требуемую *современной астрономией точность*, технически неисполнимо; между тем, для всех вопросов, связанных не с видимым, а с истинным движением самой Земли, Луны, планет, координаты, называемые широтой и долготой светила, столь же важны, как склонение и прямое восхождение при изучении видимого суточного движения; поэтому надо установить те формулы, помощью которых по заданным склонению и прямому восхождению светила определяются его широта и долгота и наоборот. Для этого стоит только рассмотреть на сфере небесной сферический треугольник, коего вершины суть: точка p — полюс мира, точка e — полюс эклиптики и точка s — место светила.



Фиг. 13.

В этом треугольнике (*фиг.* 13) имеем следующие элементы:

$pe = \varepsilon = 23°27'$ наклонность эклиптики к экватору;

$ps = 90° - \delta$ полярное расстояние светила;

$es = 90° - b$ дополнение широты светила;

$spe = 90° - \alpha$, где α — прямое восхождение светила;

$pes = 90° + l$, где l есть долгота светила; в рассмотрении угла pse надобности нет.

Положим, что по данному склонению и прямому восхождению требуется определить широту и долготу светила, тогда имеем формулы:

$$\operatorname{cotg}(90° + l) \sin(90° - \alpha) = \operatorname{cotg}(90° - \delta) \sin\varepsilon - \cos\varepsilon \cos(90° - \alpha)$$
$$\cos(90° - b) = \cos(90° - \delta)\cos\varepsilon + \sin(90 - \delta)\sin\varepsilon\cos(90° - \alpha)$$

иначе:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} l \cos\alpha &= \operatorname{tang}\delta\sin\varepsilon - \cos\varepsilon\sin\alpha \\ \sin b &= \sin\delta\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon\sin\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Наоборот, когда даны широта b и долгота l светила и требуется определить его склонение и прямое восхождение, то имеем формулы:

$$\operatorname{cotg}(90^\circ - \alpha)\sin(90^\circ + l) = \operatorname{cotg}(90^\circ - b)\sin\varepsilon - \cos\varepsilon\cos(90^\circ + l)$$
$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos\varepsilon\cdot\cos(90^\circ - b) + \sin\varepsilon\cdot\sin(90^\circ - b)\cdot\cos(90^\circ + l)$$

иначе:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\alpha\cos l &= \operatorname{tang} b\sin\varepsilon + \cos\varepsilon\sin l \\ \sin\delta &= \cos\varepsilon\cdot\sin b - \sin\varepsilon\cos b\sin l \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Для практических вычислений эти формулы преобразуются к гораздо более удобным, которых мы не приводим, ибо изложение астрономической вычислительной практики не может входить в нашу задачу.

§ **4.** *Законы Кеплера движения планет. Закон Ньютона.* В 1609 г. Кеплер, в знаменитом сочинении о движении планеты Марс, высказал следующие два общих закона движения планет.

1°. Планеты движутся вокруг Солнца по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

2°. Площади, описываемые радиусом-вектором, соединяющим планету с Солнцем, пропорциональны времени их описания.

Через 10 лет он высказал третий закон:

3°. Квадраты времен обращения планет около Солнца относятся как кубы больших осей их орбит.

Справедливость этих законов подтверждалась Кеплером полным согласием между вычисленными и наблюденными местами планет, что потребовало от него громадного количества вычислений, помимо тех, которые им были произведены для установления, с необыкновенною гениальностью, истинного вида орбит планет по имевшимся наблюдениям их.

Через 67 лет Ньютон, в изданном им сочинении «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica», вывел из законов Кеплера свой закон всемирного тяготения, который сформулирован им в виде следующих предложений:

1°. Силы, которыми спутники Юпитера постоянно отклоняются от прямолинейного движения и удерживаются на своих орбитах, направлены к центру Юпитера и обратно пропорциональны квадратам расстояний мест до этого центра.

2°. Силы, которыми главные планеты постоянно отклоняются от прямолинейного движения и удерживаются на своих орбитах, направлены к Солнцу и обратно пропорциональны квадратам расстояний до центра его.

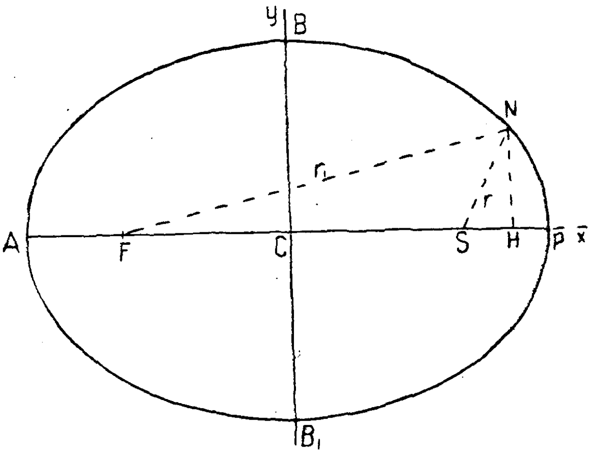
3°. Сила, которою Луна удерживается на своей орбите, направлена к Земле и обратно пропорциональна квадратам расстояний мест до центра Земли.

4°. Луна тяготеет к Земле и силою тяготения постоянно отклоняется от прямолинейного движения и удерживается на своей орбите.

5°. Планеты, обращающиеся около Юпитера, тяготеют к Юпитеру, обращающиеся около Сатурна—к Сатурну, обращающиеся около Солнца—к Солнцу, и силою этого тяготения постоянно отклоняются от прямолинейного пути и удерживаются на криволинейных орбитах.

6°. Все тела тяготеют к каждой отдельной планете, и веса тел на всякой планете, при одинаковых расстояниях от ее центра, пропорциональны массам этих планет.

7°. Тяготение существует ко всем телам вообще и пропорционально массе каждого из них.



Фиг. 14.

§ **5.** ***Формулы эллиптического движения планет по законам Кеплера.*** Выведем теперь основные формулы движения планет, следующие из законов Кеплера. Примем плоскость орбиты за плоскость чертежа, и пусть $PBAB_1P$ есть описываемый планетою эллипс, C—его центр, $AP=2a$—его большая ось, S—тот фокус, в котором находится Солнце, F—второй фокус. Возьмем точку C за начало координат, примем оси координат, указанные на чертеже (фиг. 14), и пусть N есть место планеты в рассматриваемый момент.

Полагая

$$SN=r;\quad FN=r_1,\quad CH=x;\quad HN=y$$

$$CP=a;\quad CS=c;\quad \frac{c}{a}=\varepsilon$$

имеем по определению эллипса:

$$r+r_1=2a; \tag{$*$}$$

вместе с тем

$$r^2=(x-c)^2+y^2$$
$$r_1^2=(x+c)^2+y^2$$

Отсюда следует

$$r_1^2 - r^2 = 4cx = (r_1 - r)(r_1 + r) = 2a(r_1 - r)$$

т. е.

$$r_1 - r = 2\varepsilon x \tag{**}$$

Отсюда, на основании формулы (*), имеем:

$$r = a - \varepsilon x \tag{***}$$

$$r_1 = a + \varepsilon x$$

Примем теперь точку S за начало полярных координат, тогда, обозначая через v угол PSN, так что

$$v = PSN$$

имеем

$$x = r\cos v + c = r\cos v + \varepsilon a$$

и на основании формулы (***) будет

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos v} \tag{I}$$

В астрономии приняты следующие термины: ближайшая к Солнцу вершина P эллипса называется *перигелий*, дальнейшая A — *афелий*, величина ε называется *эксцентриситетом* орбиты, угол v, считаемый от оси SP в сторону движения планеты,— *истинной аномалией*, r — радиусом-вектором. Формула (I) есть первая основная формула эллиптического движения планет.

Обратимся теперь ко второму закону Кеплера. Пусть T есть полное время обращения планеты около Солнца, выраженное в средних солнечных сутках, положим

$$CB = b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

тогда площадь описываемого планетою эллипса будет

$$\pi ab = \pi a^2\sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

значит площадь, описываемая радиусом-вектором в 1 сутки, будет

$$\frac{\pi a^2\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{T} = h$$

следовательно, если дуга PN описана в продолжение t суток, то будет

$$\text{площ. } PSN = \sigma = \pi a^2\sqrt{1 - \varepsilon^2}\,\frac{t}{T} = ht$$

С другой стороны, имеем

$$\text{площ. } PSN = \text{площ. } PCN - \text{площ. } SCN$$

Но по свойству эллипса, если описать из центра C круг PDA радиусом, равным a, то будет

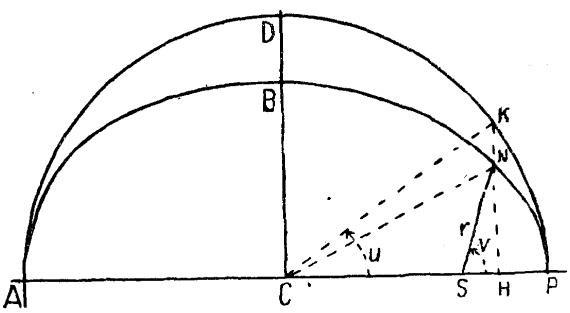
$$\text{площ. } PCN = \frac{b}{a} \cdot \text{площ. } PCK$$

полагая

угол $PCK = u$

имеем

$$\text{площ. } PCK = \frac{1}{2} a^2 u$$



Фиг. 15.

Очевидно,

$$\text{площ. } SCN = \frac{1}{2} CN \cdot HN = \frac{1}{2} a\varepsilon \cdot \frac{b}{a} a \sin u = \frac{1}{2} ab\varepsilon \sin u$$

следовательно будет

$$\sigma = \frac{1}{2} ab (u - \varepsilon \sin u)$$

подставляя вместо b и σ их величины, имеем

$$\pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cdot \frac{t}{T} = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} (u - \varepsilon \sin u)$$

т. е.

$$\frac{2\pi}{T} t = u - \varepsilon \sin u$$

Величина $\frac{2\pi}{T}$ представляет среднюю угловую скорость обращения планеты вокруг Солнца; в астрономии она носит название *среднее суточное движение*. Положив

$$\frac{2\pi}{T} = n$$

получим предыдущее уравнение в виде

$$nt = u - \varepsilon \sin u \qquad \text{(II)}$$

Это есть второе основное уравнение эллиптического движения планет; оно носит название *уравнение Кеплера*. Величина nt называется *среднею аномалией*, вспомогательный угол u — *эксцентрической аномалией*.

Из равенств

$$r = a - \varepsilon x; \quad x = a\cos u$$

следует

$$r = a(1 - \varepsilon\cos u) \tag{*}$$

из равенств же

$$x = r\cos v + \varepsilon a = a\cos u$$

следует

$$r\cos v = a(\cos u - \varepsilon) \tag{**}$$

Затем из равенств (*) и (**) имеем:

$$r(1 - \cos v) = a(1 + \varepsilon)(1 - \cos u)$$

$$r(1 + \cos v) = a(1 - \varepsilon)(1 + \cos u)$$

Отсюда следует

$$\operatorname{tang}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tang}\frac{u}{2} \tag{III}$$

Это уравнение служит для вычисления истинной аномалии v по эксцентрической u и наоборот. Перед корнем надо брать знак $+$, ибо, очевидно, углы $\frac{v}{2}$ и $\frac{u}{2}$ всегда одной и той же четверти.

Это есть третье основное уравнение эллиптического движения планет.

§ 6. *Элементы орбиты.* Формулы (I), (II), (III) дают возможность определить положение светила на его орбите в любой момент t_1, когда известны: эксцентриситет ε, период обращения T и момент прохождения через перигелий t_0.

В самом деле, тогда будет:

$$t = t_1 - t_0$$

$$n = \frac{2\pi}{T}$$

$$M = nt$$

т. е. все эти величины будут известны. По уравнению (II) найдем величину u, решая это уравнение, напр., по способу последовательных приближений, после чего по уравнению (III) найдем v.

Чтобы найти величину a, принимаем за единицу величину a_0 полуоси земной орбиты, тогда, обозначая через T_0 — период обращения Земли вокруг Солнца, т. е. звездный год, равный 365.25638 средних суток (этот год длиннее тропического на тот промежуток времени, который Земле нужен, чтобы пройти 50″.25 по своей орбите, представляющие прецессию за один год), по третьему закону Кеплера имеем пропорцию

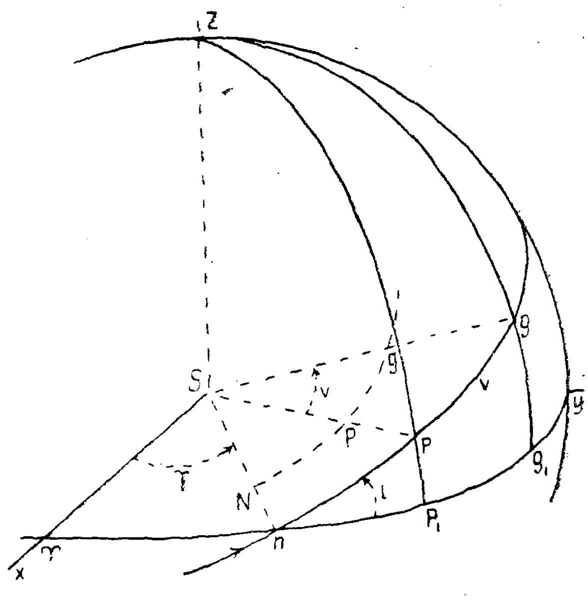
$$\frac{a^3}{a_0^3} = \frac{T^2}{T_0^2},$$

откуда следует

$$a = a_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \cdot \left(\frac{T}{365.25638}\right)^{\frac{2}{3}}$$

когда a найдено, по формуле (I) находим r, и положение планеты на ее орбите будет определено.

Но этим еще не определяется положение планеты в пространстве: надо знать положение самой орбиты.



Фиг. 16.

Для определения положения орбиты в пространстве принимают за начало координат центр Солнца S, за ось Sx берут прямую $S♈$, за плоскость Sxy — плоскость эклиптики, направляя ось y в точку, долгота которой равна 90°. Такие координаты называются *гелиоцентрическими*. Опишем вместе с тем из точки S, как центра, вспомогательную сферу. Пусть NPG есть орбита планеты, которая в рассматриваемый момент находится в точке G, пусть точка P есть перигелий и прямая SN есть *линия пересечения плоскости орбиты* с плоскостью xSy, т. е. с плоскостью эклиптики. На вспомогательной или небесной сфере плоскости орбиты соответствует большой круг npg, линия SN — точка n, линия SP — точка p, линия SG — точка g.

Точка n, в которой планета переходит из южного полушария в северное, называется *восходящим узлом* ее орбиты, положение этой точки определяется углом $xSn = \gamma$, называемым *долготою восходящего узла*.

Положение большого круга npg или соответствующей ему плоскости определяется углом i, называемым *наклонностью орбиты*.

Положение перигелия определяется углом nSp, или дугою $np = \omega$, представляющей аргумент широты точки p; тогда положение точки g определяется углом nSg, который равен $\omega + v$ и представляет аргумент широты точки g.

Проведя большой круг Zgg_1, видим, что дуга $g_1 g$ представляет гелиоцентрическую широту β светила, дуга $xg_1 = \gamma + ng_1 = \lambda$ — его долготу; тогда, воспользовавшись сферическим треугольником ngg_1, имеем

$$\sin\beta = \sin(\omega + v)\sin i \tag{1}$$

затем, полагая $ng_1 = \nu$, имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}\nu &= \operatorname{tang}(\omega + v)\cos i \\ \lambda &= \gamma + \nu \end{aligned} \tag{2}$$

После того как широта и долгота светила найдены, по известному радиусу-вектору $SG = r$ находим гелиоцентрические координаты:

$$x = r\cos\beta\cos\lambda;\quad y = r\cos\beta\sin\lambda;\quad z = r\sin\beta$$

коими положение светила в пространстве и определяется.

Таким образом величины, которыми определяется вид и положение орбиты светила, называемые элементами орбиты, суть следующие:

1°. Долгота восходящего узла.

2°. Наклонность.

3°. Большая полуось или период обращения.

4°. Эксцентриситет.

5°. Аргумент широты перигелия.

6°. Время прохождения через перигелий.

Вместо аргумента широты перигелия часто задают сумму этой величины и долготы узла и называют это «долготою перигелия в орбите».

Движение Земли вокруг Солнца в точности известно, и значения координат Земли относительно гелиоцентрических осей даются на каждый день года в астрономических ежегодниках; пусть в момент t эти координаты суть:

$$X,\ Y,\ Z$$

тогда ясно, что координаты планеты относительно *геоцентрических осей*, т. е. имеющих начало в центре Земли и, соответственно, параллельных вышеуказанным гелиоцентрическим, суть:

$$\xi = x - X;\ \eta = y - Y;\ \zeta = z - Z$$

полагая

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + S^2}$$

причем ρ представляет расстояние от центра Земли до планеты, получим ее геоцентрическую широту β и геоцентрическую долготу λ по формулам:

$$\begin{aligned} \rho\cos\beta\cos\lambda &= x - X \\ \rho\cos\beta\sin\lambda &= y - Y. \\ \rho\sin\beta &= z - Z \end{aligned}$$

Зная же широту и долготу, найдем склонение δ и прямое восхождение α планеты по формулам § 3. Зная склонение и прямое восхождение планеты из полярного треугольника, легко определить все обстоятельства видимого суточного движения ее.

Для главных планет в астрономических ежегодниках показываются величины α и δ.

Для главных планет периоды обращения, наклонность, долгота узла — были известны с большою точностью еще древним, затем все остальные элементы были установлены Кеплером и астрономами, следовавшими после него, общая же метода определения орбиты вновь открываемых «малых планет» по небольшому числу (трем) наблюдений их, следующих через небольшие (3—5—10 дней) одно за другим, была развита Гауссом.

§ 7. *Понятие о движении Луны. Различные лунные месяцы.* Движение Луны непосредственно относится к геоцентрическим координатам $C\xi\eta\zeta$, причем за начало берут центр Земли C, за ось $C\xi$ — направление на точку весеннего равноденствия, за плоскость $C\xi\eta$ — плоскость эклиптики, самое же движение Луны воображают в каждый момент совершающимся по эллиптической орбите, элементы которой с течением времени изменяются и имеют лишь определенное значение для данного момента. Эти изменения элементов лунной орбиты следуют определенным закономерностям, которые мы вкратце и укажем.

1°. Долгота восходящего узла γ не остается постоянной, а линия узлов вращается около центра Земли C в сторону уменьшающихся долгот и совершает полный оборот в 6793 дня, имея, сверх этого среднего равномерного, еще небольшое колебательное движение.

2°. Наклонность плоскости орбиты Луны, среднее значение которой составляет около 5°10′, подвержена многочисленным периодическим изменениям, в отдельности не превышающим, однако, 1 градусной минуты.

3°. Большая полуось и эксцентриситет подвержены также периодическим изменениям около их средних значений.

4°. Угол ω, которым определяется положение перигея, не остается постоянным, а изменяется пропорционально времени по формуле

$$\omega = \omega_0 + \frac{2\pi}{3232}(t - t_0)$$

причем t выражено в средних сутках.

Сверх этих изменений элементов орбиты, самое движение Луны по ней совершается с отступлениями от законов Кеплера, вызывающими множество так называемых «неравенств» в движении ее.

В виду изменяемости вида и положения лунной орбиты рассматривают различные периоды ее обращения вокруг Земли, именуемые вообще *лунными месяцами*, получившими различные названия в зависимости от того, какой период рассматривается, а именно:

1°. Месяц звездный	$27^д$	$7^ч$	$43^м$	$11.5^с$
2°. » тропический	27	7	43	4.7
3°. » аномалистический	27	13	18	37.4
4°. » драконический	27	5	5	36.0
5°. » синодический	29	12	44	2.9

Звездный месяц есть период обращения по отношению к неподвижным звездам.

Тропический месяц есть период обращения по отношению к точке весеннего равноденствия, т. е. промежуток времени, в течение которого долгота Луны изменяется на 360°.

Аномалистический месяц есть промежуток времени между двумя последовательными прохождениями через перигей, или вообще тот промежуток времени, в течение которого истинная аномалия изменяется на 360°.

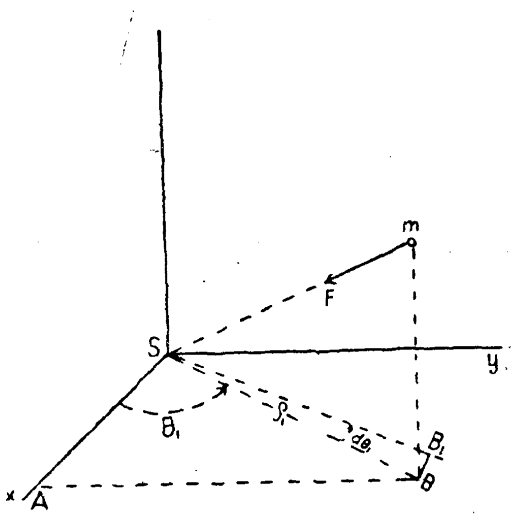
Драконический месяц есть промежуток времени между двумя последовательными прохождениями через восходящий узел.

Синодический есть период обращения по отношению к Солнцу, т. е. промежуток времени, в течение которого разность долготы Луны и Солнца изменяется на 360°.

Само собою разумеется, что все вышеуказанные значения представляют *средние* значения, выведенные, примерно, из 30 000 обращений Луны, протекших от наблюдений древних (главным образом полных солнечных затмений) и современных.

Эти числа приведены здесь, ибо они почти все встречаются в теории Эйлера.

§ 8. *Движение тела, притягиваемого к неподвижному центру по закону Ньютона.* Чтобы выяснить связь между законами Кеплера и законом Ньютона, рассмотрим аналитически вопрос о движении тела, притягиваемого обратно пропорционально квадрату расстояния к неподвижному центру; мы увидим, что к этому вопросу сводится рассмотрение движения каждой отдельной планеты вокруг Солнца.



Фиг. 17.

Эйлер рассматривает это движение, сразу выводя приближенные формулы, не переходя через точные, мы же здесь выведем эти последние, чтобы показать степень точности формул Эйлера и их связь с общей теорией.

Возьмем попрежнему гелиоцентрические оси $Sxyz$, обозначим через M — массу Солнца и через m — массу планеты, и примем, что отношение $\frac{m}{M}$ столь мало по сравнению с 1, что им можно пренебречь при той степени точности, которая имеется в виду. В таком случае Солнце можно считать неподвижным и рассматривать только движение точки m под действием притягательной силы

$$F = \frac{fmM}{r^2}$$

направленной к Солнцу. Косинусы углов, составляемых этим направлением к осям координат, суть:

$$-\frac{x}{r}; \quad -\frac{y}{r}; \quad -\frac{z}{z}$$

уравнения движения точки m, по сокращении множителя m, будут:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -fM \cdot \frac{x}{r^3}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -fM \cdot \frac{y}{r^3} \qquad (1)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -fM \cdot \frac{z}{r^3}$$

Заметив, что

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0$$

$$z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = 0 \qquad (2)$$

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = 0$$

имеем следующие три интеграла уравнений (1):

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c_1$$

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = c_2 \qquad (3)$$

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = c_3$$

Умножая уравнения (1), соответственно, на

$$\frac{dx}{dt} \cdot dt = dx; \quad \frac{dy}{dt} \cdot dt = dy; \quad \frac{dz}{dt} \cdot dt = dz$$

и сложив полученные равенства, имеем

$$\left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^2z}{dt^2}\right) dt = -fM \cdot \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r^3}$$

откуда, по интегрировании, получаем

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = fM\left[\frac{2}{r} + c_4\right] \qquad (4)$$

причем c_1, c_2, c_3 и c_4 суть постоянные произвольные.

Из уравнений (3) следует

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0 \tag{5}$$

которое показывает, что точка m все время находится в плоскости

$$c_1 \xi + c_2 \eta + c_3 \xi = 0 \tag{5'}$$

проходящей через начало координат S, т. е. через центр Солнца.

Нормаль к этой плоскости составляет с осями координат углы, косинусы коих суть:

$$\cos \widehat{nx} = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^3}}; \quad \cos \widehat{ny} = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}};$$
$$\cos \widehat{nz} = \frac{c_3}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \tag{6}$$

причем для определенности будем перед корнем брать знак $+$.

Очевидно, что левая часть уравнения (4) представляет квадрат скорости точки m в момент времени t. Обозначим эту скорость через V, так что

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

Положим, что в начальный момент $t = t_0$:

$$V = V_0 \quad \text{и} \quad r = r_0$$

тогда уравнение (4) можно написать так:

$$V^2 - V_0^2 = fM\left[\frac{2}{r} - \frac{2}{r_0}\right] \tag{4'}$$

Уравнения (3) имеют простой геометрический смысл. В самом деле, обозначим через θ_1 — угол ASB, очевидно будет

$$\theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Отсюда, дифференцируя по переменной t, имеем

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}}{x^2 + y^2}$$

и, полагая

$$x^2 + y^2 = \rho_1^2$$

имеем

$$\rho_1^2 \frac{d\theta_1}{dt} = c_1$$

или

$$\rho_1^2 \, d\theta_1 = c_1 \, dt$$

Но $\rho_1^2 d\theta$ представляет удвоенную площадь бесконечно малого сектора BAB_1; обозначая ее через $2d\sigma_1$, имеем

$$d\sigma_1 = \frac{1}{2} c_1\, dt$$

и, по интегрировании,

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} c_1 (t - t_0)$$

условившись считать площадь σ_1 с момента $t = t_0$.

Совершенно так же получим для координатных плоскостей zx и zy при понятном обозначении равенства:

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} c_2 (t - t_0)$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} c_3 (t - t_0)$$

Из этих равенств следует

$$\frac{\sigma_1}{c_1} = \frac{\sigma_2}{c_2} = \frac{\sigma_3}{c_3} = \frac{1}{2}(t - t_0) = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \qquad (*)$$

полагая

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} = \sigma$$

имеем на основании формулы (6):

$$\sigma_1 = \sigma \cos(\widehat{nx}); \quad \sigma_2 = \sigma \cos(\widehat{ny}); \quad \sigma_3 = \sigma \cos(\widehat{nz})$$

откуда видно, что σ есть площадь, описанная радиусом-вектором в плоскости орбиты за время $t - t_0$, а величины σ_1, σ_2, σ_3 — ее проекции на плоскости координат.

Затем из формулы (*) следует

$$\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \cdot (t - t_0) = \frac{1}{2} c (t - t_0) \qquad (7)$$

причем

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

Это равенство выражает второй закон Кеплера.

Вообразим в плоскости орбиты начальное положение m_0 точки m и обозначим через θ — угол $m_0 S m$ между радиусами-векторами r_0 и r, тогда будет

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad (8)$$

вместе с тем по уравнению (7):

$$2d\sigma = r^2\,d\theta = c\,dt$$

т. е.

$$dt = \frac{1}{c} r^2\,d\theta \tag{7'}$$

Подставляя величины (8) и (7') в уравнение (4'), имеем

$$\frac{dr^2 + r^2\,d\theta^2}{r^4\,d\theta^2} = \frac{2fM}{c^2}\cdot\frac{1}{r} + \frac{1}{c^2}\left[V_0^2 - \frac{2fM}{r_0}\right]$$

или иначе

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)^2}{d\theta} + \frac{1}{r^2} = \frac{2fM}{c^2}\frac{1}{r} + h \tag{9}$$

причем для сокращения положено

$$h = \frac{1}{c^2}\left(V_0^2 - \frac{2fM}{r_0}\right)$$

Положим

$$\frac{1}{r} = s \quad \text{и} \quad fM = k$$

тогда предыдущее уравнение будет

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + s^2 = \frac{2k}{c^2}s + h \tag{10}$$

причем при $t = t_0$ должно быть:

$$s = s_0 = \frac{1}{r_0}; \quad \theta = \theta_0$$

Дифференцируя по t, получим по сокращении:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + s = \frac{k}{c^2}$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$s = \frac{k}{c^2} + C\cos(\theta - \omega)$$

причем C и ω суть постоянные произвольные, которые определяются по условиям: при $\theta = \theta_0$ должно быть

$$s = s_0 \quad \text{и} \quad \frac{ds}{dt} = \left(\frac{ds}{dt}\right)_0$$

причем последняя величина, на основании уравнения (10), есть

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_0^2 = h - s_0^2 + \frac{2k}{c^2} s_0 = h - \frac{1}{r_0^2} + \frac{2k}{c^2}\frac{1}{r_0} = \frac{V_0^2}{c^2} - \frac{1}{r_0^2}$$

Таким образом получаем:

$$\frac{1}{r_0} - \frac{k}{c^2} = C\cos(\theta_0 - \omega)$$

$$\frac{V_0^2}{c^2} - \frac{1}{r_0^2} = C^2 \sin^2(\theta_0 - \omega)$$

откуда следует

$$C^2 = \frac{V_0^2}{c^2} - \frac{2k}{c^2}\frac{1}{r_0} + \frac{k^2}{c^4}$$

Значит, будет

$$s = \frac{1}{r} = \frac{k}{c^2} + \sqrt{\frac{V_0^2}{c^2} - \frac{2k}{c^2}\frac{1}{r_0} + \frac{k^2}{c^4}}\cos(\theta - \omega)$$

т. е.

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{c^2}{k}}{1 + \sqrt{1 - \frac{c^2}{k^2}\left(\frac{2k}{r_0} - V_0^2\right)}\cos(\theta - \omega)} \tag{11}$$

положив

$$\frac{c^2}{k} = a(1 - \varepsilon^2) \tag{12}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{c^2}{k^2}\left(\frac{2k}{r_0} - V_0^2\right)} \tag{13}$$

напишем предыдущее уравнение так:

$$\frac{1}{r} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos(\theta - \omega)} \tag{14}$$

На основании § 5 видим, что когда

$$\varepsilon < 1$$

то это уравнение представляет эллипс, большая полуось которого есть a и эксцентриситет есть ε.

Отсюда следует первый закон Кеплера.

В том же случае, когда

$$\varepsilon > 1$$

уравнение (14) представляет гиперболу, а когда

$$\varepsilon = 1$$

это уравнение представляет параболу.

С этими двумя последними случаями мы дела иметь не будем, почему на них и не останавливаемся.

Обозначим через T — полное время обращения точки m вокруг S; так как площадь эллипса (14), ею описываемого, есть

$$\pi \cdot a \cdot b = \pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}$$

то, на основании формулы (7), имеем

$$\pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{1}{2} cT$$

откуда

$$c = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}}{T}$$

и, на основании формулы (12), имеем

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k} \tag{15}$$

причем

$$k = fM \tag{15'}$$

Формула (15) выражает третий закон Кеплера, связывая вместе с тем для всех планет, массы коих ничтожно малы по сравнению с массою Солнца, постоянное k с этою последнею и с Ньютоновой постоянной притяжения f.

Покажем теперь связь между введенными нами при интегрировании постоянными, элементами орбиты и начальными обстоятельствами движения, как они обыкновенно задаются в механике.

В механике обыкновенно задают для начального момента $t = t_0$ положение точки тремя ее координатами:

$$x_0,\ y_0,\ z_0$$

и ее скорость в этот момент тремя ее слагающими по осям координат:

$$x_0',\ y_0',\ z_0'$$

Из этих заданий, на основании формулы (3), непосредственно следует:

$$\begin{aligned} x_0 y_0' - y_0 x_0' &= c_1 \\ z_0 x_0' - x_0 z_0' &= c_2 \\ y_0 z_0' - z_0 y_0' &= c_3 \end{aligned} \tag{16}$$

и значит, «постоянные площадей» этими формулами определяются.

Затем имеем

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \tag{17}$$

Из равенств (12) и (13) легко получается

$$V_0^2 = k\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right) \tag{18}$$

причем

$$V_0^2 = x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2 \tag{19}$$

Из формулы (18) находится *большая полуось* орбиты a, затем из формулы

$$\frac{c^2}{k} = a(1 - \varepsilon^2) \tag{20}$$

находится эксцентриситет ε.

Положив в уравнении (5') плоскости орбиты $z = 0$, получим уравнение линии узлов, т. е. прямой пересечения плоскости орбиты с плоскостью эклиптики, а именно:

$$c_1 \xi + c_2 \eta = 0$$

иначе

$$\eta = -\frac{c_1}{c_2}\xi$$

с другой стороны, это же уравнение, *обозначая* через γ (фиг. 18) — долготу восходящего узла, есть

$$\eta = \xi \operatorname{tang} \gamma$$

следовательно

$$\operatorname{tang} \gamma = -\frac{c_1}{c_2} \tag{21}$$

Наклонность i орбиты к эклиптике, очевидно, измеряется углом между нормалью к плоскости орбиты и осью z, т. е. углом $\widehat{nz}$, косинус которого, на основании формулы (6), есть

$$\cos i = \cos \widehat{nz} = \frac{c_3}{c} = \frac{c_3}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \tag{22}$$

Остается найти долготу перигелия и время τ прохождения через перигелий.

