

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СОБРАНИЕ
ТРУДОВ

АКАДЕМИКА

А.Н. КРЫЛОВА

VI

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА-ЛЕНИНГРАД

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

СОБРАНИЕ ТРУДОВ

АКАДЕМИКА

А. Н. КРЫЛОВА

VI

АСТРОНОМИЯ



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА — ЛЕНИНГРАД

1936

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Сентябрь 1936 г.

Непременный секретарь академик *Н. Горбунов*

Редактор издания А. Н. Крылов

Технический редактор С. А. Шабуневич. — Ученый корректор Е. В. Ростовцева

Начато набором 4 января 1936 г. — Подписано к печати 29 сентября 1936 г.

454 стр. (80)

Формат бум. 72 × 110 см. — 28³/₈ печ. л. — 31,02 уч.-авт. л. — 43340 тип. зн. — Тираж 1500
Ленгорлит № 21569. — АНИ № 1108. — Заказ № 59.

Типография Академии Наук СССР. Ленинград, В. О., 9 линия, 12

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Беседы о способах определения орбит комет и планет по малому числу наблюдений	1
Ньютона теория астрономической рефракции	151
Судьба одной знаменитой теоремы	227
Sur la variation des éléments des orbites elliptiques des planètes	249
On Sir Isaac Newton's Formula for the Attraction of a Spheroid on a Point of its Axis	267
On a Theorem of Sir Isaac Newton	273
On Sir Isaac Newton's Method of Determining the Parabolic Orbit of a Comet	279
Перевод акад. А. Н. Крылова, с немецкой рукописи, книги К. Ф. Гаусса — «Теоретическая астрономия» (лекции, читанные в Геттингене в 1820—1821 г., записанные Купфером)	299

БЕСЕДЫ О СПОСОБАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРБИТ КОМЕТ И ПЛАНЕТ ПО МАЛОМУ ЧИСЛУ НАБЛЮДЕНИЙ

Из множества своих появлений, лишь в третий раз по пути, заранее предвычисленному, и во время предугаданное приближается к Земле то светило, которое, может быть, послужило одним из поводов к составлению величайшего творения величайшего гения.

В самом деле, в предисловии к первому изданию «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» Ньютон говорит:

«При издании этого сочинения приложил много труда Edmond Halley, этот в высшей степени проницательный и разносторонний ученый. Он не только правил корректуру и заботился об изготовлении рисунков, но именно он побудил меня к самому составлению этого сочинения; так как он постоянно требовал от меня дать доказательства вида путей небесных тел, то он же просил меня и сообщить их Королевскому обществу, это же последнее своими наставлениями и благосклонностью содействовало тому, что я начал думать об издании этого сочинения».

Комета, теперь Галлеевой называемая, при своем появлении в 1682 г. послужила, вместе с кометою 1680 г., к подтверждению того, что и движение этих светил подчинено великому закону всемирного тяготения.

В пятой главе третьей книги «Principia» Ньютон приводит, между прочими, и свои собственные наблюдения кометы 1680 г. при помощи 7-футового телескопа и микрометра, им же самим изготовленного. Едва ли это не первые наблюдения, произведенные микрометром для определения относительного положения кометы и неподвижных звезд, так что и тут Ньютон явился творцом методы, получившей впоследствии самое широкое развитие.

В этой же главе Ньютон ставит и дает геометрическое решение такой общей задачи:

По трем наблюдениям определить параболическую орбиту кометы, и затем, приведя элементы орбиты кометы 1680 г., говорит: «все эти определения выполнены графически при помощи разделенного на равные

Собр. тр. А. Н. Ермолова, т. VI

части масштаба и таблицы натуральных синусов для нанесения углов по их хордам.

«Я составил, — продолжает Ньютона, — большой чертеж, в котором большая полуось земной орбиты изображалась длиною в $16\frac{1}{3}$ дюймов».

Сличение наблюденных мест кометы и снятых с этого чертежа дает разницы, не превосходящие $2'$ по долготе и $10'$ по широте.

Изложение этой геометрической методы Ньютона и составит предмет первой беседы нашей. Вы увидите, что способ Ньютона представляет собою образец самого чистого геометрического «синтеза», той необычайной проникновенности, которой отличаются «Principia», поэтому, если вы впоследствии забудете ход разсуждений Ньютона, то их возможно лишь припомнить, самому же до них никогда не дойти, не восстановить.

Приблизительно через 100 лет после первого издания «Principia», Лаплас дал методу определения орбит чисто аналитическую, в которой ход рассуждений и выкладок идет совершенно естественно, так сказать сам собою, и раз эта метода показана, ее уже забыть нельзя; изложение этой методы Лапласа составит второй беседы нашей.

Развитие анализа в течение XVIII ст. не могло не оказать существенного влияния на способы определения параболических орбит комет по трем наблюдениям, а одна замечательная теорема Эйлера, затем вновь открытая Ламбертом, внесла значительное упрощение в аналитическое решение этого вопроса, которое теперь и доведено до высокой степени простоты и совершенства; в третьей беседе нашей мы и постараемся дать очерк применимых теперь способов решения поставленной и решенной Ньютоном задачи.

Известно, что в первую ночь XIX ст. была открыта первая из малых планет «Церера». Для них теперь уже не хватает мифологических имен, ибо к марту 1908 г. их насчитывалось уже 659, к которым каждый год прибавляется около 10, по большей части улавливаемых фотографической пластинкой.

Сношения 100 лет тому назад не отличались теперешней быстротой, и известия из Палермо, где наблюдал Piazzi, достигли других астрономов, когда планета была вновь утеряна, ибо Piazzi заболел и свои наблюдения прекратил, а тем временем планета скрылась в лучах Солнца, и казалось, что лишь новая счастливая случайность могла привести ее в поле зрения телескопа. Таким образом появилась надобность в определении орбиты планеты по малому числу близких между собою наблюдений.

За решение этой задачи взялся тогда 24-летний, но уже издавший «Disquisitiones Arithmeticae», Гаусс, впоследствии признанный Princeps.

Mathematicorum. Вот что он сам говорит в своем сочинении: «*Theoria Motus Corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*», изданном в 1809 г.:

«При определении параболических орбит комет по малому числу наблюдений, трудность задачи облегчается тем обстоятельством, что один из элементов известен, ибо большая ось полагается бесконечной по самому предположению, что орбита параболическая.

«Для весьма растянутых орбит комет, подобных Галлеевой, движение вблизи перигелия весьма близко к параболическому, и периодическое возвращение кометы дало время ее оборота, а значит, и большую полуось. Для открытой в 1781 г. планеты Уран определили сперва приближенную круговую орбиту, и так как эксцентриситет истинной орбиты оказался малым, то эта орбита оказалась близкой к действительности и дала возможность, следить за планетой и пополнять по желанию наблюдения ее, послужившие затем и для определения истинной орбиты ее.

«Тем не менее — продолжает Гаусс, — представляется странным, что общая задача: определить орбиту небесного тела, не делая никаких гипотетических предположений, по наблюдениям, не охватывающим большого промежутка времени и не представляющим выбора для применения специальных способов, — оставалась не решенной до начала этого столетия.

«В сентябре месяце 1801 г., — говорит он далее, — в то время как я был занят совершенно другими вопросами, мне пришли некоторые плеи, указывавшие на возможность решения поставленной выше задачи. Как раз в это время пришло известие о новой планете, которая была наблюдаема в Палермо с 1 января по 11 февраля 1801 г. астрономом Piazzi, и были опубликованы самые наблюдения. Мог ли представиться более благоприятный случай, чтобы испытать практическую применимость моих соображений, как для определения орбиты планеты „Церера“, описанной в течение 41 дня геоцентрическую дугу всего в 3° , после чего, почти через год, планету надлежало искать в совершенно другой области неба, нежели там, где она была усмотрена. Первое приближение было сделано в октябре 1801 г., и в первую же ясную ночь (7 декабря 1801 г.), планета была усмотрена в той точке, которую указывали вычисления».

В «*Theoria Motus*» Гаусс излагает свой способ определения орбит планет по трем наблюдениям, доведенный, как и все, что Гаусс издавал, до высшей степени законченности и совершенства. Ознакомлению со способом Гаусса и будут посвящены последующие беседы наши.

Вам может показаться странным, что вместо того, чтобы беседовать с вами о предметах моей специальности, я вдаюсь в область, совершенно ей чуждую. Не состоят ли отдых и развлечение в том, чтобы позаняться иным делом, нежели то, которым занят постоянно, — если многие видят отдых в том, чтобы сидя за шахматной доской соображать самые неожиданные комбинации и придумывать самые замысловатые ходы, то отчего же для отдыха не перечесть лишний раз со вниманием избранные места из произведений величайших гений и для развлечения не побеседовать об их творениях.

Беседа 1

СПОСОБ НЬЮТОНА

§ 1. Основанием всех способов определения орбит комет или планет служат законы Кеплера, послужившие к открытию закона всемирного тяготения и сами из него вытекающие, в обобщенном виде и более точной формулировке, нежели высказанная Кеплером.

Эта более полная Формулировка следующая:

I. Всякая планета или комета движется по коническому сечению (эллипс, парабола или гипербола), в одном из фокусов коего находится Солнце.

II. Движение по этой кривой происходит так, что площади, описываемые радиусом-вектором, соединяющим планету с Солнцем, пропорциональны времени их описания.

III. Для различных небесных тел площади, описываемые радиусом-вектором в единицу времени, пропорциональны корням квадратным из произведений параметров на сумму масс соответствующего светила и Солнца.

Формулировка третьего закона наиболее разнится от данной Кеплером, но легко показать, что эта последняя из нее вытекает.

В самом деле, пусть Q есть удвоенная площадь, описываемая во время t светилом, коего масса μ , причем масса Солнца принята за 1, тогда последний закон показывает, что количество

$$(1) \quad \frac{Q}{t \cdot \sqrt{p} \cdot \sqrt{1 + \mu}} = K$$

есть постоянное для всех тел солнечной системы.

В случае эллиптической орбиты, обозначая через T — время полного оборота и через G — удвоенную площадь орбиты, получим

$$G = 2\pi ab = 2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = 2\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}$$

ибо параметр $p = a(1 - e^2)$, где e есть эксцентриситет орбиты, и предыдущее соотношение будет

$$\frac{2\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}}{T \cdot \sqrt{p} \cdot \sqrt{1 + \mu}} = K$$

или

$$(2) \quad \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{T \cdot \sqrt{1 + \mu}} = K$$

когда μ ничтожно мало, то отсюда следует

$$\frac{a^3}{T^2} = K^2 = \text{постоянной}$$

т. е. кубы больших осей орбит пропорциональны квадратам времен обращения.

Постоянная K в формуле (1) введена Гауссом и называется *Гауссовой постоянной*; он определил ее значение, принимая за a — большую полуось земной орбиты и полагая $a = 1$, за T — продолжительность звездного года равную

$$T = 365.2563835 \text{ средн. солн. суток}$$

и

$$\mu = \frac{1}{354710}$$

тогда:

$$K = 0.017020209895$$

$$\log K = 2.2355814414$$

Несмотря на то, что позднейшие наблюдения показали, что массу земли μ надо увеличить приблизительно на 10%, против принятой Гауссом величины, однако приведенного выше значения Гауссовой постоянной не меняют, т. е. ее как бы считают относящейся к некоторому фиктивному телу, большая полуось орбиты коего несколько меньше полуоси земной орбиты.

§ 2. При определении орбит небесных тел, за основную координатную плоскость принимают плоскость эклиптики и, относя все к гелиоцентрическим координатам, направляют ось x -ов в точку весеннего равноденствия, ось y -ов — в точку, коей долгота 90° , и ось z -ов — в северное полушарие.

Орбита светила определяется следующими элементами:

- 1) Долгота восходящего узла: N .
- 2) Наклонность i , причем этот угол считают между направлениями касательных, при восходящем узле, к эклиптике и к орбите (на небесной

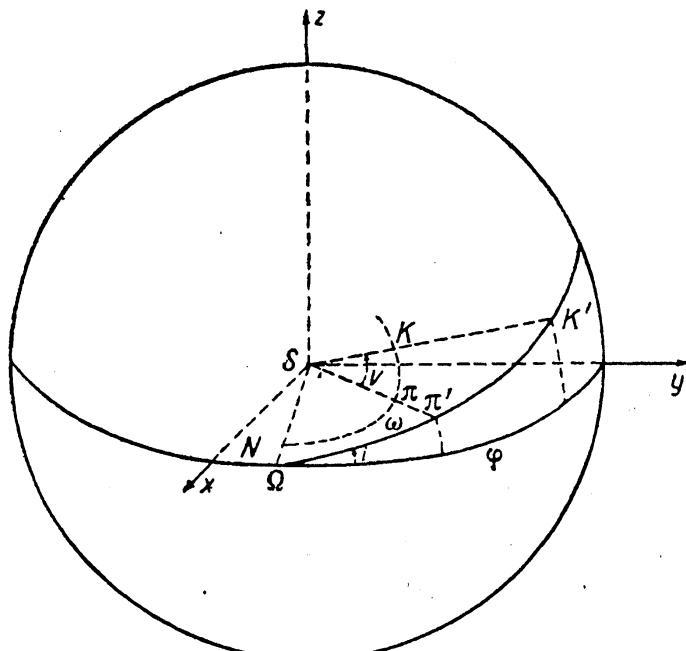
сфере): первой — по счету долгот, второй — по движению светила. Это движение, когда наклонность меньше 90° , называют *прямым*, когда больше 90° — *полярным*.

Эти два элемента определяют положение плоскости орбиты.

3) *Положение перигелия* π , определяемое или его *долготою*, или его *долготою по орбите* ($\Omega + \omega$), или его *аргументом широты* ω .

4) *Большая полуось орбиты* a . (когда орбита эллиптическая).

5) *Эксцентриситет* e .



Фиг. 1.

Для параболической орбиты $e = 1$, и вместо a задают или параметр p , или полупараметр q , равный расстоянию от перигелия до Солнца.

Эта вторая группа элементов, т. е. 3, 4 и 5, определяет положение орбиты в ее плоскости, вид и размеры ее.

6) Положение светила на его орбите в некоторый заданный момент, именуемый *эпохой*. Это положение задается или *истинной аномалией* v , или аргументом широты $\Omega K'$, или *эксцентрической аномалией* i , связанной с истинной соотношением

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} i = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} v$$

или же, в особенности для комет, задают *время прохождения через перигелий*.

Итак, для эллиптической орбиты планеты или кометы надо знать *шесть* элементов, для параболических орбит комет — *пять*.

§ 3. Каждое наблюдение светила определяет положение в пространстве луча зрения, соединяющего центр светила с глазом наблюдателя в данный момент.

Так как движение Земли предполагается известным, то положение сказанного луча вполне определяется, если задать *направление* его. Такое направление определяется *двумя* не зависимыми друг от друга углами (геоцентрическую широту и долготу светила), а так как эти же углы можно бы выразить в функции элементов орбиты планеты, то каждое наблюдение светила доставляет *два* независимых уравнения между этими элементами, значит для полного определения орбиты достаточно *трех* полных наблюдений.

Такова чисто аналитическая постановка вопроса, но получаемые таким образом уравнения оказываются настолько сложными и к тому же трансцендентными, что такой прямой путь решения не приводит к практическим результатам.

Ньютона поставил задачу иначе, связав ее непосредственно с законами Кеплера.

Как уже сказано, каждое полное наблюдение определяет положение в пространстве прямой, на которой светило в рассматриваемый момент находилось; орбита светила — плоская, путь его — коническое сечение, движение по этому пути совершается по закону площадей. Отсюда — такая задача:

Даны три прямые в пространстве, пересечь их плоскостью, проходящей через центр Солнца, так, чтобы в коническом сечении, имеющем своим фокусом центр Солнца, проходящем через упомянутые три точки пересечения, площади секторов, ограниченные радиусами-векторами, идущими в эти точки, равнялись бы исчисленным по законам Кеплера, пользуясь найденным параметром кривой и промежутками времени между наблюдениями.

При Ньютоне были известны лишь планеты до Сатурна, и ему не надо было показывать, как определить тогда уже хорошо известные орбиты их, поэтому он и ограничивается решением поставленной задачи для параболических орбит комет.

В этом случае задача несколько упрощается тем, что нет надобности иметь шесть уравнений, и достаточно вышеупомянутые три прямые пересечь плоскостью так, чтобы *отношение* площадей параболических секторов равнялось отношению промежутков времени описания их.

§ 4. Прежде чем приводить Ньютона о решение поставленной задачи, покажем другую задачу из его же «Arithmetica Universalis», вошедшую в «Principia», а именно:

Задача LVI. («Arithmetica Universalis»). *Имея четыре наблюдения, произведенные в разное время, определить расстояние до Земли и закон движения кометы, предполагая это движение равномерным и прямолинейным.*

Ньютон сперва определяет проекцию искомой прямой на плоскость эклиптики, а в таком случае его задача может быть формулирована так: *определить курс, ход и расстояние до чужого корабля, взяв четыре пеленга его, заметив соответствующие моменты и зная путь своего корабля. Ход чужого корабля предполагается равномерным, курс его — прямолинейным.*

Короче говоря, имеем такую геометрическую задачу: *данные четыре прямые пересечь пятую так, чтобы ее отрезки между данными находились в заданном отношении.* В этом последнем виде эта задача и ее решение помещены и в «Principia», как следствия леммы XXVII первой книги.

Замечательно изящное чисто геометрическое решение этой задачи дал современник Ньютона, знаменитый строитель собора св. Павла в Лондоне, архитектор и математик Wren.

Вот его решение: пусть 1, 2, 3, 4 (фиг. 2) — заданные четыре прямые, x, y, z , соответственно, — отрезки, ими образуемые на пятой, причем x лежит между 1 и 2, y — между 2 и 3, z — между 3 и 4. Надо, чтобы было

$$x:y:z = a:b:c$$

где a, b, c , — три заданных длины или числа.

Отметим (фиг. 2) точки пересечения данных прямых, а именно: $A(1, 2); B(3, 4); C(2, 3); D(2, 4); E(3, 1); I(1, 4)$, и отложим от точки C , соответственно, по прямым 2 и 3 такие отрезки CF и CG , чтобы было:

$$CF:CD = (a+b):c$$

$$CG:CE = (b+c):a$$

Через полученные точки проводим прямые AG и FB до их пересечения в точке H . Через полученную точку H проводим прямую HM , параллельную прямой 3, до ее пересечения с прямой 1 в точке M и прямую HK , параллельную прямой 2, до ее пересечения с прямой 4 в точке K . Прямая MK и есть искомая.

В самом деле, обозначим через S и T — точки пересечения прямых HM с прямой 2 и HK с прямой 3.

Тогда треугольник AMH дает

$$CG : CE = HS : SM = (b + c) : a$$

треугольник же HMK дает

$$HS:SM = OK:MO = (b+c):a$$

Точно так же треугольники HVK и HMK дают

$$CF:CD = (a+b):c = HT:TK = MN:NK$$

что вместе с предыдущей пропорцией и показывает, что прямая MK есть иско-
мая.

Решение это представляется крайне простым, но, чтобы убедиться, насколько оно остроумно и какой требовало находчивости, попробуйте его восстановить через месяц или через два, или вообще после того как вы его забудете, что будет гораздо раньше.

Само собою разумеется, что весьма легко дать решение этой задачи, пользуясь приемами аналитической геометрии, причем потребуется решать уравнения лишь первой степени. Это последнее решение можно вести совершенно естественным и прямым путем, и следовательно, забыть его нельзя.

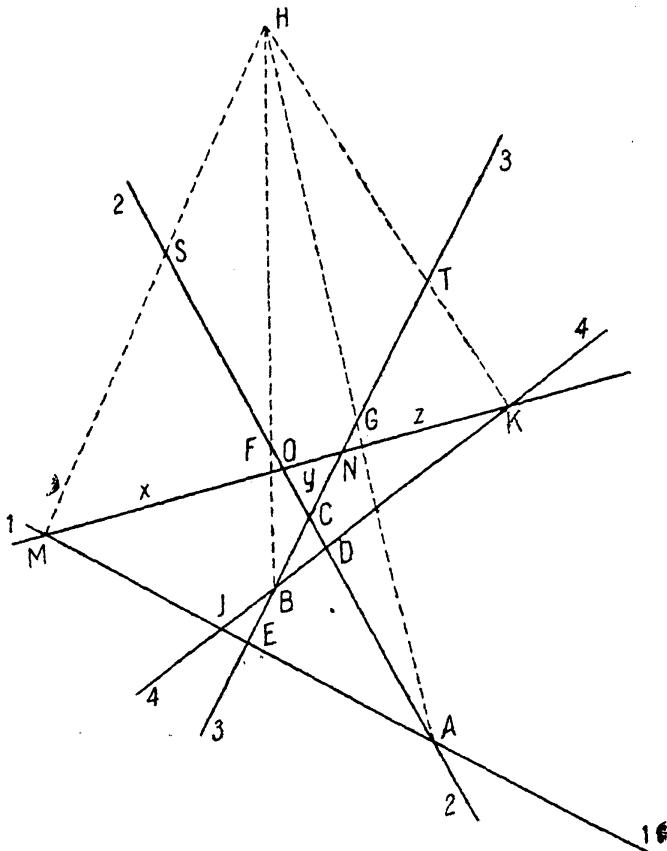
В самом деле, пусть

$$y + a_i x + b_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

суть уравнения четырех заданных прямых, отнесенных к каким бы то ни было осмым координат, и пусть

$$x = x_0 + \lambda t$$

$$y = y_0 + \mu t$$



Фиг. 2.

есть закон движения чужого корабля или кометы, смотря по тому, навигационную или астрономическую задачу мы рассматриваем. Будем считать время t с момента прохождения через первую прямую, тогда места корабля в моменты: $t_1 = 0$, t_2 , t_3 , t_4 , будут:

$$(3) \quad \begin{aligned} x_1 &= x_0; & y_1 &= y_0 \\ x_i &= x_0 + \lambda t_i; & y_i &= y_0 + \mu t \end{aligned} \quad (i = 2, 3, 4)$$

подставляя в уравнение (1), имеем:

$$(4) \quad \begin{aligned} y_0 + a_1 x_0 + b_1 &= 0 \\ y_0 + a_i x_0 + a_i t_i \lambda + t_i \mu + b_i &= 0 \end{aligned} \quad (i = 2, 3, 4)$$

откуда и найдутся неизвестные

$$x_0, y_0, \lambda \text{ и } \mu$$

Решение системы (4) упрощается, если вычесть первое уравнение из трех остальных, и приводится таким образом к решению трех уравнений первой степени с тремя неизвестными:

$$(a_i - a_1)x_0 + a_i t_i \lambda + t_i \mu = b_1 - b_i \quad (i = 2, 3, 4)$$

Не входя в исследование этих трех уравнений, заметим по поводу навигационной задачи, что если путь своего корабля равномерный и прямо-линейный, то задача становится неопределенной.

Курс и ход цели суть необходимые элементы для установки минного прицела, построение, данное Wren'ом, требующее лишь пеленгов и исполнимое одною линейкою, невольно заставляет думать, что есть возможность устроить такой минный прицел, в котором эта задача решалась бы автоматически, помошью сочетания подвижных линеек. Но если попробовать составлять схему такого прицела, то конструкция его получается чрезмерно сложной, по крайней мере я не сумел придумать простой схемы.

При определении кометной орбиты, если комета усмотрена вдали от перигелия, решенная выше задача дает приближенные указания о расстоянии кометы от Земли и от Солнца и о скорости ее движения. Эти указания полезны как исходные приближения при определении орбиты.

§ 5. Ньютона об определении параболических орбит комет по трем наблюдениям говорит следующее:

«Я пробовал решать разными способами эту задачу, которая весьма трудна, для этого я решил задачи, приведенные в первой книге (построение конических сечений, удовлетворяющих разного рода условиям), но затем я пришел к более простому решению, излагаемому ниже».

Этому решению Ньютона предпосыпает следующие леммы.

1) **Лемма VII.** Через данную точку P провести прямую BC так, чтобы ее отрезки BP и PC , получаемые от пересечения с двумя данными прямыми AB и AC , находились в данном отношении.

Проводим через точку P произвольно прямую EPD и откладываем длину PE так, чтобы отношение $PE:PD$ имело заданную величину, проводим EC параллельно AB , точка C принадлежит искомой прямой.

Вторая лемма дает способ подразделить хорду на такие два отрезка, которые относились бы между собою, как времена описания соответствующих им дуг параболы. Эта лемма следующая:

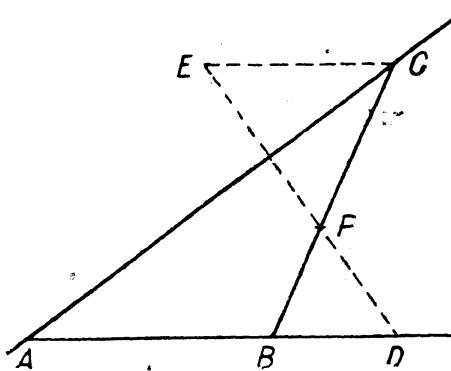
2) **Лемма VIII.** Пусть ABC есть дуга параболы, коей фокус S . Отметим точку I , средину хорды AC , и проведем диаметр $I\mu$, по продолженному диаметру $I\mu$ отложим длину $\mu O = \frac{1}{2} I\mu$ и по продолжению прямой OS отложим длину $S\xi = 2OS$, тогда, если точку ξ соединить с точкой B , то полученный отрезок хорды AE будет приблизительно пропорционален времени описания дуги AB .

Заметим, что точка μ представляет вершину сегмента ABC , т. е. касательная в ней параллельна хорде AC .

Так как времена описания дуг AB и AC относятся, как площади секторов $ASB:ASC$, то надо доказать справедливость приближенного равенства

$$AE:AC = ASB:ASC$$

Эта теорема есть основная в методе Ньютона, доказывает он ее так:



Фиг. 3.

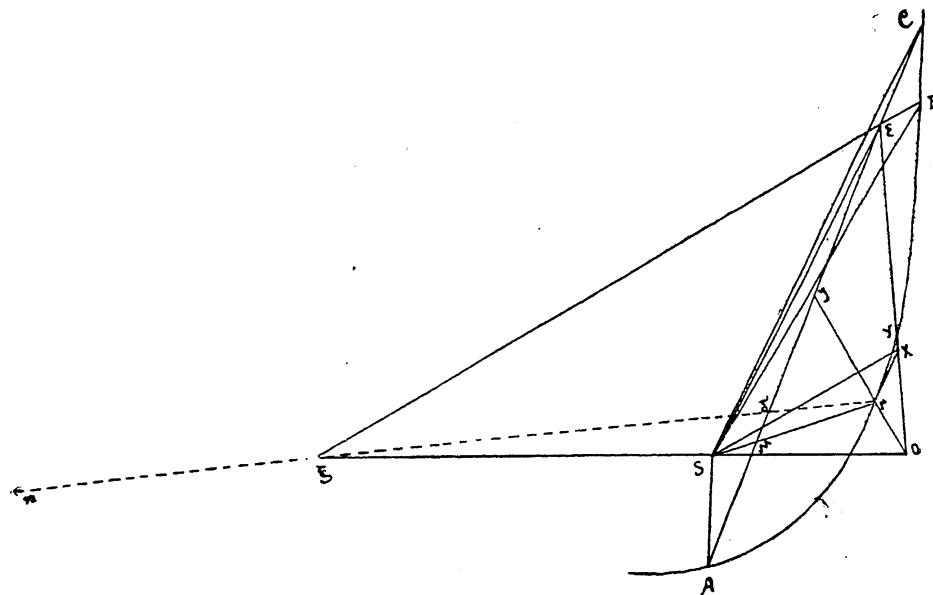
«Проведем EO и отметим точку Y пересечения этой прямой с параболой, проведем касательную в вершине μ и отметим точку ее пересечения с прямой EO , тогда криволинейная площадь $AEX\mu A$ так относится к криволинейной площади $ACY\mu A$, как AE относится к AC , а так как и площади треугольников ASE и ASC находятся в том же отношении, то и полные площади $AEX\mu A$ и $ASCY\mu A$ будут находиться в отношении AE к AC . А так как ξO относится к SO , как 3 к 1, и в том же отношении находятся и EO к XO , то прямая SX параллельна EB , следовательно, если провести прямую BX , то площадь треугольника SEB равна площади треугольника XEB .

Следовательно, если к площади $AEX\mu A$ придать площадь EXB и вычесть площадь SEB , то останется площадь $ASBX\mu A$, равная площади $AEX\mu A$, которая, как указано, относится к площади $ASCY\mu A$, как EA к AC .

Площадь же $ASBX\mu A$ весьма близка к равенству с площадью $ASBY\mu A$, эта же площадь относится к площади $ASCY\mu A$, как время

описания дуги AB относится к времени описания дуги AC , значит и отношение AE к AC весьма близко к отношению этих промежутков времени».

Как видно из этого отрывка, Ньютона ведет свои доказательства всецело по образцу древних, т. е. составляя пропорции и отношения, а не алгебраические выражения для разного рода частей фигуры, чтобы, пользуясь этими выражениями, находить соотношения между этими частями.



Фиг. 4.

Такой способ доказательств нам мало привычен, и следить за ним утомительно, по более привычному нам способу теорему доказали бы так:

$$\text{площ. } AEX\mu A = AI\mu + IEX\mu$$

$$AI\mu = \frac{2}{3} AI \cdot I\mu \cdot \sin I$$

$$IEX\mu = \frac{1}{2} I\mu \cdot [IE + \mu X] \sin I = \frac{2}{3} IE \cdot I\mu \cdot \sin I$$

ибо

$$\mu X = \frac{1}{3} IE$$

Значит,

$$AEX\mu A = \frac{2}{3} (AI + IE) I\mu \cdot \sin I = \frac{2}{3} AE \cdot I\mu \cdot \sin I$$

С другой стороны,

$$\text{площ. } ACBY\mu A = \frac{2}{3} AC \cdot I\mu \sin I$$

Следовательно,

$$ASEX\mu A : ACBY\mu A = AE : AC$$

а так как площади треугольников ASE и ASC , имеющих общую сторону AS и общий угол A , пропорциональны сторонам AE и AC , т. е.

$$ASE : ASC = AE : AC$$

то и площади

$$ASEX\mu A : ASCY\mu A = AE : AC$$

Но, в силу параллельности прямых EB и SX

$$\text{площ. } SEB = \text{площ. } EXB$$

следовательно

$$ASEX\mu A + EXB - SEB = ASE\mu A = ASBX\mu A$$

и, подставляя в предыдущую пропорцию, имеем

$$ASBX\mu : ASCY\mu A = AE : AC$$

Площадь же $ASBX\mu A$ *весъма близка*, как указывает Ньютон, к площади сектора $ASBY\mu A$, и притом тем ближе, чем точка B ближе к вершине μ .

При дальнейшем изложении мы не будем придерживаться буквального перевода текста Ньютона, а будем передавать его рассуждения и доказательства, пользуясь более привычным нам изложением помошью формул и равенств, подобно тому как сделано с вышеприведенным доказательством.

«Когда же точка B совпадает с точкою μ , то вышеуказанное соотношение не *приближенное*, а *точное*», — замечает Ньютон в следствии к этой лемме.

К этой же лемме Ньютон прибавляет еще такое «поучение» (scholium).

«Если провести $\mu\xi$, пересекающую AC в точке δ , и $S\mu$, пересекающую AC в точке M , и отложить длину ξn , которая так относилась бы к μB , как $27M\mu$ относится к $16M\mu$, то прямая nB рассечет хорду AC гораздо ближе к отношению времен, нежели прежде. Точку n надлежит откладывать за точкою ξ , если точка B лежит от вершины параболы дальше, нежели точка μ , и в сторону фокуса, если ближе».

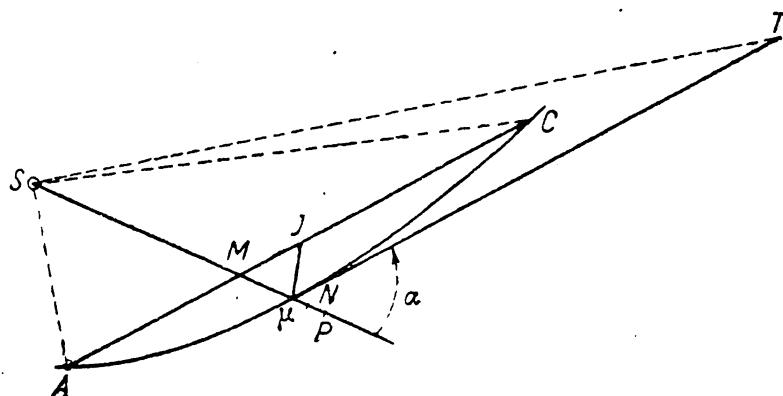
Доказательства Ньютон не приводит.

3) **Лемма IX.** *Длины $I\mu$, μM и $\frac{A\Gamma^2}{4S\mu}$ равны между собою, «ибо величина $4S\mu$ есть удвоенный параметр (latus rectum) параболы, относящийся к вершине μ ».*

Само собою разумеется, что Ньютон предполагает читателя, вполне знакомого с геометрией конических сечений, почему и ограничивает свое объяснение этой леммы вышеприведенными немногими словами, в лемме же XIII первой книги, где приведено это же свойство параболы, он просто делает указание «*patet ex conicis*».

Составив чертеж (фиг. 5) и замечая, что диаметр $I\mu$ параллелен оси параболы и что касательная разделяет пополам угол между радиусом-вектором и продолжением диаметра, видим, что в треугольнике $MI\mu$ углы $M = I = \alpha$, где α есть угол между касательной и диаметром, следовательно

$$I\mu = M\mu$$



Фиг. 5.

Чтобы доказать вторую часть леммы, заметим, что под словом «параметр, относящийся к вершине μ », надлежит разуметь величину $2p_1$ в уравнении параболы

$$Y^2 = 2p_1 X$$

отнесенном к касательной в точке μ и к диаметру μI .

Если первоначальное уравнение параболы есть

$$(1) \quad y^2 = 2px$$

и координаты точки μ назовем через x_0, y_0 , то

$$(2) \quad , \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{y_0}$$

следовательно:

$$(3) \quad \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{p}{\sqrt{p^2 + y_0^2}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p + 2x_0}} \\ \cos \alpha &= \frac{y_0}{\sqrt{p^2 + y_0^2}} = \frac{\sqrt{2x_0}}{\sqrt{p + 2x_0}} \end{aligned}$$

Между координатами (x, y) и X, Y имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}x &= X + x_0 + Y \cos \alpha \\y &= y_0 + Y \sin \alpha\end{aligned}$$

подставляя в уравнение (1), получаем

$$Y^2 \sin^2 \alpha + 2Yy_0 \sin \alpha + y_0^2 = 2p(X + x_0 + Y \cos \alpha)$$

которое принимает вид

$$(4) \quad Y^2 = \frac{2p}{\sin^2 \alpha} X$$

в силу (2) и равенства

$$y_0^2 = 2px_0$$

Таким образом

$$p_1 = \frac{p}{\sin^2 \alpha}$$

С другой стороны, по свойству параболы:

$$S\mu = \frac{p}{2} + x_0$$

иначе:

$$2S\mu = p + 2x_0 = \frac{p}{\sin^2 \alpha} = p_1$$

Значит,

$$4S\mu = 2p_1$$

Из уравнения же параболы:

$$Y^2 = 2p_1 X$$

делая

$$X = I\mu \quad \text{и} \quad Y = AI = IC$$

следует

$$(5) \quad I\mu = \frac{AI^2}{2p_1} = \frac{AI^2}{4S\mu}$$

что и составляет вторую часть леммы.

4) **Лемма X.** Если на продолжении $S\mu$ отложить длины μN и μP так, чтобы было $\mu N = \frac{1}{3} I\mu$ и чтобы

$$SP : SN = SN : S\mu$$

то SP будет такою высотою (расстоянием до Солнца), при которой комета имеет такую скорость, двигаясь с которой равномерно она проходит путь, равный хорде AC , в то же самое время, в какое она описывает дугу параболы $A\mu C$.

В самом деле, если бы комета продолжала двигаться по касательной μT с тою скоростью V_μ , которую она имеет в точке μ , в течение такого же промежутка времени, в который она проходит путь $A\mu C$, то она прошла бы такую длину $S\mu T = SA\mu C$, но площадь

$$\begin{aligned} SA\mu C &= ASC + AC\mu = \frac{1}{2} AC \cdot SM \cdot \sin \alpha + \frac{3}{2} I\mu \cdot AC \cdot \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} AC \left(SM + \frac{4}{3} I\mu \right) \sin \alpha = \frac{1}{2} AC \cdot SN \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

вместе с тем

$$S\mu T = \frac{1}{2} S\mu \cdot \mu T \cdot \sin \alpha$$

следовательно

$$\mu T : AC = SN : S\mu$$

Но, при движении по параболам, скорости обратно пропорциональны корням квадратным из расстояний (скорость $V^2 = \frac{2k^2}{r}$).

Значит, скорость, соответствующая расстоянию SP , которую мы обозначим через V_p , получится из пропорции

$$V_\mu : V_p = SP^{\frac{1}{2}} : S\mu^{\frac{1}{2}}$$

а так как по построению

$$SP = \frac{SN^2}{S\mu}$$

то

$$\frac{SP}{S\mu} = \frac{SN^2}{S\mu^2}$$

и следовательно,

$$V_\mu : V_p = SN : S\mu = \mu T : AC$$

а значит,

$$\frac{\mu T}{V_\mu} = \frac{AC}{V_p} = t$$

где t есть время описания дуги $A\mu C$, что и доказывает теорему.

К этой теореме Ньютон прибавляет такое следствие, которое в тех случаях, когда комета описала небольшую дугу, упрощает построение:

Следствие. Комета, двигаясь равномерно со скоростью, соответствующей расстоянию $S\mu = \frac{2}{3} I\mu$, прошла бы путь, равный хорде AC , в то же время, как она описывает дугу $A\mu C$.

В самом деле,

$$SP = \frac{SN^2}{S\mu} = \frac{\left(S\mu + \frac{1}{3}I\mu\right)^2}{S\mu} = S\mu + \frac{2}{3}I\mu + \frac{1}{9}\frac{I\mu^2}{S\mu}$$

последний член мал, и если им пренебречь, то и получится приближенное равенство

$$SP = S\mu + \frac{2}{3}I\mu$$

5) **Лемма XI.** *Комета, падающая на Солнце без начальной скорости с расстояния $SN + S\mu = \frac{1}{3}I\mu$ под действием постоянной силы, соответствующей этому расстоянию SN , проходит путь, равный $I\mu$, в половину того времени, в течение которого она описывает дугу AC своей орбиты.*

Как показано в предыдущей лемме, комета прошла бы в течение времени описания дуги $A\mu C$ путь, равный хорде AC , двигаясь равномерно со скоростью, соответствующей расстоянию

$$SP = \frac{SN^2}{S\mu}$$

При равных расстояниях, скорости, соответствующие движению по кругу и по параболе, относятся между собою, как $\sqrt{2} : 1$, значит в продолжение рассматриваемого времени t , в движении по кругу радиуса SP , была бы пройдена дуга σ , длина коей есть

$$\sigma = \frac{AC}{\sqrt{2}} = v_0 t$$

Ускорение при расстоянии $r = SP$ есть

$$w = \frac{v_0^2}{r}$$

следовательно в течение времени t высота падения при постоянной силе, а значит, и постоянном w , была бы

$$h = \frac{1}{2}wt^2 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{r} \cdot t^2 = \frac{\sigma^2}{2 \cdot SP} = \frac{AC^2}{4SP}$$

если же взять половинное время $\frac{t}{2}$, то высота

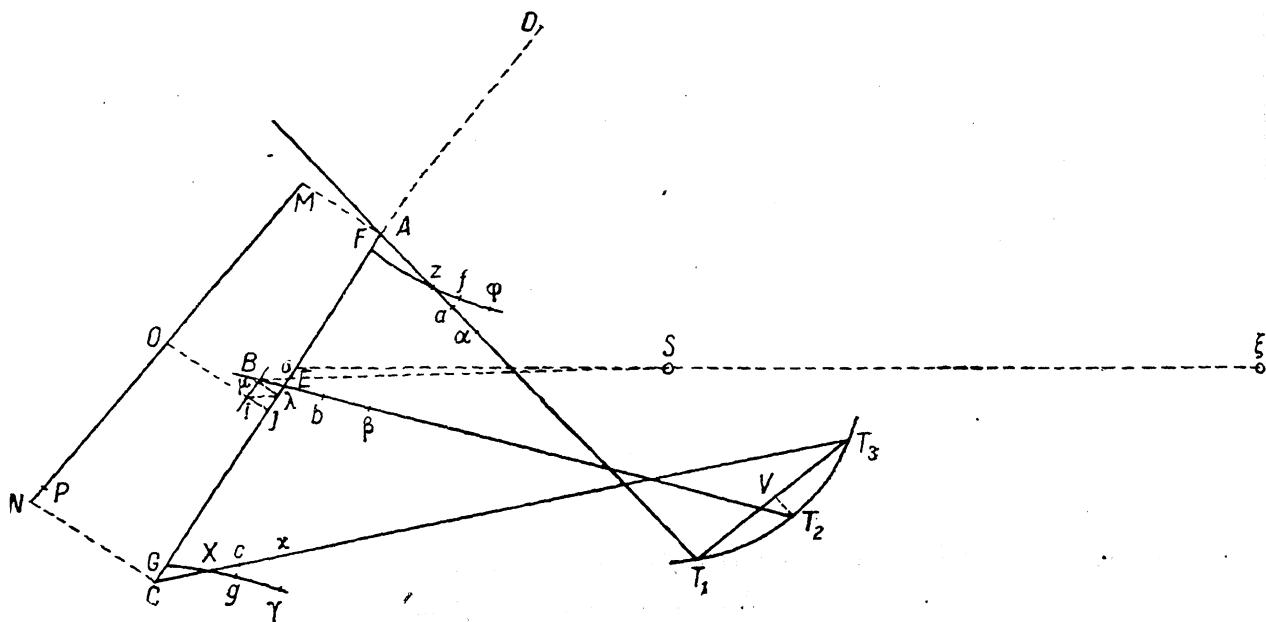
$$h_1 = \frac{1}{2}h = \frac{AC^2}{4 \cdot SP}$$



В расстоянии же SN ускорение, обратно пропорциональное квадратам расстояний, будет $w \cdot \frac{SP^2}{SN^2}$, а следовательно, и высота падения h_2 будет

$$h_2 = h_1 \cdot \frac{SP^2}{SN^2} = \frac{AI^2}{4SP} \cdot \frac{SP^2}{SN^2} = \frac{AI^2}{4 \cdot S\mu} = I\mu = M\mu$$

в силу леммы VIII.



Фиг. 6.

§ 6. После этих предварительных предложений, служащих основанием его способа, Ньютон и переходит к изложению решения задачи XXI третьей книги «Principia».

ЗАДАЧА XXI. По трем наблюдениям определить орбиту кометы, движущейся по параболе.

Из имеющихся наблюдений кометы надо выбрать три таких, промежутки между которыми приблизительно равны между собою, причем тот промежуток, где комета движется медленнее, надо взять несколько больше второго, напр. так, чтобы разность промежутков так относилась к сумме их, как эта последняя приблизительно к 600 дням, иными словами, чтобы точка E (фиг. 4) упала ближе к M и от нее продвигалась бы к I , а не к A .

Пусть (фиг. 6) S представляет Солнце, T_1, T_2, T_3 — места Земли, T_1A, T_2B, T_3C — положения на эклиптику направлений на комету, τ_1 — время, протекшее между первым и вторым наблюдениями, τ_2 — между вторым и третьим, выраженное в средних сутках.

Обозначим через X — ту длину, которую может пройти комета в течение всего промежутка $\tau_1 + \tau_2$, двигаясь равномерно со скоростью, соответствующей (в параболическом движении) среднему расстоянию от Земли до Солнца.

Эта длина найдется по формуле

$$X = \frac{2\pi}{365.256\dots} \cdot a \cdot \sqrt{2}(\tau_1 + \tau_2)$$

где a есть большая полуось земной орбиты, и пусть T_2V есть перпендикуляр, опущенный из места T_2 на хорду T_1T_3 , тогда надо поступать следующим образом:

1) На средней линии T_2B возьмем точку B и примем ее за проекцию на плоскость эклиптики места кометы при втором наблюдении (ниже будет указано, как рассчитать приближенное место точки B) и отложим по направлению к Солнцу длину BE , которая так относится к стрелке T_2V , как произведение $SB \cdot ST_2^2$ относится к кубу расстояния кометы до Солнца, т. е. к кубу гипотенузы такого прямоугольного треугольника, коего один катет есть BS , а другой $T_2B \cdot \tan \beta_2$, где β_2 есть широта кометы при втором наблюдении.

2) Через точку E проводим прямую AEC , отрезки коей относятся между собою, как промежутки времени $\tau_1:\tau_2$, тогда точки A и C будут приближенные проекции мест кометы при первом и третьем наблюдениях, если только B взято верно в месте, соответствующем второму наблюдению.

3) Разделив AC в точке I пополам, проводим перпендикуляр Il до пересечения его в точке i с прямой Bi , параллельной AC . Через i проводим прямую Si до пересечения ее с AC в точке λ и дополняем параллелограмм $i\mu lI$. Берем длину $l\sigma = 3l\lambda$ и проводим через S прямую $\sigma S\xi$, по которой отлагаем $\sigma\xi = 3S\sigma + 3il$.

4) Вытерев прямую AC и точки E и I , проводим от точки B к точке ξ новую длину BE , которая так относится к первой, как BS^2 к $(S\mu + \frac{1}{3}il)^2$, и через полученное новое место точки E проводим новую прямую AEC как и прежде, т. е. чтобы ее отрезки $AE:EC$, как $\tau_1:\tau_2$.

Полученные точки A и C представляют точнее места кометы, нежели в первый раз.

5) Проводим к AC перпендикуляры AM и CN и IO и откладываем по ним длины

$$AM = AT_1 \cdot \tan \beta_1 \quad \text{и} \quad CN = T_3C \cdot \tan \beta_3$$

где β_1 и β_3 — широты при первом и третьем наблюдениях, проводим MN и отмечаем точку O ее пересечения с IO и, построив вновь параллелограмм $iI\lambda\mu$, откладываем по продолженной линии IA длину

$$ID = S\mu + \frac{2}{3}i\lambda$$

и, сняв расстояние OD , расчисляем длину MP по пропорции

$$MP:X = \sqrt{a}:\sqrt{OD}$$

где a есть большая полуось земной орбиты в масштабе чертежа, длина же X расчислена как указано выше, и откладываем длину MP по линии MN .

Если точка P упадет в точку N , то A , B и C и суть проекции мест кометы на плоскость эклиптики. Если же точка P не упадет в N , то по прямой AC надо отложить длину $CG = NP$ так, чтобы точка G лежала в ту же сторону, как P от N .

6) Взяв затем, вместо точки B , другие b , β , строим как описано, исходя от них, точки a , c , g и α , x , γ .

7) Проводим через точки G , g , γ круг (согласную кривую) и отмечаем пересечение его X с прямой T_3C , эта точка X и есть искомая проекция кометы на плоскость эклиптики при третьем наблюдении.

8) Отложив от точек A , a , α длины AF , af , $\alpha\varphi$, соответственно равные CG , cg , $x\gamma$, получим точки F , f , φ , так же расположенные по отношению к прямой T_1A , как G , g , γ по отношению к CT_3 , проводим через них дугу круга, в пересечении которой с прямой AT_1 получаем в точке Z проекцию места кометы при первом наблюдении.

9) Отложив по перпендикулярам к XZ в точках X и Z , соответственно, длины

$$A'Z = T_1Z \cdot \operatorname{tg} \beta_1 \quad \text{и} \quad C'X = T_2X \cdot \operatorname{tg} \beta_3$$

получим места кометы в ее орбите, после чего орбита и найдется по известному построению параболы по двум точкам и фокусу, что и требовалось.

Описывая вышеизложенное построение, я несколько отступил от буквальной передачи текста Ньютона, который не пользуется формулами, вместе с тем я подразделил это описание на пункты для удобства справок и ссылок при выполнении чертежа.

Ньютон весьма кратко поясняет этот чертеж следующими словами:

“Доказательство этого построения следует из леммы, ибо прямая AC точкою E разделяется в отношении времен по лемме VII, как то и над-

лежит по лемме VIII, и BE по лемме IX есть часть прямой BS или $B\xi$, проектированная на плоскость эклиптики и заключенная между дугою ABC и хордою AEC , MP (по следствию леммы) есть длина хорды той дуги, которую описывает по своей орбите комета между первым и третьим наблюдениями и которая должна равняться MN , если только B есть точная проекция места кометы на плоскость эклиптики.

«Кроме того, точки B, b, β следует брать не как-нибудь, а близко к истинному их месту. Если приближенно известен угол AQT_2 , под которым проекция хорды орбиты пересекает прямую T_2B , то под этим углом надо провести прямую AC так, чтобы ее длина AC относилась к $\frac{4}{3}T_1T_3$, как \sqrt{SQ} относится к $\sqrt{ST_1}$, и, проведя прямую SEB , которой часть EB равнялась бы длине стрелки T_2V , получим ту точку B , от которой надо начинать построение. После того как определено первое приближенное положение прямой AC и определена и построена, как описано, длина MP , надо взять на прямой T_2B точку b так, чтобы при обозначении через Y — пересечения линий T_1A и T_2C расстояние Yb так относилось к YB , как

$$\frac{MP \cdot \sqrt{SB}}{MN \cdot \sqrt{Sb}}$$

Таким же образом найдется и третья точка β , если бы понадобилось производить третью операцию. Но при таком способе обыкновенно двух операций довольно. Когда величина $\dot{B}b$ получится больше истинной, то после того, как найдены точки F, f , и G, g , проведя прямые Ff и Gg , получим в их пересечении с прямыми T_1A и T_2C искомые точки X и Z .

§ 7. Как самое построение, так и краткое его доказательство требуют некоторых пояснений, а именно:

По п. 1. Длина BE есть проекция стрелки $B'E'$ на плоскость эклиптики, величина же этой стрелки, представляющей как бы путь, пройденный кометою по направлению к Солнцу равномерно ускоренным движением, по сравнению с таковым же для Земли, будет обратно пропорциональна квадратам соответствующих расстояний, т. е. будет

$$B'E' : T_2V = ST_2^2 : B'S^2$$

чтобы получить BE , надо спроектировать $B'E'$ на плоскость эклиптики, отсюда — множитель $\frac{SB}{SB'}$, и таким образом и получается даваемое Ньютоном выражение

$$BE = T_2V \cdot \frac{ST_2^2 \cdot SB}{SB'^2}$$

Нетрудно этой формуле придать и другой вид, а именно, принимая орбиту Земли за круг радиуса $a = 1$, получили бы углы:

$$\alpha_1 = T_1ST_2 = \frac{2\pi}{365.25} \cdot (t_2 - t_1) = k\tau_1$$

$$\alpha_2 = T_2ST_3 = \frac{2\pi}{365.25} \cdot (t_3 - t_2) = k\tau_2$$

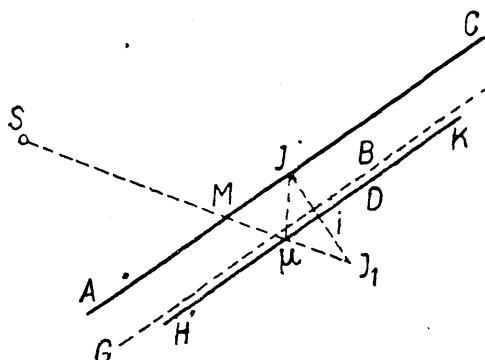
Стрелка f в этом круге была бы

$$f = 2 \sin \frac{\alpha_1}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_2}{2} = \frac{1}{2} \alpha_1 \alpha_2 = \frac{k^2}{2} \cdot \tau_1 \tau_2$$

если ограничиваться точностью до четырех степеней промежутков времени, или углов α_1 и α_2 . Значит, при расстоянии $B'S = r_2$ будет

$$B'E' = \frac{k^2}{2} \cdot \frac{\tau_1 \tau_2}{r_2^2}$$

Ниже мы дадим другое точное выражение этой стрелки или стрелки μM (фиг. 7), следующее из леммы.



Фиг. 7.

Пункт 2. Пояснений не требует.

Пункт 3. Этот пункт является самым существенным в методе, и при-водимое построение, будучи *приближенным*, требует сравнения с *точным*, чтобы видеть степень приближения.

Вообразим сначала, что мы бы делали построение в плоскости самой орбиты, а затем его спроектируем на плоскость эклиптики.

Пусть S есть Солнце — фокус параболы (фиг. 7), AC — ее хорда и HK — параллельная хорде касательная к вершине сегмента; чтобы построить вершину μ , в силу леммы IX надо найти на касательной такую точку μ , соединив которую с фокусом S и с серединой хорды I получили бы *равные* длины $I\mu = \mu M$, для этого, очевидно, стоит только по перпендикуляру к хорде и касательной HK отложить длину $iI_1 = iI$ и полученную точку I_1 соединить с точкой S , тогда в пересечении прямой I_1S с касательной HK , и получится искомая точка μ .

Но у нас касательной к вершине не дано, а дана некоторая точка, лежащая на параболе B — близкая к вершине.

В силу той же леммы, уравнение искомой параболы, отнесенное к ка-сательной к вершине HK и сопряженному диаметру μI , будет

$$Y^2 = 2p_1 X$$

причем

$$2p_1 = 4S\mu$$

Для точки B абсцисса X есть BD , ордината есть μD , значит

$$DB = \frac{\mu D^2}{4S\mu}$$

С другой стороны,

$$I\mu = \frac{AI^2}{4S\mu}$$

Значит,

$$(*) . \quad \frac{DB}{I\mu} = \left(\frac{\mu D}{AI} \right)^2$$

Но длина μD соответствует пути, проходимому кометою в течение времени

$$\frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) - \tau_2 = \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2)$$

длина же AI — времени $\frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2)$, следовательно приближенно будет

$$(**) \quad DB = \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \right)^2 \cdot I\mu$$

Если DB настолько мало по сравнению с $I\mu$, что может быть пренебрегаемо, то прямая BG и может быть принята за касательную и по ней построена вершина параболы.

Во всяком случае, приняв это в первом приближении, снимем от полученного места вершины расстояние до точки B , расчислим BD по формуле (*) и, нанеся точку D , проведем исправленное положение касательной и по ней найдем исправленное место вершины μ_1 .

Получив это место вершины согласно лемме XI, расчисляем длину $I\mu$ или μM по формуле

$$I\mu = \mu M = \frac{1}{2} \cdot K^2 \cdot \left(\frac{t_3 - t_1}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{SN^2}$$

причем K есть Гауссова постоянная и $SN = S\mu_1 + \frac{1}{3}I\mu_1$, и получаем исправленную величину стрелки $I\mu$, пользуясь ею строим исправленное место касательной и т. д., пока два последовательных приближения не будут совпадать.

Но Ньютона выполняет построение не в плоскости орбиты, а в проекции на плоскость эклиптики.

Для проекции орбиты, которая, очевидно, также будет параболою, Солнце S уже не будет фокусом, поэтому в проекции длины $I\mu$ и μM между

собою не равны и вышеприведенного точного построения вершины параболы по данной хорде и касательной к вершине выполнить нельзя, ибо место фокуса неизвестно.

Чтобы обойти это затруднение, Ньютон и пользуется тем обстоятельством, что величина μ' мала по сравнению с $S\mu$ и, значит, линии $S\mu$ и $S\mu'$ можно принять за параллельные, что он и делает, откуда и следует даваемое им построение точки μ , т. е. проекции вершины сегмента параболы; эта точка, очевидно, есть вместе с тем и вершина сегмента проектированной орбиты.

Для получения второго приближения следовало бы расчислить длину μM проекции стрелки и эту исправленную длину отложить по направлению $S\mu$ от точки M , тогда мы получили бы исправленное положение касательной.

Но Ньютон, описывая свое построение, величиною DB пренебрегает, разбирая же его пример и полученные им числа, мы увидим, что он ввел эту поправку и прямо исправлял положение точки E , делящей хорду в отношении промежутков, причем $B\xi$ и $S\mu$ считает параллельными и, следовательно, длину BE равной длине μM , отсюда и следует указанное в п. 4 построение.

Но лемма XI дает длину $I\mu$, которая равна $M\mu$ в плоскости орбиты, но не в проекции, и угол между $I\mu$ и μM — конечный, так что отношение проекций этих длин может отличаться на конечную величину от 1, в каком случае упрощенное построение Ньютона не будет обладать любою степенью точности, а лишь ограниченной.

Очевидно, что, обратив внимание на то точное построение, которое надлежало бы выполнять в плоскости орбиты, нетрудно ввести в описанное Ньютоном построение и надлежащие поправки в тех случаях, когда ими пренебрегать нельзя, как мы подробнее покажем при рассмотрении самого примера, приводимого Ньютоном.

По п. 5. Указанное в лемме X расстояние SP , служащее для расчета длины хорды $A'C'$, выражается формулой

$$SP = \frac{\left(S\mu' + \frac{1}{3}M'\mu'\right)^2}{S\mu'}$$

обозначая буквами со знаками точки, лежащие в плоскости орбиты и коих проекции обозначены теми же буквами без знаков.

Следовательно, будет

$$S\mu'^2 = S\mu^2 + IO^2$$

принимая приближенно, что возвышение точки μ и точки I одинаковы,

$$i'\lambda' = i\lambda \cdot \frac{S\mu'}{S\mu}$$

Подставляя, получим

$$\begin{aligned} SP &= S\mu' \left\{ 1 + \frac{1}{3} \frac{i\lambda}{S\mu} \right\}^2 = S\mu' + \frac{2}{3} i\lambda \cdot \frac{S\mu'}{S\mu} + \dots \\ &= S\mu' + \frac{2}{3} i\lambda + \dots = \sqrt{\left(S\mu' + \frac{2}{3} i\lambda \right)^2 + IO^2} = OD \end{aligned}$$

пренебрегая величинами $\frac{i\lambda^2}{S\mu}$ и ей подобными.

Пункт 6. Пояснений не требует.

Пункты 7 и 8. Точки F, f, ϕ , суть не что иное, как «ложные положения» точки Z . Ясно, что эту часть чертежа можно выполнять в произвольном масштабе, откладывая лишь при точках A, a, α длины, пропорциональные $AF, af, \alpha\phi$, так, чтобы, проведя через точки F, f, ϕ согласную кривую (дугу круга — по Ньютону), получить отчетливое пересечение с прямой $T_1 A$ или вообще с принятою условно за изображение оси $Aa\alpha$, служащей для построения «ложных положений».

После того как получены точки A и C — проекции мест кометы при первом и третьем наблюдениях на плоскость эклиптики, дальнейшее определение элементов построением настолько просто, что Ньютон не считает нужным даже упоминать о нем.

В самом деле, отложив по перпендикулярам к XZ в точках X и Z длины

$$A'Z = T_1 Z \cdot \operatorname{tg} \beta_1 \quad \text{и} \quad C'X = T_3 X \cdot \operatorname{tg} \beta_3$$

где β_1 и β_3 — геоцентрические широты, при первом и третьем наблюдениях получаем совмещенные положения мест кометы A' и C' на плоскости эклиптики.

Продолжив прямую $A'C'$ до пересечения с ее проекцией XZ в точке Ω , получаем точку, принадлежащую линии узлов, соединив эту точку с S , получаем линию узлов, а значит, и долготу восходящего узла.

Вообразив, что плоскость истинной орбиты совмещена с плоскостью эклиптики поворотом около линии узлов, получаем точки A_1 и C_1 , через которые и проводим параболу, имеющую свой фокус в S . Эта парабола и есть искомая орбита в предположении, что она совмещена с эклиптикою.

Заметим, что, выполняя совмещение точек A_1 и C_1 , попутно получаем наклонность.

§ 8. Для первого приложения этой методы, Ньютон берет комету 1680 г., и из ряда ее наблюдений выбирает следующие три:

Число	Ист. время	Долгота Солнца	Долгота кометы	Широта кометы
1680 г. Декабря 21 . .	6 ^ч 36 ^м 59 ^с	281° 6' 44"	305° 8' 12"	21° 42' 13" N
1681 г. Января 5 . .	6 1 38	296 22 18	8 48 53	26 15 7
1681 г. » 25 . .	7 58 42	316 45 36	39 35 0	17 56 30

и получает следующие элементы орбиты:

Долгота восход. узла	271° 53'
Наклонность	61° 20' ¹ / ₈
Расстояние перигелия от узла	8° 38'
Долгота перигелия	267° 43'
Широта перигелия	7° 34' S
Параметр	236.8
Площадь, описываемая в 1 сутки . .	93 585

предполагая, что полуось земной орбиты $a = 10\,000$.

Комета описывает орбиту, двигаясь по порядку знаков (движение прямое), и проходила через перигелий 8 декабря 1680 г. в 0^ч 4^м пополудни.

«Все эти определения,— продолжает Ньютон,— сделаны графически; пользуясь разделенным на разные части масштабом и откладывая углы по хордам, пользуясь таблицею натуральных синусов, я составил большой чертеж (construendo schema satis amplum), в котором полудиаметр земной орбиты принят равным 16¹/₃ англ. дюймов».

Относительно этого чертежа, полагая $a = 10\,000$, Ньютон дает следующие данные:

$$ST_2 = 9842.1; \quad T_2 V = 455$$

Взяв

$$BT_2 = 5657$$

получаем:

$$SB = 9747; \quad BE = 412; \quad S\mu = 9503; \quad i\lambda = 413$$

(при первом приближении).

При втором:

$$BE = 421; OD = 10\ 186; X = 8528.4; MN = 8450 \\ MP = 8475; NP = 25$$

Для дальнейших приближений Ньютон берет

$$T_2 b = 5640$$

и тогда получается

$$T_1 X = 4775 \quad \text{и} \quad T_3 Z = 11\ 322$$

но которым затем и определены вышеприведенные элементы орбиты.

По этим элементам Ньютон вычисляет места кометы и сличает их с наблюденными, само собою разумеется и для других дней, а не только для послуживших для построения. Оказывается, что разности по долготе не превышают $2'$, по широте не превышают $10'$.

Затем Ньютон приводит результаты вычислений Галлея, который определил ту же орбиту «*reg calculum arithmeticum*», и тогда отклонения вычисленных мест от наблюденных не превосходили $3'$.

Для второго примера Ньютон берет комету 1682 г. и определяет для нее параболическую орбиту.

Здесь же Ньютон указывает, что Галлей, заметив сходство элементов у кометы 1682 г. с такою, которая появлялась через промежутки по 75 лет, вычислил для нее эллиптическую орбиту, удовлетворявшую, с доступною тогда точностью, всем наблюдениям.

Приведя затем еще несколько примеров, Ньютон и приходит к заключению, что и кометы в своем движении управляемы законом всемирного тяготения.

§ 9. Я попробовал, вместе с С. В. Вяхиревым, составить тот чертеж, о котором упоминает Ньютон, и в том же самом масштабе $a = 16\frac{1}{3}$ дюйма, буквально следя при выполнении построений приведенным указанием (чертеж был показан на лекции). Мы получили графически элементы, близкие к Ньютоновым но, конечно, далеко не с тою точностью.

При составлении этого чертежа нетрудно было убедиться, что вышеизложенных указаний для графического определения орбиты не должно придерживаться буквально, а применять попутно и «*calculum arithmeticum*», и не все чертить на главном чертеже, а все поправки вычерчивать на отдельном чертеже в масштабе, по крайней мере в 100 раз более крупном, нежели главный чертеж, на что не потребуется большого места, но тогда и получится «*schemam satis amplum*», как о том будет разъяснено ниже.

В самом деле, если длина $a = 10\,000$ изображается на чертеже $16\frac{1}{3}$ дюймами, т. е. 400 мм, то последние знаки таких чисел, как 4775, 11 332, 8475, 10 186 и т. д., которые, как будет показано ниже, *верные*, изобразятся на чертеже величиною в $\frac{4}{100}$ миллиметра, что далеко превышает достижимую в графических построениях точность, или же надо считать, что и в графическом искусстве Ньютона была присуща та же «vis prope divina», как и его гению.

§ 10. Как видно, метода Ньютона обладает такою наглядностью, и вместе с тем *подразделение хорды на части, пропорциональные промежуткам времени, совершается с точностью, далеко превосходящей ту, как это делается в методе Ольберса*, что является естественное желание развить ее аналитически, т. е. Ньютоново построение выразить формулами и по ним произвести вычисления орбит некоторых комет.

Подобное развитие, повидимому, делалось, по крайней мере на это есть указание в статье Valz'a, помещенной в прибавлении к «Connaissance des Temps» за 1835 г. Так, Valz говорит, что в 1744 г. De Chesaux в своей работе о комете этого года прилагает вычисления к методе Ньютона, но мне представилось, что проще развить все нужные формулы, нежели разыскать неизвестно где более 150 лет тому назад напечатанную работу.

К развитию этих формул вновь побуждает также и то обстоятельство, что метода Ньютона в знаменитейших и подробнейших руководствах, как то: Op polzer—«Lehrbuch der Bahnbestimmung», Klinkerfues—«Theoretische Astronomie»—(оба издания), Bauschinger—«Bahnbestimmung der Himmelskörper», или вовсе не упоминается, или упоминается мимоходом как графическая и не могущая доставлять достаточной точности результатов.

Между прочим, Bauschinger в историческом обзоре методов¹ говорит:

«Решение Ньютона выполнялось графическими построениями и было применимо. Галлей определил помощью этого способа множество орбит, и все методы XVIII ст. более или менее придерживаются этого решения. Ньютон пользуется тем свойством, что хорда разделяется средним радиусом-вектором пропорционально временем, т. е. он заменяет, как замечает Ламберт, сектора соответствующими треугольниками; чего недостает в его методе, чтобы сделать ее совершенной — это теоремы Эйлера-Ламберта, вместо которой он довольствуется приближенным соотношением между хордой, радиусами-векторами и промежутком времени».

Как видно из предыдущего, все подчеркнутое неверно.

Ньютон не только не заменяет секторы треугольниками (как то делают теперь в методе Ольберса), но своею леммою VIII дает построение, несравненно

¹ «Bahnbestimmung», p. 388.

точнейшее; ясно, что, разыскивая это построение, он не довольствовался тою точностью, которую доставляло бы подразделение хорды средним радиусом-вектором, и видно что это изумительное построение даже Ньютон нашел не сразу — не даром он называет рассматриваемую задачу «*longe difficillimum*».

Лемма X, связывающая длину хорды с промежутком времени и расстоянием от Солнца до вершины сегмента, имеет совершенно то же значение, как и теорема Эйлера-Ламберта, ибо дает возможность находить длину хорды *не вычисляя* элементов орбиты и таким манером составляет «ложные положения» для разыскания неизвестной. Эта теорема Ньютона не есть приближенная, а совершенно точная.¹

Таким образом метода Ньютона, будучи переведена на расчет, может доставлять результат любой степени точности, ни в чем не уступая методе Ольберса, которую мы изложим в третьей беседе нашей, а в некоторых случаях и превосходя ее.

Чтобы получить требуемые формулы, сделаем следующие обозначения:

$t_1 t_2 t_3$ — моменты наблюдений.

$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ — геоцентрические долготы кометы.

$\beta_1 \beta_2 \beta_3$ — » широты кометы.

$L_1 L_2 L_3$ — долготы Земли.

$R_1 R_2 R_3$ — радиусы-векторы Земли.

$\rho_1 \rho_2 \rho_3$ — укороченные расстояния кометы до Земли, т. е. проекции истинных расстояний на плоскость эклиптики.

$$\begin{aligned} \tau_1 &= k(t_3 - t_1) \\ \tau_2 &= k(t_3 - t_2) \\ \tau_3 &= k(t_3 - t_1) \\ &= \tau_1 + \tau_2 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{промежутки между наблюдениями, выраженные} \\ \text{в астрономической единице времени.} \end{array} \right.$$

$k (\log k = 2.235814)$ — Гауссова постоянная.

Тогда мы будем иметь:

1) координаты Земли:

$$(*) \quad \xi_i = R_i \cos L_i; \quad \eta_i = R_i \sin L_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

2) координаты кометы:

$$(**) \quad x_i = \xi_i + \rho_i \cos \alpha_i; \quad y_i = \eta_i + \rho_i \sin \alpha_i; \quad z_i = \rho_i \operatorname{tg} \beta_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

3) Избрав, как будет указано ниже, величину ρ_2 , вычисляем координаты x_2, y_2 точки B , проекции второго места кометы, и проводим через эту точку прямую $A'C'$ так, чтобы ее отрезки $A'B:BC' = \tau_1:\tau_2$.

¹ См. статью «Судьба одной знаменитой теоремы».

расстояния точек A' и C' до соответствующих мест Земли обозначим через ρ_1' и ρ_3' , тогда, обозначая через l — величину $\frac{A' C'}{\tau_3}$ и через γ — угол между направлением прямой $A' C'$ и осью x -ов, получим:
координаты точки A' :

$$(1) \quad x'_1 = x_2 - l\tau_1 \cos \gamma \quad y'_1 = y_2 - l\tau_1 \sin \gamma$$

координаты точки C' :

$$(1) \quad x'_3 = x_2 + l\tau_2 \cos \gamma \quad y'_3 = y_2 + l\tau_2 \sin \gamma$$

С другой стороны, те же координаты выражаются так:

$$(2) \quad \begin{aligned} x'_1 &= \xi_1 + \rho_1' \cos \alpha_1 & y'_1 &= \eta_1 + \rho_1' \sin \alpha_1 \\ x'_3 &= \xi_3 + \rho_3' \cos \alpha_3 & y'_3 &= \eta_3 + \rho_3' \sin \alpha_3 \end{aligned}$$

Откуда следуют для определения $\rho_1' \rho_3' l$ и γ такие уравнения:

$$\begin{aligned} \rho_1' \cos \alpha_1 &= x_2 - \xi_1 - l\tau_1 \cos \gamma & \rho_1' \sin \alpha_1 &= y_2 - \eta_1 - l\tau_1 \sin \gamma \\ \rho_3' \cos \alpha_3 &= x_2 - \xi_3 + l\tau_2 \cos \gamma & \rho_3' \sin \alpha_3 &= y_2 - \eta_3 + l\tau_2 \sin \gamma \end{aligned}$$

исключая из которых $l \cos \gamma$ и $l \sin \gamma$, имеем:

$$\begin{aligned} \rho_1' \tau_2 \cos \alpha_1 + \rho_3' \tau_1 \cos \alpha_3 &= (x_2 - \xi_1) \tau_2 + (x_2 - \xi_3) \tau_1 \\ \rho_1' \tau_2 \sin \alpha_1 + \rho_3' \tau_1 \sin \alpha_3 &= (y_2 - \eta_1) \tau_2 + (y_2 - \eta_3) \tau_1 \end{aligned}$$

Заметив, что $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$, мы представим решения этих уравнений в таком виде:

$$(3) \quad \begin{aligned} \rho_1' &= l_1 + \frac{\tau_3}{\tau_2} \cdot \frac{(x_2 - \xi_3) \sin \alpha_3 - (y_2 - \eta_3) \cos \alpha_3}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} \\ \rho_3' &= l_3 - \frac{\tau_3}{\tau_1} \cdot \frac{(x_2 - \xi_1) \sin \alpha_1 - (y_2 - \eta_1) \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} \end{aligned}$$

причем

$$(4) \quad \begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} \cdot ((\xi_3 - \xi_1) \sin \alpha_3 - (\eta_3 - \eta_1) \cos \alpha_3) \\ l_3 &= \frac{1}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} \cdot ((\xi_3 - \xi_1) \sin \alpha_1 - (\eta_3 - \eta_1) \cos \alpha_1) \end{aligned}$$

Эти формулы можно было бы написать и сразу из рассмотрения чертежа, заметив что l_1 и l_3 суть расстояния $T_1 Q$ и $T_3 Q$ от Земли до точки Q — пересечения лучей $T_1 A$ и $T_3 C$, но мы предпочли аналитический вывод, чтобы не было никаких сомнений относительно знаков и общности этих

формул при всяких значениях входящих в них величин, считая все углы от 0° до 360° , как принято для долготы вообще.

Необходимо также обратить внимание, что эти выражения содержат величины x_2 и y_2 линейно, следовательно происходящие из них дифференциальные формулы по изменяемости этих переменных будут *абсолютно точные* при всяких значениях приращений δx_2 и δy_2 , а не только до первых степеней этих приращений, как то было бы при нелинейной зависимости.

Найдя по формулам (3) и (4) величины ρ_1' и ρ_3' , вычисляем по формулам (2) координаты точек A' и C' и проверяем все вычисление пропорцией.

$$(5) \quad \frac{x_3' - x_1'}{x_2 - x_1'} = \frac{y_3' - y_1'}{y_2 - y_1'} = \frac{\tau_3}{\tau_1}$$

Вычислив по формулам (**) при избранном значении ρ_2 координаты x_2, y_2, z_2 и по ним величины

$$(6) \quad \begin{aligned} d_2 &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \\ r_2 &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = \sqrt{d_2^2 + z_2^2} \\ \operatorname{tg} \gamma_2 &= \frac{y_2}{x_2} \end{aligned}$$

вычисляем величину стрелки f_0 по формуле

$$(7) \quad f_0 = \frac{1}{8} \tau_3^2 \cdot \frac{1}{r_2^2}$$

Эта формула следует из леммы XI, если принять в первом приближении:

$$SN = r_2$$

и сейчас же исправляем найденное значение по формуле

$$(7') \quad f_1 = \frac{1}{8} \tau_3^2 \cdot \frac{1}{(r_2 + \frac{1}{3} f_0)^2}.$$

Проекция этой стрелки на плоскость эллиптики будет

$$(7'') \quad BE = h = f_1 \cdot \frac{d_2}{r_2}$$

причем направление BE идет от точки B к Солнцу, т. е. составляет с осью x -ов угол $180^\circ - \gamma_2$.

Следуя Ньютонову построению, хорду AC надо проводить через точку E , а не через точку B , как предположено при выводе формул (3), следовательно надо ввести поправки, которые выразятся так:

$$(8) \quad \delta\rho_1' = \frac{\tau_3}{\tau_2} h \cdot \frac{\sin(\gamma_2 - \alpha_3)}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}$$

и

$$(8) \quad \delta\rho_3' = -\frac{\tau_3}{\tau_1} h \cdot \frac{\sin(\gamma_2 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}$$

ибо

$$\delta x_2 = -h \cos \gamma_2; \quad \delta y_2 = -h \sin \gamma_2$$

а значит, соответствующие избранному значению ρ_2 значения укороченных расстояний ρ_1 и ρ_3 будут:

$$\rho_1 = \rho_1' + \delta\rho_1'$$

$$(9) \quad \rho_3 = \rho_3' + \delta\rho_3'$$

Определив величины ρ_1 и ρ_3 , вычисляем координаты точек A и C или непосредственно по формулам (**), или по формулам:

$$(10) \quad \begin{aligned} x_1 &= x_1' + \delta x_1'; & y_1 &= y_1' + \delta y_1'; & z_1 &= z_1' + \delta z_1' \\ x_3 &= x_3' + \delta x_3'; & y_3 &= y_3' + \delta y_3'; & z_3 &= z_3' + \delta z_3' \end{aligned}$$

причем

$$(11) \quad \delta x_1' = \delta\rho_1' \cos \alpha_1; \quad \delta y_1' = \delta\rho_1' \sin \alpha_1; \quad \delta z_1' = \delta\rho_1' \operatorname{tg} \beta_1$$

и

$$(11) \quad \delta x_3' = \delta\rho_3' \cos \alpha_3; \quad \delta y_3' = \delta\rho_3' \sin \alpha_3; \quad \delta z_3' = \delta\rho_3' \operatorname{tg} \beta_3$$

Найдя координаты $x_1 y_1$, $x_3 y_3$ точек A и C , вычисляем длину проекции хорды

$$(12) \quad c_1 = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

и направление этой проекции γ :

$$(13) \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

Сопоставив вышеприведенные формулы с данным в § 6 описанием построения Ньютона, мы увидим, что мы воспроизвели первые два пункта этого построения.

Следует теперь воспроизвести изложенное в п. 3 построение поправок.

Для этого можно поступать двояко:

1) пользуясь только расчетом;

2) пользуясь и расчетом и чертежом, исполняемым в столь крупном масштабе, чтобы определяемые графически малые поправки обладали бы точностью, соответствующую точности всего вычисления. Так, напр., положим, что вычисление ведется на пять знаков по пятизначным логарифмам и величина h оказалась 0.00125, а величины $\rho_1 \rho_3$ и r_2 , как обыкновенно, в несколько десятых, напр.:

$$\rho_1 = 0.58724; \rho_3 = 0.87352; r_2 = 0.98575$$

тогда, приняв за масштаб чертежа $a = 100\ 000$ мм, видим, что h изображается длиною в 125 мм, все величины, связанные с h , изобразятся приблизительно такими же величинами, и значит, все «поправочные параллелограммы» такие, как $\mu\lambda I$ и пр., свободно уместятся на обыкновенном листе писчей бумаги, но ясно, что ни на каком листе нельзя будет нанести точку S , расстояние до которой выражлось бы длиною в 98 м, а точка ξ , расстояние до которой составило бы около 300 м, не уместилась бы и на разбивочном плане Балтийского завода.

Но выносить на чертеж эти точки нет надобности, надо лишь знать направление разных линий, на них идущих от точек чертежа, а эти направления легко определяются расчетом. Судя по приведенным у Ньютона числам, такой или подобный этому чертеж по точности своей, и притом легко до-сграждимой и соответствующей требованиям, он и назвал «schema satis amplum».

Итак, пусть фиг. 8 изображает схематически поправочное построение Ньютона.

Направление хорды AC есть γ , направление SB есть γ_2 , расстояния

$$AI = IC = \frac{1}{2}c_1, \quad AE = \frac{\tau_1}{\tau_3}c_1, \quad EC = \frac{\tau_2}{\tau_3}c_1, \quad BE = h$$

следовательно

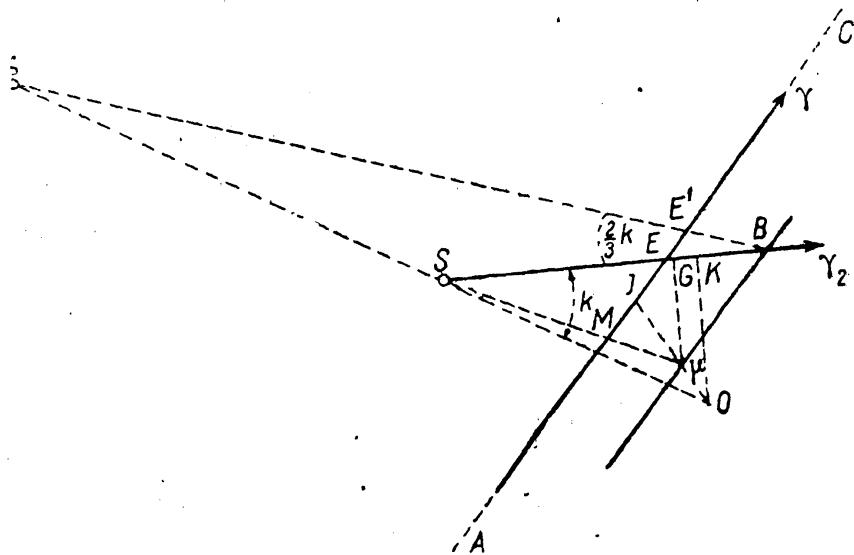
$$(14) \quad IE = \frac{1}{2}(AE - EC) = \frac{1}{2} \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_3} \cdot c_1 = \delta$$

Отметим точку i — проекцию точки I на прямую $B\mu$ (на чертеже не показано), и так как расстояние SB и $S\mu$ весьма велики по сравнению с $B\mu$, то длины BE и $M\mu$ в первом приближении считаем равными, так что

$$BE = \mu M = \mu I = h$$

Затем имеем:

$$\begin{aligned}
 Bi &= -IE - h \cos(\gamma - \gamma_2) \\
 i\mu &= -h \cdot \cos(\gamma - \gamma_2) \\
 B\mu &= -\delta - 2h \cos(\gamma - \gamma_2) = \varepsilon \\
 (15) \quad BG &= -\varepsilon \cdot \cos(\gamma - \gamma_2) = \lambda \\
 Su &= SB - \lambda = d_2 - \lambda \\
 \mu\mu' &= z = z_2 + \varepsilon \cdot \operatorname{tg} j, \quad \text{причем } \operatorname{tg} j = \frac{z_3 - z_1}{c_1}
 \end{aligned}$$



Фиг. 8.

$$\begin{aligned}
 (16) \quad S\mu' &= \sqrt{S\mu^2 + z^2} \\
 SN &= S\mu' + \frac{1}{3} f_0
 \end{aligned}$$

Определив величину SN на основании леммы XI, вычисляем более точное значение f , а именно:

$$(17) \quad f = \frac{1}{8} \tau_3^2 \cdot \frac{1}{SN^2}$$

и затем

$$(18) \quad h = f \cdot \frac{d_2}{r_2}$$

если эта величина окажется чувствительно различающейся от первоначальной, то повторяем вычисление. Получив окончательную величину h , надо рассчитать новое место E' точки E , иными словами — длину EE' .

Для этого сперва расчисляем угол $k = BSO$, который будет весьма малый и выразится формулой:

$$(19) \quad \sin k = k \cdot \sin 1'' = \frac{OK}{SO}$$

$$OK = \varepsilon \cdot \sin(\gamma - \gamma_2) + \frac{1}{2} h \cdot \sin 2(\gamma - \gamma_2)$$

Так как величины BS и SO близки к равенству, то угол

$$\xi BS = \frac{2}{3} k$$

и из треугольника $EE'B$ следует

$$(20) \quad EE' = g = \frac{2}{3} k \cdot \frac{h}{\sin(\gamma - \gamma_2 + \frac{2}{3} k)} \cdot \sin 1''$$

или проще

$$g = \frac{2}{3} k \cdot \frac{h}{\sin(\gamma - \gamma_2)} \cdot \sin 1''$$

Величина EE' обычно оказывается весьма малой, лишь в том случае, когда угол $\gamma - \gamma_2$ сам малый, g достигает влияющего на дальнейший расчет значения.

Заметим здесь же, что величина EE' есть та поправка, которую построение Ньютона вносит в построение, которым пользуются в методе Ольберса, беря вместо точки E' точку E .

Совместное пользование чертежом и расчетом будет состоять в том, что все направления, как уже сказано, вычисляются, все же длины такие, как $B\mu$, μG , OK и пр., строятся и снимаются с чертежа, а затем по формуле (20) расчисляется величина g .

Эта операция соответствует п. 3 Ньютонова построения.

Получив величину $g = EE'$ и ее направление, т. е. γ или $180^\circ - \gamma$, скажем γ , расчисляем поправки:

$$(21) \quad \begin{aligned} \delta\rho_1 &= -\frac{\tau_3}{\tau_2} \cdot g \frac{\sin(\gamma - \alpha_3)}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} \\ \delta\rho_3 &= +\frac{\tau_3}{\tau_1} \cdot g \frac{\sin(\gamma - \alpha_1)}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} \end{aligned}$$

ибо переносу точки E по направлению γ на длину g соответствуют приращения

$$\delta x_2 = g \cos \gamma \quad \text{и} \quad \delta y_2 = g \sin \gamma$$

Присовокупив эти поправки к найденным выше значениям ρ_1 и ρ_3 , получим их окончательные значения, соответствующие избранному значению ρ_2 .

Эта операция соответствует п. 4 построения Ньютона.

Остается теперь применить лемму X и сличить длину хорды, рассчитанную по формуле

$$(13') \quad c = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2}$$

с тою, которая по этой лемме соответствует расстоянию от вершины сегмента до Солнца и промежутку времени τ_3 .

Длина этой хорды σ расчислится по формуле

$$(22) \quad \sigma = \frac{\sqrt{2}\tau_3}{\sqrt{SP}}$$

непосредственно вытекающей из этой леммы и основной формулы движения по параболе:

$$v^2 = \frac{2}{r}$$

где v есть скорость, r — расстояние до Солнца и время τ выражено в астрономических единицах.

Величина же SP по той же лемме выражается так:

$$(23) \quad SP = \frac{SN^2}{S\mu'}$$

величины же SN и $S\mu'$ у нас уже найдены.

Вычислив σ , составляем разность

$$f(\rho_2) = c - \sigma = N$$

Если эта разность равна нулю, то величина ρ_2 есть искомая, если же нет, то принятое значение ρ_2 есть одно из «ложных положений».

Эта операция соответствует п. 5 Ньютонова построения.

Если величину ρ_2 для первого ложного положения избирать не наобум, а поступать так, как будет указано ниже, то принятое значение ρ_2 будет отличаться от истинного не более 0.005, и для исправления не будет надобности повторять расчет полностью, а можно будет применять дифференциальные формулы.

Эти дифференциальные формулы, непосредственно вытекающие из основных, следующие:

$$\begin{aligned}
 \delta d_2 &= \delta \rho_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \gamma_2) \\
 \delta \gamma_2 &= \frac{1}{d_2} \cdot \delta \rho_2 \sin(\alpha_2 - \gamma_2) \\
 \delta z_2 &= \delta \rho_2 \cdot \operatorname{tg} \beta_2 \\
 \delta r_2 &= \frac{1}{r_2} [d_2 \cdot \delta d_2 + z_2 \delta z_2] \\
 \delta h &= \frac{h}{d_2} \cdot \delta d_2 - \frac{3h}{r_2} \cdot \delta r_2 \\
 \delta \rho_1 &= \frac{\tau_3}{\tau_2} \cdot \frac{1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} \cdot [\delta \rho_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) + \delta h \sin(\gamma_2 - \alpha_3) + h \cos(\gamma_2 - \alpha_3) \delta \gamma] \\
 \delta \rho_3 &= -\frac{\tau_3}{\tau_2} \cdot \frac{1}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} \cdot [-\delta \rho_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + \delta h \sin(\gamma_2 - \alpha_1) + h \cos(\gamma_2 - \alpha_1) \delta \gamma_2] \\
 \delta c_1 &= -\delta \rho_1 \cdot \cos(\gamma - \alpha_1) + \delta \rho_3 \cos(\gamma - \alpha_3) \\
 \delta(z_3 - z_1) &= \delta \rho_2 (\operatorname{tg} \beta_3 - \operatorname{tg} \beta_1) \\
 \delta c &= \frac{1}{c} [c_1 \delta c_1 + (z_3 - z_1) \delta(z_3 - z_1)] \\
 \delta f &= -\frac{2t}{r_2} \cdot \delta r_2 \\
 \delta(SP) &= \delta r_2 + \frac{2}{3} \delta f \\
 \delta \sigma &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sigma^3}{\tau_3^2} \cdot \delta(SP) \\
 \delta f(\rho_2) &= \delta(c - \sigma) = \delta c - \delta \sigma
 \end{aligned}$$

Вычислив величину $\delta(c - \sigma)$, мы получим ее в виде $M \cdot \delta \rho_2$, где M будет иметь некоторое вполне определенное численное значение, тогда искомая поправка $\delta_1 \rho_2$ будет

$$(24) \quad \delta_1 \rho_2 = -\frac{N}{M}$$

Определив эту поправку, вычисляем непосредственно величину r_2 по формуле (6), ибо соотношение между r_2 и ρ_2 не линейное, и следовательно, если $\delta \rho_2$ имеет значительную величину, то членами второго порядка относительно $\delta \rho_2$ нельзя было бы пренебрегать, и по найденному r_2 — величины f , SP и k .

Вычислив также непосредственно величину c , составляем разность

$$c - \sigma = N_1.$$

которая окажется обыкновенно весьма малой, по ней находим

$$\delta_2 \rho_2 = -\frac{N_1}{M}$$

и окончательно будет

$$(25) \quad \delta\rho_2 = \delta_1 \rho_2 + \delta_2 \rho_2$$

и

$$\rho_2 = \rho_2' + \delta\rho_2$$

По найденной величине $\delta\rho_2$ составляем $\delta\rho_1$ и $\delta\rho_3$ и исправленные значения ρ_1 , ρ_3 и с.

Этим и оканчивается первая часть работы, т. е. определение двух крайних укороченных расстояний, иными словами, определение мест кометы в пространстве при первом и третьем наблюдениях.

§ 11. Прежде чем идти далее, поясним, каким образом находить приближенное значение ρ_2 , с которого начинать вычисление.

Это определение можно сделать всего проще, выполняя, со сравнительно грубым приближением, Ньютона построение *без построения поправочных параллелограммов*.

Порядок действий такой:

1) Принять за масштаб чертежа $a = 200$ мм, тогда весь чертеж обыкновенно умещается на простом листе писчей бумаги.

2) Вычислив координаты Земли, нанести точки T_1 , T_2 , T_3 .

3) Положить $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$ и вычислить соответствующие значения $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ и, вынеся соответствующие точки, соединить их, соответственно, с точками T_1, T_2, T_3 , получится положения на плоскость эклиптики лучей, на коих комета усматривалась.

4) Взять $\rho_2 = 1.00$ и, через полученную точку, построить хорду AC и, рассчитав величину самой хорды, сличить ее с величиною σ , расчисляемой по формуле

$$\sigma = \frac{\sqrt{2} \tau_3}{\sqrt{r_3}}$$

5) Если окажется, что

$$c > \sigma$$

то $\rho_2 < 1.00$, и наоборот.

6) Положим, окажется $\rho_2 < 1.00$, тогда взять $\rho_2 = 0.50$ и повторить построение. Затем простая пропорция доставит более близкое значение ρ_2 и найдутся два предела, отличающиеся на 0.10, между которыми ρ_2 заключается, т. е для одного из этих значений $c - \sigma$ отрицательное, для другого — положительное.

7) Избрать новый масштаб, обыкновенно $a = 1000$ мм или $a = 2000$ мм, и в этом увеличенном масштабе составить новый чертеж, на котором выполнить построение хорды AC , не делая поправочных параллелограммов, но нанося точку E , рассчитывая h как указано выше.

Этот второй чертеж и доставит значение ρ_2 с точностью до 0.005 даже при грубом исполнении карандашом, самыми обыкновенными чертежными инструментами, ибо величина 0.005 будет изображаться длиною в 5 мм или в 10 мм.

Определенное таким образом значение ρ_2 и можно принять за исходное для расчета.

Повидимому, и сам Ньютона придерживался такого порядка работы, ибо вот его слова из сочинения «De mundi systemate», где он дает другой прием для определения кометных орбит: «Haec omnia perago primum graphice opere celeri et rudi, dein graphice maiori cum diligentia ultimo per computationem numeralem», т. е. «все это я исполняю сперва графически наскоро и грубо, затем графически с вящею тщательностью и наконец числовым расчетом».

Всякий же числовой расчет у Ньютона исполнялся не иначе, как «accuratissime».

§ 12. Ранее чем приступить ко второй части работы, т. е. к определению элементов орбиты по найденным двум положениям, полезно сделать следующую проверку.

Эйлер в 1743 г., а затем Ламберт в 1761 г. дали следующее соотношение между двумя радиусами-векторами r_1 и r_3 , хордою s , промежутком времени $t_3 - t_1$, при движении светила по параболе:¹

$$(26) \quad 6k(t_3 - t_1) = (r_1 + r_3 + s)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_3 - s)^{\frac{3}{2}}$$

причем знак $-$ надо брать в том случае, когда угол между радиусами-векторами, считаемый по направлению движения, иначе разность аномалий, более 180° , знак $+$ — когда он менее, как то обыкновенно и бывает.

Найдя ρ_1 и ρ_2 , вычисляем координаты $x_1, y_1, z_1, x_3, y_3, z_3$ и по ним радиусы-векторы:

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$
$$r_3 = \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}$$

и затем, по формуле Эйлера, величину хорды s .

¹ Эта формула будет выведена в третьей беседе; см. также статью: «Судьба одной знаменитой теоремы».

Эта величина должна в точности равняться величинам c и σ , определенным по методе Ньютона, разность может достигать лишь нескольких единиц последнего знака, как неизбежной при вычислении по логарифмам погрешности.

Для облегчения вычисления по формулам (26) составлены таблицы; составление их мы объясним при изложении методы Ольберса, а здесь скажем только, что это вычисление делается так:

$$(27) \quad s = (r_1 + r_3) \cdot \eta \cdot \mu$$

причем

$$(27') \quad \eta = \frac{2k(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\tau_3}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}}$$

$\log \mu$ находятся в таблице по аргументу η .

Такая таблица помещена, напр., в «Lehrbuch der Bahnbestimmung» Oppolzer'a, в курсе Астрономии Faye и, наконец, в собрании астрономических таблиц Bauschinger'a — «Tafeln zur theoretischen Astronomie».

Во всяком случае, когда величины r_1 и r_3 вычислены, то, если нет под руками указанных таблиц, следует сделать проверку поправочного построения Ньютона, исполняя это построение не в проекции на плоскость эклиптики, а в плоскости самой орбиты.

Такая проверка необходима по следующей причине: в § 7, указывая точное построение, мы упоминали, что в проекции Солнце не будет служить фокусом той параболы, которая представляет проекцию орбиты, и тогда длины $I\mu$ и $M\mu$, а значит, и $I\mu$ и $i\lambda$, не будут равны между собою, и их отношение может отличаться на 1 конечную, а не на малую величину, Ньютон же, рекомендуя построение поправочных параллелограммов, как бы тем самым неявно принимает сохранение равенства $I\mu = M\mu = i\lambda$, иными словами, поступает так, как будто бы и в проекции Солнце остается фокусом.

В большей части случаев, происходящая от такого допущения, погрешность не чувствительна при вычислении на пять и даже на шесть знаков, но когда величина h — значительная, как то имеет место в примере Ньютона, и угол $(\gamma_2 - \gamma)$ — малый, то погрешность становится чувствительной даже при вычислении на пять знаков.

Когда r_1 и r_3 и s вычислены, то по этим трем сторонам строится треугольник SAC , и в нем снимается угол SIC , где I есть средина хорды;

после чего или строится чертеж в достаточном масштабе, или производится расчет, при этом берется, само собою разумеется, сперва:

$$BE = f = \frac{1}{8} \tau_3^2 \cdot \frac{1}{r_2^2}$$

Найдя, по этому построению, величины $S\mu$, SN и SP , и вычислим хорду

$$\sigma = \frac{\sqrt{2} \tau_3}{\sqrt{SP}}$$

Если бы оказалось, что разница с предыдущим значением чувствительна, то нет надобности повторять весь расчет, а стоит только определить соответствующее разности $c - \sigma$ значение δr_2 , по нему δr_1 и δr_3 , по этим последним $\delta x_1 \delta y_1 \delta z_1$, $\delta x_3 \delta y_3 \delta z_3$ и затем:

$$(28) \quad \begin{aligned} \delta r_1 &= \frac{1}{r_1} (x_1 \delta x_1 + y_1 \delta y_1 + z_1 \delta z_1) \\ \delta r_3 &= \frac{1}{r_3} (x_3 \delta x_3 + y_3 \delta y_3 + z_3 \delta z_3) \end{aligned}$$

Результат получится тождественный с даваемым теоремой Эйлера.

Если же упомянутые таблицы есть под руками, то, расчислив хорду s или σ по формуле Эйлера, совершенно так же исправляем r_1 и r_3 .

Понятно, что все дифференциальные поправки расчисляются с соответственно меньшей относительной точностью, т. е. или логарифмической линейке, или по трех- или четырехзначным логарифмам.

§ 13. Когда таким образом величины

r_1 , r_3 и c

найдены, то элементы орбиты определяются по следующим формулам, которые мы выведем в третьей беседе нашей:

а) Гелиоцентрические координаты: широта θ и долгота λ :

$$(29) \quad \begin{aligned} \sin \theta_1 &= \frac{z_1}{r_1} & \sin \theta_3 &= \frac{z_3}{r_3} \\ \operatorname{tg} \lambda_1 &= \frac{y_1}{x_1} & \operatorname{tg} \lambda_3 &= \frac{y_3}{x_3} \end{aligned}$$

б) Долгота узла N :

$$(30) \quad \operatorname{tg} \left[\frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2} - N \right] = \frac{\sin(\theta_1 + \theta_3)}{\sin(\theta_1 - \theta_3)} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\lambda_1 - \lambda_3)$$

в) Наклонность i :

$$(31) \quad \operatorname{tg} i = \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\sin(\lambda_1 - N)} = \frac{\operatorname{tg} \theta_3}{\sin(\lambda_3 - N)}$$

надо вычислить по обеим формулам, согласие должно быть *полное*, в этом — контроль вычисления.

г) Истинные аномалии v_1 и v_3 :

$$(32) \quad \sin^2 \frac{1}{2}(v_3 - v_1) = \frac{(p - r_1)(p - r_3)}{r_1 r_3}$$

где:

$$2p = r_1 + r_3 + c$$

$$(33) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{4}(v_3 - v_1) = \frac{\sqrt{r_3} - \sqrt{r_1}}{\sqrt{r_3} + \sqrt{r_1}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{4}(v_3 - v_1)$$

д) Аргументы широты u_1 , u_3 :

$$(34) \quad \cos u_1 = \cos \theta_1 \cos(\lambda_1 - N); \quad \cos u_3 = \cos \theta_3 \cos(\lambda_3 - N)$$

если углы u_1 и u_3 — малые, то их надо вычислять по формулам:

$$\operatorname{tg} u_1 = \frac{\operatorname{tg}(\lambda_1 - N)}{\cos i}$$

$$\operatorname{tg} u_3 = \frac{\operatorname{tg}(\lambda_3 - N)}{\cos i}.$$

Контроль:

$$(35) \quad u_3 - u_1 = v_3 - v_1$$

е) Аргумент широты перигелия ω :

$$(36) \quad \omega = u_1 - v_1 = u_3 - v_3$$

ж) Полупараметр — расстояние перигелия до Солнца q :

$$(37) \quad \sqrt{q} = \sqrt{r_1} \cos \frac{1}{2} v_1 = \sqrt{r_3} \cos \frac{1}{2} v_3$$

Надо вычислять по обеим формулам, согласие должно быть *полное*, в этом — контроль.

з) Время прохождения через перигелий:

$$(38) \quad t_1 - t_0 = q^{\frac{3}{2}} m_1$$

$$t_3 - t_0 = q^{\frac{3}{2}} m_3$$

Величины m_1 и m_3 находятся в так называемой таблице Barker'a параболического движения, соответственно, по аргументам v_1 и v_3 .

и) Для проверки надо вычислить место при *втором* наблюдении и сличить вычисленные по элементам геоцентрические широты и долготы с наблюденными. Формулы, для этого служащие, очевидны из вышеприведенных.

§ 14. Само собою разумеется, что изучая Ньютона и желая показать аналитическое развитие его методы, надо помнить его слова: «in scientiis addiscendis exempla non minus docunt quam praecepta», т. е. «при изучении наук примеры не меньше поучают, нежели правила».

Поэтому мы дадим ряд примеров, вполне подробно приводимых, в той последовательности и по той методе, как приведено в §§ 10, 11 и 12.

По поводу этих формул необходимо заметить, что ими лишь устанавливается последовательность вычислений и операций, соответствующая даваемому Ньютоном построению, но для вычисления им следует придать более удобный вид, это дает не только упрощение в работе, но повышает точность результатов, давая вместе с тем возможность пользоваться логарифмами с меньшим числом знаков.

Мы ограничимся лишь самыми необходимыми преобразованиями, так как образцы подобного рода преобразований, и притом образцы, доведенные до высшего совершенства, мы укажем при изложении методы Гаусса, который на эту сторону дела обращал самое серьезное внимание.

Как видно из § 10, первая часть работы заключается в вычислении двух родов величин: r'_1 , r'_3 и c , r_1 и r_3 , затем поправок к ним.

Эти поправки могут быть вычисляемы по основному принципу всякого рода численных вычислений, с относительной точностью, во столько раз меньшей относительной точности основных величин, во сколько раз поправка меньше самой величины.

Поэтому, если поправка составляет, напр., $\frac{1}{100}$ основной величины и если эта величина вычисляется по семизначным логарифмам, то поправку достаточно вычислить по пятизначным, а если сама величина вычисляется по пятизначным таблицам, то поправку можно вычислять по трехзначным, иными словами — по логарифмической линейке 50-санитметровой длины.

Итак, можно сказать, что вычисление поправок обладает желаемою степенью простоты и точности, даже если его выполнить по формулам § 10.

При вычислении основных величин самым неудобным и вносящим наибольшую неточность обстоятельством является то, когда такая величина

определяется как разность двух чисел, каждое из которых в большее число раз ее превосходит. Так, напр., если число

$$a = b - c$$

причем

$$b = 15.78937$$

$$c = 15.77362$$

и в них последний знак сомнителен, как то будет, если числа получились от вычисления по семизначным логарифмам, то число $a = 0.01575$ будет иметь всего три знака первых, а значит, и в дальнейшем все числа, с ним, связанные, будут обладать точностью всего до 3-го знака, и таким образом, из-за утраты в разности $b - c$ первых значащих цифр, утрачивается точность всего вычисления.

С этого рода обстоятельством и приходится считаться, в особенности при вычислении величин ρ_1' и ρ_3' , являющихся как раз основными для всего дальнейшего расчета.

Поэтому формулы (3) и (4) и требуют такого преобразования, чтобы все те большие величины, которые пропадают в разности, были бы исключены в самой формуле, т. е. чтобы эта разность вычислялась непосредственно, не вычисляя слагаемых.

Чтобы этого достигнуть, поступим так: в выражениях (3) и (4) заменим величины x_2 , y_2 , ξ_1 , η_1 , ξ_3 , η_3 их величинами (*) и (**), тогда получим формулы:

$$(39) \quad \begin{aligned} \rho_1' &= a_1 + b_1 \rho_2 \\ \rho_3' &= a_3 + b_3 \rho_2 \end{aligned}$$

причем

$$(40) \quad b_1 = \frac{\tau_3}{\tau_2} \cdot \frac{\sin(\alpha_3 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}; \quad b_3 = \frac{\tau_3}{\tau_1} \cdot \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}$$

величины же a_1 и a_3 определяются равенствами:

$$(41) \quad \begin{aligned} a_1 \cdot \tau_1 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_1) &= \tau_3 R_2 \sin(\alpha_3 - L_2) - \tau_2 R_1 \sin(\alpha_3 - L_1) - \tau_1 R_3 \sin(\alpha_3 - L_3) \\ - a_3 \tau_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) &= \tau_3 R_2 \sin(\alpha_1 - L_2) - \tau_2 R_1 \sin(\alpha_1 - L_1) - \tau_1 R_3 \sin(\alpha_1 - L_3) \end{aligned}$$

Величины b_1 и b_3 имеют вполне удобный для вычисления по непосредственно заданным величинам вид.

Исключение составляет тот случай, когда движение кометы по долготе весьма медленное и, значит, вследствие самих погрешностей наблюдений,

разности $\alpha_3 - \alpha_2$ и $\alpha_3 - \alpha_1$ не обладают достаточной относительной точностью.

Этот случай равносителен тому, что линии T_1A , T_2B и T_3C на чертеже Ньютона между собою почти параллельны; ясно, что в этом случае построение Ньютона становится неопределенным, и этот случай требует отдельного рассмотрения, которое мы и сделаем, дав вместе с тем пример кометы 1781 г., где он как раз имеет место.

Итак, в общем случае, для вычисления величин b_1 и b_3 , послужат формулы (39).

Если бы мы стали вычислять величины a_1 и a_3 по формуле (41) и пожелали бы получить эти величины с точностью, соответствующей точности величин b_1 и b_3 , то у нас как раз оказалось бы указанное выше неблагоприятное обстоятельство, ибо, как мы покажем, величины a_1 , a_3 всегда малые, тогда как b_1 и b_3 близки к 1, если только долготы комет изменяются приблизительно пропорционально времени.

Итак, возьмем равенство, определяющее величину a_1 , и, заметив, что $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$, напишем его так:

$$\begin{aligned}\tau_2 \cdot a_1 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) &= \tau_1 [R_2 \sin(\alpha_3 - L_2) - R_3 \sin(\alpha_3 - L_3)] \\ &\quad + \tau_2 [R_2 \sin(\alpha_3 - L_3) - R_1 \sin(\alpha_3 - L_1)]\end{aligned}$$

Затем в первой скобке сделаем:

$$R_3 = \frac{R_3 + R_2}{2} + \frac{R_3 - R_2}{2}$$

$$R_2 = \frac{R_3 + R_2}{2} - \frac{R_3 - R_2}{2}$$

и во второй:

$$R_2 = \frac{R_2 + R_1}{2} + \frac{R_2 - R_1}{2}$$

$$R_1 = \frac{R_2 + R_1}{2} - \frac{R_2 - R_1}{2}$$

тогда получим:

$$\begin{aligned}\tau_2 a_1 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) &= \tau_1 (R_3 + R_2) \sin \frac{1}{2}(L_3 - L_2) \cos \left(\alpha_3 - \frac{L_3 + L_2}{2} \right) \\ &\quad - \tau_2 (R_2 + R_1) \sin \frac{1}{2}(L_2 - L_1) \cos \left(\alpha_3 - \frac{L_2 + L_1}{2} \right) \\ &\quad - \tau_1 (R_3 - R_2) \cos \frac{1}{2}(L_3 - L_2) \sin \left(\alpha_3 - \frac{L_1 + L_2}{2} \right) \\ &\quad + \tau_2 (R_2 - R_1) \cos \frac{1}{2}(L_2 - L_1) \sin \left(\alpha_3 - \frac{L_1 + L_2}{2} \right)\end{aligned}$$

Эта формула была бы уже более благоприятна для вычисления, так как каждый ее член заключает по малому множителю, и притом два последних члена — даже по весьма малому, ибо разности радиусов-векторов Земли за малые промежутки времени весьма малы. Но все-таки продолжим преобразование дальше.

Возьмем сперва первые два члена, которые являются главными, и сделаем:

$$E = \tau_1(R_3 + R_2) \sin \frac{1}{2}(L_3 - L_2)$$
$$F = \tau_2(R_2 + R_1) \sin \frac{1}{2}(L_2 - L_1)$$

и затем:

$$E = \frac{E+F}{2} + \frac{E-F}{2}$$
$$F = \frac{E+F}{2} - \frac{E-F}{2}$$

тогда эти два члена дают:

$$(E+F) \cdot \sin \frac{1}{4}(L_3 - L_1) \cdot \sin \left(\alpha_3 - \frac{L_3 + 2L_2 + L_1}{4} \right)$$
$$+ (E-F) \cdot \cos \frac{1}{4}(L_3 - L_1) \cdot \cos \left(\alpha_3 - \frac{L_3 + 2L_2 + L_1}{4} \right)$$

Это выражение уже вполне благоприятно для вычислений, ибо числа E и F оба заключают малый множитель и оба положительные и почти равные между собою, их сумма $E+F$ определится, значит, без всякой утраты точности, а затем эта малая положительная величина вновь множится на малого множителя $\sin \frac{1}{4}(L_3 - L_1)$.

Разность $E-F$ может быть вычислена или непосредственно, или следующим образом: долготы Земли изменяются пропорционально времени приблизительно по 1° в сутки, значит величины $\frac{1}{2}(L_3 - L_2)$ и $\frac{1}{2}(L_2 - L_1)$ будут заключать столько градусов, сколько суток в соответствующем полу-промежутке между наблюдениями, т. е. для новейших наблюдений около 2, для таких малых дуг синусы пропорциональны углам, и значит,

$$\tau_1 \cdot \sin \frac{1}{2}(L_3 - L_2) = \tau_2 \sin \frac{1}{2}(L_2 - L_1)$$

а следовательно,

$$(42) \quad E - F = (R_3 - R_1) \tau_1 \cdot \sin \frac{1}{2}(L_3 - L_2)$$
$$= (R_3 - R_1) \tau_2 \sin \frac{1}{2}(L_2 - L_1)$$

а если вычислить оба эти выражения и взять среднее, то $E - F$ могло бы быть получено с такою точностью, которая превышает ту, с каковою известны R_3, R_1 , и которая при первом вычислении орбиты, где возмущения не принимаются во внимание и где пренебрегают параллаксом и aberrацией, не нужна.

Перейдем к последним двум членам выражения a_1 .

Делаем:

$$G = \tau_1(R_3 - R_2) \cos \frac{1}{2}(L_3 - L_2)$$

$$H = \tau_2(R_2 - R_1) \cos \frac{1}{2}(L_2 - L_1)$$

и затем:

$$G = \frac{G + H}{2} + \frac{G - H}{2}$$

$$H = \frac{G + H}{2} - \frac{G - H}{2}$$

тогда эти два члена дадут:

$$+ (G + H) \sin \frac{1}{4}(L_3 - L_1) \cdot \cos \left(\alpha_3 - \frac{L_1 + 2L_2 + L_3}{4} \right)$$

$$- (G - H) \cos \frac{1}{4}(L_3 - L_1) \cdot \sin \left(\alpha_3 - \frac{L_1 + 2L_2 + L_3}{4} \right)$$

Заметив, что углы $\frac{L_3 - L_2}{2}$ и $\frac{L_2 - L_1}{2}$ — малые, так что косинусы их весьма близки к 1, и что произведения $\tau_3(R_3 - R_2)$ и $\tau_2(R_2 - R_1)$, в силу пропорции

$$(*) \quad \frac{R_3 - R_2}{\tau_2} = \frac{R_2 - R_1}{\tau_1}$$

равны между собою, видим что величина $G - H$ будет ничтожно малой, и этим членом можно всегда пренебрегать.

Пропорция же (*) имеет место тем точнее, чем изменения R происходят быстрее, когда же эта пропорция не имеет места, т. е. вблизи перигея и апогея, то сами разности $R_3 - R_2$ и $R_2 - R_1$ ничтожно малы.

Итак, окончательно имеем:

$$(43) \quad a_1 \cdot \tau_2 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_1) = (E + F) \sin \frac{1}{4}(L_3 - L_1) \sin(\alpha_3 - L_0)$$

$$+ (E - F) \cos \frac{1}{4}(L_3 - L_1) \cos(\alpha_3 - L_0)$$

$$+ (G + H) \sin \frac{1}{4}(L_3 - L_1) \cos(\alpha_3 - L_0)$$

$$- (G - H) \cos \frac{1}{4}(L_3 - L_1) \sin(\alpha_3 - L_0)$$

$$\begin{aligned}
 -a_3 \tau_1 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) &= (E + F) \sin \frac{1}{4} (L_3 - L_1) \sin(\alpha_1 - L_0) \\
 &\quad + (E - F) \cos \frac{1}{4} (L_3 - L_1) \cos(\alpha_1 - L_0) \\
 (43') \quad &\quad + (G + H) \sin \frac{1}{4} (L_3 - L_1) \cos(\alpha_1 - L_0) \\
 &\quad - (G - H) \cos \frac{1}{4} (L_3 - L_1) \sin(\alpha_1 - L_0)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 E &= \tau_1 (R_3 + R_2) \sin \frac{1}{2} (L_3 - L_2) \\
 (44) \quad F &= \tau_2 (R_2 + R_1) \sin \frac{1}{2} (L_2 - L_1)
 \end{aligned}$$

$$(42) \quad E - F = (R_3 - R_1) \cdot \tau_1 \cdot \sin \frac{1}{2} (L_3 - L_2) = (R_3 - R_1) \tau_2 \sin \frac{1}{2} (L_2 - L_1)$$

$$\begin{aligned}
 G &= \tau_1 (R_3 - R_2) \cos \frac{1}{2} (L_3 - L_2) \\
 (45) \quad H &= \tau_2 (R_2 - R_1) \cos \frac{1}{2} (L_2 - L_1)
 \end{aligned}$$

и

$$(46) \quad L_0 = \frac{L_1 + 2L_2 + L_3}{4}$$

В таком виде, хотя с внешнего вида эти формулы и представляются сложнее формул (3) и (4), но вычисление по ним гораздо проще, тем более, что во многих случаях возможно ограничиваться первым членом.

Очевидно, что можно было бы соединить члены по-парно — первый с третьим и второй с четвертым, но можно этого и не делать, ибо это не вносит существенного упрощения.

Вычисление хорды c можно производить по формулам (12) и (13), но если бы оказалось, что разности координат $x_3 - x_1$ и $y_3 - y_1$ определяются недостаточно точно, то следует поступить так.

Вычислить по формулам

$$\begin{aligned}
 (47) \quad l_1 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_1) &= R_3 \sin(\alpha_3 - L_3) - R_1 \sin(\alpha_3 - L_1) \\
 l_3 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_1) &= R_3 \sin(\alpha_1 - L_3) - R_1 \sin(\alpha_1 - L_1)
 \end{aligned}$$

величины l_3 и l_1 и затем величины:

$$\begin{aligned}
 (48) \quad f_1 &= \rho_1 - l_1 \\
 f_3 &= \rho_3 - l_3
 \end{aligned}$$

тогда

$$(49) \quad c_1^2 = f_1^2 + f_3^2 - 2f_1 f_3 \cdot \cos(\alpha_3 - \alpha_1) = (f_1 - f_3)^2 + 4f_1 f_3 \cdot \sin^2 \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2}$$

и затем

$$(50) \quad c^2 = c_1^2 + (z_3 - z_1)^2$$

Величины r_1 и r_3 хорошо определяются по формулам:

$$(51) \quad \begin{aligned} r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = d_1^2 + z_1^2 \\ r_3^2 &= x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = d_3^2 + z_3^2 \end{aligned}$$

Но если бы пожелали избежать вычисления координат Земли $\xi_1, \eta_1, \zeta_3, \nu_3$ (когда нет под руками таблиц, где эти величины даются), то можно применить формулы

$$(52) \quad \begin{aligned} d_1^2 &= R_1^2 + \rho_1^2 + 2R_1 \rho_1 \cos(\alpha_1 - L_1) \\ &= (R_1 - \rho_1)^2 + 4R_1 \rho_1 \cos^2 \frac{\alpha_1 - L_1}{2} \end{aligned}$$

и

$$(52') \quad \begin{aligned} d_3^2 &= R_3^2 + \rho_3^2 + 2R_3 \rho_3 \cos(\alpha_3 - L_3) \\ &= (R_3 - \rho_3)^2 + 4R_3 \rho_3 \cos^2 \frac{\alpha_3 - L_3}{2} \end{aligned}$$

и затем:

$$(15) \quad \begin{aligned} r_1^2 &= d_1^2 + z_1^2 \\ r_3^2 &= d_3^2 + z_3^2 \end{aligned}$$

§ 15. Для современных весьма точных наблюдений и при малых промежутках τ_1 и τ_2 , не превышающих 5 дней, величина стрелки f оказывается столь малой, что величину ρ_2 , достаточно близкую к истинной, для дальнейшего применения дифференциальных формул можно получить не строя чертежа, а пользуясь приближенным расчетом.

В самом деле,

$$f = \frac{1}{8} \tau_3^2 \cdot \frac{1}{r_2^2}$$

при

$$t_3 - t_1 = 10, \quad \lg \tau = \log k_3(t_3 - t_1) = 1.2356$$

$$\lg \frac{1}{8} \tau_3^2 = 3.5671; \quad \frac{1}{8} \tau_3^2 = 0.003 \dots$$

и следовательно, если только r_2 не мало, то стрелка f выражается тысячными долями.

Тогда, вычислив a_1, b_1, a_3, b_3, l_1 и l_3 , задаем $\rho_2 = 1$, вычисляем ρ_1' и ρ_2' и по ним хорду c с грубым приближением, т. е. не более, как на три знака, по логарифмической линейке, и, вычислив также r_2 , сличаем величины c и σ , расчисляя σ по формуле

$$\sigma = \frac{\sqrt{2} \tau_3}{\sqrt{r_2}}$$

Затем берем $\rho_2 = 0.50$, поступаем так же, после чего составляем пропорцию и т. д. как пояснено выше относительно чертежа, дозволяющего заменять приближенное вычисление построением.

§ 16. Перейдем теперь к примерам.

Казалось бы естественным за первый пример и взять пример самого Ньютона, т. е. комету 1680 г.; мы этот пример и приведем, но в заключение этой статьи, ибо этот пример является наиболее трудным, и лучше начать для уяснения дела с простейших примеров, доставляемых новейшими более точными наблюдениями, дозволяющими довольствоваться меньшими промежутками.

Итак, для первого примера возьмем тот, для которого Bauschinger в своей «Bahnbestimmung» делает полный расчет по методе Ольберса.

Bauschinger производит вычисление по шестизначным логарифмам до $1/10$ долей секунды в углах, не указывая, какими таблицами логарифмов он пользуется, но, видимое дело, такими, где аргументы даются через $10''$; мы же воспользуемся самыми обыденными семизначными таблицами Вега и будем вести вычисление основных величин на семь знаков, не заботясь о безусловной верности при выборке последнего знака, т. е. наше вычисление будет подобно вычислению по шестизначным таблицам при тщательной выборке.

Для наглядности мы пользовались чертежами, уменьшенные копии которых прилагаются. В остальном пример не требует пояснений.

Пример 1

Комета 1896 г. IV (Bauschinger. Bahnbestimmung der Himmelkörper, p. 359.)

№	t Сент. 1896	$\alpha \nearrow$	$\beta \nearrow$	$L \dot{\sigma}$	$\lg R$
1	7.42259	171°22'49".4	+ 59°46' 6".8	345°41'26".2	0.003027
2	10.35812	176 22 51.9	61 27 43.8	348 32 48.8	0.002690
3	13.41354	182 11 53.2	63 3 56.7	351 31 26.2	0.002327

№	$\lg \cos \alpha$	$\lg \sin \alpha$	$\lg \operatorname{tg} \beta$	$\lg (t_{i+1} - t_i)$	$\lg \tau$
1	1.9950668 (n)	1.1757256	0.2845186	0.4676865	2.7032669
2	1.9991332 (n)	2.8001671	0.2645520	0.4850710	2.7206524
3	1.9996803 (n)	2.5838205 (n)	0.2940674	0.7774957	1.0130771

Вычисление координат Земли

№	$\lg \cos L$	$\lg \sin L$	$\lg \xi$	$\lg \eta$	ξ	η
1	1.9863127	1.3929744 (n)	1.9893397	1.3960014 (n)	0.9757525	— 0.2488866
2	1.9912649	1.2979048 (n)	1.9939549	1.3005948 (n)	0.9861768	— 0.1997997
3	1.9952304	1.1684859 (n)	1.9975574	1.1708129 (n)	0.9943916	— 0.1481880

Координаты кометы при $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1.00$

№	$\rho \cos \alpha$	$\rho \sin \alpha$	x	y	z
1	— 0.9887	0.1499	— 0.0129 ₆	— 0.0990	1.716
2	— 0.9980	0.0631	— 0.0118	— 0.1367	1.839
3	— 0.9993	— 0.0384 ₅	— 0.0048 ₆	— 0.1865	1.968

Координаты точек для составления чертежа

Масштаб $a = 400$ мм.

Места Земли

Места кометы

№	ξ м	η м	$\rho = 1.00$		$\rho = 0.50$	
			x м	y м	x м	y м
1	390.4	— 99.6	1	— 5.2	192.6	— 69.6
2	394.4	— 80.0	2	— 4.7	194.9	— 67.3
3	397.8	— 59.2	3	— 2.0	197.8	— 67.0

I. Определение приближенной величины ρ_2 по чертежу

1) $\rho_2 = 1.00$.

Чертеж дает:

$$c_1 = 62.5 \text{ мм} = 0.156; \quad d_2 = 56 \text{ мм} = 0.140; \quad z_2 = 1.84; \quad \sqrt{2}\tau_3 = 0.1457$$

$$r_2 = \sqrt{3.39 + 0.02} = \sqrt{3.41} = 1.845; \quad \sigma = 0.1074$$

$$\rho_1 = 1.00 + 24 \text{ мм} = 1.06; \quad \rho_3 = 1.00 - 22 \text{ мм} = 0.945$$

$$z_1 = 1.716 + 0.103 = 1.819; \quad z_3 = 1.968 - 0.108 = 1.860; \quad z_3 - z_1 = 0.141$$

$$c = \sqrt{c_1^2 + (z_3 - z_1)^2} = \sqrt{0.0244 + 0.0199} = \sqrt{0.0443} = 0.2105$$

Так как c приблизительно равно 2σ , то надо взять ρ_2 так, чтобы c_1 уменьшилось, примерно, вдвое; прикладывая масштабную линейку, видим, что это будет, когда ρ_2 близко к 0.80, поэтому берем

2) $\rho_2 = 0.80$.

Чертеж дает:

$$c_1 = 47.2 \text{ мм} = 0.118; \quad d_2 = 95.2 \text{ мм} = 0.238; \quad \rho_1 = 1.00 - 60.5 \text{ мм} = 1.00 - 0.151 = 0.849$$

$$\rho_3 = 1.00 - 98 \text{ мм} = 1.00 - 0.245 = 0.755; \quad z_1 = 1.457; \quad z_3 = 1.486; \quad z_3 - z_1 = 0.031$$

$$c = \sqrt{0.01395 + 0.00096} = 0.1218$$

$$r_2 = \sqrt{2.168 + 0.057} = 1.490 \quad \sigma = \frac{0.1457}{\sqrt{1.490}} = 0.1199$$

$$c - \sigma = 0.1218 - 0.1199 = + 0.0019$$

Согласие — настолько близкое, что, не составляя даже более крупного чертежа, можно принять $\rho_2 = 0.80$ за исходное значение для вычислений.

II. $\rho_2 = 0.80$. $\log \rho_2 = \bar{1}.9030900$

1) Вычисление: $x_2 y_2 z_2$.

$$\begin{array}{lll} \lg \rho_2 \cos \alpha_2 = \bar{1}.9022232(n) & - 0.7984050 & x_2 = 0.1877718 \\ \lg \rho_2 \sin \alpha_2 = \bar{2}.7032571 & + 0.0504960 & y_2 = - 0.1497037 \\ \lg \rho_2 \operatorname{tg} \beta_2 = 0.1676420 & & z_2 = 1.471093 \end{array}$$

2) Вычисление величин: $a_1 b_1 a_3 b_3$.

$$\begin{array}{lll} R_1 = 1.006994 & R_2 = 1.006213 & R_3 = 1.005373 \\ R_3 + R_2 = 2.011586 & \lg 0.3035386 & R_3 - R_2 = - 0.000840 \quad \lg \bar{4}.9243(n) \\ R_3 + R_1 = 2.013207 & \lg 0.3038884 & R_2 - R_1 = - 0.000781 \quad \lg 4.8927(n) \\ \alpha_3 - \alpha_1 = 10^\circ 49' 3'' & \lg \sin \bar{1}.2734298 & \lg \frac{\tau_3}{\tau_2} = 0.2924247 \\ \alpha_3 - \alpha_2 = 5^\circ 49' 1.3 & \lg \sin \bar{1}.0058322 & \lg \frac{\tau_3}{\tau_1} = 0.3098092 \\ \alpha_2 - \alpha_1 = 5^\circ 0' 2.5 & \lg \sin \bar{2}.9403561 & \\ \frac{1}{2}(L_3 - L_2) = 1^\circ 29' 18'' & \frac{1}{2}(L_2 - L_1) = 1^\circ 25' 41'' & \frac{1}{2}(L_3 - L_1) = 2^\circ 55' 0'' \\ L_0 = 348^\circ 34' 37.5 & a_3 - L_0 = 193^\circ 37' 15.7 & a_1 - L_0 = 182^\circ 48' 11.9 \end{array}$$

a) Вычисление: b_1 и b_3 .

$$\begin{array}{lll} \lg n_1 = 1.0189949 & \lg n_3 = 1.0363794 \\ \lg \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = \bar{1}.0058322 & \lg \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \bar{2}.9433561 \\ \lg b_1 = 0.0248271 & \lg b_3 = \bar{1}.9767355 \\ b_1 = 1.0588322 & b_3 = 0.9478411 \end{array}$$

6) Вычисление: E, F, G, H .