Уравнение (14) дает

$$1 + \varepsilon \cos(\theta_0 - \mu) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{r_0} \tag{23}$$

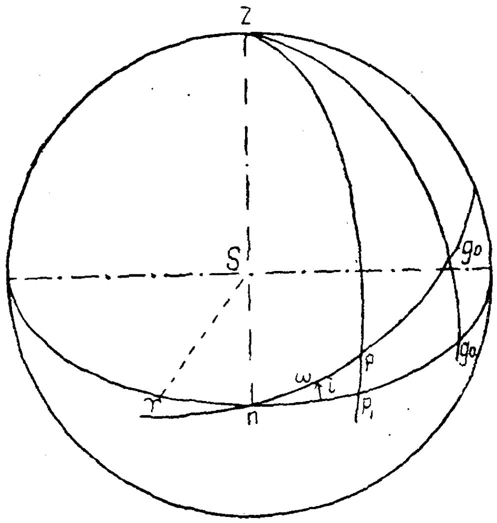
с другой стороны, обозначая через λ_0 — гелиоцентрическую долготу планеты, находящейся в момент $t = t_0$ в точке g_0, имеем:

$$\operatorname{tang} \lambda_0 = \frac{y_0}{x_0} \tag{24}$$

$$\cos i = \frac{\operatorname{tang}(\lambda_0 - \gamma)}{\operatorname{tang} \theta_0} \tag{25}$$

ибо дуга $Ng_0 = \theta_0 - \mu$ и дуга $Np = \mu$.

Из уравнения (25) найдется θ_0 и затем из уравнения (23) найдется μ.



Фиг. 18.

Чтобы найти время прохождения через перигелий τ, надо воспользоваться уравнением Кеплера

$$n(t_0 - \tau) = u_0 - \varepsilon \sin u_0 \tag{26}$$

причем

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} u_0 = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{tang} \frac{1}{2} v_0 \tag{27}$$

$$v_0 = \theta_0 - \omega \tag{28}$$

суточное же движение n дается формулою

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{k}\, a^{-\frac{3}{2}} \tag{29}$$

Величина же k, на основании формулы (15), применяя эту формулу к движению Земли и считая большую полуось ее орбиты равной 1, будет

$$\sqrt{k} = \frac{2\pi}{365.25638} \tag{29'}$$

причем величина отношения массы Земли к массе Солнца принята *ничтожно малой*. Чтобы избавиться от этого последнего допущения, необходимо рассмотреть совместное движение Солнца, массу которого обозначим через M, и планеты, масса коей есть m.

Вообразим в пространстве какую угодно систему неподвижных прямолинейных, прямоугольных осей координат $OXYZ$, и пусть в момент t

координаты Солнца суть $x_1 y_1 z_1$, координаты планеты суть $x_2 y_2 z_2$, тогда имеем уравнения:

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2x_1}{dt^2} &= fmM\frac{x_2-x_1}{r^3}; & m\frac{d^2x_2}{dt^2} &= fmM\frac{x_1-x_2}{r^3} \\ M\frac{d^2y_1}{dt^2} &= fmM\frac{y_2-y_1}{r^3}; & m\frac{d^2y_2}{dt^2} &= fmM\frac{y_1-y_2}{r^3} \\ M\frac{d^2z_1}{dt^2} &= fmM\frac{z_2-z_1}{r^3}; & m\frac{d^2z_2}{dt^2} &= fmM\frac{z_1-z_2}{r^3} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

причем

$$r = +\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Сократив в этих уравнениях общие множители M и m и вычитая каждое из уравнений, написанных в первом столбце, из соответствующего уравнения второго столбца, получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2(x_2-x_1)}{dt^2} &= -f\cdot(M+m)\cdot\frac{x_2-x_1}{r^3} \\ \frac{d^2(y_2-y_1)}{dt^2} &= -f\cdot(M+m)\cdot\frac{y_2-y_1}{r^3} \\ \frac{d^2(z_2-z_1)}{dt^2} &= -f\cdot(M+m)\cdot\frac{z_2-z_1}{r^3} \end{aligned}\right\} \tag{30'}$$

полагая теперь

$$x_2-x_1=x;\quad y_2-y_1=y;\quad z_2-z_1=z$$

видим, что уравнения (30) совершенно того же вида, как уравнения (1), с тою лишь разницею, что в правых частях, вместо массы M, стоит сумма масс $M+m$. Вместе с тем ясно, что величины x, y, z представляют координаты планеты относительно осей $SXYZ$, параллельных первоначальным и начало коих перенесено в точку S — центр Солнца, иными словами это суть координаты планеты по отношению к Солнцу, если бы его считать неподвижным.

Таким образом все формулы (1)—(29) сохраняют свой вид с заменою величины M на $M+m$, а это равносильно тому, что в формулах (15) и (15'), выражающих третий закон Кеплера, величина k будет заменена через

$$k_1 = f\cdot(M+m) = f\cdot M\left(1+\frac{m}{M}\right) = k\left(1+\frac{m}{M}\right)$$

так что будет

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k_1} = \frac{4\pi^2}{k}\cdot\frac{1}{1+\frac{m}{M}} \tag{31}$$

и эта величина не есть постоянная, а зависит от отношения $\frac{m}{M}$ массы планеты к массе Солнца. Соответственно этому должна быть изменена и формулировка третьего закона Кеплера, именно, обозначая через m_0, a_0, T_0 — массу, большую полуось и время обращения одной планеты и через m_1, a_1, T_1 — другой, получим пропорцию

$$\frac{a_0^3}{a_1^3}=\frac{T_0^2(M+m_0)}{T_1^2(M+m_1)} \tag{31'}$$

т. е. кубы больших осей орбит планет пропорциональны произведениям квадратов их времен обращения около Солнца на суммы масс соответствующей планеты и Солнца.

Массы планет весьма малы по сравнению с массою Солнца, как то видно из следующей таблицы:

Наименование планет	Отношение $\frac{m}{M}$
Меркурий	$\frac{1}{6000000}=1.6667\cdot10^{-7}$
Венера	$\frac{1}{408000}=2.4510\cdot10^{-6}$
Земля вместе с Луной	$\frac{1}{329390}=3.0359\cdot10^{-6}$
Марс	$\frac{1}{3093500}=3.2326\cdot10^{-7}$
Юпитер	$\frac{1}{1047.355}=9.5478\cdot10^{-4}$
Сатурн	$\frac{1}{3501.6}=2.8558\cdot10^{-4}$
Уран	$\frac{1}{22869}=4.3727\cdot10^{-5}$
Нептун	$\frac{1}{19700}=5.0761\cdot10^{-5}$

Обозначим большую полуось орбиты Земли через a_0, время ее обращения, т. е. звездный год, — через T_0, массу — через m_0, тогда формула (31) дает

$$k=\frac{4\pi^2}{T_0^2}\frac{a_0^3}{1+\frac{m_0}{M}}$$

Гаусс, вместо постоянной k, ввел постоянную

$$K=\sqrt{k}=\sqrt{fM}$$

так что

$$K=\frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{a_0^{3/2}}{\left(1+\frac{m_0}{M}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

и, приняв

$$T_0 = 365.2563835 \text{ средних солнечных суток}$$

$$a_0 = 1; \quad \frac{m_0}{M} = \frac{1}{354\,710}$$

получим

$$K = 0.01720209895$$

Эта величина называется Гауссовой постоянной.

Мы имели для движения любого тела, притягиваемого Солнцем, уравнения (30); заменив в них fM через K^2 и разделив на эту величину, получим уравнения вида:

$$\frac{Md^2x_1}{K^2\,dt^2} = m\frac{x_2 - x_1}{r^3}; \quad \frac{d^2x_2}{K^2\,dt^2} = \frac{x_1 - x_2}{r^3}$$

. . . .

Если положить

$$Kt = \tau \tag{32}$$

то эти уравнения примут следующий вид:

$$M\frac{d^2x_1}{d\tau^2} = m\frac{x_2 - x_1}{r^3}; \quad \frac{d^2x_2}{d\tau^2} = \frac{x_1 - x_2}{r^3} \tag{33}$$

Но соотношение (32) равносильно тому, что за единицу для переменной τ, называемой астрономическим временем, принят промежуток, равный

$$\frac{1}{K} = 58.1344 \text{ ср. солн. суток}$$

При таком условии уравнения движения пишутся в форме (33), в особенности удобной, когда Солнце можно считать неподвижным.

§ **9.** *Некоторые разложения в ряды.* В § 5 мы имели основные формулы (I), (II) и (III) движения планеты по законам Кеплера. При малых значениях эксцентриситета, величины u, v и r разлагаются в быстро сходящиеся ряды, а именно:

$$u = nt + \varepsilon \sin nt + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin 2nt + \frac{\varepsilon^3}{8}(3 \sin 3nt - \sin nt) +$$
$$+ \frac{\varepsilon^4}{6}(\sin 4nt - \sin 2nt) + \ldots$$

$$v = nt + 2\varepsilon \sin nt + \frac{5}{4}\varepsilon^2 \sin 2nt + \frac{\varepsilon^3}{12}(13 \sin 3nt - 3 \sin nt) +$$
$$+ \frac{\varepsilon^4}{96}[103 \sin 4nt - 44 \sin 2nt] + \ldots$$

$$\frac{r}{a} = 1 - \cos nt - \frac{\varepsilon^2}{2}(\cos 2nt - 1) - \frac{\varepsilon^3}{8}(3 \cos 3nt - 3 \cos nt)$$
$$- \frac{\varepsilon^4}{3}(\cos 4nt - \cos 2nt) + \ldots$$

Все эти ряды выводятся исходя из уравнения Кеплера и применяя методу последовательных приближений или же исходя из того же уравнения и применяя следующие две общие формулы, из которых первая называется рядом *Лагранжа*, вторая — рядом *Лапласа*.

Пусть неизвестная z определяется в функции переменной независимой τ уравнением

$$z = \tau + \varepsilon f(z)$$

в котором ε есть заданная вообще малая постоянная, тогда ряд Лагранжа представляет следующее разложение величины z по степеням ε:

$$z = \tau + \frac{\varepsilon}{1} f(\tau) + \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d}{d\tau}[f^2 \tau] + \frac{\varepsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^2}{d\tau^2}[f^3(\tau)] + \ldots + \\ + \frac{\varepsilon^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}}[f^n(\tau)] + \ldots$$

причем положено:

$$f^2(\tau) = [f(\tau)]^2;\ f^3(\tau) = [f(\tau)]^3;\ \ldots\ f^n(\tau) = [f(\tau)]^n$$

Во многих случаях надо разложить по степеням ε не саму величину z, а *заданную* ее функцию $\varphi(z)$; это разложение дается следующим рядом Лапласа:

$$\varphi(z) = \varphi(\tau) + \frac{\varepsilon}{1} f(\tau) \cdot \varphi'(\tau) + \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d}{d\tau}[f^2(\tau) \cdot \varphi'(\tau)] \\ + \frac{\varepsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^2}{d\tau^2}[f^3(\tau)\varphi'(\tau)] + \ldots + \frac{\varepsilon^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}}[f^n(\tau)\varphi'(\tau)] + \ldots$$

§ **10.** *Параллакс Луны, Солнца и планет и его влияние на координаты светил. Годовой параллакс звезд.* Для простоты рассуждений будем считать Землю за шар. Пусть O есть место наблюдателя, C — центр Земли, Oz — отвесная линия в месте наблюдения, CO — радиус Земли, видимое зенитное расстояние светила S есть $zoS = z$, зенитное же расстояние, которое усматривалось бы из центра Земли, есть $zCS = z_0$ (фиг. 19), очевидно будет

$$z = z_0 + p$$

т. е.

$$z_0 = z - p$$

где p есть угол OSC, под которым усматривается радиус OC из центра светила S.

Из треугольника OCS имеем

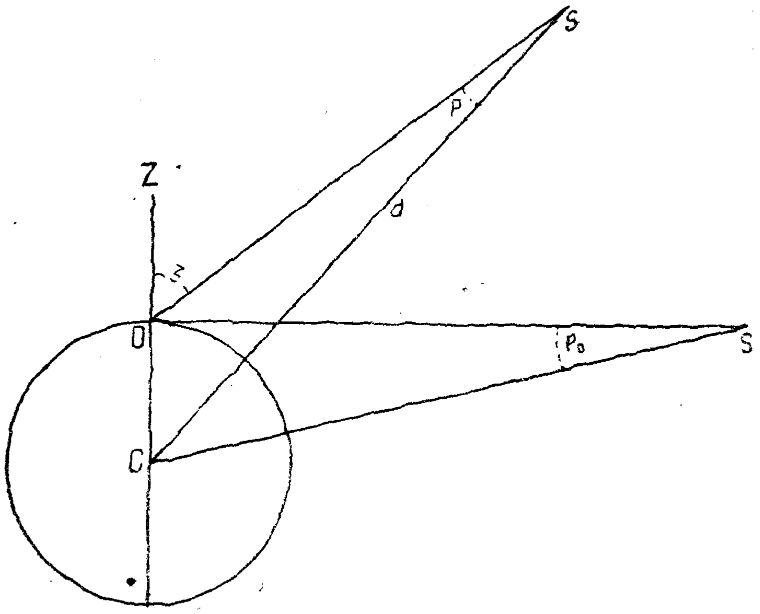
$$\frac{\sin p}{\sin z} = \frac{\rho}{d}$$

следовательно

$$\sin p = \frac{\rho}{d} \sin z \tag{1}$$

Очевидно, что при $z = 90^\circ$ будет

$$\sin p_0 = \frac{\rho}{d}$$



Фиг. 19.

причем

$$p_0 = OS_0 C$$

и формула (1) может быть написана так:

$$\sin p = \sin p_0 \sin z \tag{2}$$

Угол p_0 называется горизонтальным параллаксом светила для данного места, угол p — параллаксом при зенитном расстоянии z, когда же место наблюдений — на экваторе, то угол p_0 называется горизонтальным экваториальным параллаксом.

Все светила, кроме Луны, настолько удалены от Земли, что угол p_0 меньше $1'$, поэтому в абсолютной мере будет:

$$\sin p = p; \quad \sin p_0 = p_0$$

и формула (2) напишется

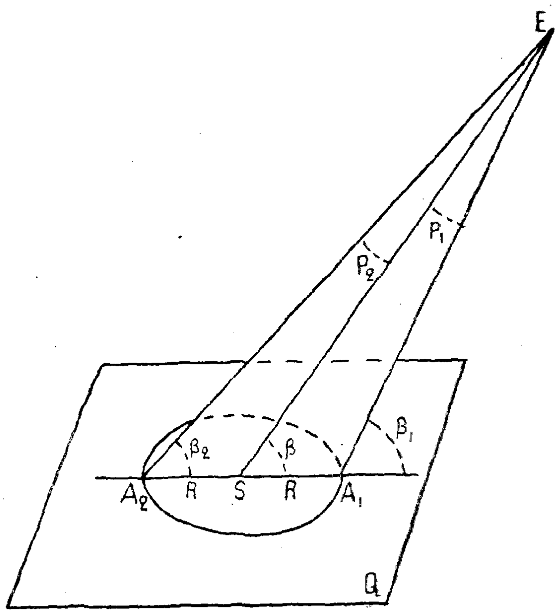
$$p = p_0 \sin z \qquad (3)$$

или, умножив обе части этого равенства на 206264.8 — число секунд, в угле коего числовая мера есть 1, получим

$$p'' = p_0'' \sin z$$

причем p_0'' и p'' суть параллаксы, выраженные в секундах дуги.

Для Луны угол p_0 составляет около 1°, поэтому погрешность приближенной формулы (4) могла бы составить до 9″, и в тех случаях, где такая погрешность недопустима, надо пользоваться формулой (2), но тогда надо считаться и с отступлениями вида Земли от шаровой формы и вводить соответствующие поправки. В самом деле, параллаксу в 1° соответствует расстояние $d = 57.3\rho$, т. е. около 400 000 км. Значит, отступлению от шаровой формы на 2 км будет соответствовать погрешность в параллаксе в 1″, а так как эти отступления составляют до 20 км, то при точных вычислениях их надо учитывать, в подробности чего входить не будем. Для упрощения этого учета составлены соответствующие таблицы.



Фиг. 20.

Расстояния до звезд настолько велики и размеры Земли столь малы по сравнению с расстоянием до звезд, что их экваториальные параллаксы ничтожно малы и вне пределов наблюдений. Но для звезд имеет место другое обстоятельство: Земля, при годовом своем движении вокруг Солнца, описывает эллипс, близкий к кругу с радиусом около 150 млн. километров. Вообразим, что через звезду E и центр Солнца S проведена плоскость, перпендикулярная плоскости эклиптики, тогда широта звезды, когда Земля находится в точке A_1, будет β_1, когда же Земля находится в A_2, то широта звезды есть β_2, широта же, которая усматривалась бы из центра Солнца, есть β (фиг. 20), и очевидно, будет:

$$\beta_1 = \beta + p_1; \quad \beta_1 = \beta - p_2$$

причем

$$\sin p_1 = \frac{R}{D} \sin \beta_0$$

$$\sin p_2 = \frac{R}{D} \sin \beta_1$$

Расстояния до звезд столь велики, что углы p_1 и p_2 меньше $1''$, поэтому, положив

$$p_0'' = \frac{R}{D} \cdot 206264''\!.8$$

можно писать

$$p_1'' = p_2'' = p_0'' \cdot \sin \beta$$

Эти величины называются годовым параллаксом звезды.

ГЛАВА II

Понятия о теориях Луны Адамса и Хилля

§ **1.** Теория Эйлера получила дальнейшее развитие в теориях Адамса и Хилля, краткий очерк которых мы здесь и приведем, ибо и в этих теориях излагаются методы интегрирования таких уравнений, которые, помимо теории Луны, встречаются во множестве технических вопросов, в виду чего, оставляя астрономическую часть почти в стороне, мы будем обращать главное внимание на чисто математическую.

Адамс излагал свою теорию на лекциях, читанных им в Кэмбриджском университете; эти лекции вошли в том II полного собрания его сочинений («The Scientific Papers of John Couch Adams»). В этих лекциях он вкратце излагает и теорию Хилля, которая первоначально была опубликована в «American Journal of Mathematics», а затем вошла в полное собрание сочинений Хилля [«Collected Mathematical Works of George William Hill» (Washington, 1905)]. Мы будем придерживаться лекций Адамса.

§ **2.** Пусть фиг. 21 представляет положения Солнца S, Земли T и Луны L, и пусть Θ есть центр тяжести Земли и Луны. Делаем следующие *обозначения:*

Масса	Солнца	S
»	Земли	T
»	Луны	L

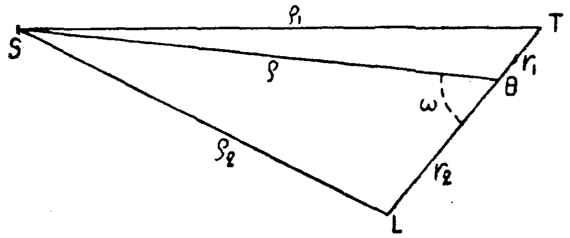
Расстояние:

$$S\Theta = \rho;\ ST = \rho_1;\ SL = \rho_2;\ TL = r$$

тогда будет:

$$T\Theta = r_1 = \frac{L}{T+L} \cdot r$$
$$L\Theta = r_2 = \frac{T}{T+L} r \qquad (1)$$

Составим теперь выражения ускорений, которые эти тела сообщают друг другу.



Фиг. 21.

Солнце S сообщает ускорения:

Земле: $f \cdot \frac{S}{\rho_1^2}$ по направлению TS

Луне: $f \cdot \frac{S}{\rho_2^2}$ » » LS

вследствие чего точка Θ имеет ускорения:

$\frac{T}{T+L} \cdot f \cdot \frac{S}{\rho_1^2}$ по направлению, параллельному TS

$\frac{L}{T+L} \cdot f \cdot \frac{S}{\rho_2^2}$ » » » LS

Ускорения Солнца, происходящие от притяжения Земли и Луны, соответственно, суть:

$f \cdot \frac{T}{\rho_1^2}$ по направлению ST

$f \cdot \frac{L}{\rho_2^2}$ » » SL

поэтому ускорения точки Θ относительно точки S будут:

$w_1 = f \cdot \frac{(S+T+L)}{T+L} \cdot \frac{T}{\rho_1^2}$ по направлению параллельно TS

$w_2 = f \cdot \frac{S+T+L}{T+L} \cdot \frac{L}{\rho_2^2}$ » » » LS

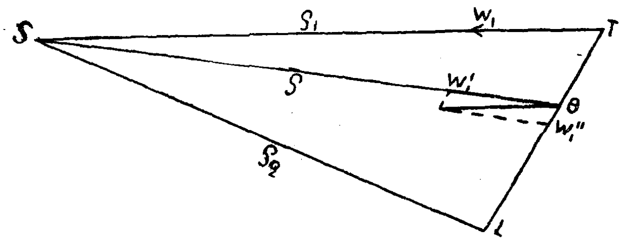
Разлагая эти ускорения, соответственно, по направлениям ΘS и ΘL, получим, как легко видеть из подобия показанных на фиг. 22 и 23 треугольников:

$$w_1' = w_1 \cdot \frac{\rho}{\rho_1} \quad \text{по направлению } \Theta S$$

$$w_1'' = w_1 \cdot \frac{r_1}{\rho_1} \quad » \quad » \quad \Theta L$$

$$w_2' = w_2 \cdot \frac{\rho}{\rho_2} \quad » \quad » \quad \Theta S$$

$$w_2'' = w_2 \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \quad » \quad » \quad L\Theta$$

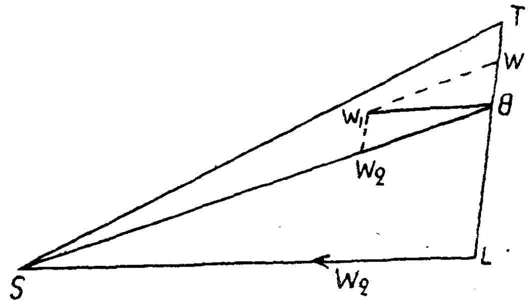


Фиг. 22.

получим для ускорений точки Θ слагающие:

$$W_1 = w_1' + w_2' = f \cdot \frac{S+T+L}{T+L} \cdot \left[T \cdot \frac{\rho}{\rho_1^3} + L \cdot \frac{\rho}{\rho_2^3}\right] \quad \text{по } \Theta S$$

$$W_2 = w_1'' - w_2'' = f \cdot \frac{S+T+L}{T+L} \cdot \left[T \cdot \frac{r_1}{\rho_1^3} - L \cdot \frac{r_2}{\rho_2^3}\right] \quad \text{по } \Theta L$$



Фиг. 23.

Заменив r_1 и r_2 их выражениями (1), имеем:

$$W_1 = f \cdot \frac{S+T+L}{T+L} \cdot \rho \cdot \left[\frac{T}{\rho_1^3} + \frac{L}{\rho_2^3}\right] \quad \text{по направлению } \Theta S$$

$$W_2 = f \cdot \frac{S+T+L}{(T+L)^2} \cdot T \cdot L \cdot r \left[\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho_2^3}\right] \quad \text{по направлению } \Theta L$$

Но

$$\rho_1^2 = \rho^2 + 2\rho \cdot \frac{L}{T+L} \cdot r\cos\omega + \left(\frac{L}{T+L} \cdot r\right)^2$$

$$\rho_2^2 = \rho^2 - 2\rho \; \frac{T}{T+L} \; r\cos\omega + \left(\frac{T}{T+L} r\right)^2$$

следовательно:

$$\frac{1}{\rho_1^3} = \frac{1}{\rho^3}\left[1 + 3\frac{L}{T+L}\cos\omega + \left(\frac{L}{T+L} r\right)^2 \left(-\frac{3}{2} + \frac{15}{2}\cos^2\omega\right) + \ldots\right]$$

$$\frac{1}{\rho_2^3} = \frac{1}{\rho^3}\left[1 + 3\frac{T}{T+L}\cos\omega + \left(\frac{T}{T+L} r\right)^2 \left(-\frac{3}{2} + \frac{15}{2}\cos^2\omega\right) + \ldots\right]$$

Подставляя эти выражения, имеем:

$$W_1 = f \cdot \frac{S+T+L}{\rho^2}\left[1 + \frac{T \cdot L}{(T+L)^2} \cdot \frac{r^2}{\rho^2}\left(-\frac{3}{2} + \frac{15}{2}\cos^2\omega\right) + \ldots\right]$$

$$W_2 = f \cdot \frac{S+T+L}{\rho^2}\left[-3 \cdot \frac{T \cdot L}{(T+L)^2} \cdot \frac{r^2}{\rho^2}\cos\omega + \ldots\right]$$

Но отношения

$$\frac{L}{T+L} \approx \frac{1}{80}; \quad \frac{r}{\rho} \approx \frac{1}{400}; \quad \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 = \frac{1}{160000}$$

поэтому будет

$$\frac{T \cdot L}{(T+L)^2} \cdot \frac{r^2}{\rho^2} \approx \frac{1}{12800000}$$

и члены, содержащие этот множитель, могут быть отброшены, так что будет:

$$W_1 = f \cdot \frac{S+T+L}{\rho^2} \quad \text{по направлению } \Theta S$$

$$W_2 = 0 \quad \text{по направлению } \Theta L$$

Отсюда следует, что точка Θ движется вокруг Солнца по эллиптической орбите по законам Кеплера.

Рассмотрим теперь ускорение Луны по отношению к Земле, для чего к ускорениям, сообщаемым Луне Солнцем и Землею, надо присовокупить ускорение, равное и противоположное ускорению Земли, происходящему от действия Солнца и Луны. Поступив подобно предыдущему, получим:

$$f \cdot \frac{T+L}{r^2} + f \cdot S\left[\frac{r_2}{\rho_2^3} + \frac{r_1}{\rho_1^3}\right] \quad \text{по направлению } L\Theta$$

$$f \cdot S \cdot \rho\left[\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\rho_1^3}\right] \quad \text{параллельно } \Theta S$$

положим:

$$T + L = \mu; \quad S = M$$

тогда предыдущие выражения будут:

$$\frac{f\mu}{r^2} + f\,\frac{Mr}{\rho^3}\left[1 + \frac{T-L}{T+L}\cdot\frac{r}{\rho}\cdot 3\cos\omega + \ldots\right] \text{ по } LT$$

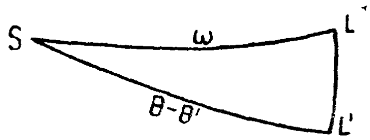
$$f\cdot\frac{Mr}{\rho^3}\left[3\cos\omega + \frac{T-L}{T+L}\cdot\frac{r}{\rho}\left(-\frac{3}{2}+\frac{15}{2}\cos^2\omega\right) + \ldots\right] \text{ параллельно } \Theta S$$

Вообразим, что из точки Θ, как из центра, произвольным радиусом описана сфера, на которую вынесены точки S и L (фиг. 24), соответствующие направлениям ΘS на Солнце и ΘL на Луну, проведен большой круг SM', соответствующей плоскости эклиптики, и на него проектирована точка L в точке L'. Обозначим через $\frac{1}{u}$ — проекцию длины TL на плоскость эклиптики, тогда сделаем следующие обозначения:

θ — геоцентрическая долгота Луны,

θ' — долгота Солнца, видимая из точки Θ,

s — $\operatorname{tang} LL'$ = тангенс широты Луны. Тогда будет:



Фиг. 24.

$$SL = \omega,\quad SL' = \theta - \theta'$$

$$r = (1+s^2)^{\frac{1}{2}}\cdot u^{-1}$$

$$\cos\omega = (1+s^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos(\theta-\theta')$$

и предыдущие выражения ускорений будут

$$f\frac{\mu u^2}{1+s^2} + f\,\frac{(1+s^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho^3 u}\left[1 + \frac{T-L}{T+L}\frac{1}{\rho u}\cdot 3\cos(\theta-\theta') + \ldots\right] \text{ по } LT$$

и параллельно ΘS:

$$f\frac{M}{\rho^3 u}\left[3\cos(\theta-\theta') + \frac{T-L}{T+L}\cdot\frac{1}{\rho u}\left(-\frac{3}{2}(1+s^2) + \frac{15}{2}\cos^2(\theta-\theta')\right) + \ldots\right]$$

Обозначим эти величины, соответственно, через U и V и разложим их на составляющие: параллельно $L'\Theta$, перпендикулярно $L'\Theta$ в плоскости эклиптики и перпендикулярно плоскости эклиптики, и обозначим эти слагающие, соответственно, через P, Q, R, тогда получим:

$$P = U(1+s^2)^{-\frac{1}{2}} - V\cos(\theta-\theta')$$
$$Q = -V\sin(\theta-\theta')$$
$$R = U\cdot s\cdot(1+s^2)^{-\frac{1}{2}}$$

так что будет

$$R - Ps = Vs \cos(\theta - \theta')$$

и, на основании предыдущих выражений, получим:

$$P = \frac{f\mu u^2}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{fM}{\rho^3 u}\left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2(\theta-\theta') + \right.$$
$$\left. + \frac{T-L}{T+L}\frac{1}{\rho u}\left(\left(\frac{9}{8} - \frac{3}{2}s^2\right)\cos(\theta-\theta') + \frac{15}{8}\cos 3(\theta-\theta')\right) + \ldots\right]$$
$$Q = -\frac{fM}{\rho^3 u}\left[\frac{3}{2}\sin 2(\theta-\theta') + \right.$$
$$\left. + \frac{T-L}{T+L}\frac{1}{\rho u}\left(\left(\frac{3}{8} - \frac{3}{2}s^2\right)\sin(\theta-\theta') + \frac{15}{8}\sin 3(\theta-\theta')\right) + \ldots\right]$$
$$R - Ps = \frac{fMs}{\rho^3 u}\left[\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos 2(\theta-\theta') + \right.$$
$$\left. + \frac{T-L}{T+L}\cdot\frac{1}{\rho u}\left(\left(\frac{33}{8} - \frac{3}{2}s^2\right)\cos(\theta-\theta') + \frac{15}{8}\cos 3(\theta-\theta')\right) + \ldots\right]$$

следовательно, принимая время t за переменную независимую, мы имеем следующие уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= -P \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) &= Q \\ \frac{d^2(rs)}{dt^2} &= -R \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

Приняв же за переменную независимую θ и положив

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = H$$

так что

$$\frac{d\theta}{dt} = Hu^2$$

будем иметь:

$$H\frac{dH}{d\theta} = \frac{Q}{u^3}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -Hu^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - u^2\frac{du}{d\theta}H\frac{dH}{d\theta}$$

$$r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = H^2u^3$$

следовательно будет

$$H^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)+H\frac{dH}{d\theta}u^2\frac{du}{d\theta}=P$$

Затем

$$\frac{d^2(rs)}{dt^2}=H^2u^2\left(u\frac{d^2s}{d\theta^2}-s\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)+H\frac{dH}{d\theta}u^2\left(u\frac{ds}{d\theta}-s\frac{du}{d\theta}\right)$$

следовательно

$$H^2u^3\left(\frac{d^2s}{d\theta^2}+s\right)+H\frac{dH}{d\theta}u^3\frac{ds}{d\theta}=Ps-R$$

так что уравнения движения могут быть написаны в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} H^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)&=P-Q\frac{du}{u\,d\theta}\\ H\frac{dH}{d\theta}&=\frac{Q}{u^3}\\ H^2u^2\left(\frac{d^2s}{d\theta^2}+s\right)&=Ps-R-Q\frac{ds}{d\theta}\end{aligned}\right\}\qquad (II)$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями Эйлера, видно, в какую сжатую форму их привел Адамс и притом отнюдь не в ущерб точности, а сохранив бо́льшую степень точности, нежели у Эйлера.

Получив эти уравнения, Адамс говорит: «...наша задача состоит в исследовании этих уравнений и в получении из них выражений, определяющих положение Луны в любой заданный момент времени. Интегрирование выполняется лучше всего рассмотрев сперва, какого рода члены будут исчезать при подстановке в уравнения, и приняв затем для координат ряд такого рода членов с неопределенными коэффициентами; таким образом мы будем исследовать одно за другим все неравенства, каждое в отдельности».

Отсюда видно существенное различие метода Адамса от метода Эйлера. Эйлер пишет общий вид разложения координат Луны по степеням некоторых известных постоянных параметров и ищет вид той функции времени t, на которую данная постоянная или ее степень, или вообще произведение целых степеней этих данных постоянных умножается, составляет дифференциальные уравнения для этих функций и ищет их решения в виде разложений по синусам и косинусам аргументов, линейно зависящих от времени.

Адамс поступает как раз наоборот: он выделяет в самых основных уравнениях некоторую группу членов, зависящих от того же самого углового аргумента, и по виду этого аргумента в простейшем случае пишет общий вид неизвестных членов в разложении координат Луны, зависящих от этого аргумента, в виде тригонометрического ряда с неопределенными коэффициентами, которые и определяет на основании этих дифференциальных уравнений, коим искомые координаты должны удовлетворять. Вот почему после методы Эйлера мы и излагаем методу Адамса.

§ **3**. В выражениях P, Q, R содержатся координаты ρ и θ' Солнца, их надо прежде всего выразить в функции времени, пользуясь тем, что видимое движение Солнца, иными словами точки Θ около Солнца, происходит по законам Кеплера, поэтому будет:

$$\frac{a'}{\rho} = \frac{1 + e' \cos(\theta' - \omega')}{1 - e'^2}$$

$$\theta' - \omega' = n' t - \omega' + 2e' \sin(n' t - \omega') + \frac{5}{4} e'^2 \sin(2n' t - \omega') + \ldots$$

как указано в § 9 главы I.