$\lg \tau_1 = \bar{2}.703267$	$\lg \tau_2 = \bar{2}.720652$
$\lg (R_3 + R_2) = 0.303539$	$\lg (R_2 + R_1) = 0.303888$
$\lg \sin \frac{L_3 - L_2}{2} = \bar{2}.414585$	$\lg \sin \frac{L_2 - L_1}{2} = \bar{2}.96603$
$\lg E = 3.421391$	$\lg F = 3.421143$
$E = 0.00263871$	$F = 0.00263720$
$E + F = 0.00527591$	$E - F = 0.00000151$
$\lg \tau_1 = \bar{2}.7033$	$\lg \tau_2 = \bar{2}.7207$
$\lg (R_3 - R_2) = \bar{4}.9243 (n)$	$\lg (R_2 - R_1) = \bar{4}.8927 (n)$
$\lg \cos \frac{L_3 - L_2}{2} = \bar{1}.9998$	$\lg \cos \frac{L_2 - L_1}{2} = \bar{1}.9998$
$\lg G = \bar{5}.6274 (n)$	$\lg H = \bar{5}.6132 (n)$
$G = -0.00004240$	$H = -0.00004104$
$G + H = -0.00008344$	$-(G - H) = +0.00000136$
$\lg (E + F) = \bar{3}.722297$	$\bar{6}.1790$
$\frac{L_3 - L_1}{4} = \bar{2}.405687$	$\bar{1}.9999$
$\alpha_3 - L_0 = \frac{\bar{4}.127984}{\bar{1}.3719 \cdot 9 (n)}$	$\frac{\bar{6}.1789}{\bar{1}.9876 (n)}$
$\alpha_3 - L_0 = \frac{5.499973 (n)}{2.005918}$	$\frac{6.1665 (n)}{2.0059}$
$\lg \frac{1}{\tau_2 \sin (\alpha_3 - \alpha_1)} = \frac{\bar{3}.505891 (n)}{+ 0.0032055}$	$\frac{\bar{4}.1724 (n)}{- 0.0001487}$
	$\frac{\bar{4}.3214}{+ 0.0002091}$
	$\frac{\bar{5}.5113 (n)}{- 0.00003246}$
	$a_1 = -0.0031776.$
	$\bar{4}.127984$
	$\alpha_1 - L_0 = \bar{2}.689375 (n)$
	$\bar{6}.1789$
	$\bar{1}.9995 (n)$
$\lg \frac{1}{\tau_1 \sin (\alpha_3 - \alpha_1)} = \frac{2.023303 (n)}{- 0.0006920}$	$\frac{2.0233 (n)}{\bar{4}.840662}$
	$\frac{4.2017}{+ 0.0001591}$
	$\frac{4.3497 (n)}{- 0.0002237}$
	$+ 0.0000070$
	$a_3 = +0.0006353.$

Итак,

$$\rho_1' = -0.0031776 + 1.0588322 \rho_2 \\ \rho_3' = 0.0006353 + 0.9478411 \rho_2$$

следовательно, при $\rho_2 = 0.80$ будет:

$$\rho_1' = 0.8438882 \quad \lg \rho_1' = \bar{1}.9262849 \\ \rho_3' = 0.7589082 \quad \lg \rho_3' = \bar{1}.8801893$$

3) Проверка найденных величин.

$\lg \rho_1' \cos \alpha_1 = \bar{1}.9213517 (n)$	-0.6343565	$x_1' = 0.1413960$
$\lg \rho_1' \sin \alpha_1 = \bar{1}.1020105$	$+ 0.1264767$	$y_1' = -0.1224099$
$\lg \rho_3' \cos \alpha_3 = \bar{1}.8798696 (n)$	-0.7583498	$x_3' = 0.2360418$
$\lg \rho_3' \sin \alpha_3 = \bar{2}.4640098 (n)$	-0.0291079	$y_3' = -0.1772959$
$x_3' - x_1' = 0.0916458$	$\bar{2}.9761014$	$y_3' - y_1' = -0.0548860$
$x_3' - x_1' = 0.0463758$	$\bar{2}.6662917$	$y_3' - y_1' = -0.0268938$
	0.3098097	$\bar{2}.7394616$
		$\bar{2}.4296522$
		0.3098094
		$\lg \frac{\tau_3}{\tau_1} = 0.3098092$

Разница в 7-м знаке неизбежна, вследствие накопления погрешностей при вычислении по логарифмам.

4) Вычисление: r_2, f, h, σ .

$$\begin{array}{lll}
 \lg y_2 = \bar{1.1740716}(n) & \bar{1.7940492} \\
 \lg x_2 = \bar{1.2736304} & \bar{1.8936180} & \bar{1.3800124} \\
 \lg \operatorname{tg} \gamma_2 = \bar{1.9004412}(n) & & \lg z_2 = \bar{0.1676420} \quad \bar{1.9942986} \quad 0.1733434 = \lg r_2 \\
 \gamma_2 = 360^\circ - 38^\circ 29' 22'' & & \lg \operatorname{ctg} i = \bar{1.2124704} \quad r_2 = 1.490539 \\
 = 321^\circ 30' 37.9'' & & \frac{2}{3} f_0 = 0.000398 \\
 \\
 \lg \frac{1}{8} \tau_3^2 = \bar{3.12205} & \lg f_0 = 4.77538 & \lg SP = 0.1734592 \\
 2 \lg r_2 = \bar{1.65332} & \lg \cos i = \bar{1.20667} & \frac{1}{2} \lg SP = 0.0867296 \\
 \hline
 \lg f = \bar{4.77538} & \lg h = \bar{5.98204} & \lg \sqrt{2} \tau_3 = \bar{1.1635921} \\
 f = 0.0005962 & h = 0.00009595 & \lg \sigma = \bar{1.0768625} \\
 & & \sigma = 0.1193710.
 \end{array}$$

5) Вычисление поправок $\delta\rho_1'$ и $\delta\rho_3'$ и величин ρ_1 и ρ_3 .

$$\begin{array}{lll}
 \gamma_2 = 321^\circ 30' 38'' & \gamma_2 = 321^\circ 30' 38'' \\
 \alpha_3 = 182^\circ 11' 53'' & \alpha_1 = 171^\circ 22' 49'' \\
 \hline
 \gamma_2 - \alpha_3 = 139^\circ 18' 45'' & \lg \sin \bar{1.81423} & \lg \sin \bar{1.69729} \\
 & \lg h \bar{5.98204} & \lg h \bar{5.98204} \\
 & \lg n_1 \bar{1.01899} & \lg (-n_3) \bar{1.03638}(n) \\
 & \lg \delta\rho_1' = \bar{4.81526} & \lg \delta\rho_3' = \bar{4.71571}(n) \\
 & \delta\rho_1' = 0.0006535 & \delta\rho_3' = -0.0005196 \\
 & \rho_1' = 0.8438882 & \rho_3' = 0.7589082 \\
 & \rho_1 = 0.8445417 & \rho_3 = 0.758386 \\
 & \lg \rho_1 = \bar{1.9266211} & \lg \rho_3 = \bar{1.8798918}
 \end{array}$$

6) Вычисление хорды с.

$$\begin{array}{lll}
 \lg \delta x_1' = \bar{4.81533}(n) & \delta x_1' = -0.0006536 & \lg \delta x_3' = \bar{4.71539} \quad \delta x_3' = +0.0005193 \\
 \lg \delta y_1' = \bar{5.99099} & \delta y_1' = -0.0000979 & \lg \delta y_3' = \bar{5.29953} \quad \delta y_3' = +0.0000199 \\
 x_1 = 0.1407424 & y_1 = -0.1223120 & x_3 = 0.2365611 \quad y_3 = -0.1772760 \\
 \lg z_1 = 0.1611397 & z_1 = 1.4492380 & \lg z_3 = 0.1739592 \quad z_3 = 1.4926543 \\
 y_3 - y_1 = -0.0549640 & \bar{2.7400783}(n) & \\
 x_3 - x_1 = 0.0958187 & \bar{2.9814502} \quad \bar{1.9382309} & \bar{1.0432193} \quad \bar{1.9688072} \\
 \hline
 \lg \operatorname{tg} \gamma = \bar{1.7586281}(n) & & \bar{2.6376528} \\
 \gamma = 360^\circ - 29^\circ 50' 22.9'' = & & \lg \operatorname{tg} j = \bar{1.5944335} \quad \lg c = \bar{1.0744121} \\
 = 330^\circ 9' 37.1'' & & c = 0.11868945 \\
 c - \sigma = 0.1186894 - 0.1193710 = -0.0006816 & &
 \end{array}$$

7) Дифференциальные формулы.

Данные:

$$\begin{array}{llllll}
 d_2 = 0.2399; & r_2 = 1.4905; & c_1 = 0.1104; & c = 0.1187; & \gamma = 330^\circ 9' 6'' & \gamma_2 = 321^\circ 30' \\
 h = 0.00009595; & \sigma = 0.1194; & n_1 = 10.45 & n_3 = 10.87; & b_1 = 1.0588 & b_3 = 0.9478 \\
 \delta d_2 = \delta \rho_2 \cdot \cos 145^\circ 7.6' = -0.8204 \cdot \delta \rho_2; & \delta \gamma_2 = \frac{1}{0.2399} \cdot \sin 145^\circ 7.6' \cdot \delta \rho_2 = \frac{0.5716}{0.2399} \cdot \delta \rho_2 = 2.382 \delta \rho_2 \\
 \delta z_2 = 1.839 \cdot \delta \rho_2; & \delta r_2 = \frac{1}{1.490} [-0.2399 \cdot 0.8204 + 1.839 \cdot 1.471] = 1.685 \cdot \delta \rho_2
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}\delta f &= -2 \cdot \frac{0.000596}{1.490} \cdot 1.685 \cdot \delta \rho_2 = -0.001385 \cdot \delta \rho_2 \\ \delta h &= \left(-\frac{0.000096}{0.2399} \cdot 0.8204 - 3 \cdot \frac{0.000096}{1.490} \cdot 1.685 \right) \delta \rho_2 = -0.000654 \\ \delta \rho_1 &= [1.0588 - 10.45 \cdot 0.000654 \cdot 0.6518 + 10.45 \cdot 0.000096 \cdot 2.382 \cdot (-0.7581)] \cdot \delta \rho_2 = 1.0525 \cdot \delta \rho_2 \\ \delta \rho_3 &= [0.9478 - 10.87 \cdot 0.000654 \cdot 0.4992 + 10.87 \cdot 0.000096 \cdot 2.382 \cdot (-0.8770)] \cdot \delta \rho_2 = 0.9421 \cdot \delta \rho_2 \\ \delta c_1 &= (-1.0515 \cdot \cos 158^\circ 46' 8'' + 0.9421 \cdot \cos 147^\circ 57' 7'') \delta \rho_2 = (0.98125 - 0.79862) \delta \rho_2 = +0.1826 \delta \rho_2 \\ \delta (z_3 - z_1) &= (0.9421 \cdot \operatorname{tg} \beta_3 - 1.0525 \cdot \operatorname{tg} \beta_1) \cdot \delta \rho_2 = (1.8543 - 1.8061) \delta \rho_2 = 0.0482 \cdot \delta \rho_2 \\ \delta c &= \frac{1}{0.1187} [0.1104 \cdot 0.1826 + 0.0484 \cdot 0.0482] \cdot \delta \rho_2 = \frac{0.02217}{0.1187} \cdot \delta \rho_2 = 0.1868 \delta \rho_2 \\ \delta (SP) &= 1.685 \cdot \delta \rho_2 \quad \lg \frac{1}{4\tau_3^2} = 1.3718 \\ \delta \sigma &= -0.0674 \cdot \delta \rho_2 \quad 3 \lg \sigma = \bar{3.2306} \\ \delta (c - \sigma) &= +0.2542 \cdot \delta \rho_2 \quad \lg 1.685 = \underline{\underline{0.2266}} \\ \text{Значит,} \quad \delta \rho_2 &= +\frac{0.0006816}{0.2542} = 0.002681 \quad \lg 0.0006816 = \bar{4.83353} \\ &\quad \lg 0.2542 = \underline{\underline{1.40518}} \\ &\quad \lg \delta \rho_2 = 3.42835\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\rho_2 &= 0.802681 \\ \text{Второе приближение:} \quad \rho_2 &= 0.802681\end{aligned}$$

8) Вычисление поправок и исправленных величин:

$$\begin{array}{lll} \lg \delta \rho_1 = \bar{3.45057} & \rho_1 = 0.8445417 + 0.0028221 = & 0.8473638 \\ \lg \delta \rho_3 = \bar{3.40245} & \rho_3 = 0.753886 + 0.0025261 = & 0.7609147 \\ \lg \delta x_1 = \bar{3.44564} (n) & x_1 = 0.1407424 - 0.0027903 = & 0.1379521 \\ \lg \delta y_1 = \bar{4.62630} & y_1 = -0.1228120 + 0.0004230 = & -0.1218890 \\ \lg \delta z_1 = \bar{3.68509} & z_1 = 1.4492380 + 0.0048428 = & 1.4540808 \\ \lg \delta x_2 = \bar{3.42748} (n) & x_2 = 0.1877718 - 0.0026760 = & 0.1850958 \\ \lg \delta y_2 = \bar{4.22852} & y_2 = -0.1493037 + 0.0001692 = & -0.1491345 \\ \lg \delta z_2 = \bar{3.69290} & z_2 = 1.4710990 + 0.0049305 = & 1.4760295 \\ \lg \delta x_3 = \bar{3.40213} (n) & x_3 = 0.2365611 - 0.0025242 = & 0.2340369 \\ \lg \delta y_3 = \bar{5.98627} (n) & y_3 = -0.1772760 - 0.0000969 = & -0.1773729 \\ \lg \delta z_3 = \bar{3.69652} & z_3 = 1.4926543 + 0.0049719 = & 1.4976262 \end{array}$$

9) Вычисление длины хорды с.

$$\begin{array}{llll} y_3 - y_1 = -0.0554839 & \bar{2.7441670} (n) & \bar{1.6990246} & \\ x_3 - x_1 = 0.0960848 & \bar{2.9826548} & \bar{1.9375124} & \bar{1.0451424} \quad \bar{1.9688919} \\ z_3 - z_1 = 0.0435454 & \bar{1.7615122} (n) & & \bar{2.6389423} \\ \gamma = 360^\circ - 30^\circ 0' 15'' & & \lg \operatorname{tg} i = \underline{\underline{1.5937999}} & \lg c = \bar{1.0762505} \\ & = 329^\circ 59' 40'' & i = 21^\circ 25' 41.6' & c = 0.1191929 \end{array}$$

По разностям получается:

$$\begin{aligned}\delta c &= 0.0005009 \\ c' &= 0.1186894 \\ c &= 0.1191903\end{aligned}$$

10) Вычисление r_2 по координатам $x_2 y_2 z_2$.

$$\begin{array}{lll} \lg y_2 = \overline{1.1735791}(n) & \overline{1.7975478} \\ \lg x_2 = \overline{1.2673966} & \overline{1.8913663} & \overline{1.3760303} \\ \lg \operatorname{tg} \lambda_2 = \overline{1.9061815}(n) & & \overline{0.1690952} \quad \overline{1.9944402} \\ \lambda_2 = 360^\circ - 38^\circ 51' 32'' & \lg \cotg \theta_2 = \overline{1.2069351} & \lg r_2 = 0.1746550 \\ & \theta_2 = 80^\circ 51' 5'' & r_2 = 1.495048 \\ \end{array}$$

По разностям получается:

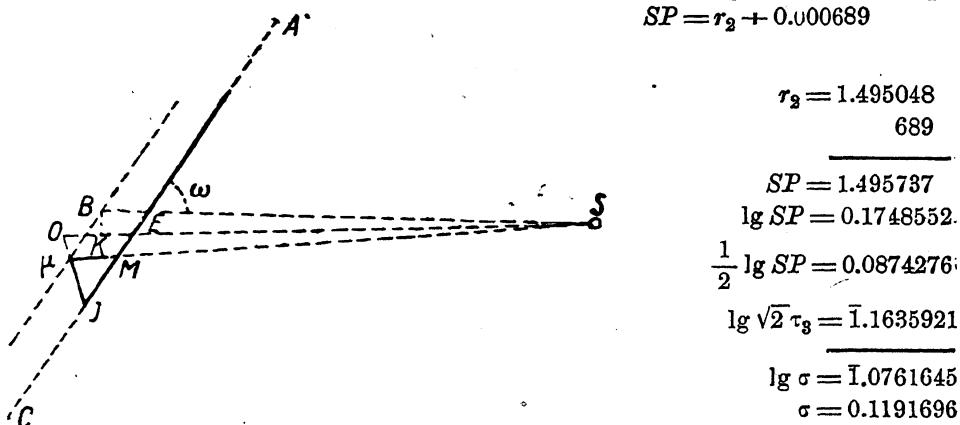
$$\begin{array}{l} \delta r_2 = 0.004519 \\ r_2' = 1.490539 \\ r_2 = 1.495058 \end{array}$$

11) Вычисление угла ω между хордой и средним радиусом-вектором.

$$\begin{array}{llll} \cos \omega = \sin \theta_2 \sin i + \cos \theta_2 \cos i \cos(\gamma - \lambda_2) = \frac{\sin \theta_2 \sin(i + \varphi)}{\cos \varphi}; & \operatorname{tg} \varphi = \cotg \theta_2 \cos(\gamma - \lambda_2); \\ \theta_2 = 80^\circ 51' 1'' & \lg \cotg \overline{1.10243} & \lg \sin \overline{1.99444} & \lg c = \overline{1.0762505} \\ \gamma - \gamma_2 = 8^\circ 7.3 & \lg \cos \overline{1.99562} & \lg \sin(\varphi + i) \quad \overline{1.67965} & \lg \frac{r_2}{\tau_3} = \overline{1.7075753} \\ & \overline{\lg \operatorname{tg} \varphi \quad 1.09805} & \overline{\lg \sec \varphi \quad 0.00338} & \lg EC = \overline{2.7838258} \\ & \varphi = 7^\circ 8' 6'' & \lg \cos \omega \quad \overline{1.67747} & EC = 0.06078910 \\ & i = 21^\circ 25.7 & \omega = 61^\circ 35' 1'' & AE = 0.0584038 \\ & \overline{\varphi + i = 28^\circ 34' 3''} & & 2IE = 0.0023853 \\ & & & IE = 0.001192. \end{array}$$

12) Схема построения Ньютона поправок в плоскости орбиты.

$$\begin{array}{l} B_\mu = -2f \cdot \cos \omega + EI = -2 \cdot 0.0005962 \cdot 0.4784 + 0.001192 = 0.001192 - 0.000570 = 0.000622 \\ S_\mu = r_2 + B_\mu \cdot \cos \omega = r_2 + 0.000294 \\ SP = r_2 + 0.000689 \end{array}$$



Фиг. 9.

Итак, при $\rho_2 = 0.802681$ будет:

$$c - \sigma = 0.1191929 - 0.1191696 = + 0.0000233$$

Следовательно,

$$\delta \rho_2 = -\frac{0.0000233}{0.2542} = -0.0000916$$

и окончательно будет:

$$\rho_2 = 0.8025894.$$

$$\rho_1 = 0.8473638 - 0.0000963 = 0.8472675$$

$$\rho_3 = 0.7609147 - 0.0000863 = 0.7608284$$

$$c = \sigma = 0.1191758$$

По этим значениям вычисляем r_1 и r_2 и проверяем величину хорды по формуле Эйлера.

При $\rho_2 = 0.8025894$ имеем:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0.1379521 + 0.0000953 = 0.1380474 \\y_1 &= -0.1218890 \quad 145 = -0.1219035 \\z_1 &= 1.4540808 \quad 1653 = 1.4539155 \\x_3 &= 0.2340369 + 862 = 0.2341231 \\y_2 &= -0.1773729 + 33 = -0.1773696 \\z_3 &= 1.4976262 - 1699 = 1.4974563\end{aligned}$$

Вычисление r_1 и r_3

$$\begin{aligned}\lg y_1 &= \bar{1.0860161}(n) \quad \bar{1.8208038} \\ \lg x_1 &= \bar{1.1400282} \quad \bar{1.8748159} \quad \bar{1.2652123} \\ \lg \operatorname{tg} \lambda_1 &= \bar{1.9459879}(n) \quad 0.1625391 \quad 1.9965434 \\ \lambda_1 &= 360^\circ - 41^\circ 26' 46'' 6 \\ &= 318^\circ 33' 13'' 4 \\ \lg y_3 &= \bar{1.2488792}(n) \quad \bar{1.7809404} \\ \lg x_3 &= \bar{1.3694442} \quad \bar{1.9015054} \quad \bar{1.4679388} \\ \lg \operatorname{tg} \lambda_3 &= \bar{1.8794350}(n) \quad 0.1753541 \quad \bar{1.9918020} \\ \lambda_3 &= 360^\circ - 37^\circ 8' 50'' 1 \\ &= 322^\circ 51' 9'' 9 \\ r_1 &= 1.465534 \quad \lg \operatorname{cotg} \theta_1 = \bar{1.1026732} \\ r_3 &= 1.525992 \quad \theta_1 = 82^\circ 46' 50'' 9 \quad \lg r_1 = 0.1659957 \\ r_1 + r_3 &= 2.991526 \quad \lg (r_1 + r_3) = 0.4758926 \quad r_3 = 1.465534 \\ &\quad 0.2379463 \quad \bar{1.2861611}, \\ &\quad 0.7138389 \quad \bar{1.3141071} \\ &\quad \bar{2.6002682} \dots .0.039835 \\ &\quad \bar{287} \\ &\quad \bar{0.4758926} \\ &\quad \bar{1.076195} \\ \sigma &= 0.1191762\end{aligned}$$

По формуле Ньютона было $\sigma = 0.1191758$, т. е. согласие вполне удовлетворительное.

Итак, окончательно имеем:

$$\begin{aligned}r_1 &= 1.465534 \quad \lambda_1 = 318^\circ 33' 13'' 4 \quad \theta_1 = 82^\circ 46' 50'' 9 \\r_3 &= 1.525992 \quad \lambda_3 = 322^\circ 51' 9'' 9 \quad \theta_3 = 78^\circ 54' 8.3 \\c &= 0.119176.\end{aligned}$$

По этим величинам и вычисляем элементы орбиты.

Вычисление элементов орбиты:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 82^\circ 46' 50'' 9 \quad \lambda_1 = 318^\circ 33' 13'' 4 \quad \lg \sin(\theta_1 - \theta_3) = \bar{1.4973060} \\ \theta_3 &= 78^\circ 54' 8.3 \quad \lambda_3 = 322^\circ 51' 9.9 \quad \lg \operatorname{cosec}(\theta_1 - \theta_3) = \bar{1.1697905} \\ \theta_1 + \theta_3 &= 161^\circ 40' 59'' 2 \quad \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3) = 320^\circ 42' 11'' 6 \quad \lg \operatorname{tg} \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2} = \bar{2.5744215}(n) \\ \theta_1 - \theta_3 &= 3^\circ 52' 42.6 \quad \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_3) = -2^\circ 8' 58'' 25 \quad \lg \operatorname{tg} \left[\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2} - N \right] = \bar{1.2415180}(n) \\ &\quad \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - N = -9^\circ 53' 32'' 1 \\ &\quad N_1 = 330^\circ 35' 43.7 \\ &\quad \text{Долгота восх. узла: } N = 150^\circ 35' 43.7 \\ \lambda_1 &= 318^\circ 33' 13'' 4 \quad \lambda_3 = 322^\circ 51' 9.9 \\ N &= 150^\circ 35' 43.7 \quad N = 150^\circ 35' 43.7 \\ \lambda_1 - N &= 167^\circ 57' 29'' 7 \quad \lg \operatorname{cosec} \quad 0.6806349 \quad \lambda_3 - N = 172^\circ 15' 26'' 2 \quad \lg \operatorname{cosec} \quad 0.8705516 \\ &\quad \lg \operatorname{tg} \theta_1 \quad \bar{0.8973268} \quad \lg \operatorname{tg} \theta_3 \quad \bar{0.7074153} \\ \lg \operatorname{tg} i &= 1.5779617 \quad \text{Среднее: } 1.5779643 \quad \lg \operatorname{tg} i = 1.5779669\end{aligned}$$

Наклонность: $i = 88^\circ 29' 10''$

$$\begin{aligned}
 \lg \cos \theta_1 &= 1.0992164 & \lg \cos \theta_3 &= 1.2843912 \\
 \lg (\lambda_1 - N) &= 1.9903370 (n) & \lg \cos (\lambda_3 - N) &= 1.9960225 (n) \\
 \lg \cos u_1 &= 1.0895434 (n) & \lg \cos u_3 &= 1.2804137 (n) \\
 u_1 &= 180^\circ - 82^\circ 56' 26.''3 & u_3 &= 180^\circ - 69^\circ 0' 17.''1 \\
 &= 97^\circ 3' 33.''7 & &= 100^\circ 59' 42.''9 \\
 u_3 - u_1 &= 3^\circ 56' 9.''2 & & \\
 c &= 0.119176 & s - r_1 &= 0.089817 & \lg & 2.9533585 \\
 r_1 &= 1.465534 & s - r_3 &= 0.029359 & \lg & 2.4677413 \\
 r_3 &= 1.525992 & & & \lg r_1 r_3 & 1.6504532 \\
 2s &= 3.110702 & & & \lg \sin^2 \frac{r_3 - r_1}{2} & 3.0715530 \\
 s &= 1.555351 & & & \lg \sin \frac{r_3 - v_1}{2} & 2.5357765 \\
 & & & & \frac{v_3 - v_1}{2} & 1^\circ 58' 4.''1 \\
 v_3 - v_1 &= 3^\circ 56' 8.''2, т. к. $v_3 - v_1$ должно равняться $u_3 - u_1$, то беру среднее: $3^\circ 56' 8.''6$ & & & & \\
 \frac{1}{2} \lg r_3 &= 0.0917766 & \sqrt{r_3} &= 1.2353120 & \sqrt{r_3} - \sqrt{r_1} &= 0.0247197 & \lg & 2.3930434 \\
 \frac{1}{2} \lg r_1 &= 0.0829979 & \sqrt{r_1} &= 1.2105923 & \sqrt{r_3} + \sqrt{r_1} &= 2.4459043 & \lg' & 1.6115395 \\
 & & & & \frac{1}{4} (v_3 - v_1) &= 0^\circ 59' 2.''15 & \lg \cotg & 1.7651165 \\
 & & & & & & & \\
 & & & & \lg \tg \frac{v_3 - v_1}{4} & 1.7696992 & & \\
 & & & & \frac{v_3 - v_1}{4} &= 30^\circ 28' 26.''7 & & \\
 \frac{1}{2} (v_3 - v_1) &= 1^\circ 58' 4.''3 & & & & & & \\
 \frac{1}{2} (v_3 - v_1) &= 60^\circ 56' 53.7 & & & & & & \\
 v_1 &= 58^\circ 58' 49.''4 & v_3 &= 62^\circ 54' 58.''0 & & & & \\
 \end{aligned}$$

Арг. шир. перигелия

$$\omega = u_1 - v_1 = 38^\circ 4' 44.''3 \\
 = u_2 - v_2 = 38^\circ 4' 43.''5
 \left. \right\} \text{Среднее: } \omega = 38^\circ 4' 43.''9$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} v_1 &= 29^\circ 29' 24.''7 & \lg \cos \bar{1.9397388} & \frac{1}{2} v_3 = 31^\circ 27' 29.''0 & \lg \cos \bar{1.9309605} \\
 & & \frac{\lg \sqrt{r_1}}{0.0829979} & & \frac{\lg \sqrt{r_3}}{0.0917766} \\
 & & \hline & & \frac{\lg \sqrt{q}}{0.0227377} = 0.0227371
 \end{aligned}$$

Среднее

$$\lg \sqrt{q} = 0.0227374$$

Расстояние до перигелия:

$$\lg q = 0.0454748$$

$$\frac{3}{2} \lg q = 0.0682122$$

$$\begin{array}{lll}
 v_1 = 58^\circ 58' 49.4 & \lg m & 1.7113986 \\
 & \frac{3}{2} \lg q & 0.0682122 \\
 \lg(t_1 - t_0) = & \overline{1.7796108} & \lg(t_3 - t_0) = \overline{1.8208125} \\
 t_1 - t_0 = & 60.2020 & t_3 - t_0 = 66.1931 \\
 t_1 = & \overline{251.4226} & t_3 = \overline{257.4135} \\
 t_0 = & \overline{191.2206} & t_0 = \overline{191.2204}
 \end{array}$$

Среднее

$$t_0 = 191.2205$$

Время прохождения перигелия:

$$t_0 = 1896 \text{ г. Июля } 9.2205$$

Итак, элементы орбиты:

$$\begin{aligned}
 N &= 150^\circ 35' 43.7 \\
 i &= 88^\circ 29' 10.1 \\
 \omega &= 38^\circ 4' 43.9 \\
 \lg q &= 0.0454748 \\
 t_0 &= 1896 \text{ г. } 191.2205 \text{ дня} = 1896 \text{ г. Июля } 9.2205
 \end{aligned}$$

Bauschinger в «Bahnbestimmung», вычисляя по методе Ольберса, получает:

$$\begin{aligned}
 N &= 150^\circ 33' 7'' \\
 i &= 88^\circ 29' 28 \\
 \omega &= 37^\circ 46' 25 \\
 \lg q &= 0.044192 \\
 t_0 &= 1896 \text{ г. Июля } 9.0423
 \end{aligned}$$

Для проверки наших элементов вычислим геоцентрическое место при *вторых наблюдениях*, которым при вычислении элементов не пользовались, и сличим с наблюденными.

Вычисление места при 2-м наблюдении

$$\begin{array}{llll}
 t_0 = 191.2205 & \lg(t_2 - t_0) = 1.8002880 & & \\
 t_2 = 254.3581 & \frac{3}{2} \lg q = 0.0682122 & & \\
 t_2 - t_0 = \overline{63.1376} & \lg m = \overline{1.7320758} \dots \dots \dots & v_2 = 60^\circ 56' 55.2 & \\
 & & \omega = 38^\circ 4' 43.9 & \\
 & & u_2 = 99^\circ 1' 39.1 & \\
 \frac{1}{2} v_2 = 30^\circ 28' 27.6 & \lg \cos \overline{1.9354350} & \lg \sin u_2 = \overline{1.9945868} & \\
 & \frac{1}{2} \lg q = \overline{0.0227374} & \lg \cos u_2 = \overline{1.1956478} (n) & \\
 \lg \sqrt{r_2} = \overline{0.0873024} & & \lg r_2 \cos u_2 = \overline{1.3702526} (n) \dots - 0.2345592 & \\
 \lg r_2 = \overline{0.1746048} & & \lg r_2 \sin u_2 = \overline{0.1691916} & \\
 L_2 = 348^\circ 32' 48.8 & \lg R_2 = \overline{0.0026900} & \lg R_2 = \overline{0.0026900} & \\
 N = 150^\circ 35' 43.7 & \lg \sin \overline{1.4888473} & \lg \cos \overline{1.9783259} (n) & \\
 L_2 - N = 197^\circ 57' 5.1 & \lg R_2 \sin(L_2 - N) = \overline{1.4915873} (n) & \lg R_2 \cos(L_2 - N) = \overline{1.9810159} (n) & \\
 & \lg R_2 \sin(L_2 - N) = -0.3101254 & \lg R_2 \cos(L_2 - N) = -0.9572291 & \\
 i = 88^\circ 29' 10.1 & \lg \sin \overline{1.9998484} & \lg \sin \overline{1.9998484} & \\
 & \lg \sin u_2 = \overline{1.9945868} & \lg \cos i = \overline{2.4218841} & \\
 & \lg \sin \theta_2 = \overline{1.9944352} & \lg r_2 \sin u_2 = \overline{0.1691916} & \\
 & \lg \sin \theta_2 = \overline{1.9944352} & \lg z_2 = \overline{0.1690400} & \lg z_2 = \overline{2.5910757}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}r_2 \cos u_2 &= -0.2345592 & r_2 \sin u_2 \cos i &= 0.0390000 \\- R_2 \cos(L_2 - N) &= +0.9572291 & - R_2 \sin(L_2 - N) &= 0.3101254 \\&& \rho_2 \sin(\alpha_2 - N) &= 0.3491254 \\&& \rho_2 \cos(\alpha_2 - N) &= +0.7226699 \\&& \rho_2 \sin(\alpha_2 - N) &= 0.3491254 \\&\lg \operatorname{tg}(\alpha_2 - N) &= \overline{1.6840414} & \lg \rho_2 &= \overline{1.9044901} \\&\alpha_2 - N &= 25^\circ 47' 7.5' \\&N &= 50^\circ 35' 43.7' \\&\alpha_2 &= 176^\circ 22' 51.2' & \text{Набл. } \alpha_2 &= 176^\circ 22' 51.9' \\&\lg z_2 &= 0.1690400 \\&\lg \rho_2 &= \overline{1.9044901} \\&\lg \operatorname{tg} \beta_2 &= \overline{0.2645499} \\&\beta_2 &= 61^\circ 27' 43.4' & \text{Набл. } \beta_2 &= 61^\circ 27' 43.8'\end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned}\alpha_2 \text{ выч.} - \alpha_2 \text{ наб.} &= -0.7' \\&\beta_2 \text{ выч.} - \beta_2 \text{ наб.} = -0.4'\end{aligned}$$

Согласие вполне удовлетворительное.

Элементы Bauschinger'a дают разницы:

$$\begin{aligned}\alpha \text{ выч.} - \alpha \text{ наб.} &= -1.7' \\&\beta \text{ выч.} - \beta \text{ наб.} = +0.2'\end{aligned}$$

Обратим внимание на полное согласие величины хорды, расчисляемой по формуле Ньютона, приводя все поправки к плоскости орбиты, и по теореме Эйлера, что с полною ясностью указывает равносильность обеих теорем, причем пользование ими обеими доставляет превосходный контроль вычислению.

Вычисление и было произведено на семь знаков, чтобы показать это согласие, так как в остальном такая точность имеет лишь чисто условное значение, ибо не приняты во внимание некоторые поправки, оказывающие влияние не только на 7-й, но на 6-й и даже на 5-й знаки.

В самом деле, 7-й знак после запятой в величине расстояния, причем за 1 принято среднее расстояние от Земли до Солнца, соответствует величине в 14 верст, но так как наблюдения произведены с поверхности Земли, а радиусы-векторы ее орбиты даны для ее центра, то координаты точки пересечения луча, идущего на комету, с плоскостью эклиптики не совпадают с соответствующими местами центра Земли, а отличаются от них на величины порядка радиуса Земли, иными словами, координаты ξ , η , ζ , требуют соответствующих поправок, которые будут порядка $\frac{6.000}{140.000.000} = 0.00004$, т. е. скажутся в 5-м знаке.

Само собою разумеется, что нетрудно вывести формулы для этих поправок, а так как величины ρ_1 и ρ_3 находятся в линейной зависимости от $\xi_1, \eta_1, \xi_3, \eta_3$, то поправки присовокупятся просто помноженными на постоянные множители.

Точно так же необходимо бы принять во внимание «аберрацию», иными словами — время, в течение которого свет пробегает от кометы до глаза наблюдателя, ибо луч, пришедший в глаз, так сказать, покинул комету на этот промежуток времени ранее.

Это обстоятельство вводит некоторую поправку в величины промежутков τ_1, τ_2 , причем эта поправка расчисляется тотчас же, зная что длина $a = 1$ пробегается светом в 497 секунд.

Эту поправку можно было бы вводить как только сделав первый чертеж, мы этого не делали, чтобы получить результаты, сравнимые с приведенными у Bauschinger'a.

Эта поправка при промежутках, близких к равенству, и при расстояниях ρ_1 и ρ_3 , почти одинаковых между собою, оказывает ничтожное влияние на элементы орбиты, войдя простым слагаемым во время прохождения через перигелий.

Мы не будем по этому поводу вдаваться в дальнейшие подробности, ограничиваясь этими замечаниями, ибо вывод соответствующих формул не представляет затруднений.

В заключение примера приведены элементы, расчисленные Bauschinger'ом.

Как видно, наши элементы разнятся чувствительно от этих; тем не менее, и те и другие представляют места кометы с точностью до десятых долей секунды дуги, что объясняется тем, что наклонность орбиты близка к 90° , гелиоцентрическая широта кометы около 80° , разница же в элементах относится к долготе узла и к аргументу широты перигелия.

§ 17. При изложении методы Ольберса, мы увидим, что эта метода непосредственно неприменима, когда все три видимых места кометы лежат на одном и том же большом круге, проходящем через место Солнца при втором наблюдении.

Ясно, что этот критерий не очевиден, и чтобы убедиться, что такое исключительное обстоятельство имеет место, надо произвести некоторое вычисление, которое и будет указано в своем месте.

Этот исключительный случай требует в методе Ольберса особливого рассмотрения и более сложных вычислений, нежели обычный случай.

Для методы Ньютона этот случай не только не представляет затруднений, но, напротив, является особенно благоприятным, ибо при таком расположении светил проекция хорды на плоскость эклиптики будет приблизительно перпендикулярна линии средней долготы и пересечения линий долгот с проекцией хорды будут происходить под углами, близкими к равенству и близкими к прямому, что способствует точности графического построения.

Исключительным случаем для методы Ньютона является тот, когда *видимое движение кометы по долготе ничтожно мало*, т. е. когда все три линии долгот или, по крайней мере, две крайних почти параллельны между собою.

Ясно, что этот критерий очевиден и не требует никаких вычислений.

Мы и дадим еще два примера: один — являющийся исключительным для методы Ольберса и особенно благоприятным или не представляющим никаких особенностей для методы Ньютона, другой — исключительный для этой методы.

§ 18. Как исключительный для методы Ольберса, мы возьмем приведенную в § 121 «Bahnbestimmung» Bauschinger'a комету 1869 г. III, взятую для такого примера Oppolzer'ом.

Упомянутое условие здесь выполнено почти в точности, и отклонения сказанных четырех точек (три места кометы и Солнце) от общего большого круга составляют всего несколько минут дуги, и тот множитель, который в методе Ольберса представляет отношение $\frac{r_3}{r_1}$, принимает вид $\frac{0}{0}$, иными словами, ничтожная погрешность в наблюдениях или неизбежная от вычисления по логарифмам привела бы к совершенно неверному результату.

В примере 2 приведено полное вычисление по методе Ньютона, причем, чтобы дать образец непосредственного пользования формулами (3) и (4), оно произведено по этим формулам, без преобразования их к виду (39).

Пример 2

Комета 1869 г. III. (Bauschinger Bahnbestimmung der Himmelkörper, p. 373, § 121)

№	t. Нбр. 1869	$\alpha \text{ } \angle$	$\beta \text{ } \angle$	$L \text{ } \angle$	$\lg R$
1	29.41785	351°46'20"	+ 20°25'10"	67°44'45"	1 993829
2	34.42403	0 41 17.4	19 48 38	72 49 40	993509
3	39.42904	10 8 37	18 38 59	77 54 55	993228

№	$\lg \cos \alpha$	$\lg \sin \alpha$	$\lg \tan \beta$	$(\lg t_{i+1} - t_i)$	$\lg \tau$
1	1.995507	1.155666 (n)	1.570873	0.699493	2.935074
2	1.999969	2.079560	1.556580	0.699404	2.934985
3	1.993158	1.245799	1.528278	1.000485	1.236066

Вычисление координат Земли

№	$\lg \cos L$	$\lg \sin L$	$\lg \xi$	$\lg \eta$	ξ	η
1	1.578314	1.966382	1.572143	1.960211	0.373373	0.912454
2	1.470182	1.980195	1.463691	1.973704	0.290865	0.941248
3	1.320889	1.990267	1.314117	1.983495	0.206119	0.962710

Координаты кометы при $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1.00$

№	$\rho \cos \alpha$	$\rho \sin \alpha$	x	y	z
1	0.9897	— 0.1431	1.3631	0.7693	0.3723
2	0.9999	0.0120	1.2908	0.9533	0.3602
3	0.9844	0.1761	1.1905	1.1388	0.3375

Координаты точек для составления чертежа

(Масштаб $a = 200$ мм)

Места Земли, мм

Места кометы ($\rho = 1.00$), мм

№	ξ	η	№	x	y
1	74.7	182.5	1	272.6	153.8
2	58.2	188.2	2	258.1	190.6
3	41.2	192.5	3	238.1	227.8

При $\rho_2 = 1.00$

Чертеж дает:

$$c_1 = 84.5 \text{ мм} = 0.422 \\ d_2 = 321 \text{ мм} = 1.605$$

$$\sqrt{2} \tau_3 = 0.2435$$

$$z_3 - z_1 = 0.035; \quad z_2 = 0.360; \quad r_2 = (2.580 + 0.130)^{\frac{1}{2}} = 1.646 \\ c = (0.1782 + 0.0012)^{\frac{1}{2}} = 0.4235 \\ \sigma = \frac{0.2435}{\sqrt{1.646}} = 0.1900.$$

Так как c почти равно c_1 , то надо взять ρ_2 так, чтобы c_1 уменьшилось приблизительно вдвое; прикладывая масштабную линейку, видим, что это будет при ρ_2 близко к 0.30, почему и берем

$$\rho_2 = 0.30$$

Чертеж дает:

$$c_1 = 40.8 \text{ мм} = 0.204 \\ d_2 = 223 \text{ мм} = 1.115$$

$$z_3 - z_1 = 0.010; \quad z_2 = 0.108; \quad r_2 = (1.245 + 0.011)^{\frac{1}{2}} = 1.12; \quad \sigma = 0.230 \\ c = (0.0417 + 0.0001)^{\frac{1}{2}} = 0.204 \\ c - \sigma = 0.204 - 0.230 = -0.026, \text{ значит } \rho_2 > 0.30$$

Делаю

$$\rho_2 = 0.40$$

Чертеж дает:

$$c_1 = 47.0 \text{ мм} = 0.235 \\ d_2 = 234 \text{ мм} = 1.175 \\ r_2 = 1.175; \quad c = 0.235; \quad \sigma = \frac{0.2435}{\sqrt{1.175}} = 0.225 \\ c - \sigma = 0.235 - 0.225 = +0.010, \text{ значит } \rho_2 < 0.40$$

Чтобы определить более точные пределы для ρ_2 , составляю чертеж в большем масштабе для участка от $\rho_2=0.30$ до $\rho_2=0.40$. Чтобы все помещалось на листе бумаги обычного формата, беру масштаб $a=1000$ мм.

Вычисляю $h = \frac{1}{8} \tau_3^2 \cdot \frac{d_2}{r_2^3} = 0.00287$, т. е. в масштабе чертежа 2.9 мм.

Координаты точек для составления чертежа

(Масштаб: $a=1000$ мм)

Места кометы

№	$\rho = 0.40$		$\rho = 0.30$	
	x	y	x	y
1	0.7693	0.8552	0.6703	0.8695
2	0.6908	0.9461	0.5908	0.9449
3	0.5999	1.0381	0.5014	1.0155

Начало координат на чертеже беру в точке $x = 0.500$, $y = 0.800$, тогда для составления чертежа и более точного построения линий долгот имею:

Места кометы (от вспомогат. начала) (мм)

№	$\rho = 0.50$		$\rho = 0.40$		$\rho = 0.30$		$\rho = 0.20$	
	x^l	y^l	x^l	y^l	x^l	y^l	x^l	y^l
1	368.1	40.9	269.2	55.2	170.3	69.5	71.3	83.8
2	291.5	147.2	190.8	146.0	90.1	144.8	— 9.9	143.6
3	198.4	250.8	99.9	233.2	1.4	215.5	—97.0	197.9

При $\rho_2 = 0.30$ (масштаб $a = 1000$ мм)

Чертеж дает:

$$c_1 = 0.2225; \quad \rho_1 = 0.3040; \quad \rho_3 = 0.3015$$

$$r_3 = (0.590^2 + 0.945^2 + 0.108^2)^{\frac{1}{2}} = (0.349 + 0.895 + 0.012)^{\frac{1}{2}} = 1.120$$

$$c = (0.2225^2 + 0.0105^2)^{\frac{1}{2}} = (0.0509 + 0.0001)^{\frac{1}{2}} = 0.2257$$

$$\sigma = \frac{0.2435}{\sqrt{1.120}} = 0.2302$$

$$c - \sigma = 0.2257 - 0.2302 = -0.0045$$

беру $\rho_2 = 0.32$.

При $\rho_2 = 0.32$

Чертеж дает:

$$c_1 = 0.2325$$

следовательно $c = 0.2327$, приращение d_2 есть 0.013, значит $r_3 = 1.120 + 0.013 = 1.133$

$$\sigma = \frac{0.2435}{\sqrt{1.133}} = 0.2290$$

$$c - \sigma = 0.2327 - 0.2290 = +0.0037$$

Итак,

$$\text{при } \rho_2 = 0.30 \quad c - \sigma = -0.0045$$

$$\text{« } \rho_2 = 0.32 \quad c - \sigma = +0.0037$$

Следовательно,

$$\delta\rho_2 = +0.02 \cdot \frac{45}{82} = 0.011$$

и надо брать

$$\rho_2 = 0.300 + 0.011 = 0.311$$

с этого значения ρ_2 и начинаем вычисление для определения дальнейших приближений.

I. Предположение: $\rho_2 = 0.311 \quad \lg \rho_2 = \bar{1}.492760$

1) Вычисление: x_2, y_2, z_2 .

$$\lg \rho_2 \cos \alpha_2 = \bar{1}.492729 \quad \rho_2 \cos \alpha_2 = 0.310978 \quad x_2 = 0.601843$$

$$\lg \rho_2 \sin \alpha_2 = \bar{3}.572320 \quad \rho_2 \sin \alpha_2 = 0.003735 \quad y_2 = 0.944983$$

$$\lg \rho_2 \operatorname{tg} \beta_2 = \bar{1}.049340 \quad \lg z_2 = \bar{1}.049340$$

2) Вычисление: l_1 и l_2 .

$$\xi_3 - \xi_1 = -0.167254 \quad \lg \bar{1}.223376(n) \quad \lg a = \bar{1}.724824(n)$$

$$\eta_3 - \eta_1 = +0.050256 \quad \lg \bar{2}.701188 \quad \lg b = \bar{1}.202636$$

$$\alpha_3 - \alpha_1 = 18^{\circ}22'17'' \quad \lg \sin \bar{1}.498552$$

$$\lg \alpha \sin \alpha_3 = \bar{2}.970623(n) \dots - 0.093460 \quad \lg \alpha \sin \alpha_1 = \bar{2}.880490\dots + 0.075943$$

$$\lg (-b \cos \alpha_3) = \bar{1}.195794(n) \dots - 0.156962 \quad \lg (-b \cos \alpha_1) = \bar{1}.198143(n) - 0.157813$$

$$l_1 = -0.250422$$

$$l_3 = -0.081870$$

3) Вычисление: ρ_1' и ρ_3' .

$$\begin{aligned}
 \lg \frac{\tau_3}{\tau_2} &= 0.301081 & \lg \frac{\tau_3}{\tau_1} &= 0.300992 \\
 \lg \operatorname{cosec}(\alpha_3 - \alpha_1) &= \underline{0.501448} & \lg \operatorname{cosec}(\alpha_3 - \alpha_1) &= \underline{0.501448} \\
 \lg n_1 &= \underline{0.802440} & \lg n_3 &= 0.802440 \\
 \lg n_1 \sin \alpha_3 &= 0.048328 & \lg n_1 \cos \alpha_3 &= 0.715687 & \lg n_3 \sin \alpha_1 &= \bar{1}.958106(n) & \lg n_3 \cos \alpha_1 &= 0.797947 \\
 x_2 - \xi_3 &= 0.395724 & \lg 1.597392 &= 1.645720 & n_1(x_2 - \xi_3) \sin \alpha_3 &= 0.442303 \\
 y_2 - \eta_3 &= -0.017727(*) & \lg \bar{2}.248635 &= 1.044322 & -n_1(y_2 - \eta_3) \cos \alpha_3 &= 0.110745 \\
 &&&& l_1 &= -0.250422 \\
 &&&& \lg \rho_1' &= \bar{1}.480906 & \rho_1' &= 0.302626 \\
 x_2 - \xi_1 &= 0.228470 & \lg 1.358829 &= \bar{1}.316935 & n_3(x_2 - \xi_1) \sin \alpha_1 &= 0.207460 \\
 y_2 - \eta_1 &= 0.032529(*) & \lg \bar{2}.512271 &= \bar{1}.310218 & -n_3(y_2 - \eta_1) \cos \alpha_1 &= 0.204277 \\
 &&&& l_3 &= -0.081870 \\
 &&&& \lg \rho_3' &= \bar{1}.518339 & \rho_3' &= \underline{0.32867}
 \end{aligned}$$

4) Проверка найденных величин.

$$\begin{aligned}
 \lg \rho_1' \cos \alpha_1 &= \bar{1}.476413 & 0.299511 & x_1' = 0.672844 \\
 \lg \rho_1' \sin \alpha_1 &= \bar{2}.636572(n) & -0.043308 & y_1' = 0.869146 \\
 \lg \rho_3' \cos \alpha_3 &= \bar{1}.511497 & 0.324711 & x_3' = 0.530830 \\
 \lg \rho_3' \sin \alpha_3 &= \bar{2}.764138 & 0.058095 & y_3' = 1.020805 \\
 x_1' - x_3' &= 0.142054 & \lg \bar{1}.152453 & y_3' - y_1' = 0.151659 & \lg \bar{1}.180868 \\
 x_3 - x_1' &= 0.071041 & \lg \bar{2}.851509 & y_3 - y_1' = 0.075837 & \lg 2.879881 \\
 && 0.300944 && 0.300987 \\
 \lg \frac{\tau_3}{\tau_1} &= 0.300992
 \end{aligned}$$

Разница могла произойти от накопления погрешностей при вычислении по логарифмам, либо как ρ_1' , так и ρ_3' заключают числа, имеющие шесть знаков, но происшедшие от пятизначных чисел, помеченных (*), в свою очередь являющихся разностью двух шестизначных чисел и, следовательно, таких, в которых последний знак сомнителен.

5) Вычисление: r_2 , f и h .

$$\begin{aligned}
 \lg x_2 &= \bar{1}.779483 & \bar{1}.730126 \\
 \lg y_2 &= \bar{1}.975424 & \bar{1}.926067 & 0.049357 \quad \bar{1}.997839 \\
 \lg \operatorname{tg} \gamma_2 &= 0.195941 & \lg z_2 &= \bar{1}.049340 \\
 \gamma_2 &= 57^\circ 30' 28'' & \bar{2}.999983 & \lg r_2 = 0.051518 \\
 &&& r_2 = 1.12595 \\
 \lg \frac{1}{8} \tau_3^2 &= \bar{3}.56904 & \lg f &= \bar{3}.46602 \\
 2 \lg r_2 &= \bar{1}.89698 & \lg \frac{d_2}{r_2} &= \bar{1}.99784 \\
 \lg f &= \bar{3}.46602 & \lg h &= \bar{3}.46386 \\
 f &= 0.002924 & h &= 0.002910
 \end{aligned}$$

6) Вычисление поправок: $\delta\rho_1'$, $\delta\rho_3'$, ρ_1 и ρ_3 .

$$\begin{aligned}
 \gamma_2 &= 57^\circ 30' 28'' & \gamma_2 &= 57^\circ 30' 28'' \\
 \alpha_3 = 10^\circ 8' 37'' & \lg n_1 h = \bar{2}.26639 & \alpha_1 = -8^\circ 13' 40'' & \lg (-n_3 h) = 2.26630(n) \\
 \gamma_2 - \alpha_3 &= 47^\circ 21' 31'' & \lg \sin = \bar{1}.86664 & \gamma_2 - \alpha_1 = 65^\circ 44' 08'' & \lg \sin = \bar{1}.95483 \\
 && \lg \delta\rho_1' = \bar{2}.13303 && \lg \delta\rho_3' = \bar{2}.22613(n) \\
 && \delta\rho_1' = +0.013584 && \delta\rho_3' = -0.016832 \\
 && \rho_1' = 0.302626 && \rho_3' = 0.329867 \\
 && \rho_1 = \underline{0.316210} && \rho_3 = \underline{0.313035}
 \end{aligned}$$

7) Вычисление координат: $x_1, y_1, z_1, x_3, y_3, z_3$.

$$\begin{aligned} \lg \delta x_1' &= -2.12854 & x_1' &= x_1' + 0.013444 = 0.686328 \\ \lg \delta y_1' &= -3.28870(n) & y_1' &= y_1' - 0.001944 = 0.867202 \\ \lg z_1 &= -1.070846 & z_1 &= 0.117719 \\ \lg \delta x_3' &= -2.21929(n) & x_3' &= x_3' - 0.016569 = 0.514261 \\ \lg \delta y_3' &= -3.47193(n) & y_3' &= y_3' - 0.002964 = 1.017841 \\ \lg z_3 &= -1.023871 & z_3 &= 0.105650 \end{aligned}$$

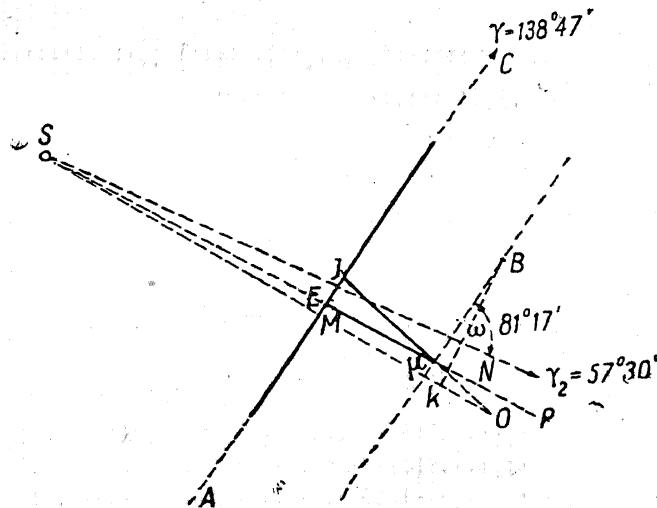
8) Вычисление хорды c .

$$\begin{aligned} x_3 - x_1 &= -0.172067 & \lg \frac{1.235696(n)}{1.876449} &= 1.359247 \quad 1.999996 \quad c_1 = 0.228690 \\ y_3 - y_1 &= 0.150639 & \lg \frac{1.177937}{1.818690} &= 2.091671 \\ z_3 - z_1 &= -0.012069 & \lg \tan \gamma \frac{1.942241(n)}{1.359247} &= 1.359851 \\ \gamma &= 180^\circ - 41^\circ 12' 04'' & \lg \tan i \frac{2.722424}{i = 3^\circ 1'} &= 0.229008 \\ &= 138^\circ 47' 56'' & & \\ \lg \frac{\tau_3}{\tau_1} &= 0.300992 & \lg \frac{\tau_3}{\tau_2} &= 0.301081 \\ \lg c_1 &= 1.359247 & \lg c_1 &= 1.359247 \\ \lg AE &= 1.058255 & \lg CE &= 1.058166 & 2EI = 0.000022 \\ AE &= 0.114355 & CE &= 0.114333 & EI = 0.000011 \text{ от } E \text{ к } A \end{aligned}$$

Так как и наклон хорды и наклон радиуса-вектора SB к плоскости эллиптики весьма малы, то составляю Ньютонов чертеж в проекции на плоскость эллиптики. Масштаб этого чертежа беру $a = 50000$ мм и расчитываю хорду c .

Схема Ньютонова чертежа:

$$\begin{aligned} BE &= h = 0.002940 \\ EI &= 0.000011 \\ B\mu &= EI + 2h \cdot \cos(\gamma - \gamma_2) \\ &= 0.000011 + 0.005820 \cdot 0.167 \\ &= 0.000011 + 0.000975 = 0.000986 \\ S\mu &= r_2 - B\mu \cdot \cos(\gamma - \gamma_2) \\ &= r_2 - 0.000165 \\ Bk &= B\mu \cdot \sin(\gamma - \gamma_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} h \cdot \sin(\gamma - \gamma_2) \cdot \cos(\gamma - \gamma_2) \\ &= 0.000973 + 0.000240 = 0.001213 \\ k &= \frac{0.001213}{r_2} \end{aligned}$$



Фиг. 10.

$$g = EE' = \frac{2}{3} \frac{k \cdot h}{\sin(\gamma - \gamma_2)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{0.001213}{1.126} \cdot \frac{0.002910}{0.957} = 0.0000024 \text{ по направлению } \gamma$$

$$SP = S\mu + \frac{2}{3} f = r_2 - 0.00017 + 0.00195 = r_2 + 0.00178 = 1.12773$$

Величина f должна быть рассчитываема по формуле $\frac{1}{8} \tau^2_3 \cdot \frac{1}{SN^2}$:

$$SN = r_2 - 0.000165 + \frac{1}{3} f = 1.12595 + 0.00097 - 0.00017 = 1.12675$$

$$\delta h = -2 \cdot \frac{0.00291 \cdot 0.00080}{1.126} = -0.000005$$

5*

Этому изменению величины h соответствуют:

$$\begin{aligned}\delta\rho_1 &= -0.000025 \\ \delta\rho_3 &= +0.000030\end{aligned}$$

Перемещению точки E соответствуют изменения:

$$\begin{aligned}\delta\rho_1 &= -n_1 \cdot g \sin 128^\circ 40' = -6.35 \cdot 0.79 \cdot g = -0.000012 \\ \delta\rho_3 &= n_3 \cdot g \sin 147^\circ 02' = +6.35 \cdot 0.54 \cdot g = +0.000008\end{aligned}$$

Всего же будет:

$$\begin{aligned}\delta\rho_1 &= -0.000037 \\ \delta\rho_3 &= +0.000038\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta c_1 &= -\delta\rho_1 \cos(\gamma - \alpha_1) + \delta\rho_3 \cos(\gamma - \alpha_3) = -0.000032 - 0.000024 = -0.000056 \\ \delta c &= -0.000061\end{aligned}$$

Таким образом получаем:

$$\begin{array}{ll} \rho_2 = 0.311000 & \lg \sqrt{2} \tau_3 = 1.386581 \\ \rho_1 = 0.316173 & \frac{1}{2} \lg SP = 0.026103 \\ \rho_3 = 0.313073 & \lg \sigma = 1.360478 \\ c_1 = 0.228947 & \sigma = 0.219349 \\ c = 0.229349 & \\ c - \sigma = -0.000402 & \end{array}$$

Для дальнейших приближений будем пользоваться дифференциальными формулами.

Дифференциальные формулы:

Данные:

$$d_2 = 1.1203; \quad r_2 = 1.1259; \quad \gamma_2 = 57^\circ 30'; \quad h = 0.002905$$

$$c_1 = 0.228947; \quad c = 0.22895; \quad z_1 - z_3 = 0.0121; \quad \gamma = 138^\circ 48'$$

$$\sigma = 0.229349; \quad n_1 = 6.346; \quad n_3 = 6.345$$

$$\delta d_2 = 0.5471 \cdot \delta \sigma_2; \quad \delta \gamma_2 = -0.747 \cdot \delta \rho_2; \quad \delta z_2 = 0.360 \cdot \delta \rho_2$$

$$\delta r_2 = \frac{1}{1.126} [1.120 \cdot 0.547 + 0.360 \cdot 0.360] \cdot \delta \rho_2 = 0.660 \cdot \delta \rho_2$$

$$\delta h = \left[\frac{0.002^0}{1.120} \cdot 0.547 - \frac{0.00871}{1.126} \cdot 0.660 \right] \cdot \delta \rho_2 = -0.00372 \cdot \delta \rho_2$$

$$\delta \rho_1 = 6.346 [-0.1645 - 0.00372 \cdot 0.735 - 0.673 \cdot 0.747 \cdot 0.00290] \cdot \delta \rho_2 = 1.027 \cdot \delta \rho_2$$

$$\delta \rho_3 = 6.345 [-0.1550 - 0.00372 \cdot 0.911 - 0.4107 \cdot 0.747 \cdot 0.00290] \cdot \delta \rho_2 + 1.011 \cdot \delta \rho_2$$

$$\delta c_1 = [-0.027 \cdot (-0.839) + 1.011 \cdot (-0.625)] \cdot \delta \rho_2 = 0.238 \cdot \delta \rho_2$$

$$\delta c = \frac{1}{0.229} [0.238 \cdot 0.229 + (-0.012)(-0.042)] = 0.240 \cdot \delta \rho_2$$

$$\lg \frac{1}{4\tau_3^2} = 0.9258$$

$$\delta(SP) = 0.658 \cdot \delta \rho_2 \quad 3 \lg \sigma = 2.0814$$

$$\delta \tau = -0.0669 \cdot \delta \rho_2 \quad \lg 0.658 = 1.8182$$

$$2.8254$$

$$\delta(c - \sigma) = 0.307 \cdot \delta \rho_2$$

Так как при $\rho = 0.311$ разность $c - \sigma$ оказалась равной -0.000402 , то для следующего приближения надо брать

$$\delta \rho_2 = +\frac{0.000402}{0.307} = 0.001308$$

Соответственно чему будет:

II. Приближение $\rho_2 = 0.312308$

$\delta\rho_1 = +0.001345$	$\rho_1 = 0.316173 + 0.001345 = 0.317518$
$\delta\rho_3 = +0.001323$	$\rho_3 = 0.313073 + 0.001323 = 0.314396$
$\delta c = +0.000314$	$c = 0.228947 + 0.000314 = 0.229261$
$\delta x = -0.000088$	$\sigma = 0.229349 - 0.000088 = 0.229261$
$x_1 = 0.001295 + 0.686328 = 0.687623$	$x_2 = 0.001339 + 0.514261 = 0.515600$
$y_1 = -0.000185 + 0.867202 = 0.867017$	$y_3 = 0.000239 + 1.017841 = 1.018080$
$z_1 = 0.000487 + 0.117719 = 0.118206$	$z_3 = 0.000460 + 0.105650 = 0.106110$

По этим координатам расчисляем величины r_1 , r_3 и хорду σ по формуле Эйлера.

Вычисление: r_1 , r_3 , c и σ .

a) *Вычисление с по координатам:*

$x_3 - x_1 = -0.172023$	$\lg \bar{1.235586}$	$\bar{1.875872}$		
$y_3 - y_1 = 0.151063$	$\lg \bar{1.179158}$	$\bar{1.819444}$	$\bar{1.359714}$	$\bar{1.999395}$
$z_3 - z_1 = -0.012096$	$\bar{1.943572}$		$\bar{2.082642}$	
			$\bar{2.722928}$	$\lg c = \bar{1.360319}$
				$c = 0.229256$

По разностям получается $c = 0.229261$.

b) *Вычисление: r_1 и r_3 :*

$\lg x_1$	$\bar{1.837350}$	$\bar{1.793362}$		
$\lg y_1$	$\bar{1.939028}$	$\bar{1.894040}$	0.0433888	$\bar{1.997536}$
$\lg \operatorname{tg} \lambda_1$	0.100678	$\lg z_1 = \bar{1.072640}$		
$\lambda_1 = 51^\circ 34' 57''$		$\lg \operatorname{tg} \theta_1 = \bar{1.028652}$	$\lg r_1 = 0.046452$	
		$\theta_1 = 6^\circ 5' 50''$	$r_1 = 9.11289$	
b)	$\lg x_3$	$\bar{1.712313}$		
	$\lg y_3$	0.007782	$\bar{1.950410}$	0.057372
	$\lg \operatorname{tg} \lambda_3$	0.295469	$\lg z_2 = \bar{1.025756}$	
	$\lambda_3 = 63^\circ 8' 25''$		$\lg \operatorname{tg} \theta_3 = \bar{2.968384}$	$\lg r_3 = 0.059242$
			$\theta_3 = 5^\circ 18' 43''$	$r_3 = 1.14615$

c) *Вычисление хорды σ по формуле Эйлера.*

$r_1 = 1.11289$	$\lg (r_1 + r_3) = 0.353924$	$\bar{1.469114}$	
$r_3 = 1.14615$	$\frac{1}{2} \lg 0.176962$	$\bar{1.537096}$	
$r_1 + r_3 = 2.25904$	0.580586	$\bar{1.006210} \dots 0.1015$	
		187 (табл. Энке)	
		0.353924	
	$\lg \sigma$	0.360321	
		$\sigma = 0.229257$	

Согласие вполне удовлетворительное.

Итак, окончательно имеем:

$\rho_2 = 0.312308$		
$r_1 = 1.11289$	$\lambda_1 = 51^\circ 34' 57''$	$\theta_1 = 6^\circ 5' 50''$
$r_3 = 1.14615$	$\lambda_3 = 63^\circ 8' 25''$	$\theta_3 = 5^\circ 18' 43''$
$c = 0.229257$		

По этим значениям и находим элементы орбиты.

Вычисление элементов орбиты

a) *Наклонность и долгота угла.*

$\theta_1 = 6^\circ 5' 50''$	$\lambda_1 = 52^\circ 34' 57''$	$\lg \sin(\theta_1 - \theta_3) = 1.296261$
$\theta_3 = 5^\circ 18' 43''$	$\lambda_3 = 63^\circ 8' 25''$	$\lg \operatorname{cosec}(\theta_1 - \theta_3) = 1.863159$

$$\begin{aligned}
 \theta_1 + \theta_3 &= 11^\circ 24' 33.3'' & \frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2} &= 57^\circ 21' 41.3'' & \lg \tan \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2} &= \bar{1}.005204(n) \\
 \theta_1 - \theta_3 &= 0^\circ 47' 6.7'' & \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2} &= -5^\circ 46' 44.3'' & \lg \tan \left[\frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2} - N_1 \right] &= 0.164624n \\
 &&&& \frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2} - N_1 &= -55^\circ 58' 29.5'' \\
 &&&& N_1 &= 112^\circ 58' 10.8'' \\
 &&&& N &= 292^\circ 58' 10.8'' \\
 \lambda_1 &= 51^\circ 34' 57.0'' & \lambda_3 &= 63^\circ 8' 25.5'' \\
 N_1 &= 112^\circ 58' 10.8'' & \lg \tan \theta_1 &= \bar{1}.028652 & N_1 &= 112^\circ 58' 10.8'' & \lg \tan \theta_3 &= 2.968384 \\
 N_1 - \lambda_1 &= 61^\circ 23' 13.8'' & \lg \operatorname{cosec} &= 0.056567 & N_1 - \lambda_3 &= 49^\circ 49' 45.3'' & \lg \operatorname{cosec} &= 0.116836 \\
 \lg \tan i &= \bar{1}.085219 & \lg \tan i &= \bar{1}.085220 & \lg \tan i &= \bar{1}.085220 \\
 &&&& i &= 6^\circ 56' 15.6''.
 \end{aligned}$$

б) Домотаperiцелия и параметр.

$$\begin{aligned}
 N &= 292^\circ 58' 11'' & N &= 292^\circ 58' 11'' \\
 \lambda_1 &= 51^\circ 34' 57'' & \lg \cos \theta_1 &= \bar{1}.997536 & \lambda_3 &= 63^\circ 8' 25.5'' & \lg \cos \theta_2 &= \bar{1}.998130 \\
 \lambda_1 - N &= 118^\circ 36' 46'' & \lg \cos u_1 &= \bar{1}.677770 & \lambda_3 - N &= 130^\circ 10' 14.5'' & \lg \cos u_2 &= \bar{1}.809605(n) \\
 && u_1 &= 180^\circ - 61^\circ 33' 50'' & && u_3 &= 180^\circ - 50^\circ 2' 12.4'' \\
 &&& = 118^\circ 26' 10'' & && &= 129^\circ 57' 47.6'' \\
 u_3 - u_1 &= 11^\circ 31' 37.6'' & && & & & \\
 && c &= 0.22926 & s - r_3 &= 0.09800 & \bar{2}.991226 \\
 && r_3 &= 1.14615 & s - r_1 &= 0.13126 & 1.118132 \\
 && r_1 &= 1.11289 & \lg r_1 r_3 &= \bar{1}.894306 \\
 && 2s &= 2.48830 & \lg \sin^2 \frac{v_3 - v_1}{2} &= \bar{2}.003664 \\
 && s &= 1.24415 & \lg \sin \frac{1}{2} (v_3 - v_1) &= \bar{1}.001832 \\
 &&&& \frac{v_3 - v_1}{2} &= 5^\circ 45' 48.6'' \\
 \frac{1}{2} \lg r_3 &= 0.029621 & \sqrt{r_3} &= 1.070587 & \sqrt{r_3} - \sqrt{r_1} &= 0.015650 & \lg & \bar{2}.194514 \\
 \frac{1}{2} \lg r_1 &= 0.023226 & \sqrt{r_1} &= 1.054937 & \sqrt{r_3} + \sqrt{r_1} &= 2.125524 & \lg & \bar{1}.672534 \\
 &&&& \frac{v_3 - v_1}{4} &= 2^\circ 52' 54.35'' & \lg \cot g & 1.298098 \\
 && \frac{1}{2} (v_3 - v_1) &= 5^\circ 45' 48.7'' &&& \lg \tan \frac{v_1 + r_3}{4} & 1.165146 \\
 && \frac{1}{2} (v_3 + v_1) &= 16^\circ 38' 34.6'' &&& \frac{1}{4} (v_3 + v_1) &= 8^\circ 19' 17.3'' \\
 v_1 &= 10^\circ 52' 45.9'' & v_3 &= 22^\circ 24' 23.3'' \\
 \omega &= u_1 - v_1 = 107^\circ 33' 24.1'' & && & & & \\
 && = u_3 - v_3 = 107^\circ 33' 24.3'' && & & & \\
 \frac{1}{2} v_1 &= 5^\circ 26' 23'' & \lg \cos &= \bar{1}.998039 & \frac{1}{2} v_3 &= 11^\circ 12' 11.7'' & \lg \cos &= \bar{1}.991644 \\
 && \lg \sqrt{r_1} &= \underline{0.023226} &&& \lg \sqrt{r_3} &= \underline{0.029621} \\
 && \frac{1}{2} \lg q &= \underline{0.021265} &&& \frac{1}{2} \lg q &= \underline{0.021265} \\
 && \lg q &= \underline{0.042530} &&& \lg q &= \underline{0.042530} \\
 &&& \lg q = 0.042530 &&& &
 \end{aligned}$$

Среднее: $\omega = 107^\circ 33' 24.2''$

Время прохождения через перигелий

$v_1 = 10^{\circ}52'45.^{\prime\prime}$	$\lg m = 0.895005$	$v_3 = 22^{\circ}24'23.^{\prime\prime}3$	$\lg m = 1.217381$
	$\frac{3}{2} \lg q = 0.063795$		$\frac{3}{2} \lg q = 0.063795$
	$\lg t_1 - t_0 = 0.958800$		$\lg t_3 - t_0 = 1.281176$
	$t_1 - t_0 = 9.09495$		$t_3 - t_0 = 19.10627$
	$t_1 = 29.41785$ Нбр.		$t_3 = 39.42904$ Нбр.
	$t_0 = 20.32290$		$t_0 = 20.32277$ Нбр.

Среднее: $t_0 =$ Нбр. 20.32284. 1869 г.

Таким образом элементы кометы 1869 г. III:

$$N = 292^{\circ}58'11.^{\prime\prime}$$

$$i = 6^{\circ}56'15.^{\prime\prime}6$$

$$\omega = 107^{\circ}33'24.^{\prime\prime}2$$

$$\lg q = 0.042530$$

$$t_0 = \text{Нбр.: } 20.32284 \text{ (среднее Берлин) 1869 г.}$$

Вычисление места при вторых наблюдениях по элементам

$$t_2 = 34.42403 \quad \lg(t_2 - t_0) = 1.149256$$

$$t_0 = 20.32284 \quad \frac{3}{2} \lg q = 0.063795$$

$$t_1 - t_0 = 14.10119 \quad \lg m = 1.085561$$

$$m = 12.17760 \quad v_2 = 16^{\circ}43'56.^{\prime\prime}7$$

$$\omega = 107^{\circ}33'24.^{\prime\prime}2$$

$$u_2 = v_2 + \omega = 124^{\circ}17'20.9$$

$$\frac{1}{2} v_2 = 8^{\circ}21'58.^{\prime\prime}4 \quad \lg \cos \bar{1.995354} \quad \lg \cos u_2 = \bar{1.750793}$$

$$\frac{1}{2} \lg q = 0.021265 \quad \lg \sin u_2 = \bar{1.917088}$$

$$\frac{1}{2} \lg r_2 = 0.025911 \quad \lg r_2 \cos u_2 = 1.802615 (n) \dots - 0.634767$$

$$\lg r_2 = 0.051822 \quad \lg r_2 \sin u_2 = \bar{1.968910}$$

$$\lg \sin i = \bar{1.082028} \quad \lg \cos i = \bar{1.996808}$$

$$\lg r_2 \sin u_2 \sin i = \bar{1.050938} = \lg z_2 \quad \lg r_2 \sin u_2 \cos i = \bar{1.965736} (n) 0.924098$$

$$\lambda_2 = 72^{\circ}49'40''$$

$$N = 292^{\circ}58'11 \quad \lg R_2 = \bar{1.993509} \quad \lg R_2 = \bar{1.993509}$$

$$\lambda_2 - N = 139^{\circ}51'29 \quad \lg \sin \bar{1.809347} \quad \lg \cos \bar{1.883349} (n)$$

$$\lg R_2 \sin(\lambda_2 - N) = \bar{1.802856} \quad \lg R_2 \cos(\lambda_2 - N) = \bar{1.876858} (n)$$

$$R_2 \sin(\lambda_2 - N) = 0.635120 \quad R_2 \cos(\lambda_2 - N) = -0.753110$$

$$r_2 \sin u_2 \cos i = 0.924098 \quad r_2 \cos u_2 = -0.634767$$

$$r_2 \sin u_2 \cos i - R_2 \sin(\lambda_2 - N) = 0.288978 \quad r_2 \cos u_2 - R_2 \cos(\lambda_2 - N) = 0.118343$$

$$\rho_2 \sin(\alpha_2 - N) = 0.288978 \quad \lg \bar{1.460864}$$

$$\rho_2 \cos(\alpha_2 - N) = 0.118343 \quad \lg \bar{1.073133} \quad 1.966334$$

$$\lg \operatorname{tg}(\alpha_2 - N) = 0.387731 \quad \lg \rho_2 = \bar{1.494530}$$

$$\alpha_2 - N = 67^{\circ}43'49.^{\prime\prime}$$

$$N = 292^{\circ}58'11$$

$$\alpha_2 = 0^{\circ}42'00''$$

$$\alpha_2 \text{ набл. . . .} 0^{\circ}41'17.4$$

$$\alpha_2 \text{ выч.} - \alpha_2 \text{ набл.} = + 0^{\circ}0'42.6$$

$$\lg z_2 = \bar{1.050938}$$

$$\lg \rho_2 = \bar{1.494530}$$

$$\lg \operatorname{tg} \beta_2 = \bar{1.556408}$$

$$\beta_2 = 19^{\circ}48'12.^{\prime\prime}$$

$$\beta_2 \text{ набл.} = 19^{\circ}48'38''$$

$$\beta_2 \text{ выч.} - \beta_2 \text{ набл.} = - 0^{\circ}0'26.0$$

При вычислении на шесть знаков можно бы требовать лучшего согласия, но необходимо обратить внимание на то обстоятельство, что расстояние кометы до Земли составляло во время наблюдений около 0.30, чemu соответствует параллакс приблизительно в $30''$; геоцентрическая широта кометы была около 20° , наблюдения взяты Берлинские, значит расстояние точки пересечения луча с плоскостью эклиптики от центра Земли составляло около $2\frac{1}{2}$ земных радиусов, что скажется в 5-м знаке величин ρ_1' и ρ_3' несколькими единицами.

Все это и объясняет происхождение вышеуказанных разностей между наблюденным и вычисленным местом.

В сочинении J. G. Galle — «Verzeichniss der Elemente der bisher berechneter Cometenbahnen», показаны следующие элементы этой кометы по вычислению Oppolzer'a:

$$N = 292^\circ 55' 57''$$

$$i = 6^{\circ} 56' 10''$$

$$\omega = 107^\circ 40' 40''$$

$$\lg q = 0.04252$$

$$t_0 = 1869, \text{ Нбр. } 20.3514 \text{ (Париж)} = 1869, \text{ Нбр. } 20.3821 \text{ (Берлин).}$$

Как видно, наши элементы весьма близки к элементам Oppolzer'a.

§ 19. Legendre в своем мемуаре: «Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes», изданном в 1806 г., дает вычисление орбиты кометы 1781 г. по следующим данным:

№	t Нбр. 1781	α	β	$L \delta$	$\lg R$
1	$14^h 8^m 29^s 44^e$	$307^\circ 14' 45''$	$+55^\circ 17' 9''$	$52^\circ 54' 2''$	1.994864
2	19 8 29 44	306 51 26	39 14 48	57 57 4	1.994426
3	20 8 29 44	306 42 20	31 4 52	63 0 41	1.994028

Как видно в этом примере, движение кометы по долготе составляет всего $32' 25''$; очевидно, что построение в проекции на плоскости эклиптики невыполнимо.

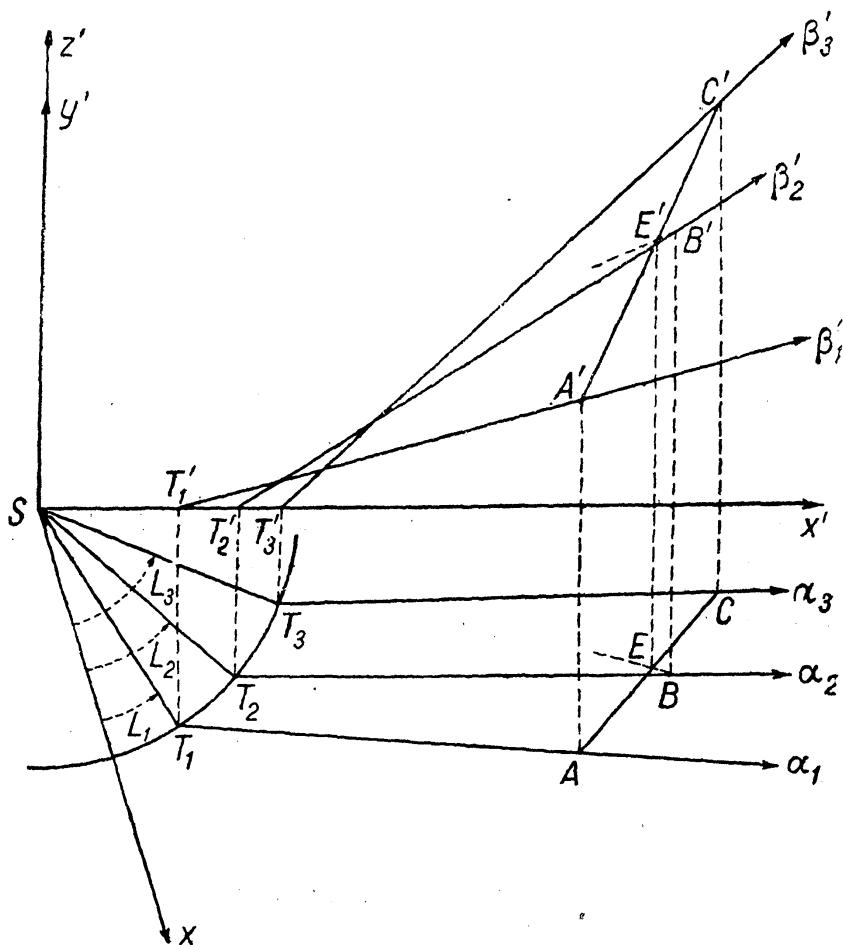
Но нетрудно видеть, что нет никакой надобности выполнять Ньютона построение непременно на плоскости эклиптики, оно останется в силе для любой плоскости проекций (при построении поправки в плоскости орбиты).

В нашем случае возьмем за горизонтальную плоскость проекций плоскость эклиптики, за вертикальную же плоскость проекций — плоскость, проведенную через центр Солнца параллельно плоскости долготы при втором наблюдении, и все Ньютоново построение и формулы, из него следующие, будем выполнять в нашей вертикальной плоскости проекций.

Очевидно, что обозначая расстояния $T_1'A'$, $T_2'B'$, $T_3'C'$, соответственно, — через ρ_1', ρ_2' и ρ_3' (фиг. 11), мы можем брать все формулы § 10, заменив в них углы α_1, α_2 и α_3 , соответственно, через:

$$\alpha'_1 = \alpha_2 + \beta_1', \quad \alpha'_2 = \alpha_3 + \beta_2', \quad \alpha'_3 = \alpha_1 + \beta_3'$$

Но наши формулы будут проще, если мы примем направление оси проекций, т. е. Sx_2 , за направление оси x -ов, вместо же оси y -ков возьмем совмещенное положение оси z -ов, т. е. будем везде в формуле § 10 писать, вместо буквы y , букву z , вместо буквы η — букву ζ и наоборот, помечая их для отличия значками.



Фиг. 11.

Таким образом получим в наших новых координатных осях:

1) Места Земли: T_1 , T_2 , T_3 :

$$(1) \quad \begin{aligned} \xi'_1 &= R_1 \cos(L_1 - \alpha_2); & \eta'_1 &= R_1 \sin(L_1 - \alpha_2); & \zeta'_1 &= 0 \\ \xi'_2 &= R_2 \cos(L_2 - \alpha_2); & \eta'_2 &= R_2 \sin(L_2 - \alpha_2); & \zeta'_2 &= 0 \\ \xi'_3 &= R_3 \cos(L_3 - \alpha_3); & \eta'_3 &= R_3 \sin(L_3 - \alpha_3); & \zeta'_3 &= 0 \end{aligned}$$

Для нахождения мест кометы имеем, во-первых:

$$(2) \quad \operatorname{tg} \beta'_1 = \operatorname{tg} \beta_1 \sec(\alpha_1 - \alpha_2) \quad \operatorname{tg} \beta'_3 = \operatorname{tg} \beta_3 \sec(\alpha_3 - \alpha_2)$$

Затем:

$$x_1' = \xi_1' + \rho_1' \cos \beta_1'; \quad z_1' = \rho_1' \sin \beta_1'; \quad y_1' = \eta_1' + \rho_1' \cos \beta_1' \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$(3) \quad x_2' = \xi_2' + \rho_2' \cos \beta_2; \quad z_2' = \rho_2' \sin \beta_2; \quad y_2' = \eta_2'$$

$$x_3' = \xi_3' + \rho_3' \cos \beta_3'; \quad z_3' = \rho_3' \sin \beta_3'; \quad y_3' = \eta_3' + \rho_3' \cos \beta_3' \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Все остальные формулы сохраняются при выполнении лишь упомянутой выше замены букв.

Для ясности приводим полное вычисление примера Legendre'a по нашим формулам, причем для наглядности пользуемся прямо формулами (3) и (4) § 10, не преобразовывая их к виду (39).

Пример 3

Комета 1781 г. (Legendre. Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes, p. 33)

№	<i>t</i> Нбр. 1781	α	β	L	$\lg R$	$\lg \tau$
1	14 ^h 8 ^m 29 ^s 44 ^e	307°14' 45"	-55°17' 9"	52°54' 2"	1.994864	2.9345514
2	19 D°	306 51 26	39 14 48	57 57 4	994426	2.9345514
3	29 D°	306 42 20	31 4 52	63 0 41	994028	1.2355814

Вычисление мест Земли

№	$L - \alpha_2$	$\lg \cos(L - \alpha_2)$	$\lg \sin(L - \alpha_2)$	$\lg \xi'$	$\lg \eta'$	ξ'	η'
1	106°02' 36"	1.441482 (n)	1.982747	1.436346 (n)	1.977611	-0.273115	0.949754
2	111 05 38	1.556178 (n)	1.969878	1.550604 (n)	1.964304	-0.355307	0.921094
3	116 09 15	1.644230 (n)	1.953088	1.638258 (n)	1.947118	-0.434768	0.885356

2) Вычисление «приведенных широт» β_1' и β_3' .

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 - \alpha_2 = 0^{\circ}23' 19'' & \lg \sec & 0.0000100 \\ \beta_1 = 55 17 9 & \lg \operatorname{tg} & 0.1593929 \\ \hline & & \end{array} \quad \begin{array}{lll} \alpha_3 - \alpha_2 = -0^{\circ}9' 6'' & \lg \sec & 0.0000015 \\ \beta_3 = 31 4 52 & \lg \operatorname{tg} & 1.7801653 \\ \hline & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \lg \operatorname{tg} \beta_1 = 0.1594029 & \lg \operatorname{tg} \beta_3' = 1.7801668 \\ \beta_1' = 55^{\circ}17' 11'' & \beta_3' = 31^{\circ}04' 52'' \end{array}$$

Nº	β'	$\lg \cos \beta'$	$\lg \sin \beta'$	$\cos \beta'$	$\sin \beta'$
1	55°17' 11"	1.755474	1.914877	0.5695	0.8220
2	39 14 48	1.888881	1.801171	0.7744	0.6327
3	31 5 52	1.932695	1.712862	0.8564	0.5163

Координаты вертикальных проекций кометы при $\rho_1' = \rho_2' = \rho_3' = 1.00$

Nº	x'	z'	$\frac{\lg \rho' \cos \beta'}{\operatorname{tg}(\alpha_i - \alpha_2)}$	$\frac{\rho' \cos \beta'}{\operatorname{tg}(\alpha_i - \alpha_2)}$	y'
1	0.29636	0.82201	3.58687	+0.00386	0.95342
2	0.41912	0.63266	—	0.00000	0.92109
3	0.42167	0.51625	3.36547 (n)	-0.00232	0.88324

По этим данным составляем чертеж в масштабе $a = 200$ мм, заметив, что приближенно

$$\sigma = \frac{\sqrt{2} \tau_3}{\sqrt{r_2}} = \frac{0.2433}{\sqrt{r_2}}$$

и, при $r_2 = 1.00$, $\sigma = 0.243$. Прикладывая линейку, видим, что надо брать ρ_2 близко к 0.60, тогда c_1 приблизительно равно 0.3 и близко к σ , поэтому берем за исходное $\rho_2 = 0.60$ и строим хорду.

1) Берем

$$\rho_2 = 0.60.$$

Чертеж дает:

$$c = 63 \text{ мм} = 0.315$$

$$r_2 = 1.00 \quad \sigma = 0.243$$

2) Берем

$$\rho_2 = 0.50$$

Чертеж дает:

$$c = 47 \text{ мм} = 0.235$$

$$r_2 = 194.5 \text{ мм} = 0.972 \quad \sigma = \frac{0.243}{\sqrt{0.972}} = 0.247$$

Итак,

$$\text{при } \rho_2 = 0.60 \quad c - \sigma = +0.072$$

$$\text{« } \rho_2 = 0.50 \quad c - \sigma = -0.012$$

поэтому будем в круглых числах $\rho_2 = 0.52$, с какового значения и начнем вычисление.

I Предположение: $\rho_2 = 0.520$

$$\lg \rho_2 = 1.716003$$

1) Вычисление x_2' и z_2' .

$$\lg \rho_2 \cos \beta_2 = 1.604984 \dots 0.402702$$

$$\lg \rho_2 \sin \beta_2 = 1.517174$$

$$x_2 = 0.047395$$

$$z_2 = 0.328983$$

2) Вычисление l_1 и l_2 .

$$l_2 = \frac{\xi_3 - \xi_1}{\sin(\beta_3' - \beta_1')} \cdot \sin \beta_3' \quad l_3 = \frac{\xi_3 - \xi_1}{\sin(\beta_3' - \beta_1')} \cdot \sin \beta_1' \\ \xi_3 - \xi_1 = -0.161653 \quad \lg \bar{1.208584}(n) \quad \lg l_1 = \bar{1.308654} \quad l_1 = 0.203542 \\ \beta_3' - \beta_1' = -24^\circ 12' 19'' \quad \lg \sin \bar{1.612792}(n) \quad \lg l_3 = \bar{1.510669} \quad l_3 = 0.324093 \\ \underline{\hline} \quad \underline{\hline}$$

3) Вычисление ρ_1' и ρ_3' .

$$\rho_1' = l_1 + \frac{\tau_3}{\tau_2} \cdot \frac{(x_2 - \xi_3) \sin \beta_3' - \zeta_2 \cos \beta_3'}{\sin(\beta_3' - \beta_1')} \quad \rho_3' = l_3 - \frac{\rho_3}{\tau_1} \cdot \frac{(x_2 - \xi_1) \sin \beta_1' - \zeta_2 \cos \beta_1'}{\sin(\beta_3' - \beta_1')} \\ \lg \frac{\tau_3}{\tau_2} = \lg \frac{\tau_3}{\tau_1} = 0.301030$$

$$\lg n_1 = \lg n_3 = \lg \frac{\tau_3}{\tau_2} \cdot \operatorname{cosec}(\delta_3' - \beta_1') = 0.688238(n) \quad n_1 = n_3 = -4.878 \\ \lg n_1 \sin \beta_3' = 0.401100(n) \quad \lg (-n_1 \cos \beta_3') = 0.620933 \\ \lg (-n_3 \sin \beta_1') = 0.603115; \quad \lg n_3 \cos \beta_1' = 0.443712(n) \\ x_2 - \xi_3 = 0.482163 \quad \lg \bar{1.683196} \quad 0.084296(n) \quad n_1(x_2 - \xi_3) \sin \beta_3' = -1.214220 \\ \lg \zeta_2 \bar{1.517174} \quad 0.138107 \quad -n_1 \zeta_2 \cos \beta_3' = +1.374380 \\ \underline{\hline} \quad \underline{\hline} \quad l_1 = +0.203542$$

$$x_2 - \xi_1 = 0.320510 \quad \lg \bar{1.505842} \quad 0.108957 \quad -n_3(x_2 - \xi_1) \sin \beta_1' = +1.285160 \\ \lg \zeta_2 \bar{1.517174} \quad \underline{\hline} \quad \lg \bar{1.960886}(n) \quad n_1 \zeta_2 \cos \beta_1' = -0.913874 \\ \underline{\hline} \quad \underline{\hline} \quad l_3 = +0.324093$$

$$\rho_3' = 0.695379$$

4) Вычисление координат x_1' , z_1' и x_3' , z_3' .

$$\lg \rho_1' = \bar{1.560745} \quad \lg \rho_3' = \bar{1.842222} \\ \lg \rho_1' \cos \beta_1' \bar{1.316219}; 0.207119 \quad x_1' = -0.065996 \quad \lg \rho_3' \cos \beta_3' \bar{1.774917}; 0.595549 \quad x_3' = 0.160781 \\ \lg \rho_1' \sin \beta_1' \bar{1.475622} \quad z_1' = 0.298966 \quad \lg \rho_3' \sin \beta_3' \bar{1.555084} \quad z_3' = 0.358992$$

5) Проверка:

$$x_3' - x_1' = 0.226777 \quad z_3' - z_1' = 0.060026 \\ x_2 - x' = 0.113391 \quad z_2' - z_1' = 0.030017$$

Отношения $\frac{x_3' - x_1'}{x_2 - x_1'} = \frac{z_3' - z_1'}{z_2 - z_1'}$ должны равняться 2, что и имеет место с возможностью

при вычислении на шесть знаков точностью.

6) Вычисление r_2 и h .

$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \quad f_0 = \frac{1}{8} \frac{\tau_3^2}{r_2^2} \quad f = \frac{1}{8} \frac{\tau_3^2}{(r_2 + \frac{1}{3}f_0)^2} \quad h = f \cdot \frac{d_2}{r_2}$$

$$\lg x_2 = \bar{2.675733} \quad \lg \frac{1}{8} \tau_3^2 = \bar{3.56807}$$

$$\lg z_2 = \bar{1.517174} \quad \bar{1.995539} \quad \lg 2 \lg r_2 = \bar{1.98177}$$

$$\lg \operatorname{tg} \gamma_2 \quad 0.841441 \quad \lg n_2 \bar{1.964304} \quad \bar{1.973419} \quad \lg f_0 \quad \bar{3.58630}$$

$$\gamma_2 = 81^\circ 48' 08'' \quad \lg 1.557331 \quad \lg r_2 = \bar{1.990885} \quad f_0 = 0.003857$$

$$r_2 = 0.979230$$

$$\frac{1}{3} f_0 = 0.001286$$

$$\lg \frac{1}{8} \tau_3^2 = \bar{3.56807} \quad \lg f = \bar{3.58517} \quad 0.980516 \dots \bar{1.99145}$$

$$\lg \frac{d_2}{r_2} = 1.53075$$

$$\lg h = \bar{3.11592}$$

$$h = 0.001306$$

7) Вычисление $\delta\rho_1'$ и $\delta\rho_3'$.

$$\begin{aligned}
 \delta\rho_1' &= + n_1 h \cdot \sin(\gamma_2 - \beta_3') & \delta\rho_3' &= - n_3 h \cdot \sin(\gamma_2 - \beta_1') \\
 \gamma_2 &= 81^\circ 48' 08'' & \gamma_2 &= 81^\circ 48' 08'' \\
 \beta_3' &= 31^\circ 45' 52'' & \lg n_1 h &= 3.80416 (n) & \beta_1' &= 55^\circ 17' 11'' & \lg(-nh) &= 3.80416 \\
 -\beta_3' &= 50^\circ 43' 16'' & \lg \sin &= 1.88878 & \gamma_2 - \beta_1' &= 26^\circ 40' 57'' & \lg \sin &= 1.65229 \\
 \lg \delta\rho_1' &= 3.69294 (n) & \lg \delta\rho_3' &= 3.45645 \\
 \delta\rho_1' &= 0.004931 & \delta\rho_3' &= 0.002861 \\
 \rho_1 &= 0.363702 + \delta\rho_1' = 0.358771 & \rho_3 &= 0.695379 + \delta\rho_3' = 0.698240 \\
 \lg \rho_1 &= 1.554817 & \lg \rho_3 &= 1.844005 \\
 \lg \delta x_1' &= 3.44841 (n) & x_1 &= -0.065996 - 0.002808 = -0.068804 \\
 \lg \delta z_1' &= 3.60782 (n) & z_1 &= 0.298966 - 0.004053 = 0.294913 \\
 \lg \rho_1 \cos \beta_1' \tan(\alpha_1 - \alpha_2) &= 3.14169 (n) & y_1 &= 0.949754 + 0.001386 = 0.951140 \\
 \lg \delta x_3' &= 3.38914 & x_3 &= 0.160781 + 0.002450 = 0.163231 \\
 \lg \delta z_3' &= 3.16931 & z_3 &= 0.358992 + 0.001477 = 0.360469 \\
 \lg \rho_3 \cos \beta_3' \tan(\alpha_3 - \alpha_2) &= 3.20947 (n) & y_3 &= 0.885356 - 0.001620 = 0.883736
 \end{aligned}$$

8) Вычисление хорды с.

$$\begin{aligned}
 x_3 - x_1 &= 0.232035 & \lg \bar{x} &= 1.365553 & \bar{x} &= 1.483324 \\
 z_3 - z_1 &= 0.065556 & \lg \bar{z} &= 2.816612 & \bar{z} &= 1.382229 & \bar{y} &= 1.983665 \\
 y_3 - y_1 &= -0.067404 & \lg \tan \gamma &= 1.451059 & \bar{y} &= 2.828686 \\
 & & & & \bar{y} &= 1.446457 & \lg c &= 1.398564 \\
 & & & & & & c &= 0.250360
 \end{aligned}$$

9) Для составления Ньютона чертежа поправок в плоскости орбиты, снимаем с чертежа величины r_1 и r_3 и строим в масштабе $a = 200$ мм треугольник ASC и затем вычерчиваем в увеличенном масштабе часть, прилегающую к средине хорды.

Для первого построения имеем:

$$AC = 49.7 \text{ мм} \quad AS = 199 \text{ мм} \quad CS = 194.6 \text{ мм}$$

Для второго построения берем масштаб $a = 20000$ мм.

Схема этого чертежа такая (фиг. 12):

$$\text{Масштаб } a = 20000 \text{ мм}$$

$$ok = 15 \text{ мм} \quad Bk = 37 \text{ мм}$$

$$S\mu = SB - 0.5 \text{ мм} \quad Bk = 0.00185 = 37 \text{ мм}$$

$$S\mu = SB - 0.000025 = 0.979205$$

$$BIA = 86^\circ$$

$$k = 0.00075 \cdot \frac{1}{0.981} = 0.000765$$

$$\begin{aligned}
 EE' &= \frac{2}{3} k \cdot \frac{f}{\sin 86^\circ} = 0.00051 \cdot 0.0038 = \\
 &= 0.0000019 = g
 \end{aligned}$$

перенос точки E по направлению к A , т. е. по углу $\gamma = 195^\circ 46'$.

Поправки:

$$\delta\rho_1' = -0.000002$$

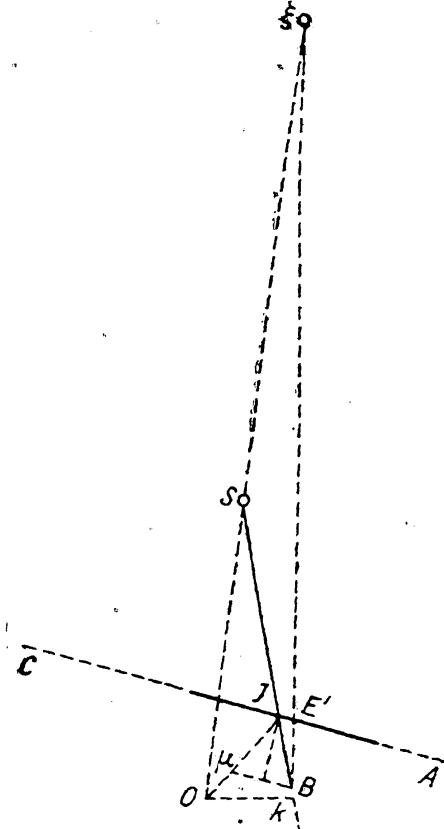
$$\delta\rho_3' = +0.000006$$

$$|\delta c| = +0.000007$$

и следовательно будет:

$$c = 0.250367$$

$$SP = r_2 + \frac{2}{3} f - 0.000025 = 0.979230 + 0.002565 - 0.000025 = 0.981770$$



Фиг. 12.

$$\begin{aligned} \lg SP &= 1.992010 \\ \frac{1}{2} \lg SP &= 1.996005 \\ \lg \sqrt{2} \tau_3 &= 1.386096 \\ \hline \lg \sigma &= 1.390091 \\ \sigma &= 0.245522 \end{aligned}$$

Итак, при

$$\rho_2 = 0.52$$

будет

$$c - \sigma = +0.004845$$

Дальнейшие приближения определяем по дифференциальным формулам.

10) Дифференциальные формулы.

Данные:

$$d_2 = 0.332; \quad r_2 = 0.979; \quad \gamma_2 = 81^\circ 48' \quad h = 0.00131; \quad n_1 = n_3 = 4.878 \\ \gamma = 15^\circ 46.5' \quad z_2 = 0.329; \quad c_1 = 0.241; \quad c = 0.250$$

$$\delta d_2 = \delta p_2 \cdot \cos(42^\circ 35') = 0.736 \cdot \delta p_2; \quad \delta \gamma_2 = \delta p_2 \cdot \frac{\sin \beta_2 - \gamma_2}{d_2} = -2.035 \cdot \delta p_2; \quad \delta \varepsilon_2 = 0.817 \cdot \delta p_2$$

$$\delta r_2 = 0.00131 [2.216 - 0.766] = -0.00190 \cdot \delta \rho_2$$

$$\delta p_1 = -4.878 [-0.1421 - 0.0014 - 0.0013 \cdot 0.64 \cdot 2.03] = +0.708 \cdot \delta p_2$$

$$\delta p_3 = +4.878 \left[-0.2761 - 0.0008 - 0.0013 \cdot 0.09 \cdot 2.03 \right] = +1.360 \cdot \delta p_2$$

$$\delta c_1 = [-0.708 \cdot 0.772 + 1.360 \cdot 0.965] \cdot \delta p_2 = +0.765 \cdot \delta p_2$$

$$\delta f = -\frac{0.0076}{0.979} \cdot 0.249 \cdot \delta \rho_2 = -0.019 \cdot \delta \rho_2 \quad \lg \frac{1}{4\tau_3^2} = 0.9267$$

$$\delta(SP) = \delta r_2 + \frac{2}{3} \delta f = 0.249 \cdot \delta r_2 \quad 3 \lg \sigma = 2.1701$$

$$\delta\sigma = -\frac{1}{4} \frac{\sigma^3}{\tau_3^2} \cdot \delta(SP) = -0.0311 \delta\rho_2$$

$\lg 0.249 = \frac{1.3962}{2.4930}$

$$\delta(c - \sigma) = +0.765 \cdot \delta\rho_2$$

так как $\delta(c - \sigma)$ было равно +0.004845, то надо взять

$$\delta p_2 = -\frac{0.004845}{0.765} = -0.006383 \quad \lg 0.004845 = 3.68529$$

$$\lg 0.765 = 0.11634$$

$$\lg \delta\rho_2 = \bar{3.80163}$$

Таким образом будет:

II. Приближение $\rho_2 = 0.513667$

$$\rho_1 = 0.358769 - 0.004484 = 0.354285 \quad \lg SP = 1.991311$$

$$\rho_3 = 0.698246 - 0.008610 = 0.689636 \quad \frac{1}{2} \lg SP = 1.995656$$

$$c = 0.250367 - 0.004643 = 0.245724 \quad \lg \sqrt{2} \tau_3 = 1.386096$$

$$\sigma = 0.245522 + 0.000202 = 0.245724 \quad \lg \sigma = 1.390440$$

$$SP = 0.981770 - 0.001577 = 0.980193 \quad \sigma = 0.245720$$

В виду значительной величины δp_2 , т. е. что вторые степени приращений могут оказывать влияние на 6-й знак, вычисляем величины r_2 и s непосредственно, чтобы их исправить.

Имеем:

$$\begin{aligned}
 \lg \delta\rho_1 &= \bar{3}.65186 (n) & \lg \delta\rho_2 &= \bar{3}.80163 (n) & \lg \delta\rho_3 &= 3.93470 \\
 \lg \delta x_1 &= \bar{3}.65186 (n) & x_1 &= -0.068804 - 0.002555 = -0.071359 \\
 \lg \delta x_2 &= \bar{3}.69061 (n) & x_2 &= +0.047395 - 0.004905 = 0.042490 \\
 \lg \delta x_3 &= \bar{3}.86739 (n) & x_3 &= 0.163231 - 0.007369 = 0.155862 \\
 \lg \delta z_1 &= \bar{3}.56674 (n) & z_1 &= 0.294913 - 0.003688 = 0.291225 \\
 \lg \delta z_2 &= \bar{3}.60280 (n) & z_2 &= 0.328983 - 0.004007 = 0.324976 \\
 \lg \delta z_3 &= \bar{3}.64756 (n) & z_3 &= 0.360469 - 0.004442 = 0.356027 \\
 \lg \delta y_1 &= \bar{5}.2387 (n) & y_1 &= 0.951130 - 0.000017 = 0.951113 \\
 \lg \delta y_3 &= \bar{5}.3000 & y_3 &= 0.883736 + 0.000020 = 0.883756 \\
 r_2 &= 0.977650 - 0.001580 = 0.977650 & f &= 0.003847 + 0.000012 = 0.003859 \\
 SP &= 0.977650 + 0.002573 - 0.000025 = 0.980198 & \sigma &= 0.245718 \\
 \lg x_2 &= 2.628287 & & \\
 \lg z_2 &= \bar{1}.511851 & \bar{1}.996319 & \bar{1}.515532 \\
 \hline & \bar{1}.116436 & & \\
 & & \lg y_2 \bar{1}.964304 & \bar{1}.974114 \\
 & & \hline & \\
 & & \bar{1}.551228 & \lg r_2 \bar{1}.990190 \\
 & & & r_2 = 0.977665 \\
 x_3 - x_1 &= 0.227221 & \lg \bar{1}.356448 & \bar{1}.983019 \\
 z_3 - z_1 &= 0.064802 & \lg \bar{2}.811588 & \bar{1}.373429 \quad \bar{1}.983034 \\
 \hline & & \hline & \\
 y_3 - y_1 &= 0.067357 & \bar{1}.455140 & \bar{2}.828383 \\
 & & \hline & \\
 & & \bar{1}.454954 & \lg c \bar{1}.39095 \\
 & & & c = 0.245694
 \end{aligned}$$

Таким образом при $\rho_2 = 0.513667$:

$$c - \sigma = -0.000024$$

Этому соответствует

$$\delta\rho_2 = +\frac{0.000024}{0.765} = +0.000031$$

и следовательно, окончательно будет

$$\rho_2 = 0.513698$$

и

$$c = \sigma = 0.245719$$

11) Для проверки вычисляем r_1 и r_3 и хорду σ по формуле Эйлера:

$$\begin{aligned}
 \lg x_1 &= \bar{2}.853370 & \lg y_1 &= \bar{1}.178232 & \lg r_1 &= \bar{1}.998809 \\
 \lg z_1 &= \bar{1}.464258 & \bar{1}.987345 & \bar{1}.476913 & r_1 &= 0.997260 \\
 \hline & \bar{1}.389112 & & \hline & & \\
 & & \lg y_3 \bar{1}.946332 & \bar{1}.979423 & & \\
 & & \hline & & & \\
 \lg x_3 &= \bar{1}.192843 & & & & \\
 \lg z_3 &= \bar{1}.551508 & \bar{1}.961911 & \bar{1}.589597 & & \\
 \hline & \bar{1}.641335 & & \hline & & \\
 & & \lg y_3 \bar{1}.946332 & \bar{1}.961600 & & \\
 & & \hline & & & \\
 & & \bar{1}.643265 & & & \\
 & & & \lg r_3 \bar{1}.984732 & & \\
 & & & r_3 = 0.965457 & &
 \end{aligned}$$

$r_1 + r_3 = 1.962717$	$\bar{1.560685}$
$\lg = 0.292877$	$\bar{1.536611}$
$\frac{1}{2} \lg = 0.146438$	$\underline{0.097296 \dots 0.12511}$
0.439315	284 (табл. Энке)
	0.292877
	$\underline{\underline{\lg \sigma = 0.390457}}$
	$\sigma = 0.245730$

12) Чтобы исправить величины r_1 и r_3 так, чтобы теорема Эйлера удовлетворялась в точности, вычисляем δr_1 и δr_3 по формулам

$$\delta r_1 = \frac{1}{r_1} (x_1 \delta x_1 + y_1 \delta y_1 + z_1 \delta z_1) \quad \text{и} \quad \delta r_3 = \frac{1}{r_3} (x_3 \delta x_3 + y_3 \delta y_3 + z_3 \delta z_3)$$

взяв $\delta \rho_2 = 0.006333$, для которого имеются готовые $\delta x_1, \delta y_1, \dots, \delta z_3$.

Имеем:

$x_1 \delta x_1 = -0.000181$	$x_3 \delta x_3 = 0.001205$
$z_1 \delta z_1 = +0.001073$	$z_3 \delta z_3 = 0.001570$
$y_1 \delta y_1 = 0 \dots$	$y_3 \delta y_3 = 0 \dots$
$\underline{\underline{0.000892}}$	$\underline{\underline{0.002775}}$
$\delta r_1 = 0.141 \delta \rho_2$	$\delta r_2 = 0.454 \delta \rho_2$
$c - \sigma = -0.000012$	
$\delta \rho_2 = +0.000016$	
$\delta r_1 = +0.000002$	
$\delta r_3 = +0.000007$	

и следовательно, окончательно будет:

$$\begin{array}{lll} c = 0.245730 & x_1 = -0.071340 & x_3 = 0.155917 \\ r_1 = 0.997262 & z_1 = 0.291255 & z_3 = 0.356058 \\ r_3 = 0.965464 & y_1 = 0.951113 & y_3 = 0.883756 \end{array}$$

Получив таким образом два места кометы в пространстве, и вычисляем по ним элементы орбиты:

Вычисление элементов орбиты

Гелиоцентрические координаты (широта и долгота):

$\sin \theta_1 = \frac{z_1}{r_1}; \quad \lg (\lambda_1 - \alpha_2) = \frac{y_1}{x_1}; \quad \sin \theta_3 = \frac{z_3}{r_3}; \quad \lg (\lambda_3 - \alpha_2) = \frac{y_3}{x_3}$	
$\lg z_1 = 1.464273$	$\lg z_3 = 1.551521$
$\lg r = 0.001191$	$\lg r_1 = 0.015264$
$\lg \sin \theta_1 = 1.465464$	$\lg \sin \theta_3 = 1.566785$
$\theta_1 = 16^{\circ}58'51''$	$\theta_3 = 21^{\circ}38'29''$
$\lg y_1 = 1.978232$	$\lg y_3 = 1.946332$
$\lg x_1 = 2.853333 (n)$	$\lg x_3 = 1.192894$
$\lg \tan (\lambda_1 - \alpha_2) = 1.124899 n$	$\lg \tan (\lambda_3 - \alpha_2) = 0.753438$
$\lambda_1 - \alpha_2 = 180^{\circ} - 85^{\circ}42'37'' = 64^{\circ}17'22''$	$\lambda_3 - \alpha_2 = 79^{\circ}59'40''$
$\alpha_2 = 306^{\circ}51'26''$	$\alpha_2 = 306^{\circ}51'26''$
$\lambda_1 = 41^{\circ}8'48''$	$\lambda_3 = 26^{\circ}51'63''$

a) Наклонность i и долгота узла N :

$$\begin{array}{ll} \theta_1 - \theta_3 = 38^{\circ}37'20'' & \lg \sin i = 1.795313 \\ \theta_1 - \theta_3 = -4^{\circ}39'37'' & \lg \operatorname{cosec} i = 1.090180 (n) \\ \frac{1}{2} (\lambda_1 - \lambda_3) = 7^{\circ}8'51'' & \lg \tan N = 1.098292 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{tg} \left[\frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2} - N \right] &= 1.981785 (n) \\ \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_3) - N &= -43^{\circ} 55' 50.6'' \quad N = 77^{\circ} 55' 47.9'' \\ N - \lambda_1 &= 36^{\circ} 46' 59.5'' \quad \lg \operatorname{cosec} 0.222726 \quad N - \lambda_3 = 51^{\circ} 04' 41.6'' \quad \lg \operatorname{cosec} 0.109018 \\ &\lg \operatorname{tg} \theta_1 \bar{1}.484824 \quad \lg \operatorname{tg} \theta_3 \bar{1}.598532 \\ &\lg \operatorname{tg} i \bar{1}.707550 \quad \lg \operatorname{tg} i \bar{1}.707550 \\ &i = 27^{\circ} 01' 14'' \end{aligned}$$

б) Позиция перигелия и параметр:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 16^{\circ} 58' 51.6'' \quad \lg \cos 1.980640 \quad \theta_3 = 21^{\circ} 38' 29.7'' \quad \lg \cos 1.968253 \\ N - \lambda_1 &= 36 46 59.5 \quad \lg \cos 1.903582 \quad N - \lambda_3 = 51 04 41.6 \quad \lg \cos 1.798139 \\ \lg \cos u_1 &= 1.884222 \quad \lg \cos u_3 = 1.766392 \\ u_1 &= 40^{\circ} 0' 18.0'' \quad u_3 = 54^{\circ} 16' 10.6'' \\ u_3 - u_1 &= 14^{\circ} 15' 52.6'' \\ c &= 0.245730 \quad s - r_1 = 0.106966 \quad \lg 1.029245 \\ r_1 &= 0.997262 \quad s - r_3 = 0.138764 \quad \lg 1.142277 \\ r_3 &= 0.965464 \quad \lg r_1 r_3 = 0.016455 \\ 2s &= 2.208456 \quad \bar{2}.187977 \\ s &= 1.104228 \quad \lg \sin \frac{v_1 - v_3}{2} = \bar{1}.093988 \\ &\quad \frac{1}{2} v_1 - v_2 = 7^{\circ} 7' 56.5'' \\ \frac{1}{2} \lg r_1 &= \bar{1}.993405 \quad \sqrt{r_1} = 0.998630 \quad \sqrt{r_1} - \sqrt{r_3} = 0.016050 \quad \lg 2.205475 \\ \frac{1}{2} \lg r_3 &= \bar{1}.992368 \quad \sqrt{r_3} = 0.982580 \quad \sqrt{r_1} + \sqrt{r_3} = 1.981210 \quad \lg 1.703070 \\ &\quad \frac{1}{4} (v_3 - v_1) = 3^{\circ} 33' 58.2'' \quad \lg \operatorname{ctg} 1.205360 \\ \frac{1}{2} (v_1 - v_3) &= 7^{\circ} 7' 56.5'' \quad \lg \operatorname{tg} \frac{v_1 + v_3}{4} = \bar{1}.113905 \\ \frac{1}{2} (v_1 + v_3) &= 14 48 45.2 \quad \frac{1}{4} (v_1 + v_3) = 7^{\circ} 24' 22.6'' \\ v_1 &= 21^{\circ} 56' 41.7''; \quad v_3 = 7^{\circ} 40' 48.7'' \\ \omega &= u_1 + v_1 = 61 56 59.7'' \\ &= u_3 + v_3 = 61 56 59.3'' \\ \frac{1}{2} v_1 &= 10^{\circ} 58' 21'' \quad \lg \cos \bar{1}.991987 \quad \frac{1}{2} v_3 = 3^{\circ} 50' 24'' \quad \lg \cos 1.990024 \\ &\lg \sqrt{r_1} \bar{1}.999405 \quad \lg \sqrt{r_3} = 1.992368 \\ \frac{1}{2} \lg q &= \bar{1}.991392 \quad \lg \sqrt{q} = \bar{1}.991392 \\ &\lg q = 1.982784 \quad \lg q = 1.082784 \\ &\lg q = \bar{1}.982784 (q = 0.961126) \\ v_1 &= 21^{\circ} 56' 41.7'' \quad \lg m = 1.207878 \quad v_3 = 7^{\circ} 40' 48.7'' \quad \lg m = 0.742455 \\ \frac{3}{2} \lg q &= 1.974176 \quad \frac{3}{2} \lg q = 1.974176 \\ \lg t_0 - t_1 &= 1.182054 \quad \lg t_0 - t_3 = 0.716631 \\ t_0 - t_1 &= 15.2074 \quad t_0 - t_3 = 5.2075 \\ t_1 &= 14.3540 \quad t_3 = 24.3540 \\ t_0 &= 29.5614 Nov. 1781 \quad t_0 = 29.5615 Nov. 1781 \\ \text{Среднее: } t_0 &= 1781 \text{ i. Нбр. } 29.56145 = \\ &= 1781 \text{ i. Нбр. } 29^{\circ} 13' 28'' 29'' \end{aligned}$$

Таким образом имеем следующие элементы:

Комета 1781 г.

$$\begin{aligned} N &= 77^{\circ} 55' 48'' \\ i &= 27^{\circ} 01' 14'' \\ \omega &= 61^{\circ} 57' 00'' \quad (N - \omega) = 15^{\circ} 58' 48'' \\ \lg q &= 1.982784 \quad (q = 0.961135) \\ t_0 &= 1781 \text{ г. Нбр.: } 29.56145 = 1781 \text{ г. Нбр.: } 29^{\text{x}} 13^{\text{y}} 28^{\text{z}} 29^{\text{c}} \end{aligned}$$

Движение: *попутное*

Метода Legendre'a составляет как бы развитие методы Лапласа, которая будет изложена ниже и сводится, в сущности, к составлению интерполяционных формул, представляющих зависимость широт и долгот кометы от времени, и определения затем места при среднем наблюдении и скорости кометы в этот момент, после чего и находятся элементы орбиты как бы по начальным (для момента t_2) обстоятельствам ее движения.

Legendre приводит в упомянутом сочинении две серии элементов:

Элементы	Предварительные	Окончательные
N	$77^{\circ} 55' 7''$	$77^{\circ} 22' 55''$
i	$25^{\circ} 59' 44''$	$27^{\circ} 12' 4''$
$N - \omega$	$15^{\circ} 51' 46''$	$16^{\circ} 3' 7''$
q	0.960449	0.960995
t_0	Нбр.: $29^{\text{x}} 16^{\text{y}} 18^{\text{z}} 3^{\text{c}}$	$29^{\text{x}} 12^{\text{y}} 42^{\text{z}} 8^{\text{c}}$

Оказывается, что и те и другие элементы оставляют погрешности и, по вычислению самого Legendre'a, разности вычисленных и наблюденных мест следующие:

№	Предварительные элементы		Окончательные элементы	
	α выч.— α набл.	β выч.— β набл.	α выч.— α набл.	β выч.— β набл.
1	+ 61"	+ 226"	+ 194"	- 115"
2	+ 1	+ 1	+ 100	- 55
3	- 21	- 62	+ 28	+ 92

Для сличения вычислим координаты места при втором наблюдении по нашим элементам. Мест при первом и третьем наблюдениях вычислять нет надобности, ибо они послужили для нахождения элементов и, значит, обратным расчетом получатся с точностью до десятых долей секунды, причем и эти разности произойдут от накопления неизбежных при вычислении по логарифмам погрешностей.

Итак имеем:

$$\begin{aligned} t_0 &= 29.56145 & \lg(t_2 - t_0) &= 1.008917 \\ t_2 &= 19.35400 & \frac{3}{2} \lg q &= 1.974176 \\ t_2 - t_0 &= 10.20745 & \lg m &= 1.034741 \\ v_2 &= 14^{\circ} 55' 42.5'' & m &= 10.8328. \dots v_2 = 14^{\circ} 55' 42.5'' \\ \omega &= 61^{\circ} 56' 59.5'' & \lg \sin u_2 &= 1.864278 & \lg \cos u_2 &= 1.833609 \\ u_2 &= 47^{\circ} 01' 17'' & \lg \sin i &= 1.657352 & \lg \cos \theta_2 &= 1.974579 \\ & & \lg \sin \theta_2 &= 1.521630 & \lg \cos(N - \lambda_2) &= 1.859030 \\ & & \theta_2 &= 19^{\circ} 24' 48'' & N - \lambda_2 &= 43^{\circ} 42' 44'' \\ & & & & \lambda_2 &= 34^{\circ} 13' 04'' \end{aligned}$$

$\frac{1}{2} v_2 = 7^\circ 27' 51''$	$\lg \cos = \bar{1.996304}$
	$\lg \sqrt{q} = \bar{1.991392}$
	$\underline{\lg \sqrt{r_2} = \bar{1.995088}}$
	$\lg r_2 = \bar{1.990176}$
$\lg r_2 = \bar{1.990176}$	$\lg r_2 = \bar{1.990176}$
$\lg \sin \theta_2 = \bar{1.521630}$	$\lg \cos \theta_2 = \bar{1.974579}$
$\underline{\lg z_2 = \bar{1.511806}}$	$\lg \cos \lambda_2 = \bar{1.917455}$
	$\lg \sin \lambda_2 = \bar{1.749999}$
	$\lg x_2 = \bar{1.882210}$
	$x_2 = 0.762448$
	$\lg y_2 = \bar{1.714754}$
	$y_2 = 0.518507$
$\lg R_2 = \bar{1.994426}$	$\lg R_2 = \bar{1.994426}$
$\lg \cos L_2 = \bar{1.724802}$	$\lg \sin L_2 = \bar{1.928188}$
$\underline{\lg \xi_2 = \bar{1.719228}}$	$\lg \eta_2 = \bar{1.922614}$
$\xi_2 = 0.523876$	$\eta_2 = 0.836783$
$\alpha_2 = 0.762448$	$y_2 = 0.518507$
$x - \xi_2 = + 0.238572$	$y - \eta_2 = - 0.318276$
$\lg (x - \xi_2) = \bar{1.877619}$	$\lg (y - \eta_2) = \bar{1.778992}$
$\lg (y - \eta_2) = \bar{1.502804(n)}$	$\lg (x - \xi_2) = \bar{1.903177(n)}$
$\lg \operatorname{tg} \alpha_2 = 0.125185(u)$	$\lg \rho_2 = \bar{1.599627}$
$\alpha_2 = 360^\circ - 53^\circ 8' 45''$	$\lg z_2 = \bar{1.511806}$
$= 306 51' 15''$	$\lg \operatorname{tg} \beta_2 = 0.912179$
$\alpha_2 \text{ наб.} = 306 51 26$	$\beta_2 = 39^\circ 14' 47''$
$\alpha_2 \text{ выч.} - \alpha_2 \text{ наб.} = - 0^\circ 0' 11''$	$\beta_2 \text{ наб.} = 39 14 48$
	$\beta_2 \text{ выч.} - \beta_1 \text{ наб.} = - 0^\circ 0' 1'$

Это сличение показывает, насколько ближе наши элементы воспроизводят наблюдения, нежели определенные по методе Legendre'a.

Повидимому, этою методою теперь не пользуются, а так как выкладки для ее установления довольно сложные, то мы в наших беседах этой методы излагать не будем и ограничимся изложением методы Лапласа, в виду изящества ее теории.

Рассмотрение этих вычислений показывает, что исключительная особенность этого примера не только не ведет к усложнению, но даже к упрощению вычислений, так как выражения l_1 , l_3 , ρ_1' и ρ_3' проще, нежели в общем случае.

§ 20. Показав на трех предыдущих примерах, взятых нарочно так, чтобы они были типичными, способ производства вычислений по методе Ньютона и ту точность, которую можно достичь, т. е. какую угодно, мы перейдем к последнему примеру, именно — комете 1680 г., послужившей, как уже сказано, и самому Ньютону.

Я должен сознаться, это анализ этого примера потребовал порядочного труда: я перечислил этот пример полностью трижды, вычисляя каждую

величину для контроля двумя совершенно различными манерами, напр.: хорду c — по формуле

$$c^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2$$

и по формулам:

$$c^2 = c_1^2 + (z_3 - z_1)^2$$

$$c_1^2 = f_1^2 + f_3^2 - 2f_1 f_3 \cdot \cos(\alpha_3 - \alpha_1)$$

причем

$$f_1 = p_1 - l_1 \quad \text{и} \quad f_2 = p_3 - l_3$$

и т. п. Произошло это потому, что я сперва не получал тех чисел, которые показаны у Ньютона, хотя и получал числа, весьма к ним близкие, а так как в числах, приводимых у Ньютона, ошибки быть не может, то и надо было доискаться до того способа, каким он свои числа получил.

Так как, приводя данные, послужившие ему для построения, Ньютон дает только один радиус-вектор земной орбиты $ST_2 = 0.98421$, то это заставило думать, что он принимает часть орбиты Земли между первым и третьим наблюдениями за дугу круга, описанную этим радиусом. Составив в этом предположении формулы, в точности воспроизводящие все указанные у Ньютона построения, и сделав расчет, я получил числа, отличающиеся от показанных у Ньютона в третьем знаке, а так как у него показано пять и четыре знака, то ясно, что Ньютон поступал как-нибудь иначе.

Тогда я взял таблицы Leverrier (Ann. de l'Observ. de Paris, t. IV) и по ним рассчитал долготы Солнца и радиусы-векторы Земли, чтобы таким образом принять действительную орбиту Земли за основание расчета. Я считал, что несравненно проще сделать выборку из этих таблиц, бывших у меня под руками, нежели разыскивать по библиотекам те таблицы 1680-х годов, которыми мог пользоваться Ньютон в 1686 г.

Получилось следующее:

Среднее Гринвич. время	Долготы \odot по табл. Leverrier	Долготы \odot показанные у Ньютона	R по таблице Leverrier
1680 г. Дек. 21 ^h 6 ^m 59 ^s	281°06' 43"	281°06' 44"	0.9831845
1681 « Янв. 5 6 01 38	296 22 9	296 22 18	0.9840353
1681 « « 25 7 58 42	316 45 17	316 45 36	0.9868510

причем делая выборку я не делал поправок на возмущения.

Если взять по таблице Leverrier радиус-вектор на средний момент между крайними наблюдениями, то получится 0.9842882, т. е. число, различающееся лишь в 5-м знаке от показанного у Ньютона.

Тогда, взяв долготы Солнца, показанные у Ньютона, а радиусы-векторы R по таблицам Leverrier, я произвел вновь расчет, опять-таки воспроизводя буквально все указания Ньютона, получил более близкое согласие, но все-таки не полное.

После этого я ввел поправку на отстояние точки B (проекции второго места кометы на плоскость эклиптики) до касательной к вершине, воспроизводя, вместе с тем, формулами не приближенное построение, описываемое Ньютоном, а *точное*, вытекающее из его теорем, но считая условно, что и в проекции длины $I\mu = \mu M$, иными словами, что и в проекции точки S остается фокусом параболы; тогда я и получил в точности числа Ньютона.

Продолжая расчет далее и получив величины радиусов-векторов, соответствующих полученным укороченным расстоянием, я поверил длину хорды по теореме Эйлера,—оказалась разница, превышающая погрешность, накапляющуюся от вычисления по логарифмам, между тем равносильность теоремы Эйлера и теоремы Ньютона очевидна, и между длинами хорд должно бы быть такое же полное согласие, как и в предыдущих примерах.

Единственную причину этого несогласия я усмотрел лишь в сделанном Ньютоном для упрощения построения допущении равенства проекций длин $I\mu$ и $M\mu$, хотя направления их различны и для проекции орбиты Солнце никогда фокусом служить не будет.

Тогда я переделал построение Ньютона, выполняя его в *плоскости орбиты*, а не в проекции, и притом не приближенно, а *точно*, согласно теоремам X и XI, после чего я и для примера кометы 1680 г. получил полное согласие длины хорды, расчисляемой по теореме Ньютона и по теореме Эйлера.