Нужные нам величины суть:

$$\left(\frac{a'}{\rho}\right)^3; \quad \left(\frac{a'}{\rho}\right)^3 \frac{\cos}{\sin} 2(\theta - \theta'); \quad \left(\frac{a'}{\rho}\right)^4 \frac{\cos}{\sin} (\theta - \theta'); \quad \left(\frac{a'}{\rho}\right)^7 \frac{\cos}{\sin} 3(\theta - \theta')$$

выполнив подстановку и разложения, получим:

$$\left(\frac{a'}{\rho}\right)^3 = 1 + \frac{3}{2} e'^2 + 3e' \cos(n' t - \omega') + \frac{9}{2} e'^2 \cos 2(n' t - \omega') + \ldots$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a'}{\rho}\right)^3 \frac{\cos}{\sin} 2(\theta - \theta') = \left(1 - \frac{5}{2} e'^2\right) \frac{\cos}{\sin} 2(\theta - n' t) & \\
+ \frac{7}{2} e' \frac{\cos}{\sin} \{2(\theta - n' t) - (n' t - \omega')\} & \\
- \frac{1}{2} e' \frac{\cos}{\sin} \{2(\theta - n' t) + (n' t - \omega')\} + & \\
+ \frac{17}{2} e'^2 \frac{\cos}{\sin} \{2(\theta - n' t) - 2(n' t - \omega')\} + \ldots &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a'}{\rho}\right)^4 \frac{\cos}{\sin} (\theta - \theta') = (1 + 2e'^2) \frac{\cos}{\sin} (\theta - n' t) + 3e' \frac{\cos}{\sin} \{(\theta - n' t) - (n' t - \omega')\} & \\
+ e' \frac{\cos}{\sin} \{(\theta - n' t) + (n' t - \omega')\} + \frac{53}{8} e'^2 \frac{\cos}{\sin} \{(\theta - n' t) - 2(n' t - \omega')\} & \\
+ \frac{11}{8} e'^2 \frac{\cos}{\sin} \{(\theta - n' t) + 2(n' t - \omega')\} + \ldots &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a'}{\rho}\right)^4 \frac{\cos}{\sin} 3(\theta - \theta') = & \\
= (1 - 6e'^2) \frac{\cos}{\sin} 3(\theta - n' t) + 5e' \frac{\cos}{\sin} \{3(\theta - n' t) - (n' t - \omega')\} & \\
- e' \frac{\cos}{\sin} \{3(\theta - n' t) + (n' t - \omega')\} + \frac{127}{8} e'^2 \frac{\cos}{\sin} \{3(\theta - n' t) - 2(n' t - \omega')\} & \\
+ \frac{1}{8} e'^2 \frac{\cos}{\sin} \{3(\theta - n' t) + 2(n' t - \omega')\} + \ldots &
\end{aligned}$$

Эти разложения и надо подставить, вместо соответствующих количеств, в выражения P, Q, R, при этом необходимо заметить, что все возмущающие силы содержат множитель fMa'^{-3}, поэтому нет надобности знать величину a', или, что то же, параллакс Солнца, ибо, на основании третьего закона Кеплера, fMa'^{-3} выражается через среднее суточное движение Солнца, хорошо известное из наблюдений.

Заметим, однако, что есть члены, содержащие множитель $\frac{M}{a'^4 u}$, в которые входит непосредственно параллакс Солнца; сличение величины теоретических значений коэффициентов при неравенствах, этим членам соответствующих, с их значениями, полученными из обработки наблюдений, доставляет один из наиболее надежных способов определения параллакса Солнца.

Заметим также, что члена с аргументом

$$2(\theta - n't) + 2(n't - \omega')$$

не зависимым от средней долготы $n't$ Солнца, в разложении величины

$$\left(\frac{a'}{\rho}\right)^3 \frac{\cos}{\sin} 2(\theta - \theta')$$

не содержится.

§ 4. Возьмем сперва уравнения (I), именно первые два из них:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -P.$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = Q$$

Мы не будем пока рассматривать движение по широте и положим $s = 0$ в выражениях P и Q, кроме того удобно и возможно рассмотреть отдельно члены, содержащие параллакс Солнца: отбрасывая и их, получим:

$$\frac{1}{r}\frac{d^2r}{dt^2} - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{f\mu}{r^2} = \frac{1}{2}\frac{fM}{\rho'^3} + \frac{3}{2}\frac{fM}{\rho^3}\cos 2(\theta - \theta')$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{fM}{\rho^3}\sin 2(\theta - \theta')$$

если сперва принять

$$e' = 0; \quad \rho = a'; \quad \frac{f\mu}{a'^3} = n'^2; \quad \theta' = n't + \alpha'$$

то будет:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r}\frac{d^2r}{dt^2} - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{f\mu}{r^3} = \frac{1}{2}n'^2 + \frac{3}{2}n'^2\cos 2(\theta - n't - \alpha') \\ &\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{2}n'^2\sin 2(\theta - n't - \alpha') \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Эти два уравнения и послужат нам для получения исходного приближения, для которого примем

$$\theta = nt + \alpha + b_2 \sin \{2(nt + \varphi) - 2(n't + \alpha')\} = nt + \alpha + b_2 \sin 2\psi \quad (*)$$

обозначив для краткости

$$2(nt + \alpha) - 2(n't + \alpha') = 2\psi$$

положим также

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}[1 + a_2 \cos 2\psi] \qquad (**)$$

причем n есть среднее суточное движение Луны и a — среднее расстояние ее от Земли. Коэффициенты a_2 и b_2 мы предположим столь малыми, что их квадраты будем пока отбрасывать. Подстановка выражений (*) и (**) в уравнения (A) приводит к равенствам:

$$4(n - n')^2 a_2 \cos 2\psi - \{n^2 + 4n(n - n') b_2 \cos 2\psi\} + \frac{f\mu}{a^3}\{1 + 3a_2 \cos 2\psi\} =$$

$$= \frac{1}{2} n'^2 + \frac{3}{2} n'^2 \cos 2\psi$$

$$-4(n - n')^2 b_2 \sin 2\psi + 4(n - n') n a_2 \sin 2\psi = -\frac{3}{2} n'^2 \sin 2\psi$$

Уравнивая коэффициенты подобных членов, получаем равенство

$$\frac{f\mu}{a^3} = n^2 + \frac{1}{2} n'^2 \qquad (1)$$

которое в данном случае заменяет третий закон Кеплера, устанавливая зависимость между средним расстоянием и средним суточным движением.

Кроме того, имеем

$$\left[4(n - n') + \frac{3f\mu}{a^3}\right] a_2 - 4n(n - n') b_2 = \frac{3}{2} n'^2$$

$$-4(n - n')^2 b_2 + 4n(n - n') a_2 = -\frac{3}{2} n'^2$$

из последнего уравнения следует

$$4n(n - n') b_2 - 4n^2 a_2 = \frac{3}{2} \frac{nn'^2}{n - n'}$$

придавая эту величину к первому уравнению и заменив $\frac{f\mu}{a^3}$ его значением (1), получим:

$$\left[4\,(n-n')^2-n^2+\frac{3}{2}n'^2\right]a_2=\frac{3}{2}n'^2\frac{2n-n'}{n-n'}$$

$$a_2=\frac{3}{2}n'^2\cdot\frac{2n-n'}{n-n'}\cdot\frac{1}{3n^2-8nn'+\frac{11}{2}n'^2}$$

$$b_2=\frac{n}{n-n'}a_2+\frac{3}{8}\frac{n'^2}{(n-n')^2}=$$

$$=\frac{3}{2}n'^2\cdot\frac{n\,(2n-n')}{(n-n')^2}\cdot\frac{1}{3n^2-8nn'+\frac{11}{2}n'^2}+\frac{3}{8}\frac{n'^2}{(n-n')^2}$$

Положим

$$\frac{n'}{n}=m \tag{2}$$

тогда будет:

$$a_2=\frac{3}{2}m^2\cdot\frac{2-m}{1-m}\cdot\frac{1}{3-8m+\frac{11}{2}m^2}$$

$$b_2=\frac{3}{2}m^2\cdot\frac{2-m}{(1-m)^2}\cdot\frac{1}{3-8m+\frac{11}{2}m^2}+\frac{3}{8}\frac{m^2}{(1-m)^2}$$

полагая теперь

$$\frac{n'}{n-n'}=\frac{m}{1-m}=m_1 \tag{3}$$

получим окончательно:

$$\left.\begin{aligned}a_2&=\frac{3}{2}m_1^2\cdot\frac{2+m_1}{3-2m_1+\frac{1}{2}m_1^2}\\ b_2&=\frac{3}{2}m_1^2\cdot\frac{(1+m_1)(2+m_1)}{3-2m_1+\frac{1}{2}m_1^2}+\frac{3}{8}m_1^2\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Уже было указано, что звездный год равен 365.25638 средних суток и звездный месяц равен $27^д\,7^ч\,43^м\,11^с\!.5=27.32166$ средних суток:

$$n'=\frac{2\pi}{365.25638}=0.01720213;\quad n=\frac{2\pi}{27.32166}=0.2299708$$

так что

$$\frac{n'}{n}=\frac{27.32166}{365.25638}=0.0748013$$

Отсюда получаем:

$$a_2 = 0.0071795$$
$$b_2 = 0.010212 = 2106''.4$$

таким образом отношение наибольшего расстояния к наименьшему равно

$$(1 + a_2) : (1 - a_2) = 1.0071795 : 0.9928205$$

и наибольшее отклонение долготы θ от средней долготы nt, равное b_2, составляет

$$2106''.4 = 35'6''.4$$

что весьма близко к действительности.

Мы имеем равенство (1)

$$\frac{f\mu}{a^3} = n^2 + \frac{1}{2}n'^2 = n^2\left(1 + \frac{1}{2}m^2\right) = n^2 \cdot 1.00280 = 0.0530346$$

если бы возмущающей силы Солнца не было, то мы имели бы

$$\frac{f\mu}{a^3} = n^2 = \frac{4\pi^2}{(27.32166)^2} = 0.0528866$$

т. е. действительное среднее движение медленнее того, которое было бы при отсутствии возмущающей силы.

Полученное неравенство в долготе

$$\theta - nt = b_2 \sin[2(n - n')t + 2(\alpha - \alpha')]$$

было открыто из наблюдений Тахо Браге в конце XVI в. и называется *вариацией.*

§ **5**. Чтобы получить следующее приближение, надо найденные величины $\frac{1}{r}$ и θ подставить в дифференциальные уравнения и удержать члены второго порядка относительно a_2 и b_2 и m^2 или m_1^2.

Значения, которые надо подставлять, суть:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}(1 + a_2 \cos 2\psi)$$
$$\theta = nt + \alpha + b_2 \sin 2\psi$$
$$\psi = nt + \alpha - (n't + \alpha')$$
$$a_2 = \frac{3}{2}m_1^2 \frac{2 + m_1}{3 - 2m_1 + \frac{1}{2}m_1^2}$$
$$b_2 = (1 + m_1)a_1 + \frac{3}{8}m_1^2$$

Отсюда следует:

$$r = a\left[1 - a_2 \cos 2\psi + \frac{1}{2} a_2^2 (1 + \cos 4\psi)\right]$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = 4a(n - n')^2 [a_2 \cos 2\psi - 2a_2^2 \cos 4\psi]$$

$$\frac{1}{r}\frac{d^2r}{dt^2} = 4(n - n')^2 \left[\frac{1}{2} a_2^2 + a_2 \cos 2\psi - \frac{3}{2} a_2^2 \cos 4\psi\right]$$

$$\frac{d\theta}{dt} = n + 2(n - n')\, b_2 \cos 2\psi$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = n^2 + 4n(n - n')\, b_2 \cos 2\psi + 2(n - n')^2 b_2^2 (1 + \cos 4\psi)$$

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{a^3}\left[1 + 3a_2 \cos 2\psi + \frac{3}{2} a_2^2 (1 + \cos 4\psi)\right]$$

следовательно:

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dt} = 2(n - n')\left[a_2 \sin 2\psi - \frac{1}{2} a_2^2 \sin 4\psi\right]$$

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 2(n - n')\left[n a_2 \sin 2\psi + \left\{(n - n')\, a_2 b_2 - \frac{1}{2} n a_2^2\right\} \sin 4\psi\right]$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -4(n - n')\, b_2 \sin 2\psi$$

кроме того:

$$\cos 2(\theta - n't - \alpha') = \cos 2\psi - b_2 (1 - \cos 4\psi)$$

$$\sin 2(\theta - n't - \alpha') = \sin 2\psi + b_2 \sin 4\psi$$

Подстановка этих выражений в дифференциальные уравнения (A) § 4, если все члены перенести в левую часть, дает: для первого уравнения:

$$\begin{aligned}
&4(n - n')^2 \left[\frac{1}{2} a_2^2 + a_2 \cos 2\psi - \frac{3}{2} a^2 \cos 4\psi\right] \\
&- [n^2 + 2(n - n')^2 b_2^2 + 4n(n - n')\, b_2 \cos 2\psi + 2(n - n')^2 b_2^2 \cos 4\psi] \\
&+ \frac{f\mu}{a^3}\left[1 + \frac{3}{2} a_2^3 + 3a_2 \cos 2\psi + \frac{3}{2} a_2^2 \cos 4\psi\right] \\
&- \frac{1}{2} n'^2 - \frac{3}{2} n'^2 [-b_2 + \cos 2\psi + b_2 \cos 4\psi] = 0
\end{aligned}$$

и для второго уравнения:

$$\begin{aligned}
&- 4(n - n')^2 b_2 \sin 2\psi \\
&+ 4(n - n')\left[n a_2 \sin 2\psi + \left\{(n - n')\, a_2 b_2 - \frac{1}{2} n a_2^2\right\} \sin 4\psi\right] \\
&+ \frac{3}{2} n'^2 [\sin 2\psi + b_2 \sin 4\psi] = 0
\end{aligned}$$

Коэффициенты при $\cos 2\psi$ в первом выражении и при $\sin 2\psi$ — во втором, соответственно, суть

$$4(n-n')a_2 - 4n(n-n')b_2 + \frac{3f\mu}{a^3}a_2 - \frac{3}{2}n'^2$$

и

$$-4(n-n')^2 b_2 + 4n(n-n')a_2 + \frac{3}{2}n'^2$$

Эти коэффициенты обращаются в нуль на основании значений a_2 и b_2, если для $\frac{f\mu}{a^3}$ принять его приближенное значение $n^2 + \frac{1}{2}n'^2$. Для получения более точного значения величины $\frac{f\mu}{a^3}$ надо уравнять нулю постоянный член первого выражения, так что будет

$$2(n-n')^2 a_2^2 - n^2 - 2(n-n')b_2^2 +$$
$$+ \frac{f\mu}{a^3}\left(1 + \frac{3}{2}a_2^2\right) - \frac{1}{2}n'^2 + \frac{3}{2}n'^2 b_2 = 0$$

что дает

$$\frac{f\mu}{a^3}\left(1 + \frac{3}{2}a_2^2\right) = n^2 + \frac{1}{2}n'^2 - 2(n-n')^2 a_2^2 + 2(n-n')^2 b_2^2 - \frac{3}{2}n'^2 b_2$$
$$= n^2 + \frac{1}{2}n'^2 + 2(n-n')^2\left[(2m_1 + m_1^2)a_2^2 - \frac{9}{64}m_1^4\right] \tag{*}$$

Отсюда видно, что величина $\frac{f\mu}{a^3}$ отличается от $n^2 + \frac{1}{2}n'^2$ лишь на члены четвертого порядка, если рассматривать m_1 как величину первого порядка и, следовательно, a_2 и b_2 — как величины второго порядка малости, поэтому, принимая

$$\frac{f\mu}{a^3} = n^2 + \frac{1}{2}n'^2$$

в множителе при a_2 при уравнивании нулю коэффициента при $\cos 2\psi$, мы отбрасываем лишь величину шестого порядка относительно m_1, значит и погрешность — в значениях a_2 и b_2 этого же порядка.

Как видно при выполненной подстановке, в наших уравнениях остаются члены четвертого порядка с множителями $\cos 4\psi$ и $\sin 4\psi$. Чтобы от них избавиться, надо к выражениям $\frac{1}{r}$ и θ присовокупить, соответственно, члены указанного вида, т. е. положить:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}[1 + a_2\cos 2\psi + a_4\cos 4\psi]$$
$$\theta = nt + \alpha + b_2\sin 2\psi + b_4\sin 4\psi$$

причем, как окажется, величины a_4 и b_4 малые, четвертого порядка.

Не производя подстановок наново, нетрудно видеть, что добавятся следующие члены:

$$
\begin{array}{lll}
\text{к} & \dfrac{1}{r}\dfrac{d^2r}{dt^2} \ldots\ldots & 16\,(n-n')^2\,a_4\cos 4\psi \\
\text{»} & -\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \ldots\ldots & -8n\,(n-n')\,b_4\cos 4\psi \\
\text{»} & \dfrac{f\mu}{r^3} \ldots\ldots & \dfrac{f\mu}{a^3}\cdot 3a_4\cos 4\psi \\
\text{»} & \dfrac{d^2\theta}{dt^2} \ldots\ldots & -16\,(n-n')\,b_4\sin 4\psi \\
\text{»} & \dfrac{2}{r}\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} \ldots\ldots & 8n\,(n-n')\,a_4\sin 4\psi
\end{array}
$$

члены же, которые добавляются к выражениям

$$\frac{3}{2}n'^2\cos 2\,(\theta-n't-\alpha') \quad \text{и} \quad \frac{3}{2}n'^2\sin 2\,(\theta-n't-\alpha')$$

могут быть отброшены.

Добавив эти члены и уравнивая нулю полученные выражения, имеем уравнения:

$$16\,(n-n')^2\,a_4-8n\,(n-n')\,b_4+\frac{f\mu}{a^3}\cdot 3a_4-6\,(n-n')^2\,a_2^{\,2}-2\,(n-n')^2\,b_2^{\,2}$$
$$+\frac{f\mu}{a^3}\,a_2^{\,2}-\frac{3}{2}n'^2\,b_2=0$$
$$-16\,(n-n')^2\,b_4+8n\,(n-n')\,a_4+$$
$$+4\,(n-n')^2\,a_2\,b_2-2n\,(n-n')\,a_2^{\,2}+\frac{3}{2}n'^2\,b_2=0$$

из которых надо определить a_4 и b_4, причем

$$\frac{f\mu}{a^3}=n^2+\frac{1}{2}n'^2$$
$$b_2=(1+m_1)\,a_2+\frac{3}{8}m_1^{\,2}$$

Адамс решает эти уравнения в общем виде и затем подставляет вместо a_2 и m их численные значения и получает:

$$a_4=0.00004580$$
$$b_4=0.00004237=8''\!.740$$

Очевидно, что мы получим эти же значения сделав указанную подстановку в самые уравнения прежде их решения, как это делает Эйлер, но само собою разумеется, что прием Адамса дает более общие результаты.

§ **6**. Применим теперь к определению неравенства, именуемого вариацией, уравнения движения в виде (II), т. е.

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{P}{H^2u^2}-\frac{Q}{H^2u^3}\frac{du}{d\theta} \tag{1}$$

$$H\frac{dH}{d\theta}=\frac{Q}{u^3} \tag{2}$$

причем

$$\frac{P}{u^2}=f\mu-\frac{1}{2}\frac{n'^2}{u^3}-\frac{3}{2}\frac{n'^2}{u^3}\cos 2(\theta-\theta') \tag{3}$$

$$\frac{Q}{u^3}=-\frac{3}{2}\frac{n'^2}{u^4}\sin 2(\theta-\theta') \tag{4}$$

где

$$\theta'=n't+\alpha' \tag{5}$$

Очевидно, что уравнение (2) может быть написано в таком виде:

$$\frac{1}{H^2}\frac{d(H^2)}{d\theta}=-3n'^2\left(\frac{dt}{d\theta}\right)^2\sin 2(\theta-\theta') \tag{2'}$$

Уравнения эти имеют гораздо более привычный для техника и инженера вид уравнений колебательного движения, нежели рассмотренные выше уравнения вида (I). Наша задача состоит теперь в том, чтобы выразить t и u в функции переменной θ и постоянных количеств.

Так как орбита Луны немногим отличается от круга, то мы можем принять, что разность между $nt+\alpha$ и θ и разность между au и единицею будут представляться в виде рядов, состоящих из малых периодических членов, зависящих от θ. Самый вид уравнений показывает, что эти периодические члены будут иметь аргументом $2(\theta-\theta')$ и кратные этой величины, так что будет $nt+\alpha=\theta+$ период. члены с аргументом $2(\theta-\theta')\ldots$ Но, как указано,

$$n't+\alpha'=\theta'$$

следовательно

$$\gamma\theta-\theta'=(1-m)\theta-\beta+\text{период. члены с аргументом } 2(1-m)\theta-2\beta$$

и кратными этого аргумента; причем положено

$$\beta=\alpha'-m\alpha$$

постоянная β связана с аргументом $(1-m)\theta$ и повсюду к нему прибавляется, поэтому, для простоты, этой постоянной можно не писать.

Таким образом мы можем принять за исходное приближение:

$$au = 1 + a_2 \cos(2 - 2m)\theta$$
$$nt + \alpha = \theta + b_2 \sin(2 - 2m)\theta$$

Отсюда следует:

$$2(\theta - \theta') = (2 - 2m)\theta - 2mb_2 \sin(2 - 2m)\theta$$
$$\cos 2(\theta - \theta') = mb_2 + \cos(2 - 2m)\theta - mb_2 \cos(4 - 4m)\theta$$
$$\sin 2(\theta - \theta') = \sin(2 - 2m)\theta - mb_2 \sin(4 - 4m)\theta$$
$$n\frac{dt}{d\theta} = 1 + (2 - 2m)b_2 \cos(2 - 2m)\theta$$

Подстановка в правую часть уравнения $(2')$ дает

$$\frac{1}{H^2}\frac{d(H^2)}{d\theta} = -3m^2[\sin(2 - 2m)\theta + (2 - 3m)b_2 \sin(4 - 4m)\theta]$$

и, по интегрировании, обозначая через h^2 — произвольную постоянную, имеем

$$\log\left(\frac{H^2}{h^2}\right) = \frac{3}{2}\frac{m^2}{1-m}\cos(2 - 2m)\theta + \frac{3}{4}\frac{2-3m}{1-m}m^2 b_2 \cos(4 - 4m)\theta$$

что можно написать в таком виде:

$$\log\left(\frac{H^2}{h^2}\right) = 2h_2 \cos(2 - 2m)\theta + 2h_4 \cos(4 - 4m)\theta$$

где h есть произвольная постоянная, h_2 — известная величина, h_4 содержит b_2.

Если во втором приближении положить

$$au = 1 + a_2 \cos(2 - 2m)\theta + a_4 \cos(4 - 4m)\theta$$
$$nt + \alpha = \theta + b_2 \sin(2 - 2m)\theta + b_4 \sin(4 - 4m)\theta$$

то предыдущее значение $\log\left(\frac{H^2}{h^2}\right)$ не требует видоизменения и доставит условные уравнения, служащие для определения коэффициентов a_2, b_2, a_4, b_4.

Мы имеем

$$n\frac{dt}{d\theta} = \frac{n}{Hu^2} = \frac{na^2}{h} \cdot \frac{h}{H} \cdot \frac{1}{(au)^2}$$

так что

$$\log\left(n\frac{dt}{d\theta}\right) = \log\left(\frac{na^2}{h}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{H^2}{h^2}\right) - 2\log au$$

но

$$\log\left(n\frac{dt}{d\theta}\right) = -(1-m)^2 b_2^2 + (2-2m) b_2 \cos(2-2m)\theta$$
$$+ [(4-4m) b_4 - (1-m)^2 b_2^2] \cos(4-4m)\theta$$
$$\log(au) = -\frac{a_2^2}{4} + a_2 \cos(2-2m)\theta + \left(a_4 - \frac{a_2^2}{4}\right)\cos(4-4m)\theta$$

Таким образом мы получаем равенства:

$$-(1-m)^2 b_2^2 = \log\left(\frac{na^2}{h}\right) + \frac{1}{2} a_2^2$$
$$(2-2m) b_2 = -h_2 - 2a_2 \ ,$$
$$(4-4m) b_4 - (1-m)^2 b_2^2 = -h_4 - 2a_4 + \frac{1}{2} a_2^2$$

Остальные нужные нам условные уравнения получаются из первого уравнения движения, которое может быть написано в таком виде:

$$\frac{d^2(au)}{d\theta^2} + au\left[1 + \frac{1}{2}\left(n'\frac{dt}{d\theta}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(n'\frac{dt}{d\theta}\right)^2 \cos 2(\theta - \theta')\right]$$
$$-\frac{d(au)}{d\theta}\cdot\frac{3}{2}\left(n'\frac{dt}{d\theta}\right)^2 \sin 2(\theta-\theta') = \frac{f\mu a}{H^2} \qquad (*)$$

Но мы положили

$$au = 1 + a_2 \cos(2-2m)\theta + a_4 \cos(4-4m)\theta$$

следовательно будет:

$$\frac{d(au)}{d\theta} = -(2-2m) a_2 \sin(2-2m)\theta - (4-4m) a_4 \sin(4-4m)\theta$$
$$\frac{d^2(au)}{d\theta^2} = -(2-2m)^2 a_2 \cos(2-2m)\theta - (4-4m)^2 a_4 \cos(4-4m)\theta$$

а также:

$$\left(n'\frac{dt}{d\theta}\right)^2 = m^2[1 + (4-4m) b_2 \cos(2-2m)\theta]$$
$$\left(n'\frac{dt}{d\theta}\right)^2 \sin 2(\theta-\theta') = m^2[\sin(2-2m)\theta + (2-3m) b_2 \sin(4-4m)\theta]$$
$$\left(n'\frac{dt}{d\theta}\right)^2 \cos 2(\theta-\theta') = m^2[(2-2m) b_2 + \cos(2-2m)\theta$$
$$+ (2-3m) b_2 \cos(4-4m)\theta]$$
$$\frac{1}{H^2} = \frac{1}{h^2}[1 + h_2^2 - 2h_2 \cos(2-2m)\theta +$$
$$+ (h_2^2 - 2h_4)\cos(4-4m)\theta]$$

Подставив эти значения в уравнение (*) и уравняв коэффициенты подобных членов, получаем

$$1+\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m^2(2-m)b_2+\frac{3}{4}m^2a_2+\frac{3}{4}m^2(2-2m)a_2=\frac{f\mu a}{h^2}(1+h_2^2)$$

$$-(2-2m)^2a_2+\left(1+\frac{1}{2}m^2\right)a_2+\frac{3}{2}m^2+(2-2m)m^2b_2=\frac{f\mu a}{h^2}(-2h_2)$$

$$-(4-4m)^2a_4+\left(1+\frac{1}{2}m^2\right)a_4+\frac{3}{2}m^2(2-3m)b_2$$

$$+\frac{3}{4}m^2a_2-\frac{3}{4}m^2(2-2m)a_2=\frac{f\mu a}{h^2}(h_2^2-2h_4)$$

Отбросив сперва члены четвертого порядка, мы из первого из этих уравнений имеем

$$\frac{f\mu a}{h^2}=1+\frac{1}{2}m^2$$

Из предыдущей же системы уравнений мы имеем

$$(2-2m)b_2=-h_2-2a_2$$

Подставив эти значения во второе уравнение, имеем

$$\left[-(2-2m)^2+1+\frac{1}{2}m^2-2m^2\right]a_2-m^2h_2+\frac{3}{2}m^2=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}m^2\right)(-2h_2)$$

или, по приведении,

$$\left(3-8m+\frac{11}{2}m^2\right)a_2=\frac{3}{2}m^2+2h_2=\frac{3}{2}\cdot m^2+\frac{3}{2}\cdot\frac{m^2}{1-m}=\frac{3}{2}m^2\cdot\frac{2-m}{1-m}$$

так что

$$a_2=\frac{3}{2}m^2\cdot\frac{2-m}{1-m}\cdot\frac{1}{3-8m+\frac{11}{2}m^2}$$

$$b_2=-\frac{1}{1-m}a_2-\frac{1}{2-2m}h_2$$

$$=-\frac{1}{1-m}a_2-\frac{3}{8}\frac{m^2}{(1-m)^2}$$

Численные значения этих величин те же, как и обозначенные этими буквами в § 4, но b_2 имеет обратный знак. Затем мы находим:

$$\left(15-32m+\frac{31}{2}m^2\right)a_4=$$

$$=\frac{3}{4}\frac{m^2}{1-m}\left[(1+3m-2m^2)a_2+(8-15m+6m^2)b_2\right]$$

$$b_4=-\frac{1}{2-2m}a_4-\frac{3}{8}a_2b_2-\frac{3}{64}\frac{m^2}{(1-m)^2}\left[a_2+(6-8m)b_2\right]$$

или в числах:

$$a_4 = 0.00002210$$
$$b_4 = -0.00005414 = 11''.17$$

Наконец установим соотношение между постоянными, введенными здесь, и постоянными, которыми мы пользовались в §§ 4 и 5; для отличия припишем последним значки, так что будет:

$$\theta = nt + \alpha + b_2' \sin 2\psi + b_4' \sin 4\psi$$
$$\frac{a'}{r} = 1 + a_2' \cos 2\psi + a_4' \cos 4\psi$$

опуская, как и раньше, постоянную β, имеем

$$(1-m)\theta = \psi + (1-m) b' \sin 2\psi + (1-m) b_4' \sin 4\psi$$

тогда будет:

$$2\psi = (2-2m)\theta - (2-2m) b_2' \sin(2-2m)\theta$$
$$\sin 2\psi = \sin(2-2m)\theta - (1-m) b_2' \sin(4-4m)\theta$$
$$\cos 2\psi = (1-m) b_2' + \cos(2-2m)\theta - (1-m) b_2' \cos(4-4m)\theta$$

подставив в уравнение для θ, мы получаем

$$nt + \alpha = \theta - b_2' \sin(2-2m)\theta - [b_4' - (1-m) b_2'^2] \sin(4-4m)\theta$$

подобно этому найдем

$$a' u = 1 + (1-m) a_2' b_2' + a_2' \cos(2-2m)\theta$$
$$+ [a_4' - (1-m) a_2' b_2'] \cos(4-4m)\theta$$

Отсюда видно, что a' отличается от a на величины четвертого порядка.

§ **7.** Покажем теперь, каким образом уточнять приближенные решения, вводя в них поправки.

Мы можем упростить уравнения, с которыми мы имели дело, выбрав соответственным образом единицы. Примем за единицу расстояний радиус такой круговой орбиты, которая описывалась бы Луною, не подверженной возмущениям, вокруг Земли в тот же период, как в действительности, т. е. в звездный месяц, тогда будет

$$f\mu = n^2$$

Единицу времени выберем так, чтобы было

$$n - n' = 1$$

На основании наблюдений установлено, как уже сказано в § 4, что

$$n' : n = 0.0748013$$

откуда следует при таком выборе единиц:

$$n' = \frac{0.0748013}{0.9251987} = 0.080849 = m_1$$

причем m_1 есть та величина, которая этою буквою обозначена в § 4, тогда будет

$$f\mu = 1.168234$$

В последующем мы часто будем пользоваться этими упрощениями.

Положим теперь

$$l = \log \frac{r}{a}$$

так что будет:

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dt} = \frac{dl}{dt}; \quad \frac{1}{r}\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2l}{dt^2} + \left(\frac{dl}{dt}\right)^2; \quad \frac{f\mu}{r^3} = \frac{f\mu}{a^3}e^{-3l}$$

тогда уравнения, рассмотренные в § 4, будут:

$$\frac{d^2l}{dt^2} + \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{f\mu}{a^3}e^{-3l} - n'^2\left[1 + \frac{3}{2}\cos 2\omega\right] = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dl}{dt}\frac{d\theta}{dt} + n'^2\left[\frac{3}{2}\sin 2\omega\right] = 0$$

причем

$$\omega = \theta - \theta'$$

Но эти уравнения неполные, ибо они составлены отбросив некоторые члены в уравнениях (I) § 2, поэтому, если обозначить через l_0 и θ_0—значения l и θ, полученные в § 4, как решения этих неполных уравнений, то, по подстановке значений l_0 и θ_0 в полные уравнения, мы не получим тожеств, а получим некоторые невязки, которые обозначим через X и Y. Если l и θ суть решения полных уравнений, то мы можем положить:

$$l = l_0 + \xi$$
$$\theta = \theta_0 + \eta$$

причем ξ и η суть малые величины, квадратами и произведением которых можно вначале пренебречь; тогда, для определения поправок ξ и η к найденным приближенным значениям l_0 и θ_0, мы получим уравнения:

$$
\begin{aligned}
X + \frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\frac{dl_0}{dt}\cdot\frac{d\xi}{dt} - 2\frac{d\theta_0}{dt}\cdot\frac{d\eta}{dt} - 3\frac{f\mu}{a^3}e^{-3l_0}\cdot\xi + 3n'^2\sin 2\omega\cdot\eta = 0 \\
Y + \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\frac{dl_0}{dt}\cdot\frac{d\eta}{dt} + 2\frac{d\theta_0}{dt}\frac{d\eta}{dt} + 3n'^2\cos 2\omega\cdot\eta = 0
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Сделаем:

$$\frac{d\theta_0}{dt} = 1 + n' + v; \quad \frac{f\mu}{r_0^3} = \frac{f\mu}{a^3}e^{-3l_0} = c + w$$

причем

$$c = (1 + n')^2 + \frac{1}{2}n'^2$$

Величина v содержит только периодические члены вида $p_i\cos 2i\psi$, с малыми коэффициентами p_i; величина w, кроме периодических, содержит еще весьма малый постоянный член, от которого можно бы избавиться, оставив сперва величину c неопределенной, а не приписывая ей заранее приведенного выше значения.

Обозначим через ξ_1 и η_1 — величины, определяемые уравнениями:

$$
\begin{aligned}
X + \frac{d^2\xi_1}{dt^2} - 2(1 + n')\frac{d\xi_1}{dt} - 3c\eta_1 = 0 \\
Y + \frac{d^2\eta_1}{dt^2} + 2(1 + n')\frac{d\xi_1}{dt} = 0
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

тогда ξ_1 и η_1 суть приближенные значения величин ξ и η и, по подстановке в уравнения (1), дадут невязки, которые мы обозначим через X_1 и Y_1, причем

$$
\begin{aligned}
X_1 &= 2\frac{dl_0}{dt}\frac{d\xi_1}{dt} - 2v\frac{d\eta_1}{dt} - 3w\xi_1 + 3n'^2\sin 2\omega\cdot\eta_1 \\
Y_1 &= 2\frac{dl_0}{dt}\frac{d\eta_1}{dt} + 2v\frac{d\xi_1}{dt} + 3n'^2\cos 2\omega\cdot\eta_1
\end{aligned}
$$

так что когда ξ_1 и η_1 известны, то X_1 и Y_1 определяются.

Величины ξ_1 и η_1, определяемые уравнениями (2), могут быть найдены как частные решения этих уравнений линейных и с постоянными коэффициентами, находить же их общие интегралы с постоянными произвольными нет надобности, ибо эти постоянные произвольные, удовлетворяющие начальным условиям, уже включены в состав l_0 и θ_0.

Итак, пусть будет:

$$X = p_0 + \sum p_i \cos i\psi; \quad Y = \sum q_i \sin i\psi$$

тогда полагаем:

$$\xi_1 = a_0 + \sum a_i \cos i\psi; \quad \eta_1 = \sum b_i \sin i\psi \tag{3}$$

причем указатель i получает все целые положительные значения,

$$a_0,\ a_1, \ldots b_1,\ b_2, \ldots$$

суть неопределенные коэффициенты, для нахождения которых, по подстановке значений (3) в уравнения (2), имеем уравнения:

$$\begin{aligned} p_0 - 3ca_0 &= 0 \\ p_i - i^2 a_i - 2(1+n')ib_i - 3ca_i &= 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \\ q_i - i^2 b_i - 2(1+n')ia_i &= 0 \end{aligned}$$

из этих уравнений следует:

$$a_i = \frac{p_i - 2(1+n')\frac{q_i}{i}}{i^2 - (1+n')^2 + {}^3/_2 n'^2}; \quad b_i = -2(1+n')\frac{a_i}{i} + \frac{q_i}{i^2}$$

Отсюда видно, что $a_i b_i$ будут вообще того же порядка малости, как p_i и q_i, поэтому коэффициенты членов выражений X_1 и Y_1 будут более высоких порядков, нежели коэффициенты членов X и Y.

Продолжаем таким же образом определять следующие приближения ξ_2, η_2 из уравнений:

$$\begin{aligned} X_1 + \frac{d^2\xi_2}{dt^2} - 2(1+n')\frac{d\eta_2}{dt} - 3c\eta_2 &= 0 \\ Y_1 + \frac{d^2\eta_2}{dt^2} + 2(1+n')\frac{d\xi_2}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

тогда, по подстановке в полное уравнение величин

$$\xi_1 + \xi_2,\ \eta_1 + \eta_2$$

вместо ξ и η, получим невязки:

$$\begin{aligned} X_2 &= 2\frac{dl_0}{dt} \cdot \frac{d\xi_2}{dt} - 2v\frac{d\eta_2}{dt} - 3w\xi_2 + 3n'^2 \sin 2\omega \cdot \eta_2 \\ Y_2 &= 2\frac{dl_0}{dt} \cdot \frac{d\eta_2}{dt} + 2v\frac{d\xi_2}{dt} + 3n'^2 \cos 2\omega \cdot \xi_2 \end{aligned}$$

При развитии в ряды по синусам и косинусам кратных аргументов ψ получатся коэффициенты, порядки коих будут выше, нежели коэффициентов соответствующих членов в разложениях X_1 и Y_1. Продолжаем поступать таким образом, пока невязки станут столь малыми, что ими можно будет пренебречь, тогда достаточно точные значения величин l и θ будут:

$$l = l_0 + \xi = l_0 + \xi_1 + \xi_2 + \dots$$
$$\theta = \theta_0 + \eta = \theta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \dots$$

После этого можно принять во внимание квадраты и произведения малых величин ξ и η, поступая с приближенными решениями $l_0 + \xi$ и $\theta_0 + \eta$ совершенно так же, как мы поступали с l_0 и θ_0, т. е. путем подстановок приближенных решений в предложенные уравнения, составления невязок и по ним поправок к приближенным решениям.

Следует заметить, что в том случае, когда поправки ξ и η зависят от какой-либо постоянной, напр. эксцентриситета орбиты Земли или параллакса Солнца, то последовательные приближения доставят точно и в отдельности члены, зависящие от первой, второй... степени этой постоянной.

Обратим внимание на это замечание Адамса, ибо оно с ясностью устанавливает связь его методы с методою Эйлера.

§ 8. Мы приложим изложенный в предыдущем параграфе метод к нахождению в выражениях координат Луны членов, зависящих от параллакса Солнца.

Найденные в § 4 приближенные значения величин l и θ суть:

$$\begin{aligned} l_0 &= \log\frac{r}{a} = -a_2\cos 2\psi \\ \theta_0 &= nt + \alpha + b_2\sin 2\psi \end{aligned} \tag{1}$$

Они удовлетворяют уравнениям движения, когда в них отброшены члены, зависящие от расстояния от Земли до Солнца. Иными словами, члены, зависящие от параллакса Солнца, остающиеся вследствие невязки по подстановке этих приближенных значений в полные уравнения, суть:

$$\begin{aligned} X &= -\lambda n'^2\frac{r}{a}\left[\frac{9}{8}\cos(\theta_0-\theta') + \frac{15}{8}\cos 3(\theta_0-\theta')\right] \\ Y &= \lambda n'^2\frac{r}{a}\left[\frac{3}{8}\sin(\theta_0-\theta') + \frac{15}{8}\sin(\theta_0-\theta')\right] \end{aligned} \tag{2}$$

причем положено

$$\lambda = \frac{T-L}{T+L}\cdot\frac{a}{a'} \tag{3}$$

Затем из предыдущего имеем

$$\theta_0 - \theta' = \psi + b_2\sin 2\psi$$

следовательно:

$$\sin(\theta_0 - \theta') = \sin\psi + \frac{1}{2} b_2 (\sin\psi + \sin 3\psi)$$

$$\cos(\theta_0 - \theta') = \cos\psi - \frac{1}{2} b_2 (\cos\psi - \cos 3\psi)$$

$$\sin 3(\theta_0 - \theta') = \sin 3\psi + \frac{3}{2} b_2 (\sin\psi + \sin 5\psi)$$

$$\cos 3(\theta_0 - \theta') = \cos 3\psi - \frac{3}{2} b_2 (\cos\psi - \cos 5\psi)$$

и на основании этих равенств имеем:

$$\frac{r}{a}\left[\frac{9}{8}\cos(\theta_0 - \theta') + \frac{15}{8}\cos 3(\theta_0 - \theta')\right] = \left(\frac{9}{8} - \frac{27}{8} b_2 - \frac{3}{2} a_2\right)\cos\psi$$
$$+ \left(\frac{15}{8} + \frac{9}{16} b_2 - \frac{9}{16} a_2\right)\cos 3\psi + \left(\frac{45}{16} b_2 - \frac{15}{16} a_2\right)\cos 5\psi$$

$$\frac{r}{a}\left[\frac{3}{8}\sin(\theta_0 - \theta') + \frac{15}{8}\sin 3(\theta_0 - \theta')\right] = \left(\frac{3}{8} - \frac{21}{8} b_2 - \frac{3}{4} a_2\right)\sin\psi$$
$$+ \left(\frac{15}{8} + \frac{3}{16} b_2 - \frac{3}{16} a_2\right)\sin 3\psi + \left(\frac{45}{16} b_2 + \frac{15}{16} a_2\right)\sin 5\psi$$

положим:

$$\left.\begin{aligned} -\xi &= \lambda a_1 \cos\psi + \lambda a_3 \cos 3\psi \\ \eta &= \lambda b_1 \sin\psi + \lambda b_3 \sin 3\psi \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

отбрасывая сперва члены с аргументом 5ψ.

В данном случае оказывается, что проще непосредственно подставить вместо ξ и η их значения (*) в полные уравнения (1) § 7 и таким образом сразу получить второе приближение, не переходя через первое. По сокращении множителя λ, мы получим:

$$a_1\cos\psi + 9a_3\cos 3\psi + 4a_2\sin 2\psi\,[a_1\sin\psi + 3a_3\sin 3\psi]$$
$$+ \frac{3f\mu}{a^3}(a_1\cos\psi + a_3\cos 3\psi) + 3\,\frac{f\mu}{a^3}\,[3a_2\cos 2\psi]\cdot[a_1\cos\psi + a_3\cos 3\psi]$$
$$-[2(1+n') + 4b_2\cos 2\psi]\cdot[b_1\cos\psi + 3b_3\cos 3\psi]$$
$$+ 3n'^2[\sin 2\psi + b_2\sin 4\psi]\cdot[b_1\sin\psi + b_3\sin 3\psi]$$
$$- n'^2\left[\frac{9}{8} - \frac{27}{8} b_2 - \frac{3}{2} a_2\right]\cos\psi$$
$$- n'^2\left(\frac{15}{8} + \frac{9}{16} b_2 - \frac{9}{16} a_2\right)\cos 3\psi - n'^2\left(\frac{45}{16} b_2 - \frac{15}{16} a_2\right)\cos 5\psi = 0$$

$$-b_1\sin\psi - 9b_3\sin 3\psi + 4a_2\sin 2\psi\,[b_1\cos\psi + 3b_3\cos 3\psi]$$
$$+ 3n'^2[-b_2 + \cos 2\psi + b_2\cos 4\psi]\cdot[b_1\sin\psi + b_3\sin 3\psi]$$
$$+ [2(1+n') + 4b_2\cos 2\psi]\cdot[a_1\sin\psi + 3a_3\sin 3\psi]$$
$$+ n'^2\left(\frac{3}{8} - \frac{21}{8} b_2 - \frac{3}{8} a_2\right)\sin\psi + n'^2\left(\frac{15}{8} + \frac{3}{16} b_2 - \frac{3}{16} a_2\right)\sin 3\psi$$
$$+ n'^2\left(\frac{45}{16} b_2 - \frac{15}{16} a_2\right)\sin 5\psi = 0$$

Развив эти равенства, заменив произведения синусов и косинусов через синусы и косинусы кратных дуг и уравняв нулю коэффициенты при $\cos\psi$ и $\cos 3\psi$ в первом уравнении и при $\sin\psi$ и $\sin 3\psi$ — во втором, отбросив члены с $\cos 5\psi$ и $\sin 5\psi$, получим следующие уравнения:

$$a_2\left[1+2a_2+\frac{3f\mu}{a^3}\left(1+\frac{3}{2}a_2\right)\right]-b_1\left[2(1+n')+2b_2-\frac{3}{2}n'^2\right]$$

$$+a_3\left(6a_2+\frac{9}{2}\frac{f\mu}{a^3}a_2\right)-b_3\left[6b_2-\frac{3}{2}n'^2(1+b_2)\right]=$$

$$=\frac{3}{8}n'^2(3-9b_2-4a_2)$$

$$a_1[2(1+n')-2b_2]-b_1\left[1+\frac{3}{2}n'^2-2a_2+3n'^2b_2\right]$$

$$+a_3[6b_2]-b_3\left[6a_2-\frac{3}{2}n'^2+\frac{3}{2}n'^2b_2\right]=-\frac{3}{8}n'^2(1-7b_2-2a_2)$$

$$a_1\left[-2a_2+\frac{9}{2}\frac{f\mu}{a^3}a_2\right]+b_1\left[-2b_2-\frac{3}{2}n'^2+\frac{3}{2}n'^2b_2\right]$$

$$+a_3\left[9+\frac{3f\mu}{a^3}\right]-b_3[6(1+n')]=\frac{3}{8}n'^2\left(5+\frac{3}{2}b_2-\frac{3}{2}a_2\right)$$

$$a_1[2b_2]+b_1\left[2a_2+\frac{3}{2}n'^2-\frac{3}{2}n'^2b_2\right]+a_3[6(1+n')]$$

$$-b_3[9+3n'^2b_2]=-\frac{3}{8}n'^2\left(5+\frac{1}{2}b_2-\frac{1}{2}a_2\right)$$

Решение этих уравнений в буквенной форме привело бы к весьма сложным формулам, поэтому выгоднее воспользоваться приведенными в § 4 численными значениями:

$$a_2=0.0071795$$
$$b_2=0.010212$$

принять указанные в начале § 7 единицы, так что

$$n'=0.080849;\quad f\mu=1.168234;\quad a=1$$

вычислить численные значения коэффициентов, стоящих в скобках, и решить полученные уравнения относительно a_1, a_3, b_1, b_3 в численном виде.

Эти уравнения будут:

$$4.56672a_1-2.17232b_1+0.08093a_3-0.05137b_3=\frac{3}{8}n'^2\,2.87937$$

$$2.14128a_1-0.99564b_1+0.06127a_3-0.03338b_3=-\frac{3}{8}n'^2\,0.91416$$

$$0.02349a_1-0.03012b_1+12.51451a_3-6.48508b_3=\frac{3}{8}n'^2\cdot 5.00455$$

$$0.02042a_1+0.02406b_1+6.48508a_3-9.00020b_3=-\frac{3}{8}n'^2\cdot 5.00152$$

Из них получаются следующие значения:

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{3}{8} n'^2 \cdot 46.4814 = -0.113928 \\
b_1 &= -\frac{3}{8} n'^2 \cdot 99.0336 = -0.242734 \\
a_3 &= \frac{3}{8} n'^2 \cdot 0.55042 = 0.001349 \\
b_3 &= \frac{3}{8} n'^2 \cdot 0.58209 = 0.001427
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Эти величины и надо подставить в формулы (4), умножив их предварительно на λ, причем этот множитель есть

$$\lambda = \frac{T-L}{T+L} \cdot \frac{a}{a'} = \frac{1-\frac{L}{T}}{1+\frac{L}{T}} \cdot \frac{a}{a'}$$

Отношение

$$\frac{L}{T} = 81.5$$

по определениям, в подробности которого мы здесь входить не будем, отношение

$$\frac{a}{a'} = \frac{\text{расст. от Земли до Луны}}{\text{расст. от Земли до Солнца}} = \frac{\text{параллакс Солнца}}{\text{параллакс Луны}}$$

§ **9.** Параллакс Луны по значительной его величине определяется сравнительно легко с большою точностью, среднее его значение, соответствующее среднему расстоянию a, есть

$$3422''.3$$

примем параллакс Солнца равным $8''.8$, тогда будет:

$$\lambda = 0.002509$$
$$\lambda b_1 = -0.00060903 = -125''.62$$

если же параллакс Солнца принять равным $8''.9$, то будет:

$$\lambda = 0.0025376$$
$$\lambda b_1 = -0.00061596 = -127''.05$$

но член с коэффициентом λb_1 входит в выражение долготы Луны θ, имея множитель

$$\sin\psi = \sin(n-n')t$$

долготы же Луны требуют лишь угловых измерений, т. е. определений ее склонения и прямого восхождения, и на основании этих определений долгот может быть в них с большою точностью обнаружено неравенство с аргументом ψ. Положим, что коэффициент при этом неравенстве оказался бы $126''.50$, ясно, что ему соответствует значение параллакса Солнца, равное

$$8''.80 + 0.10 \cdot \frac{126.50 - 125.62}{127.05 - 125.62}$$

т. е.

$$8''.80 + 0''.07 = 8''.87$$

Это неравенство в долготе Луны называется **параллактическим.** Определение, на основании его, параллакса Солнца, а значит, и расстояния от Земли до Солнца, пользуясь лишь наблюдениями помощью меридианного круга и часов прохождений Луны через меридиан данного места, напр. Пулкова или Гринича, представляется весьма замечательным, почему мы несколько и остановились на этом свойстве движения Луны, войдя в астрономические подробности.

§ **10.** Положим, что мы приняли за приближенное решение, по которому составляются выражения l_0 и θ_0, члены, включающие только вариацию, т. е. положили:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{a}[1 + a_2 \cos 2\psi]$$
$$\theta_0 = [nt + \alpha + b_2 \sin 2\psi]$$

причем значения a_2, b_2 и $\frac{f\mu}{a^3}$ даны в § 4 и 5, а именно:

$$a_2 = \frac{3}{2} m_1^2 \cdot \frac{2 + m_1}{3 - 2m_1 + \frac{1}{2} m_1^2}; \quad b_2 = (1 + m_1) a_2 + \frac{3}{8} m_1^2$$
$$\frac{f\mu}{a^3} = n^2 + \frac{1}{2} n'^2$$

следовательно:

$$l_0 = \log \frac{r_0}{a} = \log \frac{1}{1 + a_2 \cos 2\psi} = -a_2 \cos 2\psi$$
$$\theta_0 = nt + \alpha + b_2 \sin 2\psi$$

более же точные решения суть:

$$l = l_0 + \xi = -a_2 \cos 2\psi + \xi$$
$$\theta = nt + \alpha + b_2 \sin 2\psi$$

причем

$$2\psi = 2(\theta - n't) - (n't - \omega')$$

Приближенные решения l_0 и θ_0 получены в предположении

$$e'=0;\ \rho=a'$$

т. е. что видимое движение Солнца происходит по кругу. Положим, что мы хотим получить более точные решения, удерживая первую степень эксцентриситета e'.

На основании общих формул § 7, мы видим, что в нашем случае поправки определяются уравнениями:

$$X+\frac{d^2\xi}{dt^2}+4a_2\sin 2\psi\frac{d\xi}{dt}-3\frac{f\mu}{a^3}(1+3a_2\cos 2\psi)\xi$$
$$-2\left[(1+n')+2b_2\cos 2\psi\right]\frac{d\eta}{dt}+3n'^2(\sin 2\psi+b_2\sin 4\psi)\eta=0$$
$$Y+\frac{d^2\eta}{dt}+4a_2\sin 2\psi\frac{d\eta}{dt}+3n'^2(-b_2+\cos 2\psi+b_2\cos 4\psi)\eta$$
$$+2\left[(1+n')+2b_2\cos 2\psi\right]\frac{d\xi}{dt}=0$$

Обращаясь к разложениям, приведенным в § 3, и к выражениям сил P и Q, ограничиваясь в них членами с первою степенью e', мы получим по приведении:

$$X=-\frac{3}{2}n'^2e'\cos(n't-\omega')-\frac{21}{4}n'^2e'\cos\left[2(\theta-n't)-(n't-\omega')\right]$$
$$+\frac{3}{4}n'^2e'\cos\left[2(\theta-n't)+(n't-\omega')\right]$$
$$Y=\frac{21}{4}n'^2e'\sin\left[2(\theta-n't)-(n't-\omega')\right]$$
$$-\frac{3}{4}n'^2e'\sin\left[2(\theta-n't)+(n't-\omega')\right]$$

Положим для сокращения:

$$\alpha=n't-\omega'$$

тогда будет:

$$\cos\left[2(\theta-n't)-\alpha\right]=\cos(2\psi-\alpha)-2(b_2\sin 2\psi)\sin(2\psi-\alpha)=$$
$$=-b_2\cos\alpha+\cos(2\psi-\alpha)+b_2\cos(4\psi-\alpha)$$
$$\sin\left[2(\theta-n't)-\alpha\right]=+b_2\cos\alpha+\sin(2\psi-\alpha)+b_2\sin(4\psi-\alpha)$$
$$\cos\left[2(\theta-n't)+\alpha\right]=-b_2\cos\alpha+\cos(2\psi+\alpha)+b_2\cos(4\psi+\alpha)$$
$$\sin\left[2(\theta-n't)+\alpha\right]=-b_2\sin\alpha+\sin(2\psi+\alpha)+b_2\sin(4\psi+\alpha)$$

и значит,

$$X = -\frac{3}{2}n'^2(1-3b_2)e'\cos\alpha - \frac{21}{4}n'^2e'\cos(2\psi-\alpha) + \frac{3}{4}n'^2e'\cos(2\psi+\alpha)$$
$$-\frac{21}{2}n'^2b_2e'\cos(4\psi-\alpha) + \frac{3}{4}n'^2b_2e'\cos(4\psi+\alpha)$$
$$Y = 6n'^2b_2e'\sin\alpha + \frac{21}{4}n'^2e'\sin(2\psi-\alpha) - \frac{3}{4}n'^2e'\sin(2\psi+\alpha)$$
$$+\frac{21}{4}n'^2b_2e'\sin(4\psi-\alpha) - \frac{3}{4}n'^2b_2e'\sin(4\psi+\alpha)$$

За величину первого порядка малости мы приняли $m_1 \simeq 0.08$, поэтому n'^2, b_2 и e' принимаются за малые второго порядка, так что члены, содержащие аргумент $4\psi \pm \alpha$, будут шестого порядка и их можно отбросить.

Величины ξ и η будем искать под видом:

$$-\xi = a_5e'\cos\alpha + a_6e'\cos(2\psi-\alpha) + a_7e'\cos(2\psi+\alpha)$$
$$\eta = b_5e'\sin\alpha + b_6e'\sin(2\psi-\alpha) + b_7e'\sin(2\psi+\alpha)$$

где $a_5, \ldots b_7$ — неопределенные коэффициенты, для определения которых, следуя обычной методе, подставляем величины ξ и η в те уравнения, которым они должны удовлетворять, заменяем произведения синусов и косинусов через синусы и косинусы кратных аргументов и, собрав члены с $\cos\alpha$, $\cos(2\psi-\alpha)$, $\cos(2\psi+\alpha)$, $\sin\alpha$, $\sin(2\psi-\alpha)$, $\sin(2\psi+\alpha)$, уравниваем коэффициенты при них нулю, выполняя эту выкладку на буквах; получив, таким образом, для определения наших шести неизвестных шесть уравнений первой степени с буквенными коэффициентами, подставляем вместо a_2, b_2, n' и $\frac{f\mu}{a^3}$ их численные значения.

Уравнения станут с численными коэффициентами, решение этих уравнений доставит следующие значения коэффициентов:

$$a_5 = -0.0069237;\quad b_5 = -0.190463$$
$$a_6 = 0.030358;\quad b_6 = 0.043967$$
$$a_7 = -0.004447;\quad b_7 = -0.006236$$

Величина

$$e' = 0.016771 = 3459''.28$$

так что будет:

$$a_5e' = -0.0001161;\quad b_5e' = -0.003194 = -658''.9$$
$$a_6e' = 0.000509;\quad b_6e' = 0.0007373 = 152''.9$$
$$a_7e' = -0.0000746;\quad b_7e' = -0.0001046 = -21''.57$$

Главный член

$$b_5 e' \sin\alpha = -658''.9 \sin(n't - \omega')$$

имеет своим периодом год, поэтому это неравенство называется *годовым.*

§ **11.** Мы видели, что уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{d^2l}{dt^2} + \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{f\mu}{r^3} - n'^2\left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2(\theta - n't)\right] = 0 \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\theta}{dt}\frac{dl}{dt} + n'^2\left[\frac{3}{2}\sin 2(\theta - n't)\right] = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

имеют приближенное решение:

$$\begin{aligned} l = \log\frac{r}{a} = -a_2\cos 2\psi \\ \theta = nt + \alpha + b_2 \sin 2\psi \end{aligned} \qquad (2)$$

причем

$$\psi = nt + \alpha - (n't + \alpha')$$

a_2 и b_2 — малые величины, зависящие от отношения $\frac{n'}{n}$, и a — величина, зависящая от n, так что

$$\frac{f\mu}{a^3} = n^2 + \frac{1}{2}n'^2 - \frac{9}{32}\frac{n'^4}{(n - n'^2)} + 2n'(2n - n')a_2^2$$

(первые два члена этого выражения получены в § 4, остальные получаются доводя разложения до членов более высокого порядка).

Величина n' считается заданной, n и α можно считать произвольными, но подчиненными условию, что отношение $n' : n$ есть величина малая.

Это решение представляет, таким образом, возможный случай движения, но это есть лишь частное решение, ибо оно содержит лишь две произвольные постоянные, тогда как общее решение должно содержать таковых четыре, чтобы можно было удовлетворить любым начальным условиям, т. е. чтобы начальные значения координат и начальные скорости могли быть задаваемы по произволу.

Когда возмущающих сил нет, то четыре произвольные постоянные суть n и α, аналогичные величинам, обозначенным этими буквами выше, и два эллиптические элемента e и ω, причем через e обозначен эксцентриситет и через ω — долгота вершины орбиты.

Мы покажем, каким образом вышеприведенное решение может быть дополнено, введя в $\log\frac{r}{a}$ и в θ дополнительные члены, аналогичные с e и ω, причем первая величина будет постоянная, вторая же — медленно и равномерно изменяется с временем t; для простоты мы примем сперва, что e настолько мало, что его второю и высшими степенями можно пренебречь, в остальном же эта величина произвольная.

Итак, положим, что

$$\log \frac{a}{r} = a_2 \cos 2\psi + e \cos(nt - \sigma)$$

$$\theta = nt + \alpha + b_2 \sin 2\psi + 2e(1 + b_0)\sin(nt - \sigma) \tag{3}$$

причем эллиптические члены, т. е. содержащие множитель e, — того же самого вида, как в невозмущенном движении, величина же σ предполагается медленно изменяющейся, так что

$$\frac{d\sigma}{dt} = p$$

причем p — малая величина порядка возмущающих сил.

Подставим выражения (3) в уравнения (1). Мы имеем:

$$\frac{dl}{dt} = 2(n - n')\, a_2 \sin 2\psi + (n - p)\, e \sin(nt - \sigma)$$

$$\frac{d^2l}{dt^2} = 4(n - n')^2 a_2 \cos 2\psi + (n - p)^2 e \cos(nt - \sigma)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = n + 2(n - n')\, b_2 \cos 2\psi + 2(n - p)(1 + b_0)\, e \cos(nt - \sigma)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -4(n - n')\, b^2 \sin 2\psi - 2(n - p)^2 (1 + b_0)\, e \sin(nt - \sigma)$$

Следовательно, должно быть

$$\begin{aligned}
&4(n - n')^2 a_2 \cos 2\psi + (n - p)^2 e \cos(nt - \sigma) \\
&+ 2(n - n')(n - p)\, a_2 e\left[\cos(2\psi - nt + \omega) - \cos(2\psi + nt - \sigma)\right] \\
&- \{n^2 + 4n(n - n')\, b_2 \cos 2\psi + 4n(n - p)(1 + b_0)\, e \cos(nt - \sigma) \\
&+ 4(n - n')(n - p)(1 + b_0)\, b_2 e\left[\cos(2\psi + nt + \omega) + \cos(2\psi + nt - \sigma)\right]\} \\
&+ \frac{f\mu}{a^3}\{(1 + 3a_2 \cos 2\psi)\left[1 + 3e \cos(nt - \sigma)\right]\} \\
&- n'^2 \left\{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2\psi - 3 \sin 2\psi\left[2(1 + b_0)\, e \sin(nt - \sigma)\right]\right\} = 0
\end{aligned}$$

и второе уравнение

$$\begin{aligned}
&-4(n - n')^2 b_2 \sin 2\psi - 2(n - p)^2 (1 + b_0)\, e \sin(nt - \sigma) \\
&+ 4n(n - n')\, a_2 \sin 2\psi + 2n(n - p)\, e \sin(nt - \sigma) \\
&+ 4(n - n')(n - p)(1 + b_0)\, e a_2\left[\sin(2\psi - nt + \omega) + \sin(2\psi + nt - \sigma)\right] \\
&+ 2(n - n')(n - p)\, e b_2\left[-\sin(2\psi - nt + \omega) + \sin(2\psi + nt + \sigma)\right] \\
&+ n'^2 \left\{\frac{3}{2}\sin 2\psi + 3\cos 2\psi\left[2(1 + b_0)\, e \sin(nt - \sigma)\right]\right\} = 0
\end{aligned}$$

Само собою разумеется, что при значениях a_2 и b_2, данных в § 4, члены, не содержащие e, тожественно пропадают.

Уравнивая нулю коэффициент при $\cos(nt-\omega)$ в первом уравнении и коэффициент при $\sin(nt-\omega)$ во втором, мы получаем:

$$(n-p)^2 - 4n(n-p)(1+b_0) + \frac{f\mu}{a^3} = 0$$

$$-2(n-p)^2(1+b_0) + 2n(n-p) = 0$$

следовательно

$$(n-p)(1+b_0) = n$$

и

$$(n-p)^2 = 4n^2 - \frac{3f\mu}{a^3} \approx n^2 - \frac{3}{2}n'^2$$

так что приближенно будет

$$\frac{p}{n} \approx \frac{3}{4}m^2 \approx b_0$$

Остаются еще члены с аргументами

$$2\psi - nt + \sigma \quad \text{и} \quad 2\psi + nt - \sigma$$

от них можно избавиться, положив:

$$\log\frac{a}{r} = a_2\cos\psi + e\cos(nt-\sigma) + a_{21}e\cos(2\psi - nt + \sigma) + a_{22}e\cos(2\psi + nt - \sigma)$$

$$\theta = nt + \alpha + b_2\sin 2\psi + 2e(1+b_0)\sin(nt-\sigma) + b_{21}e\sin(2\psi - nt + \sigma) + b_{22}e\sin(2\psi + nt - \sigma)$$

тогда, вместо предыдущих уравнений, мы получим следующие:

$$\begin{aligned}
&(n-p)^2 - 4n(n-p)(1+b_0) + \frac{3f\mu}{a^3}\\
&+\left[-2(n-n')(n-2n'+p) + \frac{9}{2}\frac{f\mu}{a^3}\right]a_2a_{21}\\
&+\left[-2(n+n')(n-2n'+p)b_2 + \frac{3}{2}n'^2\right]b_{21}\\
&+\left[-2(n-n')(3n-2n'-p)b_2 + \frac{3}{2}n'^2\right]b_{22} = 0
\end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}
&-2(n-p)^2(1+b_0) + 2n(n-p) - 6n'^2b_2(1+b_0)\\
&-2(n-n')(n-2n'+p)b_2a_{21} + 2(n-n')(3n-2n'-p)b_2a_{22}\\
&+\left[2(n-n')(n-2n'+p)a_2 - \frac{3}{2}n'^2\right]b_{21}\\
&+\left[-2(n-n')(3n-2n'-p)a_2 + \frac{3}{2}n'^2\right]b_{22} = 0
\end{aligned} \qquad (*)$$

Множим уравнение $(*)$ на $\frac{2n}{n-p}$ и придаем к первому, тогда уравнение $(*)$ можно заменить таким:

$$
\begin{aligned}
&(n-p)^2-4n^2+\frac{3f\mu}{a^3}+\frac{12nn'^2}{n-p}b_2(1+b_0)\\
&+2(n-n')(n-2n'+p)[a_2a_{21}-b_2b_{21}]+\frac{9f\mu}{2a^3}[a_2a_{21}+a_2a_{22}]\\
&+\frac{3}{2}n'^2[b_{21}+b_{22}]+2(n-n')(3n-2n'-p)[a_2a_{22}-b_2b_{22}]\\
&+\frac{4n}{n-p}(n-n')(n-2n'+p)[b_2a_{21}-a_2b_{21}]\\
&-\frac{4n}{n-p}(n-n')(3n-2n'-p)[b_2a_{22}-a_2b_{22}]\\
&+3n'^2\frac{n}{n-p}[b_{21}-b_{22}]=0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

точно так же уравнения, получаемые от приравнивания нулю коэффициентов при

$$e\cos(2\psi-nt+\omega)\quad \text{и}\quad e\sin(2\psi-nt+\omega)$$

следующие:

$$
\begin{aligned}
&\left[2(n-n')(n-p)+\frac{9f\mu}{2a^3}\right]a_2-4(n-n')(n-p)(1+b_0)b_2\\
&\qquad+3n'^2(1+b_0)\\
&+\left[(n-2n'+p)^2+\frac{3f\mu}{a^3}\right]a_{21}-2n(n-2n'+p)b_{21}=0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
&4(n-n')(n-p)(1+b_0)a_2-2(n-n')(n-p)b_2-3n'^2(1+b_0)\\
&\quad-(n-2n'+p)^2b_{21}+2n(n-2n'+p)a_{21}=0
\end{aligned}
\tag{**}
$$

Умножив уравнение $(**)$ на $-\frac{2n}{n-2n'+p}$ и придав к уравнению (3), исключим b_{21} и получим

$$
\begin{aligned}
&\left[2(n-n')(n-p)+\frac{9f\mu}{2a^3}-\frac{8n}{n-2n'+p}(n-n')(n-p)(1+b_0)\right]a_2\\
&+\left[-4(n-n')(n-p)(1+b_0)+4n\frac{n-n'}{n-2n'+p}(n-p)\right]b_2\\
&+\left[3n'^2+\frac{6nn'^2}{n-2n'+p}\right](1+b_0)\\
&+\left[(n-2n'+p)^2-4n^2+\frac{3f\mu}{a^3}\right]a_{21}=0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Наконец, уравнения, получаемые от приравнивания нулю коэффициентов при

$$e\cos(2\psi + nt - \omega) \quad \text{и} \quad e\sin(2\psi + nt - \omega)$$

будут

$$\begin{aligned}&\left[-2(n-n')(n-p)+\frac{9f\mu}{2a^3}\right]a_2-4(n-n')(n-p)(1+b_0)b_2\\&\qquad -3n'^2(1+b_0)\\&+\left[(3n-2n'-p)^2+\frac{3f\mu}{a^3}\right]a_{22}-2n(3n-2n'-p)b_{22}=0\end{aligned} \tag{5}$$

и

$$\begin{aligned}&4(n-n')(n-p)(1+b_0)a_2+2(n-n')(n-p)b_2+3n'^2(1+b_0)\\&\qquad-(3n-2n'-p)^2b_{22}+2n(3n-2n'-p)a_{22}=0\end{aligned} \tag{***}$$

Умножив уравнение (***) на $-\frac{2n}{3n-2n'-p}$, придаем к (5), b_{22} исключается, и мы получим

$$\begin{aligned}&\left[-2(n-n')(n-p)+\frac{9f\mu}{2a^3}-\frac{8n}{3n-2n'-p}(n-n')(n-p)(1+b_0)\right]a_2\\&+\left[-4(n-n')(n-p)(1+b_0)-\frac{4n}{3n-2n'-p}(n-n')(n-p)\right]b_2\\&+\left[-3n'^2-\frac{6nn'^2}{3n-2n'-p}\right](1+b_0)\\&+\left[(3n-2n'-p)^2-4n^2+\frac{3f\mu}{a^3}\right]a_{22}=0\end{aligned} \tag{6}$$

Эти шесть уравнений (1), (2), . . . (6) надо решить относительно неизвестных $\frac{p}{n}$, b_0, a_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22}, и так как эти уравнения относительно первых двух неизвестных нелинейные, то для их решения надо применить методу последовательных приближений: сперва надо воспользоваться выше найденным грубым приближением для величин $\frac{p}{n}$ и b_0, после чего из уравнений (3), (4), (5), (6) найдутся приближенные значения a_{21}, b_{21}, a_{22}, b_{22}; эти величины надо подставить в первые два уравнения, которые тогда доставят более точные значения $\frac{p}{n}$ и b_0, и продолжать таким образом, пока два последовательных приближения более не будут чувствительно разниться между собою.