Но зато получились иные, укороченные, расстояния и несколько иные элементы орбиты, нежели приведены в «Principia», но тут причина этой разницы была уяснена и не могла быть отнесена к недостаточно тщательному или недостаточно внимательному изучению текста Ньютона.

После этих объяснений приведем самый пример Ньютона, т. е. вычисление орбиты кометы 1680 г., производя это вычисление совершенно так же, как и для других примеров, но пользуясь лишь пятизначными логарифмами, как более соответствующими точности старинных наблюдений.

Пример

Комета 1860 г.

Данные по Ньютону

№	Среднее Гринич. время (по старому стилю)	Долгота Солнца ($180^\circ + L$)	Долгота кометы α	Широта кометы $\beta (N)$	Радиус- вектора Земли
1	1680 г. Дек. 21 ^к 6 ^м 36 ^с 59 ^с	281°06' 44"	305°08' 12"	21°42' 13"	
2	1681 » Янв. 5 6 01 38	296 22 18	8 48 53	26 15 07	0.98421
3	1681 » » 25 7 58 42	316 45 36	39 35 00	17 56 30	

Различные постоянные в вычислении

№	Промежутки t	$\lg t$	$\lg \tau = \lg t$ $+ 2.2355814$	$\lg \cos \alpha$	$\lg \sin \alpha$	$\lg \operatorname{tg} \beta$
1	14.975450	1.1753798	1.4109612	1.76006	1.91264n	1.59991
2	20.081297	1.3027918	1.5383732	1.99484	1.18537	1.69301
3	35.056747	1.5447717	1.7803531	1.89688	1.80428	1.51027

Гелиоцентрические координаты Земли по таблице Leverrier

№	L	R	$\lg R$	$\lg \cos \alpha'$	$\lg \sin L$	$\lg \xi$	$\lg \eta$
1	101°06' 43"	0.9831845	1.99263	1.28494n	1.99178	1.27757n	1.98441
2	116 22 9	0.9840353	1.99301	1.64753n	1.95228	1.64054n	1.94529
3	136 45 17	0.9868510	1.99425	1.86239n	1.83577	1.85664n	1.82002

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -0.18948 & \eta_1 &= 0.96474 \\ \xi_2 &= -0.43706 & \eta_2 &= 0.88164 \\ \xi_3 &= -0.71885 & \eta_3 &= 0.67612\end{aligned}$$

Примечание. Расчисленные по таблице Leverrier долготы Земли, как видно, несколько разнятся от показанных у Ньютона, а именно на 1", 9" и 19"; но так как я не имел под руками старинных таблиц движения Солнца, то я и взял таблицы Leverrier, чтобы выбрать из них радиусы-векторы Земли, не приведенные у Ньютона, кроме среднего. По таблице Leverrier радиус-вектор на средний момент оказывается 0.9842882.

Возмущения не приняты во внимание.

I Предположение

$$\rho_2 = 0.56570 \quad \lg \rho_2 = 1.75759$$

1) Вычисление величин: $x_2, y_2, z_2, r_2, d_2, \gamma_2$.

Формулы:

$$x_2 = \xi_2 + \rho_2 \cos \alpha_2; \quad y_2 = \eta_2 + \rho_2 \sin \alpha_2; \quad z_2 = r_2 \operatorname{tg} \beta_2$$

$$d_2^2 = x_2^2 + y_2^2; \quad \operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{y_2}{x_2}; \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

$$\lg \rho_2 \cos \alpha_2 = 1.74743 \quad \rho_2 \cos \alpha_2 = 0.55903 \quad x_2 = 0.12197$$

$$\lg \rho_2 \sin \alpha_2 = 2.93796 \quad \rho_2 \sin \alpha_2 = 0.086689 \quad y_2 = 0.96833$$

$$\lg \rho_2 \operatorname{tg} \beta_2 = 1.44552 = \lg z_2 \quad z_2 = 0.27895$$

$$\lg x_2 = 1.08625 \quad 1.09681 \quad \lg z_2 = 1.44552 \quad 1.43903$$

$$\lg y_2 = 1.98602 \quad 1.99658 \quad \lg d_2 = 1.98944 \quad 1.98295$$

$$\underline{\lg \operatorname{tg} \gamma_2 = 0.89977 \quad \lg d_2 = 1.98944 \quad \lg \operatorname{tg} n = 1.45608 \quad \lg r_2 = 0.00649}$$

$$\underline{\gamma_2 = 82^\circ 49' 15'' \quad d_2 = 0.97598 \quad n = 15^\circ 57' 03'' \quad r_2 = 1.01510}$$

2) Вычисление величин: l_1 и l_3 .

Формулы:

$$l_1 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) = (\xi_3 - \xi_1) \sin \alpha_3 - (\eta_3 - \eta_1) \cos \alpha_3$$

$$l_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) = (\xi_3 - \xi_1) \sin \alpha_1 - (\eta_3 - \eta_1) \cos \alpha_1$$

$$\xi_3 - \xi_1 = -0.52937 \quad 1.72376 n \quad \lg \frac{\xi_3 - \xi_1}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} = 1.72507 n = \lg a$$

$$\eta_3 - \eta_1 = -0.28862 \quad 1.46033 n \quad \lg \frac{\eta_3 - \eta_1}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} = 1.46146 n = \lg b$$

$$\alpha_3 - \alpha_1 = 94^\circ 26' 48'' \quad 1.99869$$

$$\lg a \cdot \sin \alpha_3 = 1.52935 n \quad -0.33834 \quad \lg a \cdot \sin \alpha_1 = 1.63773 \quad 0.43424$$

$$\lg b \cdot \cos \alpha_3 = 1.34852 \quad +0.22311 \quad \lg b \cdot \cos \alpha_1 = 1.22170 \quad 0.16661$$

$$l_1 = -0.11523 \quad l_3 = 0.60085$$

3) Вычисление величин: ρ_1' и ρ_3' .

Формулы:

$$\rho_1' = l_1 + \frac{\tau_3 \cdot (x_2 - \xi_3) \sin \alpha_3 - (y_2 - \eta_3) \cos \alpha_3}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}; \quad \rho_3 = l_3 - \frac{\tau_3 \cdot (x_2 - \xi_1) \sin \alpha_1 - (y_2 - \eta_1) \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}$$

$$x_2 - \xi_3 = 0.84082 \quad 1.92470 \quad \lg \frac{\tau_3}{\tau_2} \cdot \frac{\sin \alpha_3}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} = 0.04757 \quad 1.97227 \quad + 0.93815$$

$$y_2 - \eta_3 = 0.29221 \quad 1.46570 \quad \lg \frac{\tau_3}{\tau_2} \cdot \frac{\cos \alpha_3}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} = 0.13017 \quad 1.59587 \quad - 0.39434$$

$$l_1 = -0.11523$$

$$\rho_1' = 0.42858$$

$$x_2 - \xi_1 = 0.31145 \quad 1.49339 \quad \lg \frac{\tau_3}{\tau_1} \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} = 0.28334 n \quad 1.77673 n \quad + 0.59804$$

$$y_2 - \eta_1 = 0.00359 \quad 1.55509 \quad \lg \frac{\tau_3}{\tau_1} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} = 0.13076 \quad 1.68585 \quad + 0.00485$$

$$l_3 = 0.60085$$

$$\rho_3' = 1.20374$$

4) Вычисление координат: $x_1' y_1', x_3' y_3'$.

$$x_1' = \xi_1 + \rho_1' \cos \alpha_1 \quad y_1' = \eta_1 + \rho_1' \sin \alpha_1; \quad x_3' = \xi_3 + \rho_3' \cos \alpha_3 \quad y_3' = \eta_3 + \rho_3' \sin \alpha_3$$

$$\lg \rho_1' = 1.63203 \quad \lg \rho_3' = 0.08053$$

$$\lg \xi_1' \cos \alpha_1 = 1.39209 \quad 0.24666 \quad x_1' = 0.05718$$

$$\lg \rho_1' \sin \alpha_1 = 1.54467 n \quad -0.35049 \quad y_1' = 0.61425$$

$$\lg \rho_3' \cos \alpha_3 = 1.96741 \quad 0.92771 \quad x_3' = 0.20886$$

$$\lg \rho_3' \sin \alpha_3 = 1.88481 \quad 0.76703 \quad y_3' = 1.44315$$

5) Проверка произведенных вычислений.

Должно быть:

$$\begin{array}{l} \frac{x_3' - x_1'}{x_2 - x_1'} = \frac{y_3' - y_1'}{y_2 - y_1'} = \frac{\tau_3}{\tau_1} \quad \lg \frac{\tau_3}{\tau_1} = 0.36939 \\ x_3' - x_1' = 0.15168 \quad \bar{1.18093} \quad y_3' - y_1' = 0.82890 \quad \bar{1.91850} \\ x_2 - x_1' = 0.06479 \quad \bar{1.81151} \quad y_2 - y_1' = 0.35408 \quad \bar{1.54910} \\ \hline & & & \\ & 0.36942 & & 0.30940 \end{array}$$

6) Вычисление поправок: h , $\delta\rho_1'$, $\delta\rho_3'$ и величин ρ_1 и ρ_3 .

Формулы:

$$h = \frac{1}{8} \frac{\tau_3^2}{r_2^2} \cos n \quad \delta\rho_1' = \frac{\tau_3}{\tau_2} h \cdot \frac{\sin(\gamma_2 - \alpha_3)}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}; \quad \delta\rho_3' = -\frac{\tau_3}{\tau_1} h \cdot \frac{\sin(\gamma_2 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}.$$

(h считается с \rightarrow по направлению к Солнцу, направление ($\rightarrow h$) есть $180^\circ + \gamma_2$);

$$\begin{array}{lll} \rho_1 = \rho_1' + \delta\rho_1' & \rho_3 = \rho_3' + \delta\rho_3' \\ \lg \frac{\tau_3}{\tau_2} \cdot \frac{1}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} = 0.24329 & \lg \frac{\tau_3}{\tau_1} \cdot \frac{1}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} = 0.37070 \\ \lg \frac{1}{8} = \bar{1.09691} & \gamma_2 - \alpha_3 = 43^\circ 14' 15'' & \lg \sin \bar{1.83570} \quad 0.07899 \\ 2 \lg \tau_3 = \bar{1.56070} & \gamma_2 - \alpha_1 = 137^\circ 41' 03'' & \lg \sin \bar{1.82815} \quad 0.19885 \\ & \lg \delta\rho_1' = \bar{2.70657} & \delta\rho_1' = +0.05088 \\ & \lg \delta\rho_3' = \bar{2.82643} & \delta\rho_3' = -0.06705 \\ 2 \lg r_2 = \bar{1.98702} & & \\ \lg \cos n = \bar{1.98295} & \rho_1' = 0.42858 & \rho_3' = 1.20374 \\ \hline \lg h = \bar{2.62758} & \delta\rho_1' = +0.05088 & \delta\rho_3' = -0.06705 \\ \hline h = 0.04242 & \rho_1 = 0.47946 & \rho_3 = 1.13669 \\ \lg \rho_1 = \bar{1.68075} & \hline \lg \rho_3 = 0.05564 & \end{array}$$

7) Вычисление координат $x_1 y_1$, $x_3 y_3$ и проекции хорды c_1 .

Формулы:

$$\begin{array}{llll} \delta x_1' = \delta\rho_1' \cos \alpha_1; & \delta y_1' = \delta\rho_1' \sin \alpha_1; & \delta x_3 = \delta\rho_3' \cos \alpha_3; & \delta y_3 = \delta\rho_3' \cdot \sin \alpha_3; \\ x_1 = x_1' + \delta x_1'; & y_1 = y_1' + \delta y_1'; & x_3 = x_3' + \delta x_3'; & y_3 = y_3' + \delta y_3' \\ c_1^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 & & & \\ \hline \lg \delta x_1' = \bar{2.46663} & \delta x_1' = 0.02928 & x_1 = 0.08646 & \\ \lg \delta y_1' = 2.61921 n & \delta y_1' = -0.04161 & y_1 = 0.57264 & \\ \lg \delta x_3' = \bar{2.71331} & \delta x_3' = -0.05168 & x_3 = 0.15718 & \\ \lg \delta y_3' = \bar{1.63071} & \delta y_3' = -0.04273 & y_3 = 1.40042 & \\ x_3 - x_1 = 0.07072 & \bar{2.84954} & \bar{2.93005} & \bar{1.91949} \\ y_3 - y_1 = 0.82778 & \bar{1.91791} & \bar{1.99842} & \bar{1.91949} \\ \hline \lg \operatorname{tg} \gamma = 1.06837 & & \lg c_1 = \bar{1.91949} & \\ \gamma = 85^\circ 07' 08'' & & \hline \lg c_1 = 0.83079 & \end{array}$$

8) Вычисление координат z_1 и z_3 , длины хорды c и наклона ее j :

$$\begin{array}{llll} z_1 = \rho_1 \operatorname{tg} \beta_1; & z_3 = \rho_3 \operatorname{tg} \beta_3; & c^2 = (z_3 - z_1)^2 + c_1^2; & \operatorname{tg} j = \frac{z_3 - z_1}{c_1} \\ \hline \lg z_3 = \bar{1.56591} & z_3 = 0.36805 & \lg(z_3 - z_1) = \bar{1.24849} & \bar{1.31934} \\ \lg z_1 = \bar{1.28066} & z_1 = 0.19084 & \lg c_1 = \bar{1.91949} & \bar{1.99034} \\ \hline z_3 - z_1 = 0.17721 & & \hline \lg \operatorname{tg} j = \bar{1.32900} & \lg c = \bar{1.92915} \\ & & \hline j = 12^\circ 02' 28'' & c = 0.84947 \end{array}$$

9) Элементы параллелограмма поправок и приведение его в плоскость однобиты.
Формулы:

$$\sin^2 \frac{\Omega}{2} = \sin^2 \frac{n-j}{2} + \cos n \cos j \sin^2 \frac{\omega_2}{2}$$

$$AE = \frac{\tau_1}{\tau_3} c; \quad EC = \frac{\tau_2}{\tau_3} c; \quad AI = CI = \frac{1}{2} c; \quad EI = EC - CI$$

$$\gamma = 85^\circ 07' 08'' \quad \gamma_2 = 82^\circ 49' 15'' \quad \omega_2 = \gamma - \gamma_2 = 2^\circ 17' 53'' \quad SB = r_2 = 1.01510$$

$$n = 15 \ 57 \ 03 \quad j = 12 \ 02 \ 28 \quad n-j = 3 \ 54 \ 35$$

$$\lg \sin \frac{\omega_2}{2} = \bar{2}.30218 \quad 2 \lg \sin \frac{\omega_2}{2} = \bar{4}.60436 \quad 2 \lg \sin \frac{n-j}{2} = \bar{3}.06582 = \lg II$$

$$\lg \sin \frac{n-j}{2} = 2.53291 \quad \lg \cos \gamma = 1.99034 \quad \Pi = 0.00116365$$

$$\lg \cos n = \bar{1}.98295 \quad I = 0.00037814$$

$$\lg I = \bar{4.57765} \quad I + II = 0.00154179$$

$$\lg c = \bar{1}.92915$$

$$\lg AE = \bar{1}.55979 \quad AE = 0.36288 \quad \lg \sin \frac{\Omega}{2} = \bar{2}.59401$$

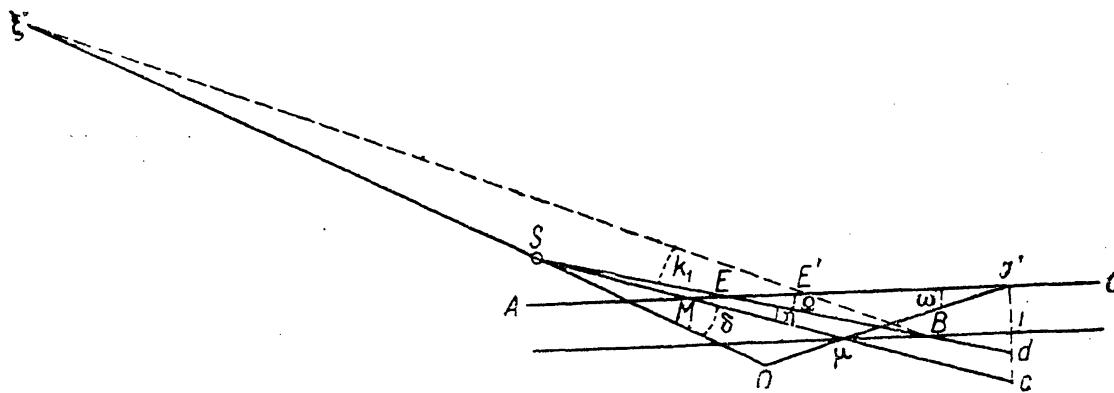
$$\lg EC = \bar{1}.68717 \quad EC = 0.48660 \quad \frac{1}{2} \Omega = 2^\circ 15' 01''$$

$$EI = 0.06186$$

21 — 6.60100

10) Параллелограмм поправок.

$$BE = \frac{h_0}{\cos n} = h_1$$



Фиг. 13.

$$B\mu = EI - h_1 \cos \Omega - I\mu \cos \omega$$

$$Ii = ic = h_1 \sin \Omega$$

$$id = Bi \cdot \operatorname{tg} \Omega$$

$$cd = Ii - id; \quad Bd = Bi \cdot \sec \Omega; \quad Sd = BS + Bd$$

$$\eta = \frac{cd \cdot \cos \Omega}{Sd}; \quad \omega = \Omega + \eta$$

$$I\mu = h_1 \cdot \frac{\Omega}{\omega} = h_1 - \frac{h_1 \cdot \eta}{\Omega + \eta}$$

$$Bi = EI - h_1 \cdot \cos \Omega; \quad S\mu = SB + B\mu \cdot \cos \Omega; \quad SO = S\mu - \frac{1}{2} I\mu \cdot \cos 2\omega$$

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{I\mu \cdot \sin 2\omega}{SO} = \frac{I\mu \cdot \sin \omega}{SO} = \frac{I\mu}{SO} \cdot \omega$$

$$k_1 = (\delta + \eta) \frac{2SO}{2SO + SB}; \quad \omega_1 = \Omega + k_1$$

$$I\mu = \frac{1}{3} \tau_3^2 \cdot \frac{1}{\left(S\mu + \frac{1}{3} I\mu \right)^2}$$

(**)

Обратим внимание на вычисление поправок по этим формулам; как видно, величина $I\mu$ получается двумя манерами: сперва по формуле (*) по приближенному значению h , затем по формуле (**) по промежутку τ_3 и по расстоянию до вершины μ сегмента согласно лемме XI. Это вычисление надо проделать несколько раз, пока последовательным приближением не получится полного согласия обоих значений.

$$h_0 = 0.04242; \quad \lg h_1 = \bar{2}.64463; \quad h_1 = 0.04412; \quad EI = 0.06186$$

$$\cos \Omega = 1 - 0.00308; \quad \sin \Omega = 0.07847; \quad \tg \Omega = 0.07871$$

$$Bi = 0.06186 - 0.04412 (1 - 0.00308) = 0.06199 - 0.04412 = 0.01787$$

$$id = 0.01787 \cdot 0.0787 = 0.001405$$

$$Bd = 0.01787 + 0.00005 = 0.01792$$

$$cd = 0.04412 \cdot 0.0785 - 0.00141 = 0.003463 - 0.001405 = 0.002058$$

$$\eta = \frac{0.002052}{1.0330} = 0.001985 = 6' 50'' = 410''$$

$$\omega = \Omega + \eta = 4^\circ 30' 02'' + 6' 50'' = 4^\circ 36' 52'' = 16612''$$

$$I\mu = 0.04412 - 0.004412 \cdot \frac{410}{16612} = 0.04412 - 0.000109 = 0.04303$$

$$B\mu = 0.06199 - 0.04412 - 0.04303 + 0.00013 = 0.06212 - 0.08715 = - 0.02503$$

$$S\mu = 1.01510 - 0.02503 + 0.00008 = 1.01518 - 0.02503 = 0.99015$$

$$SN = 0.99015 + 0.01471 = 1.00486; \quad \lg SN = 0.00211$$

$$\lg \frac{1}{8} \tau_3^2 = \bar{2}.65762; \quad \lg I\mu = \bar{2}.65340; \quad I\mu = 0.04502$$

Беру:

$$I\mu = 0.04502 \quad h_1 = I\mu + 0.00109 = 0.04621$$

$$B\mu = 0.06212 - 0.09123 = - 0.02911$$

$$S\mu = 1.01518 - 0.02911 = 0.98607; \quad SN = 0.98607 + 0.01541 = 1.00148$$

$$\lg SN = 0.00064; \quad \lg I\mu = \bar{2}.65638; \quad I\mu = 0.04533.$$

Беру:

$$I\mu = 0.04540; \quad h_1 = 0.04649$$

$$B\mu = - 0.02977; \quad S\mu = 0.98541. \quad SN = 1.00091; \quad \lg SN = \bar{0}.00036$$

$$\lg I\mu = \bar{2}.65682; \quad I\mu = 0.04538$$

Беру:

$$I\mu = 0.04538 \quad h_1 = 0.04647.$$

$$B\mu = 0.06212 - 0.09185 = - 0.02973; \quad S\mu = 0.095545; \quad SN = 1.0094$$

$$\lg SN = 0.00041; \quad \lg I\mu = \bar{2}.65680; \quad I\mu = 0.04538$$

Делаю поправку на расстояние точки B до касательной в вершине:

$$\mu m = \frac{(0.02973)^2}{4 \cdot 0.985} = 0.00023$$

Следовательно:

$$Im = 0.04538; \quad I\mu = 0.04515; \quad h_1 = 0.04624$$

$$Bm = 0.06212 - 0.04624 - 0.04538 = - 0.02950$$

$$Sm = 0.98568; \quad SN = 1.00081; \quad \lg SN = 0.00035; \quad \lg Im = \bar{2}.65692; \quad Im = 0.045386$$

$$2 \lg SN = 0.00070 \quad \lg \sqrt{2} \tau_3 = \bar{1}.93087 \quad 2 \lg \sigma = 1.85478$$

$$\lg' Sm = 0.00626 \quad \frac{1}{2} \lg SP = 0.00348 \quad \lg' Sm = 0.00626$$

$$\underline{\lg SP = 0.00696} \quad \underline{\lg \sigma = \bar{1}.92739} \quad \underline{\lg' 16 = \bar{2}.79588}$$

$$\underline{\lg Im = \bar{2}.65692}$$

$$SO = 0.98545 - 0.02269(1 - 0.01232) = 0.96303; \quad 2SO = 1.826; \quad SB = 1.015$$

$$\delta = 16202'' \cdot \frac{0.04538}{0.96295} = 764'' \quad \delta + \eta = 1174''$$

$$x_1 = 1174 \cdot \frac{1.826}{2.841} = 755'' = 12^{\circ} 35''$$

$$\omega_1 = 4^{\circ} 30' 10'' + 12^{\circ} 35'' = 4^{\circ} 42' 45''$$

$$EE' = h - h \frac{\Omega}{\omega_1} = h \cdot \frac{x_1}{\omega_1} = 0.04624 \cdot \frac{755}{16965} = 0.002054$$

В проекции на плоскость эклиптики будет:

$$EE' \cdot \cos 12^{\circ} 02' = 0.002009; \quad h_0 = 0.04624 \cdot \cos n = 0.04446$$

$$x_1 = 8273'' \cdot \frac{0.002009}{0.04446 - 0.00201} = 408'' = 6' 48'' = 0.00198$$

11) При $h_0 = 0.04242$ были вычислены ρ_1, ρ_3 и пр. Новое значение h_0 есть 0.04446, и его направление есть $\gamma_2 - k_1 = \phi$.

$$\begin{aligned} \delta h &= -0.00204 & \delta \phi &= -0.00198 \\ \delta \rho_1 &= 1.20 \delta h + 0.056 & \delta \phi &= +0.00245 - 0.00011 = +0.00234 \\ \delta \rho_3 &= -1.58 \delta h + 0.077 & \delta \phi &= -0.00322 - 0.00015 = -0.00337 \\ \delta z_1 &= 0.398 \delta \rho_1 & &= +0.00093 \\ \delta z_3 &= 0.324 \delta \rho_3 & &= -0.00109 \\ \delta(z_3 - z_1) &= -0.00212 & & \\ \delta c_1 &= 0.766 \delta \rho_1 + 0.7005 \delta \rho_3 = +0.00179 - 0.00236 = -0.00057 \\ \delta \gamma &= 0.774 \delta \rho_1 - 0.859 \delta \rho_3 = +0.00181 + 0.00290 = +0.00471 = +0^{\circ} 16' 13'' \\ z_3 - z_1 &= 0.17721 - 0.00212 = 0.17509 & \lg \bar{1.24326} &= \bar{1.31462} \\ c &= 0.83079 - 0.00057 = 0.83022 & \lg \bar{1.91919} &= \bar{1.99055} \\ && \hline & \lg c = \bar{1.92864} \\ && j = 11^{\circ} 54' 33'' & c = 0.84848 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12) \quad \omega_2 &= 2^{\circ} 34' 06'' & n &= 15^{\circ} 57' 13'' & j &= 11^{\circ} 54' 33'' & n - j &= 4^{\circ} 3' 40'' \\ \frac{1}{2} \omega_2 &= 1^{\circ} 17' 03'' & \lg \sin \bar{2.35046} & & \lg \sin \frac{n-j}{2} &= \bar{2.54940}_4 & \frac{n-j}{2} &= 2^{\circ} 1' 50'' \\ 2 \lg \sin \frac{\omega_2}{2} &= \bar{4.70092} & 2 \lg \sin \frac{n-j}{2} &= \bar{3.09881} \\ & \bar{1.98295} & I &= 0.00125550 & \bar{3.23755} \\ & \bar{1.99055} & II &= 0.00047252 & \bar{2.61877} &= \lg \sin \frac{\Omega}{2} \\ & \hline & & \hline & \frac{\Omega}{2} &= 2^{\circ} 22' 56.5''; & \Omega &= 4^{\circ} 45' 53'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Bi &= 0.06181 - 0.04647(1 - 0.0344) = 0.06195 - 0.04647 = 0.01548 \\ id &= 0.01550 \cdot 0.0833 = 0.001290; \quad II = 0.04647 \cdot 0.0830 = 0.003855 \\ cd &= 0.003855 - 0.001290 = 0.002565; \quad Bd = 0.01548 + 0.00005 = 0.01553 \\ \eta &= \frac{0.002557}{1.0306} = 0.00248 = 8' 30'' = 510'' \end{aligned}$$

$$\Omega + \eta = 17663''$$

$$Im = h - h \cdot \frac{\eta}{\Omega + \eta} = 0.04647 - 0.04647 \cdot \frac{510}{17663} = 0.04647 - 0.00134$$

Следовательно,

$$h = Im + 0.00134 = Im + 0.00111$$

Беру:

$$Im = 0.04550 \quad h = 0.04661$$

$$Bm = 0.06207 - 0.09211 = -0.03004; \quad Sm = 0.98514; \quad S\mu = 1.00031 \quad \lg SN = 0.00013$$

$$\lg Im = \bar{2.65736}; \quad Im = 0.045433$$

Беру:

$$\begin{aligned}
 Im &= 0.04542 & h &= 0.04653 \\
 Bm &= -0.02988; & Sm &= 0.98530 & SN &= 1.00044; \lg SN = 0.00019 \\
 \lg Im &= \bar{2}.65724; & Im &= 0.04542 \\
 2 \lg SN &= 0.00038 & & & \bar{1}.93087 \\
 \lg' \delta m &= 0.00643 & & & 0.00341 \\
 \hline
 \lg SP &= 0.00681 & & & \bar{1}.92746 = \lg \sigma \\
 & & & & \sigma = 0.84618]
 \end{aligned}$$

13) Итак, при

$$\rho_2 = 0.56570$$

будет:

$$h = 0.4653; \quad h_0 = 0.04474$$

следовательно:

$$\begin{aligned}
 \delta h_0 &= 0.04474 - 0.04242 = 0.00234 & \lg 0.04653 &= \bar{2}.66773 \\
 & & \lg \cos n &= 1.98295 \\
 & & \hline
 & & \lg h_0 &= \bar{2}.65068
 \end{aligned}$$

изменения же были рассчитаны в п. 11 для $\delta h = 0.00204$, следовательно к ним надо присоединить изменения на $\delta h = 0.00030$, и тогда будет:

$$\begin{aligned}
 \delta \rho_1 &= +0.00234 +0.00036 = 0.00270 \\
 \delta \rho_2 &= -0.00337 -0.00047 = -0.00384 \\
 \delta c &= -0.391 i \delta h = -0.00030 \cdot 0.391 = -0.00012
 \end{aligned}$$

и будет:

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= 0.47946 +0.00270 = 0.48216 \\
 \rho_3 &= 1.13669 -0.00384 = 1.13285 \\
 c &= 0.84848 -0.00012 = 0.84836 \\
 c - \sigma &= 0.84836 -0.84618 = +0.00217 = f(\rho_2)
 \end{aligned}$$

Кроме того, имеем:

$$\begin{aligned}
 \delta z_1 &= +0.00093 +0.00014 = +0.00107 \\
 \delta z_3 &= -0.00109 -0.00015 = -0.00124 \\
 \delta(z_3 - z_1) &= -0.00231 \\
 z_3 - z_1 &= 0.17721 -0.00231 = 0.17490 & \lg z_3 - z_1 &= \bar{1}.24279 \quad \bar{1}.31421 \quad \bar{1}.92858 \\
 \delta c_1 &= -0.00057 -0.00008 = -0.00065 & \lg c_1 &= \bar{1}.91915 \quad \bar{1}.99057 \quad \bar{1}.92858 \\
 c_1 &= 0.83079 -0.00065 = 0.83014 & \lg \operatorname{tg} j &= \bar{1}.32364 \\
 \delta \gamma &= 0.00546 = 0^{\circ}18'46'' & j &= 11^{\circ}53'51'' \quad c = 0.84836
 \end{aligned}$$

Вместо расчета по дифференциальным формулам, который приведен в предыдущих примерах, сделаем, следя Ньютона:

$$II \text{ Предположение } \rho_2 = 0.56570 - 0.00200 = 0.56370$$

$$\begin{aligned}
 \delta \rho_2 &= -0.00200 \\
 \delta d_2 &= 0.275 \delta \rho_2 = -0.00055 & \lg \rho_2 &= \bar{1}.75105 \\
 \delta \gamma_2 &= -0.985 \delta \rho_2 = +0.00197 = +0^{\circ}6'46'' & \lg z_2 &= \bar{1}.44398 \\
 d_2 &= 0.97598 -0.00055 = 0.97543 \\
 \lg z_2 &= \bar{1}.44406 \quad \bar{1}.43790 & \lg r_2 &= 0.00616 \\
 \lg d_2 &= \bar{1}.98920 \quad \bar{1}.98304 & r_2 &= SB = 1.01426 \\
 \hline
 \lg \operatorname{tg} n &= \bar{1}.45486 \\
 n &= 15^{\circ}54'30''
 \end{aligned}$$

При
 $h_0 = 0.04474$ и $\delta\varphi = \delta\gamma_2 = +0^\circ19'0''$
 будет:

$$\begin{aligned}
 \delta\rho_1 &= 0.896 \quad \delta\rho_2 + 0.058 \quad \delta\varphi = -0.00173 + 0.00011 = -0.00162 \\
 \delta\rho_3 &= 2.1046 \quad \delta\rho_2 + 0.078 \quad \delta\varphi = -0.00421 - 0.00015 = -0.00436 \\
 \delta c_1 &= 0.766 \quad \delta\rho_1 + 0.7005 \quad \delta\rho_3 = -0.00124 - 0.00310 = -0.00434 \\
 \delta(z_3 - z_1) &= 0.324 \quad \delta\rho_3 - 0.398 \quad \delta\rho_1 = -0.00141 + 0.00065 = -0.00076 \\
 c_1 &= 0.83014 - 0.00434 = 0.82580 \quad \lg 1.91687 \quad 1.99055 \\
 z_3 - z_1 &= 0.17490 - 0.00076 = 0.17414 \quad \lg 1.24090 \quad 1.31458 \\
 \\
 c &= 0.84396 \quad \overline{1.32403} \quad \lg c = \overline{1.92632} \\
 &\quad = 11^\circ54'29'' \quad c = 0.84396 \\
 \lg AE &= \overline{1.63053} \quad AE = 0.36052 \\
 \lg EC &= \overline{1.75794} \quad EC = 0.48344 \\
 \\
 &\quad \overline{2EI = 0.12292} \\
 &\quad \overline{EI = 0.06146}
 \end{aligned}$$

Беру:

$$\begin{aligned}
 Im &= 0.04560 \quad h = 0.04673 \quad EI = 0.06146 \quad SB = 1.01426 \\
 Bm &= 0.06173 - 0.09233 = -0.03060; \quad Sm = 0.98366; \quad SN = 0.99887; \quad \lg SN = \overline{1.99951} \\
 \lg Im &= \overline{2.65860}; \quad Im = 0.04556
 \end{aligned}$$

Беру:

$$\begin{aligned}
 Im &= 0.04556 \quad h = 0.04667 \\
 Bm &= -0.03050; \quad Sm = 0.98376 + 0.00009 = 0.98385; \quad SN = 0.98904 \quad \lg SN = \overline{1.99958} \\
 \lg Im &= 2.65846 \quad Im = 0.045547 \\
 \text{Беру:} \\
 Im &= 0.04555 \quad h = 0.04666 \\
 Bm &= -0.03048; \quad Sm = 0.98387 \quad SN = 0.99905; \quad \lg SN = \overline{1.99958} \quad \lg Sm = \overline{1.99294} \\
 \lg Im &= \overline{2.65845}; \quad Im = 0.045546 \\
 \text{Итак, при} \\
 &\quad \overline{\lg SP = 0.00623}
 \end{aligned}$$

будет:

$$\begin{aligned}
 Im &= 0.04555; \quad h = 0.04666 \\
 \lg h &= \overline{2.66894} \\
 \lg \cos n &= 1.98305 \\
 \hline
 \lg h_0 &= \overline{1.65199} \\
 h_0 &= 0.04487 \quad \delta h_0 = +0.00013 \quad \lg \sigma = \overline{1.92775} \\
 &\quad \sigma = \overline{0.84674}
 \end{aligned}$$

Изменению $\delta h = 0.00013$ соответствуют изменения:

$$\begin{aligned}
 \delta\rho_1 &= 1.20 \quad \delta h = 0.00016 \\
 \delta\rho_3 &= -1.58 \quad \delta h = -0.00021 \\
 \delta c &= -0.391 \quad \delta h = -0.00005 \\
 \delta c_1 &= -0.188 \quad \delta h = -0.00003
 \end{aligned}$$

следовательно при

$$\rho_2 = 0.56370$$

будет:

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= 0.48216 - 0.00162 + 0.00016 = 0.48070 \\
 \rho_3 &= 1.13285 - 0.00436 - 0.00021 = 1.12828 \\
 c &= 0.84396 - 0.00005 = 0.84391 \\
 \sigma &= 0.84674 \\
 f(\rho_2) &= c - \sigma = 0.84391 - 0.84674 = -0.00283
 \end{aligned}$$

Значит, при изменении ρ_2 на — 0.00200 (с $\rho_2 = 0.56570$ на $\rho_2 = 0.56370$), $f(\rho_2)$ изменяется с + 0.00217 на — 0.00283, т. е. на — 0.00500, следовательно надо взять

$$\delta\rho_2 = -0.00200 \cdot \frac{217}{500} = -0.00087$$

соответственно чему будет:

$$\begin{aligned}\rho_2 &= 0.56483 \\ \rho_1 &= 0.48216 - 0.00065 = 0.48151 \\ \rho_3 &= 1.13285 - 0.00202 = 1.13083 \\ c = \sigma &= 0.84836 - 0.00198 = 0.84638\end{aligned}$$

Прежде всего надлежит проверить значение величины c , для чего расчисляем:

$$\begin{array}{lll}\delta c_1 = 0.766 \cdot \delta\rho_1 + 0.7005 \delta\rho_3 = -0.00050 - 0.00141 = -0.00191 \\ \delta(z_3 - z_1) = 0.324 \quad \delta\rho_3 = 0.398 \quad \delta\rho_1 = -0.00065 + 0.00026 = -0.00039 \\ c_1 = 0.83014 - 0.00191 = 0.82823 \quad \lg 1.91815 \quad \bar{1.99057} \\ z_3 - z_1 = 0.17490 - 0.00039 = 0.17451 \quad \lg 1.24182 \quad \bar{1.31424} \\ \hline & \bar{1.32367} & \lg c = \bar{1.92758} \\ & & c = 0.84641\end{array}$$

Значит, надо взять:

$$\delta\rho_2 = -0.00200 \cdot \frac{3}{445} = -0.000013; \quad \delta\rho_1 = -0.00001; \quad \delta\rho_3 = -0.00003$$

так что будет:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= 0.48150 \\ \rho_3 &= 1.13080 \\ c = \sigma &= 0.84638\end{aligned}$$

Полученный результат надо проверить по формуле Эйлера — Ламберта. Прежде всего вычисляем хорду непосредственно.

Вычисление хорды с:

$$\begin{array}{lll}c_1^2 = f_1^2 + f_3^2 - 2f_1f_3 \cos(\alpha_3 - \alpha_1); & f_1 = \rho_1 - l_1; & f_3 = \rho_3 - l_3 \\ f_1 = 0.59673 \quad \lg f_1 = \bar{1.77577}_8 & \bar{1.55155} & 0.35608 \\ f_3 = 0.52995 \quad \lg f_3 = \bar{1.72423}_5 & \bar{1.44847} & 0.28085 \\ \lg 2 \cos(f_1 f_3) = \bar{1.19051} & & 0.04904 \\ \hline & \bar{2.69052} & \\ & & \bar{0.68597} \quad \bar{1.83630} \\ & & 0.03045 \quad \bar{1.91815} = \lg c_1; \quad c_1 = \mathbf{0.82823} \\ & & \\ & & \bar{0.71642} \quad \bar{1.85516} \\ & & \bar{1.92758} = \lg c \\ & & c = 0.84641\end{array}$$

Следовательно, надо взять поправку в $\rho_2 = -0.00001_8$ т. е. брать:

$$\rho_1 = 0.48149 \quad \lg \rho_1 = \bar{1.68256}_7 \quad \rho_3 = 1.13077 \quad \lg \rho_3 = 0.05387_4$$

и тогда хорда c будет $c = 0.84638$, и в самом деле получаем:

$$\begin{array}{lll}0.59672 \quad \lg f_1 = \bar{1.77577} & \bar{1.55154} & 0.35607 \\ f_3 = 0.52992 \quad \lg f_3 = \bar{1.72421} & \bar{1.44842} & 0.28081 \\ & \bar{1.19051} & 0.04903 \\ \hline & \bar{2.69049} & \\ & & \bar{0.68591} = c_1^2; \quad 2 \lg c_1 = \bar{1.83626}_7 \\ \lg z_1 = \bar{1.28250} & \bar{2.56500} & 0.03673 = z_1^2 \quad \bar{3044} \\ & & \\ & & \bar{0.71635} \quad \bar{1.85512}_5 \\ \lg z_1 = \bar{1.56364} & \bar{1.12728} & 0.13406 = z_3^2 \\ z_1 = 0.19165 & \bar{1.24174}_5 & \lg(z_3 - z_1) = \mathbf{0.84638} \\ z_3 = 0.36613 & \bar{2.48349} & \lg(z_3 - z_1)^2 = \bar{1.92756}_5 = \lg c \\ z_3 - z_1 = 0.17448 & & \end{array}$$

Вычисление r_1 , r_3 *и хорды* σ *по формуле Эйлера:*

$\lg R_1 = \bar{1.99263}_5$	$\bar{1.98527}$	0.96665	$\bar{1.99425}$	$\bar{1.98850}$	0.97387
$\lg \rho_1 = \bar{1.68258}_7$	$\bar{1.36517}$	0.23183	0.05337	0.10675	1.26865
$\underline{\lg 2 \cos(\rho_1 R_1) = 0.26168 n}$	1.19848	$\bar{1.39737} n$		2.25252	
$\bar{1.93690}$	$\underline{- 0.86477}$	1.44499		$\bar{0.27861}$	
	0.33371			1.97391	
	0.03673			0.13406	
$2 \lg r_1 = \bar{1.56872}$	$r_1^2 = 0.37044$	$2 \lg r_3 = 0.32386_4$	$r_3^2 = 2.10797$		
$\lg r_1 = \bar{1.78436}$	$r_1 = 0.60864$	$\lg r_3 = 0.16193_2$	$r_3 = 1.45190$		
			$r_1 = 0.60864$		
		$\bar{1.61041}$	$r_1 + r_3 = 2.06054$	0.31398	
		0.00317 (табл. Энке)		0.15699	
		0.31398	$\frac{3}{2} \lg(r_1 + r_3) = 0.47097$		
	$\bar{1.92756} = \lg \sigma$			$\bar{1.52903}$	
	$\sigma = 0.84638$		$\lg 2 \tau_3 = 0.08138$		
				$\bar{1.61041}$	
				0.4078	

Так как, при изменении ρ_2 на 0.00002, величина σ изменяется менее 1 единицы 5-го знака, то видно, что теорема Эйлера удовлетворена полученными значениями радиусов-векторов и хорды, со всюю точностью, доступной вычислению по пятизначным таблицам.

По двум радиусам-векторам и хорде расчисляем элементы орбиты, а именно: наклонность и долготу узлов и долготу перигелия, параметр или расстояние до перигелия и время прохождения через перигелий.

1) Вычисление гелиоцентрических координат:

$\lg \rho_1 = \bar{1.68258}_7$	$\lg z_1 = \bar{1.28250}$	$\lg \rho_3 = 0.05337$	$\lg z_3 = \bar{1.56364}$
$\lg \rho_1 \cos \alpha_1 = \bar{1.44265}$	$\rho_1 \cos \alpha_1 = 0.27711$	$\lg \rho_3 \cos \alpha_3 = \bar{1.94025}$	$\rho_2 \cos \alpha_3 = 0.87147$
$\lg \rho_1 \sin \alpha_1 = \bar{1.59523} (n)$	$\rho_1 \sin \alpha_1 = -0.39376$	$\lg \rho_3 \sin \alpha_3 = \bar{1.85765}$	$\rho_3 \sin \alpha_3 = 0.72053$
$x_1 = 0.08763$	$\lg x_1 = \bar{2.94265}$	$x_3 = 0.15262$	$\lg x_3 = \bar{1.18361}$
$y_1 = 0.57098$	$\lg y_1 = \bar{1.75662}$	$y_3 = 1.39665$	$\lg y_3 = 0.14509$
	$\underline{\lg \operatorname{tg} \lambda_1 = 0.81397}$		$\lg \operatorname{tg} \lambda_3 = 0.96148$
	$\lambda_1 = 81^\circ 16' 29''$		$\lambda_3 = 83^\circ 45' 50''$
$\lg z_1 = \bar{1.28250}$		$\lg z_3 = \bar{1.56364}$	
$\lg r_1 = \bar{1.78436}$		$\lg r_3 = 0.16194$	
$\lg \sin \theta_1 = \bar{1.49814}$		$\lg \sin \theta_3 = \bar{1.40170}$	
$\theta_1 = 18^\circ 21' 13''$		$\theta_3 = 14^\circ 36' 22''$	

2) Вычисление долготы узла N и наклонности i по формулам:

$$\operatorname{tg} i \cos(\lambda_1 - N) = \frac{\operatorname{tg} \theta_3 - \operatorname{tg} \theta_1 \cdot \cos(\lambda_3 - \lambda_1)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)}$$

$$\operatorname{tg} i \sin(\lambda_1 - N) = \operatorname{tg} \theta_1$$

$\lg \operatorname{tg} \theta_1 = \bar{1.52082}$	$\bar{1.52082}$	$\bar{1.29959}$	0.22123
$\lg \cos(\lambda_3 - \lambda_1) = \bar{1.99959}$	$0.21243 (n)$	$\bar{1.99120}$	0.22123
$\bar{1.52041}$	$\bar{1.30839} (n)$	$\underline{\operatorname{lg} \operatorname{tg} i = 0.22123}$	

$$\lg \operatorname{tg} \theta_3 = \overline{1.41597} \quad \lambda_1 - N = -11^\circ 29' 54'' \quad i = 59^\circ 0' 0''$$

$$0.10444 \quad \lambda_1 = \overline{81 16 29}$$

$$g \cdot \lg \text{sub} \quad \overline{1.32981} \quad N_1 = \overline{92^\circ 46' 17''}$$

$$\overline{1.52041} \quad N = \overline{272 46 17}$$

$$\lg \operatorname{cosec}(\lambda_2 - \lambda_1) = \overline{1.36221}$$

$$0.21243$$

Совершенно так же, переставляя значки 1 и 3:

$$\lg \operatorname{tg} \theta_3 = \overline{1.41597} \quad \overline{1.41597} \quad \overline{1.19464} \quad \overline{0.22133} \quad \left. \begin{array}{l} \overline{1.99959} \\ \overline{0.21594 n} \end{array} \right\} = \lg \operatorname{tg} i$$

$$\overline{1.41556} \quad \overline{1.20003}$$

$$0.10526 \quad \overline{1.52082} \quad \lambda_3 - N = -9^\circ 0' 22'' \quad i = 59^\circ 0' 22''$$

$$\overline{1.33291} \quad \lambda_3 = \overline{82 45 50}$$

$$\overline{1.36221} \quad N_1 = \overline{92^\circ 46' 13''}$$

$$\overline{0.21594 (n)} \quad N = \overline{272 46 13}$$

$$\text{Среднее: } N = 272^\circ 46' 15''$$

$$i = 59^\circ 0' 11''$$

Вычисление истинных аномалий v_1 и v_3 , расстояния до перигелия, времени прохождения через перигелий.

Формулы:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(v_3 - v_1) = \frac{(p - r_1)(p - r_3)}{p(p - c)}; \quad \operatorname{tg} \frac{v_1 + v_3}{4} = \frac{\sqrt{r_3} - \sqrt{r_1}}{\sqrt{r_3} + \sqrt{r_1}} \cdot \operatorname{cotg} \frac{v_3 - v_1}{4}$$

$$2p = c + r_1 + r_3$$

$$\sqrt{q} = \sqrt{r_1} \cdot \cos \frac{1}{2} v_1 = \sqrt{r_3} \cdot \cos \frac{1}{2} v_3$$

$$t_1 - t_0 = q^{\frac{3}{2}} \cdot m_1; \quad t_3 - t_0 = q^{\frac{3}{2}} \cdot m_3; \quad m_1 \text{ и } m_3 \text{ по табл. Barker'a}$$

$$c = 0.84638$$

$$r_1 = 0.60864 \quad \lg r_1 = \overline{1.78436} \quad \lg \sqrt{r_1} = \overline{1.89218} \quad \sqrt{r_1} = 0.78015$$

$$r_3 = 1.45190 \quad \lg r_3 = \overline{0.16194} \quad \lg \sqrt{r_3} = \overline{0.08097} \quad \sqrt{r_3} = 1.20495$$

$$2p = 2.90692 \quad \sqrt{r_1} + \sqrt{r_3} = 1.98510 \quad \sqrt{r_3} - \sqrt{r_1} = 0.42480$$

$$p = 1.45346 \quad \lg p = \overline{1.83760}$$

$$p - r_1 = 0.94482 \quad \lg = \overline{1.92676} \quad \overline{2.44361} \quad \frac{\gamma - v_3}{2} = 1^\circ 35' 27''$$

$$p - r_3 = 0.00156 \quad \lg = \overline{3.19312} \quad \overline{1.17725} \quad \frac{\gamma - v_1}{2} = 86^\circ 11' 45.5$$

$$p - c = 0.60708 \quad \lg = \overline{1.78325} \quad \overline{2.58712} \quad \frac{v_3 - v_1}{2} = 2^\circ 12' 47.5$$

$$\overline{4.74073} \\ \overline{2.37037}$$

$$\frac{v_3 - v_1}{4} = 1^\circ 6' 23.8 \quad \lg \operatorname{cotg} = 1.71407 \quad \frac{v_3 - v_1}{2} = 2^\circ 12' 48''$$

$$\begin{array}{lll}
 \lg(\sqrt{r_3} - \sqrt{r_1}) = 1.62818 & \frac{v_3 + v_1}{2} = 169^{\circ} 41' 02'' & \\
 (\sqrt{r_3} + \sqrt{r_1}) = 1.70222 & v_3 = 171^{\circ} 53' 50'' & \frac{1}{2} v_3 = 85^{\circ} 56' 55'' \\
 \operatorname{tg} \frac{v_3 + v_1}{4} = 1.04447 & v_1 = 167^{\circ} 28' 14'' & \frac{1}{2} v_1 = 83^{\circ} 44' 07'' \\
 \frac{v_1 + v_3}{4} = 84^{\circ} 50' 31'' & \lg m_3 = 4.89369 \quad (\text{O p p o l z e r. Bahnbesti-} \\
 \frac{v_1 + v_3}{2} = 169^{\circ} 41' 02'' & \lg m_1 = 4.33168 \quad \text{mung.}) & \\
 \frac{1}{2} \lg r_1 = 1.89218 & \frac{1}{2} \lg r_3 = 0.08097 & \\
 \lg \cos \frac{1}{2} v_1 = 1.03791 & \lg \cos \frac{v_3}{2} = 2.84912 & \\
 \lg \sqrt{q} = 2.93009 & \lg \sqrt{q} = 2.93009 & \\
 \lg q = 3.86018 & & \\
 \frac{3}{2} \lg q = 4.79027 & \frac{3}{2} \lg q = 4.79027 & \\
 \lg m_1 = 4.33168 & \lg m_3 = 4.89369 & \\
 \hline
 1.12195 & 1.68396 & \\
 t_1 - t_0 = 13.242 & t_3 - t_0 = 48.301 & \\
 = 13^{\text{h}} 5^{\text{m}} 49^{\text{s}} & = 48^{\text{h}} 7^{\text{m}} 14^{\text{s}} & \\
 t_1 = 21^{\circ} 6' 37'' \text{ Дек.} & t_3 \text{ Дек.} = 56^{\circ} 7' 58.7'' & \\
 \hline
 t_0 = 8^{\circ} 0' 48'' \text{ Дек.} & \text{Дек.} = 8^{\circ} 0' 44.7'' &
 \end{array}$$

Прохождение через перигелий:

$$\begin{aligned}
 t_0 &= 8 \text{ Дек. } 0 \text{ ч. } 46 \text{ м.} \\
 &= 8.0319
 \end{aligned}$$

Долгота перигелия.

$$\begin{array}{llll}
 N = 272^{\circ} 46' 15'' & N = 272^{\circ} 46' 15'' & & \\
 \lambda_1 = 81^{\circ} 16' 29'' & \lambda_3 = 83^{\circ} 45' 50'' & & \\
 \lambda_1 - N = 169^{\circ} 30' 14'' & \lg \cos = 1.9911987 (n) & \lambda_3 - N = 170^{\circ} 59' 35'' & \lg \cos = 1.9946116 \\
 \theta_1 = 18^{\circ} 21' 13'' & \lg \cos = 1.9773263 & \theta_3 = 14^{\circ} 36' 22'' & \lg \cos = 1.9857328 \\
 \hline
 \lg \cos u_1 = 1.9685250 (n) & & \lg \cos u_3 = 1.9803444 & \\
 u_1 = 158^{\circ} 26' 56'' & & u_3 = 162^{\circ} 53' 30'' & \\
 \operatorname{tg} u_1 = \frac{\operatorname{tg}(\lambda_1 - N)}{\cos i} & \text{и} & \operatorname{tg} u_3 = \frac{\operatorname{tg}(\lambda_3 - N)}{\cos i} & \\
 v_1 = 167^{\circ} 28' 14'' & & & v_3 = 171^{\circ} 53' 50'' \\
 \omega = u_1 - v_1 = 350^{\circ} 58' 42'' & & \omega = u_3 - v_3 = 350^{\circ} 59' 40'' & \\
 \text{Среднее: } \omega = 350^{\circ} 59' 41'' & & &
 \end{array}$$

Итак, элементы кометы 1680 г. получаются следующие:

$$N = 272^{\circ} 46' 15''$$

$$i = 59^{\circ} 0' 11''$$

$$\omega = 350^{\circ} 59' 41''$$

$$\lg q = 3.86018$$

$$t_0 = 1680 \text{ г. } \text{Декабря } 8\text{-го } 0^{\text{h}} 46^{\text{m}} \text{ (Гринич. старый стиль).}$$

Ньютона в «Principia» дают следующие элементы:

$$N = 271^{\circ}53' \ 0''$$

$$i = 61 \ 20 \ 20$$

$$\omega = 351 \ 22 \ 0$$

$$\lg q = \bar{3}.7723$$

$$t_0 = 1680 \text{ г. Декабря } 8\text{-го } 0^{\text{ч}} 3^{\text{м}} \text{ (Гринич. старый стиль).}$$

Эйлер дает такие эллиптические элементы:

$$N = 272^{\circ}59' \ 9''$$

$$i = 58 \ 39 \ 50$$

$$\omega = 350 \ 27 \ 39$$

$$\lg q = \bar{3}.917203$$

$$e = 0.9997867$$

$$t_0 = 1680 \text{ г. Декабря } 7\text{-го } 20^{\text{ч}} 47^{\text{м}}$$

Отсюда яствует, что эти старинные наблюдения, по своей сравнительно малой точности, не могут доставить более согласных результатов.

В заключение вычислим место кометы при вторых наблюдениях по нашим элементам.

Имеем:

$$\begin{array}{rcl} t_0 & = & \text{Дек. } 8.0320 \\ t_2 & = & 36.2511 \end{array}$$

$$t_2 - t_0 = 28.2191$$

$$\lg(t_2 - t_0) = 1.45055$$

$$\frac{3}{2} \lg q = \bar{4}.79027$$

$$\lg m = 4.66028$$

$$v_2 = 170^{\circ}17' 32''$$

$$\omega = 350 \ 59 \ 41$$

$$u_2 = 161^{\circ}17' 13''$$

$$\frac{1}{2} v_2 = 85^{\circ}8' 46'' \quad \lg \cos = 2.92745 \quad \lg \cos u_2 = \bar{1}.97641 \text{ (n)}$$

$$\frac{1}{2} \lg q = 2.93009 \quad \lg \sin u_2 = \bar{1}.50627$$

$$\frac{1}{2} \lg r_2 = 0.00264 \quad \lg r_2 \cos u_2 = \bar{1}.98169$$

$$\lg r_2 = 0.00528 \quad \lg r_2 \sin u_2 = \bar{1}.51155$$

$$\lg \cos i = \bar{1}.71180$$

$$i = 59^{\circ}0' 11'' \quad \lg \sin i = \bar{1}.93308 \quad \lg r_2 \sin u_2 \cos i = \bar{1}.22335$$

$$\lg \sin \theta_2 = \bar{1}.43935 \quad \lg \cos \theta_2 = \bar{1}.98293$$

$$\theta_2 = 15^{\circ}57' 35'' \quad \lg \cos u_2 = \bar{1}.97641 \text{ (n)}$$

$$\lg \cos(\lambda_2 - N) = \bar{1}.99348 \text{ (n)}$$

$$\lambda_2 - N = 170^{\circ}06'$$

$$\lambda_2 = 82 \ 52$$

$$\lg \cos \lambda_2 = \bar{1}.09405 \quad \lg \sin \lambda_2 = \bar{1}.99663$$

$$\lg r_2 \cos \theta_2 = \bar{1}.98821 \quad \lg r_2 \cos \theta_2 = \bar{1}.98821$$

$$\lg x_2 = \bar{1}.08226 \quad \lg y_2 = \bar{1}.98484$$

$$x_2 = 0.12085 \quad y_2 = 0.96570$$

$$\xi_2 = -0.43706 \quad \eta_2 = 0.88164$$

$$x_2 - \xi_2 = 0.55791 \quad y_2 - \eta_2 = 0.08406$$

$\lg x_2 - \xi_2 =$	1.74656	1.99513	
$\lg y_2 - \eta_2 =$	2.92459		
$\lg \tan \alpha_2 =$	1.17803		$\lg \rho_2 = 1.75143 \quad 0.5642$
$\alpha_2 =$	8°34' 07"		$\lg z_2 = 1.44482$
α_2 набл. =	8 48 53		$\lg \tan \beta_2 = 1.69239$
α_2 выч. — α_2 набл. =	— 0 14 46		$\beta_2 = 26^{\circ}13'10''$
			β_2 набл. = 26 15 7
			β_2 выч. — β_2 набл. = 0 1 57

Как видно, место при вторых наблюдениях не представляется с тою точностью, какую можно бы ожидать.

§ 21. Все эти примеры и подробное их развитие показывают, что данная Ньютоном метода определения параболической кометной орбиты есть метода абсолютно точная, полная и в равной мере совершенная со всеми остальными творениями этого величайшего гения, но его творения требуют и достодолжного внимания и тщательности при изучении, не упуская из вида ни единой буквы, ни единой цифры.

Кроме этой методы, Ньютон в своем сочинении «De systemate mundi» излагает другую методу, которую можно считать за первообраз методы Лапласа, подобно тому как вышеизложенная есть первообраз методы Ольберса.

Но здесь, по сжатости и краткости изложения, Ньютон, можно сказать, превосходит самого себя: все изложено на трех последних страницах названного сочинения и примерами не пояснено.

Дав вам образчик того, как следует изучать Ньютона, рекомендую вам, как поучительную тему для работы, изучение этих трех страничек.

Беседа 2

МЕТОДА ЛАПЛАСА

§ 1. В первой беседе нашей мы изучали методу Ньютона определения параболических орбит комет и видели, что эта метода, чисто геометрическая, установлена Ньютоном, как и большая часть всего заключающегося в «Principia», синтетическим путем; в этой беседе мы займемся чисто аналитическою методою, данной Лапласом, которая пригодна не только для параболических орбит комет, но и для эллиптических орбит малых планет.

В настоящее время эта метода для практического вычисления орбит не применяется, ибо методы Ольберса и Гаусса более совершенны, но решение Лапласа замечательно естественностью хода его анализа и может служить образцом того, как следует задачу аналитической механики доводить до конца, т. е. до действительной возможности получения из наблюдений надлежащих данных и действительного вычисления положения движущегося тела в любой момент времени.

§ 2. Примем, попрежнему, за начало координат центр тяжести Солнца, массу коего обозначим через M , и за плоскость xy примем плоскость эллиптики, как и раньше (фиг. 1), направив ось x -ов к точке весеннего равноденствия. Тогда уравнения движения светила, коего масса m , если пренебречь действием на него всех прочих тел солнечной системы, напишутся так:

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -k \frac{x}{r^3}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k \frac{y}{r^3}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -k \frac{z}{r^3}$$

причем

$$k = (M + m)f$$

где f есть «Ньютонова постоянная притяжения», r — расстояние светила до Солнца.

Если принять за 1 длины среднее расстояние от Земли до Солнца (большую полуось земной орбиты), за 1 массу — массу Солнца и заметить, что массы всех комет и астероидов неизмеримо малы по сравнению с массою Солнца, то в предыдущих уравнениях будет

$$k = K^2 = (0.01720\dots)^2$$

где K есть Гауссова постоянная, вместе с тем центр тяжести Солнца можно будет считать неподвижным.

Для уравнений (1) можем написать следующие первые интегралы:

$$(2) \quad y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = c_1; \quad z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = c_2; \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c_3$$

$$(3) \quad V^2 - V_0^2 = k \left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r_0} \right)$$

где

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$$

есть квадрат скорости светила в момент t , V_0 и r_0 — начальная скорость и начальное расстояние, т. е. скорость и расстояние в некоторый заданный момент t_0 .

Из уравнений (2) следует

$$(4) \quad c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0$$

что показывает, что орбита светила лежит в плоскости, проходящей через начало координат, т. е. через центр Солнца.

Если бы эту плоскость принять за новую координатную плоскость XY , направив новую ось X по линии узлов $S\Omega$, то, относя движение светила к этим координатам, получили бы

$$(5) \quad X \frac{dY}{dt} - Y \frac{dX}{dt} = c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

или в полярных координатах:

$$(6) \quad r^2 \frac{du}{dt} = c$$

уравнение же (3) приняло бы вид

$$(7) \quad \frac{dr^2 + r^2 du^2}{dt^2} = k \left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r_0} \right) + V_0^2$$

Из уравнения (6) следует

$$(8) \quad S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t r^2 du = \frac{c}{2} (t - t_0)$$

в котором через S обозначена площадь, описанная радиусом-вектором в продолжение промежутка $t - t_0$.

Из уравнения (6) и (7) имеем

$$\frac{dr^2 + r^2 du^2}{r^4 du^2} = \frac{2k}{c^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{c^2} \left(V_0^2 - \frac{2k}{r_0} \right)$$

или иначе:

$$\left(\frac{d \left(\frac{1}{r} \right)}{du} \right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{2k}{c^2} \cdot \frac{1}{r} + h$$

причем

$$h = \frac{1}{c^2} \left(V_0^2 - \frac{2k}{r_0} \right)$$

Положим

$$\frac{1}{r} = \lambda$$

и пусть при $t = t_0$ будет $r = r_0$ и $u = u_0$, предыдущее уравнение напишется так:

$$(*) \quad \lambda'^2 + \lambda^2 = \frac{2k}{c^2} \lambda + h$$

дифференцируя по u , получаем

$$\lambda'' + \lambda = \frac{k}{c^2}$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$\lambda = \frac{k}{c^2} + C_1 \cos(u - \omega)$$

где C_1 и ω — произвольные постоянные, для определения коих имеем условия:

при $u = u_0$ должно быть $\lambda = \frac{1}{r_0}$ и $\lambda'^2 = \lambda_0'^2$

величина же $\lambda_0'^2$ определяется из уравнения (*)

$$\begin{aligned} \lambda_0'^2 &= h - \lambda_0^2 + \frac{2k}{c^2} \lambda_0 = h - \frac{1}{r_0^2} + \frac{2k}{c^2} \cdot \frac{1}{r_0} \\ &= \frac{V_0^2}{c^2} - \frac{1}{r_0^2}. \end{aligned}$$

Таким образом получаем:

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{1}{r_0} - \frac{k}{c^2} &= C_1 \cos(u_0 - \omega) \\ \frac{V_0^2}{c^2} - \frac{1}{r_0^2} &= C_1^2 \sin^2(u_0 - \omega) \end{aligned}$$

Откуда следует:

$$C_1^2 = \frac{V_0^2}{c^2} - \frac{2k}{c_0^2} \cdot \frac{1}{r_0} + \frac{k^2}{c^4}$$

и

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{c^2} + \sqrt{\frac{V_0^2}{c^2} - \frac{2k}{c^2} \cdot \frac{1}{r_0} + \frac{k^2}{c^4} \cos(u - \omega)}$$

Или иначе:

$$r = \frac{\frac{c^2}{k}}{1 + \sqrt{1 - \frac{c^2}{k^2} \left(\frac{2k}{r_0} - V_0^2 \right) \cos(u - \omega)}}$$

Полагая

$$(10) \quad \frac{c^2}{k} = p$$

и

$$(10) \quad 1 - e^2 = \frac{c^2}{k^2} \left(\frac{2k}{r_0} - V_0^2 \right)$$

получим

$$(11) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos(u - \omega)}$$

что и показывает, что траектория есть коническое сечение, уравнения же (10) выражают связь между его элементами и начальными обстоятельствами движения.

Параметр p , эксцентриситет e и большая полуось связаны соотношением

$$p = a(1 - e^2)$$

откуда, в силу уравнений (10), следует

$$1 - e^2 = \frac{a(1 - e^2)}{k} \left(\frac{2k}{r_0} - V_0^2 \right)$$

Или иначе:

$$(12) \quad V_0^2 = k \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a} \right).$$

и в силу уравнения (3):

$$(12') \quad V^2 = k \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

§ 2. Выведенные выше соотношения показывают, что если известно положение и скорость светила в какой-либо момент, то элементы его орбиты определяются. Само собою разумеется, что скорость должна быть известна по величине и по направлению.

В самом деле, соотношение

$$(12) \quad V_0^2 = k \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a} \right)$$

дает большую полуось a .

Так как скорость известна по величине и направлению, то, определив ее проекции на оси координат, т. е. величины $x'_0 y'_0 z'_0$, найдем по формулам

$$\begin{aligned}y_0 z'_0 - z_0 y'_0 &= c_1 \\z_0 x'_0 - x_0 z'_0 &= c_2 \\x_0 y'_0 - y_0 x'_0 &= c_3\end{aligned}$$

«постоянные площадей» c_1 , c_2 и c_3 ; по ним —

$$c^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$$

и затем по формуле

$$(13) \quad p = a(1 - e^2) = \frac{c^2}{k}$$

— параметр p и эксцентриситет e .

Если в уравнении плоскости орбиты

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0$$

выразить коэффициенты через наклонность i и долготу узла N , то это уравнение напишется так:

$$z \cos i - y \sin i \cos N + x \sin i \sin N = 0$$

Откуда следует:

$$c_1 = c \cos i; \quad c_2 = -c \sin i \cos N; \quad c_3 = c \sin i \sin N$$

Эти уравнения доставят i и N .

Уравнение (10) дает

$$1 + e \cos(u_0 - \omega) = \frac{p}{r_0}$$

с другой стороны, обозначая через λ_0 — гелиоцентрическую долготу планеты в момент t_0 , имеем:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \lambda_0 &= \frac{y_0}{x_0} \\ \cos i &= \frac{\operatorname{tg}(\lambda_0 - N)}{\operatorname{tg} u_0}\end{aligned}$$

откуда найдутся u_0 и ω и по ним долгота перигелия и долгота эпохи.

Наконец, чтобы найти время прохождения T через перигелий, надо воспользоваться для эллиптической орбиты уравнением Кеплера

$$n(t_0 - T) = \varepsilon_0 - e \sin \varepsilon_0$$

иначем

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{1}{2} \epsilon_0 &= \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_0 \\ n &= K a^{-\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

для параболической — уравнением

$$\operatorname{tg} \frac{v_0}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v_0}{2} = \frac{K(t_0 - T)}{\sqrt{2q^3}}$$

где

$$q = \frac{1}{2} p$$

Таким образом все дело сводится к тому, чтобы найти положение и скорость светила в какой-либо момент. Метода Лапласа и состоит в том, чтобы, воспользовавшись наблюдениями геоцентрических долгот и широт светила, определить его гелиоцентрические координаты в некоторый момент, а также величину и направление его скорости в этот момент, после чего элементы орбиты светила и найдутся, как показано выше.

§ 3. Для упрощения выкладок, Лаплас вводит, вместо средних солнечных суток, другую единицу времени — такую, чтобы уравнения движения писались в виде

$$\frac{d^2 x}{dt_1^2} = -\frac{x}{r^3} \quad \text{и т. д.}$$

для этого стоит только за новую единицу времени принять такую, чтобы было

$$t_1 = \sqrt{k} t, \quad \text{т. е. } t = \frac{1}{\sqrt{k}} t_1$$

и следовательно, новая единица есть

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{K} = \frac{1}{0.01720\dots} = 58.1344 \text{ суток}$$

Приняв эту единицу и написав опять букву t вместо t_1 , будем иметь уравнения движения светила в таком виде:

$$(1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} = 0; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{y}{r^3} = 0; \quad \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{z}{r^3} = 0$$

Пусть α и β суть геоцентрические долгота и широта светила, ξ , η — гелиоцентрические координаты Земли, R — радиус-вектор ее, L — ее долгота, тогда имеем следующие равенства:

$$(14) \quad \begin{aligned}x &= \xi + \rho \cos \alpha; \quad y = \eta + \rho \sin \alpha; \quad z = \rho \operatorname{tg} \beta \\ \xi &= R \cos L; \quad \eta = R \sin L\end{aligned}$$

причем ρ есть «укороченное расстояние» от Земли до светила, т. е. проекция истинного расстояния на плоскость эклиптики.

Дифференцируя равенства (14) дважды, получим:

$$(15) \quad \begin{aligned} x' &= \xi' + \rho' \cos \alpha - \rho \sin \alpha \cdot \alpha' \\ y' &= \eta' + \rho' \sin \alpha + \rho \cos \alpha \cdot \alpha' \\ z' &= \rho' \operatorname{tg} \beta + \frac{\rho}{\cos^2 \beta} \cdot \beta' \end{aligned}$$

и

$$(15') \quad \begin{aligned} x'' &= \xi'' + \rho'' \cos \alpha - 2\alpha' \rho' \sin \alpha - \alpha'^2 \rho \cos \alpha - \alpha'' \rho \sin \alpha \\ y'' &= \eta'' + \rho'' \sin \alpha + 2\alpha' \rho' \cos \alpha - \alpha'^2 \rho \sin \alpha + \alpha'' \rho \cos \alpha \\ z'' &= \rho'' \operatorname{tg} \beta + 2\rho' \beta' \cdot \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{\rho \beta''}{\cos^2 \beta} + 2\rho \beta'^2 \cdot \frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta} \end{aligned}$$

Для Земли имеют место уравнения, подобные уравнениям (1), т. е.

$$(16) \quad \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{\xi}{R^3} = 0; \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \frac{\eta}{R^3} = 0; \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \frac{\zeta}{R^3} = 0$$

поэтому, заменяя в предыдущих уравнениях x'' и y'' их величинами — $\frac{x}{r^3}$ и $-\frac{y}{r^3}$ и ξ'' и η'' — их величинами — $\frac{\zeta}{R^3}$ и $-\frac{\eta}{R^3}$ и исключая ρ'' из первых двух уравнений системы (15'), получим

$$\frac{1}{r^3} (y \cos \alpha - x \sin \alpha) = \frac{1}{R^3} (\eta \cos \alpha - \xi \sin \alpha) - 2\alpha' \rho' - \rho \alpha''$$

Но

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha = \eta \cos \alpha - \xi \sin \alpha = R \sin(L - \alpha)$$

и предыдущее уравнение напишется так:

$$(I) \quad \rho' = \frac{R \sin(L - \alpha)}{2\alpha'} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right) - \frac{\rho \alpha''}{2\alpha'}$$

Исключение ρ'' из трех уравнений (15') доставит еще и второе уравнение, не зависимое от (I), оно получится путем умножения первого уравнения на $\operatorname{tg} \beta \cos \alpha$, второго — на $\operatorname{tg} \beta \sin \alpha$ и третьего на — 1 и сложения всех трех уравнений, а именно будет

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{r^3} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \operatorname{tg} \beta + \frac{\zeta}{r^3} \\ &= - \frac{1}{R^3} (\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha) \operatorname{tg} \beta - 2\rho' \beta' \frac{1}{\cos^2 \beta} - \rho \alpha'^2 \operatorname{tg} \beta - \frac{\rho \beta''}{\cos^2 \beta} + \frac{2\rho \beta'^2 \sin \beta}{\cos^3 \beta} \end{aligned}$$

но, в силу уравнений (14), будет

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r^3}(x \cos \alpha + y \sin \alpha) \operatorname{tg} \beta + \frac{z}{r^3} &= -(\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha + \rho) \frac{1}{r^3} \operatorname{tg} \beta + \frac{\rho \operatorname{tg} \beta}{r^3} \\ &= -\frac{1}{r^3} \operatorname{tg} \beta (\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha) \\ &= -\frac{R}{r^3} \operatorname{tg} \beta \cos(L - \alpha) \end{aligned}$$

и предыдущее уравнение напишется так:

$$R \operatorname{tg} \beta \cos(L - \alpha) \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right) = -\frac{2\rho' \beta'}{\cos^2 \beta} - \rho \alpha'^2 \operatorname{tg} \beta - \frac{\rho \beta''}{\cos^2 \beta} + \frac{2\rho \sin \beta}{\beta^3} \beta'^2$$

Откуда следует

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad \rho' &= -\frac{1}{2\rho} \left[\frac{\beta''}{\beta'} + 2\beta' \operatorname{tg} \beta + \sin \beta \cos \beta \cdot \frac{\alpha'^2}{\beta'^2} \right] + \\ &\quad + \frac{R \sin \beta \cos \beta \cos(L - \alpha)}{2\beta'} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) \end{aligned}$$

Исключая из этих двух уравнений величину ρ' , получим уравнение

$$\text{(III)} \quad \rho = \frac{1}{h} \cdot R \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right]$$

где

$$\text{(III')} \quad h = \frac{\alpha' \beta'' - \beta' \alpha'' + 2\alpha' \beta'^2 \operatorname{tg} \beta + \alpha'^3 \sin \beta \cos \beta}{\alpha' \sin \beta \cos \beta \cos(L - \alpha) + \beta' \sin(L - \alpha)}$$

Из уравнений (14) следует

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + 2\rho(\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha) + \frac{\rho^2}{\cos^2 \beta}$$

иначе:

$$r^2 = R^2 + 2R\rho \cos(L - \alpha) + \frac{\rho^2}{\cos^2 \beta}$$

Написав же уравнение (III) в таком виде:

$$\text{(III'')} \quad r^3(1 + h\rho R^2) = R^3$$

и исключая из этого уравнения и предыдущего r , имеем

$$\text{(IV)} \quad \left[\frac{\rho^2}{\cos^2 \theta} + 2R\rho \cos(L - \alpha) + R^2 \right]^3 [h\rho R^2 + 1]^2 = R^6$$

т. е. алгебраическое уравнение седьмой степени для определения ρ .

По поводу уравнения (III'') Лаглас делает такое замечание: так как величина ρ положительная, то расстояние r от светила до Солнца больше или меньше расстояния R ; смотря по тому, h отрицательное или положительное.

Итак, найдя из уравнения (IV) величину ρ , по уравнению (III) получим r , затем уравнение (I) дает ρ' , уравнения (15) доставят x' , y' , z' , а значит, и все необходимые данные для определения элементов орбиты.

Таким образом все свелось к вычислению величины h , т. е. к нахождению величин:

$$\alpha, \beta; \quad \alpha', \beta'; \quad \alpha'', \beta''$$

§ 4. Непосредственные наблюдения дают α и β . Чтобы найти их производные, Лаплас прибегает к интерполяционным формулам и поступает так: пусть имеется ряд наблюденных долгот и широт светила в моменты:

$$t_1, t_2, t_3, \dots,$$

так что соответствующие координаты суть:

$$\alpha_1, \beta_1; \quad \alpha_2, \beta_2; \quad \alpha_3, \beta_3 \dots$$

Возьмем один из этих моментов (ближайший к среднему) за начальный t_0 и назовем через

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

разности:

$$t_1 - t_0, t_2 - t_0, t_3 - t_0, \dots$$

тогда по строке Маклорена получим:

$$(*) \quad \begin{aligned} \alpha_n &= \alpha_0 + \frac{a_n}{1} \cdot \alpha'_0 + \frac{a_n^2}{1 \cdot 2} \alpha''_0 + \frac{a_n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha'''_0 + \dots \\ \beta_n &= \beta_0 + \frac{a_n}{1} \cdot \beta'_0 + \frac{a_n^2}{1 \cdot 2} \beta''_0 + \frac{a_n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \beta'''_0 + \dots \end{aligned} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Стоит только эти уравнения решить относительно

$$\alpha_0, \alpha'_0, \alpha''_0; \quad \beta_0, \beta'_0, \beta''_0$$

и мы получим все необходимые нам величины.

Лаплас не решает на самом деле уравнений (*), а составляет такую функцию $F(s)$, которая была бы вида

$$\begin{aligned} F(s) &= A_0 + (s - a_1) A_1 + (s - a_1)(s - a_2) A_2 + \\ &\quad + (s - a_1)(s - a_2)(s - a_3) A_3 + \dots \end{aligned}$$

и которая принимала бы, соответственно, значения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, когда s равно t_1, t_2, t_3, \dots

Задача о составлении такой функции поставлена и решена Ньютоном в третьей книге «Principi.», lemma V, в такой форме: «invenire lineam curvam generis parabolici, quaes per data quatuor puncta transibit», т. е. найти кривую линию параболического рода, проходящую через какие-либо заданные точки. Решение этого вопроса нужно Ньютону для вопроса, поставленного в лемме VI, — по нескольким наблюденным местам кометы найти ее место для какого-либо промежуточного момента.

Решение Ньютона, будучи выражено алгебраически, следующее. Составим количества:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{a_2 - a_1} &= \delta\alpha_1, \quad \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{a_3 - a_2} = \delta\alpha_2, \quad \frac{\alpha_4 - \alpha_3}{a_4 - a_3} = \delta\alpha_3 \dots \\ \frac{\delta\alpha_2 - \delta\alpha_1}{a_3 - a_1} &= \delta^2\alpha_1, \quad \frac{\delta\alpha_3 - \delta\alpha_2}{a_4 - a_2} = \delta^2\alpha_2 \dots \\ \frac{\delta^2\alpha_2 - \delta^2\alpha_1}{a_4 - a_1} &= \delta^3\alpha_1 \dots \end{aligned}$$

И Т. Д.

тогда искомая функция есть

$$\begin{aligned} F(s) &= \alpha_1 + (s - a_1)\delta\alpha_1 + (s - a_1)(s - a_2)\delta^2\alpha_1 + \\ &+ (s - a_1)(s - a_2)(s - a_3)\delta^3\alpha_1 + \dots \end{aligned}$$

С другой стороны, по теореме Маклорена та же функция $F(s)$ может быть написана так:

$$F(s) = \alpha_0 + \frac{s}{1} \cdot \alpha_0' + \frac{s^2}{1 \cdot 2} \cdot \alpha_0'' + \dots$$

Сличая коэффициенты при одинаковых степенях s , получим:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha_1 - a_1\delta\alpha_1 + a_1a_2\delta^2\alpha_1 - a_1a_2a_3\delta^3\alpha_1 + \dots \\ \alpha_0' &= \delta\alpha_1 - (a_1 + a_2)\delta^2\alpha_1 + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)\delta^3\alpha_1 + \dots \\ \frac{1}{2}\alpha_0'' &= \delta^2\alpha_1 - (a_1 + a_2 + a_3)\delta^3\alpha_1 + \dots \quad \text{и Т. Д.} \end{aligned}$$

Совершенно так же составляются выражения для β_0 , β_0' и β_0'' . Подставив величины α_0 , α_0' , α_0'' , β_0 , β_0' и β_0'' в выражение k , и получим все необходимое для вычисления орбиты.

§ 5. Чтобы вывести свою формулу, Ньютон поступает так:¹ пусть будет

$$u = F(s) = A + Bs + Cs^2 + Ds^3 + \dots$$

¹ «Isaac Newtoni Opuscula», t. I, p. 273.

положим, что при значениях s :

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

соответствующие значения u суть:

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

тогда мы получим, для определения коэффициентов A, B, C, D, \dots , следующий ряд уравнений:

$$\begin{aligned} u_1 &= A + Ba_1 + Ca_1^2 + Da_1^3 + \dots \\ u_2 &= A + Ba_2 + Ca_2^2 + Da_2^3 + \dots \\ u_3 &= A + Ba_3 + Ca_3^2 + Da_3^3 + \dots \\ u_4 &= A + Ba_4 + Ca_4^2 + Da_4^3 + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Вычитая первое уравнение из второго, второе из третьего, третье из четвертого и т. д. и замечая, что первое из получаемых таким образом уравнений делится на $a_2 - a_1$, второе — на $a_3 - a_2$ и т. д., мы получим уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{u_2 - u_1}{a_2 - a_1} &= \delta u_1 = B + C(a_2 + a_1) + D(a_2^2 + a_2 a_1 + a_1^2) + \dots \\ \frac{u_3 - u_2}{a_3 - a_2} &= \delta u_2 = B + C(a_3 + a_2) + D(a_3^2 + a_3 a_2 + a_2^2) + \dots \\ \frac{u_4 - u_3}{a_4 - a_3} &= \delta u_3 = B + C(a_4 + a_3) + D(a_4^2 + a_4 a_3 + a_3^2) + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Поступая с этими уравнениями таким же образом, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\delta u_2 - \delta u_1}{a_3 - a_1} &= \delta^2 u_1 = C + D(a_3 + a_2 + a_1) + \dots \\ \frac{\delta u_3 - \delta u_2}{a_4 - a_2} &= \delta^2 u_2 = C + D(a_4 + a_3 + a_2) + \dots \end{aligned}$$

Поступив с этими уравнениями так же, получим, по разделению на $a_4 - a_1$:

$$\frac{\delta^2 u_2 - \delta^2 u_1}{a_4 - a_1} = \delta^3 u_1 = D + \dots$$

Отсюда порядок выкладок ясен; если бы было желательно функцию $F(s)$ иметь лишь третьей степени, то из предыдущих уравнений мы бы получили:

$$\begin{aligned} D &= \delta^3 u_1 \\ C &= \delta^2 u_1 - (a_3 + a_2 + a_1) \\ B &= \delta u_1 - (a_2 + a_1) \delta^2 u_1 - (a_3 a_2 + a_2 a_1 + a_3 a_1) \delta^3 u_1 \\ A &= u_1 - a_1 \delta u_1 + a_1 a_2 \delta^2 u_1 - a_3 a_2 a_1 \delta^3 u_1 \end{aligned}$$

и, подставляя эти величины, имели бы

$$u = u_1 + (s - a_1) \delta u_1 + [s^2 - (a_2 + a_1)s + a_2 a_1] \delta^2 u_1 + \\ [s^3 - (a_3 + a_2 + a_1)s^2 + (a_3 a_1 + a_3 a_2 + a_1 a_2)s - a_3 a_2 a_1] \delta^3 u$$

или, разлагая стоящие в [] величины на множителей, будем иметь

$$u = u_1 + (s - a_1) \delta u_1 + (s - a_1)(s - a_2) \delta^2 u_1 + (s - a_1)(s - a_2)(s - a_3) \delta^3 u$$

Совершенно так же поступили бы и для функции $F(s)$ любой степени относительно s .

§ 6. Я не буду приводить дальнейших подробностей относительно методы Лапласа, ни тех упрощений, которые получаются для параболических орбит комет, вследствие того, что для них $\frac{1}{a} = 0$ и $e = 1$, ни исследования того, сколько и при каких условиях уравнение (IV) имеет вещественных корней, ни того, как распорядиться имеющимися наблюдениями, чтобы погрешности в них оказывались наименьшим образом на определяемые по ним элементы, отсылая к главе IV второй книги «Небесной Механики» Лапласа. Эта глава может быть прочитана независимо от других, но при пользовании разного рода постоянными, там приводимыми, надо иметь в виду, что Лаплас везде придерживается сотенного деления окружности.

Legendre в своем сочинении «*Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*» (1806) видоизменяет методу Лапласа, чтобы упростить выкладки и избавиться от необходимости прибегать к формулам интерполяции, которые, как известно, хорошо применимы, когда надо их интегрировать, и гораздо хуже поддаются дифференцированию; а именно, этому-то действию и притом два раза подряд повторенному и приходится, в сущности, подвергать формулы, выражющие α и β через t .

Приведенный в первой беседе нашей пример показывает, что даже метода Legendre'a, в применении к комете 1781 г., по точности далеко уступает методе Ньютона, ясно, что то же обстоятельство будет иметь место и для методы Лапласа, поэтому полученные по этим методам элементы приходится рассматривать как первые приближения и исправлять их, пользуясь всею совокупностью имеющихся наблюдений, применяя для определения поправок элементов методу наименьших квадратов, которая и была впервые опубликована именно в вышеуказанном сочинении Legendre'a.

Мы уже упоминали в конце первой беседы нашей о тесной связи, в которой находятся вторая метода Ньютона и метода Лапласа, установление этой связи и разъяснение всех деталей ее могут служить темою для весьма интересной и поучительной самостоятельной работы.

Беседа 3

МЕТОДА ОЛЬБЕРСА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОРБИТ КОМЕТ

§ 1. Прежде чем излагать методу Ольберса, являющуюся теперь наиболее употребительной для определения параболических орбит комет, выведем некоторые теоремы, которыми мы уже пользовались и которые понадобятся нам и при дальнейшем изложении.

Теорема 1-я представляет следующее выражение, данное Эйлером, а затем вновь найденное Ламбертом, для площади параболического сектора

в функции двух радиусов-векторов, ограничивающих сектор и хорды, соединяющей концы их, именно:

$$S = \frac{1}{3} \sqrt{q} \left[\left(\frac{r_1 + r_2 + c}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{r_1 + r_2 - c}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

причем S есть сказанныя площадь, q — полупараметр параболы, r_1 и r_2 — радиусы-векторы c — хорда, знак — берется, когда разность истинных аномалий, соответствующих радиусам r_1 и r_2 , меньше 180° , и знак $+$, когда эта разность больше 180° .

Чтобы вывести эту теорему, рассмотрим параболу (фиг. 14), коей уравнение есть

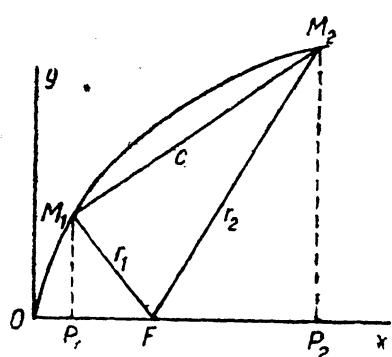
$$y^2 = 4qx$$

и возьмем на ней точки $M_1(x_1 y_1)$ и $M_2(x_2 y_2)$ по одну сторону от оси x , так что угол $M_1 F M_2 < 180^\circ$, тогда площадь сектора $M_1 F M_2$, равная S , выражается так:

$$S = OM_2 P_2 - OM_1 P_1 - M_1 P_1 F - M_2 F P_2$$

По свойству же параболы имеем:

$$OM_2 P_2 = \frac{2}{3} x_2 y_2; \quad OM_1 P_1 = \frac{2}{3} x_1 y_1$$



Фиг. 14.

и для треугольников M_1FP_1 и M_1FP_2 :

$$M_1FP_1 = \frac{1}{2}(q - x_1)y_1; \quad M_2FP_2 = \frac{1}{2}(x_2 - q)y_2$$

Подставляя, получаем

$$S = \frac{1}{6}(x_2y_2 - x_1y_1) + \frac{1}{2}q(y_2 - y_1)$$

Заменив в этом равенстве y_1 и y_2 их величинами

$$y_1 = 2\sqrt{qx_1}; \quad y_2 = 2\sqrt{qx_2}$$

получаем

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3}\sqrt{q}\left[x_2^{\frac{3}{2}} - x_1^{\frac{3}{2}}\right] + q^{\frac{3}{2}}\left(x_2^{\frac{1}{2}} - x_1^{\frac{1}{2}}\right) = \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{q}\left(x^{\frac{1}{2}} - x_1^{\frac{1}{2}}\right)(x_2 + x_1 + \sqrt{x_2x_1} + 3q) \end{aligned}$$

По свойству параболы:

$$x_2 + q = r_2; \quad x_1 + q = r_1$$

так что

$$(*) \quad x_2 + x_1 + 2q = r_2 + r_1$$

С другой стороны, хорда $M_1M_2 = c$ выражается так:

$$\begin{aligned} c^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + 4q(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})^2 = \\ &= (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 + 4q(x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_2x_1}) = \\ &= (x_2 + x_1)^2 + 4q(x_2 + x_1) + 4q^2 - 4(q^2 + x_1x_2 + 2q\sqrt{x_2x_1}) = \\ &= (x_2 + x_1 + 2q)^2 - 4(q + \sqrt{x_2x_1})^2 = \\ &= (r_1 + r_2)^2 - 4(q + \sqrt{x_2x_1})^2 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(**) \quad 4(q + \sqrt{x_2x_1})^2 = (r_1 + r_2 + c)(r_1 + r_2 - c)$$

Сделаем на время:

$$r_1 + r_2 + c = 2l; \quad r_1 + r_2 - c = 2\lambda$$

так что будет:

$$r_1 + r_2 = l + \lambda = x_1 + x_2 + 2q; \quad q + \sqrt{x_1x_2} = \sqrt{l\lambda}$$

Отсюда следует:

$$x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1x_2} = l + \lambda - 2\sqrt{l\lambda} \quad \text{или} \quad \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \sqrt{l} - \sqrt{\lambda}$$

$$x_1 + x_2 + \sqrt{x_1x_2} = l + \lambda + \sqrt{l\lambda} - 3q$$

Подставляя эти величины в выражение S , имеем

$$S = \frac{1}{3} \sqrt{q} (\sqrt{l} - \sqrt{\lambda}) (l + \lambda + \sqrt{l\lambda})$$

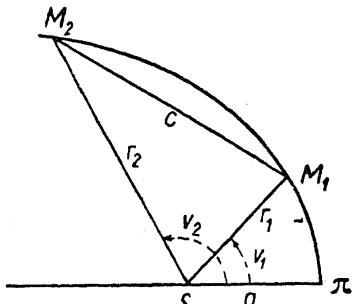
или

$$S = \frac{1}{3} \sqrt{q} \left[l^{\frac{3}{2}} - \lambda^{\frac{3}{2}} \right]$$

иначе:

$$(I) \quad S = \frac{1}{3} \sqrt{q} \left[\left(\frac{r_1 + r_3 + c}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{r_1 + r_3 - c}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

Когда масса светила m ничтожно мала по сравнению с массою Солнца, то, как мы видели,



Фиг. 15.

$$\sqrt{p} = \frac{C}{K} = \frac{2S}{t_2 - t_1} \cdot \frac{1}{K}$$

где C есть удвоенная площадь, описываемая в единицу времени, значит

$$\sqrt{q} = \sqrt{\frac{p}{2}} = \frac{\sqrt{2} S}{t_2 - t_1} \cdot \frac{1}{K}$$

подставляя в формулу (I), получим

$$(II) \quad 6K(t_2 - t_1) = (r_1 + r_2 + c)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_2 - c)^{\frac{3}{2}}$$

Это и есть формула Эйлера, связывающая два радиуса-вектора, хорду и промежуток времени описания соответствующей дуги параболы, независимо от параметра или иных элементов орбиты.

Обыкновенно разность истинных аномалий меньше 180° , так что в формуле Эйлера перед вторым членом надо брать знак $-$. Составив чертеж и повторив предыдущий вывод для того случая, когда разность аномалий более 180° , мы увидим, что перед вторым членом надо брать знак $+$.

Мы видели при изложении методы Ньютона то значение, которое имеет эта формула для разыскания параболических орбит.

§ 2. Ньютон привел нахождение элементов параболической орбиты кометы к определению двух радиусов-векторов и хорды между ними и дал геометрические построения элементов по этим данным. Покажем, каким образом эти элементы вычислить по тем же данным, т. е. выведем все те формулы, которыми мы пользовались в § 13 первой беседы нашей.

Итак, даны r_1 , r_2 и хорда c между ними, надо найти: 1^o) истинные аномалии v_1 и v_2 , 2^o) расстояние до перигелия q , 3^o) время прохождения через перигелий.

Уравнение параболы

$$r = \frac{p}{1 + \cos v} = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2}v}$$

дает следующие соотношения:

$$(1) \quad \cos \frac{1}{2}v_1 = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r_1}}; \quad \cos \frac{1}{2}v_2 = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r_2}}$$

откуда следует

$$(2) \quad \frac{\cos \frac{1}{2}v_1 - \cos \frac{1}{2}v_2}{\cos \frac{1}{2}v_1 + \cos \frac{1}{2}v_2} = \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{4} \operatorname{tg} \frac{v_1 + v_2}{4} = \frac{\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}}{\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1}}$$

с другой стороны в треугольнике M_1FM_2 известны три стороны, угол же при фокусе F есть $v_2 - v_1$, очевидно, что этот угол найдется по одной из формул полупериметра, например:

$$(3) \quad \sin^2 \frac{v_2 - v_1}{2} = \frac{(c + r_1 - r_2)(c + r_2 - r_1)}{4r_1 r_2}$$

а так как формула (2) при известном $v_2 - v_1$ доставит $v_1 + v_2$, то оба угла v_1 и v_2 определяются, после чего из уравнений (1) найдется q .

Чтобы найти время прохождения через перигелий, стоит только определить время, в течение которого комета проходит путь πM_1 или πM_2 , исчислив для этого площади соответствующих секторов, именно будет

$$\begin{aligned} 2S_1 &= \int_0^{v_1} r^2 dv = q^2 \int_0^{v_1} \frac{dv}{\cos^4 \frac{1}{2}v} = 2q^2 \int_0^{v_1} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}v\right) d \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2}v\right) \\ &= 2q^2 \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2}v_1 \right). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$2S = K \sqrt{2q} (t_1 - t_0)$$

таким образом получаем уравнение

$$(4) \quad \frac{1}{2} K \sqrt{\frac{2}{q^3}} (t_1 - t_0) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2}v_1$$

Совершенно так же M_2 дает соотношение

$$(4') \quad \frac{1}{2} K \sqrt{\frac{2}{q^3}} (t_2 - t_0) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} v_2$$

Для облегчения вычислений по формулам (4) и (4'), в особенности когда надо по данной левой части этих уравнений найти v_1 или v_2 , составлены особые таблицы, называемые таблицами Barker'a. Эта таблица дает по аргументу v величину

$$75 \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} v \right] = m$$

или логарифм этой величины. Умножив обе части равенства (4) на 75, имеем

$$\frac{75K}{\sqrt{2}} q^{-\frac{3}{2}} (t_1 - t_0) = m_1$$

Постоянный множитель $\frac{75K}{\sqrt{2}}$ вычисляется раз навсегда, его логарифм есть

$$\lg \frac{75K}{\sqrt{2}} = 1.9601277 = \lg n$$

Уравнения (4) и (4') при таком обозначении напишутся:

$$(4'') \quad \begin{aligned} nq^{-\frac{3}{2}} (t_1 - t_0) &= m_1 \\ nq^{-\frac{3}{2}} (t_2 - t_0) &= m_2 \end{aligned}$$

и сейчас же доставят величину t_0 .

В таблице Barker'a, приложенной к сочинению Oppolzer'a — «Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten», показаны прямо логарифмы величины $\frac{m}{n}$, что делает вычисление еще проще.

Сокращение Oppolzer'овой таблицы при ином ее расположении приведено в таблицах Bauschinger'a — «Tafeln zur theoretischen Astronomie».

Чтобы найти наклонность i , долготу узла N и долготу перицентрического узла $N+\omega$ или аргумент широты перицентрического узла ω , надо сперва вычислить, как показано в первой беседе, гелиоцентрические широты θ_1 и θ_2 и гелиоцентрические долготы λ_1 и λ_2 обоих крайних мест кометы M_1 и M_2 , тогда получим из рассмотрения фиг. 16 следующие формулы.

Сделаем:

$$NM_1 = u_1; \quad NM_2 = u_2$$

и, заметив, что

$$\begin{aligned} \gamma K_1 &= \lambda_1; & \gamma K_2 &= \lambda_2 \\ K_1 M_1 &= \theta_1; & K_2 M_2 &= \theta_2 \\ M_1 NK_1 &= i; & \gamma N &= N \end{aligned}$$

имеем:

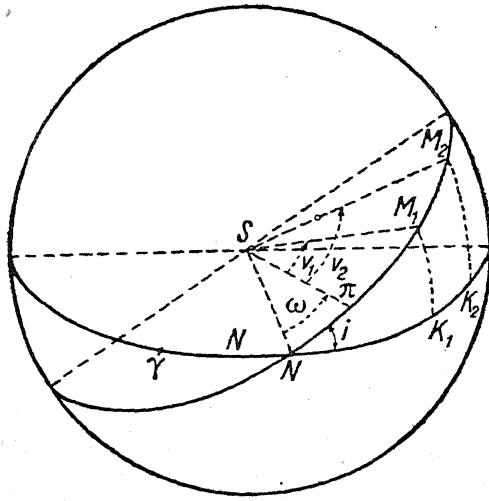
$$(5) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} i \sin (\lambda_1 - N) &= \operatorname{tg} \theta_1 \\ \operatorname{tg} i \sin (\lambda_2 - N) &= \operatorname{tg} \theta_2 \end{aligned}$$

откуда следует

$$\frac{\sin (\lambda_1 - N)}{\sin (\lambda_2 - N)} = \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\sin (\lambda_1 - N) + \sin (\lambda_2 - N)}{\sin (\lambda_1 - N) - \sin (\lambda_2 - N)} &= \\ &= \frac{\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2}{\operatorname{tg} \theta_1 - \operatorname{tg} \theta_2} \end{aligned}$$



Фиг. 16.

что, по упрощению, дает

$$(6) \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - N \right) = \frac{\sin (\theta_1 + \theta_2)}{\sin (\theta_1 - \theta_2)} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \right)$$

и послужит для определения N , после чего по формуле (5) найдется i .

Чтобы найти ω , найдем сперва u_1 и u_2 по формулам

$$(7) \quad \cos u_1 = \cos \theta_1 \cos (\lambda_1 - N) \quad \text{и} \quad \cos u_2 = \cos \theta_2 \cos (\lambda_2 - N)$$

или, когда u_1 и u_2 малые, по формулам

$$(7') \quad \operatorname{tg} u_1 = \operatorname{tg} (\lambda_1 - N) \sec i \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} u_2 = \operatorname{tg} (\lambda_2 - N) \sec i$$

тогда

$$(8) \quad \omega = u_1 - v_1 = u_2 - v_2$$

что вместе с тем составляет и проверку вычисления.

§ 3. После этих предварительных замечаний перейдем к изложению самой методы Ольберса.

Сущность этой методы состоит в следующем:

Пусть T_1, T_2, T_3 суть места Земли в моменты наблюдений t_1, t_2, t_3 ; C_1, C_2, C_3 — соответствующие места кометы; $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ — расстояния кометы

до Земли; ρ_1, ρ_2, ρ_3 — проекции этих расстояний на плоскость эклиптики; r_1, r_2, r_3 — радиусы-векторы кометы в момент наблюдений; c — хорда $C_1 C_3$ между крайними положениями кометы.

Оказывается, что можно составить *четыре* независимых уравнения между неизвестными ρ_1, r_1, r_3 и c , из которых эти величины определяются, после чего, как показано выше, найдутся и элементы орбиты.

Сущность методы Ольберса и состоит в составлении и в решении этих четырех уравнений.

Первое уравнение доставляется теоремою Эйлера, оно будет

$$(I) \quad 6K(t_3 - t_1) = (r_1 + r_3 + c)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_3 - c)^{\frac{3}{2}}$$

ибо обыкновенно комета наблюдается по одну сторону перигелия.

Второе уравнение следует из рассмотрения плоского треугольника $ST_1 C_1$ и его проекции на плоскость эклиптики, в самом деле имеем:

$$\begin{aligned} SC_1^2 &= Sc_1^2 + C_1 c_1^2 \\ C_1 c_1 &= \rho_1 \operatorname{tg} \beta_1 \\ Sc_1^2 &= ST_1^2 + \\ &+ T_1 c_1^2 - 2ST_1 \cdot T_1 c_1 \cos ST_1 c_1 \end{aligned}$$

но

$$ST_1 = R_1 \quad \text{и} \quad ST_1 c_1 = 180^\circ - (\alpha_1 - L_1)$$

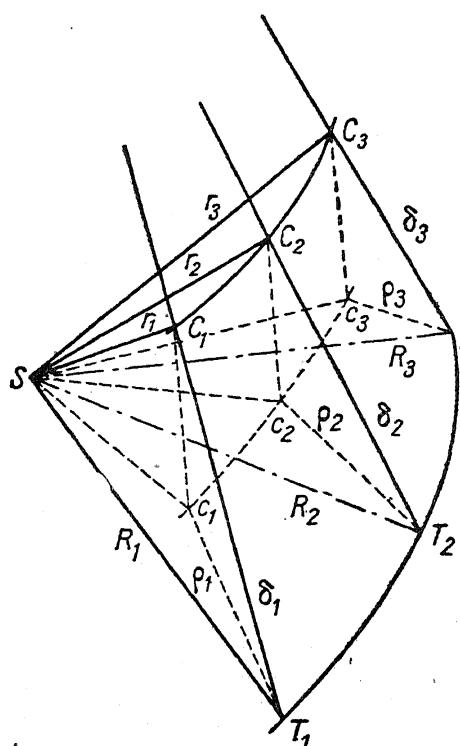
где R_1 есть радиус-вектор Земли в момент t_1 , L_1 — долгота ее. Таким образом имеем

$$(II) \quad r_1^2 = R_1^2 + 2R_1 \rho_1 \cos(\alpha_1 - L_1) + \rho_1^2 \sec^2 \beta_1$$

Это уравнение мы уже имели в методе Лапласа.

Третье уравнение, самое существенное в методе Ольберса, получается из тех условий: 1) что точки C_1, C_2, C_3 лежат в одной плоскости, *проходящей через центр Солнца S*, 2) что площади секторов $C_1 SC_2, C_2 SC_3, C_1 SC_3$ пропорциональны соответствующим промежуткам времени:

$$t_2 - t_1, \quad t_3 - t_2, \quad t_3 - t_1$$



Фиг. 17.

Обозначая координаты точек C_1, C_2, C_3 , соответственно, через

$$x_1 y_1 z_1 \quad x_2 y_2 z_2 \quad x_3 y_3 z_3$$

видим, что условие, чтобы они лежали в одной плоскости, проходящей через S , выражается так:

$$(*) \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Разлагая этот определитель по элементам первого столбца, имеем

$$x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_2(y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1) = 0$$

Заметив, что величины $(y_2 z_3 - y_3 z_2)$, $(y_1 z_3 - y_3 z_1)$, $(y_1 z_2 - y_2 z_1)$ представляют проекции удвоенных площадей треугольников $C_2 SC_3$, $C_1 SC_3$, $C_1 SC_2$ на плоскость zoy , видим, что если обозначить эти площади, соответственно, через Δ_{23} , Δ_{13} , Δ_{12} , то предыдущее уравнение напишется так:

$$(9) \quad x_1 \Delta_{23} - x_2 \Delta_{13} + x_3 \Delta_{12} = 0$$

Совершенно так же, располагая определитель $(*)$ по элементам второго и третьего столбцов, получим уравнения:

$$(9') \quad \begin{aligned} y_1 \Delta_{23} - y_2 \Delta_{13} + y_3 \Delta_{12} &= 0 \\ z_1 \Delta_{13} - z_2 \Delta_{12} + z_3 \Delta_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Но мы видели, что

$$\begin{aligned} x_i &= R_i \cos L_i + \rho_i \cos \alpha_i \\ y_i &= R_i \sin L_i + \rho_i \sin \alpha_i \quad (i = 1, 2, 3) \\ z_i &= \rho_i \operatorname{tg} \beta_i \end{aligned}$$

Подставляя эти величины в уравнения (9), получим, по разделении на Δ_{12} :

$$\begin{aligned} \rho_3 \operatorname{tg} \beta_3 - \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}} \rho_2 \operatorname{tg} \beta_2 + \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} \rho_1 \operatorname{tg} \beta_1 &= 0 \\ \rho_3 \cos \alpha_3 - \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}} \rho_2 \cos \alpha_2 + \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} \rho_1 \cos \alpha_1 &= \\ &= -R_3 \cos L_3 + \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}} R_2 \cos L_2 - \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} R_1 \cos L_1 \\ \rho_3 \sin \alpha_3 - \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}} \rho_2 \sin \alpha_2 + \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} \rho_1 \sin \alpha_1 &= \\ &= -R_3 \sin L_3 + \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}} R_2 \sin L_2 - \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} R_1 \sin L_1 \end{aligned}$$

В этих уравнениях отношения площадей треугольников также *неизвестны*, но отношение $\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}}$ приблизительно равно отношению площадей соответствующих секторов, а значит, и соответствующих промежутков времени $\frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}$, причем это равенство тем ближе к истине, чем промежутки времени меньше и ближе друг к другу.

Таким образом, приняв приближенное равенство

$$\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}$$

мы из предыдущих трех уравнений исключим величины $\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}}$ и $\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}} \rho_2$ и получим одно уравнение, связывающее ρ_3 и ρ_1 , это и будет требуемое *третье* уравнение в методе Ольберса.

Чтобы выполнить сказанное исключение, умножим третье уравнение на $-\cos L_2$, второе — на $\sin L_2$ и складываем их, получаем

$$\begin{aligned} \rho_3 \sin(\alpha_3 - L_2) - \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}} \rho_2 \sin(\alpha_2 - L_2) + \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \rho_1 \sin(\alpha_1 - L_2) = \\ = - \left[R_3 \sin(L_3 - L_2) - \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} R_1 \sin(L_2 - L_1) \right] \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что выражения $R_2 R_3 \sin(L_3 - L_2)$ и $R_1 R_2 \sin(L_3 - L_1)$ суть удвоенные площади треугольников $T_2 ST_3$ и $T_1 ST_2$, которые с еще большей степенью точности можно считать пропорциональными соответствующим промежуткам времени, нежели площади треугольников $C_2 SC_3$ и $C_1 SC_2$. Значит, в предыдущем уравнении можно положить вторую часть равной 0, тогда, умножив его на $-\operatorname{tg} \beta_2$ и придав к первому умноженному на $\sin(\alpha_2 - L_2)$, получим

$$\begin{aligned} \rho_3 [\operatorname{tg} \beta_3 \sin(\alpha_2 - L_2) - \operatorname{tg} \beta_2 \sin(\alpha_3 - L_3)] = \\ = - \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \rho_1 [\operatorname{tg} \beta_1 \sin(\alpha_2 - L_2) - \operatorname{tg} \beta_2 \sin(\alpha_1 - L_1)] \end{aligned}$$

откуда следует

$$(*) \quad \rho_3 = h \rho_1$$

причем

$$(**) \quad h = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta_2 \sin(\alpha_1 - L_2) - \operatorname{tg} \beta_1 \sin(\alpha_2 - L_2)}{\operatorname{tg} \beta_3 \sin(\alpha_2 - L_2) - \operatorname{tg} \beta_2 \sin(\alpha_3 - L_2)}$$

Написав уравнение

$$r_3^2 = R_3^2 + 2R_3 \rho_3 \cos(\alpha_3 - L_3) + \rho_3^2 \sec^2 \beta_3$$

и заменив в нем ρ_3 его величиною, и получим искомое *третье* уравнение, а именно:

$$(III) \quad r_3^2 = R_3^2 + 2hR_3\rho_1 \cos(\alpha_3 - L_3) + h^2 \rho_1^2 \sec^2 \beta_3$$

Четвертое уравнение есть не что иное, как преобразованное: пользуясь соотношением (*), имеем выражение длины хорды c :

$$c^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2$$

которое, по подстановке, вместо $x_1 y_1 z_1$ и $x_3 y_3 z_3$, выражений

$$\begin{aligned} x_1 &= R_1 \cos L_1 + \rho_1 \cos \alpha_1 & x_3 &= R_3 \cos L_3 + h \rho_1 \cos \alpha_3 \\ y_1 &= R_1 \sin L_1 + \rho_1 \sin \alpha_1 & y_3 &= R_3 \sin L_3 + h \rho_1 \sin \alpha_3 \\ z_1 &= \rho_1 \operatorname{tg} \beta_1 & z_3 &= h \rho_1 \operatorname{tg} \beta_3 \end{aligned}$$

дает

$$(IV) \quad \begin{aligned} c^2 &= r_1^2 + r_3^2 - 2R_1 R_3 \cos(L_3 - L_1) - 2h\rho_1^2 [\cos(\alpha_3 - \alpha_1) + \operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{tg} \beta_3] \\ &\quad - 2hR_1 \rho_1 \cos(\alpha_3 - L_1) - 2R_3 \rho_1 \cos(L_3 - \alpha_1) \end{aligned}$$

Это и есть *четвертое* уравнение.

Как видно, если в этом уравнении заменить r_1^2 и r_3^2 их выражениями, то оно будет вида

$$(IV') \quad c^2 = A \rho_1^2 + B \rho_1 + C$$

причем A , B и C незвестных не содержат.

§ 4. Итак, для определения величины r_1 , r_3 , c и ρ_1 , мы имеем систему уравнений следующего вида:

$$(V) \quad \begin{aligned} r_1^2 &= A_1 \rho_1^2 + B_1 \rho_1 + C_1 = 0 \\ r_3^2 &= A_3 \rho_1^2 + B_3 \rho_1 + C_3 = 0 \\ c^2 &= A \rho_1^2 + B \rho_1 + C = 0 \\ (r_1 + r_3 + c)^{\frac{3}{2}} - (r_1 - r_3 - c)^{\frac{3}{2}} - C_4 &= 0 \end{aligned}$$

Решение этих уравнений можно производить двояко: или, во-первых, задаваясь величиною ρ_1 , вычислять соответствующие значения r_1 , r_3 и c и подставлять в последнее уравнение и, вычислив значение первой его части, последовательным приближением искать истинное значение ρ_1 , или, во-вторых, задаваясь величиною $r_1 + r_3$ из уравнения Эйлера, находить величину c , по ней — величину ρ_1 , по ρ_1 — величины r_1 и r_3 и, сложив их сумму с тою, которой задавались, составлять последовательные приближения.

Для облегчения вычисления величины c по уравнению

$$6K(t_3 - t_1) = (r_1 + r_3 + c)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_3 - c)^{\frac{3}{2}}$$

Энке составил вспомогательные таблицы следующим образом: разделив обе части предыдущего равенства на $3(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}$ и положив

$$\frac{c}{r_1 + r_3} = \beta$$

он разлагает вторую часть в ряд по степеням β , тогда получится

$$\frac{2K(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}} = \beta - \frac{1}{24}\beta^3 - \frac{1}{128}\beta^5 - \dots$$

положив затем

$$(10) \quad \frac{2K(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}} = \eta$$

Энке обращает предыдущий ряд, т. е. получает разложение β по степеням буквы η :

$$\beta = \frac{c}{r_1 + r_3} = \eta \left[1 + \frac{1}{24}\eta^2 + \frac{5}{384}\eta^4 + \frac{59}{216}\eta^6 + \dots \right] = \eta \cdot \epsilon$$

и составляет таблицу, в которой по аргументу η даны логарифмы величин ϵ ; таким образом, пользуясь его таблицею, вычисление хорды производится так: сперва по формуле (9) вычисляют величину η и, подыскав по таблице $\log \epsilon$, получают хорду по формуле

$$(10') \quad c = \eta \cdot (r_1 + r_3) \cdot \epsilon$$

Пользуясь таблицею Энке, ведут приближения для решения системы (V) так: берут сперва $r_1 + r_3 = 2$, вычисляют хорду c , затем r_1 и r_3 ; если их сумма окажется равной 2, то дело кончено, если же нет, а окажется, напр., $r_1 + r_3 = 1.77$, то, приняв $r_1 + r_3 = 1.77$, вычисляют хорду c и повторяют предыдущий процесс, пока не получится требуемого согласия.

После того как величины r_1 , r_3 и c вычислены, определяют и элементы орбиты, как показано выше.

§ 5. При выводе уравнения (III), мы оставили без доказательства предположение, что

$$(11) \quad \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{13}} = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}$$

так что не было показано, какова степень его точности. Чтобы это пополнить, вообразим, что, принимая момент t_2 за исходный, мы разложим координаты светила в моменты t_3 и t_1 по ряду Тейлора, причем, чтобы не иметь дела с постоянно повторяющимся множителем K , выразим время в «астрономической единице» и положим:

$$K(t_2 - t_1) = \tau_1; \quad K(t_3 - t_2) = \tau_2 \quad \text{и} \quad K(t_3 - t_1) = \tau_3$$

тогда получим:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= -\frac{\tau_1}{1} z'_2 + \frac{\tau_1^2}{1 \cdot 2} z''_2 - \frac{\tau_1^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} z'''_2 + \dots \\ z_3 - z_2 &= \frac{\tau_2}{1} z'_2 + \frac{\tau_2^2}{1 \cdot 2} z''_2 + \frac{\tau_2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} z'''_2 + \dots \end{aligned}$$

Откуда, исключая z' и заменив z'' через $-\frac{z_2}{r_2^3}$, получим

$$\frac{z_1 - z_2}{\tau_1} + \frac{z_3 - z_2}{\tau_2} = -\frac{\tau_3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{z_2}{r_2^3} + \frac{\tau_2^2 - \tau_1^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} z'''_2 + \dots$$

Отсюда видно, что когда промежутки τ_2 и τ_1 равны между собою, то последний член пропадает, и с точностью до членов третьего порядка относительно τ_1 и τ_2 имеем

$$\frac{z_1 - z_2}{\tau_1} + \frac{z_3 - z_2}{\tau_2} = -\frac{1}{2} \tau_3 \frac{z_2}{r_2^3}$$

Точно так же будет:

$$\begin{aligned} \frac{y_1 - y_2}{\tau_1} + \frac{y_3 - y_2}{\tau_2} &= -\frac{1}{2} \tau_3 \frac{y_2}{r_2^3} \\ \frac{x_1 - x_2}{\tau_1} + \frac{x_3 - x_2}{\tau_2} &= -\frac{1}{2} \tau_3 \frac{x_2}{r_2^3} \end{aligned}$$

Исключая из двух последних уравнений $\frac{1}{r_2^3}$, получим

$$\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{\tau_1} + \frac{y_3 x_2 - y_2 x_3}{\tau_2} = 0$$

или иначе:

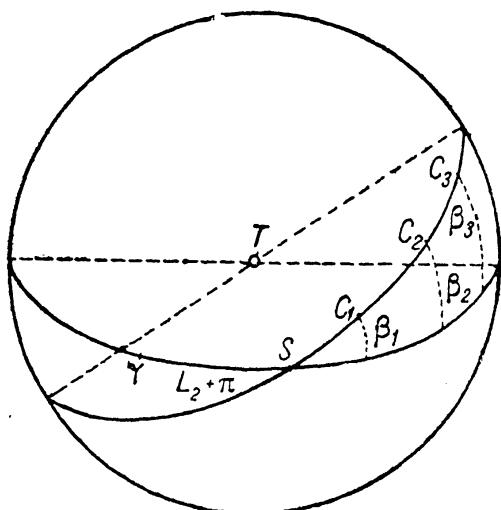
$$(11') \quad \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2}$$

что и показывает, что это соотношение верно до членов *третьего* порядка относительно промежутков τ_2 и τ_1 , когда они между собою равны или близки к равенству.

Когда промежуток $t_2 - t_1 = t_3 - t_1$ составляет около 6 суток, то τ_1 и τ_2 приблизительно равны $\frac{1}{10}$, и значит, отброшенные члены — порядка $\frac{1}{1000}$;

когда же этот промежуток всего около 3 суток, как для современных наблюдений, то отброшенные члены — порядка $\frac{1}{8000}$.

Формулою (11) мы пользовались при составлении выражения h , показывающего отношение ρ_3 к ρ_1 ; нетрудно, после того как получено первое приближение, это выражение исправить, стоит только вычислить величины отношений площадей треугольников к площадям соответствующих секторов; пусть эти отношения будут



Фиг. 18.

$$\frac{\Delta_{23}}{S_{23}} = n_{23} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta_{12}}{S_{12}} = n_{12}$$

тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} \cdot \frac{S_{12}}{S_{23}} &= \frac{n_{23}}{n_{12}} \\ \text{но} \quad \frac{S_{12}}{S_{23}} &= \frac{t_2 - t_1}{t_1 - t_2} \end{aligned}$$

следовательно будет

$$\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \frac{n_{23}}{n_{12}}$$

исправив таким образом h , повторяем вычисление величин r_1 , r_3 , c , которое и явится окончательным.

§ 6. То же выражение h содержит множитель

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_2 \sin(\alpha_1 - L_2) - \operatorname{tg} \beta_1 \sin(\alpha_2 - L_2)}{\operatorname{tg} \beta_3 \sin(\alpha_3 - L_2) - \operatorname{tg} \beta_2 \sin(\alpha_2 - L_2)}$$

может оказаться, что этот множитель принимает вид $\frac{0}{0}$ или, вообще, что в нем числитель и знаменатель весьма малы, тогда погрешности в данных скажутся весьма значительно на величине этого множителя, эта величина не будет заслуживать никакого доверия, и изложенная метода становится неприменимую.

Такой исключительный случай имеет место при следующем относительном расположении видимых мест светила и Солнца на сфере небесной.

Пусть T (фиг. 18) есть Земля, принимаемая неподвижной, γ — точка весеннего равноденствия, S — видимое место Солнца при вторых наблюдениях, C_1, C_2, C_3 — видимые места кометы при первом, втором и третьем наблюдениях. Нетрудно видеть, что числитель и знаменатель выражения h обращаются

в нуль, когда расположение видимых мест кометы и Солнца такое, как на нашем чертеже, т. е. когда все эти четыре точки лежат на *одном и том же большом круге*.

Мы не будем вдаваться в подробный анализ того, как видоизменить методу Ольберса, чтобы сделать ее приложимой и для этого случая, скажем только, что тогда она еще ближе становится к методе Ньютона, для которой, как показано во втором примере нашей первой беседы, этот случай не только не представляет затруднений, но даже особенно благоприятный.

§ 7. Любопытно ближе сопоставить обе методы Ньютона и Ольберса, само собою разумеется по их сущности и идее, а не по деталям выкладок и численных вычислений, которые можно выполнять на множество различных манер.

Сущность методы Ньютона состоит в том, что сперва он находит положения кометы при двух крайних наблюдениях и по этим положениям вычисляет элементы орбиты.

То же самое делается и в методе Ольберса.

Обращаясь затем к самым деталям расчета, видим, что по методе Ньютона:

1) Задается ρ_2 — укороченное расстояние при вторых наблюдениях.

2) Из условия, что хорда подразделяется точкою E , построение которой Ньютон дает, на отрезки, пропорциональные промежуткам времени, следуют между укороченными расстояниями ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 такие соотношения:

$$(12) \quad \begin{aligned} \rho_1 &= a_1 + b_1 \rho_2 \\ \rho_3 &= a_3 + b_3 \rho_2 \end{aligned}$$

причем a_1 и a_3 — величины малые. Полученные по этим соотношениям величины ρ_1 и ρ_3 исправляются определенным образом, дабы получить возможно точное подразделение хорды на отрезки, пропорциональные временам.

В методе Ольберса, вместо Ньютонова построения точки E , берется ее исходное у Ньютона положение, т. е. на радиусе-векторе, идущем ко второму месту кометы. Величины a_1 и a_3 тогда оказывается возможно принять равными нулю, и вместо формул (12), Ольберс получает формулу

$$\rho_3 = h \rho_1$$

3) Для проверки и составления ложных положений, Ньютон вычисляет длину хорды σ в зависимости от r_2 по формуле

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}K \cdot (t_3 - t_1)}{\sqrt{SP}}$$

где $SP = f(r_2)$ и не зависит от элементов орбиты.

Ольберс для этой цели пользуется формулой Эйлера

$$6K(t_3 - t_1) = (r_1 + r_2 + c)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_2 - c)^{\frac{3}{2}}$$

и в наших примерах мы показали равносильность обеих формул.

Но надо заметить, что лишь благодаря таблицам Энке вычисление хорды по формуле Эйлера приведено к той же степени простоты, как и по формуле Ньютона.

4) Во всем остальном никакой разницы между обеими методами нет, ибо все остальные формулы суть не что иное, как *геометрические соотношения* между r_1 , r_3 , c , ρ_1 и ρ_3 , следующие из тех же самых треугольников.

Из этого сопоставления видно, что метода Ольберса целиком заключается в методе Ньютона, но Ньютон, которому приходилось, в виду малой точности тогдашних наблюдений, брать гораздо большие промежутки времени, не ограничился заменою секторов треугольниками *даже для первого приближения*, а лишь для исходного, которое он рекомендует делать «*graphice, opere celeri et rudi*», для первого же приближения он дал то изумительное по точности, остроумию и изяществу построение, которое составляет лемму VIII третьей книги «*Principia*», когда же промежутки времени малы, то и исходное Ньютоново приближение достаточно точно. Этим обстоятельством и воспользовался Ольберс, приведя вместе с тем и все нужные формулы к удобному для вычислений виду.

§ 8. При изложении методы Ольберса, мы следовали за Н. Фаю в его «*Cours d'Astronomie de l'École Polytechnique*», ибо в этом изложении на первый план выступает самая сущность дела и идея способа, а не детали его практического приложения.

Фаю в своем «*Cours d'Astronomie*» дает и пример вычисления орбиты кометы по выведенным в предыдущих параграфах формулам, не приводя их предварительно к наиболее простому и удобному виду для вычислений, ибо тогда эти формулы утрачивают свою непосредственную наглядность.

Фаю берет комету 1769 г., мы приводим этот пример в том виде, как он дан в указанном сочинении, согласовав лишь обозначения с принятыми в нашем изложении.

Пример

Вычисление орбиты кометы 1769 г. по методе Ольберса

Данные

№	Время <i>t</i>	Для кометы		Для Земли	
		Долгота α	Широта β	Долгота L	Рад. вектора $\lg R$
1	Ser. 4 14 ^u 0 ^m	80°56' 11"	— 17°51' 39"	342°42' 5"	0.008182
2	8 14 0	101 0 54	— 22 5 2	846 35 31	0.002665
3	12 14 0	124 19 22	— 23 43 55	350 29 20	0.002184.

Вычисление h

$$\begin{aligned}
 \lg \tan \beta_2 &= 1.60824 n \\
 \lg \sin(\alpha_1 - L_2) &= 1.94875 \\
 &\hline
 &1.60699 n \\
 1\text{-й член} &= -0.404565 \\
 \lg \tan \beta_3 &= 1.64909 n \\
 \lg \sin(\alpha_2 - L_2) &= 1.95929 \\
 &\hline
 &1.60238 n \\
 3\text{-й член} &= -0.400295 \\
 \text{Числитель} &= -0.111163 \\
 \text{Знаменатель} &= -0.127395 \\
 &\hline
 \lg h &= 1.94081
 \end{aligned}$$

Вычисление радиусов-векторов

$$\begin{aligned}
 \lg R_1^2 &= 0.006264 & \lg R_3^2 &= 0.004368 \\
 C_1 = R_1^2 &= 1.01453 & C_3 = R_3^2 &= 1.01011 \\
 \lg 2R_1 &= 0.30416 & \lg 2R_3 &= 0.30321 \\
 \lg \cos(\alpha_1 - L_1) &= 1.15604 & \lg \cos(\alpha_3 - L_3) &= 1.84048 \\
 &\hline
 \lg B_1 &= 1.46021 & \lg h &= 1.94031 \\
 B_1 &= 0.28854 & \lg B_3 &= 0.08450 \\
 \lg \sec \beta_1 &= 0.02145 & B_3 &= 1.21478 \\
 \lg \sec^2 \beta_1 &= 0.04290 = \lg A_1 & \lg \sec^2 \beta_3 &= 0.07674 \\
 &\hline
 && \lg h^2 &= 1.88162 \\
 && \lg A_3 &= 1.95836 \\
 && A_3 &= 0.90857 \\
 (I) & r_1^2 = 1.01453 - [1.46021] \rho_1 + [0.04290] \rho_1^2 \\
 (III) & r_3^2 = 1.01011 - [0.08450] \rho_1 + [1.95836] \rho_1^2
 \end{aligned}$$

Вычисление хорды

$\lg 2R_1 \dots 0.30416$	$\lg 2R_3 = 0.30321$	$\lg 2h \dots 0.24184$
$\lg R_3 \dots 0.00218$	$\lg \cos(\alpha_1 - L_3) = 0.89267 (n)$	$\lg \cos(L_3 - L_1) \dots 1.86138$
$\lg \cos(L_3 - L_1) \dots 1.99598$	$\overline{2.19588 (n)}$	$\overline{0.10322}$
$\overline{0.30232}$	$- 0.01570$	1.26828
$2.00596 \lg 2R_1 \dots 0.30416$	$\lg 2h \dots 0.24184$	
$\lg \cos(\alpha_3 - L_1) \dots 1.89427 n$	$\lg \operatorname{tg} \beta_1 \dots 1.50817 (n)$	
$\lg h \dots 1.94081$	$\lg \operatorname{tg} \beta_3 \dots 1.64309 n$	
$\overline{0.13924 n}$	$\overline{1.39310}$	
$- 1.37799$	0.24723	
$- 2.00596 + 0.01570$	$- 1.26828$	
$+ 1.37799$	$- 0.24723$	
$\overline{- 1.39368}$	$\overline{- 1.51551}$	
$r_1^2 + r_3^2 \dots + 2.02464$	$- 1.50332$	2.01240
$c^2 = \dots 0.01868$	$\overline{- 0.10964 \rho_1}$	$0.49689 \rho_1^2$

Таким образом уравнения задачи суть:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= 1.01453 - [1.46021] \rho_1 + [0.04290] \rho_1^2 \\ r_3^2 &= 1.01011 - [0.08450] \rho_1 + [1.95836] \rho_1^2 \\ c^2 &= 0.01868 - [1.03997] \rho_1 + [1.69626] \rho_1^2 \end{aligned}$$

и уравнение Эйлера

$$C_4 = (r_1 + r_3 + c)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_3 - c)^{\frac{3}{2}}$$

причем величина C_4 есть $6K \cdot (t_3 - t_1)$.