Необходимо заметить, что эта сложность вызывается тем, что при определении a_{21} и b_{21} входит малый делитель

$$(n - 2n' + p)^2 - 4n^2 + \frac{3f\mu}{a^3}$$

§ **12.** Перейдем теперь к самому численному решению уравнений предыдущего параграфа.

Мы примем следующие данные:

$$\begin{aligned}
n - n' &= 1 \\
n &= 1.080849 \\
n' &= 0.080849 \\
\frac{f\mu}{a^3} &= 1.171503
\end{aligned}$$

$$\log a_2 = \bar{3}.85609;\ \log b_2 = \bar{2}.00911$$

Первое приближение.

$$\begin{aligned}
(n - p)^2 - 4n^2 + \frac{3f\mu}{a^3} &= 0 \\
4n^2 &= 4.672937 \\
-\frac{3f\mu}{a^3} &= -3.514509 \\
(n - p)^2 &= 1.158428 \\
n - p &= 1.076308 \\
p &= 0.004546 \\
n - 2n' + p &= 0.923697 \\
3n - 2n' - p &= 3.0766303 \\
1 + b_0 &= 1.004224 = \frac{n}{n - p}
\end{aligned}$$

Эти значения надо подставить в уравнение (4):

$$\begin{aligned}
&\left[(n - 2n' + p)^2 - 4n^2 + \frac{3f\mu}{a^3}\right] a_{21} + 2(n - n')(n - p) a_2 + \frac{9f\mu}{2a^3} a_2 \\
&- 8 \frac{n}{n - 2n' + p}(n - n')(n - p)(1 + b_0) a_2 - 4(n - n')(n - p)(1 + b_0) b_2 \\
&+ 4 \frac{n}{n - 2n' + p}(n - n')(n - p) b_2 + 3n'^2(1 + b_0) \\
&+ 6 \frac{nn'^2}{n - 2n' + p}(1 + b_0) = 0
\end{aligned} \qquad (4)$$

Отдельные его члены таковы:

$2(n-n')(n-p)a_2$	0.0154545
$\frac{9}{2}\frac{f\mu}{a}$	.0378483
$-8\frac{n}{n-2n'+p}(n-n')(n-p)(1+b_0)a_2$	— .0726410
$-4(n-n')(n-p)(1+b_0)b_2$	— .0441505
$4\frac{n}{n-2n'+p}(n-n')(n-p)b_2$	.0514447
$3n'^2(1+b_0)$	.0196925
$6\frac{nn'^2}{n-2n'+p}(1+b_0)$	.0460858
Числитель . . .	0.0537343

$(n-2n'+p)^2$	0.853216
$-4n^2+\frac{3f\mu}{a^3}$	—1.158428
Знаменатель . . .	—0.305212

$$a_{21}=0.176056$$

Уравнение, которым определяется b_{21}, есть

$$b_{21}=\frac{2n}{n-2n'+p}a_{21}+4\frac{(n-n')}{(n-2n'+p)^2}(n-p)(1+b_0)a_2$$
$$-2\frac{n(n-n')}{(n-2n+p)^2}(n-p)b_2-3\frac{n'^2}{(n-2n'+p)^2}(1+b_0)$$

и мы имеем:

$\frac{2n}{n-2n'+p}a_{21}$	0.412018
$\frac{4(n-n')}{(n-2n'+p)^2}(n-p)(1+b_0)a_2$	.0363795
$-\frac{2(n-n')}{(n-2n'+p)^2}(n-p)b_2$	— .0257642
$-\frac{3n'^2}{(n-2n'+p)^2}(1+b_0)$	— .0230803
	$b_{21}=0.399553$

Уравнение, которым определяется a_{22}, есть

$$\left[(3n-2n'-p)^2-4n^2+\frac{3f\mu}{a^3}\right]a_{22}-2(n-n')(n-p)a_2+\frac{9}{2}\frac{f\mu}{a^3}a_2$$
$$-8\frac{n}{3n-2n'-p}(n-n')(n-p)(1+b_0)a_2-4(n-n')(n-p)(1+b_0)b_2$$
$$-4\frac{n}{3n-2n'-p}(n-n')(n-p)b_2-3n'^2(1+b_0)$$
$$-\frac{6nn'^2}{3n-2n'-p}(1+b_0)=0$$

Отдельные члены этого уравнения суть:

$-2(n-n')(n-p)a_2$	-0.0154545
$\frac{9}{2}\frac{f\mu}{a^3}$	$.0378483$
$-8\frac{n}{3n-2n'-p}(n-n')(n-p)(1+b_0)a_2$	$-.0218113$
$-4(n-n')(n-p)(1+b_0)b_2$	$-.0441505$
$-4\frac{n}{3n-2n'-p}(n-n')(n-p)b_2$	$-.0154469$
$-3n'^2(1+b_0)$	$-.0196925$
$-\frac{6nn'^2}{3n-2n'-p}(1+b_0)$	$-.0138378$
Числитель . . .	-0.0925452

$(3n-2n'-p)^2$	9.463634
$-4n^2+\frac{3f\mu}{a^3}$	-1.158428
Знаменатель . . .	8.305206

$$a_{22}=0.0111430$$

Наконец, b_{22} определяется из уравнения

$$b_{22}=2\frac{n}{3n-2n'-p}a_{22}+4\frac{n-n'}{(3n-2n'-p)^2}(n-p)(1+b_0)a_2$$
$$+2\frac{n-n'}{(3n-2n'-p)^2}(n-p)b_2+3\frac{n'^2}{(3n-2n'-p)^2}(1+b_0)$$

Отдельные члены этого выражения суть следующие:

$2\frac{n}{3n-2n'-p}a_{22}$	0.00783011
$4\frac{n-n'}{(3n-2n'-p)^2}(n-p)(1+b_0)a_2$	$.00327988$
$2\frac{n-n'}{(3n-2n'-p)^2}(n-p)b_2$	$.00232283$
$3\frac{n'^2}{(3n-2n'-p)^2}(1+b_0)$	$.00208086$
	$b_{22}=0.0155137$

Второе приближение. Полное уравнение, которым определяется $n-p$, есть

$$(n-p)^2-4n^2+\frac{3f\mu}{a^3}+12\frac{nn'^2}{n-p}b_2(1+b_0)$$
$$+2(n-n')(n-2n'+p)[a_2a_{21}-b_2b_{21}]+\frac{9}{2}\frac{f\mu}{a^3}[a_3a_{21}+a_2a_{22}]$$
$$+\frac{3}{2}n'^2[b_{21}+b_{22}]+2(n-n')(3n+2n'-p)[a_2a_{22}-b_2b_{22}]$$
$$+4\frac{n}{n-p}(n-n')(n-2n'-p)[b_2a_{21}-a_2b_{21}]$$
$$-4\frac{n}{n-p}(n-n')(3n-2n'-p)[b_2a_{22}-a_2b_{22}]+3\frac{nn'^2}{n-p}[b_{21}-b_{22}]=0$$

Во всех членах, кроме первого, берем значение p из первого приближения, тогда отдельные члены предыдущего уравнения имеют следующие численные значения:

$-4n^2+\frac{3f\mu}{a^3}$	-1.158428
$12\frac{nn'^2}{n-p}b_2(1+b_0)$	0.000808
$2(n-n')(n-2n'+p)[a_2a_{21}-b_2b_{21}]$	-0.005201
$\frac{9}{2}\frac{f\mu}{a^3}[a_2a_{21}+a_2a_{22}]$	0.007084
$\frac{3}{2}n'^2[b_{21}+b_{22}]$	0.004069
$2(n-n')(3n-2n'-p)[a_2a_{22}-b_2b_{22}]$	-0.000482
$4\frac{n}{n-p}(n-n')(n-2n'+p)[b_2a_{21}-a_2b_{21}]$	-0.003975
$-4\frac{n}{n-p}(n-n')(3n-2n'-p)[b_2a_{22}-a_2b_{22}]$	-0.000030
$\frac{3nn'^2}{n-p}(b_{21}-b_{22})$	0.007561
$(n-p)^2=$ . . .	1.148504

$$n-p=1.071725$$
$$p=0.009124$$
$$p:n=0.008442$$

Обратим внимание на то, что все члены этой таблицы, содержащие величину p, весьма малы по сравнению с первым членом, поэтому при вычислении этих малых членов погрешность в величине p, взятой из первого приближения, оказывает малое влияние на значение $(n-p)^2$, этим уравнением определяемое.

Найденные во втором приближении значения $n-p$, p подставляем в уравнение, служащее для определения $1+b_0$, а именно:

$$
\begin{aligned}
1+b_0 = \frac{n}{n-p} - 3\frac{n'^2}{(n-p)^2} b_2(1+b_0) \\
- \frac{n-n'}{(n-p)^2}(n-2n'+p)[b_2 a_{21} - a_2 b_{21}] \\
+ \frac{n-n'}{(n-p)^2}(3n-2n'-p)[b_2 a_{22} - a_2 b_{22}] - \frac{3}{4}\frac{n'^2}{(n-p)^2}[b_{21} - b_{22}]
\end{aligned}
$$

мы получим следующие значения:

$\frac{n}{n-p}$	1.0085133
$-3\frac{n'^2}{(n-p)^2} b_2(1+b_0)$	−0.0001751
$-\frac{n-n'}{(n-p)^2}(n-2n'+p)[b_2 a_{21} - a_2 b_{21}]$	0.0008655
$\frac{n-n'}{n-p}(3n-2n'-p)[b_2 a_{22} - a_2 b_{22}]$	0.0000064
$-\frac{3}{4}\frac{n'^2}{(n-p)^2}[b_{21} - b_{22}]$	−0.0016392
$1+b_0 =$ . . .	1.007571

и здесь видно, что все члены таблицы, в которые входит b_0, весьма малы по сравнению с первым, поэтому погрешность в значении b_0, взятом из первого приближения, оказывает весьма малое влияние на величину $1+b_0$. Для этого Адамс и не взял первые два уравнения в первоначальном виде, а предварительно преобразовал их, ибо уравнения, помеченные (*), этим свойством, дающим возможность вести последовательные приближения, не обладали. При применении методы последовательных приближений необходимо на этот прием обращать внимание.

Пользуясь найденными значениями p и $1+b_0$ и приведенными выше уравнениями, находят второе приближение для величин a_{21}, b_{21}, a_{22}, b_{22}, и получаются следующие результаты:

$$
\begin{aligned}
a_{21} = 0.180820; \quad b_{21} = 0.408736 \\
a_{22} = 0.0111803; \quad b_{22} = 0.0155685
\end{aligned}
$$

По этим значениям находят:

третье приближение, а именно:

$$n - p = 1.071625$$
$$p = 0.009224 \qquad 1 + b_0 = 1.007639$$
$$p : n = 0.008535$$
$$a_{21} = 0.180929; \qquad b_{21} = 0.408948$$
$$a_{22} = 0.011810; \qquad b_{22} = 0.0155696$$

Затем совершенно так же получим:

четвертое приближение:

$$n - p = 1.071603$$
$$p = 0.009246 \qquad 1 + b_0 = 1.007660$$
$$p : n = 0.008554$$

величины же a_{21}, b_{21}, a_{22}, b_{22}, найденные в третьем приближении, остаются без изменений.

Величина $e(1 + b_0)$, полученная на основании обработки наблюдений, есть

$$e(1 + b_0) = 0.05491$$

следовательно:

$$e = 0.05449$$
$$2(1 + b_0)e = 0.109820 = 22651''.9$$
$$a_{21}e = 0.0098603$$
$$b_{21}e = 0.0222844 = 4596''.6$$
$$a_{22}e = 0.0006093$$
$$b_{22}e = 0.0008485 = 175''.1$$

Полученное отношение

$$p : n = 0.008554$$

несмотря на то, что удержаны лишь члены с первою степенью e, оказывается весьма близким к истинному его значению, вычисленному Хиллем с весьма большою точностью и равному

$$0.008572573004864$$

Приняв среднее годовое движение Луны равным $17325593''$, мы получим годовое перемещение перигея равным

$$17325593'' \cdot 0.008554 = 148202'' = 41^\circ 10' 2''$$

что отличается лишь на $5'$ от истинного.

§ **13.** Перейдем теперь к исследованию третьего из основных уравнений движения, содержащего координату z, которой определяется широта Луны β, ибо $z = r \sin\beta$. Сперва мы предположим, что широта настолько мала, что можно пренебрегать второю и высшими степенями переменной

$$s = \operatorname{tang}\beta$$

В этом предположении третье из уравнений (I) § 2 напишется так:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{z}{r}\left[\frac{f\mu}{r^2} + \frac{fM}{\rho^3} r\left(1 + \frac{T-L}{T+L}\cdot\frac{r}{\rho}\cdot 3\cos\omega\right)\right]$$

или, отбрасывая «параллактический» член, содержащий множители $3\cos\omega$ и $\frac{r^2}{\rho^4}$, мы будем иметь в первом приближении:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -z\left[\frac{f\mu}{r^3} + \frac{fM}{\rho^3}\right]$$

Мы можем считать, что множитель $\frac{f\mu}{r^3}$ уже известен по изложенному в предыдущих параграфах и принять

$$\frac{f\mu}{r^3} = \frac{f\mu}{a^3}\left[1 + \frac{3}{2}a_2{}^2 + 3a_2\cos 2\psi + \left(\frac{3}{2}a_2{}^2 + 3a_4\right)\cos 4\psi\right]$$

причем a определяется выведенными в §§ 4 и 5 равенствами. Переходя к числам и выбрав единицы так, чтобы было

$$n - n' = 1$$

мы будем иметь:

$$\frac{f\mu}{r^3} = 1.171503 + 0.025230\cos 2t + 0.0002515\cos 4t$$

$$\frac{fM}{\rho^3} = n'^2 = 0.006536$$

и уравнение, которым определяется z, примет вид

$$\frac{d^2z}{dt^2} + z(1.178039 + 0.025230\cos 2t + 0.0002515\cos 4t)$$

Рассмотрим вообще уравнение вида

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (q_0 + 2q_1\cos 2t + 2q_2\cos 4t)\,z = 0$$

причем величины q_1 и q_2 — малые.

Положим, что в состав величины z входит член

$$c\cos(kt+\gamma)$$

по подстановке в выражение Pz произойдут члены:

$$c\cos[(k-2)t+\gamma];\quad c\cos[(k+2)t+\gamma]$$
$$c\cos[(k-4)t+\gamma];\quad c\cos[(k+4)+\gamma]$$

поэтому примем вообще:

$$z=c\,\{\cos(kt+\gamma)+c_1\cos[(k+2)t+\gamma]+c_2\cos[(k+4)t+\gamma]+\dots$$
$$+c_{-1}\cos[(k-2)t+\gamma]+c_{-2}\cos[(k-4)t+\gamma]+\dots\}$$

c и γ суть постоянные произвольные; надо определить величину k и коэффициенты c_1, c_{-1}, ... Подставив и уравнивая нулю множители при косинусах одинаковых аргументов, получаем следующую систему уравнений, которые условно напишем так:

$\dots c_{-2}$	c_{-1}	—	c_1	c_2	...
$\dots -(k-4)^2+q_0$	$+q_1$	$+q_2$			
$\dots\quad +q_1$	$-(k-2)^2+q_0$	$+q_1$	$+q_2$		
$\dots\quad +q_2$	$+q_1$	$-k^2+q_0$	$+q_1$	$+q_2$	...
....	q_2	q_1	$-(k+2)^2+q_0$	$+q_1$	...
....	...	q_2	q_1	$-(k+4)^2+q_0$	...
....	...	...	...	...	...

При таком условном начертании, первая строка представляет такое уравнение:

$$\dots[-(k-4)^2+q_0]\,c_{-2}+q_1\,c_{-1}+q_2=0$$

Если величинами q_1, q_2 пренебречь, то мы имели бы просто:

$$-k^2+q_0=0$$

как исходное приближение для k.

Сохраняя q_1 и отбрасывая q_2, мы получим:

$$c_{-1}=-\frac{q_1}{q_0-(k-2)^2}$$

$$c_1=-\frac{q_1}{q_0-(k+2)^2}$$

В нашем случае q_0 близко к 1, поэтому и k близко к 1 и знаменатель в выражении c_{-1} — малый, вследствие чего коэффициент c_{-1} будет гораздо больше c_1.

Если вышеприведенные значения c_{-1} и c_1 подставить в третье уравнение, то мы получим

$$k^2 - q_0 + q_1^2 \left\{ \frac{1}{q_0 - (k+2)^2} + \frac{1}{q_0 - (k-2)^2} \right\} = 0$$

откуда следует

$$(k^2 - q_0)^3 - 8(k^2 + q_0)^2 - \{16(q_0 - 1) + 2q_1^2\}(k^2 - q_0) - 8q_1^2 = 0;$$

это уравнение можно написать в таком виде:

$$(k^2 - q_0)^2 + 2(q_0 - 1)(k^2 - q_0) = -q_1^2 + \frac{1}{4} q_1^2 (k^2 - q_0) + \frac{1}{8}(k^2 - q_0)^3$$

иначе

$$(k^2 - 1)^2 = (q_0 - 1)^2 - q_1^2 - \frac{1}{4} q_1^2 (k^2 - q_0) + \frac{1}{8}(k^2 - q_0)^3$$

Пользуясь этим уравнением, мы весьма быстро будем приближаться к требуемому значению величины k.

Возьмем как первое приближение

$$k^2 - q_0 = 0$$

и подставим это значение в малые члены правой части нашего уравнения, получим как второе приближение

$$k = 1.085169$$

Отсюда следует, что попятное движение, в среднем, составляет в год:

$$\frac{k}{n} - 1 = g - 1 = 0.003997$$

где через g обозначено отношение $\frac{k}{n}$. Это значение весьма близко к истинному, и при $n = 17325593''$ дает для годового перемещения узла:

$$69252'' = 19^\circ 14' 12''$$

Определим затем коэффициенты c_{-1}, c_1, c_{-2}, c_2, мы имеем:

$$q_1 = 0.012615$$
$$q_0 - (k-2)^2 = 0.341123$$
$$q_0 + (k+2)^2 = -8.340228$$

поэтому в первом приближении:

$$c_{-1} = -0.0369819; \quad c_1 = 0.0015126$$

следовательно:

$$q_1 c_{-1} + q_2 = -0.0003402; \quad q_1 c_1 + q_0 = 0.0001449$$
$$q_0 - (k-4)^2 = -7.31821; \quad q_0 - (k+4)^2 = -24.6809$$

значит:

$$c_{-2} = -0.00004650$$
$$c_2 = 0.00000587$$

После этого находим как второе приближение для c_{-1} и c_1:

$$[-(k-2)^2 + q_0]\, c_{-1} = -(q_1 + q_2 c_1 + q_1 c_{-2})$$
$$[-(k+2)^2 + q_0]\, c_1 = -(q_1 + q_2 c_{-1} + q_1 c_2)$$

и, на основании найденных по первому приближению значений:

$$q_1 + q_2 c_1 + q_1 c_{-2} = 0.0126147; \quad q_1 + q_2 c_{-1} + q_1 c_2 = 0.0126103$$

так что будет:

$$c_{-1} = -0.0369800$$
$$c_1 = 0.0015120$$

§ **14.** В заключение своих лекций Адамс излагает вкратце теорию Хилля, которая, как будет видно, составляет непосредственное развитие теории Эйлера.

Вообразим, для простоты рассуждений и дальнейших выкладок, что Луна движется в плоскости эклиптики и что ее движение относится к прямолинейным прямоугольным осям, вращающимся так, что ось x постоянно проходит через Солнце. Начало этих осей будем считать в центре Земли, который будем считать неподвижным, относя к нему движение Солнца и Луны. Чтобы не писать постоянно множитель f, выберем единицы так, чтобы притяжение между двумя массами m_1 и m_2, находящимися в расстоянии d друг от друга, выражалось формулой $\frac{mm_1}{d^2}$, а не формулой $f\frac{mm_1}{d^2}$, как мы писали раньше. Это равносильно тому, чтобы во всех этих формулах положить $f = 1$.

Движение Солнца будем считать происходящим по кругу равномерно, так что наши оси вращаются равномерно со скоростью n', и координаты Солнца будут:

$$x' = a'; \quad y' = 0$$

координаты Луны обозначим через x и y. Обозначая расстояние от Солнца до Луны через ρ, так что

$$\rho^2 = (x - a')^2 + y^2$$

в остальном же, сохраняя прежние обозначения, видим, что действие Солнца на Луну, сделав Землю неподвижной, выразится формулами:

$$-\frac{M}{\rho^2}\frac{x-a'}{\rho} - \frac{M}{a'^2}; \qquad -\frac{M}{\rho^2}\frac{y}{\rho}$$

притяжение же Земли при том же условии будет:

$$-\frac{\mu}{r^2}\frac{x}{r}; \qquad -\frac{\mu}{r^2}\frac{y}{r}$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Эти силы можно написать так:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}; \quad \frac{\partial\Omega}{\partial y}$$

причем

$$\Omega = \frac{\mu}{r} + \frac{M}{\rho} - \frac{Mx}{a'^2}$$

Но

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{a'} + \frac{x}{a'^2} + \frac{1}{a'^3}\left(x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) + \frac{1}{a'^4}\left(x^3 - \frac{3}{2}xy^2\right) + \ldots$$

так что

$$\Omega = \frac{\mu}{r} + \frac{M}{a'^3}\left(x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) + \frac{M}{a'^4}\left(x^3 - \frac{3}{2}xy^2\right) + \ldots$$

Если бы пожелали отнести движение не к центру Земли, а к центру тяжести Земли и Луны, то вся разница была бы в том, что последний член был бы умножен на

$$\frac{T-L}{T+L}$$

тогда уравнения движения, как показано в §§ 38 и 39 у Эйлера, будут:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2n'\frac{dy}{dt} - n'^2 x = \frac{\partial\Omega}{\partial x}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2n'\frac{dy}{dt} - n'^2 y = \frac{\partial\Omega}{\partial y}$$

или, заметив, что $\frac{M}{a'^3} = n'^2$ и положив

$$R = \Omega + \frac{1}{2}n'^2(x^2 + y^2) = \frac{\mu}{r} + \frac{3}{2}n'^2 x^2 + \frac{n'^2}{a'}(x^3 - 3xy^2) \qquad (1)$$

мы напишем предыдущие уравнения так:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n'\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n'\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial y} \end{aligned} \tag{2}$$

Эти уравнения имеют интеграл, подобный интегралу живых сил. В самом деле, умножим их, соответственно, на

$$\frac{dx}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt}$$

и сложим, тогда получим

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial R}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial R}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{dR}{dt}$$

так как R зависит только от x и y, которые суть функции от t, явно же времени t не содержит, то, после интегрирования, имеем

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2R + C \tag{3}$$

где C есть произвольная постоянная. Этот интеграл называется интегралом Якоби.

Положим:

$$\frac{dx}{dt} = V\cos\varphi; \quad \frac{dy}{dt} = V\sin\varphi \tag{*}$$

тогда будет

$$V^2 = 2R + C \tag{3'}$$

Из уравнений (*) имеем

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\cos\varphi + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\varphi$$

и, на основании уравнений (2), будет

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial R}{\partial y}\sin\varphi \tag{4}$$

точно так же получим

$$V\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d^2x}{dt^2}\sin\varphi + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\varphi = -\frac{\partial R}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial R}{\partial y}\cos\varphi - 2n'$$

т. е.

$$V\left(\frac{d\varphi}{dt} + 2n'\right) = -\frac{\partial R}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial R}{\partial y}\cos\varphi \tag{5}$$

Дифференцируя равенства (4) и (5) и заменяя $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ их значениями (*), получим:

$$\frac{d^2V}{dt^2} - V\frac{d\varphi}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt} + 2n'\right) =$$
$$= V\left[\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}\sin^2\varphi\right]$$
$$V\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dV}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt} + n'\right) = \tag{6}$$
$$= V\left[-\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}\sin\varphi\cos\varphi\right]$$

Равенства эти нам понадобятся в дальнейшем.

§ **15.** Положим, что для уравнений (2) получено решение, содержащее две произвольные постоянные. Это может быть достигнуто отыскивая решения вида

$$x = \sum a_i \cos i\,(t + \gamma) = x_0$$
$$y = \sum b_i \sin i\,(t + \gamma) = y_0$$

по методе неопределенных коэффициентов. Такое решение будет содержать в себе члены, представляющие вариацию и параллактическое неравенство.

Требуется видоизменить и дополнить это решение так, чтобы вошло еще две произвольные постоянные, как это должно быть в общем интеграле.

Обозначим эти добавочные члены, соответственно, через ξ_1 и η_1 и предположим, что они настолько малы, что можно пренебречь их вторыми и высшими степенями, и будем в них рассматривать только те члены, которые заключают множителем одну из произвольных постоянных. Мы обозначим ее через ε_1 и положим:

$$\xi_1 = \varepsilon_1 \xi$$
$$\eta_1 = \varepsilon_1 \eta$$

причем ε_1 есть малая величина, второй и высшими степенями которой пренебрегаем, решения x_0 и y_0 примем соответствующими значению $\varepsilon_1 = 0$. В таком случае, как это видно из уравнений (2) предыдущего параграфа, неизвестные ξ и η будут определяться уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2n'\frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial^2 R_0}{\partial x_0^2}\cdot\xi + \frac{\partial^2 R_0}{\partial x_0\,\partial y_0}\cdot\eta + X_0\\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2n'\frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial^2 R_0}{\partial x_0\,\partial y_0}\cdot\xi + \frac{\partial^2 R_0}{\partial y_0^2}\cdot\eta + Y_0\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

причем предположено, что в выражении производных функции R вместо x и y подставлены их выражения x_0 и y_0 в функции времени t, что для ясности и обозначено приписав этим буквам значок $(_0)$; X_0 и Y_0 представляют известные функции x, y и t, которые добавлены, чтобы учесть одновременно и влияние тех возмущающих сил, которые не доставляются функцией R; предполагается также, что и в них сделана сказанная замена. Таким образом надо считать, что

$$\frac{\partial^2 R_0}{\partial x_0^2}, \quad \frac{\partial^2 R_0}{\partial y_0^2}, \quad \frac{\partial^2 R_0}{\partial x_0\, \partial z_0}, \quad X_0, \; Y_0$$

суть известные функции времени.

Величины x_0 и y_0 удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{dt^2} - 2n' \frac{dy_0}{dt^2} &= \frac{\partial R_0}{\partial x_0} \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} + 2n' \frac{dx_0}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial y_0} \end{aligned} \tag{2}$$

Выяснив смысл уравнений (1) и (2), мы в дальнейшем, для простоты письма, будем значок $(_0)$ опускать.

Умножим уравнения (1), соответственно, на $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, уравнения (2) на $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ и сложим все вместе, тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2\xi}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{d\xi}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{d\eta}{dt} &= \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial x\, \partial y}\frac{dy}{dt}\right)\xi \\ &+ \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x\, \partial y}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}\frac{dy}{dt}\right)\eta + \frac{\partial R}{\partial x} \cdot \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{d\eta}{dt} + X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial x\, \partial y}\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 R}{\partial x\, \partial y}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial y} \end{aligned}$$

ибо, по предположению, время t входит в состав функции R лишь поскольку оно содержится в переменных x и y, поэтому предыдущее уравнение интегрируется, и мы получаем

$$\frac{dx}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x}\xi + \frac{\partial R}{\partial y}\eta + T \tag{3}$$

причем

$$T = \int \left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt}\right) dt$$

и постоянную произвольную мы относим к функции T.

Положим теперь:

$$\begin{aligned}\xi &= v\cos\varphi - w\sin\varphi \\ \eta &= v\sin\varphi + w\cos\varphi\end{aligned} \tag{4}$$

вместе с тем мы имели:

$$\frac{dx}{dt} = V\cos\varphi;\quad \frac{dy}{dt} = V\sin\varphi \tag{5}$$

подставляя в уравнение (3) вместо $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ их значения (5), а вместо $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ их значения, следующие из (4), получим

$$\begin{aligned}V\left(\frac{dv}{dt} - w\frac{d\varphi}{dt}\right) &= \left(\frac{\partial R}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial R}{dy}\sin\varphi\right)v \\ &+ \left(-\frac{\partial R}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial R}{\partial x}\cos\varphi\right)w + T\end{aligned}$$

но

$$\frac{\partial R}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial R}{\partial y}\sin\varphi = \frac{dV}{dt}$$

$$-\frac{\partial R}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial R}{\partial y}\cos\varphi = V\left(\frac{d\varphi}{dt} + 2n'\right)$$

как указывают уравнения (4) и (5) § 15, поэтому будет

$$V\left(\frac{dv}{dt} - w\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{dV}{dt}v + V\left(\frac{d\varphi}{dt} + 2n'\right)w + T$$

иначе

$$V\frac{dv}{dt} - \frac{dV}{dt}v = 2wV\left(\frac{d\varphi}{dt} + n'\right) + T \tag{6}$$

откуда следует

$$\frac{v}{V} = \int \frac{2}{V}\left(\frac{d\varphi}{dt} + n'\right)w\,dt + \int \frac{T}{V^2}dt \tag{6'}$$

Значит, когда w известно, то v найдется, причем в правую часть этого равенства входит произвольная постоянная; после простого дифференцирования мы имеем:

$$\begin{aligned}\cos\varphi\frac{d\xi}{dt} + \sin\varphi\frac{d\eta}{dt} &= \frac{dv}{dt} - w\frac{d\varphi}{dt} \\ -\sin\varphi\frac{d^2\xi}{dt^2} + \cos\varphi\frac{d^2\eta}{dt^3} &= \frac{d^2w}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt}\frac{d\varphi}{dt} - w\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + v\frac{d^2\varphi}{dt^2}\end{aligned} \tag{7}$$

Умножив дифференциальные уравнения (1), соответственно, на $-\sin\varphi$, $\cos\varphi$ и сложив, получаем

$$-\sin\varphi\frac{d^2\xi}{dt^2}+\cos\varphi\frac{d^2\eta}{dt^2}+2n'\left(\cos\varphi\frac{d\xi}{dt}+\sin\varphi\frac{d\eta}{dt}\right)=$$
$$=\left(-\frac{\partial^2R}{\partial x^2}\sin\varphi+\frac{\partial^2R}{\partial x\,\partial y}\cos\varphi\right)\xi$$
$$+\left(-\frac{\partial^2R}{\partial x\,\partial y}\sin\varphi+\frac{\partial^2R}{\partial y^2}\cos\varphi\right)\eta-X\sin\varphi+Y\cos\varphi$$

по подстановке выражений (7) имеем

$$\frac{d^2w}{dt^2}+2\frac{dv}{dt}\frac{d\varphi}{dt}-w\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+v\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2n'\left(\frac{dv}{dt}-w\frac{d\varphi}{dt}\right)=$$
$$=v\left[-\frac{\partial^2R}{\partial x^2}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial^2R}{\partial x\,\partial y}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+\frac{\partial^2R}{\partial y^2}\sin\varphi\cos\varphi\right] \tag{8}$$
$$+w\left[\frac{\partial^2R}{\partial x^2}\sin^2\varphi-2\frac{\partial^2R}{\partial x\,\partial y}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial^2R}{\partial y^2}\cos^2\varphi\right]-X\sin\varphi+Y\cos\varphi$$

Но из уравнения (6) следует

$$\frac{dv}{dt}=\frac{v}{V}\frac{dV}{dt}+2\left(\frac{d\varphi}{dt}+n'\right)w+\frac{T}{V} \tag{6''}$$

заменив в уравнении (8) величину $\frac{dv}{dt}$ ее значением, следующим из уравнения (6''), получим

$$\frac{d^2w}{dt^2}+v\left[\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{2}{V}\frac{dV}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}+n'\right)\right]$$
$$+w\left[4\left(\frac{d\varphi}{dt}+n'\right)^2-\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-2n'\frac{d\varphi}{dt}\right]+2\left(\frac{d\varphi}{dt}+n'\right)\frac{T}{V}=$$
$$=v\left[-\frac{\partial^2R}{\partial x^2}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial^2R}{\partial x\,\partial y}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+\frac{\partial^2R}{\partial y^2}\sin\varphi\cos\varphi\right]$$
$$+w\left[\frac{\partial^2R}{\partial x^2}\sin^2\varphi-2\frac{\partial R}{\partial x\,\partial y}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial^2R}{\partial y^2}\cos^2\varphi\right]-X\sin\varphi+\cos\varphi$$

но, на основании второго из равенств (6) § 15, члены, содержащие v, пропадают и остается уравнение, содержащее только неизвестную w:

$$\frac{d^2w}{dt^2}+w\left[3\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+6n'\frac{d\varphi}{dt}+4n'-\frac{\partial^2R}{\partial x^2}\sin^2\varphi\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial^2R}{\partial x\,\partial y}\sin\varphi\cos\varphi-\frac{\partial^2R}{\partial y^2}\cos^2\varphi\right]=-2\left(\frac{d\varphi}{dt}+n'\right)\frac{T}{V}-X\sin\varphi+Y\cos\varphi$$

но, так как

$$\cos\varphi = \frac{1}{V}\frac{dx}{dt}; \quad \sin\varphi = \frac{1}{V}\frac{dy}{dt}$$

и

$$\frac{d\varphi}{dt} + 2n' = \frac{1}{V}\left(-\frac{\partial R}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial R}{\partial y}\cos\varphi\right)$$

то коэффициент при w есть

$$\frac{3}{V^4}\left(\frac{\partial R}{\partial x}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{dx}{dt}\right)^2 - 6\frac{n'}{V^2}\left(-\frac{\partial R}{\partial x}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{dx}{dt}\right) + 4n'^2$$
$$-\frac{1}{V^2}\left\{\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\} = P(t)$$

т. е. известная функция времени t, и когда x и y будут заменены их выражениями

$$x = \sum a_i \cos i(t + \gamma)$$
$$y = \sum b_i \sin i(t + \gamma)$$

то функция $P(t)$ примет вид

$$P(t) = \sum A_i \cos i(t + \gamma)$$

причем коэффициенты A_i будут известные числа; поэтому, опуская члены X и Y, происходящие от возмущающих сил, которые в основные уравнения § 14 не включены, мы, для определения w, будем иметь уравнение вида

$$\frac{d^2w}{dt^2} + w\left[A_0 + A_1\cos(t+\gamma) + A_2\cos 2(t+\gamma) + \ldots\right] = 0 \qquad (9)$$

т. е. уравнение того вида, который мы имели в § 13, в котором и показан способ его решения, когда величины A_1, A_2, ... малы по сравнению с A_0. После того как величина w будет найдена, величина v находится по уравнению (6').