Но, для вычисления по таблицам Энке, надо знать величину:

$$\frac{1}{3} C_4 = 2K \cdot (t_3 - t_1); \quad t_3 - t_1 = 8$$

$$\lg 2K = 2.53661$$

$$\lg 8 = 0.90309$$

$$\lg 2K(t_3 - t_1) = 1.43970 = \lg \frac{1}{3} C_4$$

Последовательные приближения

За исходное значение $r_1 + r_3$ берем 1.8 и, пользуясь таблицей Энке, расчисляем длину хорды c , соответствующей при такой сумме промежутку $t_3 - t_1 = 8.00$ суток. Это вычисление делается так:

$$\begin{aligned} r_1 + r_3 &= 1.8 \\ \lg r_1 + r_3 &= 0.25527 & \lg \epsilon &= 0.00024 \\ \frac{1}{2} \lg (r_1 + r_3) &= 0.12764 & \lg \frac{1}{3} C_4 &= 1.43970 \\ \lg (r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}} &= 0.38291 & \frac{1}{2} \lg (r_1 + r_3)^{-1} &= 1.87236 \\ \lg \frac{1}{3} C_4 &= 1.43970 & \lg c &= 1.31230 \\ \lg \eta &= 1.05679 & \lg c^2 &= 2.62460 \\ \eta &= 0.11397 & c^2 &= 0.042133 \\ \lg \epsilon &= 0.000236 \end{aligned}$$

Уравнение (3) будет при этом значении c^2 :

$$0 = -0.023453 - [1.03997] \rho_1 + [1.69626] \rho_1^2$$

Для решения этого уравнения поступим так: пусть данное уравнение есть

$$a\rho^2 - b\rho - c = 0$$

так что

$$\rho = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} = \frac{b \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4ac}{b^2}} \right)}{2a}$$

ибо нам надо только больший положительный корень.

Делаем

$$\tan^2 \varphi = \frac{4ac}{b^2}$$

тогда:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{b \cdot (1 + \sec \varphi)}{2a} = \frac{b}{a} \frac{\cos^2 \frac{1}{2} \varphi}{\cos \varphi} \\ \lg 4 &= 0.60206 & \lg b &= 1.03997 \\ \lg a &= 1.69626 & \lg \frac{1}{a} &= 0.30374 \\ \lg c &= 2.37020 & \lg \cos^2 \frac{1}{2} \varphi &= 1.86118 \\ \lg \frac{1}{b^2} &= 1.92006 & \lg \sec \varphi &= 0.34411 \\ 2 \lg \tan \varphi &= 0.58858 & \lg \rho_1 &= 1.54900 \\ \lg \tan \varphi &= 0.29429 \\ \varphi &= 63^\circ 4' 40'' \\ \frac{1}{2} \varphi &= 31^\circ 32' 20'' \end{aligned}$$

По этой величине ρ_1 вычисляем по формулам (I) и (III):

$$r_1 = 1.02504$$

$$r_3 = 1.83307$$

$$r_1 + r_3 = 1.85811$$

Это значение $r_1 + r_3 = 1.85811$, и принимаем за 2-е предположение:

$$r_1 + r_3 = 1.85811$$

Проделав вновь вышеуказанное вычисление с этим значением $r_1 + r_3$, Faye получает

$$r_1 = 1.02373$$

$$r_3 = 0.83494$$

$$r_1 + r_3 = 1.85867$$

Если принять эту величину и над нею повторить вычисление, то получится вновь та же самая сумма, поэтому окончательно Faye полагает:

$$r_1 = 1.023716$$

$$r_3 = 0.83496$$

$$c = 0.201983$$

$$\lg \rho_1 = 1.54210$$

После чего он вычисляет элементы орбиты по тем формулам, которые уже неоднократно применены в первой беседе нашей, и получает такие элементы:

Комета 1769 г.

Время прохожд. через перигелий: . . .	1769 г. Окт. 7-го 10 ⁴
Расстояние перигелия	$q = 0.11736$
Долгота перигелия	145°17'
Долгота узла	175 19
Наклонность	41 24

Для сравнения, он приводит элементы, определенные Legendre'ом по совокупности многих наблюдений.

Элементы Legendre'a

Время прохожд. перигелия	1769 г. Окт. 7-го 12 ⁴ 44"
Расстояние перигелия	$q = 0.1230401$
Долгота перигелия	144°11' 32"
Долгота восход. узла	175 3 40
Наклонность	40 47 56

Обыкновенно, для вычисления орбиты по методе Ольберса, исходя из тех же уравнений, развивают иные формулы, более удобные для численных вычислений, о чем отсылаем к сочинению Bauschinger'a — «Bahnbestimmung», или к сочинению F. Tisserand — «Leçons sur la détermination des orbites».

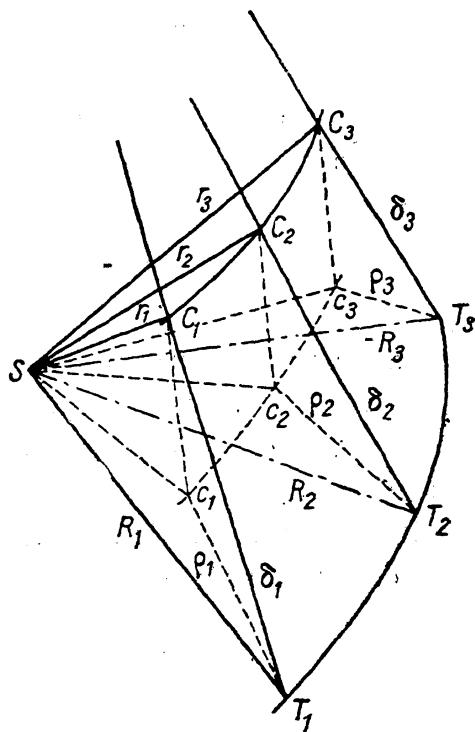
Беседа 4

МЕТОДА ГАУССА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ ПО ТРЕМ НАБЛЮДЕНИЯМ

§ 1. Определение эллиптической орбиты, ни один из элементов которой не известен, если почему либо нельзя воспользоваться методою Лапласа, представляет значительно большие трудности, нежели орбиты параболической. Главная причина этого в том что число неизвестных элементов *одним* больше, а вместе с тем то уравнение, которое связывало *независимо* от элементов хорду с двумя радиусами-векторами и временем (теорема Эйлера) или эту же хорду с средним радиусом-вектором (теорема Ньютона), *отпадает*, между тем это уравнение и в методе Ольберса и в методе Ньютона имело весьма существенное значение.

Чтобы яснее показать, каким образом преодолел эти трудности Гаусс, мы расчленим изложение его методы на решение отдельных вопросов, из которых она состоит.

Сохранив те же обозначения, которые сделаны при изложении методы Ольберса, и сделав тот же самый чертеж, мы видим, что геометрически задача ставится так: надо пересечь прямые $T_1 C_1$, $T_2 C_2$, $T_3 C_3$, положение которых в пространстве задано, плоскостью, проходящей через центр Солнца S , так, чтобы, проведя через полученные точки C_1 , C_2 , C_3 эллипс, коего фокус в точке S , получить такие секторы $C_1 S C_2$, $C_2 S C_3$, которые



Фиг. 19.

планета, двигаясь по сказанному эллипсу по законам Кеплера, проходит в промежутки времени, равные наблюденным.

При изложении методы Ольберса, мы видели, что условие, чтобы три точки C_1, C_2, C_3 лежали в одной плоскости с Солнцем, дает между величинами ρ_1, ρ_2, ρ_3 *три* соотношения, содержащие, кроме этих трех неизвестных, еще отношения площадей треугольников C_2SC_3 и C_1SC_3 к C_1SC_2 ; эти отношения также неизвестны.

1) Когда орбита параболическая, то можно было одно из этих отношений заменить его приближенным значением $\frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2}$; оказывается, что здесь такая замена не ведет к цели, а надо с самого начала ввести более близкие к истинным значения этих отношений, причем оказывается, что они выражаются через промежутки времени и через радиус-вектор r_2 при втором наблюдении; таким образом для этих неизвестных составится еще *два* уравнения. Наконец, геометрическая связь между r_1, r_2, r_3 и ρ_1, ρ_2, ρ_3 доставляет еще *три* уравнения между этими величинами; таким образом между *восьмью* неизвестными

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, r_1, r_2, r_3, \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}}, \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}}$$

составится *восемь* уравнений. Найдя из этих уравнений величины $r_1, r_2, r_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3$, получим положение в пространстве точек $C_1C_2C_3$, а когда эти положения будут определены, то найдутся и элементы эллипса, через эти точки проходящего.

2) По второму закону Кеплера, для планеты, масса коей ничтожно мала, площадь, описываемая в течение времени t , выражается формулой

$$2S = K \cdot t \cdot \sqrt{p} = K \cdot t \cdot \sqrt{a(1 - e^2)}$$

с другой стороны, в эллиптическом движении та же площадь может быть выражена через эксцентрисическую аномалию, если как площадь, так и время считать от момента прохождения через перигелий. Оказывается, что если известно *два* положения светила и промежуток времени между ними, то элементы эллипса определяются, т. е. находится положение перигелия и большая ось.

3) Для найденной эллиптической орбиты можно вычислить отношение площадей секторов к площадям соответствующих треугольников и тогда, приняв эти исправленные значения, проделать вычисление вновь для получения более точных результатов.

§ 2. Мы начнем с выяснения сказанного в п. 2, подобно тому как мы делали и для параболической орбиты.

Припомним сперва главнейшие формулы эллиптического движения:

$$(1) \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v}$$

$$(2) \quad r = a - ex = a - ae \cos u$$

$$(3) \quad r \cos v = a \cos u - ae$$

Из формул (2) и (3) следует:

$$r(1 + \cos v) = a(1 - e)(1 + \cos u)$$

$$r(1 - \cos v) = a(1 + e)(1 - \cos u)$$

или иначе:

$$(4) \quad \begin{aligned} \sqrt{r} \cdot \cos \frac{1}{2}v &= \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2}u \\ \sqrt{r} \sin \frac{1}{2}v &= \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2}u \end{aligned}$$

Отсюда

$$(5) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2}u$$

Наконец имеем уравнение Кеплера

$$(6) \quad K a^{-\frac{3}{2}} t = u - e \sin u$$

Итак, положим, что дано два места планеты, т. е. известны: 1) радиусы-векторы r_1 и r_2 , 2) разность $v_2 - v_1 = 2f$ истинных аномалий и 3) промежуток времени $t_2 - t_1$, а значит, и $\tau_1 = K(t_2 - t_1)$; требуется определить элементы эллипса.

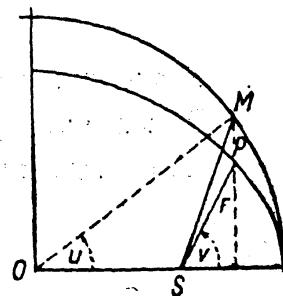
Обозначим через s — отношение площади сектора к площади треугольника и примем за неизвестные:

$$v_1 - v_2, u_1 - u_2, u_2 - u_1, a, e, s$$

ясно, что, воспользовавшись уравнением

$$(7) \quad v_2 - v_1 = 2f$$

мы, как только будет найдено $v_1 - v_2$, найдем и v_1 и v_2 .



Фиг. 20.

Мы сейчас же можем написать следующие уравнения:

$$(8) \quad sr_1 r_2 \sin 2f = \tau \sqrt{a(1-e^2)}$$

$$(9) \quad u_2 - u_1 - 2e \cdot \sin \frac{u_2 - u_1}{2} \cos \frac{u_2 + u_1}{2} = \tau a^{-\frac{3}{2}}$$

$$(10) \quad \sqrt{r_1} \sin \frac{v_1}{2} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{1+e} \sin \frac{u_1}{2}$$

$$(11) \quad \sqrt{r_1} \cos \frac{v_1}{2} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{1-e} \cos \frac{u_1}{2}$$

$$(12) \quad \sqrt{r_2} \sin \frac{v_2}{2} = \sqrt{a} \sqrt{1+e} \sin \frac{u_2}{2}$$

$$(13) \quad \sqrt{r_2} \cos \frac{v_2}{2} = \sqrt{a} \sqrt{1-e} \cos \frac{u_2}{2}$$

Как видно, получается семь уравнений (7)–(13) с семью неизвестными.

Решение этих уравнений и составляет первую задачу.

Из последних четырех уравнений сейчас же следуют такие:

$$(14) \quad \sqrt{r_1 r_2} \sin f = a \sqrt{1-e^2} \sin \frac{u_2 - u_1}{2}$$

$$(15) \quad \sqrt{r_1 r_2} \cos f = a \cos \frac{u_2 - u_1}{2} - ae \cos \frac{u_2 + u_1}{2}$$

$$(16) \quad r_1 + r_2 = 2a - 2ae \cos \frac{u_1 + u_2}{2} \cos \frac{u_2 - u_1}{2}$$

Сделав, для краткости письма,

$$\frac{u_2 - u_1}{2} = g; \quad \frac{u_2 + u_1}{2} = G$$

получаем из уравнений (8) и (14):

$$(17) \quad 1 = 2 \frac{\sqrt{a}}{\tau} s \sqrt{r_1 r_2} \cos f \sin g$$

Умножив уравнение (15) на $2 \cos \frac{u_2 - u_1}{2}$ и вычтя из (16), имеем

$$(18) \quad r_1 + r_2 = 2a \sin^2 g + 2 \sqrt{r_1 r_2} \cos f \cos g$$

Заменив в уравнении (9) $e \cos \frac{u_2 + u_1}{2}$ его величиною, следующуюю из уравнения (15), получим

$$(19) \quad 2g - \sin 2g + \frac{2}{a} \sqrt{r_1 r_2} \cos f \sin g = \frac{\tau}{a^{\frac{3}{2}}}$$

Пользуясь уравнением (17), уравнение (19) напишем так:

$$(19') \quad 2g - \sin 2g = \frac{\tau}{\sqrt{a}} \left(1 - \frac{1}{s} \right)$$

В силу того же уравнения (17) имеем

$$\frac{\tau}{\sqrt{a}} = 2s \sqrt{r_1 r_2} \cos f \sin g$$

и следовательно, исключая a из уравнения (19'), получим

$$\tau^2 (2g - \sin 2g) = (2s \sqrt{r_1 r_2} \cos f \sin g)^3 \left(1 - \frac{1}{s} \right)$$

или иначе:

$$(20) \quad 1 - \frac{1}{s} = \frac{\tau^2}{s^3 (2 \sqrt{r_1 r_2} \cos f)^3} \cdot \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}$$

Совершенно так же, воспользовавшись тем же уравнением (17), из уравнения (18) имеем

$$(21) \quad r_1 + r_2 - 2 \sqrt{r_1 r_2} \cos f \cos g = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{s^2 r_1 r_2 \cos^2 f}$$

Уравнения (20) и (21) содержат только неизвестные s и g . Эти уравнения можно написать так:

$$\frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} = \frac{(2 \sqrt{r_1 r_2} \cos f)^3}{\tau^2} \cdot (s^3 - s^2)$$

и

$$s^3 = \frac{\tau^2}{2r_1 r_2 \cos^2 f (r_1 + r_2 - 2 \sqrt{r_1 r_2} \cos f \cos g)}$$

Полагая затем, для сокращения,

$$(22) \quad \frac{\tau^2}{(2 \sqrt{r_1 r_2} \cos f)^3} = m$$

и

$$(23) \quad \frac{r_1 + r_2}{4 \sqrt{r_1 r_2} \cos f} - \frac{1}{2} = l$$

приведем эти два уравнения к следующему виду:

$$(24) \quad s^3 - s^2 = m \cdot \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}$$

$$(25) \quad s^2 = \frac{m}{l + \sin^2 \frac{g}{2}}$$

в котором их и рассматривает Гаусс.

Не будем вдаваться в подробности решения этих двух уравнений. Это решение можно бы производить и так: задавшись величиною s , которая всегда близка к 1, из уравнения (25) находим g , подставляем в (24), находим s , по которому из (25) опять находим g и т. д., пока два полученных значения s и g не будут в точности удовлетворять обоим уравнениям. Это вычисление ведется на семь знаков.

Когда величины s и g будут найдены, то уравнение (17) дает a , уравнение (14) дает $p = a\sqrt{1 - e^2}$, а следовательно, и e , уравнение (15) дает G , после чего найдутся u_1 и u_2 , по ним, по уравнению (5), найдутся v_1 и v_2 . Затем по уравнению (6), подставляя вместо u его величину u_1 или u_2 , найдем и время, протекшее от момента прохождения через перигелий до первого или второго положения планеты, а значит, и момент прохождения через перигелий.

Таким образом уравнения (24) и (25) и решают первую задачу.

§ 3. Составим теперь выражения *отношения площадей секторов к площадям треугольников*, для чего поступим совершенно так же, как в § 5 беседы третьей.

Итак положим:

$$K(t_3 - t_1) = \tau_1; \quad K(t_3 - t_2) = \tau_2; \quad K(t_2 - t_1) = \tau_3.$$

и, принимая астрономическую единицу времени, имеем уравнения движения:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{x}{r^3}; \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{y}{r^3}; \quad \frac{d^2z}{d\tau^2} = -\frac{z}{r^3}$$

считая время от момента t_2 , имеем для момента $t_1 = t_2 - \tau_1$ по Тейлорову ряду:

$$x_1 = x_2 - \tau_1 x_2' + \frac{\tau_1^2}{2} x_2'' - \frac{\tau_1^3}{6} x_2''' + \frac{\tau_1^4}{24} x_2^{IV} + \dots$$

$$y_1 = y_2 - \tau_1 y_2' + \frac{\tau_1^2}{2} y_2'' - \frac{\tau_1^3}{6} y_2''' + \frac{\tau_1^4}{24} y_2^{IV} + \dots$$

Совершенно так же для момента $t_3 = t_2 + \tau_2$:

$$x_3 = x_2 + \tau_2 x_2' + \frac{\tau_2^2}{2} x_2'' + \frac{\tau_2^3}{6} x_2''' + \frac{\tau_2^4}{24} x_2^{IV} + \dots$$

$$y_3 = y_2 + \tau_2 y_2' + \frac{\tau_2^2}{2} y_2'' + \frac{\tau_2^3}{6} y_2''' + \frac{\tau_2^4}{24} y_2^{IV} + \dots$$

На основании уравнений движения, имеем:

$$\begin{aligned}x_2'' &= -\frac{x_2}{r_2^3} & y_2'' &= -\frac{y_2}{r_2^3} \\x_2''' &= -\frac{1}{r_2^3}x_2' + \frac{3x_2}{r_2^4}r_2' & y_2''' &= -\frac{1}{r_2^3}x_2' + \frac{3x_2}{r_2^4}r_2' \\x_2^{IV} &= \frac{6}{r_2^4}r_2'x_2' + \dots & y_2^{IV} &= \frac{6}{r_2^4}r_2'x_2' + \dots\end{aligned}$$

Подставляя эти величины в предыдущие уравнения, получим:

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 x_2 - b_1 x_2' & y_1 &= a_1 y_2 - b_1 y_2' \\x_3 &= a_3 x_2 + b_3 x_2' & y_3 &= a_3 y_2 + b_3 y_2'\end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned}a_1 &= 1 - \frac{\tau_1^2}{2} \cdot \frac{1}{r_2^3} - \frac{\tau_1^3}{2} \cdot \frac{1}{r_2^4} \cdot r_2' + \dots \\b_1 &= \tau_1 - \frac{\tau_1^3}{6} \cdot \frac{1}{r_2^3} - \frac{\tau_1^4}{4} \cdot \frac{1}{r_2^4} \cdot r_2' + \dots \\a_3 &= 1 - \frac{\tau_2^2}{2} \cdot \frac{1}{r_2^3} + \frac{\tau_2^3}{2} \cdot \frac{1}{r_2^4} \cdot r_2' + \dots \\b_3 &= \tau_2 - \frac{\tau_2^3}{2} \cdot \frac{1}{r_2^3} + \frac{\tau_2^4}{4} \cdot \frac{1}{r_2^4} \cdot r_2' + \dots\end{aligned}$$

Составляя выражения проекций площадей треугольников на плоскость xy , имеем:

$$\begin{aligned}x_1 y_2 - x_2 y_1 &= b_1(x_2 y_2' - x_2' y_2) \\x_2 y_3 - x_3 y_2 &= b_3(x_2 y_2' - x_2' y_2) \\x_1 y_3 - y_1 x_3 &= (a_1 b_3 + b_1 a_3)(x_2 y_2' - x_2' y_2)\end{aligned}$$

По закону площадей:

$$x_2 y_2' - x_2' y_2 = \sqrt{p} \cdot \cos(\bar{n}z)$$

где n есть направление нормали к плоскости орбит, вместе с тем

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = \Delta_{12} \cos(\bar{n}z)$$

и

$$x_2 y_3 - x_3 y_2 = \Delta_{23} \cos(\bar{n}z)$$

$$x_1 y_3 - y_1 x_3 = \Delta_{13} \cos(\bar{n}z)$$

по подстановке и сокращении, имеем:

$$\begin{aligned}\Delta_{12} &= \tau_1 \sqrt{p} \left[1 - \frac{\tau_1^2}{6} \cdot \frac{1}{r_2^3} - \frac{\tau_1^3}{4} \cdot \frac{1}{r_2^4} r_2' + \dots \right] \\ \Delta_{23} &= \tau_2 \sqrt{p} \left[1 - \frac{\tau_2^2}{6} \cdot \frac{1}{r_2^3} + \frac{\tau_2^3}{4} \cdot \frac{1}{r_2^4} r_2' + \dots \right] \\ \Delta_{13} &= \tau_3 \sqrt{p} \left[1 - \frac{\tau_3^2}{6} \cdot \frac{1}{r_2^3} + \frac{\tau_3^2(\tau_2 - \tau_1)}{4} \cdot \frac{1}{r_2^4} r_2' + \dots \right]\end{aligned}$$

Откуда следует для отношений:

$$(26) \quad \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{13}} = \frac{\tau_2}{\tau_3} \left[1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_3^2 - \tau_2^2}{r_2^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau_1(\tau_3\tau_1 - \tau_2^2)}{r_2^4} r_2' + \dots \right]$$

$$(26') \quad \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{13}} = \frac{\tau_1}{\tau_3} \left[1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_3^2 - \tau_1^2}{r_2^3} - \frac{1}{4} \frac{\tau_2(\tau_3\tau_2 - \tau_1^2)}{r_2^4} r_2' + \dots \right]$$

$$(26'') \quad \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{23}} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \left[1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_2^2 - \tau_1^2}{r_2^3} - \frac{1}{4} \frac{\tau_2^3 + \tau_1^3}{r_2^4} \cdot r_2' + \dots \right]$$

§ 4. Имея выражения отношений площадей треугольников, мы можем перейти к п. 1 и составить окончательные уравнения в решаемой задаче.

При изложении методы Ольберса, мы получили следующие уравнения:

$$\begin{aligned} n_3 \rho_3 \cos \alpha_3 - \rho_2 \cos \alpha_2 + n_1 \rho_1 \cos \alpha_1 &= -n_3 R_3 \cos L_3 + R_2 \cos L_2 - n_1 R_1 \cos L_1 \\ n_3 \rho_3 \sin \alpha_3 - \rho_2 \sin \alpha_2 + n_1 \rho_1 \sin \alpha_1 &= -n_3 R_3 \sin L_3 + R_2 \sin L_2 - n_1 R_1 \sin L_1 \\ n_3 \rho_3 \operatorname{tg} \beta_3 - \rho_2 \operatorname{tg} \beta_2 + n_1 \rho_1 \operatorname{tg} \beta_1 &= 0 \end{aligned}$$

где положено

$$n_3 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{13}} \quad \text{и} \quad n_1 = \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{13}}$$

Из этих уравнений следуют такие:

$$\begin{aligned} (27) \quad n_1 \rho_1 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) &= \\ &= \rho_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) - n_1 R_1 \sin(\alpha_3 - L_1) + R_2 \sin(\alpha_3 - L_2) - n_3 R_3 \sin(\alpha_3 - L_3) \\ n_3 \rho_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) &= \\ &= \rho_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + n_1 R_1 \sin(\alpha_1 - L_1) - R_2 \sin(\alpha_1 - L_2) + n_3 R_3 \sin(\alpha_1 - L_3) \end{aligned}$$

и

$$\rho_2 = a_2 + b_2 n_1 + c_2 n_3$$

причем

$$\begin{aligned} (28) \quad N \cdot a_2 &= [-\operatorname{tg} \beta_3 \sin(\alpha_1 - L_2) - \operatorname{tg} \beta_1 \sin(\alpha_3 - L_2)] R_2 \\ N \cdot b_2 &= [-\operatorname{tg} \beta_3 \sin(\alpha_1 - L_1) + \operatorname{tg} \beta_1 \sin(\alpha_3 - L_1)] R_1 \\ N \cdot b_3 &= [-\operatorname{tg} \beta_3 \sin(\alpha_1 - L_3) + \operatorname{tg} \beta_1 \sin(\alpha_3 - L_3)] R_3 \end{aligned}$$

и

$$N = \operatorname{tg} \beta_1 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) - \operatorname{tg} \beta_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) + \operatorname{tg} \beta_3 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Эти формулы показывают, что как только n_1 и n_3 будут определены, то найдется ρ_2 и ρ_1 и ρ_3 .

Из формулы (26) следует, что когда промежутки τ_1 и τ_2 близки к равенству, то приближенно будет

$$(29) \quad \frac{n_3}{n_1} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \quad \text{и} \quad n_3 + n_1 = 1 + \frac{\tau_1 \tau_2}{2r_2^3}$$

Гаусс полагает

$$(30) \quad \frac{n_3}{n_1} = P \quad \text{и} \quad n_3 + n_1 = 1 + \frac{Q}{2r_2^3}$$

и принимает P и Q за новые неизвестные, коих приближенные значения суть

$$\frac{\tau_3}{\tau_1} \quad \text{и} \quad \tau_1 \tau_3$$

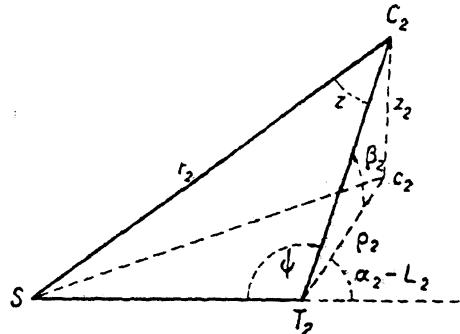
Из формулы (30) следует

$$n_3 = n_1 P \quad \text{и} \quad n_1 = \left(1 + \frac{Q}{2r_2^3}\right) : (1 + P)$$

и величина ρ_2 напишется так:

$$(31) \quad \rho_2 = a_3 + \frac{b_2 + c_2 P}{1 + P} \left(1 + \frac{Q}{2r_2^3}\right) = A + \frac{B}{r_2^3}$$

Рассмотрим теперь треугольник, коего вершины суть центр Солнца S , место Земли и место планеты при втором наблюдении, и проекцию этого треугольника на плоскость эклиптики, мы получим тогда соотношение



Фиг. 21.

$$(32) \quad r_2^2 = R_2^2 + 2R_2\rho_2 \cos(\alpha_2 - L_2) + \rho_2^2 \sec^2 \beta_2$$

в которое если подставить вместо ρ_2 его величину (31), то получится уравнение восьмой степени для определения r_2 , а именно:

$$(33) \quad r_2^2 = R_2^2 + 2R_2 \left(A + \frac{B}{r_2^3}\right) \cos(\alpha_2 - L_2) + \left(A + \frac{B}{r_2^3}\right)^2 \sec^2 \beta_2$$

из этого уравнения, приняв сперва для P и Q их приближенные величины, что даст и приближенные величины A и B , найдем r_2 , по нему, по формуле (31), найдем ρ_2 , по ρ_2 — величины ρ_1 и ρ_3 , по ним — r_1 и r_3 , по r_1 и r_3 и углу между ними — элементы эллипса, по этим элементам вычислим площади секторов; исправив таким образом величины n_1 , n_2 , n_3 , надо зновь повторить весь расчет и продолжать такое последовательное приближение, пока вычисляемые по элементам места планеты не совпадут в точности с наблюденными.

Как видно, такой процесс был бы чрезмерной длинны и утомительности по тому громадному количеству вычислений, которое бы потребовалось

для его исполнения. Вот, чтобы этот процесс обойти и сократить его до *одной* чрезвычайно изящной и простой формулы, и нужен был математический гений Гаусса.

§ 5. Прежде всего Гаусс приводит уравнение (33) к форме, несравненно более удобной для решения, нежели та, которая получилась бы непосредственно. Он поступает так: обозначив через ψ — угол T_2 в треугольнике $C_2 ST_2$ и через z — угол при вершине C_2 , имеем, во-первых,

$$(32) \quad r_2^2 = R_2^2 - 2R_2 \rho_2 \sec \beta_2 \cos \psi + \rho_2^2 \sec^2 \beta_2$$

что, по сличении с формулой (33), дает

$$\cos \psi = -\cos(\alpha_2 - L_2) \cos \beta_2$$

Из формулы (32) имеем

$$\rho_2 \sec \beta_2 = R_2 \cos \psi \pm \sqrt{r_2^2 - R_2^2 \sin^2 \psi}$$

и уравнение (31) дает

$$a_2 + \frac{b_2 + c_2 P}{1 + P} \left(1 + \frac{Q}{2r_2^2} \right) = (R_2 \cos \psi \pm \sqrt{r_2^2 - R_2^2 \sin^2 \psi}) \cos \beta_2$$

Тот же треугольник $SC_2 T$ дает

$$(34) \quad r_2 = \frac{R_2 \sin \psi}{\sin z}$$

Полагая

$$\frac{b_2 + c_2 P}{1 + P} = A_1$$

$$(35) \quad A_1 + a_2 = k_0 \cos \beta_2 \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2} A_1 Q = l_0 \cos \beta_2$$

получаем

$$k_0 - l_0 \frac{\sin^3 z}{R_2^2 \sin^3 \psi} = R_2 \cos \psi \pm \frac{R_2 \sin \psi \cos z}{\sin z}$$

или

$$(k_0 - R_2 \cos \psi) \sin z \pm R_2 \sin \psi \cos z = \frac{l_0 \sin^4 z}{R_2^2 \sin^3 \psi}$$

Полагая затем

$$k_0 - R_2 \cos \psi = N_1 \cos q$$

$$R_2 \sin \psi = N_1 \sin q$$

$$\frac{l_0}{N_1 R_2^2 \sin^3 \psi} = M$$

получаем знаменитое уравнение Гаусса

$$(36) \quad M \sin^4 z = \sin(z \pm q)$$

Найдя из этого уравнения z , по формуле (34) находим r_2 , затем по формуле (31) получаем ρ_2 , по нему имеем ρ_1 и ρ_3 — по формуле (27).

Имея величины ρ_1, ρ_2, ρ_3 , вычисляем гелиоцентрические координаты по формулам:

$$(37) \quad \begin{aligned} x_i &= r_i \cos \theta_i \cos \lambda_i = \rho_i \cos \alpha_i + R_i \cos L_i \\ y_i &= r_i \cos \theta_i \sin \lambda_i = \rho_i \sin \alpha_i + R_i \sin L_i \quad (i = 1, 2, 3) \\ z_i &= r_i \sin \theta_i = \rho_i \tan \beta_i \end{aligned}$$

Заметим, что эти формулы можно написать и так:

$$(38) \quad \begin{aligned} x_i &= r_i \cos \theta_i \cos(\lambda_i - L_i) = R_i + \rho_i \cos(\alpha_i - L_i) \\ y_i &= r_i \sin \theta_i \sin(\lambda_i - L_i) = \rho_i \sin(\alpha_i - L_i) \quad (i = 1, 2, 3) \\ z_i &= r_i \sin \theta_i = \rho_i \tan \beta_i \end{aligned}$$

Имея гелиоцентрические координаты λ_i и θ_i , находим по формуле (6) третьей беседы наклонность i и долготу узла N , а именно:

$$(39) \quad \text{tg } i = \frac{\text{tg } \theta_1}{\sin(\lambda_1 - N)} = \frac{\text{tg } \theta_2}{\sin(\lambda_2 - N)} = \frac{\text{tg } \theta_3}{\sin(\lambda_3 - N)}$$

и

$$(39) \quad \text{tg} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2} - N \right) = \text{tg} \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2} \frac{\sin(\theta_1 + \theta_3)}{\sin(\theta_1 - \theta_3)}$$

Затем по формулам

$$\text{tg } c_1 = \frac{\text{tg}(\lambda_1 - N)}{\cos i}$$

$$\text{tg } c_2 = \frac{\text{tg}(\lambda_2 - N)}{\cos i}$$

$$\text{tg } c_3 = \frac{\text{tg}(\lambda_3 - N)}{\cos i}$$

находим аргументы широты c_1, c_2, c_3 , после чего имеем:

$$2f_1 = c_2 - c_1; \quad 2f_2 = c_3 - c_2; \quad 2f_3 = c_3 - c_1$$

Зная r_1, r_2, r_3 , могли бы, согласно сказанному в § 2, определить и остальные элементы.

Но Гаусс дает формулы, при помощи которых непосредственно находятся исправленные величины P и Q .

Обозначая через s_1, s_2, s_3 — отношения площадей секторов к соответствующим треугольникам, имеем:

$$s_1 \Delta_{12} = \tau_1 \sqrt{p}; \quad s_2 \Delta_{23} = \tau_2 \sqrt{p}; \quad s_3 \Delta_{13} = \tau_3 \sqrt{p}$$

вычислив затем по нижеприведенным формулам величины $m_1, m_2, m_3, l_1, l_2, l_3$:

$$m_1 = \frac{\tau_1^2}{(2 \sqrt{r_1 r_2 \cos f_1})^3}; \quad m_2 = \frac{\tau_2^2}{(2 \sqrt{r_2 r_3 \cos f_2})^3}; \quad m_3 = \frac{\tau_3^2}{(2 \sqrt{r_1 r_3 \cos f_3})^3}$$

$$l_1 = \frac{r_1 + r_2}{4 \sqrt{r_1 r_2 \cos f_1}} - \frac{1}{2}; \quad l_2 = \frac{r_2 + r_3}{4 \sqrt{r_2 r_3 \cos f_2}} - \frac{1}{2}; \quad l_3 = \frac{r_1 + r_3}{4 \sqrt{r_1 r_3 \cos f_3}} - \frac{1}{2}$$

составляем уравнения:

$$(40) \quad \begin{aligned} s_1^3 - s_1^2 &= m_1 \frac{2g_1 - \sin 2g_1}{\sin^3 g_1} \\ s_1^2 &= \frac{m_1}{l_1 + \sin^2 \frac{1}{2} g_1} \end{aligned}$$

и другие две пары подобных уравнений для s_2 и s_3 и, зная, что приближенные значения s_1, s_2 и s_3 суть:

$$s_1 = 1 + \frac{\tau_1^2}{6r_2^3}; \quad s_2 = 1 + \frac{\tau_2^2}{6r_3^3}; \quad s_3 = 1 + \frac{\tau_3^2}{6r_1^3}$$

находим более точные значения величин s_1, s_2, s_3 , после чего имеем:

$$(41) \quad \begin{aligned} n_3 &= \frac{\tau_1}{\tau_3} \cdot \frac{s_3}{s_1} \quad \text{и} \quad n_1 = \frac{\tau_2}{\tau_3} \cdot \frac{s_3}{s_2} \\ P &= \frac{n_3}{n_1} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \cdot \frac{s_2}{s_1} \end{aligned}$$

Выражение для Q преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} Q &= 2r_2^3 [n_1 + n_3 - 1] = 2r_2^3 \left[\frac{\tau_1}{\tau_3} \frac{s_3}{s_1} + \frac{\tau_2}{\tau_3} \frac{s_3}{s_2} - 1 \right] = \\ &= 2r_2^3 \cdot \frac{\tau_1 \tau_2}{s_1 s_2} \left[\frac{s_2 s_3}{\tau_2 \tau_3} + \frac{s_1 s_3}{\tau_1 \tau_3} - \frac{s_1 s_2}{\tau_1 \tau_2} \right] = \\ &= 2r_2^3 \cdot \frac{\tau_1 \tau_2}{s_1 s_2} p \left[\frac{1}{\Delta_{23} \Delta_{13}} + \frac{1}{\Delta_{12} \Delta_{13}} - \frac{1}{\Delta_{12} \Delta_{23}} \right] = \\ &= 2pr_2^3 \frac{\tau_1 \tau_2}{s_1 s_2} \left[\frac{\Delta_{12} + \Delta_{23} - \Delta_{13}}{\Delta_{12} \Delta_{23} \Delta_{13}} \right] \end{aligned}$$

С другой стороны, имеем уравнения:

$$\frac{p}{r_1} = 1 + e \cos(c_1 - \omega); \quad \frac{p}{r_2} = 1 + e \cos(c_2 - \omega); \quad \frac{p}{r_3} = 1 + e \cos(c_3 - \omega)$$

откуда, в силу тождества

$$\cos A \sin(B - C) + \cos B \sin(C - A) + \cos C \sin(A - B) = 0$$

следует

$$\begin{aligned} \frac{p}{r_1} \sin(c_3 - c_2) - \frac{p}{r_2} \sin(c_3 - c_1) + \frac{p}{r_3} \sin(c_2 - c_1) &= \\ &= \sin(c_3 - c_2) - \sin(c_3 - c_1) + \sin(c_2 - c_1) = \\ &= \sin 2f_3 - \sin 2f_3 + \sin 2f_1 = \sin 2f_1 + \sin 2f_2 - \sin 2(f_1 + f_2) = \\ &= 2 \sin(f_1 + f_2) [\cos(f_2 - f_1) - \cos(f_2 + f_1)] = 4 \sin f_1 \cdot \sin f_2 \cdot \sin f_3 \end{aligned}$$

следовательно

$$\begin{aligned} p &= \frac{4r_1 r_2 r_3 \sin f_1 \sin f_2 \sin f_3}{r_1 r_2 \sin(c_3 - c_1) - r_1 r_3 \sin(c_3 - c_1) + r_2 r_3 \sin(c_3 - c_2)} = \\ &= \frac{\Delta_{12} \Delta_{23} \Delta_{13}}{2(\Delta_{12} - \Delta_{13} + \Delta_{23}) r_1 r_2 r_3 \cos f_1 \cos f_2 \cos f_3} \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$(42) \quad Q = \frac{\tau_1 \tau_2 r_2^2}{s_1 s_2 r_1 r_3} \cdot \frac{1}{\cos f_1 \cos f_3 \cos f_2}$$

вместе с тем мы уже имели

$$(41) \quad P = \frac{\tau_1}{\tau_2} \frac{s_2}{s_1}$$

причем s_1 и s_2 определяются уравнением (40).

По этим значениям P и Q проделывают второе приближение, которое и бывает обыкновенно окончательным.

§ 6. Гаусс не ограничивается, как сделано в этом кратком очерке его методы, составлением необходимых уравнений и указанием их решения, он прилагает особенную заботу к тому, чтобы придать формулам не только удобнейший для вычислений вид, но и такой, чтобы формула давала вычисляемую величину с надлежащую точностью, чтобы везде был контроль, и в этом он достигает такого совершенства и изящества, образчиками которого служит вывод величины Q [форм. (42)] или знаменитого уравнения (36).

В начале третьего отдела «Theoria Motus» (§ 78) Гаусс дает некоторые общие указания для подобного рода преобразований, а именно:

1) Тождества:

$$\sin A \sin(C - B) + \sin B \sin(A - C) + \sin C \sin(B - A) = 0$$

$$\cos A \sin(C - B) + \cos B \sin(A - C) + \cos C \sin(B - A) = 0$$

Этими двумя тождествами приходится пользоваться при решении уравнений и исключении неизвестных.

2) Если величины p и P определяются уравнениями

$$\begin{aligned} p \sin(A - P) &= a \\ p \sin(B - P) &= b \end{aligned}$$

то Гаусс обращает внимание, что во всякой формуле, содержащей различные углы, считаемые от какого-либо общего начала, можно это начало переносить на какой угодно угол, поэтому предыдущие формулы можно писать так:

$$\begin{aligned} p \sin[(A - H) - (P - H)] &= a \\ p \sin[(B - H) - (P - H)] &= b \end{aligned}$$

и тогда из них следуют такие:

$$\begin{aligned} p \sin(B - A) \sin(P - H) &= b \sin(A - H) - a \sin(B - H) \\ p \sin(B - A) \cos(P - H) &= b \cos(A - H) - a \cos(B - H) \end{aligned}$$

где H — какой угодно угол, по этим формулам и находятся p и P , причем для простоты вычисления выгодно брать или $H = A$, или $H = B$, или $H = \frac{1}{2}(A + B)$; для всех этих случаев Гаусс приводит и окончательные удобнейшие для логарифмического вычисления формулы.

3) Совершенно так же, для нахождения p и P , определяемых уравнениями

$$\begin{aligned} p \cos(A - P) &= a \\ p \cos(B - P) &= b \end{aligned}$$

Гаусс рекомендует формулы:

$$\begin{aligned} p \sin(B - A) \sin(H - P) &= -b \cos(H - A) + a \cos(H - B) \\ p \sin(B - A) \cos(H - P) &= b \sin(H - A) - a \sin(H - B) \end{aligned}$$

причем опять-таки удобно брать или $H = A$, или $H = B$, или $H = \frac{1}{2}(A + B)$.

§ 7. Не входя в подробности этих преобразований и не приводя формул к удобнейшему для вычислений по логарифмам виду, сведем их в той последовательности, как ими пришлось бы пользоваться.

а) Непосредственные наблюдения доставляют обыкновенно склонение и прямое восхождение планеты.

По известным формулам сферической астрономии вычисляют широты и долготы планеты в моменты наблюдений, относя их к положению точки весеннего равноденствия, соответствующему началу года.

Таким образом данными служат:

- 1) Моменты наблюдений: t_1, t_2, t_3 ;
- 2) Долготы планеты: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$;
- 3) Широты планеты: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$;
- 4) Долготы Земли: L_1, L_2, L_3 ;
- 5) Радиусы-векторы Земли: R_1, R_2, R_3 ;
- 6) Промежутки: $\tau_1 = K(t_2 - t_1)$; $\tau_2 = K(t_3 - t_2)$; $\tau_3 = K(t_3 - t_1)$
- б) Для исходного приближения берут

$$(30) \quad P = \frac{\tau_3}{\tau_1} \quad \text{и} \quad Q = \tau_1 \tau_2$$

и вычисляют величины N, a_2, b_2, c_2 по формулам:

$$(28) \quad \begin{aligned} Na_2 &= [\operatorname{tg} \beta_3 \sin(\alpha_1 - L_2) - \operatorname{tg} \beta_1 \sin(\alpha_3 - L_2)] R_2 \\ Nb_2 &= [\operatorname{tg} \beta_1 \sin(\alpha_3 - L_1) - \operatorname{tg} \beta_3 \sin(\alpha_1 - L_1)] R_1 \\ Nc_2 &= [\operatorname{tg} \beta_1 \sin(\alpha_3 - L_3) - \operatorname{tg} \beta_3 \sin(\alpha_1 - L_3)] R_3 \\ N &= \operatorname{tg} \beta_1 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) - \operatorname{tg} \beta_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) + \operatorname{tg} \beta_3 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned}$$

Затем вычисляют величины $\psi, A_1, k_0, l_0, N_1, M, q$ по формулам:

$$(35) \quad \begin{aligned} \cos \psi &= -\cos \beta_2 \cdot \cos(\alpha_2 - L_2) \\ A_1 &= \frac{b_2 + c_2 P}{1 + P}; \quad A_1 + a_2 = k_0 \cos \beta_2 \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2} A_1 Q = l_0 \cos \beta_2 \\ k_0 - R_2 \cos \psi &= N_1 \cos q; \quad R_2 \sin \psi = N_1 \sin q \\ \frac{l_0}{N_1 R_2^3 \sin^3 \psi} &= M \end{aligned}$$

в) Составляют уравнение

$$(36) \quad M \sin^4 z = \sin(z \pm q)$$

которое и решают методом последовательных приближений.

Из корней уравнения z надо взять тот, где $z < 180^\circ - \psi$ и не более 180° , ибо в треугольнике всякий угол меньше внешнего угла, с ним не смежного, и меньше 180° .

г) Найдя z , по формуле

$$(34) \quad r_2 = R_2 \frac{\sin \psi}{\sin z}$$

вычисляют r_2 , затем ρ_2 — по формуле

$$(31) \quad \rho_2 = a_2 + A_1 + \frac{1}{2} \frac{A_1 Q}{r_2^3}$$

и

$$(30) \quad n_1 = \left(1 + \frac{Q}{2r_2^3} \right) : (1 + P) \quad \text{и} \quad n_3 = n_1 P$$

после чего находятся ρ_1 и ρ_3 по формулам:

$$(27) \quad \begin{aligned} n_1 \rho_1 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) &= \rho_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) - n_1 R_1 \sin(\alpha_3 - L_1) \\ &\quad + R_2 \sin(\alpha_3 - L_2) - n_3 R_3 \sin(\alpha_3 - L_3) \\ n_3 \rho_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) &= \rho_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + n_1 R_1 \sin(\alpha_1 - L_1) \\ &\quad - R_2 \sin(\alpha_1 - L_2) + n_3 R_3 \sin(\alpha_1 - L_3) \end{aligned}$$

д) Определив ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , находят гелиоцентрические координаты по формулам:

$$(37) \quad \begin{aligned} x_i &= r_i \cos \theta_i \cos \lambda_i = \rho_i \cos \alpha_i + R_i \cos L_i \\ y_i &= r_i \cos \theta_i \sin \lambda_i = \rho_i \sin \alpha_i + R_i \sin L_i \\ z_i &= r_i \sin \theta_i = \rho_i \operatorname{tg} \beta_i \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

и по ним наклонность i и долготу узла N по формулам:

$$(39) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} i &= \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\sin(\lambda_1 - N)} = \frac{\operatorname{tg} \theta_2}{\sin(\lambda_2 - N)} = \frac{\operatorname{tg} \theta_3}{\sin(\lambda_3 - N)} \\ \operatorname{tg} \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2} - N \right) &= \operatorname{tg} \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2} \cdot \frac{\sin(\theta_1 + \theta_3)}{\sin(\theta_1 - \theta_3)} \end{aligned}$$

и аргументы широты c_1 , c_2 , c_3 по формулам:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} c_1 &= \operatorname{tg}(\lambda_1 - N) \cdot \sec i \\ \operatorname{tg} c_2 &= \operatorname{tg}(\lambda_2 - N) \cdot \sec i \\ \operatorname{tg} c_3 &= \operatorname{tg}(\lambda_3 - N) \cdot \sec i \end{aligned}$$

а значит, и углы между радиусами-векторами:

$$2f_1 = c_2 - c_1; \quad 2f_2 = c_3 - c_2; \quad 2f_3 = c_3 - c_1$$

е) По найденным расстояниям $\rho_1 \sec \beta_1$, $\rho_2 \sec \beta_2$, $\rho_3 \sec \beta_3$ исправляют моменты наблюдений временем прохождения света и исчисляют исправленные промежутки между наблюдениями (см. § 8).

ж) Вычислив величины $m_1, m_2, m_3, l_1, l_2, l_3$ по формулам

$$m_1 = \frac{\tau_1^2}{(2\sqrt{r_1 r_2} \cos f_1)^3}; \quad m_2 = \frac{\tau_2^2}{(2\sqrt{r_2 r_3} \cos f_2)^3}; \quad m_3 = \frac{\tau_3^2}{(2\sqrt{r_1 r_3} \cos f_3)^3}$$

$$l_1 = \frac{r_1 + r_2}{4\sqrt{r_1 r_2} \cos f_1} - \frac{1}{2}; \quad l_2 = \frac{r_2 + r_3}{4\sqrt{r_2 r_3} \cos f_2} - \frac{1}{2}; \quad l_3 = \frac{r_1 + r_3}{4\sqrt{r_1 r_3} \cos f_3} - \frac{1}{2}$$

составляют уравнения:

$$(40) \quad s_i^3 - s_i^2 = m_i \frac{2g_i - \sin 2g_i}{\sin^3 g_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$s_i^2 = \frac{m_i}{l_i + \sin^2 \frac{1}{2} g_i},$$

определяют s_1, s_2, s_3 и по ним:

$$(41) \quad n_3 = \frac{\tau_1 s_3}{\tau_3 s_1}; \quad n_1 = \frac{\tau_2 s_3}{\tau_3 s_2}$$

$$P = \frac{n_3}{n_1} = \frac{\tau_1 s_2}{\tau_2 s_1}$$

$$Q = \frac{\tau_1 \tau_2 r_2^2}{s_1 s_2 r_1 r_3} \cdot \frac{1}{\cos f_1 \cos f_2 \cos f_3}$$

з) С этими исправленными значениями P и Q производят вышеописанное вычисление вторично, а если получится чувствительная разница, то и в третий раз.

и) Получив окончательные величины

$$r_1, r_2, r_3, f_1, f_2, f_3; \quad s_1, s_2, s_3, g_1, g_2, g_3; \quad i, N$$

берут два крайних места, 1-е и 3-е, и находят элементы орбит по формулам:

$$(17) \quad a = \frac{\tau^2}{4} \cdot \frac{1}{r_1 r_3 \cdot s^2 \cdot \cos^2 f_3 \cdot \sin^2 g_3}$$

$$(14) \quad p = a \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{r_1 r_3} \frac{\sin f_3}{\sin g_3}$$

$$(15) \quad ae \cos G = a \cos g_3 - \sqrt{r_1 r_3} \cos f_3$$

$$\frac{u_3 - u_1}{2} = g_3; \quad \frac{u_3 + u_1}{2} = G$$

$$(5) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_3 = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_3; \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1 = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_1$$

$$(6) \quad K \cdot a^{-\frac{3}{2}} (t_1 - t_0) = u_1 - e \sin u_1$$

$$K \cdot a^{-\frac{3}{2}} (t_3 - t_0) = u_3 - e \sin u_3$$

$$(*) \quad \omega = u_1 - v_1 = u_3 - v_3$$

Повторяю еще раз, что здесь показана лишь последовательность хода вычисления, которое на практике производится по уравнениям, равносильным написанным, но предварительно преобразованным к удобнейшему виду, но даже в этом окончательном виде полное вычисление планетной орбиты занимает в книге Tisserand — «Détermination des orbites», где оно для примера приведено со всею подробностью, 16 страниц in-4° в два и в три столбца, требуя около 1200 шести- и семизначных логарифмов.

§ 8. Мы не указывали при беглом нашем изложении, каким образом принимать во внимание поправки на aberrацию и параллакс, если орбита вычисляется с большою точностью.

Чтобы принять во внимание aberrацию, применяется такой прием: при первом приближении этой поправки не делают, а после того как получены приближенные расстояния светила до Земли, вычитают из моментов наблюдений то время, которое требуется свету, чтобы достигнуть от светила до глаза, зная, что расстояние от Земли до Солнца, принимаемое за 1, проходит в 497 секунд; таким образом моменты наблюдений приводятся как бы к тем, когда луч, достигший глаза, покинул светило.

Чтобы принять во внимание параллакс, воображают, что луч, на котором светило усматривалось, продолжен до встречи с плоскостью эклиптики. Эту точку и берут вместо места Земли, вводя соответствующую поправку в величины R и L . Выражений этих поправок выводить не будем, они получаются по самым элементарным формулам аналитической геометрии и астрономии.

§ 9. В заключение этих бесед считаю необходимым привести ту оценку, которую сам Гаусс дает своей методе. В § 119 он говорит, что из шести соотношений, связывающих данные и искомые величины, можно исключить четыре из этих искомых, так что останется две неизвестные x и y и два уравнения между ними:

$$X(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad Y(x, y) = 0$$

при этом нет надобности, чтобы x и y были непременно двумя элементами орбиты, достаточно, чтобы они были с ними связаны такими соотношениями, по которым, когда x и y будут найдены, элементы легко бы вычислялись.

Затем в §§ 124—129 Гаусс перечисляет и характеризует десять различных комбинаций выбора величин x и y , и в § 130 говорит:

«Чтобы считать, что поставленная задача решена правильно, надо, чтобы выбор величин x и y удовлетворял следующим условиям: во-первых, величины x и y должны быть выбирены так, чтобы для них можно

было указать приближенные значения по самой сущности задачи во всех случаях, когда гелиоцентрическое движение светила не слишком велико, во-вторых, необходимо, чтобы малые изменения величин x и y не вызывали соответствующих им больших изменений в величинах, по ним получаемых, ибо иначе погрешности, случайно допущенные в первых, не позволяют рассматривать вторых даже как приближения. В третьих, желательно, чтобы процесс, по которому по значениям x и y вычисляются значения $X(x, y)$ и $Y(x, y)$, не был бы слишком сложным.

«Эти условия доставят критериум совершенства методы, оно выясняется более полно при более частом ее применении: способ, который будет изложен и который составляет самую важную часть этого труда, удовлетворяет этим условиям в такой мере, что, кажется, не остается желать ничего лучшего».

§ 10. Само собою разумеется, что в своих беседах я старался дать лишь очерк каждой методы, характеризуя ее самыми существенными и главными ее чертами. Предмет этот в высшей степени обширен и может доставить неисчерпаемый источник как для изучения, так и для самостоятельных изысканий и размышлений. Попробуйте, напр., хорошоенько изучить §§ 124—129 «Theoria Motus» и уяснить, почему именно каждая из охарактеризованных метод хуже той, на которой Гаусс окончательно остановился, или, напр., попробуйте рассмотреть такой вопрос: если имеется не *три*, а *четыре* наблюдения, то получится *два* лишних уравнения; ими можно распорядиться так, чтобы проще решать остальные, напр. в выражении отношений площадей треугольников $\Delta_{12} : \Delta_{23} : \Delta_{34}$ можно в первом приближении взять отношение $\tau_1 : \tau_2 : \tau_3$, в особенности когда эти промежутки близки к равенству, а таких отношений, как $\Delta_{12} : \Delta_{13}$ или $\Delta_{12} : \Delta_{24}$, т. е. где площади соответствуют неравным промежуткам, в вычисление не вводить, тогда уравнение для определения окончательной неизвестной может быть приведено к кубическому, а не к уравнению восьмой степени и т. д.

Цель этих бесед достигнута, если я сумел возбудить в вас, перед тем как вы покинете нашу Академию, интерес к тому отделу, который не входит в ваш обязательный курс, но который, по словам Гаусса, «составляет, без сомнения, плодотворнейшую и прекраснейшую часть Теоретической астрономии».

НЬЮТОНОВА ТЕОРИЯ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ РЕФРАКЦИИ¹

В 1832 г., на чердаке одного дома в Лондоне, была обнаружена коробка, содержавшая разного рода рукописи и старые письма.

По ближайшем рассмотрении оказалось, что в числе этих бумаг имеется 27 писем Ньютона к Флемстиду, автобиография Флемстида, составленный им каталог неподвижных звезд, обширная переписка со многими современными ему учеными, а также с его неизменным и единственным в продолжении 30 лет помощником по Гриничской обсерватории Абраамом Шарпом (Abraam Scharp), который за 100 лет перед тем в этом доме проживал.

Эти бумаги были доставлены вице-президенту Лондонского астрономического общества Фр. Балли, им приведены в порядок, звездный каталог перевычислен и исправлен, и все представлено Королевскому обществу (Лондонская Академия Наук), по постановлению которого все это в 1835 г. было издано в виде громадного тома $in-4^{\circ}$ в 700 страниц, на средства, отпущенные Адмиралтейством.

Книга эта носит название «*An account of the Rev-d John Flamsteed, the first Astronomer Royal, compiled from his own manuscripts and other authentic documents never before published, to which is added his catalogue of stars corrected and enlarged by Francis Baily Esq.*» (London, 1835, LXXIII + 672 pp. $in-4^{\circ}$); в продажу она не поступала, а была разослана обсерваториям, научным учреждениям и известным астрономам того времени, так что теперь эта книга довольно редкая (я случайно ее купил за $2\frac{1}{2}$ шиллинга на барахолке в Лондоне).

Появление этой книги обратило на себя внимание ученых, как о том можно судить по обстоятельной о ней рецензии астронома Био в «*Journal des Savants*» за 1836 г.

¹ Сообщение, прочитанное в Институте истории науки и техники 16 октября 1934 г.

Письма Ньютона по большей части относятся к теории движения планет, спутников Юпитера, теории Луны и в связи с нею к теории астрономической рефракции, ибо Ньютон, не полагаясь на бывшие тогда в обиходе таблицы рефракции Cassini и La Hire'a, составил свои таблицы, которыми, как более точными, и советовал Флемстиду пользоваться, но их не разглашать.

Лишь в 1721 г., с согласия Ньютона, была опубликована в «Philosophical Transactions» Галлеем, ставшим в 1719 г., после смерти Флемстида, королевским астрономом, одна из составленных Ньютоном таблиц рефракции, но без каких-либо указаний на способ ее составления.

В этой статье я излагаю Ньютонову теорию астрономической рефракции на основании тех кратких указаний, которые находятся в книге Бальи; я пользуюсь при этом современными обозначениями высшего анализа, но не выхожу за пределы того, чем в то время Ньютон владел, чтобы, сохраняя сущность и метод его рассуждений, представить их в привычной теперешнему читателю форме.

§ 1. Ньютонова теория астрономической рефракции мало известна. О ней не только в руководствах по астрономии, но даже и в специальной литературе или упоминается как бы мимоходом, или же дается неправильное представление, так что сущность работы Ньютона до сих пор остается неиспользованной; между тем правильное и полное развитие его теории может внести простоту и ясность в изложение теории астрономической рефракции вообще, которое, если доводить его до конца, т. е. до действительного вычисления таблиц, при обычном теперь изложении представляет для учащихся не малые затруднения.

Вместе с тем, в своей теории Ньютон встретил дифференциальное уравнение, которое и проинтегрировал *численно*, и таким образом составил свою таблицу, — это был первый пример такого интегрирования, которое за последние 20—25 лет получило столь широкое распространение в приложениях математики к разного рода практическим вопросам, в особенности техническим.

При письме от 17 ноября 1694 г. Ньютон послал Флемстиду таблицу астрономической рефракции, «вычисленную при помощи некоторой теоремы», которой, однако, в этом письме Ньютон не приводит.

В письме от 4 декабря 1694 г. Ньютон просит Флемстида не оглашать посланную ему таблицу, обещая прислать другую, вычисленную на основании более точных предположений; затем, 20 декабря 1694 г., он пишет Флемстиду следующее письмо:

«Кембридж, декабря 20, 1694 г.

«Сэр!

«Я не держал в секрете основания, послужившего для составления таблицы рефракции, но опустил его вследствие поспешности, с которой я писал мое последнее письмо. Согласно вашему желанию, я изложу его теперь.

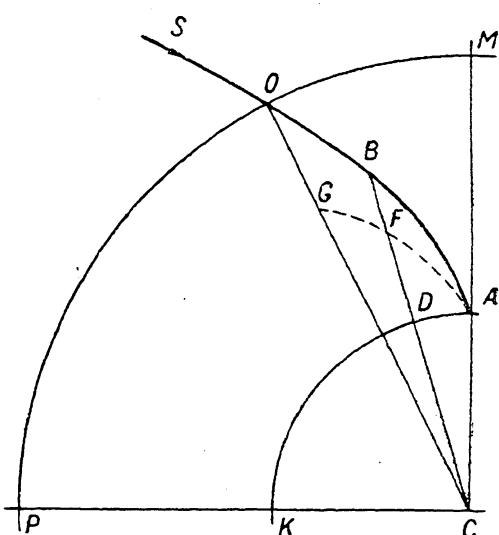
«Пусть (фиг. 1) AK представляет земной шар; предположим, что этот шар покрыт атмосферой, плотность которой убывает равномерно от поверхности Земли до верхней границы атмосферы, представляемой здесь кругом MOP . Пусть луч SO падает на границу атмосферы в точке O и, при прохождении через атмосферу до наблюдателя A непрерывно преломляясь, изгибается в кривую OBA .

«От произвольной точки B этой кривой проводится прямая BC к центру Земли, пересекающая поверхность Земли в точке D . Берем между CB и CD среднюю пропорциональную CF , и пусть AFG есть геометрическое место точек F , т. е. та кривая, на которой постоянно находится точка F ; если эта кривая AFG пересекает прямую OC в точке G , то полная рефракция луча, проходящего от O до A , пропорциональна площади $AFGC$, рефракция же при прохождении частей OB или BA сказанной кривой пропорциональна площадям $GFCG$ и $FACF$.

«Эта теорема может быть доказана геометрически, но доказательство слишком сложно для изложения в письме.

«Так как таблица рефракций, вычисленная мною на основании этой теоремы, согласуется с вашими наблюдениями¹ гораздо лучше, нежели обычные таблицы, то я полагаю, что вы признаете, что эта теорема представляет лучшее основание, нежели обычное предположение об однократном преломлении на границе атмосферы».

Заметим здесь же, что кривая OBA неизвестна и длины BC и CD , между которыми надо брать среднюю пропорциональную CF , также неизвестны. Ньютон же никаких указаний о построении кривой OBA не дает, и так как Флемстид не настолько владел «прямым и обратным методом флюксий», чтобы самому уравнение этой кривой вывести, то едва ли из теоремы Ньютона он уяснил себе способ составления таблицы рефракции.



Фиг. 1.

¹ Флемстид сообщил Ньютону сводку своих наблюдений при письме от 11 октября 1694 г., выдержка из которого приводится ниже в § 6.

В письме от 15 января 1695 г. Ньютон между прочим пишет:

«... Теорема о рефракции, посланная вам, обладает тем недостатком, что преломляющая сила атмосферы предполагается вверху атмосферы столь же большою, как и внизу. Это заставило меня подумать о новой теореме, мне кажется, что я таковую нашел, и я хочу рассмотреть ее в дальнейшем. Площади в теореме, вам посланной, исчислены по лемме V третьей книги «Principia Mathematica», но это вычисление весьма сложно».

16 февраля 1695 г. Ньютон пишет:

«... Я все еще работаю над новой таблицей рефракции, но еще не закончил ее. Это — очень сложная и требующая большого труда работа, но кое что мною уже сделано, ибо, предполагая, что строение атмосферы такое, как указано в предложении XXII второй книги «Principia» (которое, несомненно, и есть истинное), я нашел, что если горизонтальная рефракция есть $34'$, то рефракция при видимой высоте 3° составит $13'3''$; если же рефракцию при видимой высоте 3° принять равной $14'$, то горизонтальная рефракция составит немногим более 37 минут».

Наконец, в письме от 15 марта 1695 г. Ньютон сообщает Флемстиду: «Я закончил таблицу рефракции и посыпаю вам прилагаемую копию ее».

Этой копии в собрании писем и бумаг, которыми пользовался Бальи, не оказалось, но ниже мы по сопоставлению некоторых чисел покажем, что это и есть таблица, опубликованная в 1721 г. Галлеем.

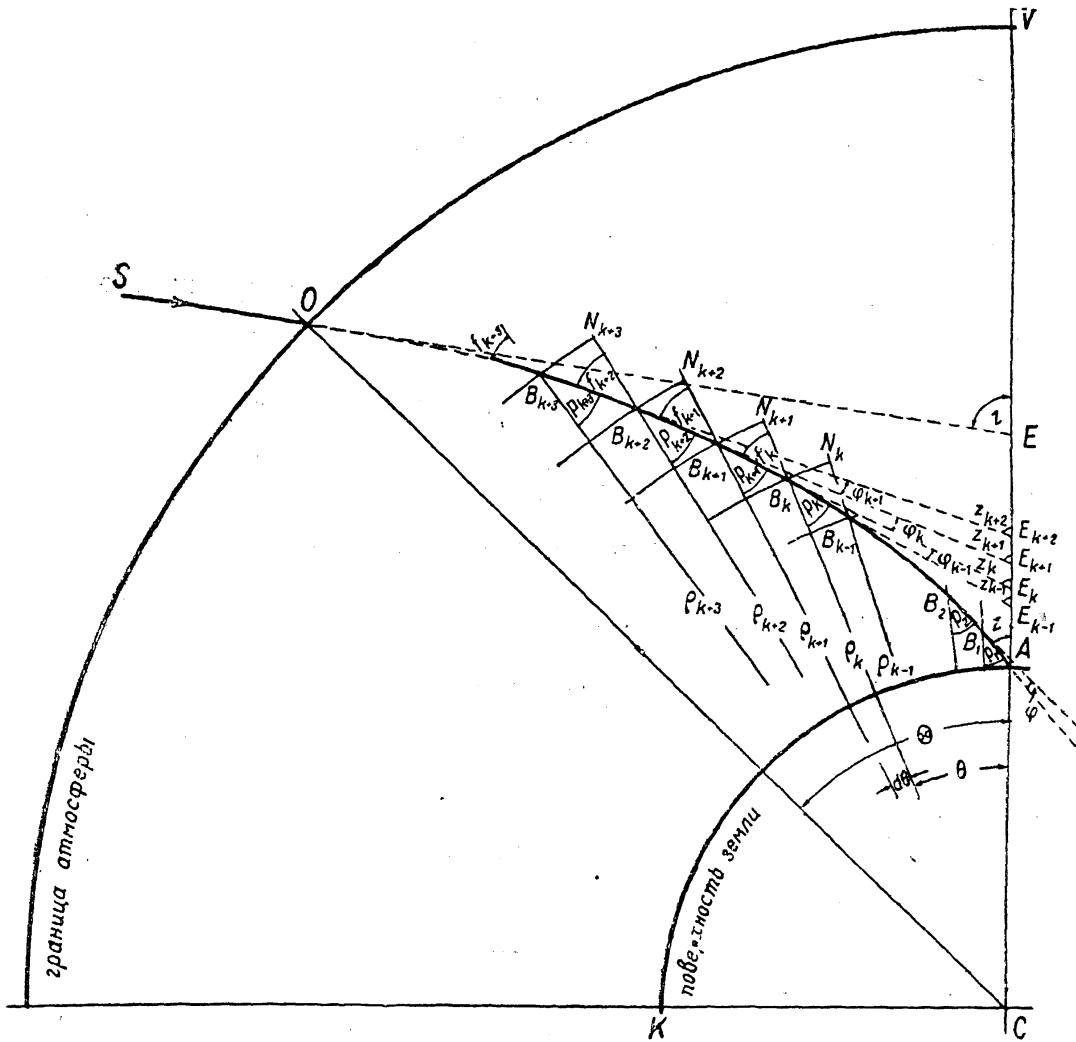
Ниже будут приведены выдержки из других писем Ньютона, относящиеся, главным образом, к этой второй таблице, а теперь перейдем к подробному рассмотрению его теоремы и способа составления первой его таблицы.

§ 2. Докажем, прежде всего, теорему Ньютона.

Пусть $O \dots B_{k+2} B_{k+1} B_k B_{k-1} \dots B_1 A$ есть искривленный преломлением в атмосфере луч, попадающий в глаз наблюдателя в точке A , тогда угол $VAB_1 = z$ есть видимое зенитное расстояние, угол же $VEO = Z$ есть истинное зенитное расстояние, разность этих углов Ω и есть рефракция (Фиг. 2).

Разделим угол $\Theta = VCO$ на n равных частей и положим, что число n неопределенно возрастает; тогда каждую из этих частей мы обозначим через $d\theta$, примем θ за переменную независимую и найдем уравнение криволинейного луча и выражение рефракции.

Очевидно, что если бы луч исходил из точки A по направлению AB_1 , то он вышел бы из атмосферы в точке O по направлению OS на светило. Для удобства выкладок будем предполагать такой обращенный ход луча.



Фиг. 2.

Делая указанные на чертеже (фиг. 2) обозначения, имеем для трех последовательных слоев атмосферы:

Радиусы:

$$CB_{k+1} = \rho_{k+1} = \rho + \frac{d\rho}{d\theta} \cdot d\theta = \rho + \dot{\rho} d\theta$$

$$CB_k = \rho_k = \rho$$

$$CB_{k-1} = \rho_{k-1} = \rho - \frac{d\rho}{d\theta} d\theta = \rho - \dot{\rho} d\theta$$

Показатели преломления:

слой между ρ_{k-1} и ρ_k $\mu_{k-1} = \mu - \frac{d\mu}{d\theta} d\theta = \mu - \dot{\mu} d\theta$

$$\gg \quad \gg \quad \rho_k \text{ и } \rho_{k+1} \cdots \cdots \mu_k = \mu$$

По чертежу видно, что имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} z_1 &= z + \varphi_0 \\ z_2 &= z_1 + \varphi_1 \\ &\dots \\ z_k &= z_{k-1} + \varphi_{k-1} \\ &\dots \\ Z &= z_{n-1} + \varphi_{n-1} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что полный угол рефракции, т. е. при прохождении всей толщи атмосферы от O до A , есть

$$Z - z = \Omega = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_k + \dots + \varphi_{n-1}$$

угол же отклонения луча при прохождении от B_k до A есть

$$\omega_k = z_k - z = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{k-1}$$

Отсюда, а также из чертежа, следует, что

$$\omega_{k+1} - \omega_k = \varphi_k$$

т. е.

$$d\omega_k = \dot{\omega}_k d\theta = \varphi_k$$

или, опуская значок k ,

$$d\omega = \dot{\omega} d\theta = \varphi \quad (1)$$

С другой стороны,

$$\varphi_k = f_{k+1} - p_{k+1}$$

но по закону преломления:

$$\sin p_{k+1} = \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} \sin f_{k+1}$$

т. е.

$$\sin(f_{k+1} - \varphi_k) = \frac{\mu_k + \dot{\mu}_k d\theta}{\mu_k} \sin f_{k+1}$$

но

$$\sin(f_{k+1} - \varphi_k) = \sin f_{k+1} - \varphi_k \cos f_{k+1}$$

следовательно будет

$$\varphi_k = -\frac{\dot{\mu}_k}{\mu_k} \operatorname{tg} f_{k+1} d\theta = -\frac{\dot{\mu}_k}{\mu_k} \operatorname{tg} f_k \cdot d\theta$$

ибо разность $f_{k+1} - f_k$ — бесконечно малая.

Опуская значок k , имеем на основании формулы (1):

$$\dot{\omega} = -\frac{\dot{\mu}}{\mu} \operatorname{tg} f \quad (2)$$

Из элементарного треугольника $B_{k+1}B_kN_{k+1}$ следует

$$\operatorname{tg} f_k = \frac{\rho_{k+1} d\theta}{d\rho_k} = \frac{\rho_k d\theta}{d\rho_k} = \frac{\rho_k}{\rho_k}$$

значит вообще будет

$$\operatorname{tg} f = \frac{\rho}{\dot{\rho}} \quad (2')$$

Отсюда, на основании (2), имеем

$$\dot{\omega} = - \frac{\dot{\mu}}{\mu} \cdot \frac{\dot{\rho}}{\dot{\rho}} \quad (3)$$

или, при теперешнем обозначении,

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{d\mu}{d\rho} \cdot \frac{\rho}{\mu} \quad (3')$$

Следовательно, общее выражение рефракции, при какой угодно зависимости показателя преломления μ от расстояния ρ до центра Земли, есть

$$\Omega = - \int_0^{\Theta} \frac{\rho}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\rho} \cdot d\theta \quad (3'')$$

Ньютона для первой своей таблицы предположил, что плотность атмосферы, а значит, и показатель преломления μ , убывает равномерно от поверхности Земли, соответствующей значению $\rho = \alpha$, до границы атмосферы, соответствующей значению $\rho = R$. Обозначив показатель преломления у поверхности Земли через μ_0 и заметив, что на границе атмосферы он равен 1, получим

$$\mu = \mu_0 - \frac{\mu_0 - 1}{R - \alpha} (\rho - \alpha) \quad (4)$$

Разность $\mu_0 - 1 = \epsilon$ есть величина весьма малая, приблизительно равная $\frac{1}{3800}$, что Ньютону уже было известно. Заменив в формуле (4) μ_0 через $1 + \epsilon$, получим:

$$\mu = 1 + \epsilon \frac{R - \rho}{R - \alpha} \quad (4')$$

$$\dot{\mu} = - \frac{\epsilon}{R - \alpha} \cdot \dot{\rho}$$

Следовательно, с точностью до величин второго порядка относительно ϵ , иначе с относительной погрешностью меньшей $\frac{1}{3800}$, в нашем вопросе вполне пренебрежимой, можно писать

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = - \frac{\epsilon}{R - \alpha} \cdot \frac{1}{\dot{\rho}} \quad (5)$$

на основании уравнения (3) получим

$$\omega = \frac{\epsilon}{R - \alpha} \cdot \rho \quad (6)$$

откуда следует

$$\Omega = \frac{\epsilon}{R - \alpha} \int_0^\theta \rho d\theta \quad (7)$$

Это и есть формула Ньютона, указанная в его письме к Флемстиду.

В самом деле, Ньютон не пользовался знаком интеграла, а заменил его определением площади кривой, для которой он давал уравнение или указывал построение. Так, в данном случае, обозначая на фиг. 1 радиус-вектор BC через r , имеем

$$r^2 = \alpha \rho$$

площадь же $AGCA$ будет

$$AGCA = \frac{1}{2} \int_0^\theta r^2 d\theta = \frac{1}{2} \alpha \int_0^\theta \rho d\theta \quad (8)$$

отсюда, на основании (7), следует

$$\Omega = \frac{2\epsilon}{\alpha(R - \alpha)} \cdot AGCA \quad (9)$$

как это и сказано у Ньютона, с тою лишь разницею, что он, по обычаю того времени, не дает выражения коэффициента пропорциональности, а лишь указывает таковую.

Очевидно, что для рефракции ω на части AB будет

$$\omega = \frac{2\epsilon}{\alpha(R - \alpha)} \cdot ABC \quad (10)$$

§ 3. В формулу Ньютона входит неизвестная функция ρ , которую надо выразить через θ , чтобы иметь возможность вычислять интегралы или площади. Кроме того, входит еще множитель

$$\frac{2\epsilon}{\alpha(R - \alpha)} \quad (11)$$

заключающий постоянные ϵ и R , которые также нужно определить на основании наблюденных значений рефракции.

Относительно этих вычислений никаких указаний, кроме сказанного в письмах 15 января и 16 февраля 1695 г., не дано.

Лемма V третьей книги «Principia» гласит: «Найти параболическую кривую, проходящую через какое-либо заданное число точек». Здесь приво-

дятся Ньютоном его формулы интерполяции для ординат как равноотстоящих, так и распределенных как угодно. Затем, в следствии к этой лемме, сказано: «На основании этого можно находить по приближению площади любых кривых, ибо если взять на той кривой, площадь которой ищется, какое-либо число точек и вообразить, что через них проведена парабола, то площадь этой параболы будет приблизительно равна искомой площади кривой. Площадь же всякой параболы всегда может быть найдена по известным геометрическим способам».

Ясно, что в этих словах заключается сущность вывода всех формул приближенных квадратур, и из этих слов видно, что Ньютон владел теми из этих способов, которые следуют из формул интерполяции и постоянно применяются в астрономии под названием «механических квадратур».

Но в нашем вопросе ищется не площадь заданной кривой, но и сама эта кривая неизвестна, и ее надо предварительно определить или построить.

Мы имеем соотношение

$$\mu_k \sin p_{k+1} = \mu_{k+1} \sin f_{k+1}$$

но из треугольника $B_{k+1}CB_k$ следует

$$\rho_k \sin f_k = \rho_{k+1} \sin p_{k+1}$$

Перемножив эти равенства, получаем

$$\mu_{k+1} \rho_{k+1} \sin f_{k+1} = \mu_k \rho_k \sin f_k$$

Совершенно так же будет

$$\mu_k \rho_k \sin f_k = \mu_{k-1} \rho_{k-1} \sin f_{k-1}$$

и т. д., что показывает, что произведение $\mu_k \rho_k \sin f_k$ есть величина постоянная, так что, опуская значок k , имеем

$$\mu \rho \sin f = c_1 = \mu_0 \sin z \quad (12)$$

Но из уравнения (2') имеем

$$\sin f = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}}$$

подставляя в уравнение (12), получаем следующее дифференциальное уравнение криволинейного луча:

$$\mu \rho^2 = c_1 \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}$$

или, решая относительно $\dot{\rho}$,

$$\dot{\rho} = \frac{1}{c_1} \rho \sqrt{\mu^2 \rho^2 - c_1^2} \quad (13)$$

в котором μ предполагается какою угодно заданной функцией от ρ и постоянная c_1 есть

$$c_1 = \mu_0 \alpha \sin z \quad (12')$$

Таким образом, придерживаясь Ньютона обозначения производной, мы имеем следующие три основных уравнения, заключающие в себе общую теорию астрономической рефракции:

$$\dot{\omega} = - \frac{\dot{\mu}}{\mu} \cdot \frac{\dot{\rho}}{\rho} \quad (3)$$

$$\dot{\rho} = \frac{1}{c_1} \rho \sqrt{\mu^2 \rho^2 - c_1^2} \quad (13)$$

$$c_1 = \mu_0 \alpha \sin z \quad (12')$$

причем за переменную независимую принят угол θ . При обычных теперь обозначениях, из формулы (13) получается

$$d\theta = \frac{c_1 d\rho}{\rho \sqrt{\mu^2 \rho^2 - c_1^2}}$$

Подставив это выражение в формулу (3'), мы получим для полной рефракции выражение

$$\Omega = - c_1 \int_{\alpha}^{R} \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{\sqrt{\mu^2 \rho^2 - c_1^2}} \quad (14)$$

имеющее место при любой зависимости показателя преломления μ от расстояния слоя ρ до центра Земли.

Таким образом все дело свелось к выбору или установлению зависимости μ от ρ и к вычислению интеграла (14) или, по терминологии Ньютона, квадратуры.

По отношению к показателю преломления μ Ньютон, как это следует из вышеприведенных его писем, сделал такие предположения:

а) для *первой* таблицы

$$\mu = 1 + \epsilon \frac{R - \rho}{R + \alpha} \quad (4')$$

б) для второй таблицы

$$\mu = 1 + \varepsilon e^{-k \frac{\rho}{\alpha}} \quad (4'')$$

как это видно по предложению XXII второй книги «Principia», на которое он ссылается.

Что же касается квадратур, то он указывает, что они выполняются по формулам, следующим из его формул интерполяции.

Величины ε и R , входящие в формулу (4'), и величины ε и k , входящие в формулу (4''), определяются по значениям рефракции, наблюденной при двух различных зенитных расстояниях.

§ 4. Разовьем теперь, придерживаясь тех методов, которыми Ньютона вообще пользовался, формулы, служащие для вычисления *первой* его таблицы, и сличим числа, получаемые по этим формулам, с числами таблицы Ньютона.

Как уже сказано, для первой своей теории Ньютон принимает

$$\mu = \mu_0 + (\mu_0 - 1) \frac{\rho - \alpha}{R - \alpha} \quad (15)$$

ход луча определяется вообще дифференциальным уравнением

$$c_1^2 \dot{\rho}^2 = \mu^2 \rho^4 - c_1^2 \rho^2 \quad (16)$$

и величина рефракции — равенством

$$\Omega = \frac{\varepsilon}{R - \alpha} \int_0^\theta \rho d\theta \quad (17)$$

Чтобы иметь в дальнейшем дело с безразмерными величинами, положим:

$$\frac{\rho}{\alpha} = 1 + s; \quad \frac{R}{\alpha} = 1 + h; \quad \mu_0 = 1 + \varepsilon; \quad \varepsilon = \eta h; \quad \frac{c_1}{h} = c = (1 + \varepsilon) \sin z \quad (18)$$

иными словами, если будем выражать длины в долях радиуса Земли, то h представит высоту атмосферы и s — возвышение рассматриваемой точки над поверхностью Земли. При таких обозначениях, уравнения (15), (16), (17) будут:

$$\mu = \mu_0 - \eta s \quad (15')$$

$$c^2 \dot{s}^2 = (\mu_0 - \eta s)^2 (1 + s)^4 - c^2 (1 + s)^2 \quad (16')$$

$$\Omega = \eta \int_0^\theta (1 + s) d\theta \quad (17')$$

Когда Ньютон говорит, что для исчисления площади надо рассматриваемую кривую заменить параболической, проходящей через достаточное количество точек, на данной кривой взятых, то, выражаясь теперешними терминами, это означает — надо подинтегральную функцию разложить в ряд по целым положительным степеням переменной независимой, взяв в этом ряду достаточное для получения требуемой точности число членов, значит надо величину s , определяемую уравнением (16'), разложить в ряд по степеням переменной независимой θ . То обстоятельство, что уравнение (16') дифференциальное, для применения способа неопределенных коэффициентов, которым пользовался Ньютон, никаких затруднений не представляло, так что, положив

$$s = \alpha\theta + \beta\theta^2 + \gamma\theta^3 \quad (18)$$

легко находим на основании уравнения (16):

$$\alpha = \frac{\sqrt{\mu_0^2 - c^2}}{c} \quad (19)$$

$$\beta = \frac{2\mu_0^2 - c^2 - \mu_0\eta}{2c^2} \quad (20)$$

$$\gamma = \frac{6\mu_0^2 - c^2 - 8\mu_0\eta + \eta^2}{6c^2} \alpha \quad (21)$$

Тогда, заметив, что

$$c = \mu_0 \sin z \quad (22)$$

получим:

$$\alpha = \cot z \quad (19')$$

$$\beta = \frac{2\mu_0 - \mu_0 \sin^2 z - \eta}{2\mu_0 \sin^2 z} \quad (20')$$

$$\gamma = \frac{6\mu_0^2 - \mu_0^2 \sin^2 z - 8\mu_0\eta + \eta^2}{6\mu_0^2 \sin^2 z} \cot z \quad (21')$$

и, на основании формулы (17'), будет

$$\Omega = \eta \left[\Theta + \frac{1}{2} \alpha\Theta^2 + \frac{1}{3} \beta\Theta^3 + \frac{1}{4} \gamma\Theta^4 \right] \quad (23)$$

причем угол Θ определяется равенством

$$h = \alpha\Theta + \beta\Theta^2 + \gamma\Theta^3 \quad (24)$$

ибо для точки входа луча в атмосферу имеем

$$s = h \quad \text{и} \quad \theta = \Theta$$

приближенные значения тех величин, с которыми мы имеем дело, как покажет пробное вычисление, таковы:

$$\epsilon \approx \frac{1}{3800}; \quad \eta \approx \frac{1}{6}; \quad h \approx \frac{1}{600}; \quad \Theta \approx \frac{1}{16} \quad (25)$$

так что коэффициенты β и γ умножаются на весьма малые числа, поэтому в их выражениях величиною ϵ , по сравнению с 1, можно пренебречь, тогда будет:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2}(1 - \eta) + \left(1 - \frac{1}{2}\eta\right) \cot^2 z \\ \gamma &= \frac{1}{6}(5 - 8\eta + \eta^2) \cot z + \frac{1}{6}(6 - 8\eta + \eta^2) \cot^3 z \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Когда $z = 90^\circ$, т. е. для горизонтальной рефракции Ω_0 , мы получим:

$$\alpha = 0; \quad \beta = \frac{1}{2}(1 - \eta); \quad \gamma = 0 \quad (27)$$

$$\Omega_0 = \eta \left[\Theta_0 + \frac{1}{3} \beta \Theta_0^3 \right] \quad (28)$$

$$h = \frac{1}{2}(1 - \eta) \Theta_0^2 \quad (29)$$

Ниже будет показано, что величина рефракции при $z = 45^\circ$ есть

$$\omega = \epsilon \left[1 - \frac{1}{2}(1 - \eta) h \right] \approx \epsilon \quad (30)$$

Из этих уравнений, имея по наблюдениям значения Ω_0 и ω , легко находим величины: ϵ , η , h , приближенные значения которых указаны выше [форм. (25)].

При выводе формулы (23), мы принимали за переменную независимую величину θ исходя из формулы (17), но можно исходить из формулы (17'), принимая за переменную независимую величину s , выразив $d\theta$ через ds из уравнения (16'); именно будет

$$d\theta = \frac{c ds}{(1 + s) \sqrt{(\mu_0 - \eta s)^2 (1 + s)^2 - c^2}}$$

и мы получим

$$\frac{1}{c\eta} \Omega = \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{(\mu_0 - \eta s)^2 (1 + s)^2 - c^2}} \quad (31)$$

Очевидно, что по теперешней терминологии интеграл в правой части — эллиптический первого рода, стоит только его привести к каноническому

виду, чтобы воспользоваться таблицами Legendre'a, но эти таблицы были изданы в 1826 г. — через 99 лет после смерти Ньютона, который, очевидно, вычислял этот интеграл совершенно иначе, разлагая подинтегральную функцию в ряд по степеням переменной независимой.

Прежде чем к такому разложению приступать, надо отдать себе отчет об относительной величине членов, чтобы для упрощения выкладок заранее отбросить те члены, которые на точность результата не влияют.

Мы видели, что приближенные значения постоянных таковы:

$$h \approx \frac{1}{600}; \quad \eta \approx \frac{1}{6}; \quad \epsilon \approx \frac{1}{3800}, \quad \mu_0 = 1 + \epsilon$$

Подкоренной многочлен, который мы обозначим через Q , в развитой форме есть

$$\begin{aligned} Q = \mu_0^2 - c^2 - 2\mu_0 \eta s + 2\mu_0^2 s + \mu_0^2 s^2 + \eta^2 s^2 - 4\mu_0 \eta s^3 - 2\mu_0 \eta s^3 \\ + 2\eta^2 s^3 + \eta^2 s^4 \end{aligned}$$

Члены, содержащие переменную s , имеют наибольшие абсолютные значения, когда $s = h \approx \frac{1}{600}$, так что будет:

$$\mu_0^2 - c^2 = \mu_0^2 \cos^2 z$$

$$2\mu_0^2 h = 2 \cdot \frac{1}{600} = \frac{1}{300}$$

$$2\mu_0 \eta h = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{600} = \frac{1}{1800}$$

$$\mu_0^2 h^2 = 1 \cdot \frac{1}{600} \cdot \frac{1}{600} = \frac{1}{360000}$$

$$4\mu_0 \eta h^2 = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{360000} = \frac{1}{540000}$$

$$\eta^2 h^2 = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{360000} = \frac{1}{129600000}$$

$$2\mu_0 \eta h^3 = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{216000000} = \frac{1}{648000000}$$

$$2\eta^2 h^3 = 2 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{216000000} = \frac{1}{3888000000}$$

$$\eta^2 h^4 = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{129600000000} = \frac{1}{4665600000000}$$

Сумма первых трех членов, принимая во внимание их знаки, даже при $z = 90^\circ$ равна $\frac{1}{360}$, при значениях же $z > 90^\circ$ будет больше $\frac{1}{360}$; алгебра-

браческая сумма следующих двух членов есть $\frac{1}{1080000}$, значит, отбрасывая их, мы сделаем в \sqrt{Q} относительную погрешность

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{360}{10800000} = \frac{1}{6000}$$

которая в этом вопросе вполне пренебрежима; отсюда видно, что в выражении Q все члены, кроме первых трех, могут быть отброшены, и мы можем брать

$$\frac{1}{c\eta} \Omega = \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{\mu_0^2 \cos^2 z + 2\mu_0^2 s - 2\mu_0 \gamma s}} \quad (32)$$

Очевидно, что этот интеграл сейчас же находится в конечном виде, что и сделано ниже, но пока

$$\mu_0 \cos^2 z > 2(\mu_0 - \eta)h$$

т. е. в круглых числах $\cos^2 z > \frac{1}{360}$; $\cos z > 0.0527$, т. е. $z < 87^\circ$, мы имеем разложение

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{Q}} &= \frac{1}{\mu_0 \cos z} \left[1 + \frac{2(\mu_0 - \eta)}{\mu_0} \frac{s}{\cos^2 z} \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mu_0 \cos z} \left[1 + n \frac{s}{\cos^2 z} \right]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{\mu_0 \cos z} \left[1 - \frac{1}{2}n \cdot \frac{s}{\cos^2 z} + \frac{3}{8}n^2 \frac{s^2}{\cos^4 z} - \dots \right] \end{aligned}$$

По подстановке и интегрировании, получим

$$\Omega = \eta \operatorname{tg} z \left[h - \frac{1}{4} nh^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 z} + \frac{1}{8} n^2 h^3 \cdot \frac{1}{\cos^4 z} - \dots \right]$$

и, заменив $h\eta$ его величиною ε и $\frac{1}{\cos^2 z}$ через $1 + \operatorname{tg}^2 z$, имеем по приведению:

$$\begin{aligned} \Omega &= \varepsilon \left[1 - \frac{1}{4} nh + \frac{1}{8} n^2 h^2 \right] \operatorname{tg} z - \frac{1}{4} \varepsilon \cdot nh(1 - nh) \operatorname{tg}^3 z \\ &\quad + \frac{1}{8} \varepsilon n^2 h^2 \operatorname{tg}^5 z - \dots \end{aligned}$$

но

$$n = \frac{(2\mu_0 - \eta)}{\mu_0} \approx 2(1 - \eta); \quad nh \approx \frac{2}{600} \cdot \frac{5}{6} \approx \frac{1}{360}$$

поэтому можно писать

$$\Omega = \varepsilon \operatorname{tg} z - \frac{1}{2} \varepsilon(1 - \eta)h \operatorname{tg}^3 z + \frac{1}{2} \varepsilon \cdot (1 - \eta)^2 h^2 \operatorname{tg}^5 z$$

или, при вычислении в секундах,

$$\Omega = K \operatorname{tg} z - L \operatorname{tg}^3 z + M \operatorname{tg}^5 \quad (33)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} K &= 206265 \varepsilon \\ L &= \frac{1}{2} K \cdot (1 - \eta) h \\ M &= L(1 - \eta) h = \frac{1}{2} K(1 - \eta)^2 \cdot h^2 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Формула (33) по самому ее выводу имеет смысл, пока $z < 87^\circ$, но практически, когда $z > 81^\circ$, ряд становится медленно сходящимся, доводясь написанными тремя первыми его членами уже нельзя, и для вычисления рефракции при $z > 81^\circ$ надо пользоваться или формулой (23), или же тою формулой, которая получится, если выполнить в конечном виде интегрирование в формуле (32); для этого положим

$$Q(s) = \mu_0^2 \cos^2 z + 2(\mu_0^2 - \mu_0 \eta)s = 2(\mu_0^2 - \mu_0 \eta)t^2$$

тогда получим:

$$ds = 2t dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{Q(s)}} = \frac{1}{\sqrt{2(\mu_0^2 - \mu_0 \eta)}} \cdot \frac{1}{t}$$

пределы интегрирования

$$p = \frac{\mu_0 \cos z}{\sqrt{2(\mu_0^2 - \mu_0 \eta)}}, \quad \text{и} \quad q = \frac{\sqrt{\mu_0^2 \cos^2 z + 2h(\mu_0^2 - \mu_0 \eta)}}{\sqrt{2(\mu_0^2 - \mu_0 \eta)}}$$

и будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0 \eta \sin z} \Omega &= \frac{1}{\mu_0^2 - \mu_0 \eta} [\sqrt{\mu_0^2 \cos^2 z + 2h(\mu_0^2 - \mu_0 \eta)} - \mu_0 \cos z] = \\ &= \frac{2h}{\mu_0 \cos z + \sqrt{\mu_0^2 \cos^2 z + 2h(\mu_0^2 - \mu_0 \eta)}} \end{aligned} \quad (35)$$

Положив в этих формулах $z = 90^\circ$ и $z = 45^\circ$, получим, заменив μ_0 через 1:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_0 &= \eta \sqrt{\frac{2h}{1 - \eta}} \\ \omega &= \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Первая из этих формул следует из формул (28) и (29), если пренебречь членом $\frac{1}{3} \beta \Theta_0^3$ в формуле (28), которая следует из формулы (33), когда

в ней отброшены весьма малые члены, содержащие множители $\operatorname{tg}^3 z$ и $\operatorname{tg}^5 z$, и когда, при $z = 45^\circ$, $\operatorname{tg} z = \operatorname{tg}^3 z = 1$. Формулы (36), по присоединению к ним соотношения

$$h = \frac{\varepsilon}{\eta} \quad (37)$$

и послужат нам для определения величин η и h .

После того как эти величины найдены, вычисление рефракции может быть произведено по формуле (35), которая дает

$$\Omega = \frac{2\varepsilon \cdot \mu_0 \sin z}{\mu_0 \cos z + \sqrt{\mu_0^2 \cos^2 z + 2h(\mu_0^2 - \mu_0 \eta)}} \quad (37)$$

или, заменив $\mu_0 = 1 + \varepsilon$ через 1 и вычисляя в секундах, имеем

$$\Omega = \frac{2K \sin z}{\cos z + \sqrt{\cos^2 z + 2h(1 - \eta)}} \quad (38)$$

Хотя вычисление по этой формуле и весьма просто, но для углов $z \leq 81^\circ$ еще проще вычислять по формуле

$$\Omega = K \operatorname{tg} z - L \operatorname{tg}^3 z + M \operatorname{tg}^5 z \quad (33)$$

причем значения коэффициентов даются формулой (34), и лишь для значений $z \geq 81^\circ$ производить вычисление по формуле (38).

Само собою разумеется, что для определения величин η и h можно взять любую пару наблюдений рефракции при зенитных расстояниях, достаточно различающихся одно от другого, или же, применяя методу наименьших квадратов, учесть всю совокупность имеющихся наблюдений. При Ньютоне этой методы не было, но он имел свою методу для исправления элементов кометных орбит по совокупности наблюдений, как то видно из предложения XLII, задача XXII, третьей книги «Principia», которое гласит: «Исправить найденную орбиту кометы». Метода, здесь изложенная, приложима и к исправлению значений η и h .

Ньютон, который, как известно,¹ превосходно, весьма тонко и точно чертил, применяя приближенные методы, пользовался и графическими приемами, причем при определении кометных орбит он действовал в определенной постепенности, которую в конце своего сочинения «De Mundi Systemate» характеризует такими словами: «haec omnia perago primum graphice opere celeri et rudi, dein graphice maiori cum diligentia, ultimo per calculum numeralem», т. е. «все это я выполняю сперва графический

¹ См., напр., его чертеж, представляющий разрез глаза овцы, приведенный в книге: Brewster — «Memoirs of Newton».

наскоро и грубо, затем графически с большею тщательностью и наконец численным расчетом», всякий же расчет Ньютон производил «accuratissime».

Следуя этому указанию, было бы естественно построить, сперва в мелком, а потом в крупном масштабе, график, откладывая по оси абсцисс $\operatorname{tg} z$ и по оси ординат величину рефракции Ω , которая Ньютона была известна по результатам наблюдений, сообщенных ему Флемстидом 11 октября 1694 г. (см. ниже), и оказалось бы, что все точки для значений z от 0° до 72° лежат на одной прямой или весьма близко к таковой. Уклон этой прямой доставляет значение K , а расположение точек на прямой показывает, что в этих пределах члены с коэффициентами L и M ничтожно малы; этим для величины K была бы учтена вся совокупность наблюдений.

Не имея наблюдений Флемстида, мы обратимся к самой Ньютоновской таблице и, написав формулу

$$\Omega = K \operatorname{tg} z$$

возьмем $z = 45^\circ$, тогда будет $K = \Omega_{45^\circ} = 53''$, и, пользуясь простой логарифмической линейкой, в несколько минут времени (*opere celeri*) получим следующую табличку, в которой значения, вычисленные по формуле

$$\Omega = 53'' \operatorname{tg} z$$

сопоставлены с числами таблицы Ньютона (*refractio verna et autumna*).

z	$53'' \operatorname{tg} z$	По табл. Ньютона	z	$53'' \operatorname{tg} z$	По табл. Ньютона	z	$53'' \operatorname{tg} z$	По табл. Ньютона
12°	11.3	11''	33°	34.4	34''	54°	73.0	73''
15	14.2	14	36	38.5	38	57	81.6	81
18	17.2	17	39	42.9	43	60	91.8	91
21	20.4	20	42	47.7	48	63	104.0	103
24	23.6	23	45	53.0	53	66	119.0	118
27	27.0	27	48	58.8	59	69	138.0	137
30	30.6	30	51	65.5	65	72	163.0	162

Как видно, совпадение почти полное, в особенности приняв во внимание, что числа Ньютона, очевидно, округлены до ближайшей целой секунды.

Для следующего приближения берем формулу

$$\Omega = K \operatorname{tg} z - L \operatorname{tg}^3 z + M \operatorname{tg}^5 z$$

и так как неизвестно, какое значение Ω_{45° было бы при вычислении получено Ньютоном и насколько он его округлил, то берем Ω_{45° последовательно

равными: $53''00$; $52''75$; $52''38$, соответственно чему получаем такие же значения и для K .

По каждому из этих значений, на основании формулы (34), находим соответствующее значение ϵ .

Затем, по значению горизонтальной рефракции

$$\Omega_0 = 2000''$$

находим величины η и h ; вычисляем, пользуясь ими, L и K по формулам:

$$L = \frac{1}{2} K(1 - \eta) h$$

$$M = L(1 - \eta) h = \frac{1}{2} K(1 - \eta)^2 \cdot h^2$$

после чего по формуле (34) вычисляем рефракцию Ω и сличаем ее с показанной в таблице Ньютона.

Поступая таким образом, мы приближенные значения постоянных ϵ и h , которыми пользовался Ньютон, определяем предварительно по формулам (28) и (29).

Поясним этот процесс примером. Мы имеем равенство, вычисляя в секундах,

$$K = 206265 \epsilon$$

и пусть $K = 52''75$, тогда получим

$$\epsilon = \frac{52.75}{206265} = 0.00025696 \approx \frac{1}{3891}$$

На основании формул (28) и (29), для горизонтальной рефракции, удерживая лишь первые члены, имеем:

$$\Omega_0 = \eta \Theta_0$$

$$h = \frac{1}{2} (1 - \eta) \Theta_0$$

$$h\eta = \epsilon$$

отсюда следует

$$\eta = \frac{\Omega_0^2}{2\epsilon + \Omega_0^2} \quad (39)$$

или, при вычислении в секундах и $\Omega_0 = 2000''$:

$$\eta = \frac{(2000)^2}{2 \cdot 52.75 \cdot 206265 + (2000)^2} = 0.15527$$

$$h = \frac{\varepsilon}{\eta} = 0.0016471 \approx \frac{1}{607}$$

$$\Theta_0 = 0.06245 \approx \frac{1}{15.5}$$

$$\log L = \bar{2}.4764$$

$$\log M = \bar{5}.7080$$

таким образом будет

$$\Omega = 52''.75 \operatorname{tg} z - [\bar{2}.4764]'' \operatorname{tg}^3 z + [\bar{5}.7080]'' \operatorname{tg}^5 z$$

Затем, в табл. I, пользуясь четырехзначными логарифмами, произведено вычисление рефракции и сличение вычисленных по этой формуле значений с показанными в таблице Ньютона.

Совершенно так же поступлено и для значений

$$\Omega_{45^\circ} = 53''.00 \quad \text{и} \quad \Omega_{45^\circ} = 52''.38$$

Самое вычисление, его результаты и их сличение показаны в таблицах II и III.

Эти результаты показывают, что числа табл. III совпадают с числами Ньютона (отличаясь от них в редких случаях, и то для больших зенитных расстояний, на $2''$), что дает основание предполагать, что для значений до $z = 85^\circ$ рефракция вычислена Ньютоном или по формуле (33), или по формуле, ей эквивалентной.

Возможно, что Ньютон ограничивался двумя членами и вычислял рефракцию для значений $z \leq 78^\circ$ по формуле

$$\Omega = K \operatorname{tg} z - L \operatorname{tg}^3 z \quad (40)$$

взяв $K = 52''.75$; $L = 0''.03$; ибо, как показывает табл. II, при этих значениях получается наилучшее согласие с числами Ньютона.

Заметим здесь же, что значение $h = 0.0016471 \approx \frac{1}{607}$ дает для границы атмосферы слишком малую величину, всего в 10.3 км, совершенно не отвечающую значению, следующему из явления вечерней и утренней зари, которое приводит к значению около $\frac{1}{50}$ радиуса Земли, т. е. около 125 км, как это было известно еще со времен Альгадена, т. е. XII в. Это было одним из обстоятельств, заставивших Ньютона заменить свою первую теорию второй; но прежде, чем к ней перейти, доведем разбор первой теории

до конца, т. е. покажем, каким образом может быть вычисляема рефракция для значений $z > 78^\circ$, когда формула (40) становится непригодной.

Таблицы I, II, III

Вычисление рефракции по формуле

$$\Omega = K \operatorname{tg} z - L \operatorname{tg}^3 z - M \operatorname{tg}^5 z$$

(Общие для всех таблиц вспомогательные величины

$$\log \operatorname{tg} z; 3 \log \operatorname{tg} z; 5 \log \operatorname{tg} z$$

вписываются на три отдельные полоски бумаги)

z	$\log \operatorname{tg} z$	z	$\log \operatorname{tg} z$	$3 \log \operatorname{tg} z$	$5 \log \operatorname{tg} z$	z	$\log \operatorname{tg} z$	$3 \log \operatorname{tg} z$	$5 \log \operatorname{tg} z$
12°	1.3275	48°	0.0456	0.1368		82°	0.8522	2.5566	4.2610
15	.4281	51	.0916	0.2748		83	0.9109	2.7327	4.5545
18	.5118	54	.1387	0.4165		84	0.9784	2.9352	4.8920
21	.5842	57	.1875	0.5625		85	1.0580	3.1740	5.2900
24	.6486	60	.2386	0.7158					
27	.7072	63	.2928	0.8784					
30	.7614	66	.3514	1.0542					
33	.8125	69	.4158	1.2474	2.0790				
36	.8613	72	.4882	1.4646	2.4410				
39	.9084	75	.5719	1.7157	2.8595				
42	1.9544	78	.6725	2.0175	3.3625				
45	0.0000	81	0.8003	2.4009	4.0015				

§ 5. Для значений $z > 78^\circ$ вычисление можно производить непосредственно по формулам (19'), (20') и (23), которые являются совершенно общими, но вычисление по которым гораздо сложнее, нежели по формуле (38), практически дающей те же самые результаты, как и общие точные формулы.

В формуле (23) член $\frac{1}{4} \gamma \Theta^3$ оказывается настолько малым, что им

можно пренебречь по сравнению с 1 и брать

$$\Omega = \eta \Theta \left[1 + \frac{1}{2} \alpha \Theta + \frac{1}{3} \beta \Theta^2 \right]$$

определяя угол Θ из уравнения

$$h = \alpha \Theta + \beta \Theta^2 + \gamma \Theta^3$$

Таблица I
 $K = 53^{\circ}00'; \log K = 1.7243; \log L = 2.5708; \log M = 5.7173$

z	$\log K \operatorname{tg} z$	$\log L \operatorname{tg}^3 z$	$\log M \operatorname{tg}^5 z$	$K \operatorname{tg} z$	$L \operatorname{tg}^3 z$	$M \operatorname{tg}^5 z$	Ω	По табл. Ньютона	$\Omega = N - \delta$
12°	1.0518			11.27			11.27	11	+0.27
15	.1524			14.21			14.21	14	.21
18	.2361			17.22			17.22	17	.22
21	.3085			20.35			20.35	20	.35
24	.3729			23.60			23.60	23	.60
27	.4315			27.01			27.01	27	.01
30	.4857			30.60			30.60	30	.60
33	.5368			34.42			34.42	34	.42
36	.5856			38.50			38.50	38	+ .50
39	.6327			42.92			42.92	43	-0.08
42	.6787			47.72			47.72	48	-0.28
45	.7243			53.00			53.00	53	0.00
48	.7699			58.87			58.87	59	- .13
51	.8159			65.45			65.45	65	+ .45
54	.8630			71.29			71.29	73	-1.71
57	.9118			81.62			81.62	81	+0.62
60	1.9629	1.2866		91.81 — 0'19			91.62	91	+0.62
63	2.0171	1.4492		104.0	0.28		103.7	103	+0.7
66	.0757	1.6250		119.1	0.42		118.7	118	+0.7
69	.1401	1.8182		138.1	0.66		137.4	137	+0.4
72	.2125	0.0354		163.1	1.09		162.0	162	0.0
75	.2962	0.2865		197.8	1.93		195.9	196	-0.1
78	.3968	0.5883		249.8	3.88		245.9	245	+0.9
81	.5246	0.9717		334.7	9.37		325.4	324	+1.4
82	.5765	1.0274	1.9783	377.1	10.65	+ 0'9	367.3	363	+4.3
83	.6352	1.3085	0.2718	431.7	20.10	1.9	413.5	411	+2.5
84	.7027	1.5060	0.6093	504.3	32.07	4.1	476.3	472	+4.3
85.	2.7823	1.7448	1.0073	605.8	55.56	10.2	560.4	553	+7.4

Величины α , β , γ вычисляются по формулам (19'), (20') и (21'). При $K = 52^{\circ}75$ мы имеем, как выше указано:

$$\epsilon = \frac{52.75}{206265} = 0.00025594 \approx \frac{1}{3910}$$

$$\Omega_0 = 2000$$

$$\eta_1 = \frac{\Omega_0^2}{2K \cdot 206265 + \Omega_0^2} = \frac{4000000}{25761000} = 0.15527$$

$$h_1 = \frac{\epsilon}{\eta_1} = 0.0016471$$

Таблица II

$$K = 52.75; \log K = 1.7222; \log L = 2.5652; \log M = 5.7092$$

z	$\log K \operatorname{tg} z$	$\log L \operatorname{tg}^3 z$	$\log M \operatorname{tg}^5 z$	$K \operatorname{tg} z$	$L \operatorname{tg}^3 z$	$M \operatorname{tg}^5 z$	Ω	По табл. Ньютона	$\Omega - N \cdot n$
12°	1.0497			11.21		11.2	11 ¹¹	+0.2	
15	.1503			14.14		14.1	14	0.1	
18	.2340			17.14		17.1	17	0.1	
21	.3064			20.25		20.2	20	0.2	
24	.3708			23.48		23.5	23	+0.5	
27	.4294			26.88		26.9	27	-0.1	
30	.4836			30.45		30.4	30	-0.4	
33	.5347			34.25		34.2	34	0.2	
36	.5835			38.33		38.3	38	+0.3	
39	.6306			42.72		42.7	43	-0.3	
42	.6766			47.49		47.5	48	-0.5	
45	.7222			52.75		52.7	53	-0.3	
48	.7678			58.59		58.6	59	-0.4	
51	.8138			65.13		65.1	65	+0.1	
54	.8609			72.59		72.6	73	-0.4	
57	.9097			81.23		81.2	81	+0.2	
60	1.9608	1.2710		91.37	— 0'19	91.2	91	+0.2	
63	2.0150	1.4436		103.5	0.28	103.2	103	+0.2	
66	.0736	1.6194		118.5	0.42	118.1	118	+0.1	
69	.1380	1.8126		137.4	0.65	136.7	137	-0.3	
72	.2104	0.0298		162.3	1.07	161.2	162	-0.8	
75	.2941	0.2809		196.8	1.91	194.9	196	-1.1	
78	.3947	0.5827		248.1	3.88	244.3	245	-0.7	
81	.5225	0.9661		333.1	9.25	328.8	324	-0.2	
82	.5744	1.1218	1.9702	375.3	13.24	363.0	363	0.0	
83	.6331	1.2979	0.2637	429.6	18.85	413.0	411	+2.0	
84	.7006	1.5004	0.6012	501.9	31.65	474.2	472	+2.2	
85	2.7802	1.7392	0.9992	602.8	54.85	557.9	553	+4.9	

Мы пометили величины h и η значком 1, ибо они представляют лишь первое приближение, будучи получены из формул:

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \eta_1 \Theta_1 \\ 2h_1 &= 3\Theta_1^2 = (1 - \eta) \Theta_1^2\end{aligned}$$

Таблица III

 $K = 52^{\circ}38'; \log K = 1.7191; \log L = 2.5558; \log M = 5.6935$

z	$\log K \operatorname{tg} z$	$\log L \operatorname{tg}^3 z$	$\log M \operatorname{tg}^5 z$	$K \operatorname{tg} z$	$L \operatorname{tg}^3 z$	$M \operatorname{tg}^5 z$	Ω	По табл. Ньютона	$\Omega - N \cdot n$
12°	1.0466			11"13			11"1	111"	+0"1
15	.1472			14.04			14.0	14	0.0
18	.2209			16.63			16.6	17	-0.4
21	.3033			20.11			20.1	20	+0.1
24	.3677			23.32			23.3	23	+0.3
27	.4263			26.69			26.7	27	-0.3
30	.4805			30.24			30.2	30	+0.2
33	.5316			34.01			34.0	34	0.0
36	.5804			38.05			38.1	38	+0.1
39	.6275			42.41			42.4	43	-0.6
42	.6735			47.15			47.2	48	-0.8
45	.7191			52.38			52.4	53	-0.6
48	.7647			58.17			58.2	59	-0.8
51	.8107			64.67			64.7	65	-0.3
54	.8578			72.08			72.1	73	-0.9
57	.9066			80.65			80.7	81	-0.3
60	1.9577	1.2716		90.72	- 0"19		90.5	91	-0.5
63	2.0119	1.4342		102.8	0.27		102.5	103	-0.5
66	.0705	1.6100		117.6	0.41		117.2	118	-0.8
69	.1349	1.8030		136.4	0.63		135.8	137	-1.2
72	.2073	0.0204		161.2	1.05		160.1	162	-1.9
75	.2910	0.2715		195.5	1.87		193.6	196	-2.4
78	.3916	0.5733		246.4	3.74		242.7	245	-2.3
81	.5194	0.9567		330.7	9.05		321.7	334	-2.3
82	.5713	1.1124	1.9545	372.6	12.95	0"90	360.5	363	-2.5
83	.6300	1.2885	0.2480	426.6	19.43	1.77	409.0	411	-2.0
84	.6975	1.4910	0.5855	498.3	30.98	3.85	471.1	472	-0.9
85	2.7771	1.7298	0.9835	598.5	53.68	9.63	554.4	553	+1.4

тогда как более точные значения даются формулами (23) и (24):

$$\Omega_0 = \eta\Theta \left(1 + \frac{1}{3}\beta\Theta^2 \right) = \eta\Theta \left[1 - \frac{1}{6}(1 - \eta)\Theta^2 \right] \quad (23)$$

$$2h = (1 - \eta)\Theta^2 \quad (24)$$

Очевидно, что первая из этих формул может быть написана так:

$$\Omega_0 = \eta\Theta \left[1 + \frac{1}{3}h \right] \approx \eta\Theta \left[1 + \frac{1}{3}h_1 \right]$$

поэтому, чтобы по первому приближению получить более точные значения η и h , надо в выражении

$$\eta_1 = \frac{\Omega_0^2}{2K \cdot 206265 + \Omega_0^2}$$

заменить Ω_0 через $\frac{\Omega_0}{1 + \frac{1}{3} h_1}$, и следовательно, будет

$$\eta = \eta_1 \left(1 - \frac{2}{3} h_1 \right) = \eta_1 - \frac{2}{3} h_1 \eta_1$$

если отбросить малые величины высших порядков относительно h_1 . Так, в нашем случае получим:

$$\eta = 0.15527 - 0.00017 = 0.15510$$

$$= \frac{\epsilon}{\eta} = 0.0016488$$

$$\Theta = 0.062476$$

Определив таким образом величины η и h , задаем ряд значений зенитных расстояний z , начиная, напр., с $z = 78^\circ$; затем, чтобы проверить точность и пригодность формулы (23), вычисляем по формулам (19') — (21') величины α , β , γ , а именно:

$$\alpha = \cot z \quad (19')$$

$$\beta = \frac{1}{2} (1 - \eta) + \left(1 - \frac{1}{2} \eta \right) \cot^2 z \quad (20')$$

$$\gamma = \left[\frac{1}{6} (5 - 8 \eta + \eta^2) + \frac{1}{6} (6 - 8 \eta + \eta^2) \cot^2 z \right] \cot z \quad (21')$$

по уравнению

$$h = \alpha \Theta + \beta \Theta^2 + \gamma \Theta^3 \quad (24)$$

определяем соответствующее каждому зенитному расстоянию значение угла Θ , и наконец, по формуле

$$\Omega = \eta \Theta \left[1 + \frac{1}{2} \alpha \Theta + \frac{1}{3} \beta \Theta^2 \right] \quad (23)$$

находим Ω .

В виду малости члена $\gamma \Theta^3$, решение уравнения (24) проще всего выполняется так: сперва отбрасываем член $\gamma \Theta^3$, получаем приближенное значение

$$\Theta_1 = \frac{1}{2\beta} \left[-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4h\beta} \right] = \frac{2h}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4h\beta}} \quad (41)$$

причем надо непременно брать формулу

$$\Theta_1 = \frac{2h}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4h\beta}}$$

чтобы избежать пользования в вычислении малой разностью $\sqrt{\alpha^2 + 4h\beta} - \alpha$ и происходящей от этого утраты точности. Вычислив приближенное значение Θ_1 , вычисляем поправку к нему:

$$\delta\Theta_1 = -\frac{\gamma\Theta_1^3}{\alpha + 2\beta\Theta_1 + 3\gamma\Theta_1^2}$$

Точно так же для величины Ω вычисляем сперва по Θ_1 приближенное значение

$$\Omega_1 = h\Theta_1 \left[1 + \frac{1}{2}\alpha\Theta_1 + \frac{1}{3}\beta\Theta_1^2 \right]$$

к которому присовокупляем затем поправку

$$\delta\Omega_1 = \eta \cdot \delta\Theta_1$$

Если довольствоваться, как делал Ньютон, точностью до $1''$ в значениях Ω , то поправки оказываются столь малыми, что вычислять их нет надобности.

Для $z = 90^\circ$, в виду того, что $\alpha = 0$ и $\gamma = 0$, величина Ω_0 вычисляется по формуле

$$\Omega_0 = \gamma\Theta_0 \left[1 + \frac{1}{3}h \right]$$

причем

$$\Theta_0 = \sqrt{\frac{2h}{1 - \eta}}$$

В нашем случае Ω_0 получится равным $2000''$, ибо мы от этой величины исходили, определяя постоянные η и h , но если бы мы воспользовались для этого определения значением рефракции $783''$ при $z = 87^\circ$, то мы получили бы для Ω_0 величину, несколько отличающуюся от $2000''$.

В табл. IV это вычисление приведено со всею подробностью в том виде, как оно на самом деле выполнено.

Как видно, числа, начиная от $z = 87^\circ$, в особенности при z , равном $88^\circ, 89^\circ, 89^\circ 30'$, чувствительно отличаются от чисел, показанных в таблице Ньютона. Повидимому, это происходит потому, что здесь Ньютон дал числа, не вычисленные по его формуле, а выведенные им непосредственно из наблюдений Флемстида, как о том подробно будет сказано ниже.

При вычислении рефракции по формуле (38), определив K по значению рефракции при $z = 45^\circ$, достаточно определить лишь постоянную $2h(1 - \eta)$, и нет надобности знать величины h и η в отдельности.

Таблица IVa

Вычисление рефракции для зенитных расстояний от $z = 78^\circ$ до $z = 90^\circ$
по формулам (23)

Данные: $K = 52.75$; $\log \eta = 1.19061$; $\frac{1}{2}(1 - \eta) = 0.42245$; $\log \left(1 - \frac{1}{2}\eta\right) = 1.96494$;

$\log 206265 \eta = 4.50504$; $\log h = 3.21719$; $\log 4h = 3.81925$; $\log 2h = 3.51822$.

а) Вычисление величин: α , β

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
z	$\log \alpha = \log \cotg z$	$(2) \cdot 2$	$(3) + 1.96494$	Num. (4)	$(5) + 0.42245$ $= \beta$	$\log \beta$	$(7) + 3.81925$ $= \log 4h\beta$	$4h\beta$	α^2	$(9) + (10)$
78°	1.32747	2.65494	2.61988	0.04168	0.46413	1.66664	3.48589	0.0030612	0.0451790	0.0482402
81	1.19971	2.39942	2.36436	0.02314	.44559	.64894	.46819	29389	.0250850	.0280239
84	1.02162	2.04324	2.00818	0.01019	.43264	.63613	.45538	28535	.0110470	.0139005
85	2.94195	3.88390	3.84884	0.00706	.42951	.63297	.45222	28329	.0076542	0.0104871
86	2.84464	3.68928	3.65422	0.00451	.42696	.63039	.44964	28161	.0048896	0.0077052
87	2.71940	3.43880	3.40374	0.00253	.42498	.62838	.44763	28031	.0027466	.0055497
88	2.54308	3.08616	3.05110	0.00113	.42358	.62694	.44619	27938	0.0012194	.0040132
89	2.24192	4.48384	4.44878	0.00028	.42273	.62606	.44531	27881	0.0003047	.0030928
89 30	3.94086	5.88172	5.84666	0.00007	.42252	1.62585	3.44510	0.0027868	0.0000762	0.0028630

б) Вычисление углов θ и рефракции Ω

1	12	13	14	15	16	17	18	19	20
z	$\cotg z = \alpha$	$\sqrt{(11)}$	$(12) + (13)$	colog (14)	$(15) + \log 2h$ $= \log \theta$	$(16) + 4.50504$ $= \log \Omega$	Ω	По табл. Ньютона	$(18) - (19)$
78°	0.21256	0.21964	0.43220	0.36432	3.88254	2.38758	244'1	245'	- 0'9
81	0.15838	.16740	.32578	.48708	2.00530	2.51034	323.8	324	+ 0.2
84	0.10510	.11790	.22300	.65170	2.16992	2.67496	473.1	472	+ 1.1
85	0.08749	.10242	.18991	.72146	2.23968	2.74472	555.6	553	+ 2.6
86	0.06993	.08778	.15775	.80207	2.32029	2.82533	668.8	664	+ 4.8
87	0.05241	.07450	.12691	.89651	2.41473	2.91977	831.3	820	+ 11.3
88	0.03492	.06335	.09827	1.00758	2.52580	3.03084	1074.0	1049	+ 25.0
89	0.01746	.05561	.07307	1.13626	2.65448	3.15952	1443.8	1392	+ 51.8
89 30	0.00873	.05351	.06224	1.20593	2.72413	3.22917	1695.0	1665	+ 30.0
90	0						2000	2000	0.0

Примечание. Столб. 16 вычислен, чтобы показать, что в формуле

$$\Omega = \eta \theta \left[1 + \frac{1}{2} \alpha \theta^2 + \frac{1}{2} \beta \theta^2 \right]$$

члены, содержащие множители θ^2 и θ^3 , могут быть отброшены по их малости
сравнительно с 1.

Таблица IVб

Вычисление рефракции для зенитных расстояний от $z = 78^\circ$ до $z = 90^\circ$
по формулам (23), пользуясь логарифмической линейкой

Данные: $K = 52.75$; $\eta = 0.15510$; $\frac{1}{2}(1 - \gamma) = 0.42245$; $1 - \frac{1}{2}\eta = 0.92245$; $h = 0.0016489$;
 $206295\eta = 320000$; $4h = 0.0065956$; $2h = 0.0032978$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$\alpha = z$	α^2	$(3) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\eta\right)$	$\beta = (4) + 0.42245$	$4h\beta = (5) \cdot 0.6596$	$\theta = (3) + (6)$	$\sqrt{7}$	$(8) + (2)$	$\Omega = 105.5 \cdot (9)$
78°	0.2126	0.04518	0.04170	0.46415	0.003061	0.04824	0.2196	0.4322	244.4
81	.1584	.02509	.02315	.44560	2940	.02803	.1674	.3258	324.0
84	.1051	.01105	.01019	.43264	2854	.01390	.1179	.2230	473.0
85	.08749	.007654	.00706	.42951	2834	.01049	.1024	.1899	555.6
86	.06993	.004890	.00451	.42696	2817	.007707	.0878	.1577	669
87	.05241	.002747	.00254	.42499	2804	.005551	.0745	.1269	831
88	.03492	.001219	.00113	.42358	2794	.004013	.06335	.0983	1073
89	.01746	.000305	.000028	.42273	2790	.003095	.05563	.0731	1443
89 30	.00873	.000076	0.00007	.42252	2787	.002863	.05351	.0622	1695
90	—	—	—	—	—	—	—	—	2000

Примечания:

- Сличение чисел Ω таблиц IVa и IVб показывает, что, пользуясь логарифмической линейкой и таблицами Barlow, получаем практически одинаковые результаты с вычисленными по логарифмам, но при вычислении по логарифмической линейке требуется в 2 раза меньше работы.
- Расхождение значений рефракции для $z \geq 86^\circ$ с числами таблицы Ньютона показывает, что он предпочел взять эти числа не по вычислению, а по наблюденным Флемстидом значениям, как это видно по табличке Флемстида в его письме от 11 октября 1694 г., приведенном в § 6.

Величина $2h(1 - \eta)$ проще всего находится по значению Ω_0 рефракции при $z = 90^\circ$, именно будет

$$2h(1 - \eta) = \frac{4K^2}{\Omega_0^2}$$

так, напр., при $K = 52''75$ и $\Omega_0 = 2000''$ получается $2h(1 - \eta) = 0.0027825$. Пользуясь этим значением, в табл. V вычисляем величины рефракции Ω для z от 60° до 90° и сличаем как с числами Ньютона, так и с числами, полученными по формуле (33).

Очевидно, что для определения величины $2h(1 - \eta)$ можно воспользоваться значениями рефракции не только при $z = 90^\circ$, но и при всяком ином значении z , именно, на основании формулы

$$\Omega = \frac{2K \sin z}{\cos z + \sqrt{\cos^2 z + 2h(1 - \eta)}}$$

будет

$$2h(1 - \eta) = \frac{4K \sin z}{\Omega^2} [K \sin z - \Omega \cos z] \quad (42)$$

При определении величины $2h(1 - \eta)$ по этой формуле, мы не получим значения $\Omega_0 = 2000''$; так, напр. если при $z = 87^\circ$ взять $\Omega = 820''$, как показано в таблице Ньютона, то получится $2h(1 - \eta) = 0.0030899$ и $\Omega_0 = 1898''$.

Если при $z = 90^\circ$ взять $\Omega_0 = 1970''$, то получатся следующие значения Ω , отличающиеся от показанных в Ньютоновой таблице менее, чем на $40''$.

t	Ω	Ньют.	$\Omega - \text{Ньют.}$
87°	828'2	820''	+ 8'2
88	1067.0	1049	+ 18.0
89	1429.7	1392	+ 37.7
$89^\circ 30'$	1702.2	1665	+ 37.2
90	1970	2000	- 30.0

Интересно сопоставить числа, получаемые по столь простым формулам при первой гипотезе Ньютона, с современными таблицами рефракции, определив величины η и h по значениям Ω_{45° и Ω_0 , показанным в этих таблицах, и провычислив по формулам (33) и затем по формуле (38) все остальные. Это сличение, выполненное в таблицах VI и VII, показывает замечательную точность формул Ньютона даже при первой его гипотезе, в которой действительное строение атмосферы заменено воображаемым, имеющим с действительным, казалось бы, столь мало общего. Объяснение этого обстоятельства будет получено ниже, при рассмотрении второй теории Ньютона.

Вычисление рефракции для первой

$$\Omega = \frac{2K \sin z}{\cos z + \sqrt{\cos^2 z + 2h(1 - n)}}$$

1	2	3	4	5	6	7
z	$\cos z$	$\cos^2 z$	$\cos^2 z + 0.0027825$	$\sqrt{(4)}$	$(5) + (2)$	$\log \sin z$
60°	0.50000	0.25000	0.25278	0.50277	1.00277	1.93753
63	.45399	.20611	.20889	.45704	.91103	1.94988
66	.40674	.16543	.16821	.41011	.81685	1.96073
69	.35837	.12843	.13121	.36923	.72060	1.97015
72	.30902	.095491	.098273	.31349	.62251	1.97821
75	.25882	.066989	.069771	.26414	.52296	1.98494
78	.20791	.043227	.046009	.21452	42243	1.99040
81	.15643	.024472	.027254	.16509	.32152	1.99462
82	.13917	.019368	.022150	.14883	28800	1.99575
83	.12187	.014852	.017634	.13279	.25466	1.99675
84	.10453	.010926	.013708	.11708	.22161	1.99761
85	.08716	.0075963	.0103788	.10187	.18903	1.99834
86	.06974	.0048659	.0076484	.08746	.15720	1.99894
87	.05234	.0027391	.0055216	.07431	.12665	1.99940
88	.034899	.0012180	.0040005	.063250	.098149	1.99974
89	.017452	.0003046	.0030871	.055562	.073014	1.99993
89 30'	.008726	.0000762	.0028587	.053466	.062192	1.99998
90	0	0	.0027825			

Таблица Strömgren'a¹ составлена на основании Пулковских таблиц рефракции, в свою очередь составленных на основании совокупности пулковских наблюдений; обладая современною точностью, эта таблица может отличаться от наблюдений лишь в десятых долях секунды. Таким образом можно принять, что таблица Strömgren'a как бы заменяет собою обработанную сводку пулковских наблюдений рефракции, приведенной к температуре 0°С и высоте барометра 760 мм, поэтому, составляя таблицы VI и VII, мы как бы применяем первую теорию Ньютона к пулковским наблюдениям, подобно тому как он сам ее применил к наблюдениям Флемстида.

¹ Dr. Elis Strömgren und Dr. Bendt Strömgren. Lehrbuch der Astronomie, Berlin, 1933.

Таблица V

таблицы Ньютона по формуле:

$$2K = 105.50; \log 2K = 2.02325; 2h(1 - \eta) = 0.0027825$$

8	9	10	11	12	13	14	15
$\log 2K \sin z$	$\operatorname{ctg} (6)$	$\frac{\log \Omega}{\log (8) + (9)}$	Ω	Табл. Ньют.	$(11) - (12)$	$\frac{\Omega}{\text{табл. II}}$	$(11) - (14)$
1.96078	1.99882	1.95960	91°12'	91"	+ 0°12'	91°2	- 0°08'
1.97313	0.04047	2.01360	103.2	103	+ 0.2	103.8	0.0
1.98398	.08785	2.07183	118.0	118	0.0	118.1	0.0
1.99340	.14231	2.13571	136.7	137	- 0.3	136.7	0.0
2.00146	.20586	2.20732	161.2	162	- 0.8	161.2	0.0
2.00819	.28153	2.28972	194.4	196	- 1.1	194.9	0.0
2.01365	.37425	2.38790	244.3	245	- 0.7	244.3	0.0
2.01787	.49280	2.51067	324.1	324	+ 0.1	323.8	+ 0.3
2.01900	.54061	2.55961	362.8	363	- 0.2	363.0	- 0.2
2.02000	.59404	2.61404	411.2	411	+ 0.2	413.0	- 1.8
2.02086	.65441	2.67527	473.4	472	+ 1.4	474.2	- 0.8
2.02159	.72347	2.74506	556.0	553	+ 3.0	557.9	- 1.9
2.02219	.80355	2.82574	669.5	664	+ 5.5		
2.02265	.89740	2.92005	831.9	820	+ 11.9		
2.02299	1.00811	3.03110	1074.2	1049	+ 25.2		
2.02318	1.13659	3.15977	1444.6	1392	+ 52.6		
2.02323	1.20626	3.22949	1696.2	1665	+ 31.2		
0.02325	1.27778	3.30003	2000.0	2000	0.0		

Сопоставление, приведенное на стр. 182, показывает явно систематический характер отклонений: для столб. 2 начиная с $z = 82^\circ$, для столб. 3 начиная с $z = 60^\circ$.

Это дает полное основание думать, что Ньютон, вычислив по первой своей теории величину рефракции и получив числа, обозначенные у нас через Ω , сличил их с значениями рефракции, сообщенными ему Флемстидом, и, заметив систематический ход отклонений начиная от $z = 83^\circ$, он присоединил к вычисленным теоретически числам эти отклонения, так чтобы показанная в его таблице рефракция согласовалась с наблюдениями Флемстида.

Иными словами, он в свою теоретическую таблицу ввел эмпирическую поправку для значений от $z = 83^\circ$ до $z = 90^\circ$. Он не считал нужным это

Вычисление рефракции для

$$\Omega = \eta \theta \left(1 + \frac{1}{2} \alpha \theta + \frac{1}{3} \beta \theta^2 \right);$$

$$\eta = 0.16293; 1 - \eta = 0.83707;$$

$$\log h = 3.253632; \log 2h = 3.55465;$$

$$2K = 120'4$$

1	2	3	4	5	6
z	$\alpha = \cot g z$	αz	$(3) \left(1 - \frac{1}{2} \eta \right) =$ $(3) 0.9185$	$\beta =$ $(4) + 0.41853$	$4h \beta = (5) \cdot 4h$
78°	0.21256	0.045180	0.04150	0.46003	0.003300
81	.15838	.025090	.02305	.44158	3165
82	.14054	.019751	.01814	.43667	3152
83	.12278	.015076	.01385	.43238	3100
84	.10510	.011046	.01016	.42869	3077
85	.08749	.007654	.00703	.42556	3050
86	.06993	.004890	.00449	.42302	3032
87	.05241	.002747	.00252	.42105	3019
88	.03492	.001219	.00112	.41965	3008
89	.01746	.000305	.00028	.41881	3002
89 30	.00873	.000076	.00007	.41860	3000

Примечание. Для этой таблицы коэффициенты K и η определены по значениям рефракции иначе; отсюда различие в значениях величин Ω .

1	2	3	1	2	3
z	Столб. 13 табл. V	Столб. 9 табл. VII	z	Столб. 13 табл. V	Столб. 9 табл. VII
60°	+0.1	-+0.1	83°	+ 0'2	7'2
63	+0.2	0.2	84	+ 1.4	10.5
66	0.0	0.3	85	+ 3.0	15.9
69	-0.3	0.4	86	+ 5.5	24.6
72	-0.8	0.7	87	+11.9	38.3
75	-1.1	1.1	88	+25.2	56.0
78	-0.7	1.4	89	+52.6	69.8
81	+0.1	3.5	89°.0	+31.2	54.0
82	-0.2	5.0	90	0.0	0.0

Таблица VI

таблицы Strömgren'a по формуле:

$$\frac{1}{2}(1-\eta) = 0.418535; 1 - \frac{1}{2}\eta = 0.918535$$

$$\log 4h = 3.85568; 4h = 0.0071726$$

$$2h = 0.0035863$$

7	8	9	10	11	12
(3) + (6)	$\sqrt{7}$	(8) + (2)	$120.4 : (9) = \Omega$	Рефракции по табл. Strömgren'a	$(10) - (11)$
0.048480	0.22018	0.43274	278.3	276.9	+ 1.4
28255	.16809	.32647	368.8	365.3	+ 3.5
22883	.15127	.29181	412.6	407.6	+ 5.0
18176	.13482	.25760	467.4	460.2	+ 7.2
14127	.11885	.22395	537.6	527.1	+ 9.5
10704	.10346	.19095	630.5	614.6	+15.9
7922	.08900	.15893	757.6	733.0	+24.6
5766	.07593	.12834	938.1	899.8	+38.3
4227	.06515	.10007	1203.2	1147.2	+56.0
3307	.05751	.07497	1606.0	1537.1	+68.9
3076	.05546	.06419	1875.7	1821.3	+54.4
			2198.6	2198.6	0.0

60°2 при $z = 45^\circ$ и 2198.6 при $z = 90^\circ$, тогда как в табл. VIIa коэффициенты K , L и M определены

объяснять Флемстиду, как не счел нужным ни давать ему полного изложения своей первой теории, ни даже намека, как им вычислена вторая таблица.

Отсюда ясно, что если бы Ньютона имел в своем распоряжении пулковские наблюдения, то, поступив совершенно так же, как он поступил с наблюдениями Флемстида, он получил бы таблицу Strömgren'a.

Здесь ясно видна выгода такой методы: она допускает графическое слаживание. В самом деле, построить кривую, ординаты которой изображались бы такими числами, как: 245, 324, 363, 411, 472, 553, 664, 820, 1049, 1392, 1665, 2000, в достаточно крупном масштабе, чтобы можно было ручаться за одну единицу последнего знака (т. е. чтобы он изображался длиною не меньше одного миллиметра), почти невозможно, но это не представляет никаких затруднений для столь малых чисел, как показанные в столб. 2 вышеприведенной таблички отклонений, и такая графическая

Таблица VIIa

Вычисление рефракции, показанной в таблице Strömgren'a (1933 г.),
составленной на основании пулковских наблюдений по формуле:

$$\Omega = K \operatorname{tg} z - L \operatorname{tg}^3 z + M \operatorname{tg}^5 z$$

$\log K = 1.78005; \log L = 2.8245; \log M = 4.1584$

1 z	2 $\log \operatorname{tg} z$	3 $\log K \operatorname{tg} z$	4 $\log L \operatorname{tg} z$	5 $\log M \operatorname{tg} z$	6 $K \operatorname{tg} z$	7 $L \operatorname{tg}^3 z$	8 $M \operatorname{tg}^5 z$	9 Ω	10 Рефракция по табл. Strömgren'a	11 (9) — (10)	
12°	1.32747	1.10752			12.81			12.8	12.8	0.0	
15	.42805	.20810			16.14			16.1	16.1	0.0	
18	.51178	.29183			19.58			19.6	19.6	0.0	
21	.58418	.36423			23.13			23.1	23.1	0.0	
24	.64858	.42863			26.88			26.8	26.8	0.0	
27	.70717	.48722	3.9460	30.71	— 0.009			30.7	30.7	0.0	
30	.76144	.54149	2.1088	34.79	.013			34.8	34.8	0.0	
33	.81252	.59257	2.2621	39.14	.018			39.1	39.1	0.0	
36	.86126	.64131	2.4083	43.78	.026			43.8	43.8	0.0	
39	.90837	.68842	2.5496	48.80	.035			48.7	48.7	0.0	
42	1.95444	.73449	2.6878	54.26	.048			54.2	54.2	0.0	
45	0.00000	.78005	2.8245	60.26	.067			60.2	60.2	0.0	
48	.04556	.82561	2.9613	66.93	.091			66.8	66.8	0.0	
51	.09163	.87168	1.0994	74.42	.13			74.3	74.3	0.0	
54	.13874	.91879	1.2407	82.94	.17			82.8	82.7	+0.1	
57	.18748	.96753	1.3871	92.79	.24			92.5	92.5	0.0	
60	.23856	2.01861	1.5402	104.38	.35			104.0	104.0	0.0	
63	.29283	.07288	1.7030	118.27	.51			117.6	117.7	-0.1	
66	.35142	.18147	1.8788	135.85	.76			134.6	134.5	+0.1	
69	.41582	.19587	0.0720	156.99	1.18			155.8	155.8	0.0	
72	.48822	.26827	0.2892	185.47	1.95	0.02	183.5	183.5	0.0		
75	.57195	.35200	0.5403	224.91	3.47	0.10	221.5	221.5	0.0		
78	.67253	.45258	0.8421	283.52	6.95	0.33	276.9	276.9	0.0		
81	.80029	.58034	1.2254	380.49	16.80	1.45	365.1	365.3	-0.2		
82	.85220	.63225	1.3805	428.80	24.02	2.63	407.4	407.6	-0.2		
83	.91086	.69091	1.5571	490.81	36.07	5.16	459.9	460.2	-0.3		
84	.97838	.75843	1.7596	1.0503	573.37	57.49	11.23	527.1	527.1	0.0	
85	1.05805	.88410	1.9986	1.4486	688.81	99.68	28.09	617.2	614.6	+2.6	

Примечания:

- Коэффициенты K , L , M определены по значениям рефракций, показанным в таблице Strömgren'a при $z = 45^\circ$, $z = 78^\circ$ и $z = 84^\circ$; по этим коэффициентам вычислены значения Ω .

2. Сличение чисел Ω и чисел таблицы Strömgren'a до $z = 84^\circ$ показывает полное их совпадение, поэтому, если бы Ньютона располагал не наблюдениями Флемстида, а пулковскими, на которых основал свою таблицу Strömgren, то до $z = 84^\circ$ таблица Ньютона совпадала бы с таблицею Strömgren'a, данной в его «Lehrbuch der Astronomie», Berlin, 1933.
3. В таблице Strömgren'a предполагается температура $t^\circ = 0^\circ$ и высота барометра 760 мм. Если показанную в руководстве S. Newcomb'a — «Spherical Astronomy» (1906), таблицу рефракции привести к 0°C и высоте барометра 760 мм, то получается полное ее совпадение с таблицей Strömgren'a.

Таблица VII

Вычисление рефракции для таблицы Strömgren'a по первой теории Ньютона
 $K = 60''20$; $\eta = 0.16293$; $\log h = \bar{3.25362}$

$$L = \frac{1}{2}(1 - \eta) hK = 0''04518; \log L = \bar{2.6544}$$

$$M = (1 - \eta) hL = 0''00006758; \log M = \bar{5.8298}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
z	$K \operatorname{tg} z$ (см. табл. VI)	$L \operatorname{tg}^3 z$	$M \operatorname{tg}^5 z$	Ω по форм. (23)	Ω по форм. (23) (см. табл. VI)	Ω	по табл. Strömgren'a	$(7) - (8)$
60°	104''38	— 0.23		104''1		104''1	104''0	+ 0.1
63	118.27	0.27		118.0		118.0	117.7	0.2
66	135.35	0.51		134.8		134.8	134.5	0.3
69	156.99	0.80	0.01	156.2		156.2	155.8	0.4
72	185.47	1.29	0.02	184.2		184.2	183.5	0.7
75	224.91	2.35	0.05	222.6		222.6	221.5	1.1
78	283.52	4.70	0.16	279.0	278.''3	279.0	276.9	2.1
81	380.49	11.36	0.68	369.4	368.8	368.8	365.3	3.5
82	428.80	16.26	1.23	418.4	412.6	412.6	407.6	5.0
83	490.81	24.38	2.42	468.2	467.4	467.4	460.2	7.2
84	573.37	38.87	5.27	539.2	537.6	537.6	527.1	10.5
85	688.81	67.36	13.18	633.9	630.5	630.5	614.6	15.9
86					757.6	757.6	733.0	24.6
87					938.1	938.1	899.8	38.8
88					1203.2	1203.2	1147.2	56.0
89					1606.0	1606.0	1537.1	68.9
89 30'					1875.7	1875.7	1821.3	54.4
90					2198.6	2198.6	2198.6	0.0

Примечание. Числа столб. 5 рассчитаны по теоретическим значениям L и M (34).

обработка будет обладать не меньшею точностью, нежели самая полная и строгая теория.

В этом смысле первая теория Ньютона не утратила своего значения и сейчас, и не составит ли для учащихся полезного упражнения такая задача: по данной сводке наблюдений по формуле (33) вычислить рефракцию для значений z от 0° до 78° , затем от 78° до 90° вычислить значения рефракции по формуле (38), как показано в табл. V, полученные отступления сгладить графически и таким образом составить полную таблицу рефракции? Это потребует у учащегося затраты трех или четырех часов работы, но зато внесет полную ясность и отчетливость в дело.

§ 6. Прежде чем приступить к выводу формул, относящихся ко второй теории Ньютона, приведем несколько выдержек из его переписки с Флемстидом, относящихся, главным образом, к этой теории.

При письме от 11 октября 1694 г. Флемстид доставил Ньютону следующую табличку рефракции близ горизонта и, кроме того, подробную сводку наблюдений, копии которой, к сожалению, в материалах, доставленных Бальи, не оказалось.

Табличка, сообщенная Флемстидом, такова:

Зенитное расстоя- ние	Р е ф р а к ц и я			
	по Cassini	по La Hire	по Boucher	по наблюдениям
90°	32' 20"	32' 0"	30' 0"	33' 0"
89	27 56	26 25	25 12	23 0
88	24 4	20 43	18 24	17 30
87	16 6	15 44	13 55	14 0

По поводу этой таблички Флемстид замечает: «Как вы видите, все таблицы грешат в том, что в них рефракция уменьшается приблизительно на $5'$ между 90° и 89° , тогда как между 89° и 88° уменьшение показано больше, чем $6'$. Напротив того, наблюдения дают $5 \frac{1}{2}'$ между 88° и 89° и $10'$ между 89° и горизонтом. Какова этому причина, я не имею теперь времени, чтобы ее исследовать, но кажется, что среда, в которой рефракция происходит, не равномерная, как это предполагали составители таблиц в своих теориях.

«Этот вопрос заслуживает вашего внимания, и мне желательно, чтобы вы об этом в свободное время подумали. Наблюдения и мои из них выводы неоспоримы (incontestable)».

В ответ на это письмо Ньютона 24 октября 1694 г. пишет Флемстиду:

“... Сердечно благодарю вас за ваши сообщения, особенно за таблицу рефракции вблизи горизонта. Причину различной величины рефракции при той же самой высоте близ горизонта я усматриваю в различии нагревания воздуха в нижних его слоях, ибо когда воздух от теплоты разрежен, он преломляет менее, когда же от холода он уплотнен, он преломляет сильнее. Эта разница должна быть более чувствительной, когда луч идет по нижним слоям атмосферы на протяжении многих миль, ибо лишь эти слои то разрежаются, то уплотняются теплом и холодом, тогда как средние и верхние слои всегда холодные. Я того мнения, что рефракция в верхних слоях слегка изменяется вместе с весом воздуха, показываемым барометром, ибо когда воздух тяжелее и, значит, плотнее, он преломляет более, нежели когда он легче и реже. Я бы желал, чтобы при всех ваших наблюдениях, где надо принимать во внимание рефракцию, вы записывали высоту барометра и теплоту воздуха, чтобы изменения рефракции от веса и теплоты воздуха могли впоследствии быть учтены, когда величины этих изменений станут известны».

По поводу этого замечательного письма необходимо заметить, что барометр, который Ньютон называет «бароскоп», в то время существовал уже более 50 лет и был в общем употреблении, но термометра со шкалою, отнесенными к двум постоянным точкам, еще не было, а были лишь термоскопы с произвольными шкалами, не отнесенными к определенным точкам.

Флемстид совету Ньютона не последовал, хотя и замечал высоты барометра в целях метеорологических.

Затем, при письме от 17 ноября 1694 г., упомянутом выше, Ньютон послал Флемстиду свою первую таблицу рефракции, а потом и теорему, служащую основанием этой таблицы.

В письме от 26 января 1694—1695 г. (двойное обозначение года, ибо в то время в Англии новый год начинался в марте), между прочим, Ньютон пишет:

“... Составление новой таблицы рефракции заняло все мое время после праздников, но до сих пор я затратил свой труд на бесплодные вычисления, вследствие трудности этого дела.

«Однако, приняв в соображение, что такая таблица является для астрономии основною и что вами затрачено столько труда, чтобы достичь необходимый материал, я хочу ее закончить, чтобы иметь возможность что-либо поднести вам за те труды, которые вы для меня потратили при ваших наблюдениях.

«Однако я не совсем напрасно потратил свой труд, ибо я нашел новую теорему, которая делает вычисление рефракции весьма легким и которой я могу удовольствоваться, если не придумаю чего-либо лучшего.

«Сейчас я не совсем здоров, но надеюсь настолько поправиться через несколько дней, что смогу довести это дело до конца».

Ньютона, между прочим, упоминает в письме от 16 февраля 1694—1695 г.: «Я все еще работаю над новой таблицей рефракции».

Наконец 15 марта он пишет:

«... Теперь я закончил таблицу рефракции и посыпаю вам прилагаемую копию ее [в бумагах, доставленных Бальи, этой копии не оказалось].

«При спокойном состоянии неба и высоте светила 3° , рефракция составляет $13'20''$; вы можете положиться, что для всех высот, превышающих 10° , таблица точна до 1 секунды; при высотах от 10° до 3° наибольшая погрешность не превышает 2 или 3 секунд. Если при высоте 3° рефракция больше или меньше $13'20''$, то рефракцию при всех высотах, которые больше 3° , следует увеличить или уменьшить в той же пропорции. Через несколько дней я вышлю вам другие обещанные мною таблицы».

По упоминаемому в этом письме значению $13'20''$ рефракции при высоте 3° Био справедливо заключил, что опубликованная в 1721 г. таблица и есть вторая таблица Ньютона.

Не получая от Флемстида нужных ему наблюдений Луны, Ньютон 9 июля 1695 г. пишет Флемстиду гневное письмо, начинающееся следующими словами:

«После того как я выручил вас в том, в чем вы во всех трех своих работах застряли, т. е. в теории спутников Юпитера, в вашем каталоге неподвижных звезд и в вычислении мест Луны по наблюдениям, охотно сообщив вам о всех этих вещах все то, что в своем роде было вполне совершенно и большей ценности, нежели многочисленные наблюдения, и что в одном случае (это, видимо, относится к рефракции) стоило мне более двух месяцев упорной работы, которую я никогда бы не предпринял как для вас и о которой я вам сообщал, что она предпринята, чтобы что-либо дать вам взамен наблюдений, которыми вы меня обнадежили, а теперь, когда мною все сделано, я не могу рассчитывать на их получение и на исправление ваших сводок...»

«Я не имею намерения писать о рефракции и не желаю, чтобы таблица рефракции была распространяема».

Лишь через 26 лет после этого Ньютон разрешил Галлею опубликовать эту таблицу, но даже без малейшего намека на способ ее составления, может быть потому, что способ составления таблицы его не вполне удовлетворял, ибо вблизи горизонта теоретически вычисленные числа не вполне увязывались с числами Флемстида, и Ньютон остановился на этих наблюденных значениях. Это нельзя ему ставить в упрек, напротив, в подобных случаях надо следовать его примеру, ибо он составлял не таблицу математической функции, а таблицу значений физической величины, кото-

рую и надо согласовывать с действительностью, а не с математической фикцией, но само собою разумеется, что это надо оговаривать.

Далее в этом же письме находится следующее место, которое хотя и не относится к теории рефракции, но столь замечательно, что мы его приведем; вот что пишет Ньютон:

“... Что же касается наибольшей величины параллактического неравенства (Луны), то о нем я знаю не более того, о чем уже писал вам. Это — очень малая величина, едва превышающая 2 или 3 или, в крайнем случае, 4 минуты и настолько спутанная с другими неравенствами, что после того, как вы пропычите ваши 30 наблюдений, вы о ней будете знать не более того, что теперь».

Видимо, Ньютон ясно сознавал, что сопоставление теоретического и выведенного из наблюдений значений этого неравенства, которое, как впоследствии оказалось, равно $2'6''$, доставляет некоторое соотношение между параллаксом Луны, параллаксом Солнца и отношением масс Луны и Земли.

Эта последняя величина может быть определена по отношению высоты прилива во время сизигий и квадратур, что Ньютоном было показано; значит, по величине параллактического неравенства Луны имелась возможность определить параллакс Солнца, т. е. расстояние от Земли до Солнца, а по нему и все прочие *абсолютные* размеры солнечной системы, так сказать, не выходя из кабинета, что и было сделано через 125 лет Лапласом.

Отсюда становится понятной та настойчивость, с которой Ньютон требовал от Флемстида наблюдений Луны.

§ 7. После этих замечаний перейдем к изложению второй теории Ньютона, поскольку о ней можно догадываться по кратким его указаниям.

Для второй своей теории он попрежнему принимает, что показатель преломления пропорционален плотности атмосферы в рассматриваемом ее слое, плотность же атмосферы он определяет по законам гидростатики и закону Бойля-Мариотта, как это сделано в предложении XXII второй книги «*Principia*», на которое он ссылается.

Это предложение высказано Ньютоном в такой форме:

Предложение XXII. Теорема XVII. *Если плотность какой-либо жидкости пропорциональна давлению и эта жидкость находится под действием центростремительной силы, направленной вниз и обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра, то я утверждаю, что когда расстояния образуют гармоническую прогрессию, то плотности жидкости в этих расстояниях образуют геометрическую прогрессию.*

Затем, в поучении к этой теореме, он рассматривает общий случай, когда притяжение пропорционально какой-либо степени расстояния, а плотность пропорциональна любой степени давления, и в заключение говорит:

“... перебирать все случаи слишком долго; впрочем, опытами установлено, что плотность воздуха или в точности пропорциональна давлению, или весьма к тому близка, поэтому плотность воздуха в земной атмосфере пропорциональна весу всего накрывающего воздуха, т. е. высоте ртути в барометре”.

Переводя геометрические рассуждения Ньютона на современные аналитические, мы увидим, что, обозначая плотность воздуха через q , давление через p , ускорение силы тяжести у поверхности Земли через g_0 , на расстоянии же ρ от центра Земли — через g и радиус Земли, принимаемый за шар, через a , будем иметь уравнения:

$$g = g_0 \frac{a^2}{\rho^2}$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{q}{q_0}$$

$$dp = -gq \cdot d\rho$$

следовательно будет

$$\frac{dq}{q} = -\frac{q_0}{p_0} g_0 a^2 \cdot \frac{dp}{\rho^2} \quad (43)$$

Отсюда, заметив, что при $\rho = a$ должно быть $q = q_0$, следует

$$\log \frac{q}{q_0} = -\frac{q_0}{p_0} g_0 a^2 \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\rho} \right]$$

Положив

$$\frac{q_0 g_0}{p_0} a = k \quad \text{и} \quad \frac{\rho}{a} = 1 + s \quad (43')$$

получим

$$q = q_0 e^{-ks/1+s}$$

а так как показатель преломления μ принимается в линейной зависимости от q , то будет

$$\mu = 1 + \epsilon e^{-ks/1+s} \quad (44)$$

В простейшем случае, когда, по малости величины s , изменяемостью силы тяжести с высотою над поверхностью Земли можно пренебречь, вместо уравнения (43) будем иметь

$$\frac{dq}{q} = -\frac{q_0}{p_0} g_0 a \cdot d\rho$$

и следовательно, будет:

$$q = q_0 e^{-ks} \quad (45)$$

$$\mu = 1 + \varepsilon e^{-ks} \quad (46)$$

Для упрощения выкладок, мы примем формулу (46), ибо для нашей цели точность ее вполне достаточна.

Очевидно, что в этой формуле k есть отвлеченное безразмерное число, поэтому безразлично, какими мерами пользоваться при его вычислении; возьмем меры метрические, в которых теперь выражаются все физические данные, тогда будет:

$$g_0 = 9.81; q_0 g_0 = 1.293 \text{ кг}; p_0 = 10\ 300 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}; a = 6\ 380\ 000 \text{ м}$$

и мы получим

$$k = \frac{1.293}{10\ 300} \cdot 6\ 380\ 000 = 800$$

На основании общей формулы (14) будет

$$\frac{1}{c} \Omega = \int_0^\infty \frac{k\varepsilon \cdot e^{-ks} \cdot ds}{(1 + \varepsilon e^{-ks}) \cdot \sqrt{(1 + \varepsilon e^{-ks})^2 (1 + s)^2 - c^2}} \quad (47)$$

причем

$$c = (1 + \varepsilon) \sin z$$

Прежде чем развивать ту методу, которую мог применить Ньютона к вычислению этого интеграла, выведем одну формулу, полученную Лапласом, но вывод которой настолько элементарен, что он не требует большего математического аппарата, нежели тот, которым Ньютон уже владел.

Положим, что

$$0 < z < 90^\circ$$

по предложению вообще

$$\mu = 1 + \varepsilon \frac{q}{q_0}$$

пусть будет

$$\frac{q}{q_0} = f(s) = f\left(\frac{\rho}{a}\right)$$

причем $f(s)$ есть какая угодно заданная функция s .

Общее выражение рефракции будет

$$-\frac{1}{c} \Omega = \int_0^s \frac{\varepsilon f'(s)}{1 + \varepsilon f(s)} \cdot \frac{ds}{\sqrt{Q}} \quad (48)$$

причем

$$Q = [1 + \varepsilon f(s)]^2 (1 + s)^2 - (1 + \varepsilon)^2 \sin^2 z \quad (49)$$

и S есть значение s для верхней границы атмосферы, т. е. то, начиная с которого, с тою точностью, с которой вычисление производится, можно принимать $f(s) = 0$. Это значение S составляет около 0.01.

Мы видели, что ϵ — весьма малая дробь, всеми степенями которой выше первой можно пренебречь, так что приближенно будет

$$Q \approx [1 + 2\epsilon f(s)]^2 (1 + s)^2 - (1 + 2\epsilon) \sin^2 z$$

Интегрируя по частям (прием этот Ньютона был известен), получим

$$-\frac{1}{c}\Omega = \left[\frac{1}{\sqrt{Q}} \log(1 + \epsilon f(s)) \right]_0^S + \frac{1}{2} \int_0^S \log(1 + \epsilon f(s)) \cdot \frac{\dot{Q}}{\sqrt{Q^3}} \cdot ds$$

Но, с точностью до величины высших порядков относительно ϵ , будет

$$\log[1 + \epsilon f(s)] = \epsilon f(s)$$

и мы получим

$$\frac{1}{c}\Omega = \frac{\epsilon}{(1 + \epsilon)} \cdot \frac{1}{\cos z} - \frac{\epsilon}{2} \int_0^S f(s) \frac{\dot{Q}}{Q^{3/2}} \cdot ds = \frac{\epsilon}{\cos z} - \frac{\epsilon}{2} \int_0^S f(s) \frac{\dot{Q}}{Q^{3/2}} \cdot ds$$

Интеграл в правой части имеет множителем $\frac{\epsilon}{2}$, поэтому в этом интеграле можно в выражении Q все члены, содержащие множитель ϵ , отбросить, тогда будет:

$$Q \approx (1 + s)^2 - c^2 \quad (50)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^S f(s) \frac{\dot{Q}}{Q^{3/2}} \cdot ds = \int_0^S f(s) \frac{(1 + s) ds}{[(1 + s)^2 - c^2]^{3/2}}$$

Функция $f(s)$ в пределах интегрирования остается положительной, поэтому, если мы возьмем, вместо $(1 + s)$, его наибольшее значение $1 + S$, т. е. кругло 1.01, а в знаменателе — его наименьшее значение 1, то будет

$$\int_0^S f(s) \frac{1 + s}{[(1 + s)^2 - c^2]^{3/2}} \cdot ds < \frac{1 + S}{(1 - c^2)^{3/2}} \cdot \int_0^S f(s) ds$$

но $f(s) = \frac{q}{q_0} = f\left(\frac{\rho}{a}\right)$, значит будет

$$\int_0^S f(s) ds = \frac{1}{a} \int_0^R \frac{q}{q_0} d\rho = \frac{1}{q_0 a} \cdot \int_0^R q d\rho$$

но интеграл $\int_0^R q d\rho$ представляет массу столба атмосферы, площадь сечения

которого есть единица (скажем 1 м²), обозначим эту массу через M ; таким образом будет

$$\int_0^s f(s) ds = \frac{M}{q_0 a} = \frac{Mg_0}{q_0 g_0 a}$$

но Mg_0 есть вес указанного столба воздуха, равный весу столба (скажем 760 мм) ртути в барометре; тогда, принимая за единицу веса килограмм и за единицу длины метр, получим $Mg_0 = 10300$ кг. Величина $q_0 g_0$ есть вес куб. метра воздуха при атмосферном давлении, т. е. 1.293 кг; $a = 6389000$ м есть радиус Земли, таким образом будет

$$\frac{M}{q_0 a} = \frac{Mg_0}{q_0 g_0 a} = \frac{10300}{1.293 \cdot 6380000} = \frac{1}{800}$$

и значит, в круглых числах будет $\frac{1+S}{800} \approx \frac{1}{790}$, следовательно

$$\frac{\epsilon}{2} \int_0^s f(s) \frac{\dot{Q}}{Q^{3/2}} ds < \frac{1}{790} \frac{\epsilon}{\cos^3 z}$$

Обозначая через χ — положительную правильную дробь, получим, с точностью до членов высших порядков относительно ϵ , выражение

$$\Omega = \epsilon \operatorname{tg} z - \frac{\chi}{790} \epsilon \operatorname{tg}^3 z \quad (51)$$

или, при понятном обозначении и расчете в секундах,

$$\Omega = K \operatorname{tg} z - L \operatorname{tg}^3 z \quad (52)$$

В этой формуле замечательно то, что, независимо от вида функции $f(s)$,

$$K = 206265 \epsilon$$

как мы имели при первой гипотезе Ньютона, и что L — малая, по сравнению с K , дробь. Это и есть теорема Лапласа. Из самого ее вывода следует, что она имеет место при таких зенитных расстояниях, при которых имеет место приближенное выражение (50), т. е. отброшенные в нем члены, действительно, могут быть пренебрегаемы по сравнению с удержанными, а это имеет место приблизительно пока $z \leq 80^\circ$.

Само собою понятно, какое упрощение вносит формула (52) в составление таблицы рефракции по данным наблюдениям. Возможно, что это и есть та теорема, упрощающая дело, о которой Ньютон пишет 26 января 1695 г., но, конечно, нельзя этого утверждать с уверенностью.

Нетрудно убедиться, продолжив разложение, что будет

$$\Omega = K \operatorname{tg} z - L \operatorname{tg}^3 z + M \operatorname{tg}^5 z \quad (33)$$

Определив входящие в эту формулу постоянные по значениям рефракции для $z = 45^\circ, 75^\circ, 85^\circ$ и проделав затем контрольное вычисление по формулам квадратур для $z = 86^\circ$ и по формуле (33), мы увидим, что эта формула применима для значений z до 86° , ограничиваясь тою точностью, которой довольствовался Ньютона.

Вычисление это выполнено в табл. VIII.

Таблица VIII

Вычисление рефракции для второй теории Ньютона, по формуле

$$\Omega = K \operatorname{tg} z - L \operatorname{tg}^3 z + M \operatorname{tg}^5 z$$

$$\log K = 1.7268; \log L = 2.7592; \log M = 5.9651$$

1	2	3	4	5	6	7
z	$K \operatorname{tg} z$	$L \operatorname{tg}^3 z$	$M \operatorname{tg}^5 z$	Ω	По табл. Ньютона (1721)	$(5) - (6)$
30°	30.78	—	0.01	30.77	31''	-0.23
35	37.33		.02	37.31	38	-0.69
40	44.73		.03	44.70	45	-0.30
45	53.31		.06	53.25	54	-0.75
50	63.14		.10	63.04	64	-0.96
55	76.14		.17	75.97	76	-0.03
60	92.34		.30	92.04	92	+0.04
65	114.3		0.57	113.7	114	-0.3
70	146.5		1.2	145.3	146	-0.7
75	199.0		3.0	196.0	197	-1.0
76	213.8		3.7	210.1	211	-0.9
77	230.9		4.7	226.2	227	-0.8
78	250.8		6.0	244.8	245	-0.2
79	274.3		7.8	266.5	267	-0.5
80	302.4		10.8	291.5	292	-0.4
81	336.6		14.5	323.0	322	+1.0
82	379.3		20.1	360.9	360	-0.9
83	434.2		31.1	406.4	407	-0.6
84	507.2		49.4	465.0	465	0.0
85	609.3		85.7	541.6	542	-0.4
86	762.4		168.0	649.6	648	+1.6

Вычислено по квадратурам (см. табл. X)

z	Ω	Ньют.	$\Omega - N$
86°	649.6	648.1	+ 1.9
87	799.3	800	- 0.7
88	1025.2	1028	- 2.8
89	1392.8	1387	+ 5.8
89 30'	1683.7	1655	+ 28.7
90	2057.8	2025	+ 32.8

Примечание. В письме к Флемстиду от 16 февраля 1695 г. Ньютон указывает, что приняв при 87° рефракцию равной $13\frac{2}{3}''$, он получает горизонтальную рефракцию в $34'$, а приняв при 87° рефракцию $14'$, он получает горизонтальную рефракцию *несколько более* $37'$. Как видно, обе эти величины больше взятой им $33'\frac{45}{4}''$.

Таким образом остается показать, как вычисляется рефракция для $z \geq 86^\circ$ по формулам квадратур.

§ 8. Прежде чем приступать к численным вычислениям по формулам приближенных квадратур величины Ω , определяемой равенством

$$\frac{1}{kc\varepsilon} \Omega = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ks}}{1 + \varepsilon e^{-ks}} \cdot \frac{ds}{\sqrt{Q}} \quad (47)$$

причем

$$Q = (1 + \varepsilon e^{-ks})^2 (1 + s)^2 - c^2 \quad (47')$$

$$c = (1 + \varepsilon) \sin z$$

надо привести входящий в это равенство интеграл к виду, удобному для численных вычислений, так чтобы результат получался с требуемой точностью без излишней затраты труда и времени.

Наибольшее значение рефракции при спокойном состоянии атмосферы составляет кругло 2000'' для $z = 90^\circ$ и 800'' для $z = 87^\circ$; Ньютон довольствовался точностью до 3'', поэтому относительная погрешность $\frac{1}{1000}$ для этих пределов изменяемости z вполне допустима, а такая точность теперь достижима при пользовании хорошей логарифмической линейкой, длиною в 50 см, в особенности если указатель снабжен линзой. На такой линейке мы и производили все наши вычисления, а затем для контроля повторили их пятизначными логарифмами. В прилагаемых таблицах приведены лишь эти последние вычисления, как более удобные для проверки.

Величина $\epsilon \approx \frac{1}{3800}$; это сразу показывает, что в левой части равенства можно полагать

$$c = \sin z$$

и в правой части, вне знака корня, множитель $1 + \epsilon e^{-ks}$ заменить через 1. Величина $k \approx 800$, значения показательной функции e^{-ks} таковы:

$$s = \frac{1}{100}; \quad ks = 8; \quad e^{-ks} = \frac{1}{2981}$$

$$s = \frac{1}{80}; \quad ks = 10; \quad e^{-ks} = \frac{1}{22026}$$

отсюда ясно, что за верхний предел, вместо бесконечности, можно брать $S = \frac{1}{100}$, что тотчас же и подтверждается пробным вычислением.

Величины

$$(1 + \epsilon e^{-ks})^2 = 1 + 2\epsilon e^{-ks} + \epsilon^2 e^{-2ks}$$
$$c^2 = \sin^2 z + 2\epsilon \sin^2 z + \epsilon^2 \sin^2 z$$

в выражение Q входят не величины 1 и $\sin^2 z$, а их разность $\cos^2 z$, поэтому, когда $z \neq 90^\circ$, то члены низшего порядка, по сравнению с которыми члены, содержащие множитель ϵ^2 , могут быть отброшены, суть:

$$2\epsilon e^{-ks}; \quad 2\epsilon \sin^2 z; \quad \cos^2 z$$

соответственно чему Q и заменяется его приближенным выражением.

Для удобства вычислений полагаем

$$ks = \sigma$$

тогда будет

$$\frac{1}{c\epsilon} \Omega = \int_0^H \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q(\sigma)}} \cdot d\sigma$$

причем

$$Q(\sigma) = \frac{2\sigma}{k} + 2\epsilon e^{-\sigma} + \cos^2 z - 2\epsilon \sin^2 z + \frac{\sigma^2}{k^2} + 4\epsilon \frac{\sigma}{k} e^{-\sigma} + 2\epsilon \frac{\sigma^3}{k^2} e^{-\sigma}$$

$H \approx 8.00$, так что $0 \leq \sigma \leq 8$; сравнив относительную величину членов и приняв во внимание множитель $e^{-\sigma}$ в числителе полинтегральной функции, легко убедиться, что с принятою для нашего вычисления точностью последние три члена в выражении Q , пока $z \leq 89^\circ 30'$, могут быть отброшены, как не оказывающие влияния на результат вычисления при указанной степени точности его.

Таким образом будет

$$Q = \frac{2\sigma}{k} + 2\epsilon e^{-\sigma} + (\cos^2 z - 2\epsilon \sin^2 z) \quad (48)$$

В это выражение входят постоянные ϵ и k . Первая из этих постоянных определяется проще всего по значению рефракции при $z = 45^\circ$ (мы пользуемся лишь методами, которыми располагал Ньютона: метода наименьших квадратов была изобретена через 80 лет после его смерти) и постоянная ϵ оказывается равной:

$$\epsilon = \frac{53.31}{206265} = 0.0002585; \quad \log \epsilon = 4.41238$$

Величина k , определенная по законам физики и гидростатики, оказывается равной 800; но, повидимому, Ньютон не полагался на это значение, а определял его по значению рефракции при 87° , принимаемому им в $800''$, и проверял по значению рефракции при $z = 90^\circ$, причем получал указанную им в письме от 15 марта невязку.

Пользуясь приближенными квадратурами, определение k совершают последовательными приближениями, порядок выполнения которых настолько очевиден, что на нем нет надобности останавливаться в деталях.

Вычисления, послужившие для определения величины k , приведены полностью в помещаемой ниже табл. IX. Полученное значение $k = 790$ сходится весьма близко с теоретическим его значением $k = 800$, соответствующим давлению 760 мм и температуре 0°C .

Интегралы вычислены по приближенной формуле квадратур Симпсона, как подробнее пояснено ниже.

Значения при 88° и 89° , показанные в таблице Ньютона, заметно разнятся от вычисленных нами по формулам приближенных квадратур. Это показывает, что или Ньютон вычислял их как-нибудь иначе, или же что он воспользовался наблюдениями Флемстида и придержался не вычисленных теоретических значений, а этих наблюденных, учитя всю совокупность наблюдений Флемстида, произведенных столь тщательно, что Флемстид называет их «неоспоримыми».

§ 9. При $z = 90^\circ$, когда $s = 0$, возьмем ли мы точное выражение Q , или приближенное, оба обращаются в нуль, и формулы приближенных квадратур неприменимы.

Ньютон имел различные возможности для того, чтобы обойти это затруднение. Как он в данном случае поступил, — совершенно неизвестно; мы приводим некоторые из возможных приемов, не выходящих из пределов тех аналитических методов, которыми Ньютон в то время владел.

1-й прием. Не развивая в деталях относящиеся сюда формулы, мы наметим их в общих чертах.

Мы имели равенство

$$\frac{1}{k\epsilon} \Omega = \int_0^\infty \frac{e^{-ks} \cdot ds}{\sqrt{Q(s)}} .$$

при $s = 90^\circ$ будет $c = 1$ и

$$Q(s) = (1 + \epsilon e^{-ks})^2 (1 + s)^2 - (1 + \epsilon)^2$$

очевидно, что при $s = 0$ будет $Q = 0$. Пусть будет

$$\lambda = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Q(s)}{s} = 2 [1 - k\epsilon + \epsilon]$$

так как $k\epsilon \approx \frac{1}{4}$, то будет $\lambda \approx \frac{3}{4}$.

Очевидно, имеем тождество

$$Q(s) = \lambda s + [Q(s) - \lambda s]$$

значит будет

$$\frac{Q(s)}{s} = \lambda + \frac{Q(s) - \lambda s}{s} = \lambda + F(s) \quad (49)$$

при само собою понятном обозначении; нетрудно убедиться, что при $s = 0$ ни сама функция $F(s)$, ни ее производная $F'(s)$ в нуль не обращаются.

При сделанных обозначениях имеем

$$\frac{1}{ks} \Omega = \int_0^\infty \frac{e^{-ks} \cdot ds}{\sqrt{s} \cdot \sqrt{\lambda + F(s)}}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{ks} \Omega &= \left[2 \sqrt{s} \cdot \frac{e^{-ks}}{\sqrt{\lambda + F(s)}} \right]_0^\infty - 2 \int_0^\infty \sqrt{s} \cdot \left(\frac{e^{-ks}}{\sqrt{\lambda + F(s)}} \right)' ds = \\ &= - 2 \int_0^\infty \sqrt{s} \cdot \left[\frac{e^{-ks}}{\sqrt{\lambda + F(s)}} \right]' ds \end{aligned}$$

ибо величина, стоящая вне знака интеграла при обоих пределах, равна

нулю; таким образом будет

$$\frac{1}{k\varepsilon} \Omega = 2 \int_0^\infty \sqrt{s} \frac{e^{-ks}}{\sqrt{\lambda + F(s)}} \cdot ds + \int_0^\infty \frac{\sqrt{s} \cdot e^{-ks} \cdot F'(s) ds}{[\lambda + F(s)]^{3/2}} \quad (50)$$

К интегралам, стоящим в правой части, если заменить верхний предел через конечную величину $S \approx \frac{1}{100}$, формулы квадратур применимы, но вычисления настолько длинны, что этот прием для практики не является удобным.

2-й прием. Взяв формулу

$$\frac{1}{c\varepsilon} \Omega = \int_0^H \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}} d\sigma$$

в которой $Q = \frac{2\sigma}{k} + 2\varepsilon e^{-\sigma} + \cos^2 z - 2\varepsilon \sin^2 z$, берем между 0 и H ряд промежуточных значений:

$$h_1, h_2, \dots, h_n$$

настолько близких между собою, чтобы для каждого такого промежутка, как $h_{i+1} - h_i$, соответствующий интеграл

$$S_i = \int_{h_i}^{h_{i+1}} \frac{e^{-\sigma} \cdot d\sigma}{\sqrt{Q}}$$

с достаточной точностью вычислялся по простейшей из Ньютоновых формул квадратур, основанной на замене подинтегральной функции параболами второй степени; формула эта получила впоследствии название «формулы Симпсона». Величину же h_1 надо брать настолько малой, чтобы при $z \geq 88^\circ 30'$ и при $z = 90^\circ$, с требуемой степенью точности, можно было положить

$$e^{-\sigma} = 1 - \sigma$$

Таким образом вообще будет

$$Q = \left(\frac{2}{k} - 2\varepsilon \right) \sigma + (1 + 2\varepsilon) \cos^2 z = a\sigma + b$$

$$S_1 = \int_0^{h_1} \frac{1 - \sigma}{\sqrt{ah_1 + b}} \cdot d\sigma = \frac{2}{a} \left(\sqrt{ah_1 + b} - \sqrt{b} \right) \left(1 - \frac{b}{a} \right) \\ - \frac{2}{3} [(ah_1 + b)^{3/2} - b^{3/2}] \cdot \frac{1}{a^2}$$

Когда $z = 90^\circ$, то $b = 0$, и предыдущая формула не только остается применимой, но и значительно упрощается. Этим приемом мы и воспользовались в табл. X как простейшим.

3-й прием. Приняв формулу

$$\frac{1}{c} \Omega = \int_0^H \frac{e^{-\sigma} ds}{\sqrt{Q}}$$

берем между 0 и H ряд промежуточных значений:

$$h_1, h_3, \dots, h_i, \dots, h_{i+1}, \dots, h_n$$

настолько близких между собою, чтобы в каждом таком промежутке можно было, с принятой для вычисления точностью, функцию $Q(\sigma)$ заменить функцией линейной — иными словами заменить соответствующий участок кривой $Q(\sigma)$ или его хордою, или касательной; таким образом для участка между h_i и h_{i+1} будет при $h_i \leq \sigma \leq h_{i+1}$:

по хорде:

$$Q(\sigma) = Q(h_i) + \frac{Q(h_{i+1}) - Q(h_i)}{h_{i+1} - h_i} (\sigma - h_i) \quad (51)$$

по касательной:

$$Q(\sigma) = Q\left(\frac{h_i + h_{i+1}}{2}\right) + Q'\left(\frac{h_i + h_{i+1}}{2}\right) \cdot \left(\sigma - \frac{h_i + h_{i+1}}{2}\right) \quad (52)$$

Вычислив по формуле (51) величину $Q\left(\frac{h_i + h_{i+1}}{2}\right)$ и сравнив ее с значением этой величины, доставляемым формулой (52), получим верхний предел погрешности каждой из этих формул, а значит, найдем, достаточно ли мал избранный промежуток $h_{i+1} - h_i$.

После того как промежутки избраны, для каждого из них проверяем, будет ли с требуемую степенью точности и величина $e^{-\sigma}$ представляться линейной функцией σ , и если в каком-либо из этих промежутков точность такого представления недостаточна, то этот промежуток подразделяем на более мелкие.

Когда промежутки таким образом окончательно установлены, то для каждого из них в отдельности применимы формулы, относящиеся к первой теории Ньютона, по которым и вычисляется значение отклонения луча при прохождении соответствующего этому промежутку слоя атмосферы; сумма этих отклонений и дает полную рефракцию.

Такой способ вычисления, очевидно, применим не только для значения $z = 90^\circ$, но и для других значений, близких к 90° , напр. $89^\circ 45'$ или $89^\circ 50'$, когда прием, изложенный в § 8, неприменим.

Само собою разумеется, что нет надобности производить вычисление по формулам первой теории до границы атмосферы, достаточно применять этот способ до такого значения h_i , начиная с которого величина $Q(h_i)$ уже настолько отличается от нуля, что вычисление по формулам § 8 становится достаточно точным.

Ясно, что этот способ требует большой затраты вычислительной работы, но ведь Ньютон сам указывает, что он на нее затратил «более двух месяцев упорного труда», а в числовых вычислениях он был столь же искусен, как и во всем остальном, и недаром в одном из своих писем, кажется к Коллинсу, он, вспоминая свои работы в молодые годы по разложению функций в ряды, пишет:

«... Мне становится стыдно вспоминать, с каким громадным числом знаков я эти вычисления производил».

Главное неудобство этого приема состоит в том, что надо брать большое число участков, величина которых не столько определяется условием, чтобы функция $Q(s)$, где показательная e^{-ks} умножается на малую величину 2ϵ , могла быть заменена функцией линейной, но чтобы вчислителе эта показательная с тою же относительною точностью могла быть заменена линейной функцией.

Является вопрос, как избавиться от этого недостатка.

§ 10. Положим, что, не обращая внимания на множитель $e^{-\sigma}$, мы выбрали такие промежутки, что в каждом из них величина $Q(\sigma)$ представляется линейной функцией от σ , тогда вычисление рефракции приводится к вычислению интегралов вида

$$N_i = \int_{h_i}^{h_{i+1}} \frac{e^{-\sigma} d\sigma}{\sqrt{a\sigma + b}} \quad (53)$$

Чтобы избавиться от знаменателя и радикала, сама собою напрашивается подстановка

$$a\sigma + b = at^2$$

из которой следует

$$d\sigma = 2t dt$$

и пределы

$$p = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{ah_i + b} = \frac{1}{\sqrt{a}} Q(h_i) \quad \text{и} \quad q = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{ah_{i+1} + b} = \frac{1}{\sqrt{a}} Q(h_{i+1})$$

и мы получим

$$N_i = \frac{2}{\sqrt{a}} e^{\frac{b}{a}} \int_p^q e^{-t^2} dt \quad (54)$$

Крамп, в своем сочинении «Analyse des réfractions astronomiques et terrestres» (1799), указав эту подстановку, составил и обширные таблицы функции

$$\Phi(x) = \int_x^\infty e^{-t^2} dt \quad (55)$$

Кроме того, он составил таблицу логарифмов этой функции и таблицу логарифмов произведения $e^{x^2} \Phi(x)$; аргументы в его таблицах даны через 0.01.

В 1888 г. акад. А. А. Марков, вычислив заново значения функции $\Phi(x)$, издал таблицы, где эта функция дана для аргументов через 0.001 от $x = 0$ до $x = 2.999$ и через 0.01 для x от $x = 3.00$ до $x = 4.80$, с одиннадцатью знаками (см.: André Marcoff. Table des valeurs de l'intégrale, $\int_x^\infty e^{-t^2} dt$, St.-Pétersb., éd. Acad. Sci., 1888).

Очевидно, что

$$\int_p^q e^{-t^2} dt = \int_p^\infty e^{-t^2} dt - \int_q^\infty e^{-t^2} dt = \Phi(p) - \Phi(q)$$

так что при пользовании таблицами Крампа или Маркова вычисление рефракции приводится к вычислению суммы членов вида

$$N = \frac{2}{\sqrt{a}} e^{\frac{b}{a}} [\Phi(p) - \Phi(q)] \quad (56)$$

Но здесь приходится считаться с одним обстоятельством, для вычислений весьма невыгодным.

Положим, что мы хотим вычислить величину Ω с относительной погрешностью, не превосходящей $\frac{1}{1000}$; для этого надо, чтобы в разности $\Phi(p) - \Phi(q)$ было три значащих цифры верных и четвертая — сомнитель-

ная, с погрешностью ± 1 . Аргументы p и q , взятые по хордам из значений Q при вычислении интегралов по формулам квадратур, таковы:

p	q
1.123	1.166
1.160	1.263
1.244	1.431
1.392	1.640
1.608	1.894

и т. д.

Возьмем для примера среднюю пару $p = 1.244$; $q = 1.431$; таблицы Маркова дают

$$\begin{array}{r} \Phi(p) = 0.069595 \quad 11520 \\ \Phi(q) = 0.038105 \quad 05567 \\ \hline \Phi(p) - \Phi(q) = 0.031490 \quad 05953 \end{array}$$

Может показаться, что все хорошо, но ведь аргументы p и q вычислялись, а не задавались, значит при вычислении с четырьмя значащими цифрами по довольно сложным формулам последний знак сомнителен на ± 1 по крайней мере, и значит, истинные значения p и q могли бы быть, напр., такие:

$$p = 1.245; \quad q = 1.430$$

а тогда будет

$$\begin{array}{r} \Phi(p) = 0.069382 \quad 60814 \\ \Phi(q) = 0.038234 \quad 26390 \\ \hline \Phi(p) - \Phi(q) = 0.031148 \quad \dots \dots \end{array}$$

и относительная погрешность составляет

$$\frac{0.00034}{0.03149} \approx \frac{1}{100}$$

а надо $\frac{1}{1000}$, следовательно вычисление аргументов p и q должно быть производимо так, чтобы четыре цифры были верные и лишь пятая сомнительная, а если мы возьмем более близкую пару, напр. 1.160 и 1.263, то будет:

$$\begin{array}{ll} \Phi(1.160) = 0.089423 \quad 66189 & \Phi(1.161) = 0.089163 \quad 58036 \\ \Phi(1.263) = 0.065646 \quad 98863 & \Phi(1.262) = 0.065850 \quad 11925 \\ \hline \Phi(p) - \Phi(q) = 0.023776 \quad 67326 & \Phi(p) - \Phi(q) = 0.023313 \quad 46111 \end{array}$$

Относительная погрешность равна $\frac{46}{2378} \approx 0.02$.

Значит, чтобы получить относительную погрешность в $\frac{1}{1000}$, надо вычислять так, чтобы было пять значащих цифр верных и лишь шестая сомнительная, т. е. по шестизначным логарифмам.

Этот недостаток может быть в значительной степени устранен, так что пятизначные логарифмы дадут достаточную точность, если величину q вычислять не непосредственно по формуле

$$q = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{Q(h_{i+1})}$$

а по формуле

$$q = p + \gamma$$

причем будет

$$\gamma = \frac{(h_{i+1} - h_i) \sqrt{a}}{\sqrt{Q(h_i)} + \sqrt{Q(h_{i+1})}}$$

Выгода вычисления по этим формулам состоит в том, что погрешность в величине q будет такая же, как и в величине p , так что в нашем примере было бы:

$$q = 1.245 \quad p = 1.432$$

тогда

$$\begin{array}{r} \Phi(1.245) = 0.069382 \quad 60814 \\ \Phi(1.432) = 0.037976 \quad 21671 \\ \hline \Phi(p) - \Phi(q) = 0.031406 \quad 39143 \end{array}$$

и относительная погрешность составит

$$\frac{0.00008}{0.03149} \approx \frac{1}{400}$$

Для второй пары, при $p = 1.161$, мы имели бы $q = 1.264$ и было бы

$$\begin{array}{r} \Phi(1.161) = 0.089163 \quad 58036 \\ \Phi(1.264) = 0.065444 \quad 37048 \\ \hline \Phi(p) - \Phi(q) = 0.023719 \quad 21\dots \end{array}$$

и относительная погрешность составила бы

$$\frac{57}{23719} \approx \frac{1}{400}$$

Отсюда ясна выгода непосредственного вычисления по формулам квадратур, где не приходится иметь дело с разностями быстро изменяющихся величин и нет происходящей от этого утраты точности результатов.

Само собою разумеется, что пользование готовыми таблицами функции $\Phi(x)$ значительно упрощает вычисление рефракции, но из этого отнюдь не следует, чтобы отсутствие такой таблицы могло представить какое-либо затруднение для Ньютона при вычислении интегралов вида

$$S(p, q) = \int_p^q e^{-t^2} dt$$

В самом деле, мы имеем вообще

$$\int_p^q = \int_p^{q_1} + \int_{q_1}^{q_2} + \cdots + \int_{q_n}^q$$

Возьмем величины q_1, q_2, \dots, q_n так, чтобы разности между верхним и нижним пределами каждого из интегралов правой части были между собою равны и не больше некоторого числа α , скажем 0.2 или 0.4.

Таким образом вычисление рассматриваемого интеграла $S(p, q)$ приводится к вычислению суммы интегралов вида

$$S(a, a + \alpha) = \int_a^{a+\alpha} e^{-t^2} dt$$

время α — малая величина.

Пусть будет

$$t = a + \frac{\alpha}{2} + x$$

Положив

$$\frac{b}{2} = \frac{a}{2} + \alpha \quad \text{или} \quad b = 2a + \alpha$$

получим

$$S(a, a + \alpha) = e^{-\frac{b^2}{4}} \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-bx} \cdot e^{-x^2} dx$$

Но

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

Величина x^2 не больше $\frac{\alpha^2}{4}$, поэтому, если взять $\alpha = 0.2$, то будет

$$\frac{x^4}{4} \leq \frac{1}{20000}$$

следовательно, довольствуясь относительной точностью в $\frac{1}{20000}$, мы можем в разложении e^{-x^2} взять лишь первые два члена, т. е. $1 - x^2$.

Если довольствоваться относительной точностью в $\frac{1}{1000}$, то можно брать $\alpha = 0.4$. В нашем вопросе точность в $\frac{1}{1000}$ вполне достаточна, и мы можем брать $\alpha = 0.4$ и полагать

$$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} e^{-bx} \cdot e^{-x^2} dx = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} (1 - x^2) e^{-bx} dx$$

Интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} (1 - x^2) e^{-bx} dx &= \frac{1}{b} \left[\frac{\alpha}{b} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{2}{b^2} \right) \right] e^{\frac{\alpha b}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{b} \left[\frac{\alpha}{b} - \left(1 - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{2}{b^2} \right) \right] e^{-\frac{\alpha b}{2}} \end{aligned}$$

так что приближенно (с относительной погрешностью $\leq \frac{1}{1000}$) будет

$$\begin{aligned} \int_p^{p+\alpha} e^{-t^2} dt &= \frac{1}{b} e^{-\frac{b^2}{4}} \left\{ \left[\frac{\alpha}{b} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{2}{b^2} \right) \right] e^{\frac{\alpha b}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\alpha}{b} - \left(1 - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{2}{b^2} \right) \right] e^{-\frac{\alpha b}{2}} \right\} \end{aligned} \tag{57}$$

причем

$$b = 2p + a$$

Ньютон имел в своем распоряжении таблицы как обыкновенных, так и натуральных (Неперовых) логарифмов, и численное вычисление по формуле (57) не представляло в его время никаких затруднений, также и самый вывод этой формулы был ему вполне доступен, но, конечно, нельзя утверждать, что он ею пользовался.

В настоящее время имеются хорошие таблицы функций

$$\operatorname{Sh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{Ch} u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

и их логарифмов. Чтобы воспользоваться такими таблицами, следует формулу (57) писать так:

$$\int_p^{p+\alpha} e^{-t^2} dt = \frac{2}{b} e^{-\frac{b^2}{4}} \left[\left(1 - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{2}{b^2} \right) \operatorname{Sh} \frac{\alpha b}{4} + \frac{\alpha}{b} \operatorname{Ch} \frac{\alpha b}{2} \right] \quad (58)$$

Точность этой формулы для $\alpha \leq 0.2$ составляет $\frac{1}{20000}$, а для $\alpha \leq 0.4$ — до $\frac{1}{1000}$ вычисляемой величины.

Чтобы при вычислении избежать малых разностей больших чисел (это имеет место, когда число p — малое), следует заменить показательную функцию $e^{\pm \frac{\alpha b}{2}}$ ее разложением

$$e^{\pm \frac{\alpha b}{2}} = 1 \pm \frac{\alpha b}{2} + \frac{\alpha^2 b^2}{8} \pm \frac{1}{48} \alpha^3 b^3 + \frac{1}{384} \alpha^4 b^4$$

тогда будет с принятой степенью точности:

$$\int_p^{p+\alpha} e^{-t^2} dt = \frac{1}{384} \alpha e^{-\frac{b^2}{4}} [192 + 8 \alpha^2 b^2 - 16 \alpha^2 - \alpha^4 b^2] \quad (59)$$

Формула эта имеет место, с указанной степенью относительной точности, пока

$$\alpha \leq 0.4; \quad p \leq 1.05$$

Чтобы проверить степень точности этих формул, дадим несколько примеров вычисления по ним.

1-й пример. Вычислить интеграл

$$S = \int_1^{1.2} e^{-t^2} dt$$

В этом случае:

$$b = 2.2; \alpha = 0.2; \frac{ab}{2} = 0.22$$

$$\begin{aligned}
S &= \left\{ \frac{1}{1.1} \left[1 - \frac{1}{100} - \frac{1}{2.42} \right] \cdot \text{Sh } 0.22 + \frac{0.1}{1.21} \text{Ch } 0.22 \right\} e^{-1.21} \\
1 - \frac{1}{100} &= 0.99000 & \log 0.57678 &= \overline{1.76100} \\
\frac{1}{2.42} &= 0.41322 & \text{colog } 1.1 &= \overline{1.95861} \\
\hline
& 0.57678 & \log \text{Ch } 0.22 &= \overline{1.34592} \\
& & & \hline
& & & \overline{1.06553} \\
& & & 0.11629 \\
\log \frac{0.1}{1.21} &= \overline{2.91721} & \log 0.20094 &= \overline{1.30306} \\
\log \text{Ch } 0.22 &= 0.01043 & \log e^{-1.21} &= \overline{1.47451} \\
\hline
& \overline{2.92764} & & \overline{2.77757} \\
& 0.08465 & & S = 0.059920
\end{aligned}$$

По таблицам Маркова:

$$\begin{aligned}
\Phi(1) &= 0.1394028 \\
\Phi(1,2) &= 0.0794822 \\
\hline
S &= 0.0599206
\end{aligned}$$

Относительная погрешность $\approx \frac{6}{600000} \approx \frac{1}{100000} < \frac{1}{20000}$

2-й пример. Вычислить интеграл

$$S = \int_0^{0.4} e^{-t^2} dt$$

В этом случае:

$$\begin{aligned}
p = 0; \alpha = 0.4; b = 0.4; \frac{bx}{2} = 0.08; \frac{2}{b} = 5 \\
1 - \frac{\alpha^2}{4} &= 0.96 & \log 11.54 &= 1.06221(n) & \log 5 &= 0.69897 \\
-\frac{2}{b^2} &= -12.50 & \log \text{Sh } 0.08 &= \overline{1.90355} & \log 0.07900 &= \overline{2.89763} \\
\hline
& -11.54 & & \overline{1.96576n} & & \\
& & & -0.92420 & & \\
& & & \text{Ch } 0.08 &= 1.00320 & \log \overline{e^{-0.04}} = \overline{1.98263} \\
& & & \hline
& & & 0.07900 & & \log S = \overline{1.57923} \\
& & & & & S = 0.37952
\end{aligned}$$

По таблицам Маркова:

$$\begin{aligned}
\Phi(0) &= 0.8862269 \\
\Phi(0.4) &= 0.5065741 \\
\hline
S &= 0.3796528
\end{aligned}$$

Относительная погрешность: $\frac{1}{3795}$.

В этом примере относительная точность получилась меньше по двум причинам: 1) промежуток α в два раза больше и 2) утрата одной значащей цифры в разности

$$1.00320 - 0.92420 = 0.07900$$

От этого последнего недостатка можно избавиться, воспользовавшись формулой (59), для которой имеем:

$$\alpha = 0.4; \quad b = 0.4; \quad \alpha b = 0.16; \quad \alpha^2 b^2 = 0.0256; \quad \alpha^2 = 0.16$$

По этим данным будет:

$$\begin{aligned} 8\alpha^2 b &= 0.2048; \quad 16\alpha^2 = 2.560; \quad \alpha^2 \cdot \alpha^2 b^2 = 0.041; \quad 16\alpha^2 - \alpha^4 b^2 = 2.519 \\ 192.205 - 2.519 &= 189.686 \\ S &= \frac{1}{480} \cdot e^{0.04} \cdot 189.686 \\ \log 189.686 &= 2.278035 \\ \text{colog } 480 &= \overline{3.318759} \\ \log e^{-0.04} &= \overline{1.982628} \\ \log S &= \overline{1.579422} \\ S &= 0.379684 \end{aligned}$$

По таблицам Маркова:

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= 0.8862269 \\ \Phi(0.4) &= 0.5065741 \\ S &= 0.3796528, \end{aligned}$$

Относительная погрешность $\approx \frac{31}{379684} \approx \frac{1}{12000}$

Как видно, вывод формулы (57) и дальнейшее пользование ею требуют лишь самых элементарных приемов анализа, которыми Ньютона в то время, как он занимался вопросом об астрономической рефракции, вполне обладал.

Мы вошли во все приведенные подробности потому, что если не соблюдать всех изложенных предосторожностей, то получить при

вычислении с малым числом знаков достаточно точные результаты невозможны.

В таблицах IX и X дано вычисление рефракции по второй теории Ньютона, согласно формулам, развитым в §§ 8 и 9. Необходимые пояснения даны в примечаниях на самих таблицах.

§ 11. К изложенным в §§ 9 и 10 искусственным приемам приходится прибегать для вычисления рефракции вблизи горизонта, но уже Ньютона, в письме от 24 октября 1694 г., отметил изменчивость этого значения и указал причину его. Чтобы наглядно представить слова Ньютона, вообразим, что весною или осенью мы со стрелки Елагина острова любуемся закатом солнца. Каков же путь солнечного луча по земной атмосфере? Ответ такой. Где-то близ Бергена, у берегов Норвегии, над Атлантическим океаном, этот луч, на высоте около 120 км, входит в крайне холодную атмосферу водорода и гелия, которая постепенно переходит в атмосферу азота, и где-то над Стокгольмом, на высоте 30 км, этот луч входит в область стратосферы, идет в ней над Балтийским морем до Финского залива, над входом в который, на высоте около 11 км, переходит в область тропосферы с ее изменчивой температурой, влажностью и пр. Отсюда понятны слова Г. А. Тихова, сказанные им на заседании 16 октября 1934 г. Института истории науки и техники, что ему случалось наблюдать горизонтальную рефракцию, отличающуюся от показываемых в таблицах 34' не на несколько минут и секунд, а на *два градуса* и более.

Отсюда ясен весь условный смысл этих 34', относящийся к идеально спокойному (в оптическом смысле) состоянию нижних слоев атмосферы.

Теорема Лапласа дает ясный ответ, почему при зенитных расстояниях до 70° — 85° рефракция хорошо согласуется с таблицами: потому что для этих значений она практически от строения атмосферы не зависит, мы же видели, сколь просто эта теорема следует из общих формул Ньютона.

Учет влияния температуры и высоты барометра в месте наблюдения следует из формулы

$$\Omega = K \operatorname{tg} z = 206265 \varepsilon \operatorname{tg} z \quad (60)$$

¹ Замечательно, что Th. v. Oppolzer (*Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten*, Bd. II, S. 37) применяет для вычисления значений интеграла (55) способ приближенных квадратур, основанный на Ньютоновой формуле интерполяции для равноотстоящих ординат, и таким образом составляет десятизначную таблицу величин этого интеграла через 0.01.

Стоит только в Ньютоновой формуле

$$\mu = 1 + \epsilon \frac{q}{q_0} \quad (61)$$

разуметь под ϵ значение показателя преломления у поверхности Земли при нормальной температуре t_0 (скажем 10°C) и нормальной высоте барометра H_0 (скажем 760 мм) и, присовокупив к закону Марриота закон Гей-Люссака, выразить плотность q и подставить ее в формулу (61), как сказанная плотность будет

$$q = q_0 \left(1 + \frac{H - H_0}{H_0} \right) \cdot \frac{1}{1 + \alpha(t - t_0)}$$

и мы получим у поверхности Земли вместо

$$\mu_0 = 1 + \epsilon$$

величину

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 1 + \epsilon \left(1 + \frac{H - H_0}{H_0} \right) \cdot \frac{1}{1 + \alpha(t - t_0)} \approx \\ &\approx 1 + \epsilon + \epsilon \frac{H - H_0}{H_0} - \epsilon \alpha(t - t_0) \end{aligned} \quad (62)$$

и формула (60) примет вид

$$\Omega_1 = 206265 \left[\epsilon + \epsilon \frac{H - H_0}{H_0} - \epsilon \alpha(t - t_0) \right] \operatorname{tg} z$$

иначе:

$$\Omega_1 = \Omega + \left[\frac{H - H_0}{H_0} - \alpha(t - t_0) \right] \Omega \quad (62')$$

Это и есть простейшее выражение поправки на высоту барометра и температуру, так что высказанное Ньютоном в письме от 24 октября 1694 г. предположение получило свое осуществление, примерно, через 120 лет, когда Гей-Люссак дал свой закон расширения газов, но у Ньютона все было готово, чтобы этот закон применять.

Как видно, формула (62) применима до тех пор, пока имеет место формула (60), поэтому для больших зенитных расстояний поправка на высоту барометра и температуру столь же мало надежна, как и суждение по показаниям барометра и термометра в Пулкове о высоте барометра и температуре в области, охватывающей Петрозаводск, Вологду, Калинин, Витебск, Ригу и Ганге.

В таблицах XIa и XIb приведены первая и вторая Ньютоновы таблицы рефракции, в табл. XII дано сличение таблицы Ньютона с таблицами Strömgren'a (1933 г.) и с таблицею Newcomb'a (1906).

Вычисление рефракции по
Определение величины k по значе
 $2\epsilon = 0.0005170$ $k = 800$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
σ	$2\epsilon e^{-\sigma}$	$\frac{2\sigma}{k}$ ($k = 800$)	$(2) + (3)$	$Q =$ (4) + (7)	colog Q	$\log \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\log e^{-\sigma}$	$(7) + (8)$	$\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	Суммы (10) и Симп- сону
0.000	0.0005170	0.0000000	0.0005170	0.0027401	2.56219	1.28110	0.00000	1.28110	19.103	
0.025	5042	0.0000621	5667	27901	2.55438	1.27719	1.98915	1.26634	18.465	
0.050	4918	0.001250	6168	28402	2.54665	2.27532	1.93829	1.25161	17.849	
0.075	4796	1875	6671	28905	2.53903	1.27952	1.96743	1.23695	17.257	
0.100	4678	2500	7178	29419	2.53117	1.26573	1.95657	1.22230	16.684	
0.150	4450	3750	8200	30434	2.51664	1.25832	1.93486	1.19318	15.601	107.18
0.200	4233	5000	0.0009233	31467	2.50214	1.25107	1.91314	1.16421	14.595	
0.250	4026	6250	0.0010276	32510	2.48898	1.24449	1.89143	1.13592	13.675	
0.300	3830	7500	11380	33561	2.47412	1.23706	1.86971	1.10677	12.787	
0.375	3553	0.0009375	12928	35162	2.45393	1.22697	1.83715	1.06412	11.591	87.88
0.450	327	0.0011250	14547	36781	2.43458	1.21719	1.80457	1.02176	11.514	
0.525	3053	13125	16183	38417	2.41548	1.20774	1.77200	0.97974	9.544	
0.600	2837	15000	17837	40071	2.39717	1.19858	1.73942	0.93800	8.670	
0.700	2567	17500	20067	42301	2.37365	1.18682	1.69600	0.85282	7.635	63.51
0.800	2323	20000	22328	44557	2.35108	1.17554	1.65257	0.82811	6.732	
0.900	2102	22500	21602	46836	2.32942	1.16711	1.60914	0.7785	5.941	
1.000	1902	25000	26942	49136	2.30860	1.15430	1.56571	0.72001	5.248	
1.150	1637	28750	30387	52621	2.27884	1.13942	1.50057	0.63999	4.665	40.88
1.300	1409	32500	33909	56143	2.25070	1.12535	1.43541	0.56076	3.637	
1.450	1212	36250	37462	59696	2.22406	1.11203	1.27009	0.48212	3.035	
1.600	0.0001044	40000	41044	63278	2.19875	1.09938	1.30514	0.40452	1.508	
1.800	0.0000855	45000	45855	68089	2.16692	1.08346	1.21827	0.30173	2.008	23.31
2.000	700	50000	50700	72934	2.13707	1.03854	1.13143	0.19997	1.585	
2.200	573	55000	55573	77807	2.10942	1.05446	1.04151	0.10000	1.259	
2.400	469	60000	60469	82703	2.08248	1.04124	2.95770	1.99894	0.998	
2.700	347	67500	67847	9081	2.04537	1.02268	2.82743	1.85011	0.708	9.81
3.000	257	75000	75257	0.0097491	2.01104	1.00552	2.69714	1.70266	0.504	
3.300	191	82500	82691	0.0104955	1.97917	0.98958	2.56679	1.55637	0.360	
3.600	0.0000141	0.0090000	0.0090141	112375	1.94933	0.97466	2.43648	1.41114	0.28	
4.000	0.0000097	0.0100000	0.0100097	122381	1.91256	0.95628	2.26293	1.21921	0.166	3.9
4.400	80	11000	11080	132314	1.87840	0.93920	2.08920	1.02840	0.107	
4.800	43	120000	120043	142278	1.84686	0.92343	3.91540	2.83893	0.69	
5.200	29	130000	130029	152263	1.81740	0.90870	3.6194	2.65064	0.045	
6.000	0.0000013	150000	150013	172247	1.76384	0.88192	3.39445	2.27637	0.019	0.7
6.800	0.0000006	170000	170006	192240	1.71616	0.85808	3.04532	2.90840	0.008	
7.600	3	190000	190003	212237	1.67317	0.83558	4.69497	3.53555	0.003	
8.400	1	0.0210000	0.0210001	232235	1.63406	0.81703	4.34242	3.15945	0.001	
									0.0	

$$\gamma = \cos^2 z - 2\epsilon \sin^2$$

0.025	107.187	2.6797
0.050	87.884	4.3942
0.075	63.512	4.7434
0.100	40.883	4.0833
0.150	23.40	3.4995
0.200	9.877	1.9754
0.300	3.368	1.014
0.400	0.729	0.296
0.800	0.07	0.0600

$$\log S = 1.18113$$

$$\log K = 1.72681$$

$$\log \sin z = 1.99940$$

$$\log \Omega = 2.90734$$

$$\Omega = 807''88$$

Следовательно, $k < 800$

$$\begin{aligned} \gamma &= 0.0022234 & 22.7625 \\ & & - 7.5875 \\ & & \hline S &= 15.1750 \end{aligned}$$

второй теории Ньютона

нию рефракции $\Omega = 800''$ при $z = 87^\circ$ $k = 790$

Таблица IX

1	2	3	4	5	6	7	8
σ	$\delta = \frac{1}{79}(3)$	$Q(790) = Q(800) + \delta$	colog Q	$\log \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\log \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	$\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	Суммы (6) по Симпсону
0.000		0.0027404	2.56219	1.28110	1.28110	19.103	
0.025	0.0000008	27909	2.55426	1.27713	1.26628	18.462	
0.050	0.0000016	28118	2.51641	1.27320	1.25149	17.844	
0.075	24	28929	2.53867	1.26933	1.23686	17.249	
0.100	32	29444	2.53100	1.26550	1.22207	16.678	
.150	47	30481	2.51607	1.25804	1.19190	15.592	107.157
.200	63	31550	2.50128	1.25064	1.16378	14.581	
.250	79	32589	2.48693	1.24346	1.13489	13.642	
.300	0.0000095	33659	2.47290	1.23615	1.10616	12.769	
.375	0.0000118	35280	2.45247	1.22623	1.06338	11.571	87.772
.450	142	36923	2.43270	1.21635	1.02192	10.517	
.525	166	38583	2.41360	1.20680	0.9780	9.524	
.600	190	40261	2.39512	1.19756	0.93698	8.619	
.700	215	42516	2.37145	1.18572	0.88172	7.616	63.416
.800	253	44810	2.34862	1.17431	0.82688	6.712	
.900	285	47121	2.32679	1.16340	0.77254	5.923	
1.000	317	49453	2.30581	1.15290	0.71861	5.231	
1.15	363	52984	2.27586	1.13743	0.63800	4.345	40.730
1.30	412	56555	2.24753	1.12376	0.55917	3.624	
1.45	458	60154	2.22074	1.11037	0.48046	3.023	
1.60	507	63755	2.19528	1.09764	0.40278	2.528	
1.80	570	68659	2.16330	1.08165	0.29992	1.995	22.240
2.00	633	73567	2.13322	1.06666	0.1809	1.578	
2.20	696	78503	2.10512	1.05256	0.09710	1.251	
2.40	760	83463	2.07850	1.03925	1.99695	0.993	
2.70	855	90936	2.04126	1.02063	1.84806	0.705	9.831
3.00	0.0000950	0.0098441	2.00683	1.00342	1.70056	0.502	
3.30	0.0001045	0.0103970	1.97482	0.98741	1.5520	0.358	
3.60	1140	113515	1.94495	0.97248	1.40896	0.256	
4.00	1265	123596	1.90800	0.95400	1.21693	0.165	3.252
4.40	1392	133706	1.8784	0.93692	1.02612	0.106	
4.80	1519	143796	1.84224	0.92112	2.82652	0.069	
5.20	1645	453908	1.81276	0.90638	2.64832	0.044	
6.00	1897	174144	1.75910	0.87955	2.27400	0.019	0.724
6.80	2152	194392	1.71132	0.85561	3.90098	0.008	
7.60	2405	214642	1.66828	0.8314	3.53311	0.003	
8.40	2660	0.0234895	1.62912	0.81456	3.15698	0.001	
						0.074	
	h	Σ	$h\Sigma$				
0.025	107.157	2.6759					
0.050	87.772	4.3886					
0.075	63.416	4.7562					
0.100	40.730	4.0780					
0.150	22.210	3.3360					
0.200	9.831	1.9662					
0.300	3.252	0.9756					
0.400	0.724	0.296					
0.800	0.074	0.0592					
		22.5238					
		7.5078					
		$S = 15.0155$					

$\log S = 1.17653$

$\log K \sin z = 1.72621$

$\log \Omega = 2.90274$

$\Omega = 799.3, \text{ вместо } 800''$

поэтому можно принять

$k = 790$

Вычисление по формулам квадратур ре

 $z = 86^\circ$

σ	$\log e^{-\sigma}$	1	2	3	4	5	6
		Q	colog Q	$\log \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\log \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	$\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	Суммы (5) по Симпсону
0.00	0.00000	0.0018685	2.31260	1.15630	1.15630	-14.332	
.025	1.98315	49190	2.30312	1.15406	1.14321	13.906	
.050	.97829	49699	2.30364	1.15182	1.13011	13.493	
.075	.96743	50210	2.29921	1.14960	1.11703	13.093	
0.100	.95657	50725	2.29478	1.14739	1.10396	12.705	
.125	.93816	51762	2.28599	1.14300	1.07786	11.963	81.010
.200	.91314	52811	2.27728	1.13864	1.05178	11.266	
.250	.89143	53870	2.26865	1.13432	1.02575	10.611	
.300	.86971	54940	2.26011	1.13006	0.99977	9.955	
.375	.83715	56561	2.24748	1.12374	0.96089	9.139	67.764
.450	.80457	58204	2.23505	1.11752	0.92209	8.358	
.525	.77200	59864	2.22283	1.11142	0.88342	7.646	
.600	.73942	61542	2.21083	1.10542	0.84454	6.996	
.700	.69600	63797	2.19520	1.09760	0.79360	6.217	50.424
.800	.65257	66091	2.17986	1.08993	0.74250	5.527	
0.900	.60914	68402	2.16493	1.08246	0.69160	4.916	
1.000	.56571	70734	2.15037	1.07519	0.64090	4.374	
1.15	.50097	74265	2.12922	1.06461	0.56518	3.674	33.478
1.30	.43541	77836	2.1082	1.0541	0.48982	3.049	
1.45	.37009	81435	2.08919	1.04460	0.41469	2.598	
1.60	.30514	85066	2.07024	1.03512	0.34026	2.189	
1.80	.24827	89940	2.04605	1.02302	0.24129	1.743	18.915
2.00	.18143	94848	2.02297	1.01149	0.14292	1.390	
2.20	1.01454	0.009748	2.00094	1.00047	0.04501	1.109	
2.40	2.95770	0.0104748	1.97959	0.98994	1.94764	0.886	
2.70	.82743	112217	1.94997	0.97998	1.80741	0.642	8.632
3.00	.69714	119722	1.92188	0.96092	1.65806	0.455	
3.30	.56679	127251	1.89534	0.94767	1.51446	0.327	
3.60	.43645	134796	1.87031	0.93516	1.37164	0.235	
4.00	.26293	144877	1.83900	0.91950	1.18243	0.152	2.954
4.40	2.08920	154987	1.80970	0.90485	2.99105	0.099	
4.80	3.91540	165077	1.78230	0.89115	2.90655	0.081	
5.20	.74194	175189	1.75650	0.87825	2.62019	0.042	
6.00	.39445	195425	1.70904	0.85452	2.24897	0.018	0.704
6.40	3.04532	215673	1.66620	0.83310	3.87842	0.003	
7.60	4.69897	235923	1.62723	0.81362	3.51259	0.003	
8.40	4.34242	0.0256176	1.59146	0.79573	3.13815	0.001	
							0.072
				h	Σ	Σh	

$2 \log \cos 86^\circ = 3.68716 \quad 0.0048659$

0.0005144

$0.025 \quad 81.010 \quad 2.0252$

$2 \log \sin 86^\circ = 4.71349 \quad 0.0013515$

$0.050 \quad 60.764 \quad 3.3882$

$\log 2e = 1.99788 \quad 0.0022234$

$0.075 \quad 50.124 \quad 3.7816$

$4.71137 \quad 0.0021281$

$0.100 \quad 83.478 \quad 3.3478$

Придать

$0.150 \quad 18.915 \quad 2.8378$

$\kappa Q (87^\circ)$

$0.200 \quad 8.632 \quad 1.7264$

$0.300 \quad 2.954 \quad 0.8862$

$0.400 \quad 0.704 \quad 0.2816$

$0.800 \quad 0.072 \quad 0.0576$

18.3318

-6.1106

$S=12.2212$

$\Omega = 649.9$

По Ньютону 648"

Фракции для второй теории Ньютона

Таблица X

 $z = 88^\circ$

σ	Q	colog Q	$\log \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\log \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	$\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	Суммы (5) по Симпсону
0.000	0.0012186	2.91414	1.45707	1.45707	28.646	
.025	12691	2.89650	1.44825	1.43740	27.378	
.050	13200	2.87942	1.43971	1.41800	26.182	
.075	13711	2.86294	1.43147	1.39890	25.055	
.100	14226	2.84692	1.42346	1.38003	23.990	
.150	15263	2.81636	1.40818	1.34304	22.031	157.366
.200	16312	2.78750	1.39375	1.30689	20.272	
.250	17371	2.76018	1.38009	1.27152	18.686	
.300	18441	2.73422	1.36711	1.23682	17.251	
.375	20062	2.69762	1.34831	1.18596	15.344	122.326
.450	21705	2.66344	1.33172	1.13629	13.686	
.525	23465	2.63144	1.31572	1.08772	12.238	
.600	25043	2.60132	1.30066	1.04008	10.967	
.700	27298	2.56386	1.28193	0.97793	9.504	82.959
.800	29592	2.52882	1.26441	0.91798	8.279	
0.900	31903	2.49616	1.24803	0.85722	7.198	
1.000	34235	2.46553	1.23276	0.79847	6.273	
1.50	37766	2.42290	1.21145	0.71202	5.152	50.203
1.30	41337	2.38366	1.19183	0.62724	4.239	
1.45	44936	2.34740	1.17370	0.54379	3.498	
1.60	48567	2.31366	1.15683	0.46197	2.897	
1.80	53441	2.27212	1.13606	0.35433	2.261	26.124
2.00	58349	2.23396	1.11698	0.24841	1.772	
2.20	63285	2.19870	1.09935	0.14389	1.393	
2.40	63245	2.16592	1.08296	0.04066	1.098	
2.70	75718	2.12080	1.06040	1.88783	0.772	11.078
3.00	83223	2.07976	1.03988	1.73702	0.546	
3.30	90752	2.04214	1.02107	1.58786	0.347	
3.60	0.0098297	2.00746	1.00373	1.44021	0.276	
4.00	0.0108378	1.96506	0.98253	1.24546	0.176	3.551
4.40	118488	1.92632	0.96316	1.05236	0.113	
4.80	128578	1.89082	0.94541	2.86081	0.072	
5.20	138690	1.85796	0.92898	2.67092	0.047	
6.00	158926	1.79878	0.89939	2.29384	0.020	0.771
6.80	179174	1.74674	0.87387	3.91919	0.008	
7.60	199424	1.70024	0.85012	3.54909	0.004	
8.40	219677	1.63820	0.81910	3.16152	0.001	
						0.080
				Σ	$h\Sigma$	
	$2 \log \cos 88^\circ = 3.08564$	0.0012180	0.025	157.366	3.9342	
		0.0005164	0.050	122.326	6.1163	
	$2 \log \sin 88^\circ = 1.99948$	0.0007016	0.075	82.959	6.2219	
	$\log 2e = 4.71349$	0.0020234	0.100	50.103	5.0203	
		4.71297	-0.0015218	0.150	26.124	3.9186
				0.200	11.078	2.2156
				0.300	3.551	1.0653
				0.400	0.771	0.3084
				0.800	0.070	0.0640
						28.8646
						- 9.6215
						$S = 19.2431$
	$\log S = 1.28428$					
	$\log K = 1.72681$					
	$\log \sin z = 1.99974$					
	$\log \Omega = 3.01083$					
	$\Omega = 1025.2$					
	По Ньютону 1028"					

Таблица X (продолжение)

 $z = 89^\circ$

σ	1 Q	2 colog Q	3 $\log \frac{1}{\sqrt{Q}}$	4 $\log \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	5 $\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	6 Суммы (5) по Симпсону
0.000	0.0003046	3.51627	1.75814	1.75814	57.299	
0.025	3551	3.44965	1.72482	1.71397	51.757	
0.050	4060	3.39147	1.69573	1.67402	47.208	
0.075	4571	3.33949	1.67000	1.63743	43.394	
0.100	5086	3.29362	1.64681	1.60338	40.122	
0.150	6123	3.21304	1.60652	1.54138	34.784	286.220
0.200	7172	3.14436	1.57218	1.48532	30.572	
0.250	8231	3.08455	1.54227	1.43370	27.146	
0.300	0.0009301	3.03147	1.51573	1.38544	24.290	
0.375	0.0010922	2.96170	1.48085	1.31800	20.792	186.638
0.450	12565	2.90084	1.45042	1.25499	17.988	
0.525	14225	2.84694	1.42347	1.19547	15.684	
0.600	15903	2.79852	1.39926	1.13868	13.762	
0.700	18158	2.74093	1.37046	1.06646	11.653	109.966
0.800	20452	2.68926	1.34463	0.99720	9.936	
0.900	22763	2.64278	1.32139	0.93053	8.522	
1.000	25095	2.60042	1.30021	0.86592	7.344	
1.15	28626	2.54324	1.27162	0.77219	5.918	60.839
1.30	32197	2.49218	1.24609	0.68150	4.803	
1.45	35796	2.44616	1.22308	0.59317	3.919	
1.60	39427	2.40420	1.20210	0.50724	3.215	
1.90	44301	2.35358	1.17679	0.39506	2.483	29.757
2.00	49209	2.30796	1.15398	0.28541	1.929	
2.20	54145	2.26644	1.13322	0.17776	1.506	
2.40	59105	2.22838	1.11419	0.07189	1.180	
2.70	66578	2.17666	1.08833	1.91576	0.824	12.104
3.00	74083	2.13028	1.05614	1.76228	0.579	
3.40	81612	2.0824	1.04412	1.61091	0.408	
3.60	89157	2.04984	1.02492	1.46140	0.289	
4.00	0.0099238	2.00332	1.00166	1.26459	0.184	3.776
4.40	0.0109348	1.96118	0.98059	1.06979	0.117	
4.80	119438	1.92248	0.96124	2.87664	0.075	
5.20	129550	1.88756	0.94378	2.68572	0.048	
6.00	149786	1.82452	0.91226	2.30671	0.020	0.804
6.80	170034	1.76948	0.84474	3.93006	0.008	
7.60	190284	1.72060	0.86030	3.55927	0.004	
8.40	0.0210537	4.67666	0.83833	3.18075	0.001	
						0.080
		2 log cos z = 4.48372	0.00030460	\hbar	Σ	$\hbar\Sigma$
			0.00051700			
		2 log sin z = 1.99986	-0.00021240	0.025	286.220	7.1305
		log 2e = 4.71349	-0.0022234	0.050	186.638	9.3319
			4.71335 - 0.0024358	0.075	109.966	8.2475
		вычитать		0.100	60.839	6.0839
		из Q (87°)		0.150	29.757	4.4636
				0.200	12.104	2.4208
		log S = 1.41716		0.300	3.776	1.1328
		log K sin z = 1.72674		0.400	0.804	0.3216
				0.800	0.080	0.0640
		log Ω = 3.14390				39.1966
		Ω = 1392'8				-13.0655
		По Ньютону 1387"				S = 26.1311

Таблица X (продолжение)

 $z = 89^\circ 30'$

σ	1	2	3	4	5	6
	Q	colog Q	$\log \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\log \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	$\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	Сумма (5) по Симпсону
0.000	0.0000762	4.11805	2.05902	2.05902	114.551	
0.025	0.0001267	3.89722	1.94861	1.93776	86.647	
0.050	1776	3.75056	1.87528	1.85357	71.378	
0.075	2287	3.64073	1.82037	1.78789	61.349	
0.100	2802	3.55253	1.77626	1.73283	54.054	
0.150	3839	3.41578	1.70789	1.64275	43.929	451.672
0.200	4888	3.31087	1.65543	1.56857	37.031	
0.250	5947	3.22570	1.61285	1.50428	31.936	
0.300	7017	3.15385	1.57692	1.44663	27.966	
0.375	0.0008638	3.06359	1.53180	1.36885	24.488	229.771
0.450	0.0010281	2.98796	1.49398	1.29855	19.886	
0.525	11931	2.92332	1.46166	1.23366	17.126	
0.600	13519	2.86904	1.43452	1.17394	14.926	
0.700	15874	2.79931	1.39965	1.09565	12.163	124.560
0.800	18168	2.74070	1.37035	1.02282	10.540	
0.900	20479	2.68868	1.34434	0.95348	8.984	
1.000	22811	2.64185	1.32092	0.88663	7.702	
1.15	26342	2.57935	1.28967	0.79024	6.170	64.718
1.30	29913	2.52414	1.26207	0.69748	4.983	
1.45	33512	2.47481	1.23710	0.60749	4.050	
1.60	37143	2.43012	1.21506	0.52020	3.313	
1.80	42017	2.37658	1.18829	0.40656	2.550	30.931
2.00	46925	2.32859	1.16430	0.29573	1.976	
2.20	51861	2.28516	1.14258	0.18712	1.538	
2.40	56861	2.24549	1.12275	0.08045	1.204	
2.70	64294	2.19183	1.09572	1.92335	0.838	12.410
3.00	71799	2.14389	1.07195	1.76909	0.58	
3.30	79328	2.10028	1.05029	1.61708	0.414	
3.60	86873	2.06110	1.03055	1.46703	0.293	
4.00	0.0096954	2.01344	1.00672	1.26965	0.186	3.840
4.40	0.0107064	1.97137	0.9568	1.07488	0.119	
4.80	117154	1.93125	0.96562	2.88102	0.076	
5.20	127266	1.89528	0.91764	2.68958	0.049	
6.00	147502	1.83121	0.91560	2.31005	0.020	0.814
6.80	167750	1.77533	0.88766	3.93298	0.009	
7.60	184000	1.72584	0.86292	3.56189	0.004	
8.40	0.0208253	1.68142	0.84071	3.18313	0.002	
					0.081	

$$2 \log \cos z = 5.881684 \quad 0.00007615$$

$$-0.00051696$$

$$\log 2e = 4.713491 - 0.00044081$$

$$\log \sin^2 z = -34 - 0.0222340$$

$$4.713457 - 0.0026642$$

вычесть

из $\Omega (87^\circ)$

$$\log S = 1.49841$$

$$\log K \sin z = 1.82679$$

$$\log \Omega = 3.22520$$

$$\Omega = 1679.6$$

По Ньютону 1655"

	h	Σ	$h\Sigma$
0.025	451.672	11.2918	
0.050	229.771	11.4886	
0.075	124.560	9.3420	
0.100	64.748	6.4748	
0.150	30.931	4.6396	
0.200	12.410	2.4820	
0.300	3.840	1.1520	
0.400	0.814	0.3256	
0.800	0.081	0.0648	
	47.2612		
	-15.7537		

$$S = 31.5075$$

Таблица X (продолжение)

$z = 90^\circ$ Вычисление интеграла $\int_{0.100}^{8.40} \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}} \cdot d\sigma$

σ	1 $\frac{2\sigma}{k} + 2\epsilon e^{-\sigma}$	2 $Q =$ (1) — 0.0005170	3 colog Q	4 $\log \frac{1}{\sqrt{Q}}$	5 $\log \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	6 $\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	7 Суммы (6) по Симпсону
0.000							
0.025							
0.050							
0.075							
0.100	0.0007210	0.0002040	3.69037	1.84519	1.80176	63.350	
0.150	0.0008247	0.0003077	3.51187	1.75594	1.69080	49.068	
0.200	0.0009296	4126	3.34447	1.69223	1.60537	40.305	
0.250	0.0010355	5185	3.2525	1.64262	1.53405	34.202	
0.300	11425	6255	3.20377	1.60188	1.47159	29.620	
0.375	13046	7876	3.10369	1.55184	1.38399	24.490	253.331
0.450	146~9	0.0009551	3.01995	1.50998	1.31455	20.632	
0.525	16349	0.0010179	2.99230	1.49615	1.26815	18.542	
0.600	18027	12857	2.89086	1.44543	1.18485	15.805	
0.700	20252	15112	2.82068	1.41034	1.10634	12.774	129.15
0.800	22576	17406	2.75930	1.37965	1.03222	10.770	
0.900	24887	19717	2.70516	1.35258	0.96172	9.156	
1.000	27219	22049	2.65661	1.32830	0.89401	7.835	
1.15	30750	25580	2.59110	1.29555	0.79612	6.258	6.200
1.30	34321	29151	2.53534	1.29767	0.70308	5.048	
1.45	37920	32750	2.48479	1.24240	0.61249	4.097	
1.60	41551	36381	2.43913	1.21957	0.52471	3.347	
1.80	46425	41255	2.38453	1.19226	0.41053	2.574	31.339
2.00	51333	46163	2.3570	1.16785	0.29923	1.992	
2.20	56269	51099	2.29159	1.14580	0.19034	1.550	
2.40	61229	56059	2.25135	1.12567	0.08937	1.212	
2.70	68702	63532	2.19700	1.09850	1.92593	0.850	12.515
3.00	76207	71037	2.15106	1.07703	1.77417	0.595	
3.30	83736	78566	2.10477	1.05238	1.61917	0.416	
3.60	0.0091281	86111	2.06494	1.03297	1.46945	0.295	
4.00	0.0101362	0.0096192	2.01686	1.00843	1.27136	0.187	3.881
4.40	111472	0.010362	1.97347	0.98673	1.07593	0.119	
4.80	121562	116392	1.93408	0.96704	2.87247	0.074	
5.20	131674	126504	1.89791	0.9495	2.69039	0.050	
6.00	151910	146740	1.83345	0.91672	2.31117	0.020	0.814
6.80	172158	166988	1.77729	0.88864	3.93396	0.008	
7.60	192408	187238	1.72759	0.86380	3.56277	0.014	
8.40	0.0212661	207491	1.68300	0.84150	3.38392	0.002	
						0.082	

h Σ $h\Sigma$

0.025	—	—
0.050	253.331	12.6666
0.075	129.158	9.6869
0.100	66.200	6.6200
0.150	31.339	4.7009
0.200	12.515	2.5030
0.300	3.81	1.1643
0.400	0.814	0.8256
0.800	0.082	0.0656

$$\int_{0.100}^{\infty} \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}} \cdot d\sigma = S_1 = 25.1553$$

$$\text{Вычисление интеграла } \int_0^{0.100} \frac{e^{-\sigma} \cdot d\sigma}{\sqrt{Q}} = \int_0^{0.005} \frac{e^{-\sigma} \cdot d\sigma}{\sqrt{Q}} + \int_{0.005}^{0.100} \frac{e^{-\sigma} \cdot d\sigma}{\sqrt{Q}} = S_0 + S_2$$

производится так:

$$S_0 = \int_0^{0.005} \frac{e^{-\sigma} \cdot d\sigma}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \int_0^{0.005} \frac{(1-\sigma) d\sigma}{\sqrt{\sigma}} = \frac{2\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{a}} \left(1 - \frac{1}{3}\sigma_1 \right) = \frac{2\sqrt{0.005}}{\sqrt{a}} \left(1 - \frac{1}{600} \right)$$

$$a = 2 \left(\frac{1}{k} - \epsilon \right) = 2 \left(\frac{1}{790} - 0.0002585 \right) = 0.0020146; \quad \text{colog } a = 2.69581; \quad \log \frac{1}{\sqrt{a}} = 1.34790$$

$$\lg \sqrt{0.005} = 2.84948 \\ \lg 2 = 0.30103$$

$$\lg \frac{1}{\sqrt{a}} = 1.34790$$

$$\lg A = 0.49841$$

$$A = 3.1507$$

$$-\frac{1}{600} A = -0.0053$$

$$S_0 = 3.1454$$

$$S_2 = 10.3025$$

$$S_1 = 25.1553$$

$$S = 38.6082$$

$$\lg S = 1.58662$$

$$\lg K = 1.72681$$

$$\tg \Omega_0 = 3.31343$$

$$\Omega = 2057.8$$

По Ньютону 2025 //

Проверка:

$$\int_0^{\sigma_1} \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{a\sigma}} d\sigma = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^{\sqrt{\sigma_1}} e^{-t^2} dt + \frac{2}{\sqrt{a}} [\Phi(0) - \Phi(\sigma_1)]$$

$$\sigma_1 = \sqrt{0.005} = 0.0707107 \\ \Phi(0.070) = 0.816341$$

$$\Phi(0) = 0.86227 \\ \Phi(\sigma_1) = 0.815634$$

$$\lg 0.141186 = 1.14978$$

$$0.000995 \\ \Phi(0.071) = 0.815849 \\ (\Phi(\sigma_1) = 0.815634)$$

$$\frac{0.070593}{0.141186}$$

$$\lg \frac{1}{\sqrt{a}} = 1.34790$$

$$\lg S_0 = 0.49768$$

$$S_0 = 3.1454$$

Вычисление интеграла S_2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
σ	$\frac{2\sigma}{k}$	$2\sigma e^{-\sigma}$	(2) + (3)	$Q =$ (4) - 0.0005170	colog Q	$\log \frac{1}{\sqrt{Q}}$	$\log e^{-\sigma}$	$\log \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	$\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{Q}}$	Суммы (10) по Симпсон
0.0050	0.00001266	0.00051443	0.00052709	0.00001009	4.99611	2.49806	1.99783	2.49589	313.25	
0.010	2532	51186	58718	2018	4.69508	2.34754	1.99566	2.34320	220.35	
0.0150	3798	50931	54729	3029	4.51870	2.25935	1.99349	2.25284	179.00	
0.0200	5064	50676	55740	4010	4.39362	2.19681	1.99132	2.1813	154.22	
0.0250	6330	50424	56754	5054	4.29636	2.14818	1.98915	2.13783	137.19	
0.0375	0.00009495	49798	59293	0.00007593	4.11959	2.05980	1.98372	2.04352	110.54	1153.86
0.0500	0.00012660	41980	61840	0.00010140	3.99396	1.99698	1.97829	1.97517	94.46	
0.0625	15825	48568	64393	12693	3.89643	1.94822	1.97286	1.92108	83.38	
0.0750	18990	47964	66954	15254	3.81662	1.90831	1.96746	1.87574	75.12	
0.0875	22155	47369	69524	17824	3.74899	1.87450	1.96200	1.83650	68.6	
0.1000	0.00025320	46780	0.00072100	0.00020400	3.69087	1.84519	1.95657	1.80176	63.35	
										774.95

$$h \quad \Sigma \quad h\Sigma$$

$$0.0050 \quad 1153.86 \quad 5.7668 \\ 0.0125 \quad 774.95 \quad 9.6870$$

$$15.4538$$

$$0.100 \quad - 5.1513 \\ \int = \frac{1}{0.005} = S_2 = 10.3025$$

Таблица XIIa

Первая Ньютона таблица рефракции

Tabula refractionum

Altitudo apparens	Refractio aestiva	Refractio verna et aut.	Refractio hiberna	Altitudo apparens	Refractio verna et aut.	Altitudo apparens	Refractio verna et aut.
gr ' "	' "	' "	' "	gr	' "	gr	' "
0 00	31 30	33 20	35 10	31	1 28	61	0 29
0 30	26 06	27 45	29 24	32	1 24	62	0 28
1 00	21 50	23 12	24 34	33	1 21	63	0 27
1 30	18 51	20 2	21 13	34	1 18	64	0 26
2 00	16 27	17 29	18 31	35	1 15	65	0 24
2 30	14 31	15 23	16 15				
3 00	12 52	13 40	14 28	36	1 13	66	0 23
3 30	11 32	12 15	12 58	37	1 10	67	0 22
4 00	10 25	11 4	11 43	38	1 8	68	0 21
4 30	9 29	10 5	10 41	39	1 5	69	0 20
5 00	8 40	9 13	9 46	40	1 3	70	0 19
6 00	7 24	7 52	8 20	41	1 1	71	0 18
7 00	6 27	6 51	7 15	42	0 59	72	0 17
8 00	5 42	6 3	6 24	43	0 57	73	0 16
9 00	5 5	5 24	5 43	44	0 55	74	0 15
10 00	4 36	4 53	5 10	45	0 53	75	0 14
11 00	4 11	4 27	4 43	46	0 51	76	0 13
12 00	3 51	4 5	4 19	47	0 49	77	0 12
13 00	3 53	3 46	3 59	48	0 48	78	0 11
14 00	3 18	3 30	3 42	49	0 46	79	0 10
15 00	8 4	3 16	3 28	50	0 44	80	0 9
16 00	2 52	3 3	3 14	51	0 43	81	0 8
17 00	2 42	2 52	3 2	52	0 41	82	0 7
18 00	2 33	2 42	2 51	53	0 40	83	0 6
19 00	2 24	2 33	2 42	54	0 38	84	0 5
20 00	2 17	2 25	2 33	55	0 37	85	0 5
21 00	2 9	2 17	2 25	56	0 35	86	0 4
22 00	2 2	2 10	2 18	57	0 34	87	0 3
23 00	1 57	2 4	2 11	58	0 33	88	0 2
24 00	1 51	1 58	2 5	59	0 32	89	0 1
25 00	1 46	1 53	2 00	60	0 30	90	0 0
Видимая высота	Рефракция летом	Рефракция весною и осенью	Рефракция зимою	Видимая высота	Рефракция весною и осенью	Видимая высота	Рефракция весною и осенью

Таблица рефракции

Таблица XI6

Вторая Ньютона табличка рефракции

Tabula refractionum siderum ad altitudines apparentes

Alt. appar.	Refractio	Alt. appar.	Refractio	Alt. appar.	Refractio
gr "	"	gr	"	gr	"
0 0	33 45	16	3 4	46	0 52
0 15	30 24	17	2 53	47	0 50
0 30	27 35	18	2 43	48	0 48
0 45	25 11	19	2 34	49	0 47
1 0	23 7	20	2 26	50	0 45
1 15	21 20	21	2 18	51	0 44
1 30	19 46	22	2 13	52	0 42
1 45	18 22	23	2 5	53	0 40
2 0	17 8	24	1 59	54	0 39
2 30	15 2	25	1 54	55	0 38
3 0	13 20	26	1 49	56	0 36
3 30	11 57	27	1 44	57	0 35
4 0	10 48	28	1 40	58	0 34
4 30	9 50	29	1 36	59	0 32
5 0	9 2	30	1 32	60	0 31
5 30	8 21	31	1 28	61	0 30
6 0	7 45	32	1 25	62	0 28
6 30	7 14	33	1 22	63	0 27
7 0	6 47	34	1 19	64	0 26
7 30	6 22	35	1 16	65	0 25
8 0	6 0	36	1 13	66	0 24
8 30	5 40	37	1 11	67	0 23
9 0	5 22	38	1 8	68	0 22
9 30	5 6	39	1 6	69	0 21
10 0	4 52	40	1 4	70	0 20
11 0	4 27	41	1 2	71	0 19
12 0	4 5	42	1 0	72	0 18
13 0	3 47	43	0 58	73	0 17
14 0	3 31	44	0 56	74	0 16
45 0	3 17	45	0 54	75	0 15
Видимая высота	Рефракция	Видимая высота	Рефракция	Видимая высота	Рефракция

Таблица рефракции светил при видимых высотах

Таблица XII

Сличение таблиц Ньютона с таблицею Newcomb'a (1906 г.) и Strömgren'a (1933 г.)

z	Ньютон		Newcomb (1906)	Strömgren (1933)	Strömgren +10° C
	I	II			
0°	0' 0"	0' 0"	0' 00"	0' 00"	0' 00"
10	0 9	0 9	0 10.27	0 10.6	0 10.3
20	0 19	0 20	0 21.19	0 21.9	0 21.2
30	0 30	0 31	0 33.60	0 34.8	0 33.6
40	0 44	0 45	0 48.82	0 50.5	0 48.8
45	0 53	0 54	1 58.2	0 60.2	0 58.2
50	1 03	1 04	1 9.3	1 11.7	1 9.2
55	1 15	1 16	1 23.0	1 25.8	1 22.9
60	1 31	1 32	1 40.5	1 44.0	1 40.4
65	1 53	1 54	2 4.2	2 8.5	2 4.2
70	2 25	2 26	2 38.6	2 44.1	2 38.6
75	3 16	3 17	3 33.9	3 41.5	3 33.8
78	4 05	4 05	4 27.4	4 36.9	4 27.0
81	5 24	5 22	5 52.5	6 5.3	5 52.2
84	7 52	7 45	8 27.7	8 47.1	8 27.7
85	9 13	9 02	9 51.4	10 14.6	9 51.4
86	11 04	10 48	11 44.3	12 13.0	11 44.2
87	13 40	13 20	14 22.6	14 59.8	14 22.6
88	17 29	17 08	18 16.1	19 7.2	18 16.2
89	23 12	23 07	24 20.6	25 37.1	24 21.9
89 30"	27 45	27 35	—	30 21.3	28 41.9
90	33 20	33 45	34 32.1	36 38.6	34 35.1
			t = 50 F	t = 0° C.	t = 10 C
			H = 30 дм	H = 760 мм	H = 760 мм
			t = 10° C		

Таблица XIII
Сравнение значений рефракции, рассчитанной по разным формулам
Барометр 760 мм

Зенитное расстояние	Температура (гр С)	Laplace	Bradley	Bürg	Mayer	Piazzi	Delambre	Mayer
10°	-10	11.1	10.9	11.3	11.0	11.3	11.3	10.6
	0	10.4	10.6	10.9	10.6	10.8	10.8	
	+10	10.3	10.1	10.5	10.2	10.3	10.3	
	20	9.9	9.3	10.1	9.9	9.9	9.9	
	30	9.6	9.1	9.7	9.6	9.5	9.4	
	-10	22.9	23.0	23.4	22.7	23.1	23.2	
20°	0	22.0	21.9	22.5	21.9	22.2	22.2	21.9
	+10	21.2	20.9	21.6	21.1	21.0	21.2	
	20	20.4	20.0	20.8	20.4	20.1	20.3	
	30	19.7	18.8	20.1	19.7	19.4	19.5	
	-10	36.2	36.5	37.1	36.0	36.8	36.9	
	0	34.8	34.8	35.7	34.7	35.2	35.2	
30°	+10	33.4	33.2	34.3	33.5	33.6	33.5(1)	34.7
	20	32.2	31.7	33.0	32.3	32.1	32.2	
	30	31.0	29.8	31.2	31.2	30.8	30.9	
	-10	52.9	53.0	53.9	52.3	53.4	53.7	
	0	50.8	50.5	51.8	50.4	53.9	51.2	
	+10	48.9	48.2	49.8	48.6	48.6	48.9	
40°	20	47.1	46.0	47.9	46.9	46.5	46.8	50.4
	30	45.4	43.9	46.0	45.4	43.8	44.9	
	-10	75.0	75.2	76.5	74.2	75.7	76.2	
	0	72.1	71.7	73.5	71.5	72.2	72.6	
	+10	69.3	68.4	70.7	68.9	69.0	69.4	
	20	66.8	65.4	68.0	66.6	65.9	66.4	
50°	30	64.6	62.3	65.3	64.4	63.3	63.7	64.4
	-10	108.8	109.1	111.1	107.6	110.8	110.5	
	0	104.6	100.4	104.4	103.7	105.7	105.4	
	+10	100.6	99.3	102.7	100.0	100.9	100.7	
	20	96.9	94.9	96.0	96.6	96.6	96.5	
	30	93.5	90.4	92.8	93.4	92.6	92.5	
60°	-10	171.8	172.5	175.8	170.1	175.7	174.6	170.2
	0	165.1	164.4	168.8	163.8	165.0	166.5	
	+10	158.8	157.0	162.4	158.0	159.6	159.1	
	20	153.0	149.9	156.2	152.6	152.7	152.4	
	30	147.6	142.8	150.0	147.5	146.4	146.1	
	-10	346.0	349.3	354.9	344.1	350.9	352.9	344.0
70°	0	332.5	332.8	340.9	331.1	334.7	336.4	
	+10	319.8	317.8	327.9	319.0	319.5	321.4	
	20	308.1	303.5	315.4	307.9	306.0	307.9	
	30	297.9	289.1	302.9	296.6	287.8	295.2	
	-10	643.9	657.6	665.9	643.3	649.8	660.1	643.5
	0	617.8	626.7	640.1	619.6	618.2	629.3	
80°	+10	594.3	598.5	616.9	593.6	591.8	601.3	
	20	572.5	571.4	593.4	573.3	566.7	576.0	
	30	552.2	544.5	569.9	552.4	543.2	552.2	
	-10	2192.2	2200.2	2179.3	2100.0	2134.3	2113.1	2061.0
	0	2106.3	2096.5	2090.2	1895.9	2016.5	2014.7	
	+10	2026.3	2002.1	2014.3	1884.8	1944.1	1925.0	
90°	20	1950.1	1911.7	1937.4	1784.5	1862.5	1843.8	1849.0
	30	1882.8	1821.1	1860.8	1796.3	1784.6	1767.8	
	-10							
	0							
	+10							
	20							
	30							1778.1(2)

(1) Напечатано: 3875

(2) Напечатано: 1578.1

В 1806 г. Парижское бюро долгот, в которое тогда входили Lagrange, Laplace, Lalande, Delambre, Prony и пр., издало, с пышным предисловием, посвященным Наполеону, сборник астрономических таблиц. В обширном введении к этому сборнику помещена сравнительная таблица рефракции, вычисленной по формулам: Laplace'a, Bradley, Bürg'a, Mayer'a, Piazzi, Delambre'a и по второй формуле Mayer'a.

В этой таблице показано и влияние температуры на величину рефракции; в виду наглядности этой таблицы, мы приводим ее в табл. XIII. Из этой таблицы особенно ясно видно различие значений рефракции при больших зенитных расстояниях, не говоря уже о горизонтальной рефракции.

Необходимо еще заметить, что метода приближенных квадратур применима и в том случае, когда зависимость плотности воздуха (иначе — его давления и температуры) от высоты над поверхностью Земли задана не аналитически, а таблично или графически. Здесь единственно применимыми для расчета формулами будут формулы Ньютона и метода квадратур.

Все эти подробности я вошел, чтобы показать, насколько полна и обща та теория астрономической рефракции, которую Ньютон создал в конце 1694 г. и начале 1695 г., но которой он, к сожалению, не опубликовал.

Если развить, как это сделано здесь, Ньютонову теорию теми элементарными методами анализа, которыми Ньютон обладал, и сравнить ее с современными теориями, то сразу можно заметить, сколь простое и естественное получается изложение и сколь мало к нему, по существу, за 240 лет прибавлено. Поэтому мне кажется, что эта теория, как основная, достойна подробного и внимательного изучения, а не того беглого о ней упоминания или полного умолчания, как это делается во всех известных мне учебных руководствах по астрономии.

SIR IS. NEWTON'S THEORY OF ASTRONOMICAL REFRACTION

Summary

In 1835 appeared a book by Fr. Baily Esq. entitled «An account of the R-d John Flamsteed the First Astronomer Royal, compiled from his own manuscripts and other authentic documents never before published, to which is added his catalogue of stars corrected and enlarged...» (in-4-o, LXXII + 672 pp.). This book contains an autobiography of Flamsteed, his scientific correspondance and his catalogue of stars.

Among the letters there is a lot of letters of Sir Is. Newton to Flamsteed relating to planetary and lunar theories and to the theory of astronomical

refraction, of which Newton sent in 1694 to Flamsteed two tables calculated in a purely theoretical manner.

The first of these tables is based on the assumption of an atmosphere of finite height, the density decreasing uniformly from the surface of the Earth to the boundary of the atmosphere.

The second table is based on the assumption of an atmosphere of unlimited height, the density decreasing in accordance with the exponential law established by Newton in his «Principia».

Only for the first table Newton gives a theorem enabling the calculation of refraction by «approximate quadratures», but he gives no proof of this theorem.

The second table was published 27 years afterwards by Halley, without any suggestion as to the manner of calculating it.

The book of Baily was analysed in a very substantial manner by Biot in the «Journal des Savants» for 1836, where Biot gives a method of calculating the astronomical refraction and proves Newton's theorem, but he uses modern analytical methods in their full development, which they attained long after Newton's death.

In A. N. Kriloff's paper a simple proof of Newton's theorem is given and the whole theory of astronomical refraction is established by the first principles of the fluxional calculus, which were already known to Newton, with the sole difference that modern notation is used for quadratures instead on the Newtonian one, used in his paper «De quadratura curvarum».

Both tables of Newton are recalculated by the formulae thus established, using Newton's method of «approximate quadratures».

It is also pointed out that in order to get the form of the ray of light incurvated by refraction Newton had to deal with an equation containing «fluents and fluxions», and the calculation of refraction seems to be the first instance, where such an equation, now called differential, was solved with very great precision by a numerical process.

At the end of his paper A. N. Kriloff shows that if Newton's theory be applied to modern observations, say to those of Pulkovo, a modern table of refraction would be obtained with the utmost precision.

СУДЬБА ОДНОЙ ЗНАМЕНИТОЙ ТЕОРЕМЫ

§ 1. При определении параболических орбит комет имеет существенное значение выражение площади параболического сектора через ограничивающие его радиусы-векторы и хорду между ними.

Площадь эта пропорциональна времени ее описания, и сказанное выражение доставляет одно из основных уравнений, служащих для определения орбиты.

Впервые способ определения параболической орбиты по трем наблюдениям кометы дан Ньютоном в третьей книге его «Начал», и вопрос этот характеризован им как «весыма трудный» (*problema longe difficultum*). Ньютон излагает в «Началах» графическое решение поставленного им вопроса, и, получив приближенные значения элементов орбиты по трем наблюдениям, он затем эти элементы исправляет вычислением, принимая во внимание совокупность всех имеющихся наблюдений кометы.

Само собою разумеется, что графические построения Ньютона легко выражаются аналитически, так что весь его процесс может быть выполнен вычислением с любой степенью точности, как это делается теперь на основании трудов Эйлера, Ламберта, Лагранжа, Ольберса, Гаусса и множества других авторов.

Эйлер вывел аналитически выражение площади параболического сектора, но не обратил внимания на то, что полученное им выражение непосредственно следует из теоремы Ньютона, представляя лишь в аналитической форме эту теорему, выраженную у Ньютона геометрически. Это было сделано Эйлером через 57 лет после первого и через 17 лет после третьего издания «Начал».

Через 18 лет после появления статьи Эйлера, его сочен по Берлинской Академии Наук Ламберт, в своей статье «О замечательных свойствах кометных орбит», вновь дает геометрическое доказательство теоремы Ньютона и приводит аналитическое ее выражение, данное Эйлером, не упоминая, однако, ни о Ньютоне, ни об Эйлере.

Еще через 17 лет, в 1778 г., Лагранж, ставший после Эйлера президентом Берлинской Академии Наук, поместил в ее «Записках» две статьи об определении параболической орбиты по трем наблюдениям кометы, и в 1783 г. дал третью статью по тому же предмету.

Лагранж, как он всегда имел обыкновение, в начале своих статей дает превосходное обозрение трудов своих предшественников — Ньютона, Эйлера и Ламберта, но не делает сопоставления между теоремою Ньютона и ее аналитическим выражением, данным Эйлером и затем Ламбертом, причем, отмечая важность этого выражения для решения поставленного вопроса, он приписывает его Ламберту, а не Ньютону и Эйлеру.

Наконец, в 1816 г., через 3 года после смерти Лагранжа, вышел из печати второй том второго издания его «Аналитической механики».

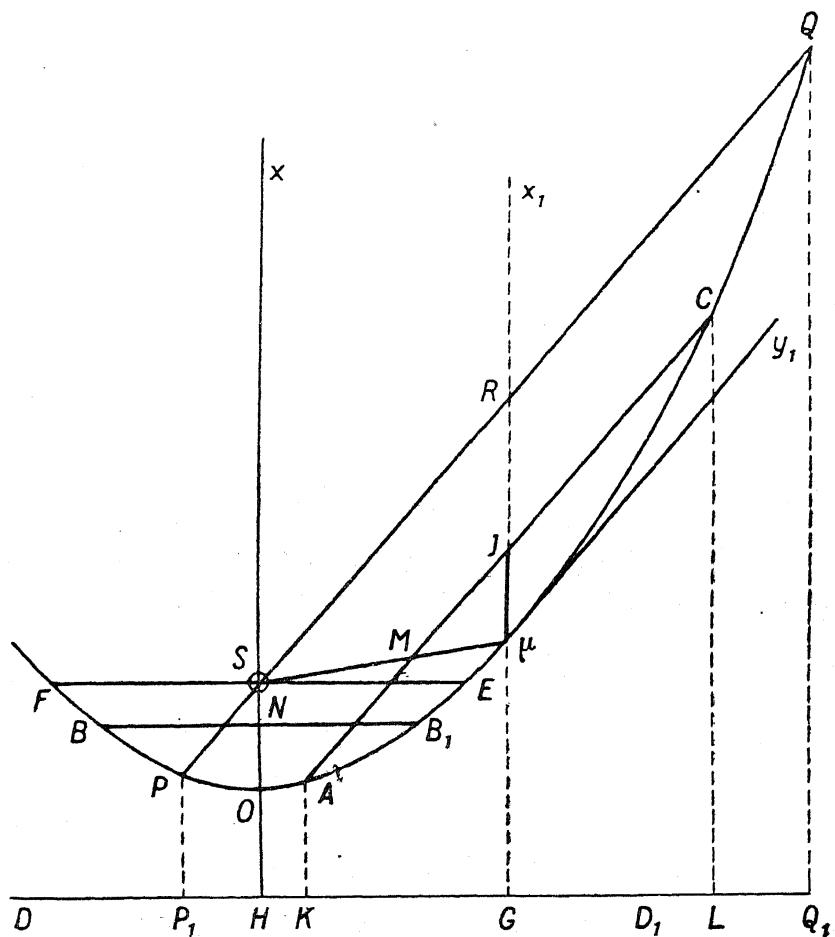
Здесь, в § 25 первой главы, выведена формула Эйлера, после чего в § 26 сказано: «Эта изящная формула первоначально была дана Эйлером в томе VII „Miscellanea Berolinensis“. Ее можно вывести из леммы X третьей книги „Начал“, переводя на анализ то построение, которым Ньютон определяет скорость, с какою комета, двигаясь равномерно, прошла бы длину, равную хорде, в то же самое время, в течение которого она описывает соответствующую этой хорде дугу параболы.

«Заметим, что для параболы полусумма радиусов-векторов, проведенных к концам любой дуги, всегда равна радиусу-вектору, проведенному к вершине дуги, т. е. к концу диаметра, проходящего через середину хорды, сложенному со стрелкой этой дуги, т. е. с отрезком сказанного диаметра, заключенным между дугой и хордою; отсюда по лемме IX получается значение сказанного радиуса-вектора, выраженное через хорду и сумму радиусов-векторов, идущих к концам дуги».

Проходит еще 100 лет. В любом руководстве по определению орбит приводится аналитическое выражение, данное Эйлером, которое приписывают то ему, то Ламберту, совершенно не упоминая Ньютона и игнорируя слова Лагранжа,— более того, в знаменитом руководстве «Die Bahnbestimmung der Himmelskörper von Julius Bauschinger» (Leipzig, 1906), на стр. 389, при историческом обзоре способов определения орбит комет, про Ньютона, между прочим (тоже неверным), сказано: «чего недостает его методе, чтобы быть совершенной, это собственно теоремы Эйлера-Ламберта, *вместо которой он довольствуется приближенным соотношением между хордой, радиусами-векторами и промежутком времени*», тогда как еще за 91 год перед тем в таком сочинении, как «Mécanique Analytique» Лагранжа, указано, что Ньютоново соотношение и есть теорема

Эйлера-Ламберта, лишь высказанная геометрически. Так пишется история!

В настоящей статье мы приводим теорему Ньютона и его доказательство, аналитическое представление этой теоремы на основании указаний



Фиг. 1.

Лагранжа, выводы ее Эйлером, Ламбертом и пр., чтобы показать, насколько важно при изучении хода развития какого-либо вопроса обращение к первоисточникам.

§ 2. Чтобы не прерывать дальнейшего изложения вводными вставками, приведем сперва те свойства параболы, которые Ньютон, Эйлер и Лагранж предполагают известными.

Ньютон и Эйлер придерживались терминологии древних, несколько отличающейся от принятой теперь, которую для ясности мы будем пользоваться.

Пусть даны: парабола $O\bar{A}\mu C$, ее фокус S и направляющая DD_1 (фиг. 1).

Теперь, как известно, приняты следующие термины: расстояние $SH = p$ от Фокуса S до направляющей — *параметр*, неограниченная прямая XSH , перпендикулярная к направляющей, — *ось*, точка O параболы, лежащая на оси, — *вершина*, всякая прямая, параллельная оси, — *диаметр*.

Очевидно, что

$$SO = OH = \frac{1}{2}p$$

Пусть FE есть хорда, проходящая через фокус S и перпендикулярная к оси, тогда будет

$$FS = SE = p$$

так что

$$FE = 2p$$

Древние называли эту хорду или ее длину «*latus rectum*», условимся ее обозначать через h , следовательно

$$h = 2p \quad (1)$$

Вместо теперешнего уравнения параболы $y^2 = 2px$, иначе

$$BN^2 = NB_1^2 = 2SE \cdot ON$$

древние пользовались равносильным ему равенством

$$BB_1^2 = 4FE \cdot ON = 4h \cdot ON \quad (2)$$

причем BB_1 есть любая хорда, перпендикулярная к оси Ox .

Пусть μ есть какая-либо точка параболы, μX_1 — диаметр, проходящий через эту точку, и μT — касательная к параболе; тогда, как известно, диаметр μX_1 разделяет пополам угол $S\mu T$ между радиусом-вектором $S\mu$ и касательной μT . Проведем через фокус S хорду QP параллельно касательной μT , тогда будет

$$QR = RP$$

и вместе с тем

$$\text{угол } S\mu R = \text{угол } SR\mu$$

следовательно

$$S\mu = \mu R = \mu G \quad (3)$$

Уравнение параболы, отнесенное к осям μX_1 и μY_1 , есть

$$Y_1^2 = 2p_1 X_1 \quad (4)$$

Для хорды PQ , проведенной через фокус S параллельно касательной μT , т. е. оси μY_1 , имеем

$$X_1 = \mu R$$

абсолютная же величина ординат точек P и Q есть

$$PR = RQ = \frac{1}{2} PQ$$

Следовательно, на основании уравнения (4), будет

$$RP^2 = 2p_1 \cdot \mu R = p_1 \cdot RG \quad (*)$$

ибо

$$\mu R = Sp = \mu G \quad \text{и} \quad RG = 2\mu R$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} QQ_1 &= QS \\ PP_1 &= SP \end{aligned}$$

следовательно

$$\frac{QQ_1 + PP_1}{2} = RG = \frac{QS + SP}{2} = \frac{QP}{2} = RP \quad (5)$$

и, на основании (*), будет

$$RP = p_1 = RG \quad (6)$$

Величину p_1 иногда называют «параметр, соответствующий вершине μ ».

Вместо уравнения (4), древние пользовались равенством

$$\overline{AC^2} = 4h_1 \cdot I\mu \quad (7)$$

Отсюда ясно, что

$$h_1 = 2p_1 = QP = 2RG = 4Sp \quad (8)$$

Величину h_1 называли «*latus rectum* при вершине μ ».