Уравнение (9) имеет, как видно, весьма важное значение в теории Луны. В § 13 изложен простейший способ его решения при малых значениях A_1, A_2, ...; возвращаясь к этому способу, мы видим, что все дело сводится к нахождению такого значения величины k, при котором система уравнений для определения коэффициентов c_i, c_{-i} имеет решение, отличное от нуля, а это требует, чтобы определитель системы равнялся нулю. Определитель этот будет некоторой функцией буквы k, но, как видно, этот определитель $\Delta(k)$ состоит из бесконечного числа строк и столбцов, и уравнение

$$\Delta(k) = 0$$

есть именно то, которое Эйлер «составить не отважился». Адамс и Хилль его составили, дали способ его развития независимо один от другого и вычислили корень k с 15 десятичными знаками, но теория эта слишком сложна, чтобы найти здесь место полностью, ее надо искать в сочинениях по небесной механике и в собрании сочинений Адамса («The Scientific Papers of John Couch Adams») или Хилля («The Collected Mathematical Works of George William Hill»), здесь же мы ограничимся простейшими элементами этой теории.

§ **16.** Уравнение

$$\frac{d^2w}{dt^2} + w\left[A_0 + A_1 \cos\tau + \gamma + A_2 \cos 2(\tau + \gamma) + \ldots\right] = 0 \qquad (1)$$

встречается не только в теории Луны, но и во многих других прикладных вопросах, поэтому мы остановимся на этом уравнении несколько подробнее.

Очевидно, что без ущерба общности мы можем положить:

$$\tau + \gamma = 2t$$

$$4A_0 = n^2; \quad 4A_1 = 2q_1; \quad 4A_2 = 2q_2$$

тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^2w}{dt^2} + w(n^2 + 2q_1 \cos 2t + 2q_2 \cos 4t + \ldots) = 0 \qquad (2)$$

Начнем с простейшего случая, когда

$$q_1 = \varepsilon, \quad q_2 = q_3 = \ldots = 0$$

так что наше уравнение будет вида

$$\frac{d^2w}{dt^2} + w(n^2 + 2\varepsilon \cos 2t) = 0 \qquad (3)$$

причем мы предположим, что величина ε малая, так что, разлагая w по степеням ε, достаточно взять небольшое число членов.

За начальные условия примем:

$$\text{при } t = 0 \text{ должно быть } w = 1; \quad \frac{dw}{dt} = 0$$

Обычный способ разложения был бы такой: полагаем

$$w = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon^3\varphi_3 + \ldots$$

подставляем это выражение в уравнение (3), собираем члены с одинаковыми степенями ε и приравниваем каждый из них в отдельности нулю, тогда получаем для определения неизвестных функций $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ систему:

$$\begin{aligned} &\varphi_0'' + n^2\varphi_0 = 0 \\ &\varphi_1'' + n^2\varphi_1 + 2\varepsilon\varphi_0 \cos 2t = 0 \\ &\varphi_2'' + n^2\varphi_2 + 2\varepsilon\varphi_1 \cos 2t = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Совершенно так же получаем начальные условия:

$$\begin{aligned} &\varphi_0(0) = 1;\ \varphi_0'(0) = 0 \\ &\varphi_1(0) = 0;\ \varphi_1'(0) = 0 \\ &\varphi_2(0) = 0;\ \varphi_2'(0) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Первое уравнение (4) и первое из начальных условий (5) дает

$$\varphi_0 = \cos t \tag{6}$$

после чего второе из уравнений (4) будет

$$\varphi_1'' + n^2\varphi_1 = -\varepsilon\left[\cos(n+2)t + \cos(n-2)t\right]$$

общий интеграл этого уравнения, обозначая через C_1 и D_1 произвольные постоянные, есть

$$\varphi_1 = C_1 \cos nt + D_1 \sin nt$$
$$+ \varepsilon\left[\frac{1}{(n+2)^2 - n^2}\cos(n+2)t - \frac{1}{n^2-(n-2)^2}\cos(n-2)t\right]$$

и, на основании начальных условий, будет:

$$C_1 = -\varepsilon\left[\frac{1}{(n+2)^2 - n^2} - \frac{1}{n^2-(n-2)^2}\right]$$
$$D_1 = 0$$

и мы, при само собою понятном обозначении, получим

$$\varphi_1 = a_1 \cos nt + \alpha_1 \cos(n+2)t - \beta_1 \cos(n-2)t \tag{7}$$

Таким образом третье из уравнений (4) будет

$$\begin{aligned}\varphi_2'' + n^2\varphi_2 &= -[a_1\cos nt + \alpha_1\cos(n+2)t - \beta_1\cos(n-2)t]\cos 2t = \\ &= -a_1[\cos(n+2)t + \cos(n-2)t] - \alpha_1[\cos(n+4)t + \cos nt] \\ &\quad + \beta_1[\cos nt + \cos(n-4)t]\end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}\varphi_2'' + n^2\varphi_2 &= \beta_1\cos(n-4)t - a_1\cos(n-2)t \\ &\quad + (\beta_1 - \alpha_1)\cos nt - a_1\cos(n+2)t - \alpha_1\cos(n+4)t\end{aligned}$$

Так как β_1 не равно α_1, то в составе общего интеграла этого последнего уравнения будет член вида

$$ht\sin nt$$

происходящий от члена $(\beta_1-\alpha_1)\cos nt$ правой части уравнения. От этого члена произойдут члены подобного же вида, т. е. содержащие время t вне знаков синуса и косинуса и в составе функций $\varphi_3 \ldots$ Все эти члены неопределенно возрастают с течением времени, и развитое таким образом решение является совершенно непригодным.

В нашем случае, т. е. когда величина ε весьма малая, можно применить способ разложения, указанный в моей статье «О применении способа последовательных приближений к нахождению решения некоторых дифференциальных уравнений колебательного движения» (Изв. Акад. Наук, 1933), развивая в ряд совместно как частоту колебаний, так и самый вид решения. По этому способу полагаем:

$$\begin{aligned}n^2 &= \lambda^2 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + c_3\varepsilon^3 + \ldots \\ w &= \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon^3\varphi_3 + \ldots\end{aligned} \tag{8}$$

причем $c_1, c_2, c_3, \ldots$ — неопределенные постоянные коэффициенты $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ — неизвестные функции времени t.

Подставив выражения (8) в уравнение (3), имеем

$$\begin{aligned}&(\varphi_0'' + \varepsilon\varphi_1'' + \varepsilon^2\varphi_2'' + \varepsilon^3\varphi_3'' + \ldots) \\ &+ (\lambda^2 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + c_3\varepsilon^3 + \ldots)(\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \ldots) \\ &+ 2\varepsilon(\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \ldots)\cos 2t = 0\end{aligned}$$

и мы получаем систему:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_0'' + \lambda^2\varphi_0 = 0 \\
&\varphi_1'' + \lambda^2\varphi_1 + c_1\varphi_0 + 2\cos 2t\cdot\varphi_0 = 0 \\
&\varphi_2'' + \lambda^2\varphi_2 + c_2\varphi_0 + c_1\varphi_1 + 2\cos 2t\cdot\varphi_1 = 0 \\
&\varphi_3'' + \lambda^2\varphi_3 + c_3\varphi_0 + c_2\varphi_1 + c_1\varphi_2 + 2\cos 2t\cdot\varphi_2 = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{9}
$$

и попрежнему начальные условия:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_0(0) = 1;\ \varphi_0'(0) = 0 \\
&\varphi_1(0) = 0;\ \varphi_1'(0) = 0 \\
&\varphi_2(0) = 0;\ \varphi_2'(0) = 0 \\
&\varphi_3(0) = 0;\ \varphi_3'(0) = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Первое уравнение дает на основании первого начального условия:

$$\varphi_0 = \cos\lambda t \tag{11}$$

после чего второе уравнение принимает вид

$$\varphi_1'' + \lambda^2\varphi_1 = -c_1\cos\lambda t - \cos(\lambda - 2)t - \cos(\lambda + 2)t$$

Очевидно, что взяв

$$c_1 = 0 \tag{12}$$

мы в выражении φ_1 членов, содержащих время t вне знаков синуса и косинуса, не получим и будем иметь, обозначая через A_1 и B_1 — постоянные произвольные:

$$\varphi_1 = A_1\cos\lambda t + B_1\sin\lambda t - \alpha_1\cos(\lambda - 2)t + \beta_1\cos(\lambda + 2)t$$

причем положено:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\lambda^2 - (\lambda - 2)^2}, \quad \beta_1 = \frac{1}{(\lambda + 2)^2 - \lambda^2}$$

Начальные условия дают:

$$A_1 = \alpha_1 - \beta_1;\ B_1 = 0$$

так что будет

$$\varphi_1 = (\alpha_1 - \beta_1)\cos\lambda t - \alpha_1\cos(\lambda - 2)t + \beta_1\cos(\lambda + 2)t$$

Третье уравнение системы (9) будет

$$\varphi_2'' + \lambda^2\varphi_2 = -c_2\cos\lambda t - (\alpha_1 - \beta_1)\cos(\lambda - 2)t - (\alpha - \beta_1)\cos(\lambda + 2)t$$
$$+ \alpha_1\cos\lambda t + \alpha_1\cos(\lambda - 4)t$$
$$- \beta_1\cos\lambda t - \beta_1\cos(\lambda + 4)t$$

Чтобы время t не выходило из-под знака синуса, надо величину c_2 взять так, чтобы член с $\cos\lambda t$ в правой части пропадал, т. е. чтобы было

$$-c_2 + \alpha_1 - \beta_1 = 0$$

откуда

$$c_2 = (\alpha_1 - \beta_1) \tag{13}$$

тогда будет

$$\varphi_2 = A_2\cos\lambda t + B_2\sin\lambda t + \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\lambda^2 - (\lambda - 2)^2}\cos(\lambda - 2)t$$
$$+ \frac{\alpha_1 - \beta_1}{(\lambda + 2)^2 - \lambda^2}\cos(\lambda + 2)t + \frac{\alpha_1}{\lambda_2 - (\lambda - 4)^2}\cos(\lambda - 4)t$$
$$- \frac{\beta_1}{(\lambda + 4)^2 - \lambda^2}\cos(\lambda + 4)t$$

и начальные условия дают:

$$A_2 = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\lambda^2 - (\lambda - 2)^2} - \frac{\alpha_1 - \beta_1}{(\lambda + 2)^2 - \lambda^2} - \frac{\alpha_1}{\lambda^2 - (\lambda - 4)^2} + \frac{\beta_1}{(\lambda + 4)^2 - \lambda^2}$$
$$B_2 = 0$$

Таким образом будет

$$\varphi_2 = A_2\cos\lambda t + (\alpha_1 - \beta_1)\left[\frac{\cos(\lambda - 2)t}{\lambda^2 - (\lambda - 2)^2} - \frac{\cos(\lambda + 2)t}{(\lambda + 2)^2 - \lambda^2}\right]$$
$$+ \frac{\alpha_1}{\lambda^2 - (\lambda - 4)^2}\cos(\lambda - 4)t - \frac{\beta_1}{(\lambda + 4)^2 - \lambda^2}\cos(\lambda + 4)t \tag{14}$$

причем значение λ определяется уравнением

$$n^2 = \lambda^2 - (\alpha_1 - \beta_1)\varepsilon^2$$

т. е., ограничиваясь второю степенью ε,

$$\lambda^2 = n^2 + (\alpha_1' - \beta_1')\varepsilon^2$$

или

$$\lambda = n + \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha_1' - \beta_1'}{n}\varepsilon^2$$

причем α_1' и β_1' определяются по замене в выражениях α_1 и β_1 величины λ ее приближенным значением n, т. е.

$$\alpha_1' = \frac{1}{n^2 - (n - 2)^2}; \qquad \beta_1' = \frac{1}{(n + 2)^2 - n^2}$$

Совершенно так же можем продолжать дальше, определяя коэффициенты $c_3, c_4, \ldots$ из условия, чтобы в уравнениях системы (9) члены с $\cos \lambda t$ пропадали. Для каждого приближения соответствующие значения λ определяются уравнениями:

$$n^2 = \lambda^2 + c_2 \varepsilon^2 + c_3 \varepsilon^3$$
$$n^2 = \lambda^2 + c_2 \varepsilon^2 + c_3 \varepsilon^3 + c_4 \varepsilon^4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Здесь надо заметить, что неизвестная λ входит и в величины $c_2, c_2, c_4, \ldots$ и предыдущие уравнения надо решать разлагая λ в ряд по степеням ε, ограничиваясь при разложении тою же степенью буквы ε, как и в самих уравнениях.

Совершенно подобным образом можно найти такое решение:

$$w = \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \varepsilon^3 \psi_3 + \ldots$$

которое удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$\text{при } t = 0 \text{ должно быть } \psi(0) = 0; \ \psi'(0) = 1$$

Вся разница будет в том, что вместо косинусов войдут синусы тех же аргументов.

В том случае, когда требуется найти общий интеграл, надо найти оба решения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, указанные выше, — общий интеграл будет

$$w = A\varphi(t) + B\psi(t)$$

где A и B — произвольные постоянные.

§ **17.** Из предыдущего параграфа видно, что при малых значениях ε существует такое число λ, при котором предложенное уравнение имеет решение вида

$$\begin{aligned} w = h_0 \cos \lambda t + h_1 \cos(\lambda - 2)t + h_2 \cos(\lambda - 4)t + \ldots \\ + h_1 \cos(\lambda + 2)t + h_2 \cos(\lambda + 4)t + \ldots \end{aligned} \qquad (*)$$

поэтому естественно искать решение этого вида и для уравнения в общем случае

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + (n^2 + 2q \cos 2t) w = 0 \qquad (1)$$

Не делая пока никаких предположений о величине q, подставим выражение (*) в уравнение (1), получим для определения коэффициентов h_0, h_{-1}, h_{+1}, h_{-2}, h_2, . . . такую систему уравнений:

Аргументы	h_{-3}	h_{-2}	h_{-1}	h_0	h_1	h_2	h_3
. . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
$(\lambda-6)t$	$n^2-(\lambda-6)^2$	q					
$(\lambda-4)t$	q	$n^2-(\lambda-4)^2$	q				
$(\lambda-2)t$		q	$n^2-(\lambda-2)^2$	q			
λt			q	$n^2-\lambda^2$	q		
$(\lambda+2)t$				q	$n^2-(\lambda+2)^2$	q	
$(\lambda+4)t$					q	$n^2-(\lambda+4)^2$	q
$(\lambda+6)t$						q	$n^2-(\lambda+6)^2$
	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .

в которых выписаны лишь коэффициенты при неизвестных h_{-3}, h_{-2}, ... h_{-2}, а в левом столбце показаны аргументы косинусов, дающих соответствующее уравнение; так, напр., $\cos(\lambda-4)t$ дает уравнение

$$0 = qh_{-3} + [n^2-(\lambda-4)^4]\,h_{-2} + qh_{-1}$$

Таким образом получается бесконечная система уравнений с бесчисленным множеством неизвестных.

Эти уравнения можно написать иначе: разделим последовательно эти уравнения на:

$$\ldots -(\lambda-6)^2;\ -(\lambda-4)^4;\ -(\lambda-2)^2;\ -1;\ -(\lambda+2)^2;\ -(\lambda+4^2);\ldots$$

тогда наша система будет при том же условном начертании (см. табл. на стр. 211).

Левые части во всех этих уравнениях суть нули, поэтому, если бы число этих уравнений было конечное, хотя бы и сколь угодно большое, то чтобы эта система допускала решения, отличные от нуля, необходимо, чтобы определитель системы был равен нулю.

Обозначим этот определитель через $\Delta(\lambda, q)$, тогда для определения λ мы будем иметь уравнение

$$\Delta(\lambda, q) = 0 \qquad (2)$$

	h_{-3}	h_{-2}	h_{-1}	h_0	h_{+1}	h_2	h_3	
.	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	.
$0=$ ⋮	$1-\frac{n^2}{(\lambda-6)^2}$	$-\frac{q}{(\lambda-6)^2}$						⋮
$0=$ ⋮	$-\frac{q}{(\lambda-4)^2}$	$1-\frac{n^2}{(\lambda-4)^2}$	$-\frac{q}{(\lambda-4)^2}$					⋮
$0=$ ⋮		$-\frac{q}{(\lambda-2)^2}$	$1-\frac{n^2}{(\lambda-2)^2}$	$-\frac{q}{(\lambda-2)^2}$				⋮
$0=$ ⋮			q	$n^2-\lambda^2$	q			⋮
$0=$ ⋮				$-\frac{q}{(\lambda+2)^2}$	$1-\frac{n^2}{(\lambda+2)}$	$-\frac{q}{(\lambda+2)^2}$		⋮
$0=$ ⋮					$-\frac{q}{(\lambda+4)^2}$	$1-\frac{n^2}{(\lambda+4)^2}$	$-\frac{q}{(\lambda+4)^2}$	⋮
$0=$ ⋮						$-\frac{q}{(\lambda+6)^2}$	$1-\frac{n^2}{(\lambda+6)^2}$	⋮
	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	.

Примем, что это свойство относится и до того случая, когда число уравнений бесконечно большое, но всегда равно числу неизвестных. Весь вопрос теперь сведен к составлению и развитию определителя $\Delta(\lambda, q)$.

Заметим, во-первых, что когда

$$\lambda = 0 \quad \text{и} \quad q = 0$$

то будет

$$\begin{aligned}\Delta(0,\,0) &= \dots\left(1-\frac{n^2}{6^2}\right)\left(1-\frac{n^2}{4^2}\right)\left(1-\frac{n^2}{2^2}\right)\cdot n^2 \times \\ &\times\left(1-\frac{n^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{n^2}{4^2}\right)\left(1-\frac{n^2}{6^2}\right)\dots = \\ &= \left[n\left(1-\frac{n^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{n^2}{4^2}\right)\left(1-\frac{n^2}{6^2}\right)\dots\right]^2\end{aligned} \tag{3}$$

Но еще Эйлером дано следующее разложение:

$$\sin\alpha = \alpha\left(1-\frac{\alpha^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{9\pi^2}\right)\dots$$

Очевидно, что при $\alpha = \frac{n\pi}{2}$ мы получим

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{n\pi}{2}\left(1 - \frac{n^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{n^2}{4^2}\right)\left(1 - \frac{n^2}{6^2}\right) \tag{4}$$

следовательно будет

$$\Delta(0,0) = \frac{4}{\pi^2}\sin^2\frac{n\pi}{2} \tag{4'}$$

Положим, что $\lambda = \lambda_0$ есть какой-либо корень уравнения

$$\Delta(\lambda, q) = 0$$

тогда и величины

$$\ldots \lambda_0 - 2j;\ \ldots \lambda_0 - 6;\ \lambda_0 - 4;\ \lambda_0 - 2;\ \lambda_0 + 2;\ \lambda_0 + 4;$$
$$\lambda_0 + 6;\ \ldots \lambda_0 + 2j;\ \ldots$$

суть корни этого уравнения, ибо, обращаясь к первоначальной системе уравнений, мы видим, что замена, напр., величины λ на $\lambda - 2$ как бы перемещает все уравнения на одну строку выше; ясно, что от этого определитель их не изменяется, вместе с тем очевидно, что и величина $\lambda = -\lambda_0$ и величины

$$\ldots -(\lambda_0 - 2j);\ \ldots -(\lambda_0 - 4); -(\lambda_0 - 2);\ -(\lambda_0 + 2);$$
$$-(\lambda_0 + 4);\ \ldots -(\lambda_0 + 2j);\ \ldots$$

суть корни этого уравнения, так что полная система корней его есть

$$\ldots \pm(\lambda_0 - 2j);\ \ldots \pm(\lambda_0 - 4);\ \pm(\lambda_0 - 2);\ \lambda_0;$$
$$\pm(\lambda_0 + 2);\ \pm(\lambda_0 - 4);\ \ldots \pm(\lambda_0 + 2j)$$

т. е. та же самая, как и корней уравнения

$$\cos\pi\lambda - \cos\pi\lambda_0 = 0$$

иначе уравнения

$$\sin^2\frac{\pi\lambda_0}{2} - \sin^2\frac{\pi\lambda}{2} = 0$$

какова бы величина q ни была, следовательно должно быть

$$\Delta(\lambda, q) = B\left(\sin^2\frac{\pi\lambda_0}{2} - \sin^2\frac{\pi\lambda}{2}\right) = 0 \tag{5}$$

где B есть некоторая постоянная.

Но при $q = 0$ мы имеем, как то следует из самого уравнения (1),

$$\lambda_0 = n$$

с другой стороны, тогда из уравнения (5) будет

$$\Delta(\lambda, 0) = B\left(\sin^2\frac{n\pi}{2} - \sin^2\frac{\pi\lambda}{2}\right)$$

значит будет

$$\Delta(0, 0) = B\cdot\sin^2\frac{n\pi}{2}$$

следовательно, на основании равенства (4'), будет

$$B = \frac{4}{\pi^2} \tag{6}$$

Очевидно, что достаточно найти какой-либо один корень уравнения

$$\Delta(\lambda, q) = 0$$

чтобы по нему получить все остальные, пусть этот корень есть λ_0.

Положив в уравнении (5)

$$\lambda = 0$$

имеем равенство

$$\Delta(0, q) = B\sin^2\frac{\pi\lambda_0}{2} = \frac{4}{\pi^2}\sin^2\frac{\pi\lambda_0}{2} \tag{7}$$

но определитель $\Delta(0, q)$ есть

$$\Delta(0, q) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1-\frac{n^2}{6^2}, & -\frac{q}{6^2}, & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -\frac{q}{4^2}, & 1-\frac{n^2}{4^2}, & -\frac{q}{4^2}, & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & -\frac{q}{2^2}, & 1-\frac{n^2}{2^2}, & -\frac{q}{2^2}, & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & q, & n^2, & q, & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{q}{2^2}, & 1-\frac{n^2}{2^2}, & -\frac{q}{2^2}, & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{q}{4^2}, & 1-\frac{n^2}{4^2}, & -\frac{q}{4^2} & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{q}{6^2}, & 1-\frac{q^2}{6^2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Выносим в этом определителе диагональные члены за черту, разделяя соответствующую строку на этот член, получим

$$\Delta(0, q) = \ldots \left(1 - \frac{n^2}{6^2}\right)\left(1 - \frac{n^2}{4^2}\right)\left(1 - \frac{n^2}{2^2}\right) \times$$
$$\times n^2 \left(1 - \frac{n^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{n^2}{4^2}\right)\left(1 - \frac{n^2}{6^2}\right) \ldots D(q)$$

причем $D(q)$ есть показанный ниже определитель. На основании равенства (4), бесконечное произведение, стоящее множителем при $D(q)$, равно

$$\frac{4}{\pi^2} \cdot \sin^2 \frac{n\pi}{2}$$

таким образом имеем

$$\Delta(0, q) = \frac{4}{\pi^2} \cdot \sin^2 \frac{n\pi}{2} \cdot D(q) \tag{8}$$

Из этой формулы и равенства (7) следует

$$\frac{\sin^2 \frac{\pi\lambda_0}{2}}{\sin^2 \frac{n\pi}{2}} = D(q) \tag{9}$$

причем определитель $D(q)$ есть

$$D(q) = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, & -\frac{q}{6^2 - n^2}, & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{q}{4^2 - n^2}, & 1, & -\frac{q}{4^2 - n^2}, & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{q}{2^2 - n^2}, & 1, & -\frac{q}{2^2 - n^2}, & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{q}{n^2}, & 1, & \frac{q}{n^2}, & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{q}{2^2 - n^2}, & 1, & -\frac{q}{2^2 - n^2}, & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{q}{4^2 - n^2}, & 1, & -\frac{q}{4^2 - n^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{q}{6^2 - n^2}, & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Это и есть знаменитое уравнение Хилля.

Нетрудно видеть, что все изложенные рассуждения без всяких изменений приложимы и к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2w}{dt^2} + (n^2 + 2q_1\cos 2t + 2q_2\cos 4t + 2q_3\cos 6t + \ldots)w = 0 \quad (10)$$

вся разница будет только в том, что вместо определителя $D(q)$ будет стоять определитель

$$D(q_1, q_2, q_3, \ldots)$$

который равен

$$D(q_1, q_2, q_3, \ldots) = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, & -\frac{q_1}{6^2-n^2}, & -\frac{q_2}{6^2-n^2}, & -\frac{q_3}{6^2-n^2}, & \cdots & \cdots \\ -\frac{q_1}{4^2-n^2}, & 1, & -\frac{q_1}{4^2-n^2}, & -\frac{q_2}{4^2-n^2}, & -\frac{q_3}{4^2-n^2}, & \cdots \\ -\frac{q_2}{2^2-n^2}, & -\frac{q_1}{2^2-n^2}, & 1, & -\frac{q_1}{2^2-n^2}, & -\frac{q_2}{2^2-n^2}, & -\frac{q_3}{2^2-n^2} \\ -\frac{q_3}{n^2}, & -\frac{q_2}{n^2}, & -\frac{q_1}{n^2}, & 1, & -\frac{q_1}{n_2}, & -\frac{q_1}{n^2} \\ -\frac{q_4}{2^2-n^2}, & -\frac{q_3}{2^2-n^2}, & -\frac{q_2}{2^2-n^2}, & -\frac{q_1}{2^2-n^2}, & 1, & -\frac{q_1}{2^2-n^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

и уравнение Хилля будет

$$\frac{\sin^2\frac{\pi\lambda_0}{2}}{\sin^2\frac{n\pi}{2}} = D(q_1, q_2, q_3, \ldots) \quad (11)$$

После того как «характеристическое» значение λ_0 найдено, вычисление коэффициентов h_j, h_{j-j}, из которых одному можно приписать произвольное значение, не представляет никаких затруднений, и мы на нем останавливаться не будем.

Таким образом вычисление величины λ_0 сведено к вычислению лишь одного определителя D, в который буква λ *не входит*, чем и достигнуто громадное упрощение — можно сказать, самая возможность решения уравнения

$$\Delta(\lambda, q) = 0 \quad (2)$$

и в общем случае уравнения

$$\Delta(\lambda, q_1, q_2, q_3, \ldots) = 0 \tag{2'}$$

В самом деле, представим себе, что мы бы не имели уравнения Хилля, как бы тогда пришлось искать корень уравнения (2) или (2')?

Очевидно, прежде всего пришлось бы последовательно придавать величине λ значения в возрастающем порядке

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_k, \lambda_{k+1}$$

и вычислять соответствующие значения

$$\Delta(\lambda_1); \ \Delta(\lambda_2); \ \Delta(\lambda_3); \ \ldots \Delta(\lambda_k); \ \Delta(\lambda_{k+1})$$

до тех пор, пока, напр., величины $\Delta(\lambda_k)$ и $\Delta(\lambda_{k+1})$ получились бы разных знаков и мы могли бы сказать, что

$$\lambda_k < \lambda_0 < \lambda_{k+1}$$

после чего подобным же процессом пришлось бы сближать пределы.

Ясно, что при этом пришлось бы вычислять множество значений определителей более сложных, нежели D, и длиннота вычисления сделала бы его практически невыполнимым.

Благодаря же уравнению Хилля надо вычислить лишь один определитель D.

Вот это-то уравнение Хилля и заменило то уравнение, равносильное характеристическому, измененному присутствием членов с переменными коэффициентами, а также членов не линейных, которое Эйлер составлять «не отваживался». В нашем изложении мы не следовали мемуару самого Хилля, а несколько видоизменили изложение, данное Дж. Дарвином в его лекциях по теории Луны, вошедших в том V собрания его сочинений.

§ **18.** В этих же лекциях Дж. Дарвин указывает и еще одну методу вычисления определителя D, связанную с разысканием периодических решений уравнения

$$\frac{d^2w}{dt^2} + (n^2 + q_1 \cos 2t + q_2 \cos 4t + \ldots)w = 0 \tag{1}$$

Так как это уравнение от замены t на $t + \pi$ остается без перемены, то если

$$w = F(t) \tag{2}$$

есть его решение, то и

$$w = F(t + \pi) \tag{2'}$$

есть также решение этого уравнения.

Положим, что $\varphi(t)$ есть такое решение уравнения (1), что при $t=0$

$$\varphi(0)=1 \quad \text{и} \quad \varphi'(0)=0 \tag{3}$$

положим также, что $\psi(t)$ есть такое решение уравнения (1), что при $t=0$

$$\psi(0)=0; \quad \psi'(0)=1 \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что $\varphi(t)$ есть четная функция t, $\psi(t)$ есть функция нечетная и их производные — наоборот, так что

$$\begin{aligned} \varphi(-t)&=\varphi(t); & \varphi'(t)&=-\varphi'(t) \\ \psi(t)&=-\psi(t); & \psi'(t)&=\psi'(t) \end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом общий интеграл уравнения (1) есть

$$w=A\varphi(t)+B\psi(t) \tag{6}$$

причем A и B — произвольные постоянные. Так как $\varphi(t+\pi)$ и $\psi(t+\pi)$ — также решения уравнения (1), то они должны получаться из общего интеграла, приписывая в нем постоянным производным A и B некоторые частные значения; таким образом должно быть:

$$\begin{aligned} \varphi(t+\pi)&=\alpha\varphi(t)+\beta\psi(t) \\ \psi(t+\pi)&=\gamma\varphi(t)+\delta\psi(t) \end{aligned} \tag{7}$$

причем α, β, γ, δ имеют вполне определенные значения.

Положим, что имеется возможность выбрать отношение $A:B$, так что

$$F(t+\pi)=\mu F(t) \tag{8}$$

причем μ есть некоторое постоянное число.

Подставив вместо $F(t+\pi)$ и $F(t)$ их выражения через φ и ψ, получим

$$A\varphi(t+\pi)+B\psi(t+\pi)=\mu[A\varphi(\tau)+B\psi(\tau)] \tag{9}$$

Подставив вместо $\varphi(t+\pi)$ и $\psi(t+\pi)$ их выражения (7), получим

$$A[\alpha\varphi(\tau)+\beta\psi(t)]+B[\gamma\varphi(t)+\delta\psi(t)]=\mu[A\varphi(t)+B\psi(t)]$$

т. е.

$$[A(\alpha-\mu)+B\gamma]\psi(t)+[AB+B(\delta-\mu)]\psi(t)=0$$

и так как это равенство должно иметь место при всяком значении t, то должно быть:

$$\begin{aligned} A(\alpha-\mu)+B\gamma&=0 \\ A\beta+B(\delta-\mu)&=0 \end{aligned}$$

откуда следует

$$(\alpha-\mu)(\delta-\mu)-\beta\gamma=0$$

т. е.

$$\mu^2-(\alpha+\delta)\mu+\alpha\delta-\beta\mu=0 \tag{10}$$

Этим уравнением величина μ определяется через постоянные α, β, γ, δ. Это уравнение может быть упрощено. Обозначим через $\Theta(t)$ — величину

$$n^2+2q_1\cos 2t+2q_2\cos 4t+\ldots;$$

очевидно, что φ и ψ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\Theta(t)\cdot\varphi=0$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}+\Theta(t)\psi=0$$

отсюда следует

$$\varphi\cdot\frac{d^2\psi}{dt^2}-\varphi\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}=0$$

или, по интегрировании,

$$\varphi\cdot\psi'-\psi\varphi'=C=\text{постоянной}$$

Но так как мы имеем

$$\varphi(0)=1;\ \psi(0)=0;\ \varphi'(0)=0;\ \psi'(0)=1$$

то постоянная $C=1$ и предыдущее уравнение будут

$$\varphi(t)\cdot\psi'(t)-\psi(t)\cdot\varphi'(t)=1 \tag{11}$$

Полагая $t=0$ в уравнениях (7) и следующих из них, дифференцированием получаем:

$$\begin{aligned}
\varphi(\pi)&=\alpha\varphi(0)+\beta\psi(0)=\alpha\\
\psi(\pi)&=\gamma\varphi(0)+\delta\psi(0)=\gamma\\
\varphi'(\pi)&=\alpha\varphi'(0)+\beta\psi'(0)=\beta\\
\psi'(\pi)&=\gamma\varphi'(0)+\delta\varphi'(0)=\delta
\end{aligned}$$

Отсюда, на основании (11), получаем

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1$$

и уравнение (10) принимает вид

$$\mu^2-(\alpha+\delta)\mu+1=0 \tag{12}$$

иначе

$$\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{\mu}\right)=\frac{1}{2}(\alpha+\delta) \tag{12'}$$

Полагая теперь в уравнениях (7) и следующих из них дифференцированием $t = -\frac{1}{2}\pi$, имеем:

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \alpha\varphi\left(-\frac{1}{2}\pi\right) + \beta\psi\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = \alpha\varphi\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \beta\psi\left(\frac{1}{2}\pi\right)$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \gamma\varphi\left(-\frac{1}{2}\pi\right) + \delta\psi\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = \gamma\varphi\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \delta\psi\left(\frac{1}{2}\pi\right)$$

$$\varphi'\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \alpha\varphi'\left(-\frac{1}{2}\pi\right) + \beta\psi'\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -\alpha\varphi'\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \beta\psi'\left(\frac{1}{2}\pi\right)$$

$$\psi'\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \gamma\varphi'\left(-\frac{1}{2}\pi\right) + \delta\psi'\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -\gamma\varphi'\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \delta\psi'\left(\frac{1}{2}\pi\right)$$

Отсюда следуют:

$$\frac{\varphi\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\psi\left(\frac{1}{2}\pi\right)} = \frac{\beta}{\alpha - 1} = \frac{\delta + 1}{\gamma}; \qquad \frac{\psi'\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{2}\pi\right)} = \frac{\alpha + 1}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta - 1}$$

$$\frac{\varphi\left(\frac{1}{2}\pi\right)\psi'\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\psi\left(\frac{1}{2}\pi\right)\varphi'\left(\frac{1}{2}\pi\right)} = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} = \frac{\delta + 1}{\delta - 1} \tag{13}$$

но так как

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\pi\right)\cdot\psi'\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \varphi'\left(\frac{1}{2}\pi\right)\psi\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1$$

то мы имеем

$$\alpha = \delta = \frac{1}{2}(\alpha + \delta) = \varphi\left(\frac{1}{2}\pi\right)\cdot\psi'\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \varphi'\left(\frac{1}{2}\pi\right)\psi\left(\frac{1}{2}\pi\right) \tag{13'}$$

и уравнение (12′) может быть написано в пяти различных формах:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right) &= \varphi(\pi) = \psi'(\pi) = \varphi\left(\frac{1}{2}\pi\right)\psi'\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \varphi'\left(\frac{1}{2}\pi\right)\varphi\left(\frac{1}{2}\pi\right) \\ &= 1 + 2\varphi'\left(\frac{1}{2}\pi\right)\cdot\psi\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2\varphi\left(\frac{1}{2}\pi\right)\psi'\left(\frac{1}{2}\pi\right) - 1\end{aligned} \tag{14}$$

Остается установить зависимость между числом μ и величиною λ_0, определенной в предыдущем параграфе как корень некоторого бесконечного определителя.

Предыдущее решение может быть написано в виде

$$W = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} [A_j \cos(\lambda_0 + 2j)t + B_j \sin(\lambda_0 + 2j)t]$$

причем

$$A_j : B_j = -\cos\varepsilon : \sin\varepsilon$$

Решение $\varphi(t)$, как мы видели, представляет четную функцию t, и притом

$$\varphi(0) = 1; \ \varphi'(0) = 0$$

следовательно, чтобы получить из равенства (10) решение $\varphi(t)$, надо положить

$$B_j = 0 \text{ при всяком целом } j$$

и

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_j = 1$$

Тогда будет

$$\varphi(\pi) = \sum A_j \cos(\lambda_0 + 2j)\pi = \cos\lambda_0\pi \cdot \sum A_j = \cos\lambda_0\pi \qquad (15)$$

Подобным же образом покажем, что

$$\psi'(\pi) = \cos(\pi\lambda_0) \qquad (16)$$

после этого из уравнения (11), на основании равенства

$$\cos(\pi\lambda_0) = \varphi(\pi) = \psi'(\pi)$$

получим:

$$\cos^2\frac{1}{2}\pi\lambda_0 = \varphi\left(\frac{1}{2}\pi\right)\psi'\left(\frac{1}{2}\pi\right); \qquad \sin^2\frac{1}{2}\pi\lambda_0 = -\frac{1}{2}\varphi'\left(\frac{1}{2}\pi\right)\psi\left(\frac{1}{2}\pi\right)$$

Но мы имели

$$\sin^2\frac{1}{2}\pi\lambda_0 = \sin^2\frac{1}{2}\pi n \cdot D$$

где D есть указанный в § 17 определитель.

Отсюда следует

$$D = -\frac{\varphi'\left(\frac{1}{2}\pi\right)\psi\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\sin^2\frac{1}{2}\pi n} \qquad (17)$$

Таким образом значение определителя D может быть получено через частные решения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ предложенного уравнения, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi(0) = 1, \ \varphi'(0) = 0; \ \psi(0) = 0, \ \psi'(0) = 1$$

Когда величины $q_1, q_2, \ldots$ небольшие и не требуется особенно большой точности, как это имеет место в технических вопросах, то решения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ могут быть найдены численным интегрированием.

§ **19.** Мы развивали в предыдущих параграфах разного рода приближенные решения дифференциальных уравнений, пользуясь рядами, не обращая внимания на сходимость этих рядов, на условия возможности их дифференцирования и пр. Спрашивается, каким образом убеждаться, что получаемые таким образом решения удовлетворяют предложенным уравнениям с тою степенью точности, которая в том вопросе, к которому дифференциальное уравнение относится, требуется.

Ответ на этот вопрос дается в статье Адамса — «Numerical Developments in the Lunar Theory».

Для уравнений, приведенных в § 4,

$$\frac{1}{r}\frac{d^2r}{dt^2} - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{f\mu}{r^3} = \frac{1}{2}n'^2 + \frac{3}{2}n'^2\cos 2(\theta - n't - \varepsilon)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{2}n'^2\sin 2(\theta - n't - \varepsilon')$$

Адамс, отбрасывая эпохи ε и ε' и выбрав a так, чтобы было

$$f\mu = n^2$$

положив

$$m = \frac{n'}{n} = 0.0748013$$

получает следующие решения:

$$\begin{aligned}\theta = nt &+ 0.01201\,13629\,5\sin 2(n-n')t\\ &+ 0.00004\,23732\,7\sin 4(n-n')t\\ &+ 0.00000\,02375\,7\sin 6(n-n')t\\ &+ 0.00000\,00015\,1\sin 8(n-n')t\\ &+ 0.00000\,00000\,1\sin 10(n-n')t\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} = {} & 1.00090\,73880\,5\\ &+ 0.00718\,64751\,6\cos 2(n-n')t\\ &+ 0.00004\,58428\,9\cos 4(n-n')t\\ &+ 0.00000\,03268\,6\cos 6(n-n')t\\ &+ 0.00000\,00024\,3\cos 8(n-n')\\ &- 0.00000\,00000\,3\cos 10(n-n')t\end{aligned}$$

и говорит: «. . . подстановка этих выражений в дифференциальные уравнения показывает, что эти уравнения удовлетворяются до 10-го или 11-го знака после запятой». Это значит, если все члены перенести в левую часть уравнений, то в этой части получатся суммы вида

$$\sum_1^5 a_j \cos 2j(n-n')t \quad \text{и} \quad \sum_1^5 b_j \sin 2j(n-n')t$$

и коэффициенты будут порядка

$$\alpha \cdot 10^{-10} \quad \text{или} \quad \alpha \cdot 10^{-11}$$

причем

$$1 \leqq \alpha < 10$$

Адамс этою точностью не довольствуется, составляет указанные в § 6 уравнения для «поправок» и развивает эти поправки в подобные же ряды, вычисляя коэффициенты с 16 десятичными знаками и определяя новые значения θ и r, подставляет их в заданные уравнения, и лишь при одном из членов получает невязку в 12 единиц 15-го знака, т. е.

$$1,\ 2 \cdot 10^{-14}$$

Для практических целей такая поверка является наиболее надежной, но, само собою разумеется, степень точности всего вычисления должна соответствовать точности данных и той практической потребности, для которой вычисление производится.

Здесь уместно дать наглядное представление о той точности, с которою Адамс произвел вычисление. Расстояние до Луны составляет кругло 400 000 км, т. е. $4 \cdot 10^{14}$ микронов (микрон есть одна тысячная миллиметра), поэтому погрешность в $1,\ 2 \cdot 10^{-14}$ составляет кругло 5 микронов в расстоянии от Земли до Луны. Очевидно, что такая величина никакого реального физического смысла не имеет — знаменитый астроном просто дал здесь пример своего уменья производить громадные вычисления, совершенно подобно тому, как в своем вычислении Эйлеровой постоянной с 273 знаками после запятой.

Конечно, ни один техник не станет тратить время на подобные упражнения.

Заметим в заключение этой главы, что в том случае, когда в уравнении

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + (n^2 + 2q \cos 2t) w = 0$$

величина n близка к 1 и величина q — малая, то определитель $D(0, q)$ выражается следующей приближенной формулой

$$D(0, q) = 1 + \frac{1}{4}\pi\left\{q^2(1-n^2)^{-1}\cdot n^{-\frac{1}{2}}\right\}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\pi n$$

которая точна до малых величин шестого порядка.

Вывод этой формулы можно найти в сочинении E. Brown — «An Introductory Treatise on the Lunar Theory (Cambridge, Un. Press., 1896).

Примечание к главе XIII

Глава XIII сочинения Эйлера заключает самую существенную часть его теории. Составив в § 72 общие уравнения движения Луны и приведя их затем выбором надлежащего значения величины λ к окончательному виду, Эйлер в этой главе указывает, каким образом надо поступать, чтобы получить решение, свободное от вековых членов.

Если взять первые два уравнения в том окончательном виде, который им придан в § 79, и на время не рассматривать членов, содержащих букву z, то эти два уравнения могут быть написаны для краткости в таком виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2(m+1)\frac{dy}{dt} - 3\lambda x = F_1(x, y, t) + \Phi_1(t) \qquad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2(m+1)\frac{dx}{dt} = F_2(x, y, t) + \Phi_2(t) \qquad (2)$$

где F_1 и F_2 суть заданные целые функции букв x и y, коэффициенты при различных степенях которых частью суть постоянные заданные числа, частью периодические функции t, составленные для первого уравнения из сумм косинусов различной кратности аргумента $p = n't$, умноженных на постоянные числа; для второго уравнения эти периодические функции составлены из сумм синусов тех же аргументов. $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ представляют подобные же заданные периодические функции тех же аргументов.

Таким образом, говоря языком современной техники, уравнения (1) представляют весьма общий случай уравнений нелинейных колебаний, причем требуется найти не только вынужденные колебания, но и свободные, и в нахождении этих последних, главным образом их частоты или периода, и заключается вся трудность.

Тиссеран в § 42 тома III своей «Небесной механики» (F. Tisserand. Traité de Mécanique Céleste, t. III) пишет по поводу уравнений (1):

«Эйлер не принимает в расчет общих интегралов уравнений (1), отбросив в этих уравнениях правые части. Эти интегралы, как легко найти, суть:

$$\left.\begin{aligned} x &= -2\frac{m+1}{3\lambda}B + \frac{\sigma}{2(m+1)}(C\sin\sigma t - D\cos\sigma t) \\ y &= A + Bt + C\cos\sigma t + D\sin\sigma t \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

причем

$$\sigma = \sqrt{(m+1)^2 - \frac{3}{2}} = \sqrt{\lambda - 2}$$

и A, B, C, D обозначают четыре произвольные постоянные. Так как x не должен содержать постоянной части, то должно быть $B = 0$.

«Отсюда видно, что предыдущие выражения x и y вводят аргумент

$$\sigma t = n't\sqrt{(m+1)^2 - \frac{3}{2}} = n't\sqrt{\frac{n^2}{n'^2} - {}^3/_2} = nt\sqrt{1 - \frac{3}{2}\frac{n'^2}{n^2}} + \text{пост.}$$

это есть средняя аномалия Луны».

Тиссеран вместо буквы t пишет ζ'; чтобы сохранить единство сделанных им в предыдущих томах обозначений, мы восстановили обозначения Эйлера.

Совершенно так же по поводу третьего уравнения Эйлера, которое мы напишем кратко так:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (\lambda + 1)z = F_3(z,\ x,\ y,\ t) \qquad (3)$$

где F_3 есть функция подобного же вида, как и F_1 и F_2, Тиссеран пишет: «Уравнение (3) может, подобно первым двум, быть приведено к виду

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (\lambda + 1)z = -\sum M''\sin\Omega \qquad (3')$$

(где Ω вида $ct + \gamma$), общий интеграл которого есть

$$z = E\cos\sqrt{\lambda + 1}\cdot t + E'\sin\sqrt{\lambda + 1}\,t + \sum\frac{M''\sin\Omega}{c^2 - \lambda - 1}$$

Аргумент

$$\sqrt{\lambda + 1}\,t + \text{пост.}$$

который, таким образом, сюда войдет, представляет аргумент u широты Луны.

«Отсюда уже можно заключить, что перигей обладает „прямым“ движением, равным

$$n\tau\left(1 - \sqrt{1 - \frac{3}{2}\frac{n'^2}{n^2}}\right)$$

узел же — „попятным“ движением, равным

$$n\tau\left(1 - \sqrt{1 + \frac{3}{2}\frac{n'^2}{n^2}}\right)$$

«Точное значение средних движений перигея и узла зависит от дополнительных членов в постоянной части общих уравнений движения Луны.

«Отсюда легко заключить, что кроме аргументов t и p, непосредственно входящих в дифференциальные уравнения, надо рассматривать еще два аргумента: среднюю аномалию и аргумент широты».

Именно эти последние аргументы и введены Эйлером и обозначены, соответственно, через q и r. Затем, охарактеризовав в § 44 общий ход развитий x, y и z в ряды, выполненный Эйлером, Тиссеран, в заключение обозрения теории Эйлера, пишет: «Эйлер *заимствует из наблюдений* численное значение величины $\frac{dq}{dt}$, что равносильно тому, что он не стремится к нахождению теоретического значения среднего движения апогея, но он принимает его численное значение, найденное астрономами. После этого легко понять, что все уравнения интегрируются последовательными приближениями, отбрасывая сперва наименее важные члены.

«Совершенно так же он поступает с аргументом широты: величина $\frac{dr}{dt}$ берется из наблюдений, а следовательно, и среднее движение узла. Таким образом Эйлер приходит окончательно к выражениям вида

$$\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = \sum AK^{\alpha} k^{\beta} i^{\gamma} \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} (aq + a'p + a''t + a'''r) \qquad (*)$$

где α, β, γ суть целые положительные числа и a, a', a'' — целые положительные или отрицательные числа, при этом величина β остается не больше 1, иными словами он пренебрегает квадратом эксцентриситета орбиты Солнца $\varkappa$». «Мы считаем полезным, — продолжает Тиссеран в заключение своего обозрения теории Эйлера, — сделать здесь важное замечание, из которого следует, что метода, принятая Эйлером, не может доставить элементов строгой теории. Дальнейшие исследования показали, что если в выражениях (*) положить

$$q = bt + \text{пост.}, \quad r = b' t + \text{пост.}$$

(при обозначениях Эйлера), то коэффициенты b и b' могут быть разложены в сходящиеся ряды, расположенные по степеням m, K^2, k^2 и i^2, поэтому нельзя, как то делает Эйлер, разложить величины x, y, z в сходящиеся ряды, расположенные по степеням K, k, i, ибо по меньшей мере коэффициенты P, Q, R, ... $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, ... или некоторые из них перестанут быть периодическими функциями и будут содержать переменную t вне знаков синусов и косинусов. Так, напр., член $K\mathfrak{P}$ должен будет содержать в своем составе выражение вида $K \cdot HK^2 t^2$, поэтому вместо члена $K^3 \mathfrak{R}$ надо бы взять $K^3 (\mathfrak{R} + Ht^2)$. Более того, приведенное выше вычисление как будто само заботится о том, чтобы ввести эти мешающие делу члены, так как мы получили в формулах (I) член, содержащий множитель t, от которого в дальнейших уравнениях произошли бы члены, содержащие t^2. Эйлер не встретился с этим неудобством, потому что *он не заботился о получении общих интегралов своих дифференциальных уравнений, а довольствовался лишь частными их решениями.*

«Тем не менее, идея Эйлера о разделении неравенств на различные порядки и, сперва вычислив *полностью неравенства первого порядка*, выводить из них неравенства второго порядка и т. д., есть идея счастливая, даже в последнее время *она рекомендуется Адамсом и Хиллем»*.

Том III «Небесной механики» Тиссерана издан в 1894 г., а в 1896 г., едва закончив издание четвертого и последнего тома своего знаменитого труда, Тиссеран умер.

В 1908 г. на математическом конгрессе в Риме знаменитый американский астроном Ньюкомб, основавший и долгое время руководивший изданием Американского морского и астрономического месяцеслова, делал обзорный доклад о теориях Луны — его мнение о теории Эйлера расходится с мнением Тиссерана. В самом деле, Ньюкомб, дав характеристику теорий Лапласа, Дамуазо, Ганзена, Делоне и пр. и указав, что их отклонения от наблюдений далеко превышают современную точность наблюдений, продолжает: «Я перехожу теперь к ряду исследований, которые, как мне кажется, приводят к результатам, обладающим всею точностью, требуемой теперешнею астрономией.

«Этот ряд начинается сочинением Эйлера — „Theoria Motuum Lunae nova methodo pertractata“. Весьма замечателен тот факт, что прошло целое столетие и ни один математик не заметил превосходных достоинств теории, изложенной в этом сочинении Эйлера. Оно было издано в 1772 г., а знаменитый мемуар Хилля о движении лунного перигея появился в 1878 г. Затем Адамс и Коуэлль, подобно Хиллю, рассмотрели движение узлов, и наконец, Э. Браун довел теорию Луны до полной точности. Подобно Эйлеру, Хилль и Браун исследуют движение Луны в прямолинейных прямоугольных координатах».

Стесненный временем, уделенным на конгрессе для его доклада, Ньюкомб не мог вдаваться в более подробную характеристику теории Эйлера и того, в какой мере она могла служить исходным пунктом для теории Хилля. Поэтому мы остановимся на этом подробнее и покажем вместе с тем, в чем заключается некоторый недосмотр Тиссерана при суждении о теории Эйлера.

В §§ 87 и 88 Эйлер указывает, что в разложениях координат x и y не должно содержаться членов, заключающих величину t, пропорциональную времени вне знаков синусов и косинусов. В § 90, в противность утверждению Тиссерана, он указывает, что в полном интеграле (так тогда называли общий интеграл) должен заключаться еще угол q такой, что $\frac{dq}{dt} = n$. При этом Эйлер не берет, как то делает Тиссеран, для определения величины n, обозначенной у Тиссерана через σ, характеристического уравнения, соответствующего системе:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2(m+1)\frac{dy}{dt} - 3\lambda x = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2(m+1)\frac{dx}{dt} = 0$$

в которых сохранены лишь линейные с постоянными коэффициентами члены, а поступает совершенно иначе.

Поэтому у Эйлера величина n, обозначенная выше у Тиссерана через σ, не определяется характеристическим уравнением этой системы

$$\sigma^2(\sigma^2 - 3\lambda) + 4(m+1)^2\sigma^2 = 0$$

имеющей корни:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$$

$$\sigma = \pm\sqrt{(m+1)^2 - \frac{3}{2}}\sqrt{-1}$$

которым соответствует общий интеграл:

$$x = -2\frac{m+1}{3\lambda}B + \frac{\tau}{2(m+1)}(C\cos\sigma t + D\sin\sigma t)$$

$$y = A + Bt + C\cos\sigma t + D\sin\sigma t$$

а эта величина n определяется совсем другим уравнением, которого Эйлер не составляет, но на существование которого указывает.

Эйлер так поступает не потому, что в общем интеграле вышеприведенной системы появляются члены

$$-2\frac{m+1}{3\lambda}B; \quad A + Bt$$

он имел бы простую возможность от них избавиться, положив

$$A = 0; \quad B = 0$$

а потому, что при указанном значении σ, при развитии членов не линейных и членов, содержащих x и y, умноженных на периодические функции, получились бы члены, где t вышло бы из-под знака синуса и косинуса.

Таким образом Тиссеран приписывает Эйлеру то, чего Эйлер не только не делает, но против чего он именно предостерегает.

Поясним же теперь подробно, как поступает Эйлер, ибо у него это сказано настолько кратко и как бы мимоходом, что, повидимому, Тиссеран этого не заметил.

В § 90 Эйлер говорит: «Но так как надо эти уравнения интегрировать, то легко видеть, что при полном интегрировании необходимо будет ввести в выражения x и y еще один угол», который он обозначает через q, полагая

$$dq = n\,dt$$

следовательно

$$q = nt + \alpha$$

где α — произвольная постоянная, а n — неизвестное число, которое и надо определить.

Обозначая через $K\cos q$ — тот член, который с аргументом q войдет в выражение x, и через $N\sin q$ — тот, который войдет в выражение для y, Эйлер в § 90 указывает, что K должно представлять эксцентриситет орбиты Луны, величина которого хотя и известна из наблюдений, но по сути дела представляет произвольную постоянную. В §§ 92 и 93 он показывает, каким образом неизвестная n могла бы быть определена: подставив величины

$$x = \mathfrak{N} \cos q \quad \text{и} \quad y = N \sin q$$

в *полные* дифференциальные уравнения, собрав в первом из них все члены с $\cos q$, во втором — все члены с $\sin q$, он, как им в § 84 указано, получает уравнения:

$$-n^2 \mathfrak{N} - 2(m+1) n N - 3\lambda \mathfrak{N} + \mathfrak{M} = 0 \tag{1}$$

$$-n^2 N - 2(m+1) n \mathfrak{N} + M = 0 \tag{2}$$

здесь необходимо иметь в виду, что если бы на самом деле эту подстановку выполнить, то величины $\mathfrak{M}$ и M представились бы как известные функции букв $\mathfrak{N}$, N и n, скажем:

$$\mathfrak{M} = H(\mathfrak{N}, N, n) \tag{3}$$

$$N = G(\mathfrak{N}, N, n) \tag{4}$$

К этим четырем уравнениям Эйлер присоединяет еще уравнение

$$\mathfrak{N} = K = 0.05445 \tag{5}$$

взятое на основании наблюдений и представляющее величину эксцентриситета орбиты Луны.

Из этих пяти уравнений, по исключении $\mathfrak{M}$ и N и $\mathfrak{N}$, получаем:

$$(n^2 + 3\lambda) K + 2(m+1) n N - H(K, N, n) \tag{6}$$

$$n^2 N + 2(m+1) n K - G(K, N, n) \tag{7}$$

Подставив затем в уравнения (6) и (7) вместо K его численное значение и исключая из полученных двух уравнений величину N, мы будем иметь одно уравнение вида

$$F(n) = 0 \tag{8}$$

из которого требуемая величина n и найдется, и притом такая, что вековых членов в выражениях x и y содержаться не будет.

Указав в § 93, правда слишком сжато и, может быть, не вполне ясно, вышеуказанный процесс, Эйлер в § 94 говорит: «Однако таким образом трудно найти истинное значение n, ибо для $\mathfrak{M}$ и M надо брать совокупность всех членов указанного вида, так как иначе истинное значение n не получится; поэтому мы полагаем, что значение n надо выводить из наблюдений», что он затем в § 94 и делает.

В §§ 167 и 168 он вновь возвращается к этому вопросу и указывает, что уравнение

$$(\lambda - 2 - n^2)\,\beta = \frac{2\,(m+1)}{n} M - \mathfrak{M}$$

должно было бы, если взять *все* члены в выражениях M и $\mathfrak{M}$, представлять тожество, а так как в рассматриваемом случае взяты лишь первые из них, то получается

$$1.50640\beta = 1.46199\beta$$

Отсюда видно, что Эйлер с полною ясностью сознавал, что характеристическое уравнение, соответствующее линейной системе с постоянными коэффициентами, получаемой отбрасывая в данных уравнениях все нелинейные члены и члены с переменными коэффициентами при неизвестных, не может доставить среднего движения перигея, а что оно определяется весьма сложным уравнением, заменяющим характеристическое, и что это среднее движение зависит от величины эксцентриситета орбиты.

Указав, таким образом, существование этого уравнения, Эйлер не пытается его составлять, а с истинною гениальностью обходит встретившееся затруднение.

Лишь через 106 лет после издания книги Эйлера, Хилль, выполнив свое мастерское преобразование уравнений движения Луны, составил свое знаменитое уравнение, равносильное тому уравнению, составлять которое Эйлер не отваживался.

На языке техники дифференциальные уравнения движения Луны представляют весьма сложный пример *нелинейных* уравнений колебательного движения. Сущность вывода Эйлера состоит в том, что «частота» этих колебаний не может быть получена взяв лишь линейные с постоянными коэффициентами члены, надо поступать как пояснено выше и стараться составить уравнение

$$F(n) = 0$$

или, точнее говоря, уравнение

$$F(n, K) = 0$$

где K есть амплитуда колебаний, ибо, вследствие присутствия нелинейных членов и членов с переменными коэффициентами при неизвестных, частота колебаний зависит от амплитуды их.

Отсюда видно, насколько прав Ньюкомб, справедливо оценивая значение теории Эйлера, и в чем неправ Тиссеран.

ГЛАВА III

Извлечение из сочинения G. W. Hill'я — «Researches in the Lunar Theory»

Эйлер руководил созданием своего сочинения, будучи слепым на оба глаза; ясно, что он не мог вдаваться в технику численных вычислений и их подробности, поэтому эта часть его сочинения далеко не может служить образцом.

Знаменитый американский математик и астроном Хилль в возрасте 23 лет поступил ассистентом в вычислительное бюро Американского морского месяцеслова, в котором и проработал 31 год как на практических чисто вычислительных работах, так и на теоретической подготовке оснований для этих работ, получивших самую высокую оценку от таких ученых, как Адамс, Дарвин, Ньюкомб, Пуанкаре; это и послужило мне поводом к тому, чтобы привести здесь небольшое извлечение из исследований Хилля, относящихся к упрощенному виду тех уравнений, с которыми имел дело Эйлер.

§ **1.** Отбросив в правых частях уравнений § 14 главы II члены высших порядков, Хилль, при сделанных им обозначениях, рассматривает уравнения:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2x}{dt^2} - 2n'\frac{dy}{dt} + \left(\frac{\mu}{r^3} - 3n'^2\right)x = 0\\&\frac{d^2y}{dt^2} + 2n'\frac{dx}{dt} + \frac{\mu}{r^3}y = 0\end{aligned}\tag{1}$$

в которых n' и μ — заданные постоянные и $r^2 = x^2 + y^2$, и ищет такое периодическое их решение, для которого при $t = t_0$ было бы

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0 \quad \text{и} \quad (y)_0 = 0$$

т. е. чтобы траектория точки пересекала ось x под прямым углом. Это решение он ищет под видом:

$$\begin{aligned}x &= A_0\cos\nu(t - t_0) + A_1\cos 3\nu(t - t_0) + A_2\cos 5\nu(t - t_0) + \ldots\\y_0 &= B_0\sin\nu(t - t_0) + B_1\sin 3\nu(t - t_0) + B_2\cos 5\nu(t - t_0) + \ldots\end{aligned}\tag{2}$$

где $\frac{2\pi}{\nu}$ есть период обращения. Очевидно, что это решение будет содержать лишь две произвольные постоянные, за которые можно было бы принять, напр., значение $x = x_0$ при $t = t_0$ и самую величину t_0 или другие две величины, с этими значениями связанные. Хилль за произвольные постоянные принимает t_0 и ν, тогда коэффициенты $A_0, A_1, \ldots B_0, B_1$ будут функциями от μ, n' и ν. Для удобства дальнейших вычислений он полагает:

$$A_i = a_i + a_{-i-1}; \quad B_i = a_i - a_{-i-1}$$
$$\tau = \nu(t - t_0)$$

тогда предыдущие ряды могут быть написаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= \sum_i a_i \cos(2i+1)\tau \\ y &= \sum_i a_i \sin(2i+1)\tau \end{aligned} \qquad (2')$$

причем суммирование распространяется на все положительные и отрицательные значения указателя i, включая и $i = 0$.

Если рассматривать полярные координаты такие, что

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi$$

то, положив

$$v = \varphi - \tau$$

так что v будет представлять разность истинной и средней долготы Луны, мы будем иметь:

$$\begin{aligned} r\cos v &= \sum_i a_i \cos 2i\tau \\ r\sin v &= \sum_i a_i \sin 2i\tau \end{aligned} \qquad (3)$$

Чтобы избежать перемножения рядов, содержащих синусы и косинусы, и иметь дело лишь с алгебраическими выражениями, полагаем:

$$u = x + y\sqrt{-1}; \quad s = x - y\sqrt{-1}$$
$$\zeta = e^{\tau\sqrt{-1}}$$

тогда будет:

$$u = \sum_i a_i \zeta^{2i+1}; \quad s = \sum_i a_{-i-1} \zeta^{2i+1} \qquad (2'')$$

Примем ζ за переменную независимую вместо τ и обозначим через D — оператор

$$\zeta \frac{d}{d\zeta} = -\sqrt{-1}\frac{d}{d\tau}$$

так что, вообще, будет

$$D(a_i \zeta^i) = i a_i \zeta^i$$

и будем дифференциальные уравнения писать символически; тогда, положив

$$m = \frac{n'}{\nu} = \frac{n'}{n - n'}; \quad \varkappa = \frac{\mu}{\nu^2}$$

получим сперва в несимволической форме при переменной независимой t:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2n'\sqrt{-1}\frac{du}{dt} + \frac{\mu}{(us)^{3/2}}u - \frac{3}{2}n'^2(u+s) = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} - 2n'\sqrt{-1}\frac{ds}{dt} + \frac{\mu}{(us)^{3/2}}s - \frac{3}{2}n'^2(u+s) = 0 \qquad (5)$$

Уравнения (1), как было показано, имеют интеграл живых сил (Якоби)

$$\frac{1}{2}\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{\mu}{r} + \frac{3}{2}n'^2 x^2 - C$$

который примет вид

$$\frac{1}{2}\frac{du\,ds}{dt^2} = \frac{\mu}{\sqrt{us}} + \frac{3}{8}n'^2(u+s)^2 - C \qquad (6)$$

Вводя переменную независимую ζ и написав уравнения (4) и (5) в символической форме, получим:

$$\left[D^2 + 2mD + \frac{3}{2}m^2 - \frac{\varkappa}{(us)^{3/2}}\right]u + \frac{3}{2}m^2 s = 0 \qquad (4')$$

$$\left[D^2 - 2mD + \frac{3}{2}m^2 - \frac{\varkappa}{(us)^{3/2}}\right]s + \frac{3}{2}m^2 u = 0 \qquad (5')$$

$$Du \cdot Ds + \frac{3\varkappa}{(us)^{1/2}} + \frac{3}{4}m^2(u+s)^2 = C \qquad (6')$$

Чтобы получить значения u и s, проще всего подставить выражения $(2'')$ в уравнения $(4')$ и $(5')$ и, рассматривая коэффициенты a_i как неопределенные, определить их так, чтобы уравнения эти удовлетворялись тожественно, что достигнется приравнивая нулю каждый член получаемой суммы в отдельности. Это доставит достаточное число уравнений для определения всех неизвестных a_i. Уравнение $(5')$ при этом будет служить контролем.

Очевидно, что нет необходимости пользоваться непременно уравнениями $(4')$ для указанной цели, напротив выгоднее составить из трех уравнений $(4')$ и $(5')$ такие две им эквивалентные комбинации, при которых вычисление неизвестных a_i становилось бы возможно более простым.

§ **2.** Нетрудно заметить, что наибольшие затруднения вызываются присутствием члена $\frac{\varkappa}{(us)^{\frac{3}{2}}}$, поэтому надо стараться от него избавиться; для этого умножаем уравнение $(4')$ на u, уравнение $(5')$ — на s и составляем сумму и разность получаемых выражений, тогда имеем:

$$uD^2s + sD^2u - 2m(uDs - sDu) - \frac{2\varkappa}{(us)} + \frac{3}{2}m^2(u+s)^2 = 0$$

$$uD^2s - sD^2u - 2m(uDs + sDu) + \frac{3}{2}m^2(u^2 - s^2) = 0$$

приложив затем к первому из этих уравнений уравнение (6) и оставив второе без изменений, имеем окончательно:

$$D^2(us) - Du \cdot Ds - 2m(uDs - sDu) + \frac{9}{4}m^2(u+s)^2 = C \tag{7}$$

$$D(uDu - sDu - 2mus) + \frac{3}{2}(u^2 - s^2) = 0 \tag{8}$$

Необходимо, однако, заметить, что эти уравнения не являются полною заменою первоначальных, ибо в них не содержатся существенно важные для рассматриваемого вопроса постоянные μ и $\varkappa$, интегрирование же введет излишнюю постоянную. Эта последняя исключается по подстановке найденных решений в первоначальные уравнения, содержащие μ и $\varkappa$, через которые она тогда и выразится.