Для хорды AC , параллельной касательной μT , имеем равенства:

$$\begin{aligned} SA &= r_1 = AK \\ SC &= r_2 = CL \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{AK + CL}{2} = GI = I\mu + \mu G \quad (9)$$

но

$$\mu G = Sp$$

следовательно

$$\frac{r_1 + r_2}{2} = Sp + I\mu \quad (10)$$

$I\mu$ есть стрелка дуги $A\mu C$, и равенство (10) показывает, что полу-
сумма радиусов-векторов концов дуги равна радиусу-вектору вершины этой
дуги, сложенному с ее стрелкой.

§ 3. Ньютон предполагает лемму X лемму IX («Начало», кн. III),
выраженную следующим образом:

Лемма IX. Длины $I\mu$, μM и $\frac{AI \cdot IC}{4S\mu}$ равны между собой.

«Ибо $4S\mu$ есть latus rectum, принадлежащий вершине μ ».

Эти свойства непосредственно следуют из равенств (3) и (7) § 2,
имея в виду что

$$AI = IC = \frac{1}{2} AC$$

Лемма X. Если прямую $S\mu$ продолжить до точек N и P так, чтобы
было

$$\mu N = \frac{1}{3} \mu I$$

и чтобы имела место пропорция

$$SP : SN = SN : S\mu$$

то комета, двигаясь равномерно с тою скоростью, которая соответствует
удалению SP от Солнца, описала бы длину, равную хорде, в такое же
время, в какое она описывает дугу $A\mu C$.

Ньютон ведет доказательство этой леммы чистым рассуждением, не
пользуясь формулами; переводя же эти рассуждения на современные обозначения и формулы, мы увидим, что его доказательство может быть выра-
жено следующим образом: если бы комета продолжала двигаться по касательной μT (Фиг. 2) с тою скоростью, которой она обладает в точке μ в течение того времени, в которое она описывает дугу $A\mu C$, то длина μT
была бы такою, при которой площадь

$$S\mu T = SA\mu CS$$

Обозначая через α — угол AMS , мы имеем

$$\begin{aligned} SA\mu CS &= ASC + AC\mu = \frac{1}{2} AC \cdot SM \cdot \sin \alpha + \frac{2}{3} I\mu \cdot AC \cdot \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} AC \left(SM + \frac{4}{3} I\mu \right) \sin \alpha = \frac{1}{2} AC \cdot SN \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

и

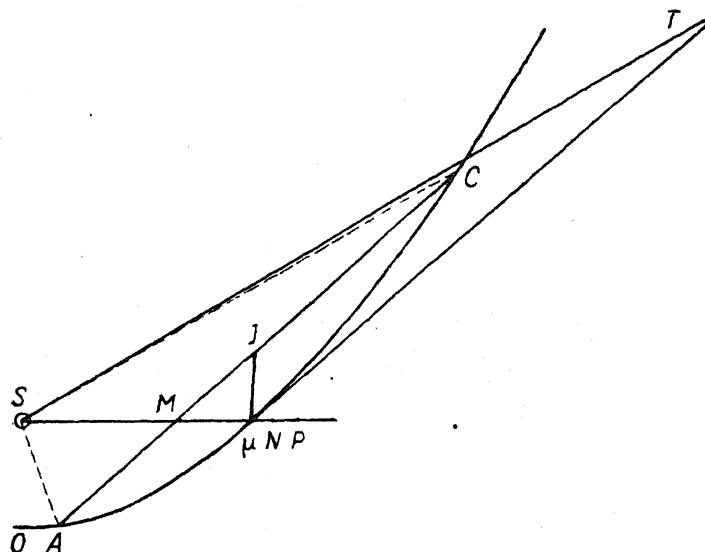
$$S\mu T = \frac{1}{2} S\mu \cdot \mu T \cdot \sin \alpha$$

следовательно

$$\mu T : AC = SN : S\mu$$

Но при параболическом движении квадраты скоростей обратно пропорциональны расстояниям до Солнца, следовательно будет при само собою постоянном обозначении:

$$V_{\mu}^{\;2} : V_P^{\;2} = SP : S\mu$$



Фиг. 2.

но по построению:

$$SP = \frac{\overline{SN}^2}{Sy}$$

следовательно

$$SP:Su = \overline{SN^2}:\overline{Su^2}$$

так что

$$V_u : V_p = SN : S\mu = \mu T : AC$$

иначе:

$$\frac{\mu T}{V_u} = \frac{AC}{V_p} = t_2 - t_1 \quad (11)$$

где t_1 есть момент прохождения кометы через точку A и t_2 — момент ее прохождения через точку C , так что $t_2 - t_1$ есть промежуток времени, в продолжение коего описывается дуга $A\mu C$.

Чтобы рассчитать ту скорость V_p , которую комета обладает, находясь в расстоянии $SP = \rho$ от Солнца, Ньютона поступает так: им доказаны

теоремы: 1°) что при движении по параболам скорость зависит только от расстояния до Солнца и обратно пропорциональна корню квадратному из этого расстояния, 2°) что в одинаковом от Солнца расстоянии скорость при движении по параболе равна скорости движения по кругу, умноженной на $\sqrt{2}$.

По третьему закону Кеплера, фиктивная планета, обращающаяся по кругу, радиус коего равен большой полуоси a орбиты Земли, имела бы своим периодом обращения звездный год, равный 365.256... средних суток, значит ее скорость была бы

$$V_0 = \frac{2\pi a}{\tau}$$

скорость же кометы, находящейся в том же расстоянии, была бы $V_0 \cdot \sqrt{2}$, и в расстоянии ρ эта скорость есть

$$V_p = V_0 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\rho}} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\tau} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}} = k \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

где

$$k = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\tau}$$

Таким образом, полагая $AC = \sigma$, имеем

$$k \sqrt{2} \cdot (t_2 - t_1) = \sigma \cdot \sqrt{\rho} \quad (12)$$

но полагая

$$S\mu = r \quad I\mu = x \quad SN = r + \frac{1}{3}x$$

имеем по построению:

$$\rho : SN = SN : S\mu$$

отсюда следует

$$\sqrt{\rho} = \frac{3r+x}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}$$

и соотношение (12) напишется так:

$$3k \sqrt{2} (t_2 - t_1) = (3r + x) \frac{\sigma}{\sqrt{r}} \quad (13)$$

§ 4. Сделаем следующие обозначения:

$$SA = r_1; \quad SC = r_2; \quad r_1 + r_2 = s$$

и попрежнему:

$$I\mu = x; \quad AC = \sigma$$

и применим приведенные выше указания Лагранжа; тогда имеем следующие равенства:

$$r + x = \frac{1}{2}s \quad [\text{по указанию Лагранжа, форм. (10)}] \quad (14)$$

$$x = \frac{1}{16} \frac{\sigma^2}{r} \quad (\text{по лемме IX}) \quad (15)$$

$$3k\sqrt{2}(t_2 - t_1) = (3r + x) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{r}} \quad [\text{по лемме X, форм. (13)}] \quad (16)$$

Из формул (14) и (15) следует, что величины r и x определяются как корни квадратного уравнения

$$z^2 - \frac{1}{2}sz + \frac{1}{16}\sigma^2 = 0$$

Когда фокус лежит вне сегмента, ограниченного рассматриваемою дугою параболы и ее хордою, т. е. угол $ASC < 180^\circ$, то стрелка $x < r$, и надо брать:

$$r = z_1 = \frac{1}{4}(s + \sqrt{s^2 - \sigma^2}) \quad (17)$$

$$x = z_2 = \frac{1}{4}(s - \sqrt{s^2 - \sigma^2}) \quad (18)$$

когда же фокус лежит внутри этого сегмента, то будет $x > r$, и надо брать:

$$r = z_2 = \frac{1}{4}(s - \sqrt{s^2 - \sigma^2}) \quad (17')$$

$$x = z_1 = \frac{1}{4}(s + \sqrt{s^2 - \sigma^2}) \quad (18')$$

Положим, что имеет место первый случай, тогда будет

$$3k\sqrt{2}(t_2 - t_1) = \left(s + \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - \sigma^2}\right) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{r}}$$

но в этом случае по формуле (17):

$$8r = 2s + 2\sqrt{s^2 - \sigma^2} = (\sqrt{s + \sigma} + \sqrt{s - \sigma})^2$$

Следовательно, будет

$$\begin{aligned} 3k(t_2 - t_1) &= \frac{2\left(s + \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - \sigma^2}\right)}{\sqrt{s + \sigma} + \sqrt{s - \sigma}} \cdot \sigma = \\ &= \left(s + \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - \sigma^2}\right) \cdot (\sqrt{s + \sigma} - \sqrt{s - \sigma}) \end{aligned}$$

и, заметив, что

$$s + \frac{1}{2} \sqrt{s^2 - \sigma^2} = \frac{1}{2} [(\sqrt{s + \sigma})^2 + \sqrt{s + \sigma} \cdot \sqrt{s - \sigma} + (\sqrt{s - \sigma})^2]$$

получаем

$$3k(t_2 - t_1) = \frac{1}{2} (s + \sigma)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} (s - \sigma)^{\frac{3}{2}}$$

т. е.

$$6k(t_2 - t_1) = (r_1 + r_2 + \sigma)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_2 - \sigma)^{\frac{3}{2}} \quad (19)$$

Совершенно так же во втором случае будет

$$6k(t_2 - t_1) = (r_1 + r_2 + \sigma)^{\frac{3}{2}} + (r_1 + r_2 - \sigma)^{\frac{3}{2}} \quad (20)$$

Это и суть формулы Эйлера.

Таким образом указанная Лагранжем равносильность этих формул лемме X Ньютона доказана.

Обратим здесь же внимание на то, с какою простотою, можно сказать почти без выкладок, эти формулы получаются из леммы X.

Выше было приведено для постоянной k выражение

$$k = \frac{2\pi}{\tau} a^{\frac{3}{2}} \quad (21)$$

Ньютон в своих расчетах полагает $a = 100\ 000\ 000$ и продолжительность τ звездного года в 365.256 средних суток, тогда будет:

$$\left. \begin{array}{l} k = 1720\ 212 \\ k\sqrt{2} = 2432\ 747 \end{array} \right\} \quad (22)$$

Если принять, как это делается теперь, $a = 1$, то будет

$$k = 0.01720212 \quad (22')$$

Ньютон в своем расчете исходил из третьего закона Кеплера, пренебрегая отношением m массы Земли к массе Солнца; если же этою величиною не пренебречь, то в знаменателе надо писать $\tau\sqrt{1+m}$ вместо τ , так что выражение k будет

$$k = \frac{2\pi}{\tau\sqrt{1+m}} \cdot a^{\frac{3}{2}} \quad (23)$$

Гаусс принял

$$m = \frac{1}{354710}$$

и

$$\tau = 365.2563835$$

и получил при $a = 1$:

$$k = 0.01720209895 \quad (24)$$

таким образом число Ньютона не только при тогдашней, но даже при современной точности наблюдений практически не требует поправки.

§ 5. В «Miscellanea Berolinensis», t. VII, изданном в Берлине в 1743 г., находится статья Эйлера под заглавием: «Determinatio orbitae cometæ anno 1742 detectæ».

В этой статье, в §§ XIII и XIV, Эйлер выводит двумя способами приведенную выше формулу назависимо от леммы X Ньютона, о которой он даже не упоминает, что представляется тем более странным, что как лемма X, так и формула, выведенная Эйлером, служат для вычисления того же самого промежутка времени, и естественно было бы проверить тождественность доставляемых обеими формулами результатов.

Для ясности сопоставления с предыдущим, мы сохраним обозначения, сделанные в § 4, отступив от обозначений Эйлера, но следуя в точности за его рассуждениями и выкладками.

В § XII Эйлер сперва показывает, каким образом найти расстояние q от Солнца до перигелия, зная два радиуса-вектора r_1 и r_2 и хорду σ между ними.

По свойству параболы имеем вообще

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v} \quad (25)$$

где v есть истинная аномалия; таким образом будет:

$$r_1 = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v_1}; \quad r_2 = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v_2} \quad (26)$$

Пусть будет

$$v_2 = v_1 + \gamma$$

тогда имеем

$$\sqrt{\frac{r_1}{r_2}} = \frac{\cos \frac{1}{2} (v_1 + \gamma)}{\cos \frac{1}{2} v_1} = \cos \frac{1}{2} \gamma - \sin \frac{1}{2} \gamma \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1 \quad (27)$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1 = \frac{\cos \frac{1}{2} \gamma - \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}}{\sin \frac{1}{2} \gamma} \quad (28)$$

Но из треугольника ASC следует:

$$\cos \frac{1}{2} \gamma = \frac{\sqrt{(r_1 + r_2 + \sigma)(r_1 + r_2 - \sigma)}}{2 \sqrt{r_1 r_2}} \quad (29)$$

$$\sin \frac{1}{2} \gamma = \frac{\sqrt{(r_1 - r_2 + \sigma)(r_2 - r_1 + \sigma)}}{2 \sqrt{r_1 r_2}} \quad (30)$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1 = \frac{\sqrt{(r_1 + r_2 + \sigma)(r_1 + r_2 - \sigma)} - 2r_1}{\sqrt{(r_1 - r_2 + \sigma)(r_2 - r_1 + \sigma)}} \quad (31)$$

Совершенно так же будет

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2 = \frac{\sqrt{(r_1 + r_2 + \sigma)(r_1 + r_2 - \sigma)} - 2r_2}{\sqrt{(r_1 - r_2 + \sigma)(r_2 - r_1 + \sigma)}} \quad (32)$$

Затем имеем

$$1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} v_1 = \frac{4r_1 + 4r_2 - \sqrt{(r_1 + r_2 + \sigma)(r_1 + r_2 - \sigma)}}{(r_1 - r_2 + \sigma)(r_2 - r_1 + \sigma)} \cdot r_1 = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} v_1}$$

и мы получим

$$q = r_1 \cos^2 \frac{1}{2} v_1 = r_2 \cos^2 \frac{1}{2} v_2 = \frac{(r_1 - r_2 + \sigma)(r_2 - r_1 + \sigma)}{4r_1 + 4r_2 - \sqrt{(r_1 + r_2 + \sigma)(r_1 + r_2 - \sigma)}} \quad (33)$$

На основании уравнения (25), площадь F параболического сектора, соответствующего истинной аномалии v , есть

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} q^2 \int_0^v \frac{dv}{\cos^4 \frac{1}{2} v} = q^2 \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} v \right] = \\ &= \frac{1}{3} q^2 \left[3 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} v \right] \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \end{aligned} \quad (34)$$

Время описания этой площади определяется из равенства

$$\frac{3}{2} kt = q^{\frac{3}{2}} \left[3 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} v \right] \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \quad (35)$$

ибо секториальная скорость равна $\frac{\sqrt{2}}{2} k \sqrt{q}$.

Отсюда следует, что время $t_2 - t_1$ описания сектора ASC определяется из равенства

$$\frac{3}{2} k(t_2 - t_1) = q^{\frac{3}{2}} \left[3 \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2 - \operatorname{tg} v_1 \right) + \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2 - \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} v_1 \right) \right]$$

Сопоставляя эту формулу с формулами (31), (32) и (33), Эйлер заключает, что правая часть этого равенства выражается через r_1 , r_2 и σ , стоит только, вместо q , $\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1$ и $\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2$ подставить их величины, а затем произвести надлежащие упрощения.

Эти исключения и упрощения исполняются Эйлером двумя различными манерами §§ XIII и XIV его статьи; мы ограничимся выводом, данным в § XIV, как более простым, по словам Эйлера.

Мы имели выражение

$$F = \frac{1}{3} q^2 \left[3 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} v \right] \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \quad (36)$$

но из уравнения (25) следует

$$\frac{r}{q} = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} v \right) \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{r-q}{q}} \quad (37)$$

таким образом будет вообще

$$F = \frac{1}{3} q^{\frac{1}{2}} (r + 2q) \cdot \sqrt{r - q} \quad (38)$$

и так как секториальная скорость равна $\frac{\sqrt{2}}{2} k \sqrt{q}$, то время описания этой площади определяется из равенства

$$\frac{3}{\sqrt{2}} k t = (r + 2q) \cdot \sqrt{r - q} \quad (39)$$

Таким образом будет:

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{\sqrt{2}} k t_1 &= (r_1 + 2q) \cdot \sqrt{r_1 - q} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} k t_2 &= (r_2 + 2q) \cdot \sqrt{r_2 - q} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

и значит, будет

$$\frac{3}{\sqrt{2}} k t (t_2 - t_1) = (r_2 \sqrt{r_2 - q} - r_1 \sqrt{r_1 - q}) + 2q (\sqrt{r_2 - q} - \sqrt{r_1 - q})$$

Мы имели

$$q = \frac{(r_1 - r_2 + \sigma)(r_2 - r_1 + \sigma)}{4(r_1 + r_2) - 4\sqrt{(r_1 + r_2 + \sigma)(r_2 - r_1 - \sigma)}} \quad (41)$$

поэтому будет

$$r_1 - q = \frac{5r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2 - \sigma^2 - 4r_1 \sqrt{(r_1 + r_2 + \sigma)(r_1 + r_2 - \sigma)}}{4(r_1 + r_2) - 4\sqrt{(r_1 + r_2 + \sigma)(r_1 + r_2 - \sigma)}} \quad (42)$$

II

$$\begin{aligned} \sqrt{r_1 - q} &= \frac{-2r_1 - \sqrt{(r_1 + r_2 + \sigma)(r_1 + r_2 - \sigma)}}{\sqrt{2(r_1 + r_2 + \sigma)} - \sqrt{2(r_1 + r_2 - \sigma)}} = \\ &= \frac{-(r_1 - r_2 + \sigma)\sqrt{2(r_1 + r_2 + \sigma)} + (r_2 - r_1 + \sigma)\sqrt{2(r_1 + r_2 - \sigma)}}{4\sigma} \end{aligned} \quad (43)$$

Совершенно так же

$$\begin{aligned} \sqrt{r_2 - q} &= \frac{2r_2 - \sqrt{(r_1 + r_2 + \sigma)(r_1 + r_2 - \sigma)}}{\sqrt{2(r_1 + r_2 + \sigma)} - \sqrt{2(r_1 + r_2 - \sigma)}} = \\ &= \frac{-(r_2 - r_1 + \sigma)\sqrt{2(r_1 + r_2 + \sigma)} - (r_1 - r_2 + \sigma)\sqrt{2(r_1 + r_2 - \sigma)}}{4\sigma} \end{aligned} \quad (43')$$

поэтому будет:

$$\begin{aligned} 2q(\sqrt{r_2 - q} - \sqrt{r_1 - q}) &= \frac{\sigma^2 - r_1^2 + 2r_1 r_2 - r_2^2}{\sqrt{2(r_1 + r_2 + \sigma)} - \sqrt{2(r_1 + r_2 - \sigma)}} \\ r_2 \sqrt{r_2 - q} - r_1 \sqrt{r_1 - q} &= \frac{2r_1^2 + 2r_2^2 - (r_1 + r_2)\sqrt{(r_1 + r_2 + \sigma)(r_1 + r_2 - \sigma)}}{\sqrt{2(r_1 + r_2 + \sigma)} - \sqrt{2(r_1 + r_2 - \sigma)}} \end{aligned}$$

и по подстановке получим

$$\frac{3}{\sqrt{2}} k(t_2 - t_1) = \frac{\sigma^2 + (r_1 + r_2)^2 - (r_1 + r_2)\sqrt{(r_1 + r_2 + \sigma)(r_1 + r_2 - \sigma)}}{\sqrt{2(r_1 + r_2 + \sigma)} - \sqrt{2(r_1 + r_2 - \sigma)}} \quad (44)$$

Умножив числителя и знаменателя правой части на

$$\sqrt{2(r_1 + r_2 + \sigma)} + \sqrt{2(r_1 + r_2 - \sigma)}$$

получаем

$$6k(t_2 - t_1) = (r_1 + r_2 + \sigma)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_2 - \sigma)^{\frac{3}{2}} \quad (19)$$

Эта последняя часть выкладки Эйлера, который вообще приводит свои выкладки со всею подробностью, требует некоторого пояснения.

Сделаем на время:

$$r_1 + r_2 + \sigma = l^2; \quad r_1 + r_2 - \sigma = \lambda^2$$

тогда будет:

$$2\sigma = l^2 - \lambda^2; \quad 2(r_1 + r_2) = l^2 + \lambda^2$$

и правая часть равенства (44) будет

$$\frac{l^4 + \lambda^4 - (l^2 + \lambda^2) \cdot l\lambda}{2\sqrt{2}(l-\lambda)} = \frac{l^3(l-\lambda) + \lambda^3(l-\lambda)}{2\sqrt{2}(l-\lambda)} = \frac{l^3 - \lambda^3}{2\sqrt{2}}$$

и мы получим

$$6k(t_2 - t_1) = l^3 - \lambda^3$$

а это и есть формула (19).

Если сравнить выводы Ньютона и Эйлера, то мы легко заметим необыкновенную проницательность Ньютона, который, исходя из динамического закона площадей, без всяких выкладок получил свою лемму X. С другой стороны, анализ Эйлера, не отличаясь в данном случае внешним изяществом, должен быть признан замечательным по естественности своего хода, так что окончательная формула получается как бы по необходимости сама собою. Громоздкость выкладок получилась потому, что Эйлер везде оперирует с самими трехчленами $(r_1 + r_2 + \sigma)$ и $(r_1 + r_2 - \sigma)$, не обозначив их для сокращения письма одною буквою.

При вычислении орбиты кометы 1742 г., Эйлер выведенной им формулой, которая, будучи написана в другом виде, является основною, не пользуется, и в изданном им в 1744 г. сочинении «*Theoria motuum planetarum et cometarum*» эта формула не помещена. Это обстоятельство, видимо, и ввело в заблуждение Лагранжа, который, делая обзор способов определения орбит комет, в начале своей статьи 1778 г. ссылается на это сочинение Эйлера, не упоминая про его сочинение 1743 г., и приписывает формулу (19) Ламберту.

§ 6. Сочинение Ламберта, в котором он выводит формулу (19), не упоминая Ньютона, а из трудов Эйлера упоминает лишь «*Theoria motuum planetarum et cometarum*», где этой формулы нет, носит название «*Insigniores orbitae cometarum proprietates*», и в переводе на немецкий язык вошло в «*Ostwald's Klassiker*», № 133. На этот перевод, как более доступный, мы и будем, где понадобится, ссылаться.

Видимо, Ламберт не ознакомился с сочинением Эйлера — «*Determinatio orbitae cometae anno 1742 observatae*», изданным в 1743 г., вероятно считая, что оно посвящено частному вопросу, а все общее отнесено в сочинение «*Theoria motuum planetarum et cometarum*», тем более, что в нем приведены, в виде примеров, вычисления орбит комет 1680 г. и 1744 г.

элементы орбиты и наблюдения кометы 1742 г., причем, как уже сказано, Эйлер своей формулой (19) не пользуется.

Ламберт в своей статье приводит сперва ряд свойств параболы, доказывая их частью геометрически, частью аналитически. Из этих свойств

мы при ведем те, которые непосредственно нужны для доказательства формулы (19), данной в конце § 63 его статьи; при этом мы не будем придерживаться обозначений Ламберта, а для удобства сопоставления его формул с приведенными выше удержим сделанные нами обозначения.

Все свойства параболы

излагаются Ламбертом в виде отдельных лемм и теорем.

1°) **Лемма 1.** Если в параболе ON (фиг. 3), которой вершина O , фокус S и ось OB , произвести произвольный радиус-вектор SN и через его конец касательную NT , то угол

$$TNS = \frac{1}{2} NSB$$

Доказательство. По свойству параболы $ST = SN$, так что угол

$$STN = SNT$$

а так как

$$STN + SNT = NSB$$

то

$$TNS = \frac{1}{2} NSB$$

2°) **Лемма 2.** Через вершину параболы O проводится прямая OE перпендикулярно к оси, пересекающая касательную NT в точке E , которая соединяется с фокусом S прямой SE ; тогда этому прямому угол OSN разделится пополам и треугольники OSE и ESN подобны.

Доказательство. Так как

$$TE = EN$$

и

$$ST = SN$$

то угол

$$TSE = ESN$$

Затем SE перпендикулярна к касательной и треугольник SEN — прямоугольный, а так как и угол EOS — прямой, то и треугольник EOS — прямоугольный, а так как угол

$$OSE = ESN$$

то эти треугольники подобны.

3°) Следствие 1. Таким образом

$$OS:SE = SE:SN$$

т. е. SE есть средняя пропорциональная между OS и SN .

4°) Следствие 2. Так как угол

$$OES = ENS$$

то будет

$$OS = ES \cdot \sin OES = ES \cdot \sin ENS = SN \cdot \sin^2 SNT$$

поэтому, когда дан радиус-вектор SN и угол SNT , то легко находится расстояние SO фокуса до вершины и положение оси.

По этому образцу идет и изложение всего первого отдела статьи Ламберта на протяжении 60 параграфов; из них мы отметим §§ 44 и 45, в которых устанавливаются формулы (14) и (15) и, на основании их, (17) и (18). Затем в §§ 56 и 58 он геометрически выводит формулу для площади сектора ASC , которая, при наших обозначениях, напишется так:

$$6ASC = (3r + x) \frac{\sigma}{\sqrt{r}} \cdot \sqrt{q} \quad (45)$$

что соответствует формуле (16) Ньютона.

По подстановке вместо r и x их значений (17) и (18) получается

$$\frac{3ASC}{\sqrt{q}} = \frac{\left(s + \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - \sigma^2}\right)\sigma}{\sqrt{s + \sqrt{s^2 - \sigma^2}}} = \sqrt{s - \sqrt{s^2 - \sigma^2}} \cdot \left(s + \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - \sigma^2}\right) \quad (46)$$

где $s = r_1 + r_2$ поставлено нами для сокращения письма, Ламберт же это сокращенное обозначение делает лишь под конец своей выкладки.

Заметив, что

$$s + \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - \sigma^2} = \frac{1}{2}[s + (s + \sqrt{s^2 - \sigma^2})]$$

Ламберт получает

$$\begin{aligned}\frac{3ASC}{\sqrt{q}} &= \frac{1}{2}s\sqrt{s-\sqrt{s-\sigma^2}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{s+\sqrt{s^2-\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{2}s\sqrt{\frac{s+\sigma}{2}} - \frac{1}{2}s\sqrt{\frac{s-\sigma}{2}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\frac{s+\sigma}{2}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\frac{s-\sigma}{2}} \\ &= \left(\frac{s+\sigma}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{s-\sigma}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

т. е. площадь F сектора будет

$$F = \frac{1}{3}\sqrt{q} \cdot \left[\left(\frac{r_1+r_2+\sigma}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{r_1+r_2-\sigma}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (47)$$

Получив это выражение, он называет его «весьма изящным», применяет его затем, чтобы получить время описания этой площади, и не оговаривает, что это все и, в сущности, почти тем же способом, с тою лишь разницей, что площадь сектора выведена чисто аналитически, было за 18 лет перед тем сделано Эйлером и еще на 57 лет раньше Ньютона.

Здесь необходимо заметить, что, вследствие весьма плохого типографского исполнения, при беглом просмотре статьи Эйлера его формула может и ускользнуть от внимания. В самом деле, на конце стр. 18 и начале стр. 19 эта формула напечатана так:

$$\begin{aligned}&\text{in se mutuo ductæ dant } \frac{4\sqrt{a}}{\pi} (r-s) (1+\frac{1}{3}ss+\frac{1}{3}sr+\frac{1}{3}rr) = \\ &\frac{1}{6\pi} \cdot (2f+2g+N(f+g+k)(f+g-k)) \\ &\quad Nf + \\ &\quad \text{***} \quad 19 \quad \text{***} \\ &\underline{(Nf+g+k)} - \underline{Nf+g-k} = \underline{\frac{(f+g+k)\frac{1}{4}}{1}} - \underline{\frac{(f+g-k)\frac{1}{4}}{1}} \text{ quæ ex.}\end{aligned}$$

presso dat tempus; quo cometa in orbite parabolica motus spatium ac conficit, in diebus expressum.

и затем, в начале стр. 20, так:

$$\begin{gathered} \text{*** 20 ***} \\ \mathcal{V}_2(f+g+k) + \mathcal{V}_2(f+g-k) \text{ multiplicetur, prodibit} \\ \text{tempus quo cometa ab } a \text{ ad } c \text{ progreditur} = \frac{\frac{1}{2}((f+k)^{\frac{3}{2}} - (f-g-k)^{\frac{3}{2}})}{1193954.5} \text{ dierum} \end{gathered}$$

Фиг. 5.

§ 7. Выше было указано, что в 1778 г. в «Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin» Лагранж поместил две статьи под заглавием: «Sur le problème de la détermination des orbites des comètes d'après trois observations», и в 1783 г. — еще одну статью под тем же заглавием.

Все эти три статьи соединены воедино и помещены в томе IV полного собрания сочинений Лагранжа, занимая в нем стр. 439—532.

В § 16 этой статьи, занимающей стр. 475—479, Лагранж, исходя из выражений радиуса-вектора через расстояние до перигелия и истинную аномалию, чисто аналитическим путем выводит формулу, которая при наших обозначениях напишется так:

$$6k(t_2 - t_1) = (r_1 + r_2 + \sqrt{r_1 r_2} \cdot \cos \omega) \cdot \sqrt{r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cdot \cos \omega} \quad (48)$$

где $2\omega = \gamma$ представляет угол между радиусами-векторами r_1 и r_2 , так что если ввести хорду σ , то будет

$$\cos \omega = \frac{\sqrt{(r_1 + r_2 + \sigma)(r_1 + r_2 - \sigma)}}{2\sqrt{r_1 r_2}} = \frac{\sqrt{s^2 - \sigma^2}}{2\sqrt{r_1 r_2}}$$

и эта формула напишется

$$6k(t_2 - t_1) = \left(s + \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - \sigma^2} \right) \sqrt{s - \sqrt{s^2 - \sigma^2}} \quad (49)$$

т. е. та промежуточная формула (46), преобразованием которой Ламберт, а до него Эйлер, получил формулу (19).

По поводу этой формулы и ей равносильной

$$6k(t_2 - t_1) = (r_1 + r_2 + \sqrt{r_1 r_2} \cdot \cos \omega) \sqrt{r_1 r_2} \sin \omega \quad (50)$$

Лагранж говорит: «Это выражение довольно замечательно, ибо оно не зависит ни от параметра параболы, ни от положения перигелия. Ламберт

первый ее вывел в своем прекрасном сочинении «Об орбитах комет». Лишь через 35 лет, подготавливая к печати второе издание своей «Mécanique Analytique», Лагранж исправил свою двойную ошибку, воздав должное Ньютону и Эйлеру, как это показано выше.

§ 8. Формула (19) под названием формулы Эйлера-Ламберта входит теперь во все курсы астрономии, причем дается более или менее сложный ее вывод, исходя из выражения

$$\frac{2k(t_2 - t_1)}{p\sqrt{p}} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}v_2 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{3} \left(\operatorname{tg}^3 \frac{1}{2}v_2 - \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2}v_1 \right) \quad (51)$$

закона площадей для движения по параболе, параметр которой есть

$$p = 2q$$

Повидимому, самый простой из этих выводов приведен в «Курсе астрономии» проф. А. Н. Савича (т. II, 1884, стр. 179).

Положив

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}v_1 = \tau_1 \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}v_2 = \tau_2$$

напишем уравнение (51) так:

$$\begin{aligned} \frac{6k(t_2 - t_1)}{p\sqrt{p}} &= (\tau_2 - \tau_1)(3 + \tau_2^2 + \tau_1\tau_2 + \tau_1^2) = \\ &= \sqrt{1 + \tau_2^2 + 1 + \tau_1^2 - 2(1 + \tau_1\tau_2)} \times \\ &\quad \times (1 + \tau_2^2 + 1 + \tau_1^2 + 1 + \tau_1\tau_2) \end{aligned} \quad (52)$$

Но

$$\begin{aligned} 1 + \tau_2^2 &= \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}v_2} = \frac{2r_2}{p}; \quad 1 + \tau_1^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}v_1} = \frac{2r_1}{p} \\ 1 + \tau_1\tau_2 &= \frac{\cos \frac{1}{2}v_2 \cos \frac{1}{2}v_1 + \sin \frac{1}{2}v_2 \sin \frac{1}{2}v_1}{\cos \frac{1}{2}v_2 \cdot \cos \frac{1}{2}v_1} = \cos \frac{1}{2}(v_2 - v_1) \cdot \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{p} \end{aligned}$$

но из треугольника ASC , коего стороны суть r_1 , r_2 , σ и угол между сторонами r_1 и r_2 есть $v_2 - v_1$, следует

$$2\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{1}{2}(v_2 - v_1) = \sqrt{(r_1 + r_2 + \sigma)(r_1 + r_2 - \sigma)}$$

Положим для краткости письма:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + \sigma &= l \\ r_1 + r_2 - \sigma &= \lambda \end{aligned}$$

тогда будет:

$$\begin{aligned} 2(r_1 + r_2) &= l + \lambda; \quad 2\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{1}{2}(v_2 - v_1) = \sqrt{l \cdot \lambda} \\ &\sqrt{1 + \tau_2^2 + 1 + \tau_1^2 - 2(1 + \tau_1 \tau_2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \sqrt{l + \lambda - 2\sqrt{l \cdot \lambda}} = \frac{1}{\sqrt{p}}(\sqrt{l} - \sqrt{\lambda}) \\ 1 + \tau_2^2 + 1 + \tau_1^2 + 1 + \tau_1 \tau_2 &= \frac{1}{p}(l + \lambda + \sqrt{l \cdot \lambda}) \end{aligned}$$

по подстановке и сокращении получим

$$6k(t_2 - t_1) = l^{\frac{3}{2}} - \lambda^{\frac{3}{2}} = (r_1 + r_2 + \sigma)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_2 - \sigma)^{\frac{3}{2}} \quad (19)$$

При выводе этой формулы предположено, что угол между r_2 и r_1 есть $v_2 - v_1$, т. е. точка S лежит вне сегмента $A\mu C$; когда же эта точка внутри этого сегмента, то угол в треугольнике ASC будет $360^\circ - (v_2 - v_1)$, и перед вторым членом правой части получится знак $-$.

Сравнив этот вывод с выводом Эйлера, а также с выводом Ламберта, мы видим его краткость и простоту, причем эта краткость и простота получились благодаря той замене, которая сделана в формуле (52), вследствие чего сложность выкладок Эйлера сразу исчезла.

THE FATE OF A CELEBRATED THEOREM

Summary

In lemma X of the third book of his «Principia» Sir Is. Newton has given a theorem of a very great importance for the determination of parabolic orbits of comets. The proof he has given is purely geometrical, extremely simple and based on dynamical proprieties of the parabolic motion of a heavenly body.

In 1743 Euler rediscovered an equivalent of Newton's theorem by an analytical process rather complicated, but he did not remark that his theorem was only an analytical expression of Newton's one.

In 1761 Lambert by geometrical and analytical reasonings obtained again Euler's expression, which he considered as a new one.

In 1778 Lagrange in his paper «Sur la détermination des orbites des comètes» gives a proof of the same theorem and ascribes it to Lambert with a great emphasis.

In 1816, three years after the death of Lagrange, appeared the second volume of the second edition of his «Mécanique Analytique»; here in § 26 (p. 31) he says: «cette formule élégante a été donnée d'abord par Euler dans le septième volume des „Miscellanea Berolinensia“. On pouvait la déduire du lemme X du troisième livre des „Principes mathématiques“ en traduisant en analyse la construction par laquelle Newton détermine la vitesse qui ferait parcourir uniformément la corde d'un arc de parabole, dans le même temps que l'arc serait parcouru par une comète»... and he describes in a few lines how this analytical expression can be deduced.

It seems that this indication of Lagrange remained unnoticed during more than one hundred years; in all treatises on theoretical astronomy Newton's lemma X is even not mentionned, or considered as an approximate one, and denoted as Euler's or Lambert's or Euler-Lambert's theorem.

In prof. A. N. Kriloff's paper are reproduced with uniform notation Newton's original proof, a deduction from it of Euler's formula in accordance with Lagrange's indications, Euler's proof of his formula, Lambert's proof of the same and a most simple proof given by A. N. Savitch in his «Theoretical Astronomy» (1884), which may advantageously replace the usual rather clumsy deductions.

SUR LA VARIATION DES ÉLÉMENTS DES ORBITES ELLIPTIQUES DES PLANÈTES¹

§ 1. En exposant la théorie de la Lune de Newton F. Tisserand s'exprimait ainsi:

«Dans les vingt deux colloraires de la Proposition LXVI, Newton analyse les effets des forces précédentes (de l'action perturbatrice du Soleil) au point de vue des dérangements du corps P . Les considérations qui le guident sont d'une grande finesse, parfois difficiles à suivre, en raison de la concision du langage...

... «Dans un beau mémoire „Théorie géométrique du mouvement des aphélies des planètes pour servir d'addition aux „Principes“ de Newton“ (Oeuvres, t. V), Lagrange a donné une démonstration géométrique élégante des formules différentielles qu'il avait obtenues antérieurement par l'analyse pour le mouvement des aphélies et les variations du grand axe et de l'excentricité.

«M. Lespiault [Théorie géométrique de la variation des éléments des planètes (Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 1867)] en s'appuyant sur les leçons professées au Collège de France en 1856 par M. J. Bertrand et s'aidant de la considération des couples, a pu donner des démonstrations géométriques des formules relatives aux inclinaisons et aux longitudes des noeuds et compléter ainsi le „Mémoire“ de Lagrange...

«Les recherches de Newton et de ses successeurs, dans la voie indiquée ci-dessus, découlent aujourd'hui très simplement des formules qui expriment les dérivées des éléments elliptiques d'une planète en fonction des composantes de la force perturbatrice, suivant le rayon vecteur $fm'S$, la perpendiculaire au rayon vecteur dans le plan de l'orbite $fm'T$ et la normale à ce plan $fm'W$.

... «Si l'on désigne par a , n , e , p , φ , θ , ω , ϵ , m , r , w , u , Υ le demi-grand axe, le moyen mouvement, l'excentricité, le paramètre, l'inclinaison, la longitude du noeud, celle du périhélie, celle de l'époque, la masse, le rayon vecteur, l'anomalie vraie, l'anomalie excentrique et enfin l'argument de la latitude pour la planète troublée P , par m' la masse de la planète troublante S , la masse de T étant prise pour l'unité, les formules dont il s'agit sont:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2m'}{1+m} \cdot \frac{na^3}{\sqrt{1-e^2}} \left(Se \sin w + T \frac{p}{r} \right) \quad (1)$$

¹ Présenté à l'Académie le 22 Avril (5 Mai) 1915.

$$\frac{de}{dt} = \frac{m'}{1+m} \cdot na^2 \sqrt{1-e^2} [S \sin w + T(\cos u - \cos w)] \quad (2)$$

$$\frac{d\sqrt{p}}{dt} = \frac{m'}{1+m} \cdot na^{\frac{3}{2}} Tr \quad (3)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{m'}{1+m} \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} Wr \cos \Upsilon \quad (4) (A)$$

$$\sin \varphi \frac{d\theta}{dt} = \frac{m'}{1+m} \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} Wr \sin \Upsilon \quad (5)$$

$$e \frac{d\omega}{dt} = \frac{m'}{1+m} na^2 \sqrt{1-e^2} \left[-S \cos w + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin w \right] + 2e \sin^2 \frac{\varphi}{2} \frac{d\theta}{dt} \quad (6)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2m'}{1+m} na Sr + \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{d\omega}{dt} + 2\sqrt{1-e^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (7)$$

... «Ce que nous dirons plus loin prouvera que Newton connaissait l'expression de $\frac{d\omega}{dt}$ à l'aide des composantes S et T de la force perturbatrice et, très probablement aussi celles de $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$. J'incline à penser qu'il connaissait toutes les formules (1)—(7) mais qu'au lieu de les publier il a préféré en tirer un grand nombre de propositions géométriques, qu'il a obtenues en ne considérant chaque fois que l'effet de l'une des composantes» (F. Tisserand. Traité de Mécanique Céleste, t. III, chap. III).

Le même groupe de formules se rencontre au chap. XXVII du t. I, où Tisserand s'exprime à leur sujet ainsi: «Les formules (A) sont très importantes, surtout quand on veut obtenir les valeurs variables des éléments à l'aide des *quadratures mécaniques*»...

On établit généralement les formules que je viens de citer en se basant sur la théorie de la variation des constantes arbitraires, qui elle-même exige soit des calculs assez longs et compliqués, soit des considérations trop élevées pour un enseignement sommaire de l'Astronomie théorique, ainsi une manière simple et élémentaire pour établir ces formules peut présenter un certain intérêt. Je n'ai pas pu me procurer ici le Mémoire de M. Lespiault cité par Tisserand et ne voyant pas en quoi la considération des couples pût aider pour traiter une question, qui se rapporte au mouvement d'un point matériel, j'établis les formules (4) et (5) indépendamment des couples par des considérations les plus élémentaires.

§ 2. Lagrange s'exprime dans le § 2 de son «Mémoire» ainsi:

«Si l'ouvrage de Newton n'offre pas une théorie exacte du mouvement des aphélie, il en contient néanmoins, le germe, mais la difficulté de le

développer a peut-être empêché qu'on en ait encore profité. On le trouve dans la Proposition XVII du premier livre laquelle enseigne à déterminer les éléments de la section conique que doit décrire un corps lancé avec une certaine vitesse de projection suivant une direction donnée et soumis à l'action continue d'une force centrale en raison réciproque du carré des distances. Dans le troisième collorai de cette proposition, Newton remarque *que si le corps se meut dans une section conique et qu'il soit dérangé de son orbite par une impulsion quelconque on pourra connaître la nouvelle orbite dans laquelle il circulera ensuite en composant le mouvement que le corps a déjà avec le mouvement que cette impulsion seule lui aurait imprimé, car par ce moyen on aura le mouvement du corps lorsque qu'il part du lieu donné dans lequel il a reçu l'impulsion suivant une ligne droite donnée de position».*

§ 3. La remarque que nous avons soulignée contient toute la théorie de la variation des éléments elliptiques des planètes, il faut seulement avoir égard qu'en citant Newton, Lagrange s'exprime à la manière de Newton et que par le mot «*mouvement*» il faut entendre ce que l'on désigne maintenant par les mots «*quantité du mouvement*». Une impulsion agissant brusquement sur le corps pendant un temps très court, à la manière d'une percussion, provoque une variation de la quantité du mouvement du corps ou de sa vitesse, *le lieu du corps ne changeant pas*. D'après cette nouvelle vitesse et le lieu du corps on déterminera les éléments de sa nouvelle orbite, ainsi que Lagrange le fait au chap. II de la section VII de la «Mécanique Analytique».

Si l'impulsion ou la force perturbatrice agit d'une manière continue, la vitesse change graduellement aussi d'une manière continue. Si l'on considère l'action de la force perturbatrice pendant un temps infinitésimal dt , la vitesse recevra un changement dont la direction coïncide avec la direction de la force et dont la valeur est proportionnelle à cette force et à la durée dt de son action, les changements ou les variations des coordonnées du corps provoquées par l'action de la force perturbatrice seront *du second ordre* par rapport à dt .

On prendra donc les formules du mouvement elliptique, on fera varier la vitesse seulement,— les termes du premier ordre en dt , divisés par dt exprimeront «des variations des éléments elliptiques».

Cette indication a été donnée aussi par Lagrange au début du chap. II cité ci-dessus, mais Lagrange préfère de tirer les variations des éléments elliptiques des formules générales et non pas par une application directe de cette indication, c'est en la suivant que nous allons développer le calcul.

§ 4. Les formules fondamentales du mouvement elliptique dont nous aurons besoin sont que voici:

$$r^2 \frac{dw}{dt} = c. \text{ (intégrale des aires)}$$

$$v^2 = f\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \text{ (intégrale des forces vives)}$$

$$f\mu = (1 + m) \cdot f = \frac{c^2}{p} = \frac{4\pi^2}{\tau^2} a^3 = n^2 a^3$$

$$c = \sqrt{f\mu} \cdot \sqrt{p} = na^2 \sqrt{1 - e^2}$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos w} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos w}$$

$$r = a(1 - e \cos u)$$

$$r \sin w = a \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin u$$

$$r \cos w = a(\cos u - e)$$

$$u - e \sin u = nt + \epsilon - \omega$$

(E)

Soit m' la masse de la planète troubante; en désignant, comme il a été déjà dit, les composantes de la force (accélération) perturbatrice suivant le rayon vecteur par $fm'S$, suivant la perpendiculaire au rayon vecteur dans le plan de l'orbite par $fm'T$, et suivant la normale à ce plan par $fm'W$ et par α, β, γ les variations infinitésimales qu'éprouve la vitesse du corps m suivant les mêmes directions pendant le temps dt , on aura:

$$\alpha = fm'S \cdot dt; \quad \beta = fm'T \cdot dt; \quad \gamma = fm'W \cdot dt \quad (8)$$

Si au moment $t - dt$ le corps passait par un point quelconque P_0 de son orbite avec une vitesse V_0 , il arrivera, quand la force perturbatrice n'agit pas, au moment t en un point P de cette même orbite y étant animé d'une certaine vitesse V . En déterminant les éléments de l'orbite du corps d'après sa position P et sa vitesse V on retrouverait l'orbite initiale ou non troublée. Mais quand le corps est soumis à l'action de la force perturbatrice, en partant au moment $t - dt$ du même point P_0 avec la même vitesse V_0 , il arrivera au moment t en un point P_1 , y étant animé d'une vitesse V_1 , cette nouvelle position P_1 du corps et cette nouvelle vitesse V_1 donneront les éléments de l'orbite troublée. Les différences ou les accroissements des éléments correspondants des deux orbites étant divisés par dt représenteront

leurs dérivées par rapport au temps t . Ce sont ses dérivées qu'il s'agit de trouver.

Mais la distance PP_1 des deux positions du corps est du second ordre par rapport à dt , tandis que les différences des composantes correspondantes des vitesses V_1 et V sont α , β et γ , c'est-à-dire du premier ordre par rapport à dt . Donc en cherchant les variations des éléments on pourra considérer que les points P et P_1 coïncident, autrement que la position P du corps n'a pas varié, mais que le corps y est animé de la vitesse V_1 , dont les composantes diffèrent de celles de V par les accroissements α , β , γ . On calculera donc les accroissements correspondants des éléments, ces accroissements divisés par dt , fourniront les dérivées cherchées ou les «variations» des éléments en langage astronomique.

Commençons par définir la variation qu'éprouve le plan de l'orbite. La position de ce plan est fixée par les éléments: θ — longitude du noeud et φ — inclinaison (fig. 1).

La position du plan de l'orbite troublée sera définie par la nouvelle direction de la vitesse et le centre O du corps principal du système (fig. 2).

La position du corps P n'ayant pas varié (ou mieux dire ces variations étant du second ordre par rapport à dt), on voit que OP sera la droite d'intersection des deux plans; soit PH le vecteur représentant la vitesse V au moment t dans le mouvement non troublé, donc dans le plan OPQ de l'orbite initiale, pour avoir la position OP_1 du plan de la nouvelle orbite (en négligeant toujours les termes du second ordre en dt) on portera $HG = \gamma$ dans la direction de la normale au plan $POHQ$, — le plan $OPGQ_1$ est celui de la nouvelle orbite.

Pour avoir l'angle infinitésimal δ , qu'il forme avec le plan de l'orbite initiale on mènera le plan PCA perpendiculairement à la droite OP et on projétera la droite GH sur ce plan, on aura alors

$$\delta = \frac{AC}{PC}$$

mais

$$AC = HG = \gamma$$

et

$$PC = r \cdot \frac{dw}{dt}$$

car PC est la projection de PH sur la perpendiculaire PC au rayon vecteur OP .

Mais on a

$$r^2 \frac{dw}{dt} = c, \quad \text{donc } PC = \frac{c}{r}$$

et

$$\delta = \frac{\Upsilon \cdot r}{c} \quad (9)$$

Pour avoir les variations de l'inclinaison φ et de la longitude du noeud on se rapportera à la fig. 1, et portant l'angle NPN_1 égal à δ , on aura le nouveau noeud N_1 et la nouvelle inclinaison φ_1 . Le triangle sphérique NPN_1 nous donnera les variations cherchées.

Menons N_1K perpendiculairement à NP , alors

$$KN_1 = \delta \cdot \sin N_1 P = (\sin NP + \dots) \delta = \sin \Upsilon \cdot \delta$$

en négligeant toujours les termes des ordres supérieurs par rapport à dt .

Mais par le triangle infinitésimal NN_1K on a

$$NN_1 \sin \varphi = KN_1$$

NN_1 représentant la variation $d\theta$ de la longitude du noeud; ainsi

$$\sin \varphi \cdot d\theta = \sin \Upsilon \cdot \delta = \sin \Upsilon \cdot \frac{\Upsilon r}{c}$$

substituant au lieu de γ sa valeur $fm'Wdt$ et divisant par dt , on a

$$\sin \varphi \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{fm'}{c} \cdot r \cdot W \cdot \sin \Upsilon$$

par les formules (E) on a

$$\frac{f}{c} = \frac{c}{(1+m) \cdot p} = \frac{na}{(1+m) \sqrt{1-e^2}}$$

donc

$$\sin \varphi \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{m'}{1+m} \cdot \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} Wr \sin \Upsilon \quad (5)$$

c'est bien la formule (5) du groupe (A).

Pour calculer la variation de l'inclinaison, prenons le triangle PNN_1 , et soit $PN_1y = \varphi_1 = \varphi + d\varphi$; alors

$$PNN_1 = \varphi; \quad PN_1N = \pi - \varphi_1; \quad NPN_1 = \delta; \quad NP = \Upsilon$$

donc

$$\cos \varphi_1 = \cos \varphi \cos \delta - \sin \varphi \sin \delta \cdot \cos \Upsilon$$

mais

$$\cos \delta = 1; \quad \sin \delta = \delta$$

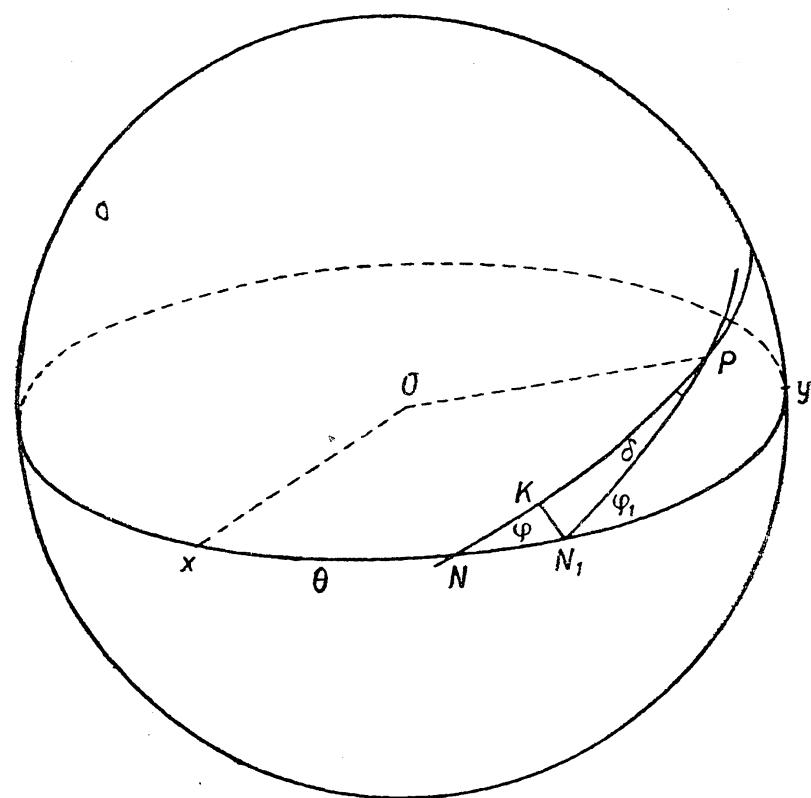


Fig. 1.

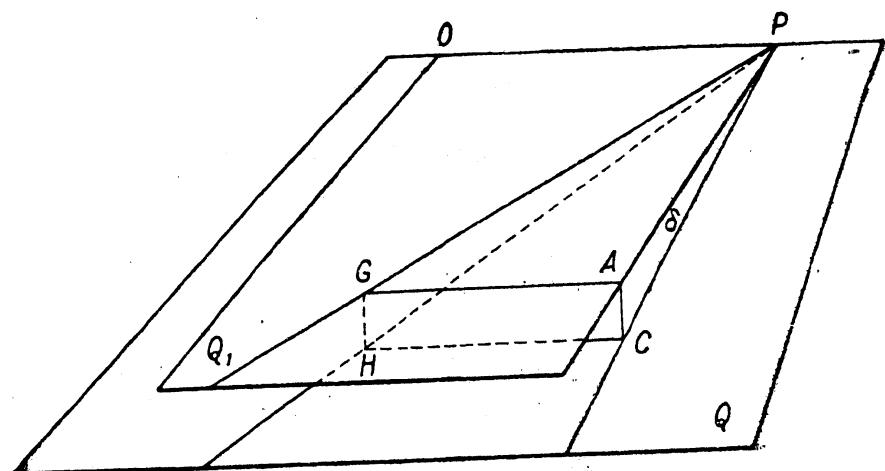


Fig. 2.

et on aura

$$\cos \varphi_1 - \cos \varphi = -\sin \varphi \cdot d\varphi = -\sin \varphi \cdot \cos \gamma \cdot \delta$$

remplaçant δ et ensuite f par leurs valeurs et divisant par dt on aura

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{m'}{1+m} \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} Wr \cos \gamma \quad (4)$$

C'est la formule (4) du groupe (A).

On voit ainsi que pour établir ces formules on n'a pas besoin de faire usage des couples, des considérations tout élémentaires suffisent.

§ 5. Les éléments a et e et le paramètre p qui en dépend déterminent la grandeur et la figure de l'ellipse dans le plan de l'orbite. La variation normale γ de la vitesse n'y produit aucune influence et on n'aura à considérer que les variations:

$$\begin{aligned}\alpha &= fm' S dt \\ \beta &= fm' T dt\end{aligned}$$

dans le sens du rayon vecteur et dans le sens perpendiculaire.

Désignons par ξ et η les composantes de la vitesse V suivant les directions ci-dessus:

$$\xi = \frac{dr}{dt} \quad \text{et} \quad \eta = r \frac{dw}{dt}$$

Leurs valeurs pour l'orbite troublée seront

$$\xi + \alpha \quad \text{et} \quad \eta + \beta$$

et soit $a_1 = a + da$ le demi grand axe de la nouvelle orbite. L'équation des forces vives donne:

$$\begin{aligned}V^2 &= \xi^2 + \eta^2 = f\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \\ V_1^2 &= (\xi + \alpha)^2 + (\eta + \beta)^2 = f\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_1} \right)\end{aligned}$$

Le rayon vecteur r ne variant pas, comme on l'a déjà expliqué.

La différence de ces deux formules donne

$$2\xi\alpha + 2\eta\beta = f\mu \cdot \frac{da}{a^2}$$

donc

$$f\mu \cdot \frac{da}{a^2} = 2fm' [S\xi + T\eta] dt$$

Mais par les formules du mouvement elliptique on a:

$$\xi = \frac{dr}{dt} = \frac{e}{p} \cdot \sin w \cdot \frac{r^2 dw}{dt} = \frac{ce \sin w}{p}; \quad \eta = r \frac{dw}{dt} = \frac{c}{r}$$

ainsi

$$\frac{da}{dt} = \frac{2m'}{\mu} \cdot a^2 \cdot \frac{c}{p} \cdot \left[eS \sin w + \frac{p}{r} T \right]$$

mais

$$\mu = 1 + m; \quad \frac{c}{p} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}$$

donc

$$\frac{da}{dt} = \frac{2m'}{1+m} \cdot \frac{na^3}{\sqrt{1-e^2}} \left[Se \sin w + \frac{p}{r} \cdot T \right] \quad (1)$$

C'est la formule (1) du groupe (A).

On a ensuite

$$c = \sqrt{p} \cdot \sqrt{f\mu} = \eta \cdot r$$

donc pour l'orbite troublée:

$$(\eta + \beta)r = \sqrt{p_1} \cdot \sqrt{f\mu}$$

où

$$p_1 = p + dp$$

ainsi

$$r\beta = \sqrt{f\mu} \cdot (\sqrt{p_1} - \sqrt{p}) = \sqrt{f\mu} \cdot d(\sqrt{p})$$

mais

$$\beta = fm' T \cdot dt$$

donc

$$\frac{d\sqrt{p}}{dt} = \frac{fm'}{\sqrt{f\mu}} \cdot Tr$$

mais par les formules (E) on a

$$\frac{f}{\sqrt{f\mu}} = \frac{na^{\frac{3}{2}}}{1+m}$$

alors

$$\frac{d\sqrt{p}}{dt} = \frac{m'}{1+m} na^{\frac{3}{2}} r T \quad (3)$$

C'est la formule (3) du groupe (A).

Le demi grand axe a , le paramètre p et l'excentricité e étant liés par la relation

$$p = a(1 - e^2)$$

on a

$$2ae \frac{de}{dt} = (1 - e^2) \frac{da}{dt} - \frac{dp}{dt}$$

remplaçant $\frac{da}{dt}$ et $\frac{dp}{dt}$ par leurs valeurs (1) et (3) et faisant des réductions faciles et évidentes, on a

$$\frac{de}{dt} = \frac{m'}{1+m} na^2 \sqrt{1-e^2} [S \sin w + T(\cos w + \cos u)] \quad (2)$$

C'est la formule (2) du groupe (A).

§ 6. La direction du grand axe de l'orbite dans son plan est déterminée par la longitude du périhélie ω .

Se rapportant à la figure (1), on a:

$$\begin{aligned} xN - NP &= \omega + w \\ xN_1 - N_1 P &= \omega_1 + w_1 \end{aligned}$$

donc

$$(xN_1 - xN) + (N_1 P - NP) = (\omega_1 - \omega) + (w_1 - w) = d\omega + dw;$$

mais

$$\begin{aligned} xN_1 - xN &= NN_1 = d\theta \\ (NP_1 - NP) &= -NK = -NN_1 \cos \varphi = -\cos \varphi \cdot d\theta; \end{aligned}$$

ainsi

$$d\omega + dw = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot d\theta \quad (*)$$

Mais on a

$$1 + e \cos w = \frac{1}{r} \cdot p$$

le rayon vecteur r ne variant pas, on aura

$$-e \sin w \frac{dw}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dp}{dt} - \frac{de}{dt} \cos w$$

Substituant pour $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{de}{dt}$ leurs valeurs (3) et (2), on aura

$$-e \sin w \frac{dw}{dt} = \frac{m'}{1+m} na^2 \sqrt{1-e^2} [(2 - \cos u \cos w - \cos^2 w) T - S \sin w \cos w]$$

mais par les formules (E):

$$\cos u = \frac{1}{e} \left[1 - \frac{r}{a} \right] = \frac{1}{e} \cdot \frac{1 + e \cos w - 1 + e^2}{1 + e \cos w} = \frac{e + \cos w}{1 + e \cos w}$$

donc

$$\begin{aligned} 2 - \cos^2 w - \cos u \cos w &= 1 + \sin^2 w - \frac{e \cos w + \cos^2 w}{1 + e \cos w} = \\ &= \sin^2 w \left[1 + \frac{1}{1 + e \cos w} \right] = \sin^2 w \left[1 + \frac{r}{p} \right] \end{aligned}$$

ainsi

$$-e \frac{dw}{dt} = \frac{m'}{1+m} na^2 \sqrt{1-e^2} \left[-S \cos w + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin w \right]$$

et la formule (*) donne

$$\begin{aligned} e \frac{d\omega}{dt} &= 2e \sin^2 \frac{\varphi}{2} \frac{d\theta}{dt} + \\ &+ \frac{m'}{1+m} na^2 \sqrt{1-e^2} \left[-S \cos w + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin w \right] \end{aligned} \quad (6)$$

C'est la formule (6) du groupe (A).

§ 7. La position de la planète P sur son orbite est déterminée pour un temps quelconque t , quand on a sa longitude moyenne à l'époque zéro, ou ce que l'on nomme la longitude moyenne de l'époque ε . L'anomalie excentrique u est alors fournie par l'équation de Kepler

$$u - e \sin u = nt + \varepsilon - \omega \quad (*)$$

Dans toutes les formules du mouvement troublé la valeur de ε n'entre que par la combinaison $nt + \varepsilon$, et on rapporte la variation de cette quantité sur la variation de ε ne faisant pas varier nt .

Donc en calculant la variation de l'équation (*) on considérera nt comme une constante et on aura

$$d\varepsilon = du + d\omega - e \cos u du - \sin u de \quad (**)$$

Nous avons vu que

$$dw = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\theta - d\omega \quad (***)$$

La formule

$$r \cos w = a (\cos u - e)$$

donne

$$-r \sin w dw = (\cos u - e) da - a \sin u du - a de$$

mais

$$\sqrt{1-e^2} a \sin u = r \sin w$$

donc

$$du = \sqrt{1-e^2} dw + \frac{\cos u - e}{\sin u} \cdot \frac{da}{a} - \frac{1}{\sin u} de$$

et substituant pour dw sa valeur (***)) on a

$$du + d\omega = 2 \sqrt{1-e^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\theta + \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}} d\omega + \frac{\cos u - e}{\sin u} \cdot \frac{da}{a} - \frac{1}{\sin u} de$$

Désignant par Δ les deux premiers termes dans le second membre de cette équation nous l'écrirons pour le moment ainsi:

$$du + d\omega = \Delta + \frac{\cos u - e}{\sin u} \cdot \frac{da}{a} - \frac{1}{\sin u} \cdot de$$

On a par les formules (E):

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos u$$

d'où l'on tire

$$e du = \frac{\cos u}{\sin u} de - \frac{r}{a \sin u} \cdot \frac{da}{a}$$

donc

$$e \cos u du = \frac{\cos^2 u}{\sin u} de - \frac{r}{a} \cdot \frac{\cos u}{\sin u} \cdot \frac{da}{a}$$

et l'équation (**) devient

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= \Delta + \frac{a(\cos u - e) + r \cos u}{a \sin u} \cdot \frac{da}{a} - \left\{ \frac{1}{\sin u} + \sin u + \frac{\cos^2 u}{\sin u} \right\} de = \\ &= \Delta + \frac{r(\cos w + \cos u)}{a \sin u} \cdot \frac{da}{a} - \frac{2}{\sin u} \cdot de \end{aligned}$$

Substituant pour da et de leurs valeurs (1) et (2) on aura

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= \Delta + \frac{2m'}{1+m} \cdot \frac{na^2}{\sqrt{1-e^2}} \left[Se \sin w + \frac{p}{r} T \right] \cdot \frac{r(\cos w + \cos u)}{a \sin u} \cdot dt \\ &\quad - \frac{2m'}{1+m} \cdot \frac{na^2}{\sin u} \cdot \sqrt{1-e^2} [S \sin w + T(\cos w + \cos u)] \cdot dt \end{aligned}$$

Groupons dans le second membre les termes qui contiennent S et T en sorte que l'on ait

$$d\varepsilon = \Delta + \frac{2m'}{1+m} \cdot na^2 \cdot [AS + BT] dt$$

Alors

$$\begin{aligned} A &= \frac{e \sin w}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{r(\cos w + \cos u)}{a \sin u} - \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot \sin w}{\sin u} = \\ &= e(\cos w + \cos u) - \frac{a(1-e^2)}{r} = \\ &= e \cos w + e \cos u - 1 - e \cos w = -\frac{r}{a} \\ B &= (\cos w + \cos u) \left[\frac{pr}{ra \cdot \sqrt{1-e^2}} - \sqrt{1-e^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$d\varepsilon = \Delta - \frac{2m'}{1+m} \cdot na r S \cdot dt$$

Substituant pour Δ sa valeur et divisant par dt on obtient la formule (7) du groupe (A):

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{2m'}{1+m} narS + \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{d\omega}{dt} + 2\sqrt{1-e^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt}. \quad (7)$$

Ainsi toutes les formules du groupe (A) se font établir, en se basant sur la remarque de Newton, par une voie tout à fait directe et élémentaire indépendamment de la théorie générale de la variation des constantes arbitraires.

§ 8. Ces formules étant établies on peut faire un pas plus loin et introduire au lieu des composantes S, T, W de la force perturbatrice les dérivées de la fonction perturbatrice R par lesquelles ces composantes s'expriment.

Considérons pour le moment qu'il n'y ait qu'un seul corps troublant, dont la masse est m' , la masse du corps troublé étant m , et celle du corps principal 1.

On sait que les dérivées partielles $\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ par rapport aux coordonnées du corps troublé expriment les projections de la force perturbatrice sur les axes.

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du corps troublant, x, y, z celle du corps troublé, l'origine O étant au centre du corps principal; en posant

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, & r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ \rho^2 &= (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2, \\ R &= fm' \left[\frac{1}{\rho} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

on a

Après ces préliminaires nous rapporterons les mots de Tisserand (Mécanique Céleste, t. I, chap. XXVII).

«On trouvera par le théorème des projections et à l'aide des formules de la Trigonométrie sphérique:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{fm'} \frac{\partial R}{\partial x} &= S[\cos \Upsilon \cos \theta - \sin \Upsilon \sin \theta \cos \varphi] + \\ &\quad + T[-\sin \Upsilon \cos \theta - \cos \Upsilon \sin \theta \cos \varphi] + W \sin \theta \sin \varphi \\ \frac{1}{fm'} \frac{\partial R}{\partial y} &= S[\cos \Upsilon \sin \theta + \sin \Upsilon \cos \theta \cos \varphi] + \\ &\quad + T[-\sin \Upsilon \sin \theta + \cos \Upsilon \cos \theta \cos \varphi] + W \cos \theta \sin \varphi \\ \frac{1}{fm'} \frac{\partial R}{\partial z} &= S \sin \Upsilon \sin \varphi + T \cos \Upsilon \sin \varphi + W \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

où l'on a désigné par Υ la distance de la planète à son noeud ascendant; c'est-à-dire l'argument de la latitude.

«Soit σ l'un quelconque des éléments elliptiques; on aura

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \sigma} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \sigma} + \frac{\partial R}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \sigma} \quad (12)$$

«Les valeurs de $\frac{\partial x}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial y}{\partial \sigma}$ et $\frac{\partial z}{\partial \sigma}$ seront tirées des formules du mouvement elliptique, savoir:

$$\left. \begin{aligned} x &= r(\cos \Upsilon \cos \theta - \sin \Upsilon \sin \theta \cos \varphi) \\ y &= r(\cos \Upsilon \sin \theta + \sin \Upsilon \cos \theta \cos \varphi) \\ z &= r \sin \Upsilon \sin \varphi, \quad \Upsilon = \omega - \theta + w \\ u - e \sin u &= nt + \epsilon - \omega, \quad r = a(1 - e \cos u) = \frac{p}{1 + e \cos u} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} w &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} u \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

«Les dérivées relatives à φ se calculent sans difficulté; pour celles qui se rapportent à θ il faut remarquer que θ figure explicitement dans les formules et implicitement dans Υ ; on aura ensuite

$$\frac{\partial}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \Upsilon} - \frac{\partial}{\partial \epsilon}$$

«Enfin les dérivées relatives à a , e et ϵ s'obtiendront aisément en remarquant que l'on a:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial a} &= \frac{r}{a}; \quad \frac{\partial r}{\partial e} = -a \cos w; \quad \frac{\partial r}{\partial \epsilon} = \frac{ae}{\sqrt{1-e^2}} \sin w \\ \frac{\partial \Upsilon}{\partial a} &= 0; \quad \frac{\partial \Upsilon}{\partial e} = \frac{2+e \cos w}{1-e^2} \sin w; \quad \frac{\partial \Upsilon}{\partial \epsilon} = \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

«Nous ne faisons pas varier a dans $nt + \epsilon - \omega$, parce que nous supposons qu'on mette dans les formules $\int n dt$ au lieu de nt .

«Ayant donc $\frac{\partial x}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial y}{\partial \sigma}$ et $\frac{\partial z}{\partial \sigma}$ par le calcul précédent, les formules (11) et (12) feront connaître les dérivées $\frac{\partial R}{\partial \sigma}$. Voici les résultats auxquels on arrive après des réductions faciles»:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{fm'} \frac{\partial R}{\partial \alpha} = S \cdot \frac{r}{a} \\ \frac{1}{fm'} \frac{\partial R}{\partial \varphi} = Wr \sin \Upsilon \\ \frac{1}{fm'} \frac{\partial R}{\partial e} = -Sa \cos w + T \frac{2+e \cos w}{1-e^2} r \sin w \\ \frac{1}{fm'} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = S \frac{ae}{\sqrt{1-e^2}} \sin w + T \frac{a^2}{r} \cdot \sqrt{1-e^2} \\ \frac{1}{fm'} \frac{\partial R}{\partial \theta} = -2Tr \sin^2 \frac{\varphi}{2} - Wr \sin \varphi \cos \Upsilon \\ \frac{1}{fm'} \frac{\partial R}{\partial \omega} = -\frac{1}{fm'} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + Tr \end{array} \right\} \quad (C)$$

On voit par cette citation que pour établir les formules (C) des différentiations et des substitutions directes suffisent.

§ 9. Pour obtenir les formules du groupe (A) Tisserand porte les valeurs des dérivées (C) dans les formules générales de la variation des éléments établies par la théorie de la variation des constantes arbitraires.

C'est le procédé inverse que nous adopterons pour parvenir à ces formules générales, ayant à notre disposition les formules du groupe (A) établies élémentairement et les formules (C) tout aussi élémentaires. Les composantes S , T , W sont contenues dans les formules (A) et (C) par certaines combinaisons dont plusieurs entrent dans les deux groupes, nous tirerons donc du groupe (C) ces combinaisons pour les porter dans (A).

Ainsi la formule (4) du groupe (C) donne immédiatement

$$Se \sin w + \frac{T_p}{r} = \frac{1}{fm'} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{a} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$$

ce qui étant porté dans la formule (1) du groupe (A) en raison de la relation

$$f \cdot (1+m) = n^2 a^3 \quad (*)$$

donne

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{an} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \quad (15)$$

La formule (2) du groupe (C) donne

$$Wr \sin \Upsilon = \frac{1}{fm'} \frac{\partial R}{\partial \varphi}$$

ce qui étant porté dans la formule (5) du groupe (A) donne, en vertu de la même relation (*),

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \cdot \sin \varphi} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varphi}. \quad (16)$$

La formule (4) du groupe (A) contient la quantité $Wr \cos \Upsilon$; dans le groupe (C) cette quantité rentre dans les équations (5) et (6) avec Tr .

Éliminant Tr des équations (5) et (6) on obtient

$$Wr \cos \Upsilon = -\frac{1}{fm'} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} \cdot \frac{\partial R}{\partial \theta} - \frac{1}{fm'} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \right)$$

et la formule (4) du groupe (A) devient

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{na^2 \cdot \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} \cdot \frac{\partial R}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \right) \quad (17)$$

En remarquant que

$$\frac{2+e \cos w}{a(1-e^2)} \cdot r = \frac{(1+1+e \cos w) \frac{p}{1+e \cos w}}{p} = 1 + \frac{1}{1+e \cos w} = 1 + \frac{r}{p}$$

on écrira la formule (3) du groupe (C) ainsi:

$$\frac{1}{fm'} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial R}{\partial \epsilon} = -S \cos w + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin w \quad (3)$$

après quoi l'équation (6) du groupe (A) deviendra

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{na^2 e} \sqrt{1-e^2} \frac{\partial R}{\partial \epsilon} + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

et remplaçant $\frac{d\theta}{dt}$ par sa valeur (16) on a

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \epsilon} + \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \quad (18)$$

Il suffit de porter dans la formule (7) du groupe (A) les valeurs de $\frac{d\omega}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$ et l'expression

$$Sr = \frac{1}{fm'} \cdot \frac{1}{a} \frac{\partial R}{\partial \epsilon}$$

et de remplacer $f(1+m)$ par $n^2 a^3$ pour avoir

$$\frac{de}{dt} = -\frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \varphi} + \sqrt{1-e^2} \cdot \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \quad (19)$$

La valeur

$$Tr = \frac{1}{fm'} \left(\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \right)$$

étant porté dans la formule (3) du groupe (A) donne

$$na^2 \frac{d\sqrt{p}}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \quad (20)$$

ou autrement

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \right) \quad (21)$$

Il reste encore à trouver $\frac{de}{dt}$. On a

$$p = a(1 - e^2)$$

prisant la dérivée logarithmique, on a

$$\frac{2e}{1-e^2} \cdot \frac{de}{dt} = \frac{1}{a} \cdot \frac{da}{dt} - \frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dt}$$

Substituant pour $\frac{da}{dt}$ et $\frac{dp}{dt}$ leurs valeurs (15) et (21), on aura

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega} - \sqrt{1-e^2} \cdot \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \quad (22)$$

Nous obtenons ainsi le groupe de formules:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \quad (15)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \cdot \sin \varphi} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varphi} \quad (16)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varphi} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} \quad (18)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega} - \sqrt{1-e^2} \cdot \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \quad (22)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin \varphi} \cdot \frac{\partial R}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \right) \quad (17)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varphi} + \sqrt{1-e^2} \cdot \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} \quad (19)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \right) \quad (21)$$

Ces formules résument le chap. XI du tome I de la «Mécanique Céleste» de Tisserand et forment la base pour toute la théorie des perturbations planétaires d'après la méthode de la variation des constantes arbitraires, à laquelle tout ce tome est dévoué.

Il suffit de dire que R est une fonction linéaire et homogène des masses m', m'', \dots des corps troublants de même que les composantes *totales* des forces perturbatrices sur les axes, dont nous avons fait usage, pour voir que les formules (B) sont parfaitement générales et ont lieu pour un nombre quelconque de corps troublants.

On voit par cette note la portée de la remarque de Newton et la simplification qu'elle apporte dans une question fondamentale de la «Mécanique Céleste» ainsi que la manière de surmonter la difficulté qui selon Lagrange «*a peut-être empêché qu'on en ait encore profité*».

ON SIR ISAAC NEWTON'S FORMULA FOR THE ATTRACTION OF A SPHEROID ON A POINT OF ITS AXIS

The attraction of a spheroid on a point of its axis is given in the second corollary to Proposition XCI of the first book of the «Principia». It is expressed in a most peculiar form, and no calculation is given of how this formula could be arrived at by the mathematical processes briefly sketched in Lemma II of the second book.

It may therefore be of some interest to establish Sir Isaac Newton's formula, using for the sake of clearness modern notation, but preserving his methods, which were afterwards published in his treatise on *Quadratures*. This will give us a slight insight of how far Newton had mastered the «Calculus» even at the time when the «Principia» was written.

In Corollary 1 of Proposition XC it is shown that the attraction of a circle on a corpuscle P on its axis (*i. e.* the straight line passing through its centre and normal to its plane) is proportional to

$$1 - \frac{PA}{PH}$$

where A is the centre of the circle and H a point on its circumference.

This being granted, Proposition XCI runs as follows:

To find the attraction of a corpuscle lying on the axis of a solid of revolution to every point of which are directed equal centripetal forces decreasing in any ratio of the distances.

«Let the corpuscle P , situated on the axis AB of the solid $DEC G$, be attracted by it. Let RFS be any circular section of the solid by a plane perpendicular to its axis; on the radius FS of this circle situated in a plane $PALKB$, drawn through the axis, a length FK is taken proportional to the force with which the corpuscle P is attracted by the circle, the point K will describe a curve LKJ , cutting the end planes of the solid in L and J ;

the attraction of the corpuscle P by the solid will be proportional to the area $LABJ$ » (fig. 1).

Corollary 2 to this general proposition is expressed as follows:

«Cor. 2. Thus the force may be found, with which a spheroid $AGBC$ attracts an external corpuscle P lying on its axis AB . Let $NKRM$ be that conic section of which the ordinate ER perpendicular to PE is always equal to the length PD , drawn to the point D where this ordinate cuts the spheroid itself. At the vertices A and B of the spheroid perpendiculars

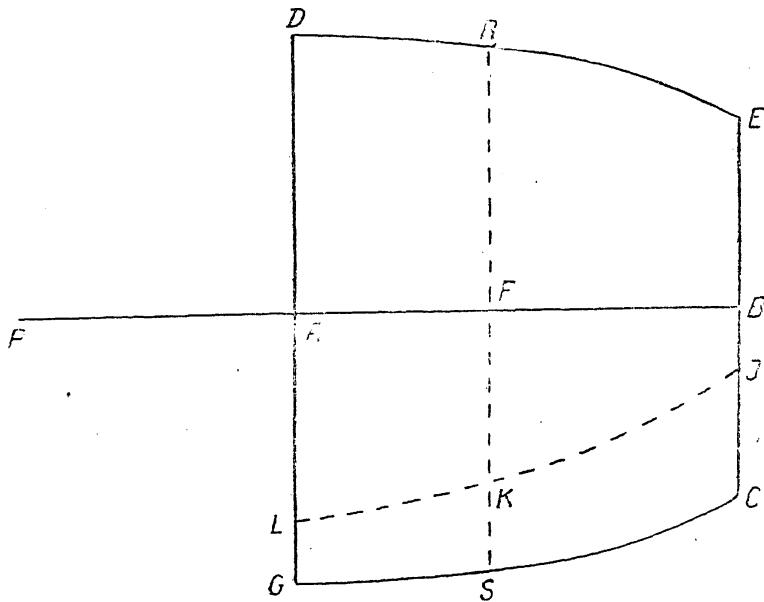


Fig. 1.

AK and BM to the axis AB are to be erected respectively equal to AP and BP , meeting the conic section in K and M . Join KM , cutting off the segment $KMRK$. Let S be the centre of the spheroid and its greatest radius SC , the force with which the spheroid attracts the corpuscle P will be to the force, with which the same corpuscle is attracted by a sphere described on AB as diameter, in the ratio

$$\frac{AS \cdot CS^2 - PS \cdot KMRK}{PS^2 + CS^2 - AS^2} : \frac{AS^3}{3PS^2}$$

And by a like manner of computation the attraction of the segments of a spheroid can be found» (fig. 2).

Usually, in commenting on Newton, it is shown that this formula gives the same result as the easy integration by modern means; the aim of this paper is to show how naturally this formula is obtained if we follow not the modern but Newton's methods of quadratures.

Let us assume the density of the attracting body to be unity, and the product of the mass of the corpuscle by the coefficient of attraction k , and put for brevity:

$$SA = SB = a; SC = b; PS = l; PA = l - a; PE = x; PD = X$$

By the equation of the spheroid we have

$$X^2 = Ax^2 + 2Bx + C$$

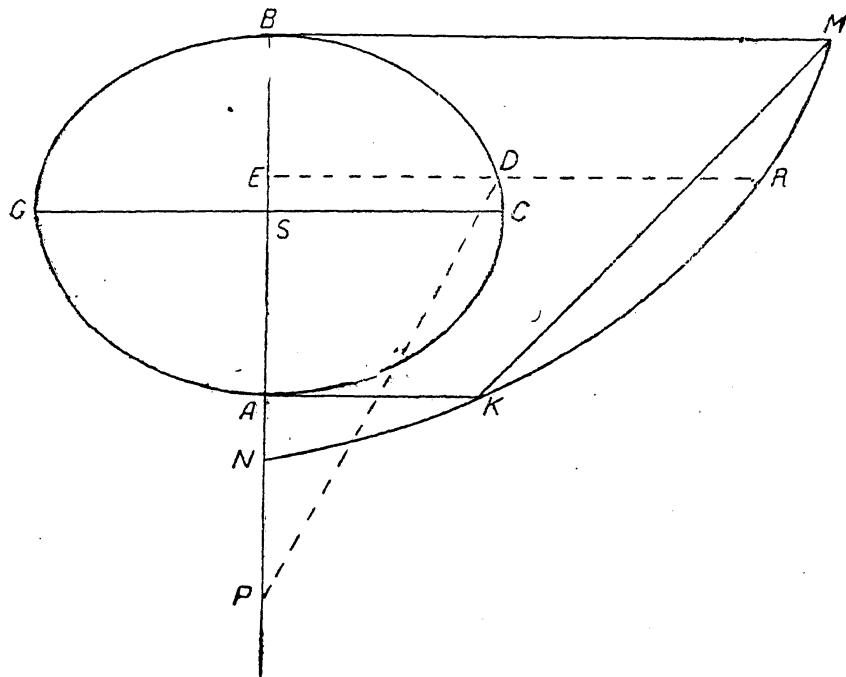


Fig. 2.

where:

$$A = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad B = \frac{b^2 l}{a^2}; \quad C = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - l^2)$$

and this is the equation of the conic $NKRM$ mentioned in Newton's proposition.

The attraction of the ellipsoid according to the general theorem and the expression for the attraction of a circle is obviously given by the formula

$$F = 2\pi k \int_{l-a}^{l+a} \left[1 - \frac{x}{X} \right] dx = 4\pi k \left[a - \frac{1}{2} \int_{l-a}^{l+a} \frac{x}{X} dx \right]$$

and is thus reduced to the calculation of the integral

$$\int_{l-a}^{l+a} \frac{x}{X} dx = \int_{l-a}^{l+a} \frac{x dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}$$

Newton evaluates this integral in terms of

$$S = \int_{l-a}^{l+a} X \cdot dx$$

because this last one has a simple geometrical meaning, namely, the area AKRMB.

We have:

$$\begin{aligned} \int X dx &= xX - \int \frac{Ax + B}{X} x dx \\ &= xX - \int \frac{Ax^2 + Bx}{X} dx \\ &= xX - \int \frac{X^2 - Bx - C}{X} dx \\ &= xX - \int X dx + \int \frac{Bx + C}{X} \cdot dx \end{aligned}$$

hence

$$2 \int X dx = xX + B \int \frac{x dx}{X} + C \int \frac{dX}{X} \quad (1)$$

But

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{X} &= \frac{1}{A} \int \frac{Ax + B}{X} dx - \frac{B}{A} \int \frac{dx}{X} \\ &= \frac{1}{A} X - \frac{B}{A} \int \frac{dx}{X} \end{aligned} \quad (2)$$

and by elimination of $\int \frac{dx}{X}$ we get

$$\int \frac{x}{X} dx = \frac{2B}{B^2 - AC} \int X dx - \frac{Bx + C}{B^2 - AC} \cdot X \quad (3)$$

Replacing A, B, C by their values and remarking that for $x = l - a$ we have

$$X = l - a$$

and for $x = l + a$ we have

$$X = l + a$$

we obtain after simple reductions

$$\left[\frac{Bx + C}{B^2 - AC} X \right]_{l-a}^{l+a} = \frac{2a(l^2 + a^2)}{l^2 - a^2 + b^2}$$

and

$$F = 4\pi k \left[a - \frac{lS}{l^2 - a^2 + b^2} + \frac{a(l^2 + a^2)}{l^2 - a^2 + b^2} \right] = 4\pi k \frac{ab^2 - l(S - 2al)}{l^2 - a^2 + b^2}$$

where

$$S = \int_{l-a}^{l+a} X dx$$

But

$$S - 2al = MRKAB - ABMK = KMRK = S_1$$

The attraction of a sphere, described on AB as diameter, is

$$F_0 = \frac{4}{3} \frac{k\pi a^3}{l^2}$$

hence we have the proportion

$$F : F_0 = \frac{ab^2 - lS_1}{l^2 - a^2 + b^2} : \frac{a^3}{3l^2}$$

which represents Newton's formula with the notation we have adopted.

The conic, to the evalution of the area of which Newton thus reduces the computation of the attraction of a spheroid, is obviously a hyperbola for a prolate and an ellipse for an oblate spheroid; the expression of the area of a conic was already known, hence he considered the problem as solved, but it may be remarked that in his treatise «De curvatura curvarum», not only the geometrical but also the analytical expressions of the integrals containing the square root of a quadratic function are to be found. In the «Principia» Newton preferred the geometrical way, which explains the peculiar aspect he has given to his formulae, at which we arrive by a self-consistent and natural process, if we strictly use his methods.

ON A THEOREM OF SIR ISAAC NEWTON

§ 1. For the determination of parabolic orbits of comets, the well known relation between the time of description of an arc of the orbit, the two radii vectores drawn to the extremities of this arc, and the chord is of fundamental importance.

This relation is called in all modern treatises on theoretical astronomy, even in English ones, Lambert's or Euler-Lambert's theorem, although Lagrange in his «Mécanique Analytique» pointed out that it is only the analytical expression of Lemma X in Book III of Newton's «Principia».

It is most remarkable that even in such a classical treatise as Bauschinger's «Bahnbestimmung» we find on p. 388 the following sentence: «Newton's method was a graphical one and could be used in practice,... what was wanted to make it perfect was the theorem of Euler-Lambert, instead of which Newton used an approximate relation between the time, the radii vectores, and the chord». What Bauschinger calls «an approximate relation» is just the same relation which constitutes the Euler-Lambert theorem, but geometrically expressed.

Lagrange gives only a verbal sketch of a proof of his assertion, leaving it to the reader to supply the necessary algebra. This may be the reason why his remark has been overlooked.

The aim of this note is to show that the required algebraical transformations can be performed in a very simple manner.

§ 2. Newton's lemma is:

If on $S\mu$ produced lengths μN and μP be set off so that $\mu N = \frac{1}{3} I\mu$ and

$$SP : SN = SN : S\mu$$

SP will be the distance from the sun S at which the comet has such a velocity that it would describe (in uniform motion) a distance equal to the chord AC

in the same time in which it describes the arc $A\mu C$ of its parabolic trajectory.

[S is the focus of a parabola, μ is the point on the arc AC such that the tangent μT is parallel to the chord AC , and I is the mid point of the chord AC .]¹

Using modern notation, Newton's proof can be expressed as follows: If the comet were to continue its motion from μ along the tangent μT during the same time in which it describes the arc $A\mu C$, the length μT would be such that the area $S\mu T = SA\mu C$.

But we have, if $S\mu$ and AC meet in M at an angle α :

$$\begin{aligned} SA\mu C &= ASC + AC\mu = \frac{1}{2} AC \cdot SM \cdot \sin \alpha + \frac{2}{3} I\mu \cdot AC \cdot \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} AC \left(SM + \frac{4}{3} I\mu \right) \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} AC \cdot SN \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

and

$$S\mu T = \frac{1}{2} S\mu \cdot \mu T \cdot \sin \alpha$$

hence

$$\mu T : AC = SN : S\mu$$

In the parabolic motion the squares of the velocities are in the inverse ratio of the distances from the Sun, hence with an obvious notation,

$$V_\mu : V_p = SP^{\frac{1}{2}} : S\mu^{\frac{1}{2}}$$

but by construction

$$SP = \frac{SN^2}{S\mu}$$

hence

$$\frac{SP}{S\mu} = \frac{SN^2}{S\mu^2}$$

therefore

$$V_\mu : V_p = SN : S\mu = \mu T : AC$$

hence

$$\frac{\mu T}{V_\mu} = \frac{AC}{V_p} = \tau$$

where τ is the time of describing the arc $A\mu C$.

§ 3. According to this lemma and a previous one, the time τ can be expressed in terms of the chord AC and the radius $S\mu$, drawn to the ver-

¹ See fig. 3, p. 281.

tex μ of the arc $A\mu C$. Indeed the previous Lemma IX of the same book expresses the relations

$$I\mu = M\mu = \frac{AI^2}{4S\mu}$$

«patet ex conicis», says Newton, in Lemma XIII of the first book, where this same property of the parabola is mentioned. Using the following notation:

$$S\mu = \zeta; SA = r_1; SC = r_2; AC = c; I\mu = \gamma$$

we have:

$$I\mu = M\mu = \frac{AI^2}{4S\mu} = \gamma = \frac{c^2}{16\zeta} \quad (1)$$

$$SN = S\mu + \frac{1}{3} I\mu = \zeta + \frac{1}{3} \gamma = \zeta + \frac{c^2}{48\zeta}$$

$$SP = \frac{SN^2}{S\mu} = \frac{\left(\zeta + \frac{1}{3}\gamma\right)^2}{\zeta} \quad (1)$$

$$\tau = \frac{c}{V_p}. \quad (2)$$

By a property of parabolic motion

$$V_p = \frac{k\sqrt{2}}{SP^2} \quad (3)$$

where k is a constant for the solar system (afterwards called the Gaussian constant) of which Newton gives the numerical value and the analytical expression. From the equations (1), (2), (3), we have

$$k\sqrt{2} \cdot \tau = c \cdot SP^2 = \frac{c}{\sqrt{\zeta}} \left(\zeta + \frac{c^2}{48\zeta} \right) \quad (4)$$

§ 4. If we introduce into the analytical expression (4) of Newton's lemma instead of the radius ζ , the radii r_1 and r_2 of the extremities of the arc AC , we obtain the Euler-Lambert theorem.

Denoting by p the *latus rectum* of the parabola and by x_0, x_1, x_2 the abscissae of the points μ, A, C respectively, we have:

$$\zeta = \frac{p}{2} + x_0$$

$$r_1 = \frac{p}{2} + x_1$$

$$r_2 = \frac{p}{2} + x_2$$

hence

$$\frac{r_1 + r_2}{2} - \zeta = \frac{x_1 + x_2}{2} - x_0 = I\mu = \frac{c^3}{16\zeta}$$

and we obtain the equation

$$\zeta^2 - \frac{r_1 + r_2}{2}\zeta + \frac{1}{16}c^2 = 0 \quad (5)$$

which gives

$$\zeta = \frac{r_1 + r_2}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{(r_1 + r_2 + c)(r_1 + r_2 - c)}.$$

Hence, if we put:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + c &= g \\ r_1 + r_2 - c &= f \end{aligned}$$

equation (5) becomes

$$\zeta^2 - \frac{g+f}{4}\zeta + \frac{1}{64}(g-f)^2 = 0 \quad (5')$$

which gives

$$\zeta = \frac{1}{8}[g + f + 2\sqrt{gf}] = \frac{1}{8}(\sqrt{g} + \sqrt{f})^2$$

and

$$\frac{c}{\sqrt{\zeta}} = \frac{2\sqrt{2}(g-f)}{2(\sqrt{g} + \sqrt{f})} = \sqrt{2}(\sqrt{g} - \sqrt{f}).$$

By equation (5) we have

$$\frac{c^2}{48\zeta} = \frac{1}{6}(r_1 + r_2) - \frac{1}{3}\zeta$$

hence

$$\begin{aligned} \zeta + \frac{1}{48}\frac{c^2}{\zeta} &= \frac{2}{3}\zeta + \frac{1}{6}(r_1 + r_2) = \frac{1}{6}[4\zeta + (r_1 + r_2)] \\ &= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}(\sqrt{g} + \sqrt{f})^2 + \frac{1}{2}(g + f)\right] \\ &= \frac{1}{6}[g + \sqrt{gf} + f] \end{aligned}$$

Substituting in (4) we obtain

$$k\sqrt{2}\tau = \frac{\sqrt{2}}{6}(\sqrt{g} - \sqrt{f})(g + \sqrt{gf} + f) = \frac{\sqrt{2}}{6}[(\sqrt{g})^3 - (\sqrt{f})^3]$$

or

$$6k\tau = (r_1 + r_2 - c)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_2 + c)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A})$$

This expression constitutes the so-called Euler-Lambert theorem.

The above elementary and straightforward calculation shows clearly that this theorem is nothing else than the analytical expression of Newton's Xth lemma.

We have tacitly assumed, as Newton does, that the angle between the two extreme radii vectores is less than 180° ; if this angle were more than 180° the sign plus would be obtained in formula (A), as can easily be proved.

A lot of different proofs of the formula (A) can be found in modern treatises on theoretical astronomy, but Newton's remains unsurpassed in its wonderful dynamical insight.

ON SIR ISAAC NEWTON'S METHOD OF DETERMINING THE PARABOLIC ORBIT OF A COMET

§ 1. Sir Isaac Newton's method of determining the parabolic orbit of a comet is explained in Proposition XLI of the third book of the «Principia» and in Lemmas VII—XI preceding this proposition.

Although this method forms one of the most admirable achievements of Newton, it does not now receive the attention it deserves, and is scarcely ever mentioned in modern treatises on theoretical astronomy.

The aim of this paper is to call the attention of students of astronomy to these wonderful pages of the «Principia», and to show that they are as perfect as anything else Newton ever wrote.

When explaining this method I shall use modern notation and phraseology in order to avoid, for the reader, those difficulties which are not inherent in the matter itself.

§ 2. I will first explain the lemmas which form the foundation of Newton's method.

Lemma VII. *To draw through a point P a line BC, the parts of which, PB and PC, contained between this point and the lines AB and AC, will be in a given ratio to one another.*

Through the given point *P* (fig. 1) draw any line *PD* and produce it to such a point *E* that $PE:PD$ is in the given ratio. Through *E* draw *EC* parallel to *AB*; the straight line *PCB* will be the required one.

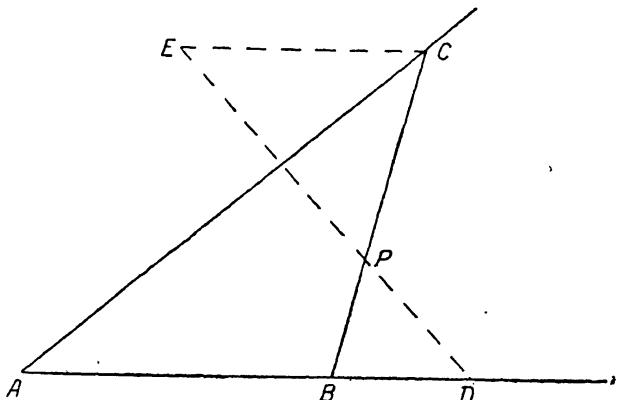


Fig. 1.

Lemma VIII. Let ABC be a parabola having its focus in S . The chord AC cuts off the segment $ABCI$, of which $I\mu$ is the diameter and μ the vertex. Take on $I\mu$ produced $\mu O = \frac{1}{2} I\mu$, join OS and produce it to ξ , so that $S\xi = 2SO$. If a comet at B moves on the arc CBA , and ξB , which cuts AO in E , be drawn, the point E will cut from the chord AC the part AE , which is very approximately proportional to the time.

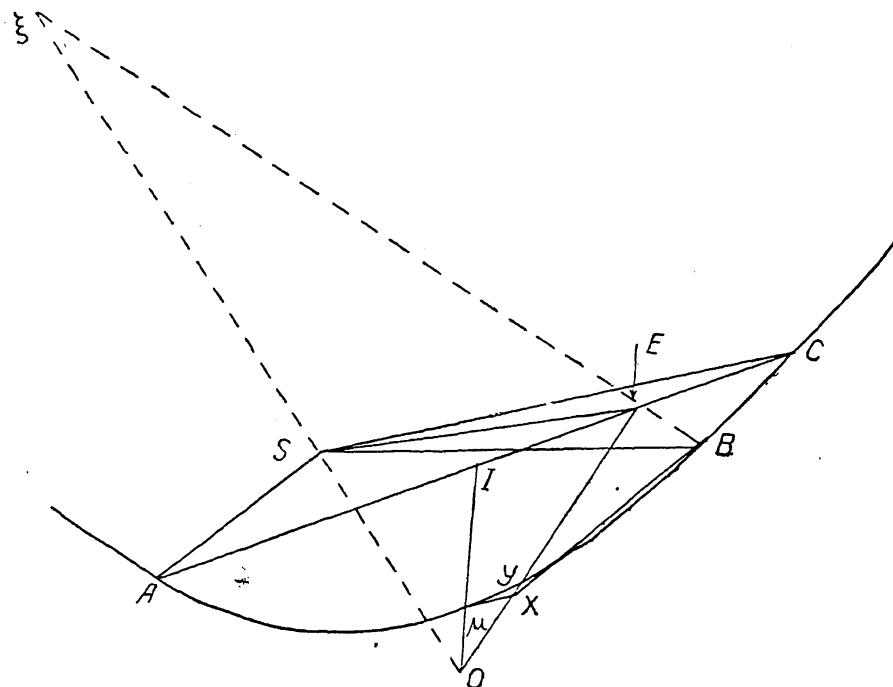


Fig. 2.

Join EO (fig. 2) intersecting the arc ABC in Y and draw at the vertex μ the tangent μX , which meets EO in X , then

$$\text{area } AEX\mu A : \text{area } ACBY\mu A = AE : AC \quad (1)$$

For

$$\text{area } AEX\mu A = AI\mu + IEX\mu$$

$$AI\mu = \frac{2}{3} AI \cdot I\mu \cdot \sin I$$

$$IEX\mu = \frac{1}{2} I\mu [IE + \mu X] \sin I = \frac{2}{3} EI \cdot I\mu \cdot \sin I$$

since

$$\mu X = \frac{1}{3} IE$$

From these we derive

$$AEX\mu A = \frac{2}{3}(AI + IE)I\mu \cdot \sin I = \frac{2}{3}AE \cdot I\mu \cdot \sin I$$

but

$$ACBY\mu A = \frac{2}{3}AC \cdot I\mu \cdot \sin I$$

hence the proportion (1).

The areas of the triangles ASE and ASC are obviously in the ratio $AE:AC$, hence we have by addition

$$ASEX\mu A : ASCBY\mu A = AE : AC \quad (2)$$

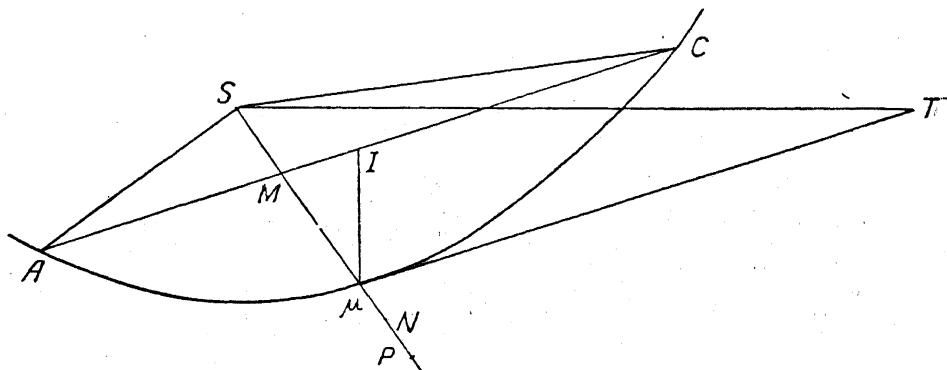


Fig. 3.

Since

$$\xi O : SO = 3 : 1$$

and

$$EO : XO = 3 : 1$$

SX is parallel to EB and

$$\text{area } SEB = \text{area } EXB$$

hence

$$ASEX\mu A + EXB - SEB = ASEX\mu A = ASBX\mu A$$

and proportion (2) becomes

$$ASBX\mu A : ASCBY\mu A = AE : AC \quad (2')$$

but the area $ASBX\mu A$ is very nearly equal to the area of the sector $ASBY\mu A$, this equality being the more exact the nearer the point B is to the vertex μ , and the ratio of the sectors is that of the corresponding time-intervals.

Lemma IX. *The lengths $I\mu$, μM , and $\frac{AI^2}{4S\mu}$ are equal to one another, M being the point of intersection of AC and $S\mu$.*

«Because the lenght $4S\mu$ is twice the parameter (*latus rectum*) of the parabola relating to the vertex μ ».

This same property of the parabola is given in Lemma XIII of the first book, where it is simply stated *patet ex conicis*. The first part of the lemma is obvious, because μ being the vertex of the segment $A\mu C$ (fig. 3) the tangent μT is parallel to the chord AC , and μI being a diameter this tangent bisects the angle formed by $I\mu$ and $S\mu$ produced, hence the triangle $M\mu I$ is isosceles and

$$M\mu = \mu I$$

The distance from the vertex μ to the directrix of the parabola is the *sime-latus rectum* relating to this vertex; denoting this distance by $\frac{p}{2}$, we see by the property of the parabola that $S\mu = \frac{p}{2}$, but the equation of the parabola referred to its diameter and tangent is $y^2 = 2px$. In our case for the point A we have $y = AI$, $x = \mu I$, hence the relation $AI^2 = 4S\mu I\mu$, which is nothing else than the equation of the parabola.

Lemma X. *If on $S\mu$ produced lenyths μN and μP be set off so that $\mu N = \frac{1}{3} I\mu$ and*

$$SP : SN = SN : S\mu$$

SP will be the distance from the sun S at which the comet has such a velocity that it would describe (with constant velocity) a distance equal to the chord AC in the same time as that in which it describes the arc $A\mu C$ of its parabolic trajectory.

If the comet were to continue its motion from μ along the tangent μT (fig. 3) during the time in which it describes the arc $A\mu C$, the length μT would be such that the area $S\mu T = SA\mu C$.

But we have, if $S\mu$ and AC meet in M at the angle α ,

$$\begin{aligned} SA\mu C &= ASC + AC\mu = \frac{1}{2} AC \cdot SM \cdot \sin \alpha + \frac{2}{3} I\mu \cdot AC \cdot \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} AC \left(SM + \frac{4}{3} I\mu \right) \sin \alpha = \frac{1}{2} AC \cdot SN \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

and

$$S\mu T = \frac{1}{2} S\mu \cdot \mu T \cdot \sin \alpha$$

hence

$$\mu T : AC = SN : S\mu$$

In the parabolic motion the squares of the velocities are in the inverse ratio of the distances from the sun, hence with an obvious notation

$$V_\mu : V_p = SP^{\frac{1}{2}} : S\mu^{\frac{1}{2}}$$

but by construction

$$SP = \frac{SN^2}{S\mu}$$

hence

$$SP : S\mu = SN^2 : S\mu^2$$

therefore

$$V_\mu : V_p = SN : S\mu = \mu T : AC$$

and

$$\frac{\mu T}{V_\mu} = \frac{AC}{V_p} = \tau,$$

where τ is the time of describing the arc $A\mu C$.

In a previous communication (M. N., 84, 392) I have shown, following Lagrange, that this theorem of Newton, if expressed analytically, is nothing else than what was afterwards called the Euler-Lambert theorem, expressed by the formula

$$6k\tau = (r_1 + r_2 + c)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_2 - c)^{\frac{3}{2}} \quad (3)$$

where:

$$SA = r_1, SC = r_2, AC = c.$$

If we put $S\mu = \zeta$ we have, as shown in the above-mentioned paper

$$k\sqrt{2}\tau = \frac{c}{\sqrt{\zeta}} \left(\zeta + \frac{c^2}{48\zeta} \right) \quad (4)$$

for the immediate expression of Newton's theorem; k is a constant for the solar system, and for it Newton, in Proposition XL, gives the value

$$k = 0.01720212$$

from the astronomical data available at his time. This constant is now called the «Gaussian constant», and its value, as given by Gauss, is

$$k = 0.01720209895$$

It may be added here, that the velocity of the comet at any distance, say SP from the Sun, by this Proposition XL is expressed by the formula

$$V_p = \frac{k\sqrt{2}}{SP^{\frac{1}{2}}} \quad (5)$$

Lemma XI. *A comet falling without initial velocity towards the Sun from a distance $SN = Sp + \frac{1}{3} I\mu$ under the action of a constant force, corresponding to this distance SN , describes a space equal to $I\mu$ during one-half of the time, in which it describes the arc AC of its orbit.*

As shown in the previous lemma, the comet during the time τ of description of the arc $A\mu C$ would describe a space equal to the chord AC in uniform motion with a velocity V_p corresponding to the distance $SP = \frac{SN^2}{Sp}$.

At equal distances the velocity of motion in a circle is to the velocity of motion in a parabola as $1 : \sqrt{2}$, hence during the time interval τ the arc σ described in the motion in a circle of radius SP would be

$$\sigma = \frac{AC}{\sqrt{2}} = v_0 \tau$$

where v_0 is the velocity on the circle. The acceleration in this motion

$$w = \frac{v_0^2}{r} = \frac{v_0^2}{SP}$$

hence the height of fall with this acceleration during the time τ is

$$h = \frac{1}{2} w \tau^2 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{r} \tau^2 = \frac{\sigma^2}{2SP} = \frac{AC^2}{4SP}$$

and during the semi-interval the height will be one-quarter of the above or

$$h_1 = \frac{AC^2}{4SP}$$

At the distance SN the acceleration, being in the inverse ratio of the squares of the distances, is $w \cdot \frac{SP^2}{SN^2}$, hence the corresponding height h_2 will be

$$h_2 = h_1 \cdot \frac{SP^2}{SN^2} = \frac{AC^2}{4SP} \cdot \frac{SP^2}{SN^2} = \frac{AC^2}{4Sp} = I\mu = M\mu$$

by Lemma VIII.

§ 3. Having proved these lemmas, Newton gives his graphical method for the determination of a parabolic orbit as follows:

Proposition XLI. Problem XXI. *To determine from three given observations the orbit of a comet moving in a parabola.*

«Having attempted this most difficult (*longe difficillimum*) problem in many ways, I have», says Newton, «framed several propositions in the first

book (determination of a conic satisfying given conditions) which were intended to help in the solution. Afterwards I discovered the following much simpler solution:

«Three observations, the time intervals between which are nearly equal, are to be chosen; that interval during which the comet moves more slowly being taken a little greater than the other one, so that the difference of the time intervals is to their sum approximately in the same ratio as this sum to 600 days more or less, in order that the point E (fig. 2, Lemma VIII) may fall nearly on the point M , and, if not, is situated towards I rather than towards A . If such observations are not available, a new place of the comet is to be computed by Lemma VI» (in this lemma Newton explains his general method of interpolation).

Further, we use a slightly modernised notation and formulae where Newton uses only words and proportions.

Let S (fig. 4) represent the Sun, T_1, T_2, T_3 the positions of the Earth, $T_1 A, T_2 B, T_3 C$ the projections on the plane of the ecliptic of the visual rays from the earth to the comet, τ_1 the time interval between the first and the second observations, τ_2 between the second and the third expressed in mean solar days, and $\tau = \tau_1 + \tau_2$ the whole time interval.

Denote by X that length which the comet would describe during the time τ moving uniformly with the velocity corresponding (in parabolic motion) to the mean distance of the earth from the Sun. This length is to be computed by the formula

$$X = \frac{2\pi}{365 \cdot 256} \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot \tau = 0.01720212 \cdot a \sqrt{2} \cdot \tau$$

where a is the length of the said mean distance (semi-major axis of the Earth's orbit), and let $T_2 V$ be the perpendicular drawn from T_2 on the chord $T_1 T_3$.

For the determination of the orbit we proceed in the following way:

(1) On the intermediate line $T_2 B$ a point B is taken and assumed to be the projection on the plane of the ecliptic of the position of the comet at the time of the second observation (it will be shown later how this point may be chosen). Draw towards the Sun a length BE which is so $T_2 V$ in the same ratio as $SB \cdot ST_2^3$ to the cube of the distance of the comet at this instant from the sun, hence to the quantity $(BS^2 + T_2 B^2 \operatorname{tg}^2 \beta_2)^{\frac{3}{2}}$, where β_2 is the latitude of the comet at the time of the second observation.

(2) Through the point E draw the straight line AEC , the segments of which are in the ratio $\tau_1:\tau_2$; the points A and C would be approximately the projections of the positions of the comet at the first and third observations, if B had been taken in the true position corresponding to the second observation.

(3) Bisect AC in I , and erect the perpendicular II , where i is its intersection with the line Bi parallel to AC . Through i draw the line Si to meet AC in the point λ , and complete the parallelogram $i\mu\lambda I$. Take the point σ on AC so that $I\sigma = 3I\lambda$ and draw the straight line $\sigma S\xi$, from which cut the length $\sigma\xi = 3S\sigma + 3i\lambda$.

(4) Erase the line AC and the points E and I and draw through B in the direction of the point ξ a new length BE which is to the former one in the ratio $BS^2:(S\mu + \frac{1}{3}i\lambda)^2$; through the new point so obtained draw the new line AEC , the segments of which, AE and EC , are in the ratio $\tau_1:\tau_2$. The new points A and C will represent more exactly the projections of the comet.

(5) Erect the perpendiculars AM and CN to the line AC and put on them the lengths

$$AM = AT_1 \cdot \operatorname{tg} \beta_1; CN = CT_3 \cdot \operatorname{tg} \beta_3$$

where β_1 and β_3 are the latitudes at the first and third observations. Draw the line MN and the perpendicular IO to AC and denote by O the point of intersection of MN with IO ; having constructed anew the parallelogram $iI\lambda\mu$, lay off on AI produced the length $ID = S\mu + \frac{2}{3}i\lambda$, and having measured OD , compute the length MP by the proportion

$$MP:X = \sqrt{a} : \sqrt{OD}$$

where a is the length of the semi-major axis of the Earth's orbit in the scale of the drawing, X having been computed as described above. Put the length MP on the line MN .

If the point P falls on the point N , then A, B, C are the true projections of the comet on the plane of the ecliptic. If the point P does not coincide with N , cut off from AC the length $CG = NP$ so that the point G is on the same side of C as P is of N .

(6) Taking afterwards instead of the point B the points b, β , construct in the manner explained above the corresponding points $a, c, g, \alpha, k, \gamma$.

(7) Through the points G, g, γ draw an arc of a circle and denote by Z its intersection with the line $T_3 C$; this point Z is the required projection of the comet at the time of the third observation.

(8) Draw from the points A, a, α the lengths $AF, af, \alpha\varphi$ respectively equal to $CG, cg, k\gamma$, then the points F, f, φ will be situated with respect.

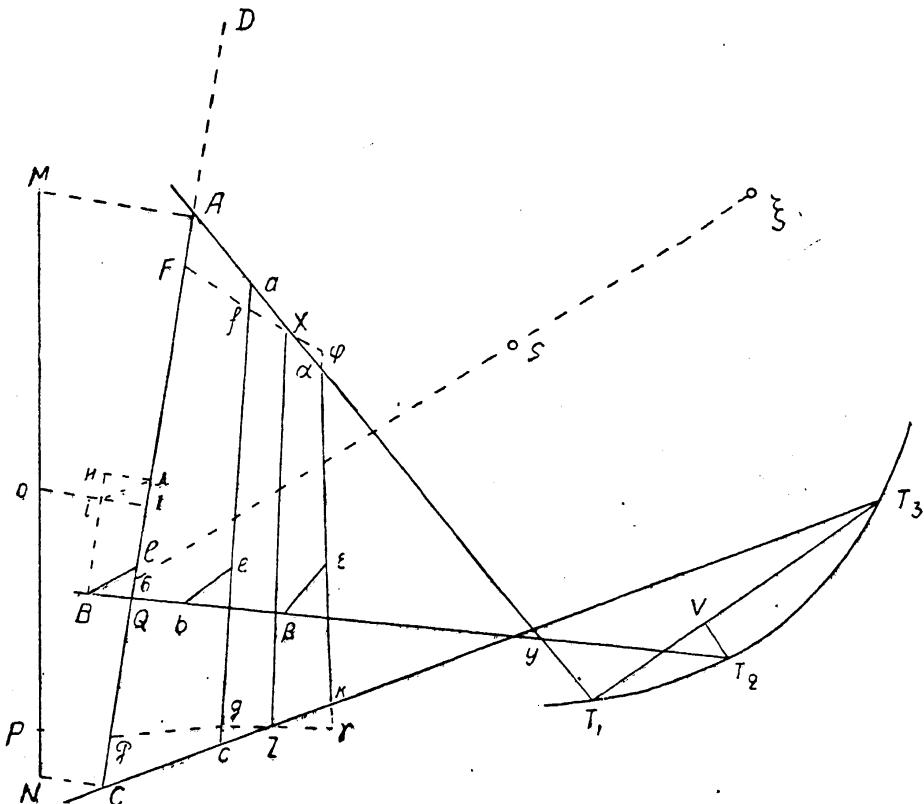


Fig. 4.

to the line $T_1 A$ as the points G, g, γ with respect to $T_3 C$; draw an arc of a circle through these points, its intersection with AT_1 will give the point X , the projection of the comet at the time of the first observation.

(9) Erecting perpendiculars at the points X and Z to the line XZ and cutting from them the lengths

$$A'X = T_1 X \cdot \operatorname{tg} \beta_1 \text{ and } C'Z = T_3 Z \cdot \operatorname{tg} \beta_3$$

the positions of the comet in its orbit will be obtained, and the orbit itself will be found by constructing a parabola of which the positions of two points and the focus are known.

This description of Newton's construction is given almost in his own words; it is only subdivided into separate steps for the sake of further references.

Newton gives a very concise proof of his construction in the following words: «The proof of this construction follows from the lemmas, because the line AC is divided at the point E in the ratio of the time intervals in accordance with Lemma VII, as it must be according to Lemma VIII; BE , by Lemma XI, is a part of the line BS or $B\xi$ contained between the arc ABC and the chord AEC and projected on the plane of the ecliptic; MP , by Lemma X, is the length of the chord of the arc described by the comet between the first and the third observation, which chord must be equal to MN if B is the true projection of the comet on the plane of the ecliptic.

«The points B , b , β are not to be taken arbitrarily, but near to their true places. If the angle AQT_2 under which the projection of the chord intersects the line T_2B , is known, the line AC is to be drawn in the necessary direction in such a manner that

$$AC : \frac{4}{3} T_1 T_3 = SQ^{\frac{1}{2}} : ST_1^{\frac{1}{2}}$$

and having drawn the line SEB , of which the part $EB = T_2V$, the point B will be obtained from which it is to be drawn».

Then Newton indicates how the next points b , β are to be taken, but it is not necessary for our purpose to enter into these details.

§ 4. The extreme shortness of Newton's explanation renders a commentary necessary in order that it may be clearly understood.

Let accented letters denote the position of that point in the plane of the orbit whose projection is denoted by the same letter unaccented; thus, for instance, B is the projection of the point B' of the plane of the orbit on the plane of the ecliptic, then we have:

(1) The length BE is the projection of the length $B'E'$ on the plane of the ecliptic; this length can be assumed as the height through which the comet falls towards the sun during the first interval of time. The length T_2V being an analogous height for the earth, their ratios, like those of the corresponding accelerations, are inversely as the squares of the distances, hence

$$B'E' : T_2V = ST_2^2 : SB'^2.$$

In order to obtain BE we have to apply the factor $\frac{SB}{SB'}$, hence Newton's expression

$$BE = T_2V \cdot \frac{ST_2^2 \cdot SB}{SB'^3}$$

(2) Requires no commentary.

(3) and (4) These items are the most important, and the construction used by Newton being only approximate, it is necessary to compare it with the *exact* construction in order to see what has been neglected.

Let it be assumed that the construction is performed in the plane of the orbit, S is the Sun, the focus of the parabola, AC a chord, I its middle point, B a point of the orbit, HK a tangent parallel to the chord, hence passing through the vertex μ (fig. 5); in order to obtain this vertex we have to find (by Lemma IX) on the line HK such a point μ , which being joined with S and with I makes the distances $M\mu = \mu I$. It is obtained by erecting at I the perpendicular II_1 , producing it to the point I_1 for which $iI_1 = II_1$; the intersection of the straight line SI_1 with HK is the required vertex μ .

The point S being very far from I , which means that the distance SI or SM is very great when compared with $I\mu$, Newton, instead of drawing the line I_1S , draws the line iS , which can be assumed as parallel to I_1S , gets the point of intersection l , and, completing the parallelogram, obtains μ , as stated in (3).

But the tangent HK is not known; we have only the point B , therefore instead of this tangent Newton draws the parallel BG , and hence instead of the point μ he obtains the point μ_1 , which is very close to μ .

If extreme accuracy is required, a correction can easily be applied, because the abscissa of the point B is $\mu D = \mu_1 B$, hence

$$\mu_1 \mu = BD = \frac{\mu_1 B^2}{4Si}$$

but by Lemma IX

$$I\mu = \frac{AI^2}{4Si}$$

hence

$$\frac{\mu \mu_1}{I\mu} = \frac{\mu D^2}{AI^2}$$

By either of these formulae, having obtained $\mu \mu_1$, we immediately find μ , but Newton prefers to correct directly the place of the point E as explained in his construction, which thus becomes obvious.

In the greater number of cases this correction $\mu \mu_1$ is so small that it can be neglected, and this may be the reason why Newton does not even mention it. But there is a much more important instance, which also he does not mention.

This construction as stated and explained relates to the plane of the orbit; Newton performs it for the projection on the plane of the ecliptic, but in projection it is no longer applicable and the amount of error thus involved may be too large to be neglected.

When the orbit is projected on the plane of the ecliptic the Sun does not remain in the focus of the projected parabola, and thus the focal properties of the point S must not be used.

After projection the point I remains in the middle of A and C , parallel lines remain parallel, but *perpendiculars* in the plane of the orbit are not perpendiculars in projection; equal lines in the orbit, but of different direction, are no longer equal in projection. Hence in projection the line Ii does not remain perpendicular either to the projected chord or to the tangent, and in projection the line $I\mu$ is not equal to $M\mu$, hence the point i , from which the construction of the parallelogram $i\lambda\mu I$ was commenced, is unknown, because the line iI is not perpendicular to the projected chord AC (fig. 4), and this parallelogram $iD\mu$ is not a «rectangulum» as Newton calls it.

What is the effect of this slight discrepancy on the final result?

The position of the point μ is wanted in order to obtain $S\mu$, which enters afterwards into the computation of the length of the chord c (Lemma X); $M\mu$ or $I\mu$ being small with respect to $S\mu$, the relative error in $S\mu$ will be small and the orbit will be determined with sufficient accuracy to be afterwards corrected by «*calculum arithmeticum*», as Newton says, and hence practically it is of no importance, but if we try to verify the results obtained by Newton's formula (4) by comparing with formula (3) we find a slight difference, although the results ought to be identical. This seems to be the reason why Newton's method was considered only an «approximate» one.

If it is required to make Newton's method precise, the procedure is obvious; we have to make the drawing of the «parallelogram», not in projection but in the plane of the orbit itself, or if in the plane of the ecliptic, by taking not the projection but the figure obtained by rotation of the plane of the orbit about the line of nodes.

Let us consider, e. g., fig. 4. Produce MN till it meets AC produced in the point H . The line SH is the line of nodes; this being determined, we can immediately obtain the positions A' , B' , C' of the corresponding points after the plane of the orbit is brought to coincidence by rotation about the line of nodes, and hence perform the theoretically exact

determination of the vertex μ in complete accordance with Newton's lemmas.

It may be remarked here that when an approximate position μ'_1 of the vertex is found, a corrected value of $I\mu'$ can be calculated in accordance with Newton's Lemma XI by the formula

$$I'\mu' = M'\mu' = \frac{1}{2}k^2 \cdot \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{SN'^2}$$

where

$$SN' = S\mu'_1 + \frac{1}{3}I'\mu'_1$$

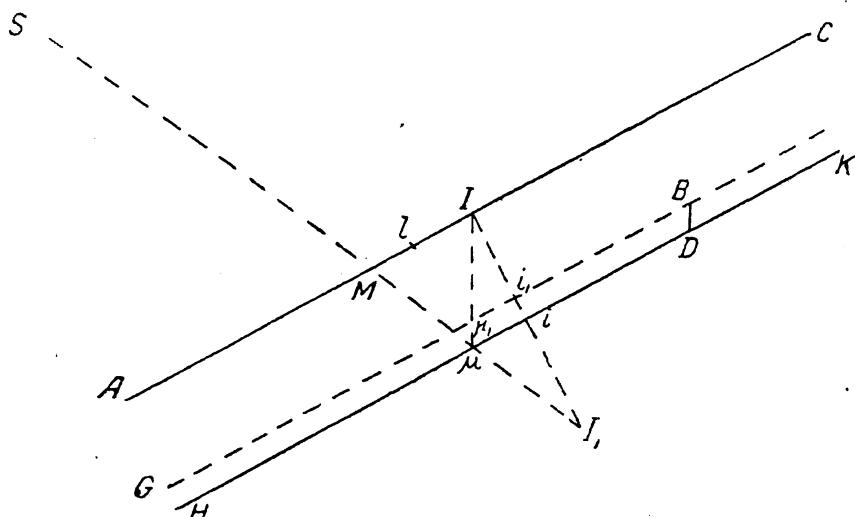


Fig. 5.

hence an obvious method of successive approximation leading very rapidly to a final position as exact as required.

(5) The distance SP' (Lemma X), which is necessary for calculating the length of the chord $A'C'$, is expressed by the formula

$$SP' = \frac{(S\mu' + \frac{1}{3}M'\mu')^2}{S\mu'}$$

where accented letters represent points in the plane of the orbit.

Hence we have

$$S\mu'^2 = S\mu^2 + IO^2$$

if for sake of simplicity we neglect the difference of elevation of the points μ' and I' above the plane of the ecliptic.

Then we have

$$i' \lambda' = i\lambda \frac{S\mu'}{S\mu}$$

and

$$SP' = S\mu' \left\{ 1 + \frac{1}{3} \frac{i\lambda}{S\mu} \right\}^2 = S\mu' + \frac{2}{3} i\lambda \frac{S\mu'}{S\mu} + \dots$$

$$= S\mu' + \frac{2}{3} i\lambda + \dots = \sqrt{\left(S\mu' + \frac{2}{3} i\lambda \right)^2 + IO^2} = OD$$

neglecting such terms as $\frac{i\lambda^2}{S\mu}$ and others of the same order.

(6) No commentary required.

(7) The method here explained is nothing else than what is known as «trial and error». The points F , f , φ are the «false positions» of the point X . The «arc of circle» which Newton draws is employed instead of what in graphical interpolation is called a «fair curve».

Once the true positions of the points A and C have been found, the remaining part of the determination of the orbit is too well known to require explanation.

§ 5. Newton considers in the *«Principia»* as an example the comet of the year 1680. Before making a few remarks about this example, I shall refer to a few examples for recent comets which I have calculated by Newton's method, but with the alterations explained above, having, of course, reduced the graphical process to an analytical one (*«calculus arithmeticus»* mentioned by Newton), the graphical construction being used only to obtain the initial approximation. All the details of these calculations can be found in my *«Lectures on the Determination of the Orbits of Comets and Planets from a few Observations»*, published in the *«Transactions of the Naval Academy of St.-Petersburg»* (1911), in Russian. As a first example I took the comet 1896, IV, Bauschingers *«Bahnbestimmung»* (p. 359). The elements calculated by Bauschinger are:

Longitude of the node	$\Omega = 150^\circ 33' 7''$
Inclination	$i = 88^\circ 29' 28''$
Longitude of perihelion	$\omega = 37^\circ 46' 25''$
Parameter	$\log q = 0.044192$
Passage of perihelion	$T_0 = 1896 \text{ July, } 9.0423$

The elements obtained on calculating by Newton's method are:

$$\begin{aligned}\Omega &= 150^\circ 35' 43.7'' \\ i &= 88^\circ 29' 10.1'' \\ \omega &= 38^\circ 4' 43.9'' \\ \log q &= 0.0454748 \\ T_0 &= 1896 \text{ July, } 9.2205\end{aligned}$$

The residual errors for the second observation are:

(1) By Bauschinger:

$$\begin{aligned}\alpha_2 \text{ cal.} - \alpha_2 \text{ obs.} &= -1.7'' \\ \beta_2 \text{ cal.} - \beta_2 \text{ obs.} &= +0.2''\end{aligned}$$

(2) By Newton's method:

$$\begin{aligned}\alpha_2 \text{ cal.} - \alpha_2 \text{ obs.} &= -0.7'' \\ \beta_2 \text{ cal.} - \beta_2 \text{ obs.} &= -0.4''\end{aligned}$$

The chord c when calculated:

(a) by Newton's formula is 0.1191758;

(b) by Euler-Lambert's formula is 0.1191762;

the values of the radii being:

$$\begin{aligned}r_1 &= 1.465534 \\ r_2 &= 1.525992\end{aligned}$$

the time interval $\tau = 5.99095$ days.

This example shows clearly the equivalence of the two sets of formulae, and that by using Newton's method results of any desired precision can be obtained.

It is well known that for Olbers' method there is an exceptional case, viz. when the three observed positions of the comet lie on a great circle passing through the place of the sun at the time of the second observation.

For Newton's method this case does not present any exception, but obviously for Newton's method the exceptional case is when the difference of the geocentric longitudes for the first and the third observations is small. Therefore for the next two examples I took one case exceptional for Olbers' method and one exceptional for Newton's.

The elements of comet 1869, III, are calculated in the first volume of Oppolzer's «Lehrbuch zur Bahnbestimmung» (2nd ed., p. 330), by a modification of Olbers' method.

The elements found are:

$$\begin{aligned}\Omega &= 292^\circ 56' 42'' \\ i &= 6^\circ 56' 9.6'' \\ \omega &= 107^\circ 38' 43.2'' \\ \log q &= 0.042524 \\ T_0 &= 1869 \text{ November}, 20.36747\end{aligned}$$

From the same data, applying Newton's method, I have obtained:

$$\begin{aligned}\Omega &= 292^\circ 58' 11'' \\ i &= 6^\circ 56' 15.6'' \\ \omega &= 107^\circ 33' 24.2'' \\ \log q &= 0.042530 \\ T_0 &= 1869 \text{ November}, 20.32284\end{aligned}$$

The residual errors for the second observation are:

By Oppolzer:

$$\begin{aligned}\alpha_2 \text{ cal.} - \alpha_2 \text{ obs.} &= -4.1'' \\ \alpha_2 \text{ cal.} - \beta_2 \text{ obs.} &= -34.1''\end{aligned}$$

By Newton's method:

$$\begin{aligned}\alpha_2 \text{ cal.} - \alpha_2 \text{ obs.} &= +42.6'' \\ \beta_2 \text{ cal.} - \beta_2 \text{ obs.} &= -26.0''\end{aligned}$$

Consider now the comet of the year 1781 the elements of which are calculated by Legendre in his treatise «Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes» (Paris, 1806).

The data for this comet are:

No	Time 1781 Nov.	Comet			The Earth		
		Geoc. Longitude α	Geoc. Latitude β	Hel. Longitude L.	log R		
1	14 ^d 8 ^h 29 ^m 44 ^s	307° 14' 45''	+55° 17' 9''	52° 54' 2''	1.994864		
2	19 8 29 44	306 51 26	39 14 48	57 57 4	994426		
3	29 8 29 44	306 42 20	31 4 52	63 0 41	994028		

Here the geocentric motion in longitude is only 32', hence the lines $T_1 A$ and $T_3 C$ (fig. 4) are almost parallel; the method as given in the «Principia» is obviously unsuitable.

But a little consideration shows that if we make the construction not in the projection but in the plane of the orbit itself, we need not bring it into coincidence with the ecliptic, as any other plane would do perfectly well, and this plane is only an auxiliary one.

For instance, we can make our drawing on any plane perpendicular to the plane of the ecliptic. In our case it is convenient to take the plane

drawn through the sun at the time of the second observation, and as the second plane of projection we take the ecliptic.

Newton's construction is first performed in the plane perpendicular to the ecliptic, and transferred either to the plane of the ecliptic or to the plane of the orbit. The construction for this case is shown in fig. 6, with an obvious notation corresponding to fig. 4.

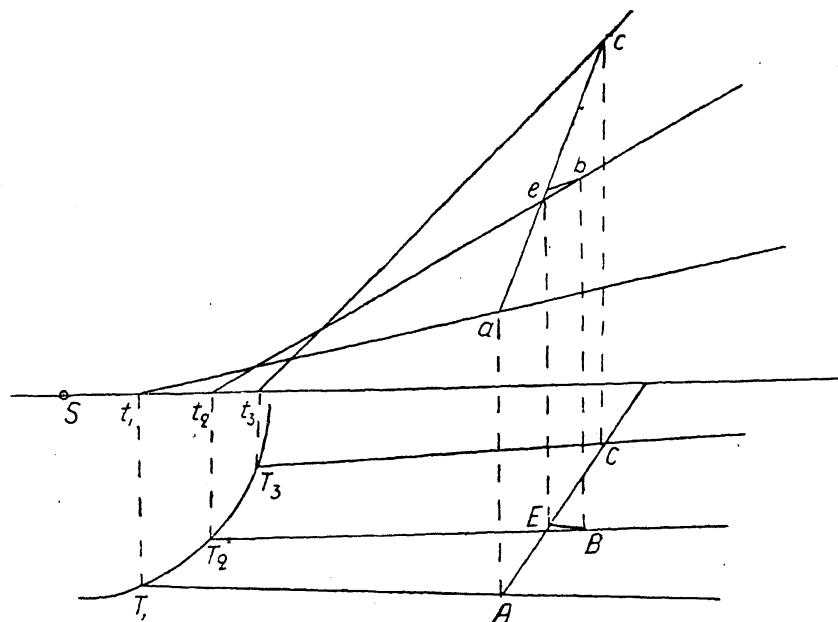


Fig. 6.

The working formulae for the calculation are quite as easily established for this case as for the general one.

Performing this calculation, I obtained the following elements:

$$\Omega = 77^\circ 55' 48''$$

$$i = 27^\circ 01' 14''$$

$$\omega = 61^\circ 57' 00'' \quad (\Omega - \omega) = 15^\circ 58' 48''$$

$$\log q = 1.982784 \quad q = 0.961135$$

$$T_0 = 1781 \text{ November}, 29.56145 = 1781 \text{ November}, 29^d 13^h 28^m 29^s$$

Legendre gave as final elements:

$$\Omega = 77^\circ 22' 55''$$

$$i = 27^\circ 12' 4''$$

$$\Omega - \omega = 16^\circ 3' 7''$$

$$q = 0.960995$$

$$T_0 = \text{November } 29^d 12^h 42^m . 8$$

The residual errors are:

By Legendre:

No	α cal. — α obs.	β cal. — β obs.
1	+ 194"	- 115"
2	+ 100	- 55
3	+ 28	+ 92

For Newton's method we need not recalculate the first and third observations, because they are used for the calculation of the elements; for the second we obtain:

$$\begin{aligned}\alpha_2 \text{ cal.} - \alpha_2 \text{ obs.} &= -11'' \\ \beta_2 \text{ cal.} - \beta_2 \text{ obs.} &= -1''\end{aligned}$$

§ 6. The examples given above show that Newton's method, applied not literally but by its true sense, gives results of any desired exactitude, and it is impossible to agree with Bauschinger's words (Bahnbestimmung, p. 388): «Newton's method was performed graphically and was applicable. Halley determined a multitude of orbits by this method, and all the methods of the eighteenth century are more or less based on it. *Newton used the property that the chord is subdivided by the mean radius vector proportionally to the time, hence he replaces, as observed by Lambert, the sectors by the corresponding triangles; what his method is wanting in order to render it perfect is Euler-Lambert's theorem, instead of which he was satisfied with an approximate relation between the chord, the radii vectors, and the time.*

The whole sentence printed in italics is wrong; not only did Newton not use the subdivision of the chord by the mean radius vector but he invented the wonderfully exact construction of Lemma VIII. As to the relation between the chord, the radii vectors, and the time, the relation of Lemma X is just the so-called Euler-Lambert theorem, which is simply an analytical expression of Newton's Lemma X. I wish to correct this statement in a standard treatise of great excellence, because it may induce the student not to pay due attention to Newton's method, and to overlook its real meaning and perfection.

§ 7. It is, of course, of interest to examine Newton's own example — the comet of the year 1680.

The data used by Newton are:

Date	True Time	Sun's Longitude	The Comet's	
			Longitude	Latitude
1680 Dec. 21	6 ^h 36 ^m 59 ^s	281° 6' 44"	305° 8' 12"	21° 42' 13" N.
1681 Jan. 5	6 1 38	296 22 18	8 48 58	26 15 7
1681 Jan. 25	7 58 42	316 45 36	39 35 0	17 56 30

Then with our notation

$$a = 10\,000 \quad T_2 V = 455 \\ ST_2 = 9842.1$$

and taking first $T_2 B = 5657$, Newton obtained:

$$SB = 9747; BE = 412; S\mu = 9503; i\lambda = 413$$

and by the second operation:

$$BE = 421; OD = 10186; X = 8528.4 \\ MP = 8450; MN = 8475; NP = 25$$

For the second position he took $T_2 b = 5640$ and obtained:

$$T_1 X = 4775; T_3 Z = 11322.$$

No other values are given but the final elements:

$$\Omega = 271^\circ 53' \\ i = 61^\circ 20' 20'' \\ \omega = 8^\circ 38' \\ 2q = p = 236.8 \\ T_0 = 1680 \text{ December, } 8^{\text{d}} 0^{\text{h}} 4^{\text{m}} \\ (a = 10\,000)$$

«All these», says Newton, «I have determined graphically, using a scale of equal parts and the chords of the angles taken from a table of natural sines, constructing a sufficiently large drawing in which the semi-diameter of the orbit of the Earth (10 000 parts) was equal to $16 \frac{1}{3}$ inches».

It is readily seen that the last figures of such numbers as 4775, 11322, 8475, 10186 would be represented on the drawing by a length of about $\frac{1}{600}$ of an inch, the computation will show that all the numbers above are exact, hence Newton either possessed as a draughtsman the same *vis prope divina*, or he used the *calculus arithmeticus* or some other artifice. It may be observed that such a precision can be obtained if at the same time two drawings be made, the principal one which is described above and the other only an auxiliary one enlarged 50 or 100 times, containing only the points B , E , and the parallelogram $i\lambda\mu I$, or rather B' , E' , $i'\lambda'\mu'I'$, the corresponding points of the plane of the ecliptic. On the first drawing

the directions of the chord and of the other lines are determined graphically, and their lengths computed; these directions are to be transferred to the second drawing on which the «corrections» of the lengths are then determined graphically.

It may be questioned whether Newton's words *construendo schema satis amplum* relate to an analogous artifice by which results of the required precision can be obtained.

Then there arises another difficulty: Newton gives only a single radius-vector ST_2 of the Earth's orbit. Has he assumed it to be the arc of a circle, or has he taken the values for the ellipse, and what solar tables did he use?

All this makes a verification of his results almost impossible — one has always something doubtful. The nearest results to Newton's I have obtained were when I used Leverrier's tables of the sun, reduced Newton's construction as described in the «Principia» to numerical computation, but corrected the position of the point μ for the distance of the point B from the tangent.

Of course in this case there was a slight difference between the value of the chord calculated by Newton's Lemma X and by the Eulerian formula. It is obvious from what has been explained above that this difference can only be avoided when we perform the exact construction in the plane of the orbit.

Newton describes a simplified graphical solution which he calls «approximate» (*quam proxime*), but his lemmas contain as complete and exact a solution of this *longe difficillimum* problem as may be desired, and this on seven pages of most sublime geometrical reasoning quite as simple as powerful.

К. Ф. ГАУСС

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ АСТРОНОМИЯ

Лекции, читанные в Геттингене в 1820—1821 гг.,
записанные КУПФЕРОМ

Перевод с немецкой рукописи А. Н. КРИЛОВА

Действительного члена Российской Академии Наук,
заслуженного профессора и начальника Морской Академии

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

В бытность мою в 1916 г. директором Главной физической обсерватории, набодя справку в каталоге богатой библиотеки Обсерватории, я заметил карточку: «*Gauss, Theoretische Astronomie*». Сочинения Гаусса под таким заглавием нет, — оказалось, что это есть рукописная тетрадь, полное заглавие которой: «*Kirpffer. Theoretische Astronomie gehört bei Gauss in Göttingen von Mai 1820 bis März 1821*».

Кирффер был впоследствии академиком нашей Академии Наук и первым директором Главной физической обсерватории, в которой он произвел свои знаменитые исследования по изучению упругости металлов и по сличению русских мер с иностранными. Ближайшее рассмотрение весьма трудно разбираемой рукописи показало, что она составляет дословную непосредственную запись лекций Гаусса, без какой-либо их обработки, и таким образом представляет значительный интерес, давая возможность судить о характере изустного изложения такого великого учителя, как Гаусс. Я тогда же исподволь разобрал эту рукопись и перевел ее на русский язык.

В конце 1918 г., в одном из заседаний комитета Обсерватории, я показал эту рукопись начальнику Главного гидрографического управления Е. Л. Бялокозу и упомянул про свой перевод ее.

Евгений Людвигович, признавая Астрономию предметом первостепенной важности для штурманов и гидрографов, предложил издать исполненный мною перевод средствами вверенного ему Управления, чтобы сделать таким образом доступными широкому кругу читателей лекции, хотя и читанные Гауссом 100 лет тому назад, но сохранившие свою научность и по настоящее время, наравне с прочими творениями этого великого гения.

А. Крылов

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

	Стр.
§ 1. Полезность Астрономии для определения времени, землеведения, мореплавания	303
§ 2. Литература по Астрономии: Историческая, Общая астрономия. Популярные сочинения. Практическая астрономия. Астрономические вычисления. Периодические издания. Таблицы	—
§ 3. Сферическая тригонометрия. Первый способ вывода четырех групп основных формул	308
§ 4. Второй способ вывода основных формул, принадлежащий Гауссу	311
§ 5. Применение основных формул к прямоугольным сферическим треугольникам	313
§ 6. Преобразование основных формул введением вспомогательного угла к логарифмическому виду	314
§ 7. Формулы полупериметра	316
§ 8. Формулы Гаусса	317
§ 9. Дифференциальные формулы для сферического треугольника	320
§ 10. Общая сводка формул сферической тригонометрии	321

Сферическая астрономия

§ 11. Предмет Сферической астрономии. Небесная сфера. Определение положения точки на небесной сфере относительно горизонта	322
§ 12. Суточное движение звезд. Нахождение высоты полюса и полярного расстояния звезды по наблюдениям трех высот ее и соответственных азимутов	324
§ 13. Меридиан. Экватор. Определение положения точки на небесной сфере по отношению к экватору	326
§ 14. Полуденная труба или пассажный инструмент, его назначение и идея устройства	328
§ 15. Наблюдения прохождений звезд. Цель таких наблюдений	331
§ 16. О восходе и заходе звезд	334
§ 17. Полярный треугольник. Основные задачи о суточном движении звезд	335
§ 18. Определение высоты полюса и склонения звезды по трем высотам ее и промежуткам времени между ними	337
§ 19. Определение высоты полюса и поправки часов по трем звездам, наблюденным в одной высоте	340
§ 19а. Геометрическое решение той же задачи	345
§ 19б. Та же задача в случае нескольких звезд	351
§ 20. Определение высоты полюса и поправки часов по наблюдениям высот 2 звезд . .	352
§ 21. О собственном движении Солнца. Эклиптические координаты звезд, перевод в экваториальные и обратно	356
§ 22. Прецессия	359
§ 23. Влияние прецессии на прямые восхождения и склонения звезд	360
§ 24. Звездные каталоги и карты	362

	Стр
§ 25. Двойные и тройные звезды	366
§ 26. Собственное движение звезд	369
§ 27. Измерение времени.	—
§ 28. Определение момента истинного полдня	371
§ 29. Перевод звездного времени в солнечное и обратно	374
§ 30. Среднее солнечное время	375
§ 31. Вид и размеры Земли. Общий исторический обзор градусных измерений	377
§ 32. Широта мест географическая и исправленная (геоцентрическая)	382
§ 33. Длина 1° меридиана в разных широтах	384
§ 34. Нахождение сжатия по измерениям двух дуг меридиана.	386
§ 35. Параллакс. Вывод общих формул	387
§ 36. Горизонтальный экваториальный параллакс	393
§ 37. Параллакс склонения и прямого восхождения	—
§ 38. Определение величины параллакса из наблюдений	395
§ 39. Точные формулы для параллакса	396
§ 40. Рефракция. Общее понятие о рефракции	399
§ 41. Определение рефракции из наблюдений в произвольном вертикале	400
§ 42. Определение рефракционной постоянной из наблюдений, произведенных в меридиане	401
§ 43. Математическая теория рефракций. Вывод формулы Bradley'я	404

Теоретическая Астрономия

§ 44. Суточное вращение Земли. Отклонение падающих тел	412
§ 45. Видимое собственное движение планет	413
§ 46. Система Птоломея	416
§ 47. Система Тихо Браге	421
§ 48. Система Коперника	422
§ 49. Система Кеплера	—
§ 50. Понятие об определении элементов орбиты планеты на основании многолетних наблюдений	426
§ 51. Элементы орбиты	428
§ 52. Формулы эллиптического движения планет.	430
§ 53. Уравнение Кеплера. Решение его методом последовательных приближений и по методе Гаусса	434
§ 54. Определение места планеты на небесной сфере в данный момент по извест- ным элементам ее орбиты	440
§ 55. Понятие о возмущениях планетного движения	441
§ 56. Закон Титиуса и новые планеты	442
§ 57. Таблицы движения планет	443
§ 58. Солнечные пятна. Определение положения оси вращения Солнца	444
§ 59. Кольца Сатурна и их фазы	445
§ 60. О параболическом движении комет	446
§ 61. О Луне и главных неравенствах ее движения. Определение географической долготы по наблюдениям Луны	450

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Полезность Астрономии для определения времени, землеведения, мореплавания. Полезность Астрономии проявляется в удовлетворении практической потребности в точном определении времени.

Первоначально для такого определения служила, как кажется, Луна, и хотя солнечный год применялся уже египтянами, но лишь грек Метон открыл 19-летний период, служащий для приведения в согласование лунного года с солнечным. У римлян это было достигнуто еще позднее, ибо лишь Юлий Цезарь дал им правильный календарь (при помощи Созигена — врача, жившего в Египте).

Малые подразделения дня предполагают некоторые астрономические познания, хотя и небольшие. Сперва применяли водяные часы для этой цели, затем солнечные; и здесь римляне отстали от греков, так как представляется, что солнечные часы вошли во всеобщее употребление у римлян только ко времени Клавдия.

Большие определения времени (хронологические) составляют изобретение более развитого ума. Пользуясь тогдашними наблюдениями, можно теперь определять время с достаточною достоверностью.

Полезность Астрономии для землеведения и для мореплавания слишком общеизвестна, чтобы о ней здесь распространяться.

К ее вспомогательным знаниям относится Сферическая тригонометрия, главные положения которой, мне нужные, я сообщу, указав сперва литературу нашего предмета.

§ 2. Литература по Астрономии. Историческая, Общая астрономия. Популярные сочинения. Практическая астрономия. Астрономические вычисления. Периодические издания. Таблицы.

а. Историческая

1) *Lalande. Bibliographie astronomique, 1802—1803.*

Большой том in-4°, весьма содержательный. Не указано лишь нескольких немецких сочинений. Иногда он дает краткую критику и биографии.

2) *Scheibel*. Beiträge zur mathematischen Bücherkenntniss, Breslau.

Весьма полно. Периодическое издание, 2 или 3 выпуска в год.

3) *Bailly*. Histoire de l'Astronomie moderne, 1780.

Прекрасно написанное и весьма основательное сочинение о тех предметах, история коих излагается, так что по нему можно изучить первую часть Астрономии. В исторической части нередко встречаются смешения, так как он пользовался сочинением художника Weidler'a. Свою историю он начинает с 200-х годов до Р. Хр. Александрийскою школою; издана лишь *Astronomie moderne*, как продолжение ее указывается *Astronomie ancienne*; но она заключает лишь изложение гипотезы, что существовал некогда народ, обладавший большими астрономическими познаниями.

Продолжение ее составляет:

4) *Voiron*. Histoire de l'Astronomie depuis 1781 jusqu'à 1811 pour servir de suite à l'histoire de Bailly, Paris, 1810, in-4°.

Весьма посредственно, без достаточных познаний, написанное сочинение.

5) *Montucla*. Histoire des Mathématiques, tt. I—IV, in-4°.

В историческом отношении более точно, нежели сочинение Bailly. Третий том второго издания составлен Lalande'ом по заметкам Montucla в 1902 г.

6) *Lindenau*. Geschichte der Astronomie der letzten 10 Jahren, Gotha, Becker.

О новейших успехах Астрономии вообще сообщается в журналах и в «Connaissance des Temps».

6. Общая астрономия

1) *Lalande*. Astronomie, tt. I—III, 3-me et dernière édition, 1793.

Весьма полное. Lalande был весьма опытный астроном-практик. Недостаток сочинения в том, что в нем предполагается весьма малая предварительная подготовка у читателя; также и самое расположение отделов ставится этому сочинению в упрек.

2) v. *Schubert*. Theoretische Astronomie, 2 Bände.

Schubert был лучший математик, нежели Lalande, и у него изложение Физической астрономии лучше, чем у Lalande'a. Но его стремление написать более хорошую Теоретическую астрономию весьма неудачно. Он не был астрономом-практиком; даже в вычислениях он не особенно искусен. Цитат он никаких не приводит.

3) *Vince*. Treatise of Astronomy.

Не заключает ничего особенного.

4) *Delambre*. Astronomie théorique et pratique, 3 Bände, 1814, in-4°.

Физическая астрономия совершенно опущена, что касается Практической, то она весьма посредственна. Математическая связь тоже не особенно хороша; все же, что он говорит об определении орбит комет, весьма плохо.

5) *Lacaille*. Astronomie, 1755.

6) *Melanderhielm*. Fundamenta Astronomiae, 1779.

Весьма хорошо.

7) *Bode*. Erläuterung der Sternkunde.

8) *Burja*. Grundlagen der Astronomie, 5 Bände.

В некоторых отношениях весьма хорошо. Предпосылается краткая (но и весьма посредственная) история Астрономии. Из математической части его сочинения видно, что он размышилял сам. В его изложении много оригинального, кроме того он приводит краткое описание инструментов, с рисунками их. Часто даются иногда и ошибочные представления, потому что он ничего не хотел заимствовать, напр. об aberrации.

9) *Biot*. Astronomie physique, tt. I et II, 1-re éd., in-4°; tt. I—III, 2-de éd., in-8°. 1810.

Здесь содержатся литературные указания, но обработанные с некоторой педантичностью, местами — весьма глубоко. Он хороший математик и практик. Мореходная астрономия написана не им, так же как и Гномоника.

10) *Bohnenberger*. Astronomie, 1811.

Весьма хорошее сочинение, но мне не нравится, что он пользовался геометрическими представлениями там, где было бы лучше применить анализ.

11) *Schultze*. Darstellung des Weltsystem.

Содержит много литературных указаний, и в этом отношении весьма ценно.

в. Популярные сочинения

1) *Hellmuth*. Anleitung zur Kenntniss des grossen Weltbaues für Frauenzimmer, 1793.

2) *Schubert*. Populäre Astronomie.

Содержит, вместе с кратким обзорением истории Астрономии, много математических рассуждений, вследствие чего для некоторых читателей затруднительна (dornig). Весьма рекомендуется.

3) *Brandes*. Die vornehmsten Lehren der Astronomie in Briefen an eine Freundin dargestellt.

Совершенно без математики, требует, однако, внимательного обдумывания. Некоторые отделы обработаны им с особенной любовью, что, однако, не составляет достоинства, напр. описание комет.

г. Практическая астрономия

- 1) v. *Rösler*. *Handbuch der praktischen Astronomie für Anfänger*, 1788.

Более нового издания нет. Содержит указания для наблюдений с небольшими инструментами.

- 2) *Vince*. *Treatise of Astronomy*, 1790.

Посредственно.

д. Астрономические вычисления

- 1) *Rüdiger*. *Handbuch der rechnenden Astronomic*, 3 Bände, 1796—1802, in-8°.

Содержит лишь простейшие вычисления, Сферическую тригонометрию, задачи о движении Солнца. Более трудные и полезные опущены, напр. вычисление орбит комет. В Физической астрономии попадаются и ошибочные места, даже не везде применяются наиболее целесообразные формулы.

е. Периодические издания

- 1) *Bode*. *Astronomisches Jahrbuch* с 1776 г. по настоящее время.

Половина каждого тома занята статьями; когда число статей оказывалось слишком значительным и места было недостаточно, то издавался дополнительный том, каковых пока издано четыре. Приблизительно для каждого 25 лет издается указатель.

- 2) *Connaisance des Temps*.

- 3) *Cardini et Brambili*. *Ephemiridi astronomiche di Milano*.

Статьи принадлежат только миланским ученым и по большей части превосходны.

- 4) *Nautical Almanac*.

Английский морской календарь, статей не содержит.

- 5) *Записки Академий*: Парижской, Лондонской, Петербургской и пр.

- 6) *Bernoulli*. *Recueil pour les Astronomes*.

Содержит много оригинального.

- 7) v. *Zach*. *Geographische Ephemeriden*.

Первые четыре тома изданы с 1798 г. самим Zach'ом, после чего он издание оставил, и оно продолжалось совершенно в ином духе, так как помещались лишь географические работы, Астрономия же была совершенно исключена. Затем издание опять продолжено Zach'ом под названием «*Monatliche Correspondenz*» по 1813 г., редактированное под конец Lindenau, всего вышло 28 томов. Впоследствии Lindenau и Bohnenberger основали новый журнал под заглавием: «*Zeitschrift für Astronomie*», 1816—1818 г. Эти 38 томов содержат истинную сокровищницу астрономических работ.

ж. Таблицы

1) *Taylor*. Tables of logarithms of numbers and of the sines and tangents to every second of the quadrant, London, 1792, in-fol.

Содержит логарифмы через 1 секунду, но стоит в Англии 6—7 гиней. Есть издание in-12°, оно стоит 2 гинея.

Таблиц через 10 секунд существует много, например:

2) *Vlacq*. Thesaurus (вновь изданный Vega).

3) *Gardiner*. Table of logarithms, 1740 (вновь издано в Авиньоне в 1772 г., in-fol.).

4) *Callet*. Tables portatives de logarithmes publiées à Londres par Gardiner.

Парижское издание предыдущих таблиц фирмой Didot в одном томе и гораздо меньшем формате.

5) *Callet*. Tables des logarithmes.

Стереотипное издание, также через 10 секунд (14 fr.).

Весьма известны таблицы Vega, а также таблицы Schultze через 1 минуту.

6) Таблицы с числом знаков менее 7 (семь знаков при всех астрономических вычислениях, если правильно поступать, вполне достаточно): в Париже у F. Didot есть стереотипное издание шестизначных таблиц.

Пятизначные таблицы следующие:

7) *Lacaille et Lalande*, 1760.

Последние издания стереотипные, много раз повторенные, и в них нет опечаток. Введение слишком длинно. Цена в Париже $2\frac{1}{2}$ fr. Westphal хотел улучшить таблицы эти тем, что он разделил разности на 60 и привел их таким образом к 1 секунде, но это не хорошо, так как вычисление этим не упрощается и, сверх того, требуется больший объем книги. Было бы значительное улучшение, если бы для первых градусов дать логарифмы через 10 секунд.

8) *Prasse*. Kleine Logarithmentafel.

Пятизначная таблица совсем краткая, я ею часто пользуюсь для логарифмов чисел. Логарифмы синусов неудобны, во-первых, потому, что сперва надо переводить числа, во-вторых, потому, что sin, cos, tg и cotg расположены отдельно.

9) *Pasquich*. Abgekürzte logarithmisch-trigonometrische Tafel.

Содержит таблицу квадратов синусов и напечатанные Гауссом в «Monatliche Correspondenz» таблицы логарифмов сумм и разностей. Holma перепечатал таблицы эти в Париже в 1817 г.

10) *Vlacq, Vega.* Десятизначные таблицы через 10 секунд, изданные Vega под заглавием «*Thesaurus logarithmorum* и т. д.».

Потребность в них редкая.

11) *Borda et Delambre.* *Tables logarithmiques décimales.*

Составлены по новому французскому делению. Такие же таблицы издали Hobert и Ideler, разделившие четверть окружности на 10 000 частей.

12) *Scherwin.* *Mathematical Tables.*

Натуральные значения спиусов содержат много погрешностей, в остальном весьма хороши. Я ими часто пользуюсь. В старом издании кажется ошибок меньше, но оно не так хорошо напечатано и не на такой хорошей бумаге.

Я забыл указать в числе популярных сочинений: *Laplace. Exposition du système du monde*, 4-ме éd. Все формулы и специальные термины выпущены, и лишь самое существенное изложено им мастерски. Численные данные приведены весьма точно, но придерживаясь десятичного деления четверти окружности. Последняя глава содержит краткую историю Астрономии.

§ 3. Сферическая тригонометрия. Первый способ вывода четырех групп основных формул. Все, что мы знаем о движении небесных тел, выводится из определения направлений па них от нас. Для этого надо иметь две постоянные точки, составляющие оба конца зрительной трубы. Наилучшим образом эти направления определяются если относить их на поверхность шара и указывать те точки ее, в которых она пересекается упомянутыми направлениями.

Взаимное расположение этих точек рассматривается в *Сферической тригонометрии*, краткий очерк которой я дам, поскольку она для нас необходима.

Требуется лишь четыре группы формул, чтобы решать все ее задачи. Эти формулы можно вывести из одной из них, связывающей три стороны и один угол. Такая формула была выведена Lagrange'м.

В вершине *A* (фиг. 1) сферического треугольника *ABC* проводят две касательные, лежащие в плоскостях тех больших кругов, коих отрезки суть стороны *c* и *b*. Обе касательные продолжаются до пересечения с радиусами, проведенными через точки *B* и *C*. Таким образом происходят два плоских треугольника, имеющих общую сторону. Первый из них тот, коего вершина лежит в *A* и коего стороны суть вышеупомянутые касательные. Прямая, заключенная между точками β и γ пересечения этих касательных

с радиусами, служит основанием этого треугольника. Это же основание образует с двумя продолженными радиусами второй треугольник.

Эти два треугольника состоят, как легко заметить, из следующих элементов: первый треугольник — угол при вершине A , стороны в ней пересекающиеся $\operatorname{tg} b$ и $\operatorname{tg} c$, следовательно основание $\beta\gamma$ будет

$$\beta\gamma = \sqrt{\operatorname{tg}^2 c + \operatorname{tg}^2 b - 2 \operatorname{tg} c \operatorname{tg} b \cos A}$$

Второй треугольник — с углом a при центре шара, стороны его $\sec b$ и $\sec c$, следовательно тоже основание $\beta\gamma$ будет

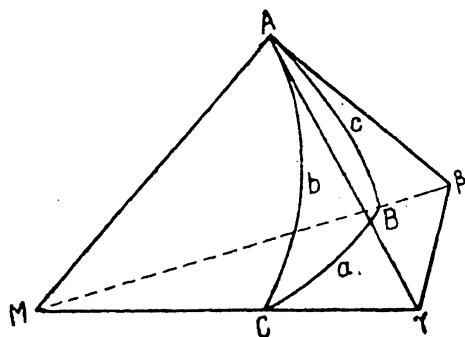
$$\beta\gamma = \sqrt{\sec^2 b + \sec^2 c - 2 \sec c \sec b \cos a}$$

Значит,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\operatorname{tg}^2 c + \operatorname{tg}^2 b - 2 \operatorname{tg} c \operatorname{tg} b \cos A} = \\ & = \sqrt{\sec^2 c + \sec^2 b - 2 \sec c \sec b \cos a} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}^2 c + \operatorname{tg}^2 b - 2 \operatorname{tg} c \operatorname{tg} b \cos A = \\ & = \sec^2 c + \sec^2 b - 2 \sec c \sec b \cos a \end{aligned}$$



Фиг. 1.

а так как

$$\sec^2 b - \operatorname{tg}^2 b + \sec^2 c - \operatorname{tg}^2 c = 2$$

то

$$2 = 2 \sec b \sec c \cos a - 2 \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \cos A$$

или

$$1 + \frac{\sin b \sin c}{\cos b \cos c} \cos A = \frac{\cos a}{\cos b \cos c}$$

т. е.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (I)$$

Эта формула, данная Lagrange'ем, в сущности, доказана для треугольников, коих стороны меньше 90° . Справедливость ее, однако, легко может быть установлена для всякого иного треугольника, как показано Schumacher'ом в сочинении «Geometrie der Stellung, v. Carnot, übersetzt von Schumacher» (2 Theile, Altona bei Hamburg, p. 373).

Из этой основной формулы перестановкою букв можно составить формулу (2). Пусть эти две формулы будут:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (1)$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \quad (2)$$

Разделим (1) на $\sin c$, (2) умножим на $\cotg c$, тогда будет:

$$\frac{\cos a}{\sin c} = \cos b \cotg c + \sin b \cos A$$
$$\cos b \cotg c = \frac{\cos a \cos^2 c}{\sin c} + \sin a \cos c \cos B$$

сложив, имеем

$$\frac{\cos a}{\sin c} = \frac{\cos a \cos^2 c}{\sin c} + \sin b \cos A + \sin a \cos c \cos B$$

следовательно будет

$$\cos a \sin c = \sin b \cos A + \sin a \cos c \cos B \quad (3)$$

Точно так же

$$\cos c \sin a = \sin b \cos C + \sin c \cos a \cos B \quad (4)$$

Умножив (4) на $\cos B$ и придав к (3), имеем

$$\cos a \sin c \sin^2 B = \sin b \cos A + \sin b \cos B \cos C \quad (5)$$

точно так же

$$\cos a \sin b \sin^2 C = \sin c \cos A + \sin c \cos B \cos C \quad (6)$$

Умножив (5) на $\frac{\sin c}{\cos a}$ и вычитая отсюда (6) умноженную на $\frac{\sin b}{\cos a}$, получим

$$\sin^2 c \sin^2 B - \sin^2 C \sin^2 b = 0 \quad (7)$$

или

$$\sin c \sin B = \sin C \sin b \quad (\text{II})$$

Разделив (5) на $\sin b$ и вычтя отсюда (II), умноженное на $\frac{\cos a \sin B}{\sin b}$, получим

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \quad (\text{III})$$

Наконец, если (4) разделить на $\sin c$, (II) умножить на $\frac{\cotg C}{\sin c}$ и вычесть, то будет

$$\cotg c \sin a - \cotg C \sin B = \cos a \cos B \quad (\text{IV})$$

Из этих основных формул следуют аналогии Непера, а также сама собою вытекают те упрощения, которые вносятся тем обстоятельством, что треугольник прямоугольный.

Сравнить с этим: *Lagrange, Journal de l'École Polytechnique, 6-me cahier.*

§ 4. Второй способ вывода основных формул, принадлежащий Гауссу. Другой, более простой, вывод основных формул дан Гауссом.

Из вершины A сферического треугольника ABC опускаем перпендикуляр AD на плоскость того большого круга, коего часть есть сторона a . Из точки D опускаются перпендикуляры DK и DH на радиусы MB и MC , идущие к вершинам C и B треугольника.

Легко видеть, что AD может быть выражено двумя способами:

$$\begin{aligned} AD &= AH \sin C \\ AH &= \sin b \end{aligned} \quad (1)$$

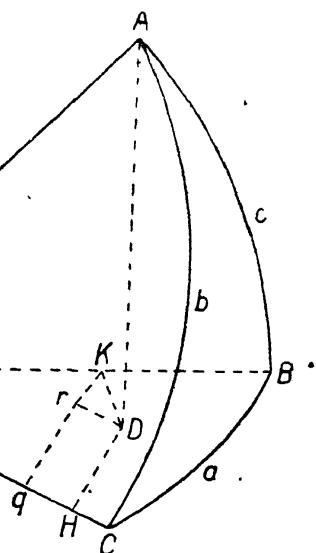
иначе:

$$AD = \sin b \sin C$$

Точно так же:

$$\begin{aligned} AD &= AK \sin B \\ AK &= \sin c \end{aligned} \quad (2)$$

Сопоставляя (1) и (2), имеем



Фиг. 2.

(II)

Это есть вторая из основных формул, выведенных в § 3.

Из того же чертежа можно еще вывести следующее:

$$\begin{aligned} MH &= Mq + qH \\ Mq &= MK \cos a = \cos c \cos a \end{aligned}$$

Затем

$$qH = DK \cdot \cos [(180^\circ - a) - 90^\circ] = DK \cdot \sin a$$

но

$$DK = AK \cos B = \sin c \cos B$$

следовательно

$$qH = \sin c \cos B \sin a$$

и

$$MH = Mq + qH = \cos c \cos a + \sin c \cos B \sin a$$

но

$$MH = \cos b$$

следовательно

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \quad (I)$$

Это есть первая из приведенных выше основных формул.

Четвертую из этих формул можно получить следующим образом:

$$\begin{aligned} HD &= Kq - Kr \\ Kq &= MK \sin a = \cos c \sin a \\ Kr &= DK \sin(KDr) \end{aligned}$$

но

$$KDr = KDH - 90^\circ = (180^\circ - a) - 90^\circ = 90^\circ - a$$

следовательно

$$Kr = DK \cdot \cos a = \sin c \cos B \cos a$$

значит

$$HD = \cos c \sin a - \sin c \cos B \cos a \quad (\text{A})$$

но

$$\frac{HD}{AD} = \cot C \quad \text{и} \quad AD = \sin c \sin B$$

следовательно

$$HD = \cot C \sin B \sin c$$

таким образом имеем

$$\cot C \sin B \sin c = \cos c \sin a - \sin c \cos B \cos a \quad (\text{B})$$

По разделении обеих частей этого равенства на $\sin c$ получится

$$\cot C \sin B = \cot c \sin a - \cos B \cos a \quad (\text{IV}')$$

иначе:

$$\cot c \sin a - \cot C \sin B = \cos B \cos a \quad (\text{IV})$$

Чтобы получить последнюю из основных формул, можно поступить так:

Из (II) следует

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad (\text{C})$$

Но по формуле (A) было

$$HD = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B$$

но

$$HD = \sin b \cos C$$

следовательно

$$\sin b \cos C = \cos a \sin a - \sin c \cos a \cos B \quad (\text{D})$$

Подставляя, вместо $\sin b$, его величину из формулы (C), имеем

$$\sin B \cos C = \sin A \cos c - \sin C \cos B \cos a \quad (\text{E})$$

Перестановка букв дает новое уравнение, именно, заменив C на A и c на a и наоборот, имеем

$$\sin B \cos A = \sin C \cos a - \sin A \cos B \cos c \quad (\text{F})$$

Отсюда

$$\sin C \cos a = \sin B \cos A + \sin A \cos B \cos c$$

Подставив эту величину в третий член формулы (E), получим

$$\sin B \cos C = \sin A \cos c - (\sin B \cos A \cos B + \sin A \cos^2 B \cos c)$$

Отсюда следует

$$\sin B \cos C = \sin A \cos c (1 - \cos^2 B) - \sin B \cos B \cos A$$

иначе:

$$\cos C = \sin B \sin A \cos c - \cos B \cos A \quad (\text{III})$$

§ 5. Применение основных формул к прямоугольным сферическим треугольникам. Из этих четырех основных формул легко получить формулы для частных случаев, напр.

для прямоугольных треугольников.

Пусть MHN есть такой треугольник:

1) Уравнение между m, n, h . По (I) имеем

$$\cos h = \cos m \cos n$$

2) Уравнения между двумя сторонами и углом:

а) между n, h, M по (IV) имеем

$$\cot h \sin n = \cos n \cos M$$

б) между h, n, N по (II) имеем

$$\sin h \sin N = \sin n$$

в) между m, n, N по (IV) имеем

$$\cot N \sin m = \cos n \sin m$$

или

$$\operatorname{tg} N \sin m = \operatorname{tg} n$$

3) Между стороной и двумя углами:

а) между h, M, N по (III) имеем:

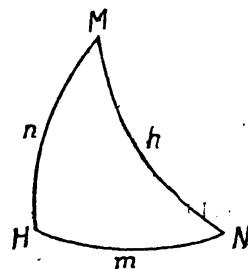
$$\sin M \sin N \cos h = \cos M \cos N$$

т. е.

$$\cos h = \cot M \cot N$$

б) между m, M, N по (III) имеем

$$\cos M = \cos m \sin N$$



Фиг. 3.

§ 6. Преобразование основных формул введением вспомогательного угла к логарифмическому виду. Хотя вышеприведенные четыре основные формулы устанавливают вполне зависимость между четырьмя элементами сферического треугольника, но при пользовании ими необходимо их подвергнуть некоторому преобразованию в том случае, когда в формуле содержится \sin и \cos того же самого элемента. Здесь всегда применим следующий прием:

Пусть будет вообще дано выражение

$$P \cos x + Q \sin x \quad (\text{A})$$

которое надо, при помощи вспомогательного угла, привести к одночленному. Этот вспомогательный угол φ выбирают так, чтобы было:

$$\left. \begin{array}{l} Q = M \sin \varphi; \quad P = M \cos \varphi \\ \frac{Q}{P} = \operatorname{tg} \varphi \\ M = \frac{Q}{\sin \varphi} = \frac{P}{\cos \varphi} \end{array} \right\} \quad (\text{B})$$

т. е.

отсюда

Подстановка значений B в формулу (A) дает

$$\begin{aligned} P \cos x + Q \sin x &= M(\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x) = M \cos(\varphi - x) = \\ &= \frac{Q}{\sin \varphi} \cos(\varphi - x) = \frac{P}{\cos \varphi} \cos(\varphi - x) \end{aligned}$$

причем последнее выражение предпочтительнее.

В некоторых случаях, хотя преобразование и не является необходимым, но оно тем не менее желательно, именно когда для угла, близкого к 90° , известен синус или для близкого к 180° — косинус, тогда таблицы не дают точного определения угла, если только они не десятизначные.

В таких случаях надо комбинировать между собою несколько формул, причем не безразлично, как выбрать вспомогательный угол.

Пусть, напр., задачею требуется по данным двум сторонам c, b и углу между ними A определить сторону a и прилегающий к ней угол B , для этого воспользуемся формулами:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (\text{I})$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \quad (\text{D})$$

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A \quad (\text{II})$$

В правых частях этих равенств находятся известные величины, в левых — неизвестные.

Сперва мы определим B по формулам (II) и (D) и затем a по (I) и (D), тогда a будет определяться по tg , что доставляет более точное определение: так как формула (D) применяется дважды, то не безразлично, какой вспомогательный угол применить, и лучше всего в обоих случаях применить тот же самый угол. Для формулы (I) безразлично взять b или c , но формула (II) требует, чтобы было взято b , так как формула (II) содержит b и оно не должно входить в соединении с вспомогательным углом.

Обозначив этот вспомогательный угол через x , надо в формуле (I) положить:

$$\begin{aligned}\cos b &= M \cos x \\ \sin b \cos A &= M \sin x\end{aligned}$$

следовательно

$$\cos a = M \cos(c - x) \quad (\text{H})$$

Точно так же из формулы (D) получится:

$$\begin{aligned}\sin a \cos B &= M \sin(c - x) \quad (\text{K}) \\ \cos B &= \frac{M \cdot \sin(c - x)}{\sin a}\end{aligned}$$

по формуле же (II):

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}$$

следовательно

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin b \sin A}{M \sin(c - x)}$$

и по формулам (H) и (K):

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg}(c - x)}{\cos B}$$

По подстановке, вместо M , его величины, имеем следующие три уравнения:

$$\operatorname{tg} x = \cos A \operatorname{tg} b \quad (\text{a})$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} A \sin x}{\sin(c - x)} \quad (\text{b})$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg}(c - x)}{\cos B} \quad (\text{c})$$

Задача, когда даны два угла B и C и сторона a между ними и требуется определить противолежащий ей угол A и прилежащую сторону b , решается подобным же образом.

Для этого пользуются формулами (IV), (E) и (II):

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \quad (\text{IV})$$

$$\cos b \sin A = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a \quad (\text{E})$$

$$\sin b \sin A = \sin B \sin a \quad (\text{II})$$

в остальном, поступая как выше, будем иметь формулы:

$$\operatorname{tg} x = -\cos a \operatorname{tg} B$$

$$\operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg} a \sin x}{\sin(C-x)}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg}(C-x)}{\cos b}$$

§ 7. Формулы полупериметра. Другой прием приходится применять, когда по данным трем сторонам требуется определить угол по формуле

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \quad (1)$$

Эта формула при значениях A , близких к 0° или 180° , не дает точного определения.

Как известно,

$$1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{1}{2} A$$

На основании (1) будет

$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\cos(b-c) - \cos a}{2 \sin b \sin c}} \quad (2)$$

Затем

$$1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{1}{2} A$$

и

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\cos a - \cos(b+c)}{2 \sin b \sin c}} \quad (3)$$

а так как

$$\cos p - \cos q = 2 \sin \frac{1}{2} (p+q) \sin \frac{1}{2} (q-p)$$

то будет:

$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (a+b-c) \sin \frac{1}{2} (a+c-b)}{\sin b \sin c}} \quad (4)$$

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (a+b+c) \sin \frac{1}{2} (b+c-a)}{\sin b \sin c}} \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (a+b-c) \sin \frac{1}{2} (a+c-b)}{\sin \frac{1}{2} (a+b+c) \sin \frac{1}{2} (b+c-a)}} \quad (6)$$

§ 8. Формулы Гаусса. Если требуется по данным двум сторонам и углу, заключенному между ними, или по одной стороне и двум углам, к ней прилежащим, найти все прочие части треугольника, то для этого служат следующие формулы, из которых выводятся и известные аналогии Непера.

Я нашел их еще в 1792 г. Delambre, а затем Mollweide также обнародовали их, но без доказательства, которое я вам изложу аналитически.

Для упрощения выкладок, я введу следующие сокращенные обозначения:

$$p = \cos \frac{1}{2} a \cdot \sin \frac{1}{2} (B + C) \quad (1)$$

$$q = \sin \frac{1}{2} a \cdot \sin \frac{1}{2} (B - C) \quad (2)$$

$$r = \cos \frac{1}{2} a \cdot \cos \frac{1}{2} (B + C) \quad (3)$$

$$s = \sin \frac{1}{2} a \cdot \cos \frac{1}{2} (B - C) \quad (4)$$

$$P = \cos \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{2} (b - c) \quad (1')$$

$$Q = \cos \frac{1}{2} A \cdot \sin \frac{1}{2} (b - c) \quad (2')$$

$$R = \sin \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{2} (b + c) \quad (3')$$

$$S = \sin \frac{1}{2} A \cdot \sin \frac{1}{2} (b + c) \quad (4')$$

По вышеизложенному, имеем:

$$\sin a \sin B = \sin A \sin b \quad (\text{A})$$

$$\sin a \sin C = \sin A \sin c \quad (\text{B})$$

Отсюда

$$\sin a [\sin B + \sin C] = \sin A [\sin b + \sin c]$$

а так как

$$\sin B + \sin C = 2 \sin \frac{1}{2} (B + C) \cos \frac{1}{2} (B - C)$$

и

$$\sin a = 2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a$$

то будет

$$\sin a \sin \frac{1}{2} (B + C) \cos \frac{1}{2} (B - C) =$$

$$= \sin A \sin \frac{1}{2} (b + c) \cos \frac{1}{2} (b - c)$$

или

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} (B+C) \cdot \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} (B-C) = \\ = \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} (b+c) \cdot \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} (b-c) \end{aligned}$$

иначе

$$ps = PS \quad (\text{I})$$

Вычитая формулу (B) из формулы (A), совершенно так же получим

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} (B-C) \cdot \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} (B+C) = \\ = \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} (b+c) \cdot \cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} (b-c) \end{aligned}$$

т. е.

$$rq = RQ \quad (\text{II})$$

Подобным же образом поступив с формулой (D) § 4, имеем:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \quad (\text{D})$$

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \quad (\text{D}')$$

Сложив, имеем $\sin a [\cos B + \cos C] =$
 $= \cos b \sin c + \cos c \sin b - \cos A [\sin b \cos c + \sin c \cos b] =$
 $= (1 - \cos A) \sin (b + c)$

т. е.

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} (B+C) \cos \frac{1}{2} (B-C) = \\ = \sin \frac{1}{2} (b+c) \cos \frac{1}{2} (b+c) \sin \frac{1}{2} A \cdot \sin \frac{1}{2} A \end{aligned}$$

или

$$rs = RS \quad (\text{III})$$

Вычтя (D) из (D'), имеем

$$\begin{aligned} \sin a [\cos C - \cos B] = \\ = \cos c \sin b - \cos b \sin c - \cos A [\cos b \sin c - \cos c \sin b] = \\ = (1 + \cos A) \sin (b - c) \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} (B-C) \sin \frac{1}{2} (B+C) = \\ = \cos \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{2} A \cdot \sin \frac{1}{2} (b-c) \cos \frac{1}{2} (b-c) \end{aligned}$$

или

$$pq = PQ \quad (\text{IV})$$

Выражение (E) § 4 совершенно так же дает:

$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a \quad (\text{E})$$

$$\sin A \cos c = \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a \quad (\text{E}')$$

Сложив, имеем

$$\begin{aligned} & \sin A [\cos b + \cos c] = \\ & = \cos B \sin C + \cos C \sin B + \cos a (\sin B \cos C + \sin C \cos B) = \\ & = (1 + \cos a) \sin (B + C) \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} & \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{2} (b + c) \cos \frac{1}{2} (b - c) = \\ & = \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a \cdot \sin \frac{1}{2} (B + C) \cos \frac{1}{2} (B - C) \end{aligned}$$

или

$$pr = PR \quad (\text{V})$$

Вычтя (E), из (E'), получим

$$\begin{aligned} & \sin A [\cos c - \cos b] = \\ & = \cos C \sin B - \cos B \sin C + \cos a (\sin C \cos B - \sin B \cos C) = \\ & = (1 - \cos a) \sin (B - C) \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} & \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A \cdot \sin \frac{1}{2} (b - c) \sin \frac{1}{2} (b + c) = \\ & = \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} (B - C) \cos \frac{1}{2} (B - C) \end{aligned}$$

или

$$qs = QS \quad (\text{VI})$$

Нетрудно видеть, что

$$ps \cdot pq = PS \cdot PQ$$

иначе:

$$p^2 \cdot qs = P^2 \cdot QS$$

следовательно

$$p^2 = P^2$$

или

$$p = \pm P$$

Совершенно так же:

$$q = \pm Q$$

$$r = \pm R$$

$$s = \pm S$$

В сферической тригонометрии ограничиваются рассмотрением треугольников, стороны которых меньше 180° , поэтому p положительно, следовательно и P , и значит,

$$p = P; \quad r = R; \quad q = Q; \quad s = S$$

Но и для тех случаев, когда стороны более 180° , легко найти знаки.

Написав, вместо p, r, q, s, P, Q, R, S , их величины, будем иметь следующие четыре формулы Гаусса:

$$P = p \quad \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} (B + C) = \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} (b - c) \quad (\text{Ig})$$

$$Q = q \quad \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} (B - C) = \cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} (b - c) \quad (\text{IIg})$$

$$R = r \quad \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} (B + C) = \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} (b + c) \quad (\text{IIIg})$$

$$S = s \quad \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} (B - C) = \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} (B + C) \quad (\text{IVg})$$

Отсюда могут быть получены аналогии Непера, но не наоборот, т. е. формулы Гаусса из Неперовых аналогий не получаются.

§ 9. Дифференциальные формулы для сферического треугольника. Часто встречается надобность узнать, насколько изменяется пара частей, коих изменения весьма малы, в то время как прочие части совсем не претерпевают никаких изменений. Для этого устанавливают соотношение между бесконечно малыми изменениями, которые и можно подставить вместо весьма малых изменений, чтобы упростить выкладки.

Возьмем формулу

$$0 = -\cos a + \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

и продифференцируем ее, тогда будет:

$$\begin{aligned} 0 &= \sin a \cdot da + [-\sin b \cos c + \cos b \sin c \cos A] db \\ &\quad + [-\cos b \sin c + \sin b \cos c \cos A] dc \\ &\quad - \sin b \sin c \sin A dA \end{aligned}$$

Здесь можно выполнить ряд упрощений; так, по Формуле (D) § 4:

$$\sin a \cos C = \sin b \cos c - \sin c \cos b \cos A$$

$$\sin a \cos B = \sin c \cos b - \sin b \cos c \cos A$$

затем

$$\sin b \sin c \sin A = \sin b \sin C \sin a$$

следовательно будет

$$\sin a \cdot da = \sin a \cos C \cdot db + \sin a \cos B \cdot dc + \sin b \sin C \sin a \cdot dA$$

или, по сокращении,

$$da = \cos C \cdot db + \cos B \cdot dc + \sin b \sin C \cdot dA$$

Совершенно подобно можно поступать и с двумя другими формулами.

§ 10. Общая сводка формул Сферической тригонометрии.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$da = \cos C \cdot db + \cos B \cdot dc + \sin B \sin c \cdot dA$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A$$

$$\cotg a \cdot da - \cotg A \cdot dA = \cotg b \cdot db - \cotg B \cdot dB$$

$$\cos A \cos c = \cotg b \sin c - \cotg B \sin A$$

(2) (5) (1) (8) (4) (2)

$$\sin C \cdot db = \sin b \cos C \cdot dA + \cos a \sin B \cdot dc + \sin a \cdot dB$$

$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

$$dA = -\cos c \cdot dB - \cos b \cdot dC + \sin C \sin b \cdot da$$

$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c) \sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b \sin c}}$$

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \sin c}}$$

$$\cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2}(b-c) = \sin \frac{1}{2}(B-C) \sin \frac{1}{2} a$$

$$\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2}(b+c) = \cos \frac{1}{2}(B-C) \sin \frac{1}{2} a$$

$$\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2}(b-c) = \sin \frac{1}{2}(B+C) \cos \frac{1}{2} a$$

$$\sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2}(b+c) = \cos \frac{1}{2}(B+C) \cos \frac{1}{2} a$$

Для прямоугольного треугольника:

$$\cos h = \cos f \cos g \quad (I)$$

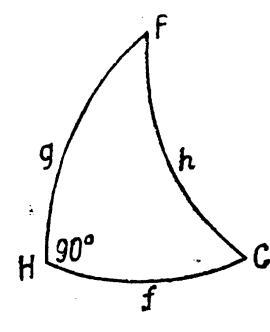
$$\cos h \cdot \operatorname{tg} F \cdot \operatorname{tg} G = 1 \quad (II)$$

$$\sin h \sin F = \sin f \quad (III)$$

$$\operatorname{tg} h \cos F = \operatorname{tg} g \quad (IV)$$

$$\operatorname{tg} F \sin g = \operatorname{tg} f \quad (V)$$

$$\sin F \cdot \cos g = \cos G \quad (VI)$$



Фиг. 4.
21

СФЕРИЧЕСКАЯ АСТРОНОМИЯ

§ 11. Предмет Сферической астрономии. Небесная сфера. Определение положения точки на небесной сфере относительно горизонта. Сферическая астрономия занимается направлениями, по которым до нас достигает свет небесных тел.

Для этого необходимо определять по две точки в направлении света. Прежде это выполнялось диоптрами, теперь — зрительными трубами. Эти многочисленные направления пересекаются в месте наблюдения. Какова длина этих линий, — для нас в дальнейшем безразлично.

Все эти направления относят на поверхность шара, коего центр совпадает с глазом.

Чтобы задать положение какой-либо звезды на этом воображаемом шаре, надо два определения.

Во-первых, шар подразделяют большим кругом на две половины и задают расстояние до этого круга точки, в которой прямая, проведенная от глаза или центра шара к звезде, пересекает поверхность шара.

Такой большой круг доставляется нам самою природою, падением тяжелых тел, иначе — направлением вити, к которой подвешено тяжелое тело (отвес). Направление магнитной стрелки недостаточно постоянно для этой цели.

Направление от груза отвеса к точке его подвеса дает на шаре точку, которая называется *зенит*, большой круг, имеющий зенит своим полюсом, называется *горизонт*, и его-то мы и примем за вышеуказанный большой круг; плоскость его совпадает с поверхностью покоящейся жидкости.

Расстояние до горизонта называется *высотой* светила. *Зенитное расстояние* и высота дополняют взаимно друг друга до 90° .

Большой круг, проходящий через зенит, называется *вертикальным* кругом или полукругом, каковых два взаимно противоположных, — собственно говоря выражение «противоположные вертикальные круги» неверное.

Расстоянием точки до горизонта положение ее еще не вполне определяется. Весь малый круг, проведенный через эту точку параллельно горизонту, во всех своих точках отстоит одинаково от него. Такой малый круг, проведенный параллельно горизонту, называется *альмукантаром*.

Чтобы определить положение звезды вполне, необходимо провести через нее вертикальный круг (круг высот) и указать точку его пересечения с горизонтом. Эта точка определяется заданием ее расстояния до раз навсегда избранной постоянной точки горизонта. Положение этой постоянной точки совершенно произвольно; какое из них наиболее удобно, — покажут дальнейшие наблюдения.

Дуга от постоянной точки горизонта до точки его пересечения с кругом высоты звезды называется ее *азимутом*. Градусы этой дуги отсчитываются или в одном направлении слева направо от 0° до 360° , или по двум противоположным направлениям от 0° до 180° . Высотою и азимутом положение звезды определяется вполне.

Чтобы составить себе некоторое представление о способе, которым на самом деле определяется положение звезды, наилучшим примером может служить инструмент, называемый *азимутальным квадрантом*. Имеются 2 разделенных на градусы больших круга, пересекающиеся под прямым углом, из них один — горизонтальный, другой — вертикальный. В плоскости вертикального круга вращается труба, снабженная алидадою (линейка, к которой труба прикреплена в точности ей параллельно, показывающая по кругу деления, вращаясь около его центра подобно радиусу). Самый же вертикальный круг, несущий трубу, можно поворачивать около его вертикальной оси, проходящей через центр горизонтального круга.

Если вертикальный круг поставить так, что находящаяся на нем труба будет наведена на звезду и если известна та точка окружности горизонтального круга, в которой ее пересекает прямая, соединяющая центр этого круга с упомянутую выше постоянною точкою горизонта, то стоит только произвести по делениям горизонтального круга отсчет удаления точки пересечения вертикального круга до сказанной постоянной точки, как получится азимут светила. Дуга же, заключенная между точкою пересечения кругов и точкою, указываемою алидадою, даст высоту светила.

Имея, таким образом, способ для определения положения звезды во всякое время, рассмотрим точнее движение ее.

Так как в своих лекциях я не придерживаюсь того порядка, в котором явления были открыты, но того, в каком они кратчайшим образом могли бы быть открыты, то я и не начинаю с самого заметного явления, т. е. движения Солнца, а со звезд.

Звезды появляются после захода Солнца, движутся в продолжение всей ночи и исчезают перед восходом Солнца. Но что они на самом деле не уничтожаются, — доказывается более долгою их видимостью для более острого глаза и еще лучше наблюдениями их днем, часто даже простым глазом, напр. Венеру, при особенно благоприятных обстоятельствах, главным же образом помошью хороших зрительных труб, которыми можно следить днем за звездами до 5-й величины.

Одни звезды восходят, другие — заходят, за исключением некоторых, которые не заходят, а поднимаются и опускаются по кругам, все время

оставаясь над горизонтом. Число этих последних увеличивается по мере приближения к северу.

Большая часть звезд движется от левой руки к правой.

Звезды не изменяют относительного положения, а описывают лишь тот же самый путь по концентрическим кругам с одинаковою скоростью, так что полный оборот они все совершают в одно и то же время.

Это время называется *звездными сутками*, которые на 4 минуты короче солнечных суток. Круг, описываемый звездою в продолжение звездных суток, называется ее суточным кругом.

§ 12. Суточное движение звезд. Нахождение высоты полюса и полярного расстояния звезды по наблюдениям

трех высот ее и соответственных азимутов. К сделанным трем заключениям: 1) что звезды описывают круги, 2) что эти круги параллельны между собою, так что они имеют один и тот же центр-полюс и 3) что равные дуги (т. е. дуги, имеющие одинаковое число градусов) всех суточных кругов описываются в одинаковое время, можно прийти на основании наблюдений, нансяя на глобус положения звезд, определяемые этими наблюдениями.

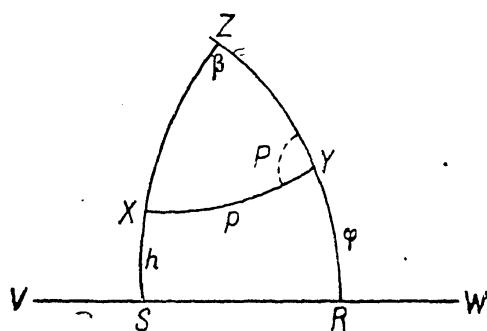
Но при таком нанесении уже и без того недостаточная точность наблюдений станет еще меньшею, поэтому лучше непосредственно подвергать наблюдения расчетам, что производится следующим образом.

Для определения круга на поверхности шара, как и на всякой поверхности, необходимо три точки, лучше всего отстоящих на 120° друг от друга, поэтому, прежде всего, требуется три достаточно удаленных друг от друга наблюдения, чтобы провести через них круг, и затем еще несколько наблюдений той же самой звезды, чтобы рассчитать, лежат ли эти наблюденные точки на том же круге.

Пусть будет X наблюденная звезда, VW — горизонт, Z — зенит, Y — полюс (северный), VS — азимут звезды (V есть произвольно взятая постоянная точка горизонта), XS — высота звезды, YR — высота полюса

Положим: $VS = A$; $VR = K$; $XS = h$; $YR = \varphi$

Мне нечего упоминать, что все эти дуги суть дуги больших кругов. Расстояние звезды до полюса $XY = p$. Величину p и требуется определить



Фиг. 5.

Если p при всех наблюдениях одно и то же, то путь, описываемый звездою, есть круг, коего центр есть полюс, и тогда первое заключение будет доказано.

Имеем: $RZ = SZ = 90^\circ$, угол XZY измеряется дугой SR , значит $\beta = K - A$; $XZ = 90^\circ - h$; $ZY = 90^\circ - \phi$, и будет:

$$\begin{aligned}\cos XZ &= \sin h; \quad \cos ZY = \sin \phi \\ \sin XZ &= \cos h; \quad \sin ZY = \cos \phi\end{aligned}$$

следовательно Сферическая тригонометрия дает для трех наблюдений звезды следующие три уравнения:

$$\cos p = \sin h \sin \phi + \cos h \cos \phi \cos(K - A) \quad (1)$$

$$\cos p = \sin h' \sin \phi + \cos h' \cos \phi \cos(K - A') \quad (2)$$

$$\cos p = \sin h'' \sin \phi + \cos h'' \cos \phi \cos(K - A'') \quad (3)$$

Данные, относящиеся к первому наблюдению, обозначены буквами без значков, ко второму — одним значком, к третьему — двумя значками.

Y есть собственно центр круга, проходящего через три наблюденных места звезды, что эта точка есть полюс мира, т. е., что это есть общий центр кругов, описываемых всеми звездами, — будет следовать лишь из дальнейшего.

Отсюда легко видеть, что для всех трех наблюдений p , ϕ и K имеют то же самое значение, почему я и не придал этим буквам значков для второго и третьего наблюдений. Эти три величины суть неизвестные, которые и надо найти, h , h' , h'' , A , A' , A'' — известные по трем наблюдениям, т. е. данные. Определяя эти три неизвестные p , ϕ и K , видим, что p выражается явно, ϕ и K находятся следующим образом.

Если вычесть уравнение (1) из (2), т. е. составить разность выражений

$$\begin{aligned}\cos p &= \sin h \sin \phi + \cos h \cos \phi \cos K \cos A + \cos \phi \cos h \sin K \sin A \\ \cos p &= \sin h' \sin \phi + \cos h' \cos \phi \cos K \cos A' + \cos \phi \cos h' \sin K \sin A'\end{aligned}$$

то получится

$$0 = (\sin h - \sin h') \sin \phi + [\cos h \cos K \cos A + \cos h \sin K \sin A - \cos h' \cos K \cos A' - \cos h' \sin K \sin A'] \cos \phi$$

отсюда

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\cos h \cos K \cos A + \cos h \sin K \sin A - \cos h' \cos K \cos A' - \cos h' \sin K \sin A}{\sin h' - \sin h}$$

Поступив также с (1) и (3) уравнениями, получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos h \cos K \cos A + \cos h \sin K \sin A - \cos h'' \cos K \cos A'' - \cos h'' \sin K \sin A}{\sin h'' - \sin h}$$

Вычтя одно из этих уравнений из другого и собрав члены, имеем

$$0 = \left[\frac{\cos h \cos A - \cos h' \cos A'}{\sin h' - \sin h} - \frac{\cos h \cos A - \cos h'' \cos A''}{\sin h'' - \sin h} \right] \cos K + \\ + \left[\frac{\cos h \sin A - \cos h' \sin A'}{\sin h' - \sin h} - \frac{\cos h \sin A - \cos h'' \sin A''}{\sin h'' - \sin h} \right] \sin K.$$

Отсюда следует

$$\operatorname{tg} K = \frac{(\sin h'' - \sin h') \cos h \cos A + (\sin h - \sin h'') \cos h' \cos A' +}{(\sin h' - \sin h'') \cos h \sin A + (\sin h'' - \sin h) \cos h' \sin A' +} \\ + \frac{(\sin h' - \sin h) \cos h'' \cos A''}{(\sin h - \sin h') \cos h'' \sin A''}$$

после чего легко находятся φ и p .

Если, кроме вышеуказанных трех наблюдений, сделано еще несколько, то, пользуясь ими, составим и еще несколько подобных приведенных выше уравнений, подставим в них найденные значения p , K и φ , и если окажется, что они им удовлетворяют, то отсюда будет следовать: что p , K , φ для всех точек пути звезды те же самые и, следовательно, суточный круг звезды на самом деле есть круг, коего центр есть постоянная точка Y ; если же мы, кроме того, найдем, что для всех звезд величины φ и K те же самые, то центр всех суточных кругов один и тот же, именно — полюс.

Остается еще доказать наблюдениями, что дуги всех суточных кругов пропорциональны временам описания их.

Это выполняется путем определения тригонометрически для каждого наблюдения угла P и проверки затем для всех наблюдений не только одной звезды, но и многих звезд, пропорциональны ли изменения этих углов времени.

Таким образом окажется, что со всею точностью, которую наблюдения допускают, имеет место все то, что было мною высказано выше.

§ 13. Меридиан. Экватор. Определение положения точки на небесной сфере по отношению к экватору.

Теперь для нас будут легко понятны следующие выражения:

Полюс есть та точка, около которой как центра обращаются звезды.

Вертикальный круг, проходящий через полюс, называется *меридианом* или *полуденным кругом*, отсюда выражения: полуденная плоскость, полу-

денная линия (эта последняя есть пересечение плоскости меридиана с плоскостью горизонта).

Точку пересечения горизонта с меридианом (в южной стороне) принимают за начало азимутов и считают градусы слева направо.

Часовыми кругами называются все большие круги, проходящие через полюсы, поэтому меридиан есть один из них. Угол между плоскостью часового круга и плоскостью меридиана называется *часовым углом*, его можно принимать и за сферический угол при полюсе.

Суточный круг есть всякий круг, имеющий полюс своим центром.

Суточный круг, отстоящий от полюса на 90° , называется *экватором*.

Полярное расстояние есть расстояние звезды до полюса, *экваториальное* — до экватора.

Чтобы получить общее представление обо всех этих точках и кругах, надо себе представить две небесные сферы: одну — неподвижную, другую — подвижную, которая и движется по первой.

Неподвижная сфера пересекается вертикальными кругами и альмукантаратами; к числу последних относится горизонт, к первым — меридиан, они разделяют друг друга на две равные и противоположные части. Кроме того, на этой же сфере надо вообразить вторую систему кругов, так же относящуюся к полюсу, как предыдущая к зениту.

Подвижная сфера имеет с неподвижной общий центр и вращается по неподвижной, причем прямая, проходящая от одного полюса к другому, служит осью. К этой сфере прикреплены звезды. Эта сфера, подобно неподвижной, пересечена системою кругов, из коих одни имеют своими полюсами полюсы мира, другие же проходят через оба полюса, взаимно пересекаясь в них.

Теперь легко разграничить системы, относящиеся к неподвижной и подвижной сферам.

I) Неподвижная небесная сфера

Круги, относящиеся к зениту

- 1) Вертикал (круг высоты).
- 2) Альмукантарат.
- 3) Горизонт.
- 4) Зенитное расстояние.
- 5) Высота.
- 6) Азимут (сферич. угол при зените).
- 7) Меридиан.
- 8) Точка юга.

Круги, относящиеся к полюсу

- 1) Часовой круг.
- 2) Суточный круг.
- 3) Экватор.
- 4) Полярное расстояние.
- 5) Экваториальное расстояние.
- 6) Часовой угол (сферич. угол при полюсе).
- 7) Меридиан.
- 8) Кульмирующая точка экватора.

II) Подвижная сфера

Круги, относящиеся к *полосу*

- 1) Круг склонения.
- 2) Параллели (экватору).
- 3) Экватор.
- 4) Полярное расстояние }
5) Склонение. }
6) Прямое восхождение.
7) Произвольный круг через точку равноденствия.
8) Точка весеннего равноденствия.

Склонение рассматривается по одну сторону экватора как величина положительная, по другую — как отрицательная. Экватор разделяет сферу на два полушария — северное и южное, сообразно чему и склонение различается на северное и южное, причем первое принимают за положительное.

Градусы по неподвижному экватору отсчитываются слева направо, начиная от 0 при меридиане; на подвижном прямом восхождении отсчитывается справа налево от произвольной линии (от круга, проведенного через точку весеннего равноденствия), принимаемой за нулевую. Этот способ счета справа налево происходит, вероятно, от того, что Солнце на подвижной сфере перемещается изо дня в день в этом направлении. Сверх того, он представляет то удобство, что при нем звезды проходят через меридиан по порядку их прямых восхождений, и если известно звездное время их прохождения через меридиан, то получится и прямое восхождение, при этом считается лишь 15° за 1 час и указывается время, когда проходит через меридиан начальная точка (0°) подвижного экватора.

§ 14. Полуденная труба или пассажный инструмент, его назначение и идея устройства.

Важнейший большой круг для теперешнего состояния Астрономии есть *меридиан*, прежде таковым был горизонт.

Является вопрос: *когда и где* проходят звезды через меридиан?

Каждая звезда должна 2 раза проходить через меридиан (большая часть звезд через горизонт не проходит совсем), эти моменты называют ее *кульминацией верхней и нижней*. Видна ли нижняя кульминация, — зависит от положения звезды на подвижной небесной сфере, верхняя всегда видна, если только видна сама звезда.

Прямое восхождение дает время, когда звезда приходит в меридиан. Обратное действие, которое становится возможным благодаря точности теперешних часов, и составляет то важное значение, которое имеет для нас меридиан, поэтому и прямое восхождение часто задается не в градусах, а в часах (получаемых делением числа градусов на 15).

Чтобы практически отметить плоскость меридиана, можно к неподвижным опорам подвесить 2 отвеса, расположив их так, чтобы обе нити их лежали в плоскости меридиана. Чтобы иметь возможность по желанию эти отвесы убирать и вновь вешать, можно на горизонтальной плоскости отметить две точки, над которыми они должны приходиться. Как только обе тени от нитей сливаются в одну, Солнце проходит через меридиан. Такой меридиан называется «филлярным», а также «филлярным иномоном», ибо им прежде пользовались для Солнца.

Несравненно точнее *стенной квадрант* с трубой, плоскость которого лежит в меридиане, но так как невозможно сделать плоскость столь хорошо, чтобы она не имела даже самых малейших неровностей, оказывающих влияние на точность наблюдений, то и этот инструмент обладает большими недостатками, как то видно по прямым восхождениям, наблюденным на здешней обсерватории Тоб. Mayer'ом, при сличении их с таковыми же, наблюденными Bradley'ем в Гриниче.

Кроме того, стенной квадрант состоит лишь из четверти круга, и в нем не исключается погрешность от эксцентричности.

Прямое восхождение наблюдается гораздо лучше специально для того предназначенным инструментом, называемым *пассажный инструмент* или *полуденная труба*.

Эта труба свободно вращается около горизонтальной оси, к которой она перпендикулярна. Ось должна быть в точности горизонтальна и в точности цилиндрична, что достигается с весьма большим совершенством механическим искусством.

При суждении о таком инструменте необходимо иметь в виду следующие условия:

1°) Труба должна быть в точности перпендикулярна цапфам; это проверяется переложением инструмента и визированием при обоих положениях на достаточно удаленный земной предмет. Если при обоих положениях труба в точности направляется на тот же предмет, то перпендикулярность совершенная, если же есть какое-либо отступление, то легко его исправить, когда кольцо, несущее сеть нитей инструмента, подвижное.

2°) Плоскость инструмента должна в точности совпадать с меридианом. Для этого необходимо, во-первых, чтобы ось была в точности горизонтальна и чтобы труба проходила через зенит. Горизонтальность оси проверяется *уровнем* (стеклянная бочкообразная; с весьма малою кривизною, трубка, заполненная спиртом, в которой плавает пузырек воздуха; чем кривизна меньше, тем уровень чувствительнее).

Здесь необходимо, чтобы даже при 1 секунде наклона пузырек получал заметное смещение.

Одна из цапф прибора может быть приподнята винтом, другая перемещаема в горизонтальной плоскости, так что оси может быть легко придано требуемое положение.

Если отступление от горизонтальности малое, то лучше его точно измерять и принимать в расчет, нежели действовать винтом, вследствие чего можно произвести еще большую противоположную погрешность.

Во-вторых, необходимо, чтобы труба проходила и через полюс. Для этого наблюдают верхнюю и нижнюю кульминацию, какой-либо звезды и измеряют время, употребляемое ею на описание того и другого полукруга. Если один из полукругов описывается в меньший промежуток, нежели другой, то плоскость, описываемая трубой, не проходит через полюс. По разности времен легко найти уклонение.

Но если труба инструмента не описывает целого круга, для чего здание должно иметь полную прорезь, и поэтому наблюдение обеих кульминаций невозможно, то уклонение определяется по соответствующим высотам, что, однако, далеко не столь точно.

3°) Нить должна лежать в самой плоскости меридиана, чтобы было безразлично через какую ее точку наблюдается прохождение, ибо невозможно двигать трубу инструмента вправо и влево. Наводя трубу на какой-либо земной предмет, замечают, остается ли он на нити при подъеме и опускании трубы.

Вторая нить должна пересекать первую посередине; но обыкновенно наблюдают немного выше или немного ниже точки пересечения нитей, ибо иначе значительная часть пути звезды была бы скрыта горизонтальною нитью.

Кроме главной нити, натягивают еще несколько, по возможности в равных промежутках, малые разности их определяются и принимаются в расчет при вычислениях.

Для нитей берут паутину из гнезда (кокона) или же те нити ее, на которых висит самая сеть, ибо нити самой сети слишком линки.

Нити должны быть сильно натянуты, чтобы они не провисали от влажности. Нити должны быть очень тонки, однако тонина их не должна переходить некоторой границы, ибо иначе ночью нити были бы плохо видны. Ночью необходимо нити освещать, что делается фонарем, свет которого пропускается через полуночную ось прибора внутрь трубы его и отражается устроенным для того зеркалом на нити. Поле кажется при этом светлым,

нити — темными, обратное имеет место, когда освещение производится перед нитями, как это устроено у некоторых инструментов Рейхенбаха.

4°) Главнейшее же условие, которому должен удовлетворять инструмент, состоит в том, чтобы цапфы, на которых он опирается, были бы вполне цилиндричны и чтобы он вращался на них как можно легче, чтобы они не истирались. Для этого его уравновешивают, т. е. ось у каждого конца подвешивается к одному из плеч рычага, которым она, при помощи противовеса, поддерживается, чтобы давление ее на цапфы уменьшалось; однако некоторое давление на цапфы должно оставаться, дабы инструмент покоялся именно на них.

Чтобы было удобно инструмент перекладывать, в здешней обсерватории с потолка опускается веревка с крюком, которой инструмент и приподнимается. Так как эта веревка опускается прямо по направлению зенита, то при наблюдениях она особым приспособлением убирается.

Наконец, чтобы труба не изгибалась от своего собственного веса, ее передний конец уравновешивается при помощи рычага, укрепленного на самой трубе.

§ 15. Наблюдения прохождений звезд. Цель таких наблюдений. Чтобы сделать более ясным способ определения места, где звезда проходит через меридиан, составим следующий чертеж (фиг. 6). Круг представляет меридиан; высота полюса того места, для которого чертеж составлен, есть ϕ , и самый чертеж показывает, как чередуются углы ϕ и $90^\circ - \phi$.

Пусть a есть звезда, z — ее зенитное расстояние, δ — ее склонение, тогда

$$\phi = \delta + z \quad (1)$$

Если северное склонение принимать положительным, то южное должно принимать отрицательным, поэтому если бы звезда находилась в a' , то было бы

$$\phi = z - \delta \quad (2)$$

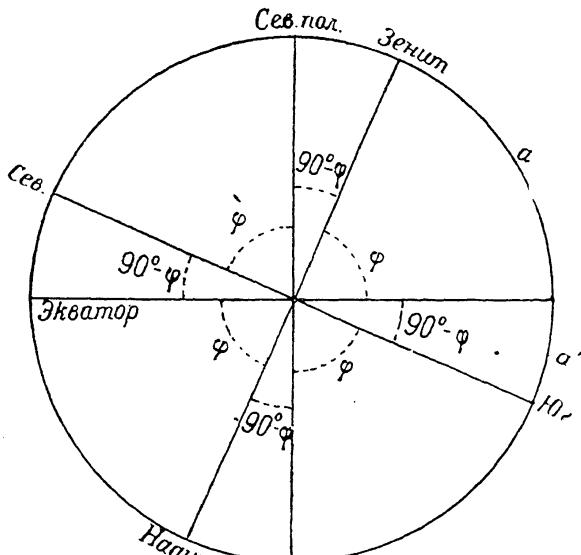
Очевидно, что полярное расстояние $= 90^\circ - \delta$ и что высота звезды в верхней кульминации есть

$$\left. \begin{aligned} H &= (90^\circ - \phi) + \delta \\ h &= \phi - (90^\circ - \delta) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и в нижней

если звезда проходит через меридиан по разные стороны от зенита; из уравнения (3) в этом случае следует:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = 90^\circ - \frac{H-h}{2} \\ \delta = \frac{H+h}{2} \end{array} \right\} \quad (4)$$



Фиг. 6.

Когда же звезда проходит через меридиан в обеих кульминациях по одну сторону от зенита, находясь в верхней кульминации между полюсом и зенитом, то будет:

$$\left. \begin{array}{l} H = \varphi + (90^\circ - \delta) \\ h = \varphi - (90^\circ - \delta) \end{array} \right\} \quad (3')$$

и следовательно:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = \frac{H+h}{2} \\ \delta = 90^\circ - \frac{H-h}{2} \end{array} \right\} \quad (4')$$

Из формулы (1) видно, что если измерена высота или зенитное расстояние звезды, склонение которой известно, то найдется высота полюса и обратно.

Но, чтобы найти высоту полюса непосредственно, предпочтительнее наблюдать звезду в обеих ее кульминациях и воспользоваться формулой (4) или (4'). Чтобы звезда была видна в верхнем и нижнем прохождении, необходимо, чтобы полярное расстояние было меньше φ. В верхнем прохождении видны все звезды, коих полярное расстояние меньше $180^\circ - \varphi$.

Чтобы наблюдать высоту в момент прохождения, служит стенной квадрант, уже описанный выше, или еще лучше меридианный круг. На Гриничской обсерватории таковой закреплен к стене подобно стенному квадранту, но только составляет полный круг.

В здешней обсерватории находится изготовленный Рейхенбахом инструмент, совершенно подобный пассажному. На одном из концов его оси укреплен и вращается вместе с осью круг, несущий 4 индекса (отстоящих на 90° друг от друга), называемый репетирным, внутри другого неподвижного круга, на котором нанесено градусное деление. У этого инструмента

мента, как и у стенного квадранта, надо обращать внимание на то, чтобы труба была в точности параллельна алидаде, так что, когда визируют на зенит, индекс показывал бы 0.

Если это не имеет места, то отклонение называется *коллимационной погрешностью*, которую тогда необходимо точно знать и принимать во внимание при вычислениях.

Ее легко найти, если инструмент можно перекладывать; если отсчет при одном положении не согласуется в точности с отсчетом при другом, то разность отсчетов дает двойную коллимационную ошибку.

Другой весьма хороший инструмент, принадлежащий нам, изготовлен Репсольдом в Гамбурге.

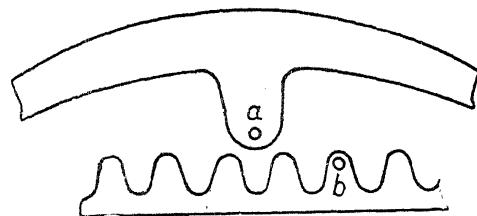
Весьма чувствительный уровень его прикреплен к самой трубе. Трубу ставят сперва так, чтобы пузырек был посередине, и производят отсчет по кругу, затем визируют звезду. Таким образом получается всякий раз точно высота звезды независимо от того, осталось ли горизонтальное положение прибора тем же самым.

Надо лишь каждые два часа проверять первый отсчет, ибо в течение такого времени положение заметно не изменяется.

В инструменте Рейхенбаха неизменность коллимационной погрешности зависит от параллельности уровня диаметру алидадного круга и, следовательно, не может быть настолько постоянной, как у Репсольда, у которого требуется лишь, чтобы ножки уровня находились в постоянном отношении к длине его, что будет иметь место и при изменении температуры, если только уровень хорошей работы.

Но если бы в это вкрадась ошибка, то можно ее исключить, если при проверке горизонтальности трубы перекладывать уровень и смотреть, занимает ли его пузырек прежнее положение. Здесь необходимо также, чтобы уровень был точно параллелен оптической оси трубы. Чтобы определить здесь коллимационную ошибку, надо перекладывать трубу.

Градусное деление у этого инструмента весьма точное через $5'$, отсчет производится микроскопом, в котором для отсчета секунд сделано следующее приспособление: внутри трубы микроскопа, на конце небольшого неподвижного выступа, сделана маленькая дырка *a* (Фиг. 7); под выступом движется рейка с зубцами, в одном из которых сделана дырка *b*; рейка перемещается микрометрическим винтом вперед и назад на один зубец при каждом обороте



Фиг. 7.

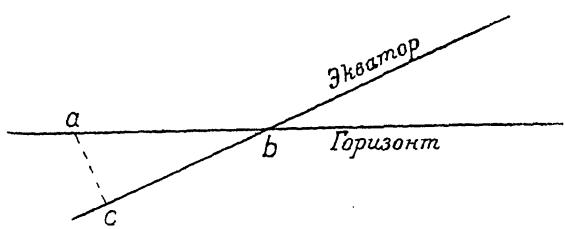
винта. Головка винта разделена на 60 частей, и надо пять оборотов винта, чтобы перевести визирное отверстие с одного деления круга на другое.

Если обе дырки стоят точно одна над другой, то указатель микрометрического винта показывает 0. Если надо произвести отсчет и дырка *a* не приходится точно над делением круга, то перемещают рейку и с нею дырку *b* до тех пор, пока эта дырка не придется в точности над делением круга, тогда число зубцов между *a* и *b* покажет число оборотов винта, по головке же его отсчитывают доли оборота и таким образом получают секунды и даже доли их.

§ 16. О восходе и заходе звезд. Круг, который по своей для нас важности следует за меридианом, есть *горизонт*, он пересекается с экватором в точках *O* и *W*, что легко себе представить. Звезда, склонение которой равно 0° , восходит в точке *Ost* и идет ровно $\frac{1}{4}$ суток до меридиана.

Чтобы найти время восхода других звезд, составим следующую фиг. 8.

Фиг. 8.



Вообразим звезду *a*, время восхода которой надо определить, и ее проекцию *c* на экватор. Эта точка будет проходить через меридиан одновременно с *a*. Когда *a* пришла на горизонт, то точке *c* остается еще пройти путь *cb*, чтобы прийти в *b* на горизонт. От *b* до меридиана надо $\frac{1}{4}$ суток.

Значит, от *c* до меридиана надо $\frac{1}{4}$ суток $\rightarrow cb$, но так как *c* вступает на меридиан одновременно с звездою *a*, то $(\frac{1}{4} \text{ суток} \rightarrow cb)$ есть то время, в продвижении которого звезда идет от горизонта до меридиана.

Величину *bc* легко вычислить. Так как *b* есть полюс меридианного круга, то угол *abc* равен высоте экватора для данного места, т. е. $90^\circ - \phi$, если обозначить через ϕ — высоту полюса. Склонение *ac* = δ , таким образом в прямоугольном сферическом треугольнике *abc* известны эти части, требуется найти остальные. Обозначая *ab* через *A*, имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\sin \delta}{\sin (90^\circ - \phi)} &= \frac{\sin \delta}{\cos \phi} = \sin A \\ \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} (90^\circ - \phi)} &= \operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} \phi = \sin bc \\ \sin bac &= \frac{\sin \phi}{\cos \delta} = \cos z\end{aligned}$$

где через z обозначен угол, образуемый суточным кругом звезды с горизонтом, т. е. $90^\circ - bac$. Дуга $A = ab$ называется *amplitudo ortiva* (амплитуда восхода), она мнимая (синус ее больше 1), если $\cos \phi < \sin \delta$ или если высота экватора $<$ склонения.

Часть суточного круга, описываемая звездою от восхода до кульминации, называется *arcus semidiurnus* (полудневная дуга).

Отсюда становится понятной также разница между терминами: *accensio recta* (прямое восхождение) и *accensio obliqua* (наклонное восхождение), а именно: древние относили все небесные явления к такому месту земного шара, где высота полюса равна нулю. В таком месте восход звезды происходит под прямым углом к горизонту одновременно с соответствующей звезде точкой экватора.

При том же положении сферы, при котором высота полюса равна высоте полюса данного места, точка экватора восходит не одновременно с звездою, ибо восход происходит наклонно, что и называлось *accensio obliqua*.

Конечно, все эти точки должны быть определены тем, что задается их расстояние от постоянной точки (точка весеннего равноденствия).

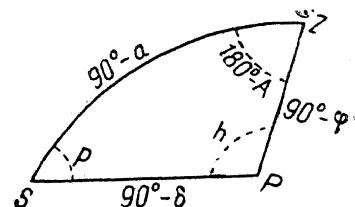
Разность между *accensio recta* и *accensio obliqua*, т. е. дуга bc , называлась *differentia accentualis*, ее надо придавать к $\frac{1}{4}$ суткам, когда надо знать время восхода звезды.

Совершенно то же относится и ко времени захода. Здесь A называется *amplitudo occidiva*, остальные дуги: *descensio recta*, *descensio obliqua*, *differentia descensionalis*.

Ясно, что, вместо звезды, можно рассматривать и Солнце, но только его склонение постепенно изменяется.

§ 17. Полярный треугольник. Основные задачи о суточном движении звезд. В совершенно общем виде связь между звездою и двумя постоянными точками небесной сферы — зенитом и полюсом — может быть установлена следующим образом:

Пусть Z есть зенит, P — полюс (северный) S — звезда, тогда ZS — зенитное расстояние, равное $90^\circ - a$, $ZP = 90^\circ - \phi$; $PS = 90^\circ - \delta$, $ZPS = h$ — часовой угол, $SZP = 180^\circ - A$, $ZSP = p$ — паралактический угол, кроме того: a — высота звезды, ϕ — высота полюса, δ — склонение, h , как уже сказано, — часовой угол, A — азимут.



Фиг. 9.

Соотношения между тремя углами и тремя сторонами этого треугольника, т. е. между шестью его элементами, легко получаются из сферической тригонометрии, и будет $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ задач, которые помошью ее решаются.

Наиболее применимыми из них являются следующие задачи:

1°) Даны: высота полюса, склонение и часовой угол, т. е. ZP, SP, SPZ ; требуется найти высоту и азимут звезды, напр. чтобы найти звезду, для которой известны склонение, время прохождения, а также известна высота полюса в месте наблюдений.

По основной формуле (I) будет

$$\sin ZS = \cos PS \cdot \cos ZP + \sin PS \cdot \sin ZP \cdot \cos SPZ$$

или

$$\cos a = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos h$$

Затем по основной формуле (III):

$$\cos ZPS \cdot \cos ZP = \cotg PS \cdot \sin ZP - \cotg SZP \cdot \sin ZPS$$

следовательно

$$\cotg SZP = \frac{\cotg PS \cdot \sin ZP - \cos ZPS \cdot \cos ZP}{\sin ZPS}$$

или

$$\cotg(180^\circ - A) = \frac{\operatorname{tg} \delta \cos \varphi - \cos h \cdot \sin \varphi}{\sin h}$$

т. е.

$$\cotg A = \frac{\cos h \sin \varphi - \operatorname{tg} \delta \cos \varphi}{\sin h}$$

2°) Даны: ZS, PZ, SZP , ищутся δ и h , иначе, по высоте и азимуту, наблюдаемым вместе с временем, найти прямое восхождение и склонение звезды, зная высоту полюса места наблюдения.

По формуле (I) имеем

$$\cos SP = \cos ZS \cdot \cos ZP + \sin ZS \cdot \sin ZP \cdot \cos SZP$$

или

$$\cos \delta = \sin a \sin \varphi + \cos a \cos \varphi \cos(180^\circ - A)$$

т. е.

$$\cos \delta = \sin a \sin \varphi - \cos a \cos \varphi \cos A$$

Затем по формуле (III)

$$\cos SZP \cdot \cos ZP = \cotg SZ \cdot \sin ZP - \cotg SPZ \cdot \sin SZP$$

Значит.

$$\cotg SPZ = \frac{\cotg SZ \cdot \sin ZP - \cos SZP \cdot \cos ZP}{\sin SZP}$$

т. е.

$$\cotg h = \frac{\operatorname{tg} a \cos \phi + \cos A \sin \phi}{\sin A}$$

стоит только придать h ко времени наблюдения, то получится время кульминации, а значит, и прямое восхождение.

3°) По трем сторонам SZ , ZP , PS найти угол $ZPS = h$, заключенный между сторонами ZP и PS .

Здесь даны: высота звезды, высота полюса и склонение, надо найти часовой угол, иначе, зная высоту полюса для данного места и склонение звезды, по наблюдению высоты звезды найти время ее прохождения.

По формуле (I) имеем

$$\cos SZ = \cos SP \cdot \cos ZP + \sin SP \cdot \sin ZP \cdot \cos ZPS$$

т. е.

$$\sin a = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cdot \cos h$$

$$\cos h = \frac{\sin a - \sin \delta \sin \phi}{\cos \delta \cdot \cos \phi}$$

Эта формула может служить и для определения времени.

По тем же данным можно найти и SZP , чтобы провести полуденную линию. При этом нет надобности пользоваться при наблюдении часами, а нужно только заметить тот вертикальный круг, в котором наблюдение произведено, и соединить его с найденным углом.

Имеем

$$\cos SP = \cos SZ \cos ZP + \sin SZ \sin ZP \cos SZP$$

или

$$\sin \delta = \sin a \sin \phi + \cos a \cos \phi \cos SZP$$

$$\cos SPZ = \frac{\sin \delta - \sin a \sin \phi}{\cos a \cos \phi}$$

§ 18. Определение высоты полюса и склонения звезды по трем высотам ее и промежуткам времени между ними. Если желательно соединить наблюдения нескольких мест одной и той же звезды или наблюдения нескольких звезд, то пользуются формулами, которые будут показаны ниже.

Здесь, как легко видеть, имеется бесчисленное множество задач, но лишь некоторые из них применимы для практики.

Нижеследующие выделяются если не своею применимостью, то математическим изяществом.

Задача 1. Когда речь идет об одной задаче, то достаточно одного зенитного расстояния, чтобы найти часовой угол h , если высота полюса и склонение известны. Но если это не имеет места, то надо знать или две высоты, или три, и промежутки времени между ними, смотря по тому, требуется ли определить только высоту полюса, или также и склонение, таким образом имеем задачу:

Найдены три высоты той же самой звезды и промежутки времени между ними, требуется определить высоту полюса и склонение звезды.

Эта задача пользовалась прежде большою известностью. Meyer занялся ею впервые в «Трудах Петербургской Академии». Последняя записка об этом предмете находится у Bode, в «Supplementband», и принадлежит v. Hämf'у из Marburg'a. Однако эта задача совершенно не имеет практического значения, ибо если наблюдение производится плохим или подвижным инструментом, то не получается достоверного результата; если же у кого-либо имеется в данном месте хороший инструмент, то надо полагать, что склонение звезды ему известно по более надежным наблюдениям и что высота полюса определена им самим по более точным способам.

Решение. Пусть три высоты той же самой звезды суть a, a', a'' , промежутки времени между ними суть e и f . Если наблюдалась звезда до прохождения, то предполагается, что высота a , соответствующая углу h , наибольшая, a' меньше a , a'' еще меньше.

Имеем:

$$\sin a = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos h$$

$$\sin a' = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos(h + e)$$

$$\sin a'' = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos(h + f)$$

а так как

$$\cos(h + e) = \cos h \cos e - \sin h \sin e$$

$$\cos(h + f) = \cos h \cos f - \sin h \sin f$$

то будет:

$$\sin a = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos h$$

$$\sin a' = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos h \cdot \cos e - \cos \phi \cos \delta \sin h \cdot \sin e$$

$$\sin a'' = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos h \cdot \cos f - \cos \phi \cos \delta \sin h \cdot \sin f$$

ПОЛОЖИМ:

$$\sin \phi \sin \delta = x; \quad \cos \phi \cos \delta \cos h = y; \quad \cos \phi \cos \delta \sin h = z$$

тогда будет:

$$\sin a = x + y \quad (a)$$

$$\sin a' = x + y \cos e - z \sin e \quad (b)$$

$$\sin a'' = x + y \cos f - z \sin f \quad (c)$$

Отсюда легко найти x , y и z . Так, вычитая (b) из (a) и (c) из (a), имеем:

$$\sin a - \sin a' = y(1 - \cos e) + z \sin e \quad (\alpha)$$

$$\sin a - \sin a'' = y(1 - \cos f) + z \sin f \quad (\beta)$$

Умножив (α) на $\sin f$ и вычтя из (β), умноженного на $\sin e$, имеем

$$\begin{aligned} &(\sin a - \sin a'') \sin f - (\sin a - \sin a') \sin f = \\ &= y[(1 - \cos f) \sin e - (1 - \cos e) \sin f] \end{aligned}$$

таким образом будет

$$y = \frac{(\sin a - \sin a'') \sin e - (\sin a - \sin a') \sin f}{\sin e - \sin f + \sin(f - e)}.$$

По уравнению (a):

$$x = \sin a - y$$

значит

$$x = \frac{\sin a \cdot \sin(f - e) - \sin a' \sin f + \sin a'' \sin e}{\sin(f - e) - \sin f + \sin e}$$

по x и y легко найти z , так как

$$z = \frac{x + y \cos e - \sin a'}{\sin e} = \frac{x + y \cos f - \sin a''}{\sin f}.$$

Но

$$\frac{z}{y} = \operatorname{tg} h$$

по h находится $(h + e)$ и $(h + f)$ — остальные два часовых угла.

Затем

$$x + \frac{y}{\cos h} = \cos(\varphi - \delta)$$

$$-x + \frac{y}{\cos h} = \cos(\varphi + \delta)$$

Но

$$\cos \frac{1}{2}(\varphi - \delta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\varphi - \delta) + \sin \frac{1}{2}(\varphi - \delta) \sin \frac{1}{2}(\varphi - \delta) = \cos \delta$$

откуда, следовательно, найдется δ и затем φ .

Я не выполняю всех этих вычислений, ибо они не имеют практического приложения.

§ 19. Определение высоты полюса и поправки часов по трем звездам, наблюденным в одной высоте.

(1) Задача 2. Имея инструмент с плохо или совсем не разделенным кругом, если только он стоит прочно, можно определить весьма точно высоту полюса следующим образом.

Наблюдают 3 звезды, которые в разное время имеют ту же самую высоту, и замечают моменты, когда они эту высоту имеют.

(2) Если эти времена не сильно различаются между собою, то нет надобности даже в том, чтобы часы были отличного качества. Склонения и прямые восхождения звезд должны быть известны.

По этому способу могут быть определены не только высота полюса, но и самая высота звезд и времена их прохождения.

Пусть буквы без значка относятся до 1-й, с одним значком до 2-й, и с двумя значками до 3-ей звезды, тогда, подобно предыдущему, имеем:

$$\sin a = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos h \quad (1)$$

$$\sin a = \sin \varphi \sin \delta' + \cos \varphi \cos \delta' \cos (h + e) \quad (2)$$

$$\sin a = \sin \varphi \sin \delta'' + \cos \varphi \cos \delta'' \cos (h + f) \quad (3)$$

Чтобы эти уравнения допускали решение, надо, чтобы в них было лишь три неизвестных, именно φ , a и h . Величины e и f суть разности часовых углов звезд в моменты достижения ими высоты a .

Эти разности определяются по временам наблюдения, как то видно по приводимому ниже решению этой задачи, данному Гауссом.

Пусть $\alpha, \alpha', \alpha''$ — прямые восхождения 3 звезд, $\delta, \delta', \delta''$ — их склонения, считая южные отрицательными, k — поправка часов относительно звездного времени, принимаемая одною и тою же для всех трех моментов наблюдений. Если часы не звездные, то надо, соответственно, исправить времена $\theta, \theta', \theta''$ моментов достижения звездами высоты a , φ — высота полюса места наблюдения.

Очевидно, что величины

$$\theta + k - \alpha; \quad \theta' + k - \alpha'; \quad \theta'' + k - \alpha''$$

по превращении в дуги представляют три часовых угла, и следовательно, полагая

$$\theta - \alpha = t; \quad \theta' - \alpha'' = t'; \quad \theta'' - \alpha' = t''$$

будем иметь следующие три уравнения:

$$\sin a = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (t - k) \quad (I)$$

$$\sin a = \sin \varphi \sin \delta' + \cos \varphi \cos \delta' \cos (t' - k) \quad (II)$$

$$\sin a = \sin \varphi \sin \delta'' + \cos \varphi \cos \delta'' \cos (t'' - k) \quad (III)$$

Вычтя (I) из (II), после простого преобразования, основанного на формулах

$$\begin{aligned} & 2 \cos \delta \cos(t - k) - 2 \cos \delta' \cos(t' - k) = \\ & = [\cos(t - k) + \cos(t' - k)] \cdot (\cos \delta - \cos \delta') + \\ & + [\cos(t - k) - \cos(t' - k)] \cdot (\cos \delta + \cos \delta') \\ & \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y) \\ & \cos x - \cos y = 2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(y - x) \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} & 2 \sin \varphi \sin \frac{1}{2}(\delta' - \delta) \cos \frac{1}{2}(\delta' + \delta) = \\ & 2 \cos \varphi \cos \left[\frac{1}{2}(t + t') - k \right] \cos \frac{1}{2}(t' - t) \sin \frac{1}{2}(\delta' - \delta) \sin \frac{1}{2}(\delta' + \delta) + \\ & + 2 \cos \varphi \sin \left[\frac{1}{2}(t + t') - k \right] \sin \frac{1}{2}(t' - t) \cos \frac{1}{2}(\delta' - \delta) \cos \frac{1}{2}(\delta' + \delta) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi = & \cos \left[\frac{1}{2}(t + t') - k \right] \cos \frac{1}{2}(t' - t) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta' + \delta) + \\ & + \sin \left[\frac{1}{2}(t + t') - k \right] \cdot \sin \frac{1}{2}(t' - t) \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\delta' - \delta) \end{aligned}$$

Определив A' и B' так, чтобы было:

$$\left. \begin{aligned} A' \sin B' &= \sin \frac{1}{2}(t' - t) \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\delta' - \delta) \\ A' \cos B' &= \cos \frac{1}{2}(t' - t) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta' + \delta) \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

и положив

$$\frac{1}{2}(t + t') - B' = C'$$

напишем предыдущее уравнение в виде

$$\operatorname{tg} \varphi = A' \cos(C' - k) \quad (IV)$$

Совершенно таким же образом или просто заменив величины второго наблюдения величинами третьего и положив

$$\left. \begin{aligned} A'' \sin B'' &= \sin \frac{1}{2}(t'' - t) \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\delta'' - \delta) \\ A'' \cos B'' &= \cos \frac{1}{2}(t'' - t) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta'' + \delta) \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

и

$$\frac{1}{2}(t + t') - B'' = C''$$

получим

$$\operatorname{tg} \varphi = A'' \cos(C'' - k) \quad (\text{V})$$

Из уравнений (IV) и (V) находим φ и k , а именно будет

$$A' \cos(C' - k) = A'' \cos(C'' - k)$$

следовательно

$$\begin{aligned} & (A'' - A') \cos\left[\frac{1}{2}(C' + C'') - k\right] \cos\frac{1}{2}(C'' - C') = \\ & = (A' + A'') \sin\left[\frac{1}{2}(C' + C'') - k\right] \cdot \sin(C'' - C') \end{aligned}$$

Положив теперь

$$\frac{A'}{A''} = \operatorname{tg} \xi.$$

так что

$$\frac{A'' - A'}{A'' + A'} = \operatorname{tg}(45^\circ - \xi)$$

и, определяя ψ равенством

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \xi) \cot\frac{1}{2}(C'' - C') = \operatorname{tg} \psi$$

получим

$$k = \frac{1}{2}(C' + C'') - \psi$$

после чего найдется φ из уравнений (IV) или (V).

По найденной высоте полюса и часовым углам можно, пользуясь формулами (I), (II), (III), вычислить высоты звезд, которые должны быть равными для всех трех наблюдений.

Я замечу еще следующее:

1) Если по равенствам

$$A \sin B = M \quad A \cos B = N$$

определяются величины A и B , то применяют формулы:

$$\operatorname{tg} B = \frac{M}{N} \quad A = \frac{M}{\sin B} = \frac{N}{\cos B}$$

Первое выражение следует брать, когда M больше N , в обратном случае — второе; при определении B по его тангенсу, безразлично, взять ли этот угол в 1-й или 3-й четверти, когда тангенс положительный, во 2-й или 4-й — когда отрицательный. Этот угол берут так, чтобы A было положительное.

2) То же относится и до $\operatorname{tg} \psi$, угол ψ надо брать между $+90^\circ$ и -90° , чтобы $\operatorname{tg} \psi$ был положительный, предполагая, что наблюдения производятся в северном полушарии. Для южного — наоборот.

3) Простое исследование показывает, что при обозначении через λ , λ' , λ'' — трех азимутов звезд, считаемых от точки юга по направлению суточного движения, ошибке в Δ временных секунд при первом наблюдении соответствует погрешность

$$\frac{\Delta}{2} \cdot \frac{\sin \lambda \sin \frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda')}{\sin \frac{1}{2}(\lambda' - \lambda) \sin \frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda)}$$

секунд в определении времени и

$$\frac{15 \Delta}{2} \cdot \frac{\sin \lambda \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(\lambda'' + \lambda')}{\sin \frac{1}{2}(\lambda' - \lambda) \sin \frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda)}$$

градусных секунд в высоте полюса¹, на эти величины изменяются k и φ , если касание (нити звездою) наблюдено слишком рано. Выражения влияния погрешностей во времени второго и третьего наблюдения те же самые, стоит только λ заменить через λ' и λ'' . Впрочем, так как высота первой звезды в Δ временных секунд уменьшается на $15 \Delta \sin \lambda \cos \varphi$ дуговых секунд, то влияние погрешности может быть выражено еще проще.

Если бы для 1-й звезды оказалось, что в тот момент, когда ее высота представлялась совпадающей с установленной на инструменте, она на самом деле была на D секунд больше, то k окажется на

$$\frac{D}{2} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\lambda'' + \lambda')}{2 \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(\lambda' - \lambda) \sin \frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda)}$$

секунд больше истинного своего значения и φ — на

$$\frac{D}{2} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(\lambda'' + \lambda')}{\sin \frac{1}{2}(\lambda' - \lambda) \sin \frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda)}$$

меньше истинного.

Отсюда следует, что необходимо обращать внимание, чтобы ни один из синусов дуг $\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda)$, $\frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda)$, $\frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda')$ не был бы слишком малым, поэтому звезды надо выбирать так, чтобы они достигали одинаковой высоты при азимутах, возможно близких к противоположным. Все звезды, высоты коих изменяются медленно, столь же пригодны, как

¹ Вывод этих формул можно найти в книге v. F. Brünnow «Lehrbuch der Sphärischen Astronomie», р. 800 (Прим. перев.).

и те, высоты коих изменяются быстро, поэтому охотно берут звезды близ кульминации и полярную звезду.

К наблюдению надо подготовиться. Подробнее об этом можно найти у Zach'a в «Monatliche Correspondenz» (Bd. 18, 1808, p. 277), где также приведен подробно привыченный пример.

В предыдущем решении, как видно, необходимо, чтобы прямые восхождения звезд или, по крайней мере, разности их были известны. После того как h найдено, станут известны $h + e$ и $h + f$, т. е. при известных прямых восхождениях время кульминации, как первой, так и остальных двух звезд.

Исключение неизвестных может быть выполнено и следующим образом: вычитая (2) из (1), получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos h (\cos \delta' \cos e - \cos \delta) - \sin h \cos \delta' \sin e}{\sin \delta - \sin \delta'} \quad (a)$$

точно так же, вычитая (3) из (1), получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos h (\cos \delta'' \cos f - \cos \delta) - \sin h \cos \delta'' \sin f}{\sin \delta - \sin \delta''} \quad (b)$$

Положив теперь:

$$\begin{array}{ll} \cos \delta' \cos e - \cos \delta = m' & \cos \delta'' \cos f - \cos \delta = m'' \\ \cos \delta' \sin e = n' & \cos \delta'' \sin f = n'' \\ \sin \delta - \sin \delta' = q' & \sin \delta - \sin \delta'' = q'' \end{array}$$

имеем на основании уравнений (a) и (b):

$$\frac{m' \cos h - n' \sin h}{q'} = \frac{m'' \cos h - n'' \sin h}{q''}$$

иначе:

$$P \cos h + Q \sin h = 0$$

причем положено:

$$\frac{m'}{q'} - \frac{m''}{q''} = P; \quad \frac{n''}{q''} - \frac{n'}{q'} = Q$$

Уравнение (c) решается по указанному вначале приему, вводя вспомогательный угол β уравнением

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{Q}{P}$$

тогда

$$P \cos h + Q \sin h = \frac{Q}{\sin \beta} \cos(\beta - h) = \frac{P}{\cos \beta} \cos(\beta - h)$$

Уравнивая эту величину нулю, имеем

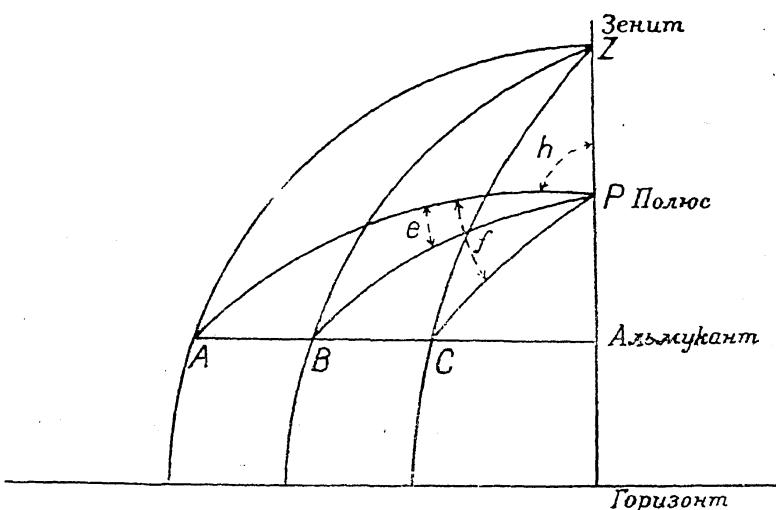
$$\cos(\beta - h) = 0$$

следовательно

$$\beta - h = 90^\circ, \quad \text{т. е.} \quad h = \beta - 90^\circ$$

или

$$\beta - h = 270^\circ \quad h = \beta - 270^\circ$$



Фиг. 10.

Для нахождения же угла β имеем формулу

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{Q}{P} = \\ &= \frac{\cos \delta' \cos e (\sin \delta - \sin \delta'') - \cos \delta'' \cos f (\sin \delta - \sin \delta') + \cos \delta (\sin \delta'' - \sin \delta')}{\cos \delta' \sin e (\sin \delta - \sin \delta'') - \cos \delta'' \sin f (\sin \delta - \sin \delta')} \end{aligned}$$

Зная h и ϕ , стоит только подставить их значения в формулы (1), (2) и (3), то найдется $\sin a$.

§ 19а. Геометрическое решение той же задачи. С геометрической точки зрения, задача состоит, в сущности, в том, чтобы через 3 звезды, лежащих на том же альмукантарете, провести круг и найти его центр — зенит.

Если желательно решить задачу действительно геометрически, то надо поступить с наблюдениями так, как будто бы все 3 звезды были наблюдены одновременно. Этого легко достигнуть, если, вместо настоящих звезд, взять воображаемые, у которых прямые восхождения настолько меньше действительных, сколько прошло времени между наблюдениями, тогда задача ставится следующим образом:

Пусть Z есть зенит, P — полюс, A, B, C — приведенные, как сказано, места звезд на том же альмукантарете (фиг. 10).

Дуги AZ , BZ , CZ суть дуги вертикалов и равны между собою, величина их не задана.

Дуги: $AP = 90^\circ - \delta$, $BP = 90^\circ - \delta'$; $CP = 90^\circ - \delta''$, и углы $APB = e$ и $APC = f$ известны.

Угол $ZPA = h$ и дугу $ZP = 90^\circ - \varphi$ требуется найти, иными словами — требуется решить треугольник ZPC , но в нем известно лишь $CP = 90^\circ - \delta''$, поэтому берем два треугольника ZPB и ZPA в помощь.

Стороны $AZ = BZ = CZ$, значит имеем три значения одной и той же величины, что доставит два уравнения. Найдя из этих уравнений две пока неизвестные величины h и ZP , получим необходимые для решения треугольника ZPC элементы. Этот треугольник доставит вместе с тем величину CZ , дающую высоту звезды, как показано выше при аналитическом решении. Подробности даны в статье Гаусса в «Monatliche Correspondenz» (1808, August).

При пользовании этим способом определения широты места необходим хороший выбор звезд. К наблюдениям подготавляются заранее и повторяют их с различными звездами.

Можно наблюдать и большее число звезд, но тогда надо действовать еще методичнее. Нужные для вычислений формулы дал Gerling в своей диссертации: «Problema astronomicum elevationem Poli tempusque determinandi per equales stellarum fixarum altitudines modo indirecto solvere docet» (1817).

Gerling принимает, что высота полюса для данного места и время приблизительно известны и что по наблюдениям трех равных высот звезд желательно определить их точнее, для этого он применяет наш способ.

Способ этот состоит в общем в том, что по приближенно известным значениям φ и h , $h + e$ и $h + f$ вычисляют высоты a , a' , a'' звезд по вышеприведенным формулам (1), (2), (3). Затем составляют выражения изменений этих высот da , da' , da'' , зависящих от φ и h , принимая в формуле для $\sin a$, $\sin a'$, $\sin a''$ величины φ и h за переменные; присовокупив затем к трем высотам эти их изменения, уравнивают полученные выражения высот:

$$a + \Delta a = a + \Delta a' = a + \Delta a''.$$

Из полученных уравнений находят величины $d\varphi$ и dh и исправляют ими приближенные значения φ и h , т. е. высоты полюса и времени.

Способ этот основан на том, что когда известно, что искомые значения φ и h весьма близки к принятым приближенным их значениям, то

можно рассматривать поправки вычисленных высот как дифференциалы, т. е. выражать их через дифференциалы $d\phi$ и dh формулами вида:

$$\begin{aligned}da &= \beta d\phi + \gamma dh \\da' &= \beta' d\phi + \gamma' dh \\da'' &= \beta'' d\phi + \gamma'' dh\end{aligned}$$

в которых коэффициенты $\beta, \gamma, \beta', \gamma', \beta'', \gamma''$ зависят от положения звезд и принятых значений ϕ и h , по которым они и определяются, именно будет:

$$\begin{aligned}\sin a &= \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos h \\da &= \frac{\cos \phi \sin \delta - \sin \phi \cos \delta \cos h}{\cos a} \cdot d\phi - \frac{\cos \phi \cos \delta \sin h}{\cos a} \cdot dh\end{aligned}$$

следовательно:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\cos \phi \sin \delta - \sin \phi \cos \delta \cos h}{\cos a} \\ \gamma &= - \frac{\cos \phi \cos \delta \sin h}{\cos a}\end{aligned}$$

выражение γ весьма удобно для вычисления по логарифмам, выражению β может быть придан удобный вид введением вспомогательного угла: пусть будет

$$\operatorname{tg} A = \cotg \delta \cos h$$

тогда

$$\beta = \frac{\sin \delta}{\cos a \cos A} \cos(\phi + A)$$

Вычислив высоты по принимаемым за известные значениям ϕ и h , по вышеприведенным формулам, дающим их синусы, а именно:

$$\sin a = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos h$$

причем для логарифмического вычисления вводится тот же вспомогательный угол A , так что будет

$$\sin a = \frac{\sin \delta}{\cos A} \cdot \sin(\phi + A)$$

по $\sin a$ находят a , придают к нему da и делают то же самое и для других двух высот и, присовокупив к ним da' и da'' , уравнивают между собою все три полученные величины:

$$a + \beta d\phi + \gamma dh = a' + \beta' d\phi + \gamma' dh = a'' + \beta'' d\phi + \gamma'' dh$$

Из этих двух уравнений находят значения $d\phi$ и dh , которые и придают к приближенным значениям ϕ и h .

На примере это станет яснее:

2 августа 1808 г. на Геттингенской обсерватории наблюдены Галлеевским секстантом три равные высоты звезд:

α Andromedae по звездным часам.	21 ^u	33 ^m	26 ^c
α Ursae minoris »	»	21	47
α Lyrae »	»	22	5

В этот день положение звезд было:

α Andromedae: $AR = 23^u 58^m 33.33$; $\delta = 28^\circ 2' 14.8''$
α Ursae minoris: $0 55 4.70$; $\delta' = 88 17 5.7$
α Lyrae: $18 30 28.96$; $\delta'' = 38 37 6.6$

Ход часов в точности совпадал с звездным временем, но показываемое ими время не было верно, а надо было вычитать из него приблизительно 11 минут. Высота полюса обсерватории около $51^\circ 32'$.

Таким образом приближенно будет:

$$\left. \begin{array}{l} h = 39 1' 49.95 \\ h + e = 49 38' 40.50 \\ h + f = 309 1' 59.40 \end{array} \right\} = [AR - (\text{время наблюд.} - 11 \text{ мин.})] 15$$

Я, для вычисления, вместо этих углов, беру их дополнения до 360° , ибо часовые углы обыкновенно так считаются, так что

$$\begin{aligned} h &= 320^\circ 58' 10.05 \\ h' &= 310 21 19.50 \\ h'' &= 50 58 0.60 \end{aligned}$$

При принятом приближенном значении $\phi = 51^\circ 32'$ получаются высоты:

$$\begin{aligned} a &= 52^\circ 36' 44.44 \\ a' &= 52 37 28.46 \\ a'' &= 52 37 57.94 \end{aligned}$$

Затем:

$$\begin{aligned} \beta &= -0.4126 & \gamma &= +0.5694 \\ \beta' &= +0.9993 & \gamma' &= +0.0233 \\ \beta'' &= +0.0049 & \gamma'' &= -0.6221 \end{aligned}$$

полагая

$$a + \beta d\varphi + \gamma dh = a' + \beta' d\varphi + \gamma' dh = a'' + \beta'' d\varphi + \gamma'' dh$$

имеем для определения $d\varphi$ и dh уравнения:

$$0 = 44.^{\circ}02 + 1.4019 d\varphi - 0.5461 dh$$

$$0 = 29.^{\circ}48 - 0.9944 d\varphi - 0.6454 dh$$

Откуда:

$$dh = + 58.^{\circ}79 = 3^{\circ}.92$$

$$d\varphi = - 8.^{\circ}50$$

Таким образом:

$$\text{поправка часов} = - 10^{\circ} 56.^{\circ}08$$

$$\text{высота полюса } \varphi = 51^{\circ} 31' 51.^{\circ}50$$

Непосредственным вычислением Гаусс получил:

$$\text{поправка часов} = - 10^{\circ} 56.^{\circ}08$$

$$\text{высота полюса } \varphi = 51^{\circ} 31' 51.^{\circ}51$$

Если высота звезд велика так, что по своему синусу она определяется недостаточно точно, то можно предыдущую формулу преобразовать в такую:

$$\sin^2 \left(45^{\circ} - \frac{1}{2} a \right) = \sin^2 \frac{1}{2} h \cos^2 \frac{1}{2} (\varphi + \delta) + \cos^2 \frac{1}{2} h \cdot \sin^2 \frac{1}{2} (\varphi - \delta)$$

вывод которой легко выполнить. Эта формула дает тем более точный результат, чем ближе наблюдаемая звезда к зениту.

Для вычисления по логарифмам, надо ввести вспомогательный угол B так, чтобы было

$$\operatorname{tg} B = \frac{\cotg \frac{1}{2} h \sin \frac{1}{2} (\varphi - \delta)}{\cos \frac{1}{2} (\varphi + \delta)}$$

тогда

$$\sin \left(45^{\circ} - \frac{1}{2} a \right) = \frac{\sin \frac{1}{2} h \cos \frac{1}{2} (\varphi + \delta)}{\cos B}$$

Вычисление становится еще проще, если принять по малости поправок $d\varphi$ и dh , что изменения углов пропорциональны изменениям их логарифмов синусов или косинусов, подобно тому как Гаусс это делает в «Theoria Motus Corporum coelestium in sectionibus conicis soleum ambientium» (p. 11), благодаря чему дифференциальные коэффициенты β и γ заменяются табличными разностями логарифмов.

Имеем:

$$\frac{1}{2}(h + dh) = 160^\circ 28' 5.025 + \frac{1}{2}dh$$

$$\frac{1}{2}(\varphi + d\varphi - \delta) = 11 44 52.6 + \frac{1}{2}d\varphi$$

$$\frac{1}{2}(\varphi + d\varphi + \delta) = 39 47. 7.4 + \frac{1}{2}d\varphi$$

$$\frac{1}{2}(h' + dh') = 155 10 39.75 + \frac{1}{2}dh$$

$$\frac{1}{2}(\varphi + d\varphi - \delta) = 18 22. 32.85 + \frac{1}{2}d\varphi$$

$$\frac{1}{2}(\varphi + d\varphi + \delta) = 69 54. 32.85 + \frac{1}{2}d\varphi$$

$$\log \cotg \frac{1}{2}(h + dh) \dots \dots \quad 0.4504836 n \quad + 33.4000 dh$$

$$\log \sin \frac{1}{2}(\varphi + d\varphi - \delta) \dots \quad 9.3087919 + 50.6000 d\varphi$$

$$\operatorname{colog} \cos \frac{1}{2}(\varphi + d\varphi + \delta) \dots \quad 0.1143864 + 8.7500 d\varphi$$

$$\log \operatorname{tg} B = \quad 9.8736619 + 59.3500 d\varphi + 33.4000 dh$$

$$B = 36^\circ 46' 52.76 + 1.3519 d\varphi + 0.7608 dh$$

$$\log \sin \frac{1}{2}(h + dh) \dots \dots \quad 9.5238220 - 29.7000 dh$$

$$\log \cos \frac{1}{2}(\varphi + d\varphi + \delta) \dots \quad 9.8856136 - 8.7500 d\varphi$$

$$\operatorname{colog} \cos B \dots \dots \quad 0.0964073 + 21.3600 d\varphi + 12.0206 dh$$

$$\log \sin \left(45^\circ - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}da\right) = 9.5058429 + 12.6100 d\varphi - 17.6794 dh$$

$$45^\circ - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}da = 18^\circ 41' 37.78 + 0.2027 d\varphi - 0.2842 dh$$

$$\frac{1}{2}(a + da) = 26^\circ 18' 22.22 - 0.2027 d\varphi + 0.2842 dh$$

$$a + da = 52^\circ 36' 44.44 - 0.4054 d\varphi + 0.5684 dh$$

Совершенно так же находится:

$$a' + da' = 52^\circ 37' 28.46 + 1.0004 d\varphi + 0.0224 dh$$

$$a'' + da'' = 52^\circ 37' 57.94 + 0.0066 d\varphi - 0.6224 dh$$

Следовательно, для определения $d\varphi$ и dh служат следующие уравнения:

$$0 = 44.02 + 1.4058 d\varphi - 0.5460 dh$$

$$0 = 29.48 - 0.9938 d\varphi - 0.6648 dh$$

которые дают:

$$dh = + 58.87 = 3.92$$

$$d\varphi = - 8.48$$

§ 196. Та же задача в случае нескольких звезд. В том случае, когда требуется большая точность, можно брать большее число наблюдений, нежели три. На примере метода выясняется проще; Santini в Падуе (Ricerche sulla latitudine del Obser. di Padova, Verona, 1812; Bohneberger — Lindenau, Ztschr. f. Astr., 1816, p. 441) наблюдал 17 мая 1811 г. следующие звезды в равной высоте:

α Coronae	11° 35' 56.0
ζ Virginis	11 59 29.5
β Draconis	12 17 33.5
γ Draconis	12 46 24.5
δ Draconis	13 13 42.5

Поправка часов относительно звездного времени была приблизительно $1^{\text{x}} 53^{\circ}$, часовое ускорение $0.^{\text{4}}$ 0, широта Падуи приблизительно $45^{\circ} 24'$.

По каталогу Piazzi положение звезд было:

	<i>AR</i>	<i>Dec. borealis</i>
α Coronae	$231^{\circ} 40' 42.38$	$27^{\circ} 21' 26.^{\text{56}} (\delta)$
ζ Virginis	201 16 32.62	0 22 23.52 (δ^{I})
β Draconis	261 32 57.60	52 26 44.36 (δ^{II})
γ Draconis	268 3 43.72	51 30 53.62 (δ^{III})
δ Draconis	288 7 40.37	67 19 38.93 (δ^{IV})

Часовые углы, исправленные на ускорение часов и за вычетом поправки 113 секунд:

$$\begin{aligned} h &= 301^{\circ} 50' 2.^{\text{62}} \\ h^{\text{I}} &= 338 7 32.48 \\ h^{\text{II}} &= 282 22 5.70 \\ h^{\text{III}} &= 283 4 1.73 \\ h^{\text{IV}} &= 269 49 32.38 \end{aligned}$$

Предварительное вычисление показывает, что высота немного превышала 41° , поэтому можно применять формулу (1), по которой получится:

$$\begin{aligned} a + da &= 41^{\circ} 0' 22.^{\text{22}} - 0.01444 d\varphi + 0.70208 dh \\ a^{\text{I}} + da^{\text{I}} &= 41 0 45.25 - 0.86960 d\varphi + 9.34669 dh \\ a^{\text{II}} + da^{\text{II}} &= 41 0 23.76 + 0.61446 d\varphi + 0.55396 dh \\ a^{\text{III}} + da^{\text{III}} &= 41 0 23.60 + 0.59559 d\varphi + 0.56404 dh \\ a^{\text{IV}} + da^{\text{IV}} &= 41 0 32.52 + 0.85968 d\varphi + 0.35867 dh \end{aligned}$$

Отсюда следуют уравнения:

$$\begin{aligned}0 &= + 23''03 - 0.85516 d\varphi - 0.35539 dh \\0 &= - 21''49 + 1.48406 d\varphi + 0.20727 dh \\0 &= - 0''16 - 0.01887 d\varphi + 0.01008 dh \\0 &= + 8''92 + 0.26409 d\varphi - 0.20537 dh\end{aligned}$$

применяя к которым Гауссову методу наименьших квадратов (*Disquisitio de elementis ellipticis Palladis. Coment. Soc. Göttingen, 1811*) получим уравнения:

$$\begin{aligned}0 &= - 5''34229 + 0.10823 dh \\0 &= - 49''22830 + 3.00382 d\varphi + 0.55710 dh\end{aligned}$$

Откуда:

$$dh = + 49''78 = 3^{\circ}.32$$

$$d\varphi = 7''13$$

следовательно:

$$\text{поправка часов} = - 1^{\circ} 49' 68$$

$$\text{высота полюса} = 45^{\circ} 24' 7''13$$

§ 20. Определение высоты полюса и поправки часов по наблюдениям высот 2 звезд. Если действительно наблюдены высоты 2 звезд и замечены времена наблюдений, то можно еще легче определить высоту полюса, когда склонение и прямое восхождение звезд известны.

Гаусс написал об этом программу: «*D. Caroli Frid. Gauss. Methodum peculiarum elevationem poli determinandis*», 1808.

Геометрически задача сводится к следующей: по известному положению двух точек на поверхности шара относительно какого-либо большого круга (экватора) найти положение третьей (здесь это зенит), расстояния которой до двух данных известны.

При геометрическом решении очевидно, что надо приводить оба наблюдения к тому же моменту времени, причем 2-й звезде приписывается прямое восхождение, увеличенное на величину разности времен наблюдений, как сказано выше.

Здесь даны: PS_1 , PS_2 и разность прямых восхождений $S_2 P S_1$, и по наблюдениям высот известна ZS_1 и ZS_2 , требуется определить PZ и часовые углы ZPS_1 и ZPS_2 для нахождения поправки часов.

По данным PS_1 , PS_2 и $S_1 P S_2$ находим третью сторону $S_1 S_2$ и угол $PS_1 S_2$. Затем по известным $S_1 S_2$, ZS_1 , ZS_2 находим угол $ZS_1 S_2$, таким

образом получим угол ZS_1P , зная который и стороны ZS_1 и PS_1 находим PZ ; наконец по PZ , ZS_2 и PS_2 определим угол ZPS_2 .