Левые части уравнений (7) и (8) однородные и второй степени относительно u и s, что представляет значительные выгоды при разыскании решений их.

На основании значения, приданного символу D, имеем следующие равенства:

$$Du = \sum_i (2i+1) a_i \zeta^{2i+1}; \qquad Ds = \sum_i (2i+1) a_{-i-1} \zeta^{2i+1}$$

$$D^2 u = \sum_i (2i+1)^2 a_i \zeta^{2i+1}; \quad D^2 s = \sum_i (2i+1)^2 a_{-i-1} \zeta^{2i+1}$$

$$us = \sum_j \left[\sum_i a_i a_{i-j} \right] \zeta^{2j}$$

$$u^2 = \sum_j \left[\sum_i a_i a_{-i-j-1} \right] \zeta^{2j}$$

$$s^2 = \sum_j \left[\sum_i a_i a_{-i-j-1} \right] \zeta^{2j}$$

$$Du\,Du = -\sum_j \left[\sum_i (2i+1)(2i-2j+1) a_i a_{i-j} \right] \zeta^{2j}$$

$$uDs - sDu = -2 \sum_j \left[\sum_i (2i-j+1) a_i a_{i-j} \right] \zeta^{2j}$$

причем суммирование по указателю j распространяется на те же значения, как и по указателю i.

Подставив эти выражения в уравнения (7) и (8) и уравнивая нулю коэффициенты при ζ^{2j}, получаем:

$$\sum_i \left[(2i+1)(2i-2j+1) + 4j^2 + 4(2i-j+1)m + \frac{9}{2} m^2 a_i a_{i-j} \right]$$

$$+ \frac{9}{4} m^2 \sum_i [a_i a_{-i+j-1} + a_i a_{-i-j-1}] = 0$$

$$4j \sum_i [2i - j + 1 + m] a_i a_{i-j} - \frac{3}{2} m^2 \sum_i [a_i a_{-i+j-1} - a_i a_{-i-j-1}] = 0$$

Эти уравнения имеют место для всех целых положительных и отрицательных значений j, кроме $j = 0$, для которого в правой части надо, вместо 0, написать C, но так как при $j = 0$ второе уравнение обращается в тожество, то можно сперва этого значения j не рассматривать.

Предыдущие уравнения несколько упрощаются, если умножить первое на 2, второе — на 3 и составить разность и сумму полученных выражений; тогда получим:

$$\begin{aligned}\sum [8i^2 - 8(4j-1)i + 20j^2 - 16j + 2 \\ + 4(4i - 5j + 2)m + 9m^2]\, a_i a_{i-j} \\ + 9m^2 \sum_i a_i a_{-i+j-1} = 0\end{aligned} \qquad (9)$$

$$\begin{aligned}\sum_i [8i^2 + 8(2j+1) - 4j^2 + 8j + 4(4i + j + 2)m + 9m^2]\, a_i a_{i-1} \\ + 9m^2 \sum a_i a_{-i-j-1} = 0\end{aligned} \qquad (10)$$

Эти два уравнения, если в них придавать указателю j как положительные так и отрицательные значения, не являются различными между собою, ибо если под знаком первой суммы в первом уравнении мы подставим $i - j$ вместо i и вместо $-j$ во всем уравнении j, то первое уравнение будет одинаково со вторым, указанная же замена, очевидно, дозволительна. Это происходит потому, что все независимые уравнения могут быть получены приписывая значку j лишь положительные значения, поэтому, когда величине j приписываются и положительные и отрицательные значения, то достаточно одной из вышеприведенных формул.

§ 3. Хотя число уравнений и число неизвестных бесконечное, но практически можно ограничиваться для достижения весьма большой степени точности лишь небольшим числом членов, тогда число неизвестных будет единицею больше числа уравнений, и эти уравнения доставят отношения всех неизвестных к одной из них, скажем a_0, причем окажется, что будет

$$a_i = a_0 F_i(m)$$

причем если рассматривать m как малую величину первого порядка, то $F_i(m)$ будет порядка $2i$ относительно m.

Положив в членах под знаком первой суммы сперва $i = 0$, затем $i = j$, мы увидим, что эти уравнения будут содержать члены вида:

$$\begin{gathered}[20j^2 - 16j + 2 - 4(5j - 2)m + 9m^2]\, a_0 a_{-j} \\ + [4j^2 - 8j + 2 - 4(j - 2)m + 9m^2]\, a_0 a_j \\ [-4j^2 + 8j + 2 + 4(j + 2)m + 9m^2]\, a_0 a_{-j} \\ + [20j^2 + 16j + 2 + 4(5j + 2)m + 9m^2]\, a_0 a_j\end{gathered}$$

являющиеся главными при определении a_{-j} и a_j. Умножим поэтому первое уравнение на

$$-4j^2+8j+2+4(j+2)m+9m^2$$

и второе — на

$$-20j^2+16j-2+4(5j-2)m-9m^2$$

и, сложив произведения, разделим все на

$$48j^2[2(4j^2-1)-4m+m^2]$$

Примем такое обозначение:

$$\begin{aligned}
[j, i] &= -\frac{i}{j}\cdot\frac{4(j-1)i+4j^2+4j-2-4(i-j+1)m+m^2}{2(4j^2-1)-4m+m^2}\\
[j] &= -\frac{3m^2}{16j^2}\cdot\frac{4j^2-8j-2-4(j+2)m-9m^2}{2(4j^2-1)-4m+m^2};\\
(j) &= -\frac{3m^2}{16j^2}\cdot\frac{20j^2-16j+2-4(5j-2)m+9m^2}{2(4j^2-1)-4m+m^2}.
\end{aligned}\tag{11}$$

система уравнений, служащих для определения a_i, представляется тогда формулою

$$\sum_i \{[j, i]\,a_i a_{i-j}+[j]\,a_i a_{-i+j-1}+(j)\,a_i a_{i-j-1}\}=0\tag{12}$$

причем суммирование распространено на все положительные и отрицательные целые значения, кроме 0.

Легко видеть, что

$$[j0]=0;\ [j, j]=-1$$

поэтому система (12) удобна для определения a_j.

Количества $[j, i]$, $[j]$, (j) могут быть представлены в более простом виде, а именно:

$$[j, i]=-\frac{i}{j}+\frac{4i(j-1)}{j}\cdot\frac{j-1-m}{2(4j^2-1)-4m+m^2}$$

так что

$$[j, i] + [-j, -i] = -\frac{2i}{j} + \frac{8i(j-1)}{2(4j^2-1)-4m+m^2}$$

$$[j, i] - [-j, -i] = \frac{8i(j-1)}{j} \frac{1+m}{2(4j^2-1)-4m+m^2}$$

Затем

$$[j] = \frac{27m^2}{16j^2} - \frac{3}{4j^2} \cdot \frac{19j^2-3j-5-(j+11)m}{2(4j^2-1)-4m+m^2}$$

$$(j) = -\frac{27m^2}{16j^2} + \frac{3}{4j^2} \cdot \frac{13j^2+4j-5+(5j-11)m}{2(4j^2-1)-4m+m^2}$$

$$[j] + (-j) = -\frac{3}{2j} \cdot \frac{3j+1+2m}{2(4j^2-1)-4m+m^2} \cdot m^2$$

$$[j] - (-j) = \frac{27}{8j^2} m^2 - \frac{3}{2j^2} \cdot \frac{16j^2-3j-5-(3j+11)m}{2(4j^2-1)-4m+m^2} \cdot m$$

В первом приближении, при разыскании величин a_i, один из членов в уравнениях может быть отброшен, ибо при положительном j

$$\sum_i (j)\, a_i\, a_{i-j-1}$$

есть величина, порядок которой не менее как на четыре единицы выше порядка прочих членов, входящих в уравнение. Когда же j отрицательное, тогда то же самое имеет место по отношению к члену

$$\sum_i [j]\, a_i\, a_{-i+j-1}$$

При таком ограничении уравнение (12) может быть написано в следующих двух видах:

$$\sum_i \{[j, i]\, a_i\, a_{i-j} + [j]\, a_i\, a_{i+j-1}\} = 0$$

$$\sum_i \{[-j, i]\, a_i\, a_{i+j} + (-j)\, a_i\, a_{-i+j-1}\} = 0$$

Из этих уравнений, ограничиваясь в них лишь членами самого низшего порядка, мы получаем следующие уравнения для определения значений коэффициентов в первом приближении:

$$a_0 a_1 = [1]\, a_0 a_0$$

$$a_0 a_{-1} = (-1)\, a_0 a_0$$

$$a_0 a_2 = [2]\,(a_0 a_1 + a_1 a_0) + [2, 1]\, a_1 a_{-1}$$

$$a_0 a_{-2} = (-2)(a_0 a_1 + a_1 a_0) + [-2, -1]\, a_1 a_{-1}$$

$$a_0 a_3 = [3]\,(a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0) + [3, 1]\, a_1 a_{-2} + [3, 2]\, a_2 a_{-1}$$

$$a_0 a_{-3} = (-3)(a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0) + [-3, -1]\, a_{-1} a_2 + [-3, -2]\, a_{-2} a_1$$

$$a_0 a_4 = [4]\,(a_0 a_3 + a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_3 a_0) + [4, 1]\, a_1 a_{-3} + [4, 2]\, a_2 a_{-2} + [4, 3]\, a_3 a_{-1}$$

$$a_0 a_{-4} = (-4)(a_0 a_3 + a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_3 a_0) + [-4, -1]\, a_{-1} a_3 + [-4, -2]\, a_{-2} a_2 + [-4, -3]\, a_{-3} a_1$$

. . . .

Закон составления этих уравнений очевиден. Из первых двух уравнений находятся a_1 и a_{-1}; пользуясь найденными значениями a_1 и a_{-1}, из двух вторых уравнений найдем a_2 и a_{-2} и т. д.; таким образом написанные уравнения заключают алгоритм или правило для последовательного вычисления коэффициентов. Что касается степени приближения этих выражений, то если разлагать коэффициенты в ряды, расположенные по степеням буквы m, то окажется, что для каждого коэффициента первые четыре члена верны, таким образом для a_1 и a_{-1} погрешность начинается с членов шестой степени относительно m, для a_2 и a_{-2} — с членов восьмой степени, для a_3 — с членов десятой степени и т. д.

§ **4.** Затем Хилль, при помощи весьма искусного преобразования, получает эти разложения до членов девятого порядка относительно m включительно.

Эти разложения таковы:

$$\frac{a_1}{a_0}=\frac{3}{2^4}m^2+\frac{1}{2}m^3+\frac{7}{2^2\cdot 3}m^4-\frac{11}{2^2\cdot 3^2}m^5-\frac{30749}{2^{12}\cdot 3^3}m^6-\frac{1010521}{2^{11}\cdot 3^4\cdot 5}m^7$$
$$-\frac{18445871}{2^{10}\cdot 3^5\cdot 5^2}m^8-\frac{2114557853}{2^{12}\cdot 3^6\cdot 5^3}m^9\ldots$$

$$\frac{a_{-1}}{a_0}=-\frac{19}{2^4}m^2-\frac{5}{3}m^3-\frac{43}{2^2\cdot 3^2}m^4-\frac{14}{3^3}m^5-\frac{7381}{2^{10}\cdot 3^4}m^6+\frac{3574153}{2^{11}\cdot 3^5\cdot 5}m^7$$
$$+\frac{55218889}{2^9\cdot 3^6\cdot 5^5}m^8+\frac{13620153029}{2^{12}\cdot 3^7\cdot 5^3}m^9\ldots$$

$$\frac{a_2}{a_0}=\frac{25}{2^8}m^4+\frac{803}{2^7\cdot 3\cdot 5}m^5+\frac{6109}{2^5\cdot 3^2\cdot 5^2}m^6+\frac{897599}{2^8\cdot 3^3\cdot 5^3}m^7$$
$$+\frac{237203647}{2^{16}\cdot 3^2\cdot 5^4}m^8+\frac{44461407673}{2^{15}\cdot 3^4\cdot 5^5\cdot 7}m^9\ldots$$

$$\frac{a_{-2}}{a_0}=0m^4+\frac{23}{2^7\cdot 5}m^5+\frac{299}{2^5\cdot 3\cdot 5^2}m^6+\frac{56339}{2^8\cdot 3^2\cdot 5^3}m^7$$
$$+\frac{79400351}{2^{16}\cdot 3^2\cdot 5^4}m^8+\frac{8085846833}{2^{14}\cdot 3^4\cdot 5^5\cdot 7}m^9\ldots$$

$$\frac{a_3}{a_0}=\frac{833}{2^{12}\cdot 3}m^6+\frac{27943}{2^{11}\cdot 5\cdot 7}m^7+\frac{12275527}{2^{10}\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}m^8+\frac{27409853579}{2^{12}\cdot 3^4\cdot 5^3\cdot 7^3}m^9\ldots$$

$$\frac{a_{-3}}{a_0}=\frac{1}{2^6\cdot 3}m^6+\frac{71}{2^7\cdot 3\cdot 5}m^7+\frac{46951}{2^8\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}m^8+\frac{14086643}{2^7\cdot 3^4\cdot 5^3\cdot 7^2}\cdot m^9\ldots$$

$$\frac{a_4}{a_0}=\frac{3537}{2^{16}}m^8+\frac{111809667}{2^{17}\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^2}m^9\ldots$$

$$\frac{a_{-4}}{a_0}=\frac{23}{2^{11}\cdot 3}m^8+\frac{1576553}{2^{17}\cdot 3^2\cdot 7^2}m^9\ldots$$

Хилль вводит вместо m величину $\mathfrak{m}$ равенством

$$m=\frac{\mathfrak{m}}{1+\frac{1}{3}\mathfrak{m}}$$

и разлагает по степеням параметра $\mathfrak{m}$ выражения

$$r\cos v=\sum_i a_i\cos 2i\tau \quad \text{и} \quad r\sin v=\sum_i a_i\sin 2i\tau$$

и получает следующие разложения:

$$
\begin{aligned}
r\cos v = a_0 \Big\{ 1 &+ \Big[-\mathrm{m}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{m}^3 + \frac{2}{9}\mathrm{m}^4 - \frac{1}{36}\mathrm{m}^5 - \frac{106411}{331776}\mathrm{m}^6 + \frac{427339}{497664}\mathrm{m}^7 \\
&+ \frac{25239037}{14929920}\mathrm{m}^8 - \frac{732931}{37324800}\mathrm{m}^9 \ldots \Big] \cos 2\tau \\
&+ \Big[\frac{25}{256}\mathrm{m}^4 + \frac{311}{960}\mathrm{m}^5 + \frac{9349}{28800}\mathrm{m}^6 - \frac{5831}{216000}\mathrm{m}^7 - \frac{164645363}{552960000}\mathrm{m}^8 \\
&- \frac{11321875589}{19353600000}\mathrm{m}^9 \ldots \Big] \cos 4\tau \\
&+ \Big[\frac{299}{4096}\mathrm{m}^6 + \frac{30193}{107520}\mathrm{m}^7 + \frac{379549}{1003520}\mathrm{m}^8 \\
&+ \frac{181908179}{1580544000}\mathrm{m}^9 \ldots \Big] \cos 6\tau \\
&+ \Big[\frac{11347}{196608}\mathrm{m}^8 + \frac{2350381}{9031680}\mathrm{m}^9 \ldots \Big] \cos 8\tau + \ldots \Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r\sin v = a_0 \Big\{ &\Big[\frac{11}{8}\mathrm{m}^2 + \frac{5}{4}\mathrm{m}^3 + \frac{5}{72}\mathrm{m}^5 - \frac{11}{36}\mathrm{m}^5 - \frac{101123}{331776}\mathrm{m}^6 - \frac{512239}{276480}\mathrm{m}^7 \\
&- \frac{269023019}{74649600}\mathrm{m}^8 - \frac{151872119}{93312000}\mathrm{m}^9 \ldots \Big] \sin 2\tau \\
&+ \Big[\frac{25}{256}\mathrm{m}^4 + \frac{121}{480}\mathrm{m}^5 + \frac{5623}{28800}\mathrm{m}^6 - \frac{17149}{432000}\mathrm{m}^7 - \frac{3500287}{11520000}\mathrm{m}^8 \\
&- \frac{43885512859}{58060800000}\mathrm{m}^9 \ldots \Big] \sin 4\tau \\
&+ \Big[\frac{769}{12288}\mathrm{m}^6 + \frac{24481}{107520}\mathrm{m}^7 + \frac{4419347}{15052800}\mathrm{m}^8 \\
&+ \frac{398314169}{4741632000}\mathrm{m}^9 \ldots \Big] \sin 6\tau \\
&+ \Big[\frac{9875}{196608}\mathrm{m}^8 + \frac{32608451}{144506880}\mathrm{m}^9 \ldots \Big] \sin 8\tau \ldots \Big\}
\end{aligned}
$$

На основании дифференциальных уравнений (7) и (8) получаются лишь отношения коэффициентов a_i к a_0; чтобы выразить a_0 через заданные величины n, n', μ, надо обратиться к одному из первоначальных уравнений:

$$\left[D^2 + 2mD + \frac{3}{2}m^2 - \frac{\varkappa}{(us)^{3/2}} \right] u + \frac{3}{2} m^2 s = 0$$

и подставить в него:

$$u = \sum_i a_i \zeta^{2i+1}; \quad s = \sum_i a_{-i-1} \zeta^{2i+1}$$

получится равенство

$$\frac{\varkappa u}{(us)^{3/2}} = \sum_i \left\{ \left[(2i + 1 + m)^2 + \frac{1}{2} m^2 \right] a_i + \frac{3}{2} m^2 a_{-i-1} \right\} \zeta^{2i+1}$$

Положив $i=0$ и обозначив через J — коэффициент при ζ в разложении $\frac{a_0^2 u}{(us)^{3/2}}$, мы имеем

$$\frac{\varkappa}{a_0^3}J = 1 + 2m + \frac{3}{2}m^2 + \frac{3}{2}m^2\frac{a_{-1}}{a_0}$$

Обозначив правую часть этого равенства через H и заметив, что

$$\varkappa = \frac{\mu}{(n-n')^2} = \frac{\mu}{n^2}(1+m)^2$$

имеем

$$a_0 = \left(\frac{\mu}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left[\frac{I(1+m)^2}{H}\right]^{\frac{1}{3}}$$

Значение величины H непосредственно находится по значению $\frac{a_{-1}}{a_0}$, данному выше, величина же J получается подставив значения

$$u = \sum_i a_i\zeta^{2i+1}; \quad s = \sum_i a_{-i-1}\zeta^{2i+1}$$

в выражение $\frac{a_0^2 u}{(us)^{3/2}}$ и взяв коэффициенты при ζ; таким образом получается

$$\begin{aligned} J = 1 &+ \left[\frac{a_1+a_{-1}}{a_0}\right]^2\left\{\frac{3}{4}+\frac{45}{64}\left[\frac{a_1+a_{-1}}{a_0}\right]^2\right\} + \frac{15}{8}\frac{a_1 a_{-1}}{a_0^2} - \frac{15}{2}\frac{a_2+a_{-2}}{a_0} \\ &+ \frac{a_2+a_{-2}}{a_0}\left[\frac{3}{4}\frac{a_2+a_{-2}}{a_0} + 6\frac{a_1 a_{-1}}{a_0^2}\right] + 6\frac{a_1+a_{-1}}{a_0}\cdot\frac{a_1 a_2+a_{-1}a_{-2}}{a_0^2} \\ &+ 3\frac{a_1 a_{-1}}{a_0^2} + 45\frac{a_1^2 a_{-1}^2}{a_0^4} + 3\frac{a_2 a_{-2}}{a_1^2} + \ldots \end{aligned}$$

причем отброшенные члены по меньшей мере десятого порядка относительно m; таким образом получится:

$$J = 1 + \frac{21}{2^8}m^4 - \frac{31}{2^5}m^5 - \frac{53}{2^4}m^6 - \frac{2707}{2^6\cdot 3^2}m^7 - \frac{4201213}{2^{16}\cdot 3^3}m^8 + \frac{14374939}{2^{15}\cdot 3^3\cdot 5}m^9\ldots$$

$$\begin{aligned} a_0 = \left(\frac{\mu}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}\Big[1 &- \frac{1}{6}m^2 + \frac{1}{3}m^3 + \frac{407}{2304}m^4 - \frac{67}{288}m^5 - \frac{45293}{41472}m^6 - \frac{8761}{6912}m^7 \\ &- \frac{4967441}{7962624}m^8 + \frac{14829273}{39813120}m^9\ldots\Big] \end{aligned}$$

Составив первое условное уравнение для определения a_i, относящееся к значению $j=0$, мы получим выражение, из которого находится постоянная C, а именно:

$$C = \sum_i\left[(2i+1+2m)a_i^2 + \frac{1}{2}m^2\right]a_i^2 + \frac{9}{2}m^2\sum a_i a_{-i-1}$$

что, на основании значений a_i, ограничиваясь членами до седьмого порядка, дает

$$C = a_0^2\left[1 + 4m + \frac{9}{2}m^2 - \frac{1147}{2^7}m^4 - \frac{1399}{2^5 \cdot 3}m^5 - \frac{2047}{2^8}m^6 + \frac{3737}{2^4 \cdot 3^3}m^7 + \ldots\right]$$

§ **5.** Чтобы привести предыдущие формулы в числа, Хилль принимает, на основании данных, получаемых из наблюдений, следующие значения:

$$n = 17325594''.06085$$
$$n' = 1295977''.41516$$

из которых следует:

$$m = \frac{n'}{n - n'} = 0.08084\,89338\,08312$$
$$m^2 = 0.00653\,65500\,97941$$
$$m^3 = 0.00052\,84731\,06203$$
$$m^4 = 0.00004\,27264\,87183$$
$$\mathfrak{m} = 0.08308\,81293\,65$$

На основании этих значений, получается:

$$a_0 = 0.99909\,31419\,62\left(\frac{\mu}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$r\cos v = a_0[1 - 0.00718\,00394\,55\cos 2\tau + 0.00000\,60424\,59\cos 4\tau + 0.00000\,00325\,76\cos 6\tau + 0.00000\,00001\,80\cos 8\tau]$$

$$r\sin v = a_0[0.01021\,14543\,96\sin 2\tau + 0.00000\,57148\,79\sin 4\tau + 0.00000\,00274\,99\sin 6\tau + 0.00000\,00001\,57\sin 8\tau]$$

§ **6.** Получив эти выражения, Хилль указывает, что введение численных значений в условные уравнения с самого начала, не производя разложений величин a_i по степеням буквы m, ведет к цели с гораздо меньшею затратою труда. С этою целью он сперва вычисляет величины $[j, i]$, $[j]$ и (j) по формулам (11), не выполняя, однако, деления на количество

$$2(4j^2 - 1) - 4m + m^2$$

до самого конца вычисления, и дает такую таблицу:

Коэффициенты a_1 и a_{-1}

Делитель $= 5.68314\,08148\,64695$

$[1] = 0.00861\,47842\,96261$

$(1) = -0.00623\,66553\,18347$

$[1, -2] = 13.30665\,60411$

$[1, -1] = 6.32993\,22853$

$[1, 2] = -10.71949\,01593$

$[1, 3] = -15.10904\,80332$

$[-1] = -0.01178\,75756\,56865$

$(-1) = -0.04941\,95042\,02516$

$[-1, -3] = -66.98979\,68560$

$[-1, -2] = -28.01307\,31002$

$[-1, 1] = -10.96365\,06556$

$[-1, 2] = -38.57409\,27816$

Коэффициенты a_2 и a_{-2}

Делитель $= 29.68314\,08148\,64695$

$2[2] = 0.00205\,43632\,76229$

$2(2) = -0.02909\,07097\,39048$

$[2, -2] = 14.97672\,37558$

$[2, -1] = 9.32666\,40103$

$[2, 1] = -13.00326\,82750\,49$

$[2, 3] = -50.03961\,76194$

$[2, 4] = -74.07269\,86888$

$2[-2] = -0.01834\,79966\,76898$

$2(-2) = -0.07227\,35586\,23216$

$[-2, -4] = -108.69586\,45706$

$[-2, -3] = -63.00980\,48251$

$[-2, -1] = -8.67987\,25398$

$[-2, 1] = -3.64352\,31954$

$[-2, 2] = -19.61044\,21261$

Коэффициенты a_3 и a_{-3}

Делитель = 69.68314 08149

[3] = — 0.00113 35729 26473
(3) = — 0.01768 33677
[3, — 1] = 12.99224 12519
[3, 1] = — 18.10997 74284
[3, 2] = — 41.33769 10334
[3, 4] = — 103.14632 67728
[— 3] = — 0.00793 43596
(— 3) = — 0.03207 76506 64434
[— 3, — 4] = — 114.67538 20668
[— 3, — 2] = — 35.57316 33864
[— 3, — 1] = — 12.34544 97815
[— 3, 1] = 1.46318 59580

Коэффициенты a_4 и a_{-4}

Делитель = 125.68314 08

2 [4] = — 0.00428 9733	2 [— 4] = — 0.01449 0913
2 (4) = — 0.03864 29156	2 (— 4) = — 0.06023 435
[4, — 1] = 16.82502 987	[— 4, — 5] = — 182.50817 069
[4, 1] = — 22.66333 2	[— 4, — 3] = — 79.01980 9
[4, 2] = — 51.16496 6	[— 4, — 2] = — 42.51817 5
[4, 3] = — 85.50490 2	[— 4, — 1] = — 16.17823 8
[4, 5] = — 171.69968 135	[— 4, 1] = 6.01654 053

Коэффициенты a_5 и a_{-5}

Делитель = 197.68314

[5] = — 0.00272 9536	(5) = — 0.02896 299
[5, 1] = — 26.99534 4	[— 5, — 4] = — 138.68780 0
[5, 2] = — 60.26133 2	[— 5, — 3] = — 89.42181 0
[5, 3] = — 99.79795 8	[— 5, — 2] = — 49.88518 4
[5, 4] = — 145.60523 2	[— 5, — 1] = — 20.07791 2

Коэффициенты a_6 и a_{-6}

Делитель = 285.68314

2 [6] = — 0.00622 021	2 (— 6) = — 0.05640 548
[6, 1] = — 31.21669	[— 6, — 5] = — 214.46646
[6, 2] = — 68.99124	[— 6, — 4] = — 152.69091
[6, 3] = — 113.32666	[— 6, — 3] = — 100.35648
[6, 4] = — 164.21995	[— 6, — 2] = — 57.46319
[6, 5] = — 221.67212	[— 6, — 1] = — 24.01103

После того как значения выражений $[j, i]$, $[j]$ и (j) составлены, величины коэффициентов вычисляются последовательными приближениями, найдя сперва первое, затем присовокупляя к нему поправки, происходящие от отброшенных членов, причем Хилль обращает внимание, что последовательные члены не суть суммы бесконечных рядов, а значения рациональных функций буквы m и, значит, могут быть вычислены с любою степенью точности, которую он доводит до 15-го знака после запятой.

Результаты его вычислений таковы:

	a_1	a_{-1}
1-е прибл. член 2-го пор.	+ 0.00151 58491 71593	— 0.00869 58084 99634
2-е » » 6-го »	— 0.00000 01416 98831	+ 0.00000 00615 51932
3-е » » 10-го »	+ 0.00000 00000 06801	— 0.00000 00000 13838

$$\frac{a_1}{a_0} = +\ 0.00151\ 57074\ 79563; \quad \frac{a_{-1}}{a_0} = -0.00869\ 57469\ 61540$$

	a_2	a_{-2}
1-е прибл. член 4-го пор.	+ 0.00000 58793 35016	+ 0.00000 01636 69405
2-е » » 8-го »	— 0.00000 00006 78490	+ 0.00000 00001 21088
3-е » » 10-го »	+ 0.00000 00000 00052	— 0.00000 00000 00007

$$\frac{a_2}{a_0} = +\ 0.00000\ 58786\ 56578; \quad \frac{a_{-2}}{a_0} = +\ 0.00000\ 01637\ 90486$$

	a_3	a_{-3}
1-е прибл. член 6-го пор.	+ 0.00000 00300 35759	+ 0.00000 00024 60338
2-е » » 10-го »	— 0.00000 00000 04128	+ 0.00000 00000 00055

$$\frac{a_3}{a_0} = +\ 0.00000\ 00300\ 31632; \quad \frac{a_{-3}}{a_0} = +\ 0.00000\ 00024\ 60393$$

	a_4	a_{-4}
1-е прибл. член 8-го пор.	+ 0.00000 00001 75296	+ 0.00000 00000 12284
2-е » » 12-го »	— 0.00000 00000 00028	0.00000 00000 00000

$$\frac{a_4}{a_0} = +\ 0.00000\ 00001\ 75268; \quad \frac{a_{-4}}{a_0} = +\ 0.00000\ 00000\ 12284$$

10-го порядка $\frac{a_5}{a_0} = +\ 0.00000\ 00000\ 01107; \quad \frac{a_{-5}}{a_0} = +\ 0.00000\ 00000\ 00064$

12-го порядка $\frac{a_6}{a_0} = +\ 0.00000\ 00000\ 00007; \quad \frac{a_{-6}}{a_0} = +\ 0.00000\ 00000\ 00000$

Подстановка этих численных значений дает следующие выражения для координат:

$$
\begin{aligned}
r\cos v = a_0[1 &- 0.00718\,00394\,81977 \cos 2\tau \\
&+ 0.00000\,60424\,47064 \cos 4\tau \\
&+ 0.00000\,00324\,92024 \cos 6\tau \\
&+ 0.00000\,00001\,87552 \cos 8\tau \\
&+ 0.00000\,00000\,01171 \cos 10\tau \\
&+ 0.00000\,00000\,00008 \cos 12\tau]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r\sin v = a_0[&\ 0.01021\,14544\,41102 \sin 2\tau \\
&+ 0.00000\,57148\,66093 \sin 4\tau \\
&+ 0.00000\,00275\,71239 \sin 6\tau \\
&+ 0.00000\,00001\,62985 \sin 8\tau \\
&+ 0.00000\,00000\,01042 \sin 10\tau \\
&+ 0.00000\,00000\,00007 \sin 12\tau]
\end{aligned}
$$

Сличение этих величин с приведенными выше, в которых вычисление доводилось лишь до членов девятого порядка, показывает, что они разнятся от этих на несколько единиц в 11-м знаке после запятой.

Мы уже упоминали, что $a_0 \cdot 10^{-14}$ составляет в расстоянии от центра Земли до центра Луны величину в 4 микрона, т. е. в 0.004 мм, очевидно никакого физического смысла и значения не имеющую, и извлечение из знаменитого мемуара Хилля приведено не для того, чтобы в практических вопросах инженерного дела, следуя его примеру, вычислять до 15-го знака, а чтобы показать действительный образец необыкновенного искусства в решении уравнений, в их подготовке к численным вычислениям и в необычайном упорстве и настойчивости в их выполнении до намеченной по каким бы то ни было соображениям степени точности.

§ **7.** Само собою разумеется, что по самому способу определения коэффициентов a_i видно, что подстановка вместо x и y их разложений, *ограничиваясь приведенными выше членами,* т. е. не бесконечных рядов, а конечных выражений, доставит в дифференциальных уравнениях, которыми эти величины определяются, невязки в несколько единиц 15-го знака после запятой, т. е. много меньше той точности, с которою известны входящие в эти уравнения постоянные параметры; значит, в практическом смысле вопрос решен даже с бо́льшею точностью, нежели нужно. Но не так смотрят на это дело с точки зрения строгой математики. Вот что говорит по этому поводу в своей статье «О рядах, предложенных Хиллем для представления движения Луны» (Тр. Отд. физ. наук Общ. любит. ествзн., антроп. и этногр., т. VIII, М. 1896) наш знаменитый математик покойный акад. А. М. Ляпунов: «Применяя свои формулы к теории Луны, Hill принимает

$$m = 0.08084\,89338\,08312$$

и при окончательных выводах пренебрегает лишь членами выше тринадцатого порядка относительно m. Вычисляя при этом отношения $\frac{a_i}{a_0}$ с пятнадцатью десятичными знаками, он считает погрешности не превосходящими двух единиц последней десятичной. Это заключение, впрочем, основано только на сопоставлении вычисленных членов различных порядков и не может считаться доказанным, так как на самом деле Hill не дает никаких средств для определения высших пределов погрешностей при вычислении отношений $\frac{a_i}{a_0}$ по предлагаемому им способу».

Изложив затем вкратце методу Хилля, А. М. Ляпунов дает свой совершенно оригинальный способ решения основных дифференциальных уравнений, рассмотренных Хиллем, причем анализом необыкновенной проницательности и строгости доказывается сходимость процесса последовательных приближений, примененного Хиллем, и равномерная сходимость рядов, которыми он пользуется, если только

$$m \leqq \frac{1}{7}$$

вместе с тем устанавливается и высший предел погрешности, которая имеет место, если остановиться на члене с данным указателем.

Так как в случае Хилля

$$m < \frac{1}{12}$$

то ряды Хилля сходящиеся.

Мы не будем здесь приводить изложения замечательной работы Ляпунова, в которой с полною строгостью вопрос доведен до конца, т. е. до численных результатов, а отошлем к подлиннику.