Можно наблюдать две высоты одной и той же звезды при двух различных ее положениях, тогда угол P_1PS_2 определяется непосредственно по разности времен наблюдения. Такую задачу решал еще Тихо Браге (*Astronomiae instauratae progymnomata*, pp. 1221 et 59).

Астроном Крафт в Петербурге определял высоту полюса по наблюдениям 2 различных звезд, но весьма непрактично, ибо надо было два инструмента и двух наблюдателей (*Acta nova Acad. Petrop.*, t. XIII).

По двум высотам Солнца и промежутку времени между ними определить широту есть задача, обычно решаемая на корабле по методе Douwes'a (см.: *Bohnenberger. Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung*). Аналитическое решение задачи выполняется следующим образом.

Пусть попрежнему: ϕ — высота полюса, α и α' , δ и δ' — прямые восхождения и склонения звезд, γ и γ' — прямые восхождения точек экватора, кульминирующих в моменты наблюдений, или, что то же самое, выраженные в градусах звездные времена наблюдений a и a' высоты звезд.

Очевидно, что $\gamma - \alpha$ и $\gamma' - \alpha'$ суть часовые углы, положим

$$\gamma - \alpha = \lambda \quad \text{и} \quad \gamma' - \alpha' = \lambda - \theta$$

причем $\theta = \alpha' - \alpha - (\gamma' - \gamma)$ есть известная величина, ибо $\gamma' - \gamma$ есть выраженный в градусах промежуток между наблюдениями.

Итак, имеем уравнения:

$$\sin a = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \lambda \quad (1)$$

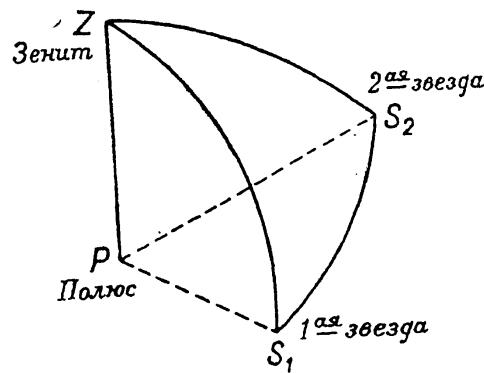
$$\sin a' = \sin \delta' \sin \phi + \cos \delta' \cos \phi (\lambda - \theta) \quad (2)$$

Но

$$\begin{aligned} &(\sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \lambda)^2 + (\cos \delta \sin \phi - \sin \delta \cos \phi \cos \lambda)^2 = \\ &= \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \cos^2 \lambda = 1 - \cos^2 \phi \sin^2 \lambda \end{aligned}$$

следовательно, на основании (1), будет

$$\left(\frac{\cos \delta \sin \phi - \sin \delta \cos \phi \cos \lambda}{\cos a} \right)^2 + \left(\frac{\cos \phi \sin \lambda}{\cos a} \right)^2 = 1 \quad (b)$$



Фиг. 11.

Поэтому, положив

$$\frac{\cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \cos \lambda}{\cos \alpha} = \cos u \quad (3)$$

$$\frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\cos \alpha} = \sin u \quad (4)$$

и комбинируя уравнение (3) и (1), получим

$$\sin \varphi = \sin \delta \sin a + \cos \delta \cos a \cos u \quad (5)$$

[Из (1) и (3) определяют $\cos \lambda$ и уравнивают обе полученные величины, после чего и получается (5)]. Затем из (3) и (5) следует

$$\cos \varphi \cos \lambda = \cos \delta \sin a - \sin \delta \cos a \cos u \quad (6)$$

Уравнению (2) можно придать следующий вид:

$$\sin a' = \sin \delta' \sin \varphi + \cos \theta \cos \delta' \cos \varphi \cos \lambda + \sin \theta \cos \delta' \cos \varphi \sin \lambda$$

Подставив, вместо $\cos \varphi \cos \lambda$, $\cos \varphi \sin \lambda$ и $\sin \varphi$, их величины (6), (5), (4), получим

$$\begin{aligned} \sin a' - \sin a \sin \delta \sin \delta' - \sin a \cos \theta \cos \delta \cos \delta' - \cos u \cos a \cos \delta \sin \delta' + \\ + \cos u \cos a \sin \theta \cos \delta \cos \delta' - \sin u \cos a \sin \theta \cos \delta' = 0 \end{aligned}$$

Это уравнение, положив

$$\frac{\cos \delta \sin \delta' - \cos \theta \sin \delta \cos \delta'}{\sin \theta \cos \delta'} = \cotg v \quad (7)$$

обращается в следующее:

$$\begin{aligned} \sin a' - \sin a \sin \delta \sin \delta' - \sin a \cos \theta \cos \delta \cos \delta' \\ - \cos a \sin \theta \cos \delta' (\cos u \cotg v + \sin u) = 0 \end{aligned}$$

Полагая

$$v - u = \omega$$

получим

$$\cos \omega = \frac{\sin v (\sin a' - \sin a \sin \delta \sin \delta' - \sin a \cos \theta \cos \delta \cos \delta')}{\cos a \sin \theta \cos \delta'} \quad (8)$$

После того как ω найдено, получим

$$u = v - \omega$$

Когда угол u найден, имеем λ , комбинируя уравнения (4) и (6) по формуле

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\cos a \sin u}{\cos \delta \sin a - \sin \delta \cos a \cos u} \quad (9)$$

Имея λ , находим

$$\gamma = \alpha + \lambda$$

выразив этот угол во времени, получим поправку часов.

Комбинируя (4) и (5), получаем затем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \lambda (\sin \delta \sin \alpha + \cos \delta \cos \alpha \cos u)}{\cos \alpha \sin u} \quad (10)$$

Это уравнение вместе с (4) служит взаимной проверкой.

Можно получить два решения, смотря по тому, брать ли угол ω , определяемый по своему \cos в уравнении (8), положительным или отрицательным; но легко показать, что \sin разности азимутов, считаемых слева направо, равен

$$\frac{\sin \theta \cos \delta' \sin \omega}{\sin \alpha' \sin v}$$

а так как $\cos \delta'$, $\cos \alpha'$ — величины положительные, то $\sin \omega$ должен быть того же знака, как $\frac{\sin \theta}{\sin v}$, следовательно, смотря по тому, находится ли вертикальный круг, проходящий через 1-ю звезду, справа или слева от вертикала 2-й звезды, в чем сомнения быть не может, ибо наблюдения 2 близлежащих или почти противоположных звезд неблагоприятны, надо брать ω положительным или отрицательным.

Чтобы сделать формулы удобными для вычислений, надо ввести вспомогательные углы

$$\operatorname{tg} F = \frac{\operatorname{tg} \delta'}{\cos \theta} \quad (11)$$

Тогда (7) и (8) напишутся так:

$$\operatorname{tg} v = \frac{\cos F \operatorname{tg} \theta}{\sin (F - \delta)} \quad (12)$$

$$\cos \omega = \frac{\cos v \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (F - \delta)} \cdot \left(\frac{\sin \alpha' \sin F}{\sin \alpha \sin \delta' \cos (F - \delta)} - 1 \right) \quad (13)$$

Положим далее

$$\operatorname{tg} G = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos u} \quad (14)$$

Тогда (9) и (10) будут:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\cos G \operatorname{tg} u}{\sin (G - \delta)} \quad (15)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \cos \lambda \cdot \operatorname{cotg} (G - \delta) \quad (16)$$

Из рассмотрения уравнений, получаемых дифференцированием уравнения (1), видно, что погрешности наблюдений имеют наименьшее влияние на определяемые величины φ и λ , когда разность азимутов звезд близка к 90° .

§ 21. О собственном движении Солнца. Эклиптические координаты звезд, перевод в экваториальные и обратно. Путь Солнца может служить, как будет сейчас показано, для установления начальной точки, от которой считаются прямые восхождения.

Для нас наблюдения положений и пути Солнца не представляют затруднений, ибо мы имеем хорошие часы, древним же приходилось определять положение Солнца при помощи его положения по отношению к другому светилу, видимому днем и ночью, напр. Луне. Тихо пользовался для этого Венерою, которая иногда видна и днем.

При каждом наблюдении Солнца необходимо замечать вступление и выхождение Солнца, среднее дает положение его центра. Мне незачем напоминать, что эти наблюдения производятся через цветные стекла, ибо свет слишком силен. Берут также два закопченных стекла, обращенных друг к другу их черной стороной, которыедерживаются в оправе в некотором расстоянии друг от друга, чтобы не терлись одно о другое.

Склонение и прямое восхождение Солнца ежедневно изменяются. Из наблюдений легко находится, что наибольшее северное склонение равно наибольшему южному. Прямые восхождения точек, где склонение равно 0, отличаются также на равные величины, так что эти две точки взаимно противоположны.

Путь Солнца называется *эклиптикою*. Точки, где склонение равно 0, называются точками равнодействий, ибо тогда полудневная дуга Солнца равна 90° . Угол, измеряемый наибольшою величиною склонения Солнца, называется наклонностью эклиптики (*obliquitas ecclipticae*).

Что путь Солнца представляет собою действительно большой круг,— подтверждается из наблюдений следующим образом: Пусть A есть пока произвольно принятное начало счета прямых восхождений (фиг. 12), D и F — наблюденные положения Солнца, коих склонения $BD = \delta$, $CF = \delta'$, и прямые восхождения $AB = \alpha$, $AC = \alpha'$ известны из наблюдений (в меридиане).

Следовательно, известны:

$$DP = 90^\circ - \delta; \quad FP = 90^\circ - \delta'; \quad BPC = BC = \alpha' - \alpha$$

и значит, легко найти угол $PDF = \gamma DB$. Зная γDB и $DB = \delta$, находим γB и $D\gamma B = \epsilon$.

Если из многих наблюдений окажется, что угол ϵ и точка γ остаются те же, то будет доказано, что Солнце перемещается по тому же самому кругу и круг этот — большой.

Точку γ , в которой склонение Солнца меняется из южного на северное, называемую точкою весеннего равноденствия, приняли за начало счета прямых восхождений.

Прямые восхождения звезд остаются приблизительно постоянными, но не вполне: они прогрессивно увеличиваются с каждым годом на несколько секунд.

Склонения также изменяются, но они у одних звезд уменьшаются, у других увеличиваются, на первый взгляд неправильно.

Но если исследовать это ближе, то вскоре можно заметить правило: звезды с прямыми восхождениями 0° — 90° и 270° — 360° имеют склонения возрастающие, причем южное склонение считается отрицательным. От 90° до 270° склонения уменьшаются.

На границах склонения почти не изменяются.

Прямые восхождения, близкие к 0° и 180° , изменяются почти равномерно, отличающиеся от этих значений — неправильно. Относительное расположение звезд остается при этом неизменным, следовательно, если бы положение звезд было отнесено к другому кругу, а не к экватору, то изменений в их координатах по отношению к этому кругу не происходило бы.

Таким образом, по отношению к которому звезды не изменяют своих положений, является *эксплитика*.

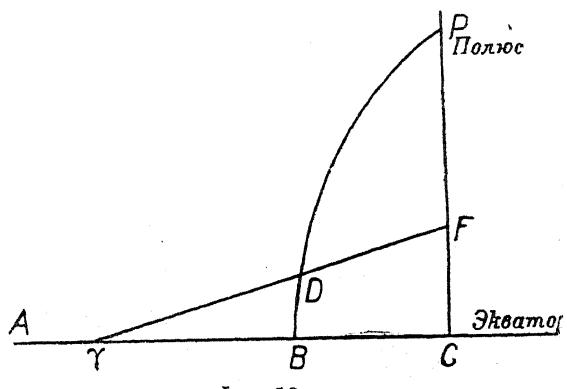
Координаты, которые для экватора назывались прямым восхождением и склонением, называются здесь *долготой и широтой*.

Прежде чем поставить задачу о том, как по прямому восхождению и склонению находятся долгота и широта и наоборот, я объясню некоторые термины.

Наклонностью эксплитики называется угол, составляемый плоскостью эксплитики с плоскостью экватора; этот угол измеряется склонением Солнца в дни солнцестояний.

Точки *весеннего и осеннего равноденствий* (*aequinoctium vernale et automnale*) суть точки пересечения эксплитики с экватором.

Градусы эксплитики считаются от точки весеннего равноденствия. Прежде было обыкновение считать в «знаках», причем эксплитика подраз-



Фиг. 12.

делялась на 12 частей, каждой из которых приписывалось название близлежащего созвездия. Движение Солнца выражалось в этих же знаках.

Точки, где склонение Солнца наибольшее, называются *солнцестояниями* — летним (solstitium cancri) и зимним (solstitium capricorni). Большой круг, проходящий через солнцестояние и полюс, называется *колор солнцестояний*. Большой круг, проходящий через полюс и точку равноденствия, называется *колор равноденствий*. Северный полюс эклиптики имеет

прямое восхождение, равное 270° , и северное склонение; южный полюс эклиптики имеет прямое восхождение, равное 90° , и южное склонение.

Расстояние звезды до эклиптики называется ее широтою; расстояние основания круга широты, считаемое по эклиптике от точки весеннего равноденствия, называется долготою звезды. Широтою и долготою положение точки вполне определяется.

Фиг. 13.

Пусть будут EN и AM колюры солнцестояния и весеннего равноденствия, пересекающиеся в точке A , полюсе экватора, под прямым углом, E — полюс эклиптики, S — звезда.

Тогда будет:

$$\begin{aligned} SAN &= MAN - MAS = 90^\circ - \alpha; \quad SAE = 90^\circ + \alpha \\ SEN &= 90^\circ - \lambda; \quad SA = 90^\circ - \delta; \quad SE = 90^\circ - \beta; \quad AE = \epsilon \end{aligned}$$

где: α — прямое восхождение, δ — склонение, λ — долгота, β — широта, ϵ — наклонность. Угол ESA называется углом положения, он аналогичен параллактическому углу.

Между этими величинами можно установить соотношения, при помощи которых решаются следующие задачи:

1) По прямому восхождению и склонению звезды найти ее долготу и широту.

Имеем:

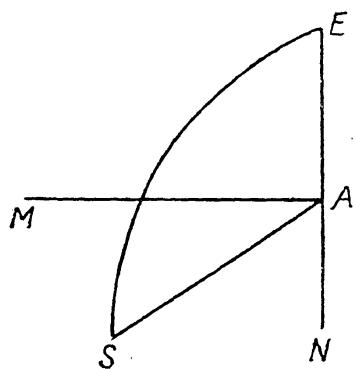
$$\sin \beta = \cos \epsilon \sin \delta - \sin \epsilon \cos \delta \sin \alpha \tag{a}$$

$$\cos \beta \sin \lambda = \sin \delta \sin \epsilon + \cos \delta \cos \epsilon \sin \alpha \tag{b}$$

$$\cos \beta \cos \lambda = \cos \alpha \cos \delta. \tag{c}$$

Пусть будет:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= m \sin \xi \\ \cos \delta \sin \alpha &= m \cos \xi \end{aligned}$$



тогда, на основании (a) и (b), будет:

$$\begin{aligned}\sin \beta &= m \sin (\xi - \varepsilon) \\ \cos \beta \sin \lambda &= m \cos (\xi - \varepsilon)\end{aligned}$$

поэтому, вводя для контроля еще (c), имеем следующие четыре уравнения:

$$\frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin \alpha} = \operatorname{tg} \xi \quad (1)$$

$$\frac{\cos (\xi - \varepsilon) \operatorname{tg} \alpha}{\cos \xi} = \operatorname{tg} \lambda \quad (2)$$

$$\sin \lambda \operatorname{tg} (\xi - \varepsilon) = \operatorname{tg} \beta \quad (3)$$

$$\cos \beta \cos \lambda = \cos \alpha \cos \delta \quad (4)$$

Определение углов по их тангенсам оставляет неопределенность, лежит ли угол в 1-й, или в 3-й четверти, что необходимо решить по отношению к долготе.

Долгота всегда находится в одной четверти с прямым восхождением между $+90^\circ$ и -90° , так что косинус их одного знака.

Необходимо еще заметить, что если звезда лежит по другую сторону колюра, то формулы остаются без перемены, как это легко показать.

2) По долготе и широте звезды найти ее прямое восхождение и склонение.

Для этого можно вывести формулы из предыдущих.

Положим

$$\xi - \varepsilon = \theta$$

тогда будет:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \lambda} = \operatorname{tg} \theta \quad (1')$$

$$\frac{\cos (\theta + \varepsilon) \operatorname{tg} \lambda}{\cos \theta} = \operatorname{tg} \alpha \quad (2')$$

$$\sin \alpha \operatorname{tg} (\theta + \varepsilon) = \operatorname{tg} \delta \quad (3')$$

$$\cos \beta \cos \lambda = \cos \delta \cos \alpha \quad (4')$$

Нетрудно также найти и угол положения.

Во всех этих вычислениях применимы также последние четыре формулы (Гауссовые), данные в Введении, как это показано в «Theoria Motus».

§ 22. Прецессия. Если в продолжение ряда лет наблюдать прямые восхождения и склонения звезд и вычислять по ним, как показано, их долготы и широты, то окажется, что широты остаются неизменными, долготы же увеличиваются.

Еще нагляднее это станет, если сличить старый перечень звезд, составленный Гиппархом, с теперешним.

Это явление называют *прецессией*.

Самым надежным образом величина прецессии получена по сличению наблюдений Bradley (1760 г.) с наблюдениями Piazzi (1800 г.) (см.: *Bessel. Untersuchung der Grösse und des Einflusses der Verrückung der Nachtgleichen etc.* — премированное Берлинской Академией сочинение). По Bessel'ю, прецессия составляет в год $50.^{\circ}2.$

Относительные прямые восхождения (разности прямых восхождений) звезд находятся, как уже сказано, по наблюдениям времени прохождения через меридиан. Абсолютное прямое восхождение звезды определяется, как будет указано ниже, и когда оно найдено для одной звезды, то легко находится и для прочих звезд и для Солнца путем присовокупления к найденному лишь разностей прямых восхождений, непосредственно наблюдавшихся.

Определяют зенитные расстояния Солнца и притом дважды, вблизи летнего и зимнего солнцестояний, чтобы исключить ошибку, которая могла бы произойти вследствие того, напр., что высота полюса известна недостаточно точно. По зенитным расстояниям легко найти склонение Солнца, по склонениям и по приближенно известной наклонности эклиптики вычисляют прямые восхождения Солнца.

Кроме того, наблюдают разности прямых восхождений Солнца и звезды, расположенной близ экватора, напр. Проциона, и определяют эту разность для того момента, когда склонение Солнца и этой звезды одинаковы. Так как этот момент лишь редко может прийтись в полдень, то таких наблюдений производят два — когда склонение Солнца немного больше и немного меньше склонения избранной звезды, и по простой интерполяции находят момент, когда их склонения были равны. Такое наблюдение производится также дважды в году, когда склонение Солнца небольшое северное и небольшое южное.

§ 23. Влияние прецессии на прямые восхождения и склонения звезд. Прецессия звезд, т. е. увеличение их долгот, равносильна с отступлением точки равноденствия по эклиптике. Выражение прецессия точки равноденствия неправильно.

Спрашивается, каким образом вычислить прямое восхождение и склонение звезды, напр., для 1820 г., когда они известны для 1800 г.

Решение этой задачи требует применения дифференциального исчисления.

Так как широта остается неизменной, то вопрос ставится так: насколько изменяются склонение и прямое восхождение при изменении долготы, причем все эти изменения настолько малые, что их можно принять за дифференциальные?

Пусть будет попрежнему: E — полюс эклиптики, A — полюс экватора, S — звезда, δ — склонение, α — прямое восхождение, β — широта, λ — долгота ее, ϵ — наклонность эклиптики, тогда:

$$SA = 90^\circ - \delta, \quad SE = 90^\circ - \beta, \quad AE = \epsilon$$

$$SAE = 90^\circ + \alpha, \quad SEA = 90^\circ - \lambda$$

Величины λ , δ , α принимаются за переменные, β остается постоянной.

Для треугольника ABC была выведена следующая формула:

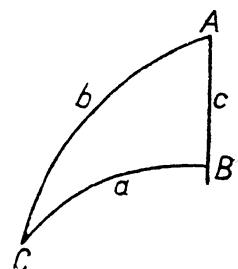
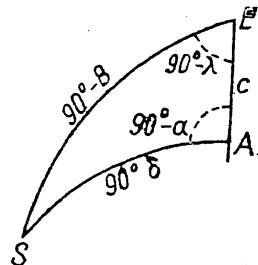
$$da = \cos C \cdot db + \cos B \cdot dc + \sin B \sin c \cdot dA$$

если c и b постоянные, то будет

$$da = \sin B \sin c \cdot dA$$

следовательно будет

$$d\delta = \cos \alpha \sin \epsilon \cdot d\lambda$$



Фиг. 14.

$d\lambda$ известно, оно составляет произведение изменения долготы в продолжении одного года $50''2$ на число протекших лет. Таким образом изменение склонения найдется.

Чтобы найти изменение прямых восхождений, служит следующая дифференциальная формула:

$$\sin C \cdot db = \sin b \cos C \cdot dA + \cos a \sin B \cdot dc + \sin a \cdot dB$$

b и c постоянны, поэтому

$$dB = -\frac{\sin b \cos C}{\sin a} \cdot dA$$

Но угол C нам неизвестен, величину b также не желательно оставлять в формуле, ибо требуется выразить изменение прямого восхождения в зависимости от изменения долготы. Таким образом обе величины b и C надо исключить.

Мы этого достигнем, воспользовавшись формулой

$$\sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cdot \cos B$$

и значит, будет

$$dB = \frac{\sin c \cos a \cdot \cos B - \sin a \cos c}{\sin a} \cdot dA$$

или

$$d\alpha = (\sin \epsilon \operatorname{tg} \delta \sin \alpha + \cos \epsilon) d\lambda$$

Таким образом будет для годового изменения:

$$d\delta = n \cos \alpha = 20'' \cdot \cos \alpha$$

$$d\alpha = m + n \operatorname{tg} \delta \sin \alpha = 46'' + 20'' \cdot \operatorname{tg} \delta \cdot \sin \alpha$$

Более точно по Bessel'ю для 1800 + t:

$$\text{годовая лунно-солнечная прецессия: } 50''.32822 - t \cdot 0''.0002435890$$

$$\gg \text{экваториальная} \quad \gg = 49''.01135 + t \cdot 0''.0002442966$$

$$m = 46''.01135 + t \cdot 0''.0003086450$$

$$n = 20''.04554 - t \cdot 0''.0000970204$$

§ 24. Звездные каталоги и карты. Число звезд, видимых простым глазом, немногим более 3000. Между ними различают звезды: 1-й, 2-й, 3-й и т. д. величин, смотря по яркости их, так что наиболее яркие называются 1-й величины, в половину менее яркие — 2-й величины и т. д. в геометрической прогрессии.

Самый острый глаз видит звезды 6-й величины. Более точно величина звезд определяется путем сличения звезды, рассматриваемой в трубу, со звездою вне трубы. Таким образом поступал Piazzi, который называет звездами 7-й величины такие, которые в трубу представлялись одинаково яркими с звездами 1-й величины, рассматриваемыми без трубы, и т. д. При таком условии в Гершельев телескоп можно видеть звезды до 20-й величины.

Кроме того, звезды разделяют по созвездиям. Этот способ весьма древний, и нам неизвестно происхождение названий созвездий, хотя для некоторых есть отдаленное сходство созвездия, напр. Льва, Короны; для большей же части преобладали произвол и символика, в особенности в области Зодиака.

Созвездие Рака имеет теперь долготу около 100° .

За 2000 лет тому назад оно имело лишь около 90° С, и может быть, хотели указать, что здесь Солнце начинает итти назад. Некоторые полагают, что название было дано еще тогда, когда созвездие Рака имело долготу еще на 180° меньшую, т. е. 270° , но это время представляется слишком отдаленным (за 14 000 лет приблизительно).

Название Козерог должно было указывать место, где Солнце стоит выше всего.

Шваб *Шварц* выразил мнение, что названия созвездий были даны близ Каспийского моря; он объясняет их по тамошним местностям, см. его «*Zodiaque expliqué, ou recherches sur l'origine et la signification des constellations de la sphère grecque et Mémoire explicatif sur la sphère caucasienne et speculation sur le Zodiaque par C. G. S.*» (Paris, chez Miqueret).

Древние считали 48 созвездий, из них 12 — в Зодиаке, 21 — в северном и 15 — в южном полушарии.

Затем было прибавлено еще несколько астрономами: Тихо, Hevel'ем, Kirch'ом, Понятовским, Lalande'ом — в северном полушарии, а также несколько в южном полушарии — мореплавателями и Галлеем. Bode считает теперь 102 созвездия.

Гиппарх составил первый каталог звезд по долготам и широтам их. Полагают, что он сохранился лишь в Птоломеевом Альмагесте, причем Птоломей привел этот каталог к своему времени и дополнил собственными наблюдениями. Этот Птоломеев каталог содержит 1027 звезд, но он не вполне соответствует временам Птоломея, а относится к более ранним, что служит подтверждением мнения, что составитель его есть Гиппарх.

В средние века лишь при Улу-Беге, в царстве Тамерлана, астроном *Абдеррамен Альбузи* составил звездный каталог 1011 звезд, относящийся к 1437 г.

Первые каталоги, составленные в Европе, были: в XXI ст. — ландграфа *Вильгельма Гессен Кассельского*, содержащий 400 звезд для 1593 г.

Тихо Браге — с 777 звездами на 1600 г. Его рукописями пользовался Кеплер, собравший его наблюдения и прибавивший новые звезды в своих «Рудольфинских таблицах».

Вскоре после Тихо были изобретены зрительные трубы, но *Hevel* в Данциге ими еще не пользовался при своих определениях широт и долгот, хотя они уже задолго перед тем были применены для мерительных приборов во Франции, поэтому его каталог немногим точнее каталога Тихо Браге. Он вычислил места 1930 звезд для 1660 г. Его каталог напечатан в атласе *Doppelmayer'a*.

Измерения при помощи трубы производили: *Флемстид*, первый астроном Гриничской обсерватории, он применял для наблюдений стенной квадрант.

Его наблюдения находятся в том виде, как они были сделаны в «*Historia coelestis britannica*», поэтому их можно перевычислить более точно,

нежели там сделано. Он дает места 2884 звезд на 1690 г. Отдельные звезды созвездий он обозначает арабскими цифрами, располагая их по прямым восхождениям.

Греческими буквами обозначил звезды впервые Bayer в своей «*Urano-metria*» еще до Флемстида. Этих двух способов обозначения звезд придерживаются и до сих пор. Если принять какую-либо другую систему обозначения, то это надо оговаривать.

Doppelmayer принял для своего небесного атласа обозначения звезд латинскими буквами, но этого обозначения никто не придерживается.

Некоторым отдельным звездам приданы названия, которые приписывают арабам, некоторые добавлены Bode.

В своем «*Jahrbuch der Astronomie*» (1822) Buttman предлагает сопоставление старых и новых, им самим придуманных, названий, но эти последние едва ли будут приняты.

В новейшее время число звездных каталогов сильно возросло. Полны и необходимы всякому истинному астроному каталоги Bradley'я, Piazzi и Lalande'a.

Bradley, 3-й астроном Гриничской обсерватории [астрономы Гриничской обсерватории следовали один за другим: Флемстид, Галлей, Bradley, Блесс (всего один год), Maskelyne, Pond], оставил свои наблюдения в рукописи, о которой возник спор между его наследниками и правительством, так что лишь через 40 лет эти наблюдения были изданы в двух томах *in-folio* в 1798 г. и 1805 г. Небольшой каталог, вычисляемый на основании наблюдений Bradley'я, издается ежегодно в «*Nautical Almanac*».

Bessel в Кенигсберге обработал наблюдения Bradley'я и издал под заглавием: «*Fundamenta Astronomiae ex observationibus Celeb. Bradley*» (Königsberg, 1818).

Этот каталог [содержит около 3000 звезд, приведенных к 1755 г. Bradley наблюдал хорошими инструментами работы Bird'a — стенным квадрантом и пассажным инструментом.

Piazzi издал в 1803 г. большой каталог, великолепно напечатанный в Палермо. Все звезды наблюдены по большей части по 3 раза, некоторые по 12 раз. Каталог содержит около 6000 звезд, расположенных по их прямым восхождениям для каждого часа, т. е. от 15° до 15° , в каждом часе звезды пронумерованы, иногда же обозначены буквами.

В Германии существует перепечатка первого издания, исполненная Bode, однако без достаточной тщательности. Bode опустил $\frac{1}{10}$ секунды и введение, содержащее исправления и дополнения, не включив их в текст.

Новое издание in-4° оригинала делает перепечатку бесполезной. Извлечение содержится в Миланских эфемеридах, другое дано Schumacher'ом в «Hülfstafeln zur Zeit und Ortsbestimmung».

François Jérôme de Lalande издал в Париже сочинение, содержащее 50 000 наблюдений звезд стенным квадрантом. Оно содержит непосредственно наблюденные зенитные расстояния и времена прохождения и озаглавлено: «Histoire celeste française par F. J. de Lalande» (1801). В отдельных томах «Connaissance des temps» для 12 000 наблюдений сделаны приведения.

Кроме того, есть множество компиляций, в особенности Bode. Его первая работа есть «Sammlung astronomischer Tafeln» (Bd. I u. II, Berlin, 1776). Наибольший его каталог, приложенный к его звездному атласу, содержит 1447 звезд и издан в 1801 г. В нем показано, однако, много таких звезд, которые на самом деле не существуют, поэтому надо им пользоваться с большой осторожностью.

Wollaston издал в 1789 г. компиляцию, содержащую звезды дважды — по созвездиям и по поясам.

Более специальное направление преследуют следующие сочинения.

Tob. Mayer — «Thierkreisbilder» (в его «Opera inedita»), 1756. Содержит приблизительно 1000 звезд. Издан в 1775 г.

Koch в «Berliner Jahrbuch» (1790), превратил Mayer'овы определения в долготы и широты. После издания Bradley'евских бесполезны.

Zach также издал в 1800 г. каталог зодиакальных звезд, наблюденных превосходным инструментом, но содержащий только их прямые восхождения. Barnes в Мангейме пронаблюдал для них склонения, но не настолько полно и не настолько точно, как Zach (см.: Zach. Tabulae aberrationis et nutationis, Gotha, 1800).

Lacaille в 1750 г. составил каталог звезд, видимых на мысе Доброй Надежды. В будущем, когда может быть на мысе будет построена обсерватория, этот каталог представит большое значение. Теперь им более не пользуются.

Maskelyne определил положение 36 звезд, с величайшую точностью пронаблюдая каждую из них сотни раз. Они известны под именем звезд Maskelyne'a, избранные близ экватора. Наиболее удаленная от экватора есть Capella. Zach принял по отношению к абсолютным прямым восхождениям эти звезды в основание для своих определений. Bessel впоследствии произвел те же наблюдения, которые и можно рассматривать как наиболее надежные. Piazzi для своего 2-го каталога пользовался собственными

наблюдениями для вывода абсолютных прямых восхождений. Текущий астроном Гринской обсерватории Pond также производил такие наблюдения, но ограничиваясь большей частью склонениями.

Doppelmayer на 6 листах центральной проекции дал все звездное небо, но его карты весьма неполны и не верны. О Bayer'e уже сказано выше.

«*Flamsteed Atlas Coelestis*», в весьма большом формате, содержит на каждом листе по одному созвездию. Этот атлас был приведен и к меньшему формату Fortin'ом во Франции и затем Bode, который включил в него и все звезды Piazzi, к этому атласу и относится перепечатка каталога Piazzi. Подобный же атлас издал Goldbach.

Здесь принят черный фон, звезды же показаны белые, но это весьма неудобно для глаз и раздражает их, кроме того он издан запутанно и поспешно.

К сочинению Bode — «*Anleitung zur Kenntnis des gestirnten Himmels*», приложено по маленькой карте для каждого месяца и большая карта видимой у нас части неба; эта карта весьма удовлетворительна.

Rüdiger — таблицы в том же сочинении в общем весьма плохи.

Во Франции есть также подобное сочинение «*Astrognosie*», кажется Francoeur'a.

Большой атлас *Bode* на 30 листах (40 талеров) составлен без достаточной критики, так что в нем показаны такие звезды, которых на небе нет, места же других часто показаны неверно, поэтому астрономы им не пользуются.

Harding издал весьма подробные и исправные карты, на которых нанесены все звезды из «*Histoire Celeste*» и, кроме того, другие по собственным определениям. Он не наносил ни одной звезды, которой он сам не про наблюдал бы на небе.

§ 25. Двойные и тройные звезды. Я укажу еще на некоторые замечательные явления, относящиеся к звездам.

Двойные звезды. Теперь называют двойными такие звезды, которые расположены настолько близко друг к другу, что и в наилучшую трубу они не кажутся далекими друг от друга, напр. ζ Большой Медведицы, где расстояние равно $5'$. Гершель наблюдал их с большою тщательностью и составил два каталога, заключающих около 200 таких звезд. Он подразделяет их на несколько классов по большему или меньшему расстоянию между ними. Этими звездами можно пользоваться, чтобы проверять достоинство трубы. Трубы, в которые звезды первого класса кажутся двойными, например α Herculis, — тоже первого класса.

Гершель хотел воспользоваться двойными звездами, чтобы по изменению расстояния между ними найти параллакс, но он не мог заметить никакого изменения, поэтому надо принять, что они, действительно, весьма близки друг к другу, так что может быть там одно Солнце обращается около другого, подобно тому как здесь планеты около Солнца.

Есть также тройные и четверные звезды.

В двойных звездах много замечательного: расстояния между некоторыми звездами представляются изменившимися: звезды, бывшие раньше первого класса, стали теперь второго, и наоборот. Многие двойные звезды кажутся разного цвета: одна, более светлая, — желтоватого, другая, темнее, — голубоватого.

Вообще, кажется, что в продолжение веков звезды изменяют свой цвет, напр. древние называют Сириус красным, тогда как он теперь белый.

Некоторые звезды обнаруживают большую изменяемость своей яркости и притом часто периодическую.

Это явление было открыто Фабрициусом в конце XVI в. относительно *Mira Ceti*, свет которой от 2-й величины изменяется до полного ее исчезновения, даже для весьма хороших труб, в продолжение 11 месяцев. Вурм собрал эти наблюдения и попытался определить период (см.: «Jahrbuch» Bohnenberger'a und Lindenau). Он указывает несколько таких звезд, напр., в созвездии Персея (Альголь) — звезда 2-й величины, которая через каждые 3 дня в течение получаса уменьшается по яркости до 4-й величины и затем вновь возвращается к первоначальному блеску. Это было замечено еще в XVII в. Montenari в Италии; Goodridge и Pigott в Англии наблюдали его весьма точно, а также и некоторые другие звезды того же рода (*Wurm. Berliner Jahrbuch*, около 1789 г.).

Яркость *Mira Cigni* изменяется также до исчезания и была наблюдана Kirch'ом в Берлине, но не превышает 5-й величины, см. у Olbers'a в «Jahrbuch» Bohnenberger'a. К таким же звездам относятся β Lyrae, δ Сепhei — см. Westphal в том же журнале.

Замечены и такие звезды, которые исчезали совсем и вновь не появлялись, напр. новая звезда Cassiopeiae в 1572 г. За несколько дней перед тем созвездие Кассиопеи было обследовано многими астрономами, и не было ничего замечено. Внезапно появилась звезда, которая по яркости превосходила Венеру и не имела заметного параллакса и была видна до 1574 г. Приблизительно через 30 лет появилась в созвездии Змееносца новая звезда 1-й величины, о которой писал Кеплер: «De stella nova in pede serpentarii».

Я уже упоминал, что во времена Гиппарха также появилась новая звезда.

Относительно этого явления составляли различные гипотезы: одни принимают, что звезда вращается около своей оси и обращается к нам то своею яркою, то темною стороною, но это не применимо к Альголю, который 3 дня остается таким ярким и в полчаса столь внезапно и столь сильно изменяется.

Другие принимают, что темная планета обращается около звезды и по временам закрывает ее от нас, это объясняет явление, представляемое Альголем, но все-таки остается лишь гипотезою. Maupertius полагает, что эти звезды не шаровой, а плоской формы, и обращены к нам то плашмя, то на ребро.

Четвертая гипотеза принадлежит Гауссу (который, однако, никогда ее не обнародовал) — свет посыпается звездою с конечною скоростью; наблюдения, которые, повидимому, показывают, что свет от всех звезд распространяется с одинаковою скоростью, относятся к углу, заключающему 30—40 секунд дуги, и погрешность в $\frac{1}{2}$ секунды не может быть избегнута, поэтому небольшая разница в скорости света допустима и не противоречит наблюдениям.

Но в таком случае до нас может достигнуть количество света, который излучен звездою в весьма различное время. Так оно могло быть, напр., с звездою Кассиопеи, что свет, который она испускала в течение сотни лет, приходил на Землю в продолжение 2 лет.

Истинный диаметр звезд весьма мал, ибо их диски не изменяются в том же отношении, как увеличение трубы. Надо принять, что сетчатка глаза в том случае, когда на ней получается изображение в одной точке, возбуждается и вокруг этой точки, так что получается большее изображение звезды, нежели должно бы быть.

Млечный путь разлагается в Гершельев телескоп на множество малых звезд; некоторые туманности, напр. в созвездии Рака, разлагаются на группы звезд даже в посредственные трубы.

Относительно туманностей Гершель имеет также большие заслуги. Он подразделил около 2000 туманностей на разные классы, но в числе их есть такие, которые видимы лишь в инструмент Гершеля. Он приводит 6 или 7 так называемых планетарных туманностей, которые круглы, мало ярки, довольно резко окраены, так что можно думать, что это — отдаленные планеты. Одна из замечательнейших есть туманность Водолея, свет которой, однако, весьма слабый.

§ 26. Собственное движение звезд. Уже Галлей сделал замечание, что со времени Птоломея Альдебаран изменил свое место. Наибольший шаг в этом учении сделал Тоб. Мауер, главным образом в своих «Opera inedita». Он сличил свои наблюдения с теми, которые были произведены за 30 лет перед ним Рёмером в Дании и хранились в рукописи в Копенгагене. Это были лишь наблюдения за 3 дня (Eridanus Roemeri), ибо прочие рукописи, заключавшие 300 наблюдений, все сгорели; по уцелевшим наблюдениям Mayer нашел, что звезды не только меняют вследствие прецессии долготу, но меняют и широту, напр. Arcturus в 50 лет почти на 2 минуты. Впоследствии были открыты еще более сильные собственные движения, напр. 61 Cygni, которая в 45 лет переместилась на $230''$, Eridanus — на $182''$, μ Cassiopeiae — на $166''$, Arcturus — на $101''$.

Нельзя сказать, движутся ли звезды, или наша солнечная система, или и то и другое вместе, последнее вероятнее.

Гершель полагает, что солнечная система перемещается по направлению к созвездию Геркулеса, но позднейшие исследования не согласуются с этой гипотезой. Кроме того, Гершель способ рассмотрения этого предмета недостаточно математичен. Bessel и Piazzi рассмотрели предмет математически, но ничего не получили.

Двойные звезды, напр. 61 Cygni, имеющие сильное собственное движение, не изменяют своего относительного положения, следовательно они расположены близко друг к другу; то же имеет место и для Кастиора.

Угол, составляемый дугою, проходящую через обе звезды с постоянным кругом, напр. с колюром склонения, однако все время изменяется, так что возможно, что наконец будет наблюден полный оборот, но не происходит ли это от смещения обеих звезд.

Здесь возникает сомнение, какую часть перемещения надо отнести к прецессии и какую к собственному движению звезд, и это сомнение будет становиться все большим, чем большее число звезд, изменяющих свое положение, мы будем знать; поэтому в будущем, для определения точек равноденствия, надо будет брать весьма удаленные звезды, для которых изменение положения совершенно не заметно, напр. планетарные, но, к сожалению, они не допускают точных определений.

§ 27. Измерение времени. Звездное время наиболее важно для астронома; звездные сутки есть тот промежуток времени, который протекает между двумя последовательными прохождениями точки весеннего равноденствия. Таким образом их определение находится в зависимости от

прецессии. Чтобы найти это время, нет надобности непременно наблюдать точку весеннего равноденствия, можно брать любую звезду, ибо суточное влияние прецессии весьма мало.

Когда часовой угол точки весеннего равноденствия равен в градусах, минутах и секундах $15^{\circ} + 15' + 15''$, то звездное время равно a часов, b минут, c секунд.

Пусть t — звездное время, α — прямое восхождение и h — часовой угол, тогда очевидно будет

$$t = \alpha + h \quad \text{или} \quad t = \alpha + h - 360^{\circ}$$

Таким образом по прямому восхождению и часовому углу можно находить звездное время в том случае, напр., когда нет полуденной трубы или имеется лишь инструмент для измерения высот светил. По одной из приведенных выше задач, по измеренной высоте находится часовой угол и по нему — звездное время.

Наилучшие часы на обсерваториях заставляют итти по звездному времени, но для гражданских потребностей оно совершенно непригодно.

Солнечное время. Солнечные сутки (истинные) есть промежуток времени, протекающий между двумя последовательными прохождениями Солнца через меридиан; таким образом устанавливается их аналогия звездным.

Солнечным временем пользуются на малых обсерваториях, не имеющих постоянных инструментов, ибо вычисление звездного времени по высотам не всегда достаточно надежно и всегда достаточно затруднительно.

Наблюдают два последовательных прохождения Солнца через меридиан и подразделяют промежуток на 24 часа.

Такое подразделение, однако, собственно не вполне точно, так как в разные времена года скорость Солнца различная, поэтому следует вообразить, что солнечные сутки подразделены таким образом, что первый час считается тогда, когда часовой угол Солнца равен 1 часу и т. д., но разница для отдельных часов настолько мала, что ею можно пренебречь.

Астрономы начало солнечных суток принимают в момент прохождения Солнца через меридиан и считают 24 часа до следующего прохождения (пойдня); тогда же меняется и число месяца, напр. 20-е начинается в полночь того 20-го числа, которое при гражданском счете началось в полночь Гражданский счет времени в астрономии принят лишь в популярных сочинениях (напр.: *Bode. Jahrbuch*), причем время считается до 12 часов полуночи и полудни. В новейших эфемериках сутки начинаются всегда с пойдня.

Французы в начале революции предложили начинать и астрономические сутки в полночь, но, во-первых, в полночь не видно прохождения Солнца через меридиан и, во-вторых, большая часть наблюдений все-таки производится ночью, около полночи, поэтому наблюдения, которые были совсем близко между собою, оказались бы отнесенными к разным суткам; кроме того, при некоторых наблюдениях, которые были бы произведены весьма близко к полночи, могла бы происходить некоторая путаница, так как звездные сутки короче солнечных и тот же час приходился бы дважды в продолжение суток, в этих случаях пришлось бы указывать, кроме числа месяца, еще к которой половине суток наблюдение относится.

§ 28. Определение момента истинного полдня. Есть три способа определить по наблюдениям время прохождения Солнца через меридиан.

Во-первых, непосредственное наблюдение пассажным инструментом: наблюдают вступление и выступление краев и берут среднее.

Во-вторых, наблюдают высоту и по ней вычисляют часовой угол, пользуясь которым и находят время кульминации.

В третьих, способ соответствующих высот.

Чтобы по высоте Солнца a , склонению δ , высоте полюса ϕ найти часовой угол h , служит формула

$$\sin \frac{1}{2} h = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} [90^\circ + \phi - \delta - a] \cdot \sin \frac{1}{2} [90^\circ + \delta - \phi - a]}{\cos \delta \cos \phi}}$$

Если, вместо склонения, взять полярное расстояние $p = 90^\circ - \delta$, то будет

$$\sin \frac{1}{2} h = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (p + \phi - a) \cdot \sin \frac{1}{2} (p + \phi + a)}{\sin p \cdot \cos \phi}}$$

положим $p + \phi + a = s$, тогда будет

$$\sin \frac{1}{2} h = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} s \cdot \sin \frac{1}{2} (s - a)}{\sin p \cdot \cos \phi}}$$

Понятно, что совершенно так же можно пользоваться звездами, чтобы получить звездное время.

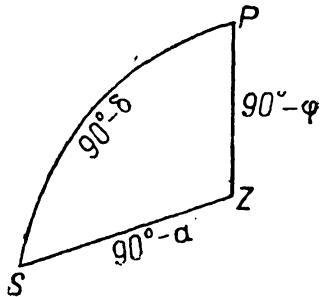
Так как быстрота изменения высоты Солнца в разное время дня весьма различная, то не безразлично, когда наблюдать высоту, — лучше всего это наблюдение производить, когда изменение происходит всего

быстрее. Чтобы найти, когда это бывает, можно воспользоваться первою дифференциальную формулою, дающею зависимость между изменениями трех сторон и одного угла, а именно, в этой формуле надо подставить $90^\circ - a$ вместо a , $90^\circ - \varphi$ вместо b , $90^\circ - \delta$ вместо c и h вместо A , тогда C будет азимут, считаемый от полюса $B = PSZ$, и получим, так как c и b постоянны,

$$da = \cos \varphi \sin Z \cdot dh$$

или

$$\frac{da}{dh} = -\cos \varphi \cdot \sin Z$$



Фиг. 15.

если затем положить $dh = 1^c = 15''$, то $15'' \cos \varphi \sin Z$ представляет изменение высоты в 1 секунду времени, выраженное в секундах дуги. Так как $\cos \varphi$ — постоянный, то $\frac{da}{dh}$ будет наибольшее, когда $\sin Z = 1$, т. е. когда азимут $Z = 90^\circ$ или, как говорят, когда Солнце находится в первом вертикале.

Понятно, что на точность наблюдения оказывает влияние не только быстрота или медленность изменения высоты, но также и рефракция, которая сильнее близ горизонта, качество инструмента и т. д.

Третий способ, т. е. *соответствующих высот*, для нахождения времени применяется следующим образом: каждая звезда до и после кульминации достигает одной и той же высоты; если проанаблюдать оба эти момента и взять среднее, то получится время кульминации. Можно легко произвести и несколько наблюдений; затем не требуется ни тригонометрических вычислений, и нет даже надобности иметь точно разделенный инструмент.

Соответствующие высоты звезд берутся редко, обыкновенно пользуются Солнцем, но так как Солнце непрерывно изменяет свое склонение, то необходима некоторая поправка.

Пусть эта поправка равна $-x$, φ — высота полюса, $\delta - \epsilon$ и $\delta + \epsilon$ — склонения до и после полдня, $t - \theta$ и $t + \theta$ — оба момента по часам (здесь t есть неисправенный момент полдня), $t - x$ есть исправленный момент полдня, a — высота. Неизвестная величина есть x , величиною a совсем не должно пользоваться, кроме того предполагается, что ход часов уже известен, по крайней мере, достаточно близко.

Очевидно, будет:

$$\text{первый часовой угол} = 15(\theta - x)$$

$$\text{второй часовой угол} = 15(\theta + x)$$

следовательно по известной формуле будем иметь для высот:
до полдня:

$$\sin a = \sin \varphi \sin (\delta - \varepsilon) + \cos \varphi \cos (\delta - \varepsilon) \cos 15(\theta - x)$$

после полдня:

$$\sin a = \sin \varphi \sin (\delta + \varepsilon) + \cos \varphi \cos (\delta + \varepsilon) \cos 15(\theta + x)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \sin \varphi \sin (\delta - \varepsilon) + \cos \varphi \cos (\delta - \varepsilon) \cos 15(\theta - x) &= \\ &= \sin \varphi \sin (\delta + \varepsilon) + \cos \varphi \cos (\delta + \varepsilon) \cos 15(\theta + x) \end{aligned}$$

Отсюда получаем, правда после длинного, но легкого преобразования, раскрывая $\sin (\delta - \varepsilon)$ и пр.:

$$\cos \varepsilon \sin 15\theta \cdot \sin 15x = \operatorname{tg} \varphi \sin \varepsilon - \operatorname{tg} \delta \sin \varepsilon \cos 15\theta \cos 15x$$

Величина x — весьма малая, поэтому можно смело положить $\cos 15x = 1$, по этой же причине можно вместо $\sin \varepsilon$ брать ε , тогда будет

$$15x = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \delta \cos 15\theta}{\sin 15\theta} \cdot \varepsilon$$

Если принять, что изменение склонения в продолжение суток равномерное, то величина ε может быть рассчитана по тройному правилу. Так как наблюдение производится до и после полдня, т. е. в два разные (астрономические) дня, то за изменение склонения принимают среднее между изменениями для этих двух дней.

Пусть μ есть изменение склонения за 2 суток, тогда

$$24 : \theta = \frac{1}{2} \mu : \varepsilon, \text{ следовательно } \varepsilon = \frac{\theta \cdot \mu}{48}$$

таким образом будет

$$x = \frac{(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \delta \cos 15\theta) \theta \mu}{48 \cdot 15 \cdot \sin 15\theta} = \frac{1}{720} \cdot \frac{\theta \cdot \mu \operatorname{tg} \varphi}{\sin 15\theta} - \frac{1}{720} \cdot \frac{\theta \mu \cdot \operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} 15\theta}$$

причем θ выражено в часах.

Для удобства вычисления можно составить таблицу, в которой показаны величины

$$\frac{1}{720} \cdot \frac{\theta}{\sin 15\theta} \text{ и } \frac{1}{720} \cdot \frac{\theta}{\operatorname{tg} 15\theta}$$

для аргументов θ через 5 минут.

Такую таблицу составил Gerling для 6 часов до и после полдня, она помещена в «Monatliche Correspondenz» (1811).

Поправка имеет некоторую конечную величину, сколь бы мал ни был промежуток времени между наблюдениями.

Это происходит оттого, что соответствующие высоты дают момент, когда Солнце занимает наивысшее положение; оно не совпадает в точности с полднем вследствие изменения склонения Солнца, а несколько отстает от полдня. Эта разность и составляет ту поправку, которая вводится, и очевидно, что она не может уничтожиться, сколь бы мал ни был промежуток.

Можно составить и такую таблицу, где аргументом служила бы долгота Солнца, или еще лучше такую, где рядом с долготою Солнца стоят δ , μ и θ , тогда нет даже надобности иметь эфемериды для вычисления поправки. О таких таблицах лучше всего можно составить себе понятие, если их рассмотреть самому в Берлинском собрании астрономических таблиц или в «Sonnenstafeln» Zach'a или «Tables du Soleil» Delambre'a. В этих таблицах долгота Солнца требует интерполяций, так как она дана через $10'$.

Если сделано несколько наблюдений подряд, то поправку можно принять для них одну и ту же. Ее вычисляют для одной пары и берут для этого среднюю; если же наблюдений весьма много, продолжавшихся несколько часов, то их подразделяют на группы, для каждой из которых и вычисляют поправку.

§ 29. Перевод звездного времени в солнечное и обратно. Если требуется перевести солнечное время в звездное или наоборот, то необходимо найти угол, образуемый часовыми кругами, проходящими через Солнце и через точку весеннего равноденствия, а это есть прямое восхождение Солнца. Это прямое восхождение надо выразить во времeni и придать к соответствующему времени. Таким образом, как нетрудно видеть, будем иметь формулу:

$$\begin{aligned} \text{или } \text{tempus sidereus} &= \text{tempus solare verum} + AR \text{ solis} \\ &= \text{tempus solare verum} + AR \text{ solis} - 360^\circ \end{aligned}$$

Таким образом превращение простое. Прямое восхождение Солнца берется из эфемерид. В эфемеридах показывается AR для того момента, когда Солнце проходит через меридиан того места, для которого эфемериды составлена, поэтому необходимо делать двойную поправку: во-первых, на время, на которое вычисляется солнечное или звездное время, если оно отлично от полдня, и, во-вторых, на разность долгот между местом, для которого время вычисляется, и местом, для которого составлена эфемериды.

Когда дано солнечное время и требуется найти звездное, то понятно, что нельзя выбирать из эфемериды прямое восхождение для этого времени, если только эфемериды не составлена для места наблюдений, ибо в ней предполагается звездное время, поэтому необходимо еще рассчитать, когда собственно наступает полдень в месте наблюдений, чтобы затем уже найти прямое восхождение Солнца.

§ 30. Среднее солнечное время. То обстоятельство, что невозможно хорошо сделать часы, которые показывали бы истинное солнечное время, ибо его подразделения не равномерны, дало повод изобрести некоторое другое время, несколько отличающееся от истинного солнечного — *среднее солнечное время*.

Мы знаем, что центр Солнца движется по большому кругу, но это движение не вполне равномерное, ибо прямое восхождение изменяется не равномерно; при 0° , 90° , 180° , 270° долгота и прямое восхождение равны, в остальных точках — не равны. Изменение долготы также не равномерное, и эта неравномерность присоединяется к неравномерности изменения прямого восхождения.

Возмущения движения Солнца (или собственно говоря Земли) Луной и планетами мы пока оставим в стороне.

Изменение долготы Солнца в определенное время какого-либо года почти в точности такое же, как и для всякого другого года, следовательно все сводится к тому, чтобы найти, как изменяется движение Солнца в течение года.

Медленнее всего долгота Солнца изменяется летом, быстрее всего — посередине зимы.

Эти две точки, в которых Солнце движется всего быстрее и всего медленнее, суть перигей и апогей.

Расстояние Солнца от перигея, выраженное в градусах, называется истинной аномалией Солнца.

Прежде истинную аномалию Солнца считали от апогея, теперь же ведут счет от перигелия, ибо для комет, для которых также рассматривается истинная аномалия, афелия не существует.

Перигей не вполне постоянен, он изменяет свое положение в год приблизительно на $1'$, поэтому нельзя считать истинную аномалию от постоянной точки эклиптики.

Промежуток времени между двумя моментами, когда Солнце имеет ту же долготу, называется годом, именно — *тропическим годом*. Звездный год считается до возвращения Солнца к той же самой неподвижной звезде,

значит он немного длиннее тропического. Третий род годов есть промежуток времени между двумя последовательными прохождениями через перигей, он называется *аномалистическим* и еще несколько длиннее.

Легко найти среднюю скорость Солнца. Вообразим некоторое мнимое Солнце, которое двигалось бы со скоростью, равною средней скорости истинного, — оно будет в одинаковое время описывать год, как и истинное. Это мнимое Солнце берут так, чтобы через перигей оно проходило одновременно с истинным, в апреле мнимое Солнце находится приблизительно на 2° позади истинного, в апогее они опять находятся одновременно; затем опять расходятся, причем истинное Солнце отстает от мнимого, в перигее они опять совпадают, отрицательный максимум их расстояния друг от друга такой же, как и положительный.

Расстояние мнимого Солнца от истинного называется *уравнением центра*. Расстояние мнимого Солнца до перигея зовется *средней аномалией*, значит уравнение центра есть разность истинной и средней аномалий Солнца.

Можно вообразить Солнце, движущееся по экватору со скоростью, равной средней скорости истинного, и по нему определять время, тогда получится равномерное подразделение времени, которое удобно для механизмов часов.

Это время называется *средним солнечным временем*.

Разность прямых восхождений истинного Солнца и воображаемого среднего (движущегося по экватору) представляет разницу истинного времени и среднего — это есть *уравнение времени*.

Этот правильный способ нахождения уравнения времени был почти общепринятым, когда Lacaille выразил мнение, что этот способ расчета неправилен, и утверждал, что разность прямых восхождений истинного и воображаемого Солнца представляет разницу между истинным солнечным временем и средним, но только выраженную в звездном времени. Поэтому, если желательно знать, когда воображаемое Солнце приходит в меридиан, то это время надо расчислять, принимая по $15^{\circ} 2'$ разности прямых восхождений на 1 час.

Но это совершенно неверно, ибо разность прямых восхождений, переведенная, по Lacaille'у, в солнечное время, дает тот промежуток, в продолжение которого придет на меридиан та точка, в которой находилось воображаемое Солнце в тот момент, когда истинное было на меридиане. Но этого ему знать не надо, а ему надо определить, *когда* само воображаемое Солнце придет в меридиан, оно же в продолжение этого промежутка само увели-

чило свое прямое восхождение, и вследствие этого перемещения оно придет в меридиан на столько же позже, насколько по Lacaille'ову приведению время его прохождения рассчитано вперед.

В эту же ошибку впал Улу-бег, о чём сообщает Бурхардт на основании рукописи, хранящейся в Парижской библиотеке и содержащей таблицы Солнца.

Из этой рукописи видно, что он считал так же, как Lacaille. Этой ошибки некоторое время придерживались французы, но теперь она сознана всеми и устранена.

Общественные часы заставляют идти или по истинному, или по среднему солнечному времени. Так как уравнение времени не оказывает большого влияния и так как их все равно надо переставлять каждые 8 дней, то для механизма почти безразлично, поставить их по истинному или по среднему времени.

Истинное время и есть собственно то, что мы желаем знать; полдень по этому времени легко определить по солнечным часам, тогда как среднее время может быть вычислено лишь астрономически. Кроме того, если часы поставлены по истинному времени, можно по времени восхода Солнца определить время его захода, для чего при среднем времени требуются эфемериды, а также можно иметь и другие подобные небольшие преимущества.

В больших городах, где есть много таких часов, снабженных маятниками, у которых ход настолько правилен, что их не приходится часто переводить, необходимо отдать предпочтение среднему времени по его равномерности.

Напомним еще, что англичане называют истинное время «apparent time», наше же среднее время зовут «true time», поэтому надо это иметь в виду и эти термины не смешивать. На континенте принято лишь наше обозначение.

§ 31. Вид и размеры Земли. Общий исторический обзор градусных измерений. Звезды представляются с самых различно расположенных мест Земли всегда на том же самом месте. Для Луны обнаруживается разница при расстояниях в несколько миль, реже даже при нескольких тысячах шагов, напр. при покрытии звезд. Это одинаковое расположение звезд по отношению к всякому месту на Земле доказывает их большую удаленность. Поэтому нас не должно удивлять, что всякому наблюдателю, где бы он ни находился, кажется, что звезды обращаются около оси, проходящей через место наблюдений. Через какую же собственно точку проходит эта ось, которая не может проходить одновременно через

все места наблюдений? Вероятно ни через одно из этих мест, а через какое-нибудь особенное, с которым они все находятся в некоторой связи, и так как мы знаем из других исследований, что Земля кругла, то эта точка есть центр Земли.

Итак, Земля есть шар, около оси которого движутся все звезды, и тогда легко для определения мест на Земле перенести круги, которые мы имеем на небесной сфере, на Землю. Высота полюса, меридиан и пр. не требуют дальнейших пояснений, стоит только заменить ось мира осью Земли, чтобы высказать все определения выше перечисленных понятий.

Вопрос о том, представляет ли Земля действительно шар и как она велика, уже очень давно привлекал внимание астрономов.

Когда речь идет о виде Земли, то ее истинная, не зависимая от случайных неровностей, поверхность есть та, к которой повсюду перпендикулярно направление силы тяжести, напр. поверхность моря.

Вид и величина Земли находятся путем измерения длины дуги меридиана и определения числа градусов, в ней содержащихся.

Эратосфен в Александрии впервые измерил дугу меридиана от Александрии до Сиены, относительно которых он принял, неизвестно почему, что они лежат на одном меридиане, на самом же деле Сиenna лежит на 3° восточнее Александрии. Кроме того, он принял, что в Сиенне Солнце в длиннейший день проходит в точности через зенит, причем он основывался на старинном сказании, что там есть колодезь, освещаемый в длиннейший день Солнцем до дна. Он измерил поэтому в Александрии зенитное расстояние Солнца в длиннейший день; он определил его по тени, отбрасываемой Солнцем на поверхность шара. Расстояние от Сиены до Александрии было ему известно лишь по сообщениям путешественников и принято им в 5000 стадий. Не говоря уже о неточности измерений, оно уже потому не может нам помочь, что нам не известна его стадия. Несмотря на это, на основании этого измерения была построена гипотеза: широта Сиены $24^{\circ}5'23''$, наибольшее склонение Солнца составляет теперь только $23^{\circ}30'$, во времена Эратосфена оно также не могло быть в 24° , поэтому полагали, что рассказ о колодце должен быть отнесен к гораздо более раннему времени и хотели видеть в этом подтверждение гипотезы Bailly, что в глубокой древности существовал народ, который был уже весьма развитым.

Второе измерение меридиана исполнил Посидоний во времена Цицерона. Его меридиан проходил через Александрию и Родос. Эти пункты также не лежат точно на одном меридиане. Звезда, которая в Родосе лишь касается горизонта, но не поднимается над ним, именно Canopus, достигает

в Александрии измеримой высоты. Это послужило Посидонию для определения числа градусов, содержащихся в дуге между Родосом и Александреей, которое он и сопоставил с расстоянием, также грубо известным в стадиях.

В области близ Багдада было предпринято в IX в. измерение дуги меридиана, но о нем известно лишь, что оно дало в результате 56 арабских миль на 1° , но так как величина древней арабской мили нам неизвестна, то и это измерение вами использовано быть не может.

Один французский врач измерил дугу меридиана во Франции, сосчитав при поездке число оборотов колеса своей повозки.

Лишь Snellius, впервые применив сеть треугольников и астрономические наблюдения для определения амплитуд, получил настоящее измерение (см.: *Erathostenes Batavus. De Terraे ambitus vera quantitate*), затем более точно перевычисленное Muschenbroek'ом.

Все треугольники на земной поверхности, собственно говоря, сферические или даже точнее сфероидические, и сумма их трех углов больше двух прямых, но Legendre сделал замечательное открытие, что если исправить углы, даваемые инструментом, так, чтобы сумма их составляла 180° (что всегда и применяется при всех геометрических вычислениях), то стороны будут пропорциональны синусам противолежащих углов, как для плоских треугольников, так что при наших инструментах не приходится принимать во внимание сферичность треугольников, за исключением некоторых новейших французских измерений.

После Snellius'a измерил дугу меридиана между Лондоном и Иорком Nordwood, но нам неизвестны подробности об этом измерении (см. «Seaman's Practice»).

Наконец, в 1669 г. Парижская Академия поручила Picard'у произвести настоящее градусное измерение между Amiens'ом и Парижем; оно дало градус равным 57 060 туазов.

Это измерение, которое собственно не было предназначено для того, чтобы дать величину окружности Земли, вскоре к тому послужило, а также и к тому, чтобы дать указания о виде Земли.

Гюйгенс нашел сперва, а priori, что Земля должна быть сплющена у полюсов, но лишь Ньютон дал приблизительно верную оценку этого сжатия именно $\frac{1}{230}$, предполагая Землю однородной. Гюйгенс давал $\frac{1}{500}$. Во Франции против этого возражал Кассини, получив результат, как раз обратный Ньютонову; но его наблюдения были слишком близки между собою,

чтобы можно было сказать что-либо окончательное, и споры продолжались долгое время.

Академия решила поэтому произвести новое измерение и притом в двух весьма удаленных друг от друга местах — при экваторе и близ полярного круга. В Южную Америку были посланы Godin, Bouguer и Condamine вместе с испанцами Don Ulloa и Don Juan (см.: *Bouguer. Figure de la Terre; Condamine. Journal du voyage à l'équateur; idem. Mesure des trois premiers degrés du méridien*).

Другой отряд ученых был послан в Лапландию, чтобы и там произвести подобные же измерения. Во главе был Maupertuis и при нем Clairaut и Celsius — шведский астроном. Описание этой экспедиции можно найти в ставшем весьма редким сочинении аббата Outhier.

Из этих наблюдений, во всяком случае, следовало, что Земля у полюсов сжата, но определить величину сжатия не было возможно, ибо наблюдения не были достаточно согласны между собою. Долгое время делали разного рода гипотезы, основываясь на этом разногласии, пока, наконец, пришли к заключению, что причина его заключается в погрешностях наблюдений.

Melandersholm предложил поэтому Швеции произвести в Лапландии вторичное измерение. Сперва оно было произведено Svanberg'ом и Everbom'ом и охватывало $1\frac{1}{2}$ °, т. е. немного более французского.

Места стоянок были те же, как и у Французов, и их геодезические измерения найдены были точными, но не астрономические определения. Это шведское измерение вполне согласовалось с Перуанским («*Exposition des opérations faites en Laponie etc. par Svanberg*», Stockholm).

Lacaille на мысе Доброй Надежды также произвел градусное измерение, но оно не вполне удачно.

Были произведены и другие измерения, которые, однако, по своей малой точности, совершенно непригодны, напр.: Lisganig — в Австрии, Boscowich — в Церковной области, Besscaria — в Пиемонте и т. д.

Они лишь больше затемняли вопрос, нежели разъясняли его. Была также измерена дуга в Пенсильвании Messon'ом и Tikson'ом.

После французской революции, когда изменили все, что имело отношение к прошлому, было решено принять новые меры и веса и притом взятые из природы, именно — меридиан, ибо длина маятника находится также в зависимости от произвольного подразделения времени. Поэтому правительством было поручено Méchain'у и Delambre'у произвести измерение от Дюнкирхена до Барселоны, т. е. около 10°. Северная часть до Rodez измерена

Delambre'ом, южная — Méchain'ом. Измерение произведено повторительными кругами.

Это французское измерение показало также много ненормальностей, которые, может быть, следуют отнести к плохому качеству инструментов, а может быть, зависит и от строения Земли. Это измерение, при сопоставлении с Перуанским, дало верную величину сжатия Земли. Отдельные участки измерения, при сличении между собою, давали гораздо более сильное сжатие.

От Барселоны Biot и Arago продолжили измерение до Formenterra, но мы еще не имеем результатов этого измерения, хотя о них и много раз сообщалось (*Delambre. Base du système métrique*, 3 vol., in-4°).

Барон v. Zach в 1803 г. получил от прусского короля поручение произвести съемку поля сражения близ Erfurht'a и хотел воспользоваться случаем, чтобы измерить дугу меридиана. Меридиан взят проходящий через обсерваторию в Готе, так что его направление давалось пассажным инструментом; было избрано много хороших пунктов, один треугольник был заложен с вершинами: Брокен, Геркулес, Иистельберг; был уже измерен базис, длиною около 2 миль, но все пошло прахом. Во время войны все знаки были уничтожены. Zach после того покинул Германию, так что даже и сделанное стало недоступным.

Точно так же, по случаю топографической съемки в Англии в 1802 г., майором Mudge'ем была измерена дуга меридиана от острова White на юге до Aiston'a к северу от него на $2^{\circ} 30'$.

В четырех местах этой дуги произведены астрономические наблюдения. Это измерение, при сопоставлении с Перуанским, дает верный результат, отдельные же четыре участка между собою — противоположный, подобный Кассиниевскому.

В Ост-Индии теперь занят производством измерений английский офицер, полковник Lambton. Он ведет измерение двух меридианов в расстоянии приблизительно 30 миль один от другого. Меньшая из дуг, им измеренных, заключает $1^{\circ} 35'$, большая доведена уже до 7° и будет продолжена далее. Основываясь на этом измерении Walbek, проф. в Або, сопоставил его с некоторыми другими при помощи более хороших способов и пришел к выводу, что сжатие Земли равно $\frac{1}{303}$, что и представляется правильным.

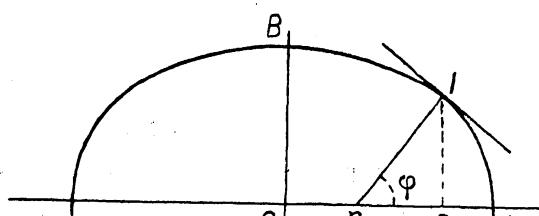
Три года тому назад начато производством измерение в Дании под руководством Schumacher'a, оно простиралось от северной оконечности Ютландии до Lauenberg'a, т. е. около $4\frac{1}{4}^{\circ}$, и на большей части закончено, оно должно быть продолжено и через Ганновер.

Часто пробовали производить также измерения градусов долготы для определения фигуры Земли, но при теперешних способах определения долгот, при которых осталось сомнение в несколько секунд, оно невозможно.

Чем больше градусов заключают измеряемые участки, тем лучше, поэтому лучше пользоваться измерениями долгот на севере, нежели близ экватора, поэтому Schumacher соединяет датское измерение широт с измерением долгот.

§ 32. Широта мест географическая и исправленная (геоцентрическая). Итак, Землю можно представить как образованную

вращением полуэллипса около малой оси. Эллипс можно представить происшедшим из круга, коего ординаты сжаты в определенном отношении. Представим себе сперва круг, описанный около эллипса, так что их центры совпадают, и возьмем диаметр круга, направленный по большой оси эллипса, за ось абсцисс, тогда, обозначая через x — абсциссу (считаемую от центра), общую обоим кривым, через y — ординату точки эллипса и через y' — ординату точки круга, будет



Фиг. 16.

вращением полуэллипса около малой оси к большой), т. е. $y' = \frac{a}{b}y$, значит

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

известное уравнение эллипса.

Пусть I есть место на поверхности Земли, его координаты $y = IQ$, $x = CQ$, $\phi = InA$ — наблюденная высота полюса в этом месте, s — дуга AI эллипса, In — нормаль к эллипсу в точке I , тогда, как известно:

$$-\frac{dx}{ds} = \sin \phi \quad (1)$$

$$\frac{dy}{ds} = \cos \phi \quad (2)$$

Сопоставляя эллипс с кругом, около него описанным (Фиг. 17), называют угол ϕ' исправленною высотою полюса, затем имеем:

$$x = a \cos \psi \quad (3)$$

$$y = b \sin \psi \quad (4)$$

и положив $r = IC$:

$$x = r \cos \varphi' \quad (5)$$

$$y = r \sin \varphi' \quad (6)$$

следовательно, на основании (1), (2), (3) и (4), будет:

$$\frac{a \sin \psi \cdot d\psi}{ds} = \sin \varphi; \quad \frac{b \cos \psi \cdot d\psi}{ds} = \cos \varphi$$

Отсюда:

$$\frac{a}{b} \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi$$

Затем, на основании (3), (4), (5), (6):

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \psi = \frac{b^2}{a^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

$$x = \frac{a}{\sec \psi} = \frac{a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}} = \sqrt{\frac{a}{1 + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{a \cos \varphi}{\cos^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}}$$

Но полудиаметр параллели, проходящей через данное место, есть x , и поэтому в предыдущей формуле мы имеем все, что необходимо для того, чтобы подвергнуть вычислению градусное измерение по долготе.

По диаметру легко находится окружность, а разделив ее полудлину на 180, получим длину 1° .

Для экватора $\frac{\pi a}{180} = G$ — градус экватора, значит

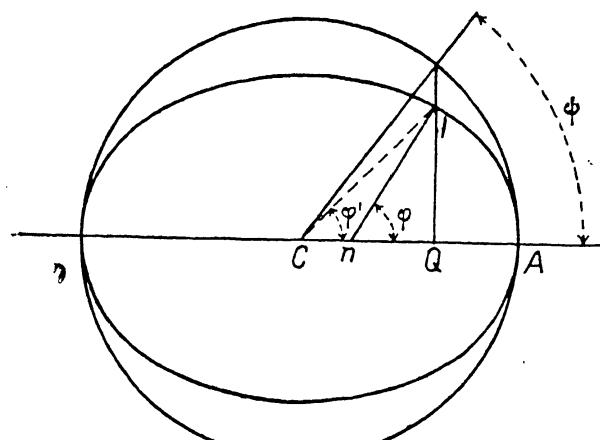
$$\frac{G \cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}} = \text{градус параллели для высоты полюса } \varphi.$$

Нам нужно еще составить выражение для r , мы его получим так:

$$r \cos \varphi' = \frac{a^2 \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

и

$$r = \frac{a^2 \cos \varphi \cdot \sqrt{1 + \frac{b^4}{a^4} \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{a^4 \cos^2 \varphi + b^4 \sin^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$



Фиг. 17.

а так как

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tg} \varphi}$$

то будет

$$\begin{aligned} r &= a \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi + \frac{b^4}{a^4} \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}} = a \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi'}{1 + \operatorname{tg} \varphi' \operatorname{tg} \varphi}} = \\ &= \frac{a}{\cos \varphi'} \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg} \varphi' \operatorname{tg} \varphi}} = \frac{a}{\cos \varphi'} \sqrt{\frac{\cos \varphi' \cos \varphi}{\cos \varphi' \cos \varphi + \sin \varphi' \sin \varphi}} = \\ &= a \sqrt{\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi' \cos(\varphi - \varphi')}} \end{aligned}$$

§ 33. Длина 1° меридиана в разных широтах. Величина дуги меридиана может быть найдена спрямлением дуги эллипса. Но такой точности не требуется, ибо сжатие весьма мало и вообще самое измерение не настолько точно само по себе, чтобы разность в несколько дюймов могла быть замечена, поэтому, когда измеренная дуга заключает лишь около 2° , можно просто сопоставлять величину бесконечно малой дуги меридиана с бесконечно малым изменением высоты полюса, иными словами — разыскать члену равно $\frac{ds}{d\varphi}$.

Из предыдущего имеем

$$dx = -ds \cdot \sin \varphi$$

вместе с тем

$$x = a \cos \psi$$

Значит,

$$dx = -a \sin \psi d\psi$$

Все задачи, где приходится пользоваться выражением r , такого рода, что требуются и все прочие выражения, поэтому позволительно придать формулам более удобный вид, вводя в них угол $\varphi' = ICA$, таким образом имеем

$$r = a \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi + \frac{b^4}{a^4} \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}}$$

При всяком дифференцировании предполагается, что дуга выражена в такой мере, единица которой есть радиус, поэтому, если мы желаем выразить $d\psi$ в градусах, то надо писать $\frac{\pi}{180} d\psi$, и из предыдущего уравнения получим

$$a \frac{\pi}{180} \sin \psi d\psi = ds \cdot \sin \phi$$

но

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \phi$$

поэтому

$$d\psi = \frac{b}{a} \frac{\cos^2 \psi}{\cos^2 \phi} d\phi$$

следовательно будет

$$ds \cdot \sin \phi = \frac{b \sin \psi \cos^2 \psi \cdot d\phi}{\cos^2 \phi} \cdot \frac{\pi}{180}$$

и

$$\frac{ds}{d\phi} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\cos^3 \psi}{\cos^3 \phi}$$

Если же желательно освободиться от ψ , то так как

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}} = \frac{a \cos \phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}}$$

то будет

$$\frac{ds}{d\phi} = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{a^2 b^3}{(a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi)^{3/2}}$$

Если мы пожелаем применять на практике эту формулу, то возникает вопрос: высоту полюса какой точки измеренной дуги надо брать? Если взять северный конец, то получим величину меньше истинной, для южного — больше, поэтому берут высоту полюса для средней точки, и пока дуга не слишком велика, можно вполне хорошо пользоваться этой формулой.

Можно ее и преобразовать, вводя в нее градус экватора

$$G = \frac{\pi a}{180}$$

тогда будет

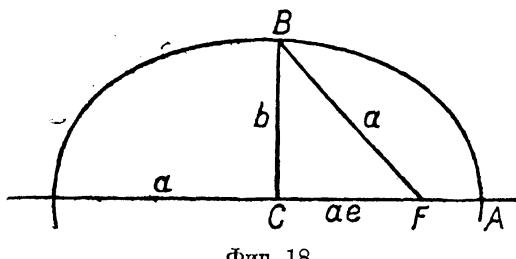
$$\Delta s = \frac{ab^3 G \cdot \Delta \phi}{(a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} = \frac{\frac{b^2}{a^2} \cdot G \cdot \Delta \phi}{\left(\cos^2 \phi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \phi\right)^{3/2}}$$

Формула принимает еще более сжатый вид, если, вместо полуосей, ввести эксцентриситет, который обозначим через e , так что

$$e = \frac{FC}{CA} \text{ и } CF = e \cdot a$$

Но

$$BF^2 = CF^2 + BC^2 \quad \text{или} \quad a^2 = b^2 + a^2 e^2$$



Фиг. 18.

Значит,

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

следовательно

$$\Delta s = \frac{(1 - e^2) \cdot G}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \cdot \Delta \phi$$

Можно ввести, вместо эксцентриситета e , сжатие ϵ , достаточно выразить e через сжатие и подставить в предыдущую формулу.

Сжатием ϵ называется разность

$$\epsilon = \frac{a}{b} - 1$$

следовательно:

$$1 - \epsilon = \frac{a}{b}, \quad \frac{1}{1 - \epsilon} = \frac{b}{a}$$

$$1 - e^2 = \frac{1}{(1 - \epsilon)^2} \quad \text{и} \quad e^2 = \frac{2\epsilon + \epsilon^2}{1 + 2\epsilon + \epsilon^2}$$

Так как сжатие всегда задается в виде дроби, числитель которой 1, то пусть будет $\epsilon = \frac{1}{m}$, тогда

$$e^2 = \frac{1 + 2m}{(1 + m)^2}$$

и

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} - 1$$

§ 34. Нахождение сжатия по измерениям двух дуг меридиана.

Задача. По двум измерениям дуги меридиана вычислить сжатие. Пусть произведено измерение градусов (в котором мы положим $\Delta\phi = \Delta\phi_1$), причем дуги не слишком велики, и положим, что длина градуса в средней

широте ϕ равна g единицам меры, в широте ϕ_1 равна g_1 , тогда по предыдущему будет:

$$g = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{G}{\left(\cos^2 \phi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \phi\right)^{3/2}} \quad (1)$$

$$g_1 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{G}{\left(\cos^2 \phi_1 + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \phi_1\right)^{3/2}} \quad (2)$$

из (1) и (2) следует

$$\frac{\cos^2 \phi_1 + \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \phi_1}{\cos^2 \phi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \phi} = \left(\frac{g}{g_1}\right)^{2/3}$$

Отсюда находим

$$\frac{b^2}{a^2} \left[\sin^2 \phi_1 - \left(\frac{g}{g_1}\right)^{2/3} \sin^2 \phi \right] = \left(\frac{g}{g_1}\right)^{2/3} [\cos^2 \phi - \cos^2 \phi_1]$$

что и доставит величину $\frac{b^2}{a^2}$, по которой легко находятся ϵ и e .

Подставив в формулу (1) известную уже теперь величину $\frac{b^2}{a^2}$, найдем $G = \frac{a\pi}{180}$, а следовательно, и в отдельности a и b .

Здесь уместно сказать несколько слов о долготе.

Долгота, подобно тому как на небе прямое восхождение, считается от некоторой начальной точки, которая, однако, не есть одна и та же как на небе.

Прежде брали Ферро за начало или собственно, так как там нет обсерватории и определено установленной точки, то брали лежащую на 20° западнее Парижской обсерватории.

Астрономы считают долготы также по большей части от Парижа и выражают их во времени.

§ 35. Параллакс. Вывод общих формул. Параллакс есть разница в направлениях на то же самое небесное тело из двух различных точек земной поверхности. В более узком смысле, это есть угол, образуемый двумя прямыми, проведенными к светилу, от места на поверхности Земли и из ее центра.

Рассматривают также горизонтальный параллакс, когда светило находится в таком положении, что синус параллакса равен отношению полудиаметра Земли, проведенному через зенит, к расстоянию от светила до центра Земли, т. е. когда светило находится на горизонте.

Если принять Землю за сфериод, то для всякого места будет свой горизонтальный параллакс, по крайней мере для светил, не слишком

удаленных от Земли, напр. Луны, поэтому обыкновенно в эфемеридах горизонтальный параллакс Луны относят к экватору, по нему легко вычислить горизонтальный параллакс для всякого места, высота полюса которого известна, как это будет показано ниже.

Нетрудно видеть, какое влияние оказывает параллакс на место, в котором нам представляется находящимся близкое светило.

Для весьма близкого светила мы можем различать два места: *видимое*, т. е. то, в котором оно нам кажется и которое определяется прямою, проведеною от нас к светилу, и его *истинное* место, т. е. то, которое определяется направлением прямой, проведенной из центра Земли.

Пусть будет (фиг. 19): O — место наблюдения, Z — зенит, C — центр Земли, L — Луна, R — радиус Земли, r — расстояние до Луны от центра Земли, тогда: OLC — абсолютный параллакс, ZOL — видимое зенитное расстояние, т. е. зенитное расстояние под влиянием параллакса, ZCL — истинное зенитное расстояние, или зенитное расстояние, освобожденное от влияния параллакса.

Сделаем следующие обозначения: z' — видимое зенитное расстояние, z — истинное, p — абсолютный параллакс, тогда

$$\frac{r}{R} = \frac{\sin z'}{\sin p} \text{ и } z' = z + p$$

поэтому, зная отношение $\frac{R}{r}$ и z' , можно вычислить истинное зенитное расстояние.

Легко видеть, что параллакс наибольший, когда $z' = 90^\circ$, это и есть горизонтальный параллакс P , тогда будет

$$\sin p = \sin P \sin z'$$

ибо

$$\sin P = \frac{R}{r}$$

Если отношение $\frac{R}{r}$ весьма малое, то и горизонтальный параллакс не будет велик, для Луны он не превосходит 1° , поэтому в практике можно синусы параллакса считать пропорциональными своим дугам, и тогда будет

$$p = P \sin z'$$

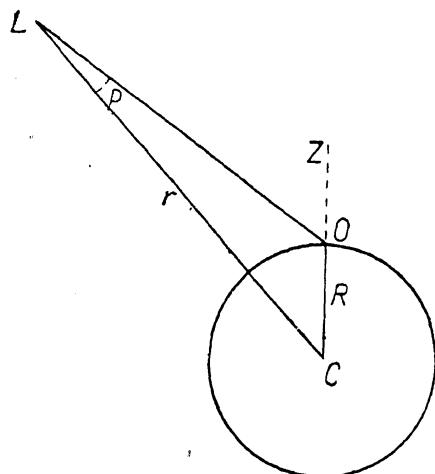
Когда дано истинное зенитное расстояние, то также легко найти видимое.

Имеем

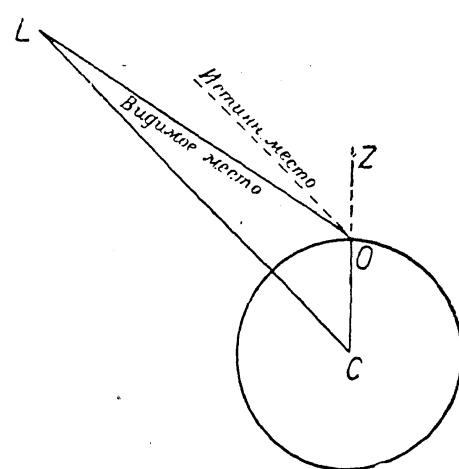
$$\operatorname{tg} p = \frac{R \sin z}{r - R \cos z} = \frac{\sin P \sin z}{1 - \sin P \cos z}$$

при этом $\sin P \cos z$ можно пренебречь по сравнению с 1, ибо $\sin P$ — малая величина, и писать

$$\operatorname{tg} p = P \cdot \sin z$$



Фиг. 19.



Фиг. 20.

При этом выводе предположено, что истинное место, видимое место и зенит лежат в одной плоскости, именно — вертикальной, что и будет всегда, если Землю принять за шар, вообще же — только когда светило находится в меридиане. В этом последнем случае истинное место имеет то же самое прямое восхождение, как и видимое, но другое склонение, отсюда понятны выражения — видимое и истинное склонения.

По видимым склонениям светила для двух мест Земли можно определить горизонтальный параллакс.

При предположении, что форма Земли сфероидальная, прямая, проведенная из центра Земли к месту наблюдения, не будет проходить через зенит, и на небесной сфере ей будет соответствовать некоторая другая точка. Эту точку в некоторых руководствах называют *вершиной*, называя попрежнему зенитом ту точку, которой это название придано в Астрономии вообще.

Но если желательно различать таким образом обе эти точки, придавая им различные названия, то было бы правильнее вершиной называть ту точку, которую зовут зенит, и наоборот, эту вновь введенную называть зенит, ибо слово зенит означает не что иное, как «точка». Но до сих пор у астрономов нет обыкновения делать различия между этими двумя словами.

Я буду называть эту точку «исправленный зенит», он легко находится, если воспользоваться «исправленной» высотою полюса.

Спрашивается, каким образом определить горизонтальный параллакс светила из наблюдений.

В двух местах, лежащих на том же меридиане, определяют зенитные расстояния или склонения светила в момент его прохождения через меридиан. Если по этим данным желательно определить приближенную величину горизонтального параллакса, то не принимают в расчет сфероидального вида Земли, и тогда вычисление очень просто.

Пусть будет:

δ и δ_1 — наблюденные склонения;
 z' и z'_1 — наблюденные или по известной высоте полюса вычисленные зенитные расстояния

Тогда будет:

$$\begin{aligned} \text{истинное склонение для 1-го места наблюдения: } & \delta - P \sin z' \\ \text{» } & \text{» } \text{» } \text{» } \text{» } \delta_1 - P \sin z_1 \end{aligned}$$

Эти две величины должны быть очевидно равны, и значит, будет

$$\frac{\delta - \delta_1}{\sin z'_1 - \sin z'} = P$$

в предположении, как уже сказано, что Земля есть шар.

Здесь параллакс P принимается положительным, когда он южный, и отрицательным, когда он северный, чтобы не иметь дела с различными знаками.

Точнее определится P , если местами наблюдений распорядиться так, чтобы в знаменателе оба синуса складывались, вследствие чего он будет больше и самое определение точнее.

Если принимать во внимание сфероидальную форму Земли, то, вместо зенита, надо брать исправленный зенит, и тогда P не для всех мест Земли одинаково, ибо местные радиусы Земли не везде между собою равны.

Мы сохраним предположение, нами сделанное и для практики достаточное, что P пропорционально своему синусу, который равен $\frac{R}{r}$.

Пусть R — местный полудиаметр первого места, R_1 — второго, a — экватора, и пусть P обозначает экваториальный горизонтальный параллакс, тогда будет:

$$\begin{aligned} \text{параллакс для 1-го места: } & \frac{R}{a} \cdot P \\ \text{» } & \text{» } \text{» } \text{» } \frac{R_1}{a} \cdot P \end{aligned}$$

и значит, как и раньше,

$$\delta + P \cdot \frac{R}{a} \sin z' = \delta_1 + P \frac{R_1}{a} \sin z'_1$$

причем z' и z'_1 должны считаться от исправленного зенита, P принимается лишь как положительная величина.

Решение может быть дано и геометрически:

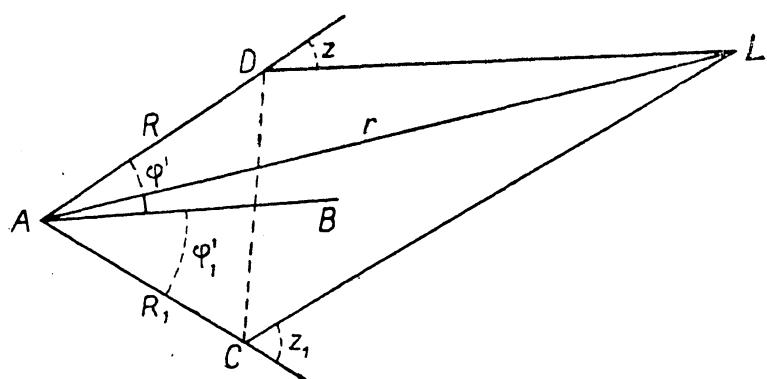
Пусть будет:

$a = AB$ — полудиаметр экватора,

$AD = R$ — местный полудиаметр 1-го места,

$AC = R_1$ — » » 2-го »

L — Луна.



Фиг. 21.

Требуется найти по известным z и z_1 , ϕ' и ϕ'_1 , R и R_1 расстояние $AL = r$ и затем $P = \frac{a}{r}$ — горизонтальный экваториальный параллакс.

Решение видно из чертежа:

Аналитическое рассмотрение вопроса гораздо проще. Пусть будет (Фиг. 21):

r — расстояние Луны до центра Земли;

δ — истинное освобожденное от параллакса склонение;

ϕ' и ϕ'' — исправленные широты обоих мест;

δ' и δ'' — наблюденные склонения;

R' и R'' — радиусы Земли для 1-го и 2-го места.

Очевидно будет:

$$r \sin \delta = AB; R' \cos \phi' = CK$$

$$r \cos \delta = AC; R' \sin \phi' = DK = AG$$

Следовательно,

$$\frac{BG}{DG} \operatorname{tg} \delta = \frac{r \sin \delta - R' \sin \phi'}{r \cos \delta - R' \cos \phi'} \quad (1)$$

и совершенно так же для второго места:

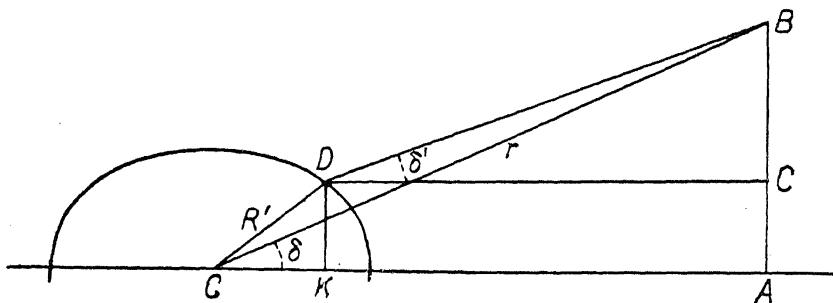
$$\operatorname{tg} \delta'' = \frac{r \sin \delta - R'' \sin \varphi''}{r \cos \delta - R'' \cos \varphi''} \quad (2)$$

Из (1) непосредственно следует

$$\frac{\sin \delta'}{\cos \delta'} r \cos \delta - \frac{\sin \delta'}{\cos \delta'} R' \cos \varphi' = r \sin \delta - R' \sin \varphi'$$

Умножив на $\cos \delta'$, получим по приведении:

$$r \sin (\delta - \delta') = R' \sin (\varphi' - \delta') \quad (3)$$



Фиг. 22.

и совершенно так же:

$$r \sin (\delta - \delta'') = R'' \sin (\varphi'' - \delta'') \quad (4)$$

иначе:

$$\sin (\text{абс. паралл.}) = \sin (\text{гориз. паралл.}) \sin (\text{исправл. зен. расст.})$$

Из равенств (3) и (4) легко найти δ и затем r .

Я не считаю, однако, это решение за самое практическое, так как оно не ведет непосредственно к цели. Лучше следующее. Пусть будет:

$$r \cos \delta = x; \quad r \sin \delta = y$$

тогда:

$$y - R' \sin \varphi' = x \operatorname{tg} \delta' - R' \cos \varphi' \operatorname{tg} \delta' \quad (5)$$

$$y - R'' \sin \varphi'' = x \operatorname{tg} \delta'' - R'' \cos \varphi'' \operatorname{tg} \delta'' \quad (6)$$

Вычтя одно из этих уравнений из другого, исключим y ; найдя x , находим затем y , и по x и y получаем

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Но так как эти формулы едва ли найдут применение в астрономии, то я не буду дальше на них останавливаться и ограничусь лишь сказанным, чтобы показать возможность такого изложения.

§ 36. Горизонтальный экваториальный параллакс. Горизонтальный экваториальный параллакс Луны теперь известен астрономам с большою точностью; погрешность, на которую он слишком велик или слишком мал, для данного места и времени находится вычислением, и так как этот способ гораздо проще, нежели непосредственное его определение, то ему и отдают обыкновенно предпочтение.

Если же два места, где наблюдения произведены, не лежат на одном и том же меридиане, то требуется некоторое простое приведение.

Если разность долгот обоих мест известна, то производят несколько дней подряд наблюдения, расчисляют по ним изменение зенитного расстояния в одни сутки, после чего интерполяцией находят изменение его, соответствующее стольким часам, сколько светилу надо для того, чтобы пройти с меридиана одного места на меридиан другого.

Но такой способ приведения на практике никогда не было надобности применять, ибо еще ранее были составлены хорошие таблицы движения Луны.

Такие наблюдения были произведены по поручению Французской Академии, для чего Lacaille жил на мысе Доброй Надежды, Lalande — в Берлине.

Если разность долгот неизвестна, то в обоих пунктах наблюдают не только склонение, но и прямое восхождение. Так как параллакс влияет и на прямое восхождение, то можно найти разность долгот, если сделать много таких наблюдений и затем проинтерполировать.

Параллакс Луны, однако, всегда немного изменяется, поэтому, наблюдая пассажным инструментом прохождения Луны, простым вычислением определяют изменения горизонтального ее параллакса, чтобы принять их в расчет.

Кроме Луны, есть еще тела, которые не вполне свободны от параллакса — планеты и Солнце.

Lacaille пытался определить также и параллакс Марса.

Возможно определить параллакс и по наблюдениям с одного пункта, но, правда, не с большою точностью.

§ 37. Параллакс склонения и прямого восхождения.

Мы рассматривали до сих пор тот случай, когда светило находится в меридиане и, следовательно, когда параллакс оказывает влияние лишь на склонение. Более частый случай, однако, тот, когда светило находится вне меридиана. Необходимо иметь возможность установить точную зависимость между видимым местом и истинным. Часто при наблюдениях, напр., комет, которые приходится во время их временного появления наблюдать и вне меридиана, надо иметь возможность находить по видимому их месту истинное.

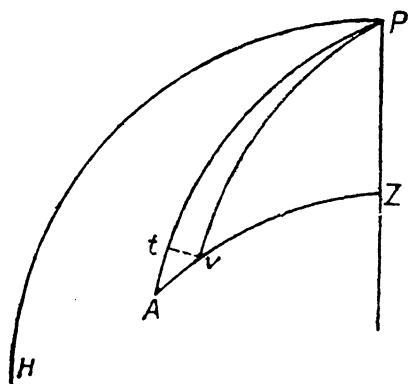
Хотя наблюдение комет и не обладает большою точностью, но так как их параллакс достигает иногда $4'$, то им пренебрегать нельзя. Для вновь открытых планет пришлось также встретиться с этим случаем, но теперь мы настолько точно знаем их движения, что наблюдения в меридиане производятся лишь для еще более точного определения их движения.

Чаще всего встречается случай, когда по истинному месту требуется найти видимое. Наши таблицы дают для Луны и планет истинные места,

поэтому, если надо наблюдать такое явление, при котором требуется возможно точно знать, где оно произойдет, напр. при покрытии звезд Луною, то по показанному в таблицах истинному месту и нужно бывает вычислить видимое.

Я ограничусь сперва приближенным решением задачи, точное будет дано ниже.

Пусть P — полюс, Z — зенит, A — видимое, v — истинное место светила, PH — ча-



Фиг. 23.

совой круг, в котором в момент наблюдений находится точка весеннего равноденствия, тогда HPA есть видимое прямое восхождение светила, HPv — его истинное прямое восхождение, $90^\circ - PA$ — его видимое склонение, $90^\circ - Pv$ — его истинное склонение. Отложив $Pt = Pv$, получим tv — параллакс по прямому восхождению; если не принимать в расчет сфероидальности Земли, то Z есть обыкновенный зенит, если же принимать, то — исправленный.

Так как tv есть весьма малая дуга, то ее можно принимать равной перпендикуляру, опущенному из v на AP , и вообще можно рассматривать весь треугольник tAv как плоский, тогда будет:

$$(\text{абс. паралл.}) \cdot \cos A = \text{параллакс склонения}$$

$$(\text{абс. паралл.}) \cdot \sin A = tv$$

Так как дуга tv принадлежит малому (параллельному) кругу, то и ее градусы должны измеряться в долях этого круга, или же мы должны заменить tv дугой экватора, лежащей между кругами склонения PA и Pv и выражющей в градусах параллакс по прямому восхождению. Но эта дуга равна $\frac{tv}{\cos \delta}$, следовательно

$$\text{параллакс прям. восх.} = \frac{(\text{абс. паралл.}) \sin A}{\cos \delta}$$

Абсолютный параллакс можно брать для какого угодно места, ибо разница настолько мала, что она совершенно пропадает по сравнению с погрешностью, происходящей от сделанных выше допущений.

Точная формула для параллакса прямого восхождения легко получается из рассмотрения чертежа, а именно:

$$\sin(\text{пар. пр. восх.}) = \frac{\sin(\text{абс. пар.}) \sin(\text{паралл. угла при видим. месте})}{\cos(\text{истинн. склонение})}$$

Можно воспользоваться подобным же способом рассмотрения и для параллакса склонения, чтобы получить для него строгую формулу, но я на этом останавливаюсь не буду.

§ 38. Определение величины параллакса из наблюдений. Как уже было упомянуто, можно по наблюдениям, производимым в одном и том же месте, определить горизонтальный параллакс, — это выполняется следующим образом: из приведенных выше формул видно, что параллакс прямых восхождений, зависящий от паралактического угла, обращается в 0, когда этот угол равен 0; это бывает в меридиане, поэтому мы можем считать этот угол по западную сторону меридиана положительным, по восточную — отрицательным. Таким образом, если небесное тело остается несколько часов в одинаковом удалении от Земли, то его прямое восхождение подвержено влиянию параллакса лишь вне меридиана, в меридиане же оно совпадает с истинным прямым восхождением светила. До прохождения через меридиан оно будет меньше истинного, после прохождения — больше, и та величина, на которую оно больше или меньше, и есть параллакс прямого восхождения, который, следовательно, и может быть найден из наблюдений.

Если прямое восхождение изменяется с течением времени, то это изменение легко принять в расчет, наблюдая истинное прямое восхождение при прохождении через меридиан и определяя изменения интерполяцией.

Эта метода, правда, не дает очень точных результатов, но все же ею пользовались для комет. Чтобы по параллаксу прямых восхождений найти горизонтальный, поступают так.

Очевидно будет:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\text{параллактич. угла при вид. месте})}{\cos \varphi} &= \frac{\sin(\text{видим. часов. угла})}{\sin z'} \\ \sin(\text{паралл. } AR) &= \frac{\sin h' \cos \varphi}{\sin z'} \cdot \frac{\sin(\text{абс. паралл.})}{\cos(\text{истинн. склон.})} \\ &= \frac{\sin h' \cos \varphi}{\cos \delta} \cdot \sin(\text{гориз. паралл.}) \end{aligned}$$

где через h' обозначен видимый часовой угол.

При этом исследовании вполне можно положить

$$\cos \delta = \cos \delta'$$

и тогда множитель $\frac{\sin h' \cos \varphi}{\cos \delta'}$ будет известен.

Заменив также синусы параллакса дугою, получим

$$\text{паралл. } AR = \frac{\sin h' \cos \varphi}{\cos \delta'} \cdot (\text{гориз. паралл.}).$$

Откуда горизонтальный параллакс и найдется.

§ 39. Точные формулы для параллакса. Теперь я покажу, каким образом параллакс прямого восхождения и параллакс склонения могут быть вычисляемы с полной точностью. Я воспользуюсь для этого способом трех координат.

Проведем через центр Земли одну из координатных плоскостей, за которую примем плоскость экватора.

Тогда верхнюю и нижнюю часть беспредельного пространства, разделяемого этою плоскостью, мы назовем северною и южною и будем их различать знаками + и —.

Вторую плоскость мы проведем перпендикулярно первой через точку весеннего равноденствия, положение третьей плоскости определяется самобою.

Расстояние светила до этих трех плоскостей и суть три его координаты, которые мы обозначим соответственно: до первой плоскости через z , до второй — через y и до третьей — через x .

Пусть будет попрежнему: α и δ — истинные прямое восхождение и склонение, α' и δ' — видимые прямое восхождение и склонение, r — расстояние от светила до центра Земли, тогда будет

$$z = r \sin \delta$$

затем

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \cos \delta$$

значит:

$$x = r \cos \delta \cos \alpha$$

$$y = r \cos \delta \sin \alpha$$

Пусть будут X, Y, Z — координаты места наблюдения и R — соответствующий полудиаметр Земли. Для определения склонения возьмем исправленную высоту полюса φ , для прямого восхождения — звездное время,

В момент наблюдения выраженное в дуговой мере, пусть оно будет θ , тогда будем иметь:

$$X = R \cos \varphi \cos \theta$$

$$Y = R \cos \varphi \sin \theta$$

$$Z = R \sin \varphi$$

Вообразим теперь, что через место наблюдений проведены три плоскости, параллельные прежним, и обозначим соответствующими буквами со звездочками аналогичные прежним величины, тогда будет:

$$x' = r' \cos \delta' \cos \alpha'$$

$$y' = r' \cos \delta' \sin \alpha'$$

$$z' = r' \sin \delta'$$

Но очевидно, что

$$x = X + x' \quad \text{и} \quad x - X = x'$$

$$y = Y + y' \quad \text{и} \quad y - Y = y'$$

$$z = Z + z' \quad \text{и} \quad z - Z = z'$$

Итак, будет:

$$r \cos \delta \cos \alpha - R \cos \varphi \cos \theta = r' \cos \delta' \cos \alpha' \quad (1)$$

$$r \cos \delta \sin \alpha - R \cos \varphi \sin \theta = r' \cos \delta' \sin \alpha' \quad (2)$$

$$r \sin \delta - R \sin \varphi = r' \sin \delta' \quad (3)$$

Если данное место есть истинное, то все величины в левых частях этих равенств известны, и значит, найдутся стоящие в правых, а именно: разделив (2) на (1), получим $\tan \alpha'$, затем из (2) и (3) получается $\tan \delta'$ и т. д. Иногда требуется вычислить и r' , напр. для Луны, где таблицамидается расстояние до центра Земли, а надо его знать до места наблюдений.

Чтобы придать более удобный вид этим уравнениям, умножим (1) на $\sin \alpha$, (2) на $\cos \alpha$ и вычтем одно из другого, тогда будет

$$R \cos \varphi \sin(\alpha - \theta) = r' \cos \delta' \sin(\alpha' - \alpha) \quad (4)$$

Умножив (1) на $\cos \alpha$, (2) на $\sin \alpha$ и сложив, получим

$$r \cos \delta - R \cos \varphi \cos(\theta - \alpha) = r' \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha) \quad (5)$$

вычисление по этим формулам точнее.

Вместо равноденственной линии, за пересечение первых двух плоскостей можно принять всякую другую, формулы остаются те же самые, только α будет означать прямое восхождение в более общем смысле, т. е. считаемое от произвольного начала, а не от точки равноденствия. Пусть прямое

расхождение этого начала есть h , тогда в предыдущих формулах надо писать: $\alpha - h$ и $\alpha' - h$, вместо α и α' , и $\theta - h$, вместо θ . Так как h произвольно, то можно положить $h = \alpha$, тогда формула (1) обратится в (5) и (2) — в (4), которые и можно бы вывести таким способом.

Чтобы сделать эти формулы короче, можно им придать следующий вид.

Из (4) и (5):

$$\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = \frac{R}{r} \cdot \frac{\cos \varphi \sin(\alpha - \theta)}{\cos \delta - \frac{R}{r} \cos \varphi \cos(\theta - \alpha)}. \quad (\text{I})$$

Из (3) и (5):

$$\operatorname{tg} \delta' = \frac{\cos(\alpha' - \alpha) \left[\sin \delta - \frac{R}{r} \sin \varphi \right]}{\cos \delta - \frac{R}{r} \cos \varphi \cos(\theta - \alpha)}. \quad (\text{II})$$

Часто желательно знать влияние параллакса на долготу и широту светила непосредственно, не вычисляя их по прямому восхождению и склонению.

Чтобы решить эту задачу, надо также применить три координатные плоскости, но иначе расположенные.

За основную плоскость берем плоскость эклиптики, вторую плоскость проведем опять через линию равноденствий, тогда получатся точно такие же формулы, только, вместо прямого восхождения, будет стоять долгота (т. е. λ , вместо α), вместо склонения — широта (т. е. β , вместо δ).

Эта задача имеет большую важность при наблюдениях покрытий звезд Луной. Решение ее можно найти у разных авторов, но под различными названиями. Весьма обычное, но устарелое название долготы и широты исправленного зенита есть: высота и долгота Nonagesimum'a. Это есть та точка, в которой круг широты, проведенный через зенит, пересекает эклиптику; эта точка, очевидно, лежит по середине между точками пересечения эклиптики с горизонтом, т. е. на 90° от каждой из них, почему ей и дано название «Nonagesimum». Высота ее дополняет широту зенита до 90° , долгота ее равна долготе зенита. Это название, кажется, принадлежит Кеплеру и относится еще к тому времени, когда горизонт имел в Астрономии столь большое значение.

Если в том же самом месте предстоит делать много наблюдений такого рода, то можно составить таблицу, аргументом которой служит звездное время, в двух других столбцах показаны широта и долгота зенита для данной высоты полюса и эклиптики. Если желательно принимать во внимание и изменение наклонности, то присоединяют еще один столбец, показывающий это изменение на отдельные месяцы.

Такого рода таблицы помещаются в собраниях астрономических таблиц.

Можно предыдущие формулы преобразовать так, что широта и долгота зенита не требуются. Такие формулы дал Olbers в «Astronomische Jahrbuch» (1810 или 1811). Но в них отпадает то облегчение, что можно сразу вычислять разность между видимым и истинным местом.

Можно еще поставить вопрос: истинное солнечное время ставится по видимому или по истинному месту Солнца? Его регулируют по истинному, освобожденному от влияния параллакса месту, таким образом два лежащих под тем же меридианом места имеют то же самое истинное солнечное время.

§ 40. Рефракция. Общее понятие о рефракции. Близ меридиана звезды не занимают друг относительно друга в точности того же положения, как находясь близ горизонта. Это кажущееся изменение происходит от двух причин: первая из них есть оптический обман, не оказывающий влияния на измерительные приборы; вторая есть рефракция, вследствие которой взаимные положения звезд изменяются и для измерительных приборов.

От оптического обмана кажется, что звезды отстоят друг от друга дальше близ горизонта, нежели близ зенита. Мы судим совершенно невольно по расстоянию до предмета об его величине, о расстоянии же мы также невольно заключаем по схождению взоров обоих глаз, поэтому кривые не могут дать хорошего понятия о расстоянии. Отсюда происходит, что звезды близ горизонта, расстояние до которого нам кажется всегда большим, ибо земные предметы близ горизонта настолько удаленные, что они почти не требуют сведения взоров, — заставляют прийти к невольному заключению, приписывающему звездам близ горизонта гораздо большие взаимные угловые расстояния, нежели когда они близ зенита.

Но что это есть оптический обман, — покажет сейчас же наблюдение измерительными приборами, которым обнаружится, что угловые расстояния между звездами у горизонта меньше, нежели когда они близ зенита.

Такое уменьшение расстояния между звездами, расположенными в том же вертикале, происходит от рефракции.

Оба эти явления еще заметнее для тел, имеющих значительный диск, напр., для Солнца. Простому глазу оно кажется близ горизонта больше, если же произвести наблюдения, то его горизонтальный диаметр в обоих положениях, т. е. при горизонте и на меридиане, одинаков, вертикальный же его диаметр становится тем больше, чем Солнце выше.

Причина рефракции известна уже давно, она заключается в атмосфере.

Каждый луч, вступающий из одной прозрачной среды в другую, отличной от нее плотности, отклоняется от своего пути. Если к границе обеих средин провести перпендикуляр, то луч приближается к нему при переходе из менее плотной в более плотную среду и удаляется от него в обратном случае. Синусы углов, образуемых лучом с перпендикуляром, находятся для тех же средин в постоянном отношении, все это достаточно известно из физики.

Snellius впервые открыл эти законы, но к Астрономии они были применены гораздо позже.

Однако арабам самое явление рефракции было уже известно. Тихо собственно уже дал ее величину, определенную им по наблюдениям 2 звезд, которые находятся в одном вертикале, причем одна из них вблизи горизонта, однако он полагал, что рефракция имеет место лишь начиная с некоторой высоты, что можно приписать несовершенству его инструментов.

Рефракция и параллакс действуют таким образом в противоположные стороны: первою светила повышаются от горизонта к зениту, вторым же они понижаются, если только не принимать сфероидического вида Земли. Действием рефракции звезды повышаются по направлению к обыкновенному зениту, параллаксом же понижаются по направлению от исправленного зенита.

§ 41. Определение рефракции из наблюдений в произвольном вертикале. Учение о рефракции приведено к его теперешнему состоянию поочередно наблюдениями и теоретическими исследованиями. Можно было бы по способу, который я ниже приведу, найти величину рефракции только из наблюдений, тем не менее этот способ прежде никогда не применялся.

Избирают несколько звезд, коих склонения меньше высоты полюса и которые никогда не заходят и, следовательно, пересекают тот же вертикаль дважды. Наблюдают их верхнюю кульминацию, определяют для некоторой избранной точки их дневного круга азимуты и замечают время; когда затем звезда на нижней части своего пути достигает того же азимута, вновь замечают время и делают то же и при нижней ее кульминации.

Пусть будет: Z — зенит, P — полюс, S — звезда, ZPS — наблюденный часовой угол. Так как рефракция не оказывает влияния на азимут, а лишь на высоту, то из вышеприведенных данных может быть найдена величина

рефракции. Положим, что чертеж представляет путь звезды, как он проходит на самом деле, без принятия в расчет рефракции.

Из наблюдений известен угол $ZPW = ZPS + \frac{1}{2}SPW$, а так как угол $ZWP = 90^\circ$, то можно найти ZP , т. е. дополнение высоты полюса до 90° . Таким образом можем вычислить высоту полюса совершенно не наблюдая высот, и значит, получится высота полюса, на которую рефракция при наблюдениях влияния не оказывала. Кроме того, надо определить радиус круга, его найдем по PW и SPW , таким образом получим не зависимое от рефракции склонение.

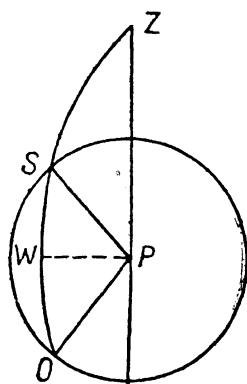
По известным высоте полюса и склонению легко найти истинную высоту звезды; если высота ее была наблюдена, то, сравняя ее с вычисленной, получим влияние рефракции.

Так как такие наблюдения дают рефракцию для высот в определенных границах, то надо один раз выбирать такую звезду, которая проходит весьма близко к зениту, другой раз — такую, которая на самом деле заходит, таким образом постепенно можно определить рефракцию из одних только наблюдений.

Из этих наблюдений окажется, что рефракция не пропорциональна зенитному расстоянию и не его синусу, а пропорциональна его тангенсу до значительной величины зенитного расстояния в 80° и даже более. Так как здесь не может быть достигнута очень большая точность, то можно принять, что рефракция вообще пропорциональна тангенсу зенитного расстояния, следовательно мы имеем некоторую постоянную величину, которую обозначим через k ; стоит только ее умножить на тангенс зенитного расстояния, и получится рефракция для всякой заданной высоты. Эта постоянная называется *постоянной рефракции*.

§ 42. Определение рефракционной постоянной из наблюдений, произведенных в меридиане. Так как в новейшее время наблюдения в меридиане отличаются преимущественною точностью, то важно знать методу, помошью которой рефракционная постоянная может быть найдена по наблюдениям в меридиане, ежедневно производимым на обсерваториях для других целей.

Наблюдают несколько звезд, склонения коих могут и не быть известны в точности, в их верхней и нижней кульминации, пусть α и α' — наблюденные зенитные расстояния звезды в верхней и нижней кульминации, ζ и ζ' — то же для другой звезды.



Фиг. 24.

Рефракция выражается формулой $\rho = k \operatorname{tg} z$, значит будет:

Рефракция Истинн. зен. расст.

$$\begin{aligned}k \operatorname{tg} z &= z + k \operatorname{tg} z \\k \operatorname{tg} z' &= z' + k \operatorname{tg} z' \\k \operatorname{tg} \zeta &= \zeta + k \operatorname{tg} \zeta \\k \operatorname{tg} \zeta' &= \zeta' + k \operatorname{tg} \zeta'\end{aligned}$$

Следовательно, дополнение высоты полюса до 90° будет

$$\frac{1}{2}[z + z' + k \operatorname{tg} z + k \operatorname{tg} z'] = \frac{1}{2}[\zeta + \zeta' + k \operatorname{tg} \zeta + k \operatorname{tg} \zeta']$$

В этом уравнении все известно, кроме k , которое, следовательно, легко найти. Надо, чтобы звезды имели сколь возможно разное склонение.

Рефракция зависит не только от зенитного расстояния, но и от плотности воздуха. Можно принять, что рефракция весьма близка к пропорциональности плотности воздуха. Это справедливо, правда, не для всех случаев: для малых высот это не совсем верно, но для больших это допущение вполне достаточно.

Чтобы наблюдать непосредственно плотность низшего слоя воздуха, служит манометр, известный нам из курса физики, но этот прибор не принят в Астрономии, здесь пользуются барометром и термометром. По закону Марриотта известно, что упругость воздуха при одинаковых температурах пропорциональна плотности его. Нагревание вызывает изменение плотности, которое составляет $1 : 1.375$, когда термометр Реомюра повышается от 0° до 80° , т. е. равно $\frac{1}{213}$ на один градус.

Пусть будет в одном случае показание термометра g , упругость или высота барометра e , плотность воздуха d , в другом g' , e' , d' , тогда

$$\frac{e}{e'} = \frac{d}{d'} \cdot \frac{1 + \frac{g}{213}}{1 + \frac{g'}{213}}$$

следовательно

$$d' = d \cdot \frac{1 + \frac{g}{213}}{1 + \frac{g'}{213}} \cdot \frac{e'}{e}$$

Высота барометра, которую надо подставить вместо e и e' , требует некоторой поправки, ибо упругость пропорциональна этим высотам лишь при одинаковых температурах; если же, напр., во втором случае температура выше, то ртуть более расширена, и значит, вес ее, которым собственно

упругость и измеряется, становится меньше. Пусть G и G' — температура ртути, расширение ртути на $1^{\circ} R$ равно $\frac{1}{4330}$, следовательно будет

$$d' = d \cdot \frac{1 + \frac{g}{213}}{1 + \frac{g'}{231}} \cdot b' \cdot \frac{1 + \frac{g}{4330}}{1 + \frac{g'}{4330}}$$

где b и b' — высоты барометра.

Понятно, что для выражения d' в числах надо принять какое-нибудь состояние атмосферы за нормальное, для которого положим $d = 1$. Обыкновенно принимают то состояние атмосферы, когда $b = 28$ дюймов, $G = 10^{\circ}$; французы берут $b = 0.76$ м.

Составлены таблицы, в которых показаны логарифмы трех вышеприведенных множителей, причем указано, какое состояние атмосферы принято за нормальное.

Чтобы все изложенное сделать еще яснее и чтобы вместе с тем показать, насколько точно получается рефракционная постоянная по приведенной выше формуле, я дам пример, рассчитываемый по Bessel'евым таблицам рефракций.

Я наблюдал 29 августа 1820 г. верхнее и нижнее прохождение 1 Draconis (Hevel) и получил следующие зенитные расстояния:

Верхн. кульмин.	30° 33' 53".83
Нижн.	46° 20' 55".82

Плотность воздуха, рассчитываемая по Bessel'евым формулам, была:

При верхн. кульмин.	9688
» Нижн. »	9919

27 августа я имел другое наблюдение: ν Ursae Maioris, и получил зенитные расстояния:

При верхн. кульмин.	8° 20' 41".49
» Нижн. »	68° 33' 6".81

Плотность воздуха при верхн. кульмин.	9657
» » » Нижн. »	9945

По этим данным находятся зенитные расстояния 1-й звезды:

Верхн. кульмин.	0.5721 $k +$ 30° 33' 53".83
Нижн.	0.0398 $k +$ 46° 20' 55".82

Для 2-й звезды:

Верхн. кульмин.	.	.	1.1416	$k + 8^{\circ} 20' 41".49$
Нижн.	»	.	2.5315	$k + 68^{\circ} 33' 6".81$

Отсюда, для дополнения высоты полюса, имеем из обоих первых наблюдений:

$$38^{\circ} 27' 24".82 + 0.8060k$$

из обоих вторых:

$$38^{\circ} 26' 54".15 + 1.3366k$$

Уравнивая эти величины, получим:

$$30".67 = 0.5306k$$

$$\text{т. е. } k = 57".80$$

Из этих наблюдений дополнение высоты полюса для Геттингена получается

$$38^{\circ} 28' 11".35$$

и самая высота $51^{\circ} 31' 48".65$, которая отличается от полученных на основании других наблюдений на $0".65$.

Другой пример, который я наблюдал 27 августа 1820 г., именно β Lynxis и δ Ursae Minoris, дал:

$$k = 58".2$$

$$\varphi = 51^{\circ} 31' 49".06$$

В таблицах Bessel'я рефракционная постоянная для средней рефракции (соответственно нормальному состоянию атмосферы и высоте над уровнем моря 45 футов) есть $57".49$.

§ 43. Математическая теория рефракций. Вывод формулы Bradley'я. Теоретические изыскания и здесь способствуют в большей мере развитию учения о рефракции. Вообразим себе, что Земля окружена бесчисленным множеством тонких слоев, плотность которых увеличивается сверху вниз.

Сперва мы оставим в стороне кривизну земной поверхности: при входе в 1-й слой отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно $1:m'$, во 2-й — равно $m':m''$, в 3-й — равно $m'':m'''$, в 4-й — равно $m^{IV}:m^{IV}$, значит синус первого угла падения относится к синусу последнего, как $1:m^{IV}$. Но первый угол падения есть освобожденное от рефракции

зенитное расстояние, последний — зенитное расстояние, измененное рефракцией.

Таким образом, обозначая рефракцию через ρ и придавая ее к наблюденному зенитному расстоянию, получим соотношение

$$\frac{\sin(z + \rho)}{\sin z'} = \frac{1}{m^{IV}}$$

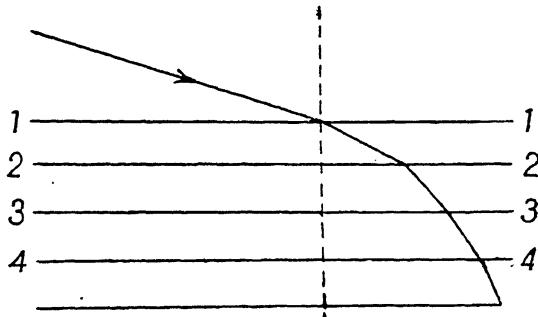
иначе:

$$\sin(z + \rho) = \frac{\sin z'}{m^{IV}}$$

Следовательно, в совершенно общем виде мы имеем:

$$m \sin(z + \rho) = \sin z$$

$$\sin(z + \rho) = \sin(z + \rho)$$



Фиг. 25.

Сложив, имеем

$$(1 + m) \sin(z + \rho) = 2 \sin\left(z + \frac{\rho}{2}\right) \cdot \cos \frac{\rho}{2}$$

Вычтя:

$$(1 - m) \sin(z + \rho) = 2 \cos\left(z + \frac{\rho}{2}\right) \sin \frac{\rho}{2}$$

следовательно, по разделении:

$$\frac{1 - m}{1 + m} \operatorname{tg}\left(z + \frac{\rho}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \rho$$

Так как $\frac{\rho}{2}$ весьма мало, то, вместо $\operatorname{tg} \frac{\rho}{2}$, можно брать самую дугу, предполагая, что ρ выражено в долях радиуса, следовательно, если ρ выражать в секундах, то будет

$$\rho = 412530 \cdot \frac{1 - m}{1 + m} \cdot \operatorname{tg}\left(z + \frac{\rho}{2}\right)$$

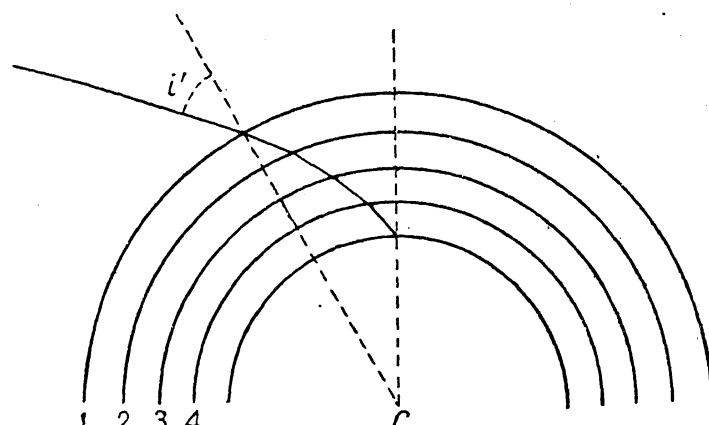
Таким образом доказано, что в этом случае рефракция весьма близка к пропорциональности тангенсу зенитного расстояния (к которому надо придать половину рефракции, что не составляет, однако, большой разницы, так как $\frac{\rho}{2}$ весьма мало).

В этой формуле кривизну Земли пренебрежено, что в том случае, когда луч падает не слишком наклонно, и может быть сделано.

Если желательно иметь формулу, в которой кривизна Земли принималась бы в соображение, то ее можно получить следующим образом, пред-

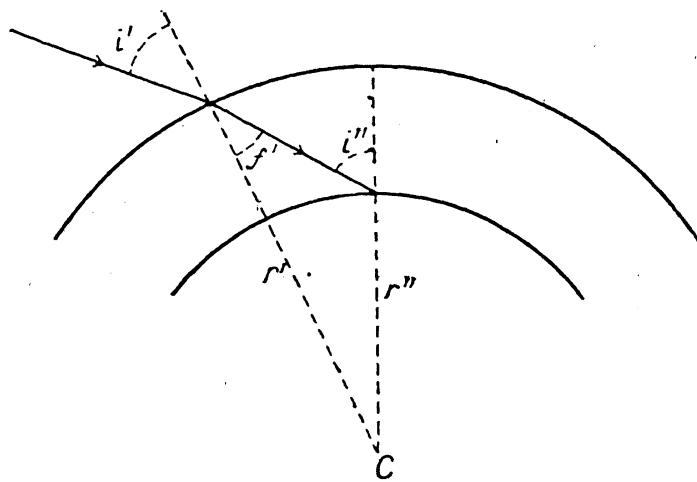
полагая Землю шарообразной, ибо небольшие отступления от шара здесь не имеют никакого значения.

Пусть падающий на границу атмосферы луч составляет с нормалью, которая идет из центра Земли к точке падения, угол i' ; этот угол после



Фиг. 26.

первого преломления пусть будет f' . Луч, падающий на второй слой, пусть составляет с своею нормально угол i'' , который преломлением обращается в f'' и т. д. Соответствующие поверхностям раздела радиусы обозначим



Фиг. 27.

через r' , r'' и т. д., показатели пусть будут: для первой поверхности $1:m'$, для второй $m':m''$ и т. д., тогда имеем:

$$\begin{aligned}\sin i' : \sin f' &= 1:m' \\ \sin i'' : \sin f'' &= m':m'' \\ \sin i''' : \sin f''' &= m'':m'''\end{aligned}$$

и т. д.

Из простого геометрического построения видно, что

$$\sin i'' : \sin i''' = r'' : r'$$

$$\sin i''' : \sin i^{IV} = r''' : r''$$

и т. д.

По перемножении этих отношений имеем:

$$\frac{\sin i'}{\sin i''} = \frac{r''}{r' m'}$$

$$\frac{\sin i''}{\sin i'''} = \frac{m' r'''}{m'' r''}$$

$$\frac{\sin i'''}{\sin i^{IV}} = \frac{m'' r^{IV}}{m''' r'''}$$

и т. д.

Таким образом углы f исключаются. Предыдущие отношения могут быть написаны так:

$$\frac{r' \sin i'}{1} = \frac{r'' \sin i''}{m'} = \frac{r''' \sin i'''}{m''} \text{ и т. д.}$$

Фиг. 28.

Отсюда следует, что $\frac{r \sin i}{m}$ есть величина постоянная.

Итак,

$$\frac{r \sin i}{m} = \frac{R \sin I}{M} = \text{const} \quad (\text{I})$$

Здесь I есть видимое зенитное расстояние, M — показатель преломления луча, переходящего из пустоты в слой воздуха в месте наблюдения.

На фиг. 28 изображен неправильный четырехугольник, образованный радиусом Земли, проведенным к месту наблюдения, двумя касательными к кривой, описываемой падающим лучом из точки, где он вступает в атмосферу до глаза наблюдателя, и радиусом, проведенным от центра Земли к точке входа луча в атмосферу.

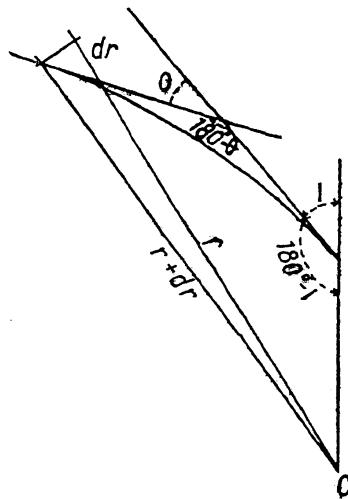
В этом четырехугольнике углы, кроме обозначенных на чертеже, суть i и $C = v$, следовательно будет

$$v + (180^\circ - I) + (180^\circ - \theta) + i = 360^\circ$$

иначе:

$$v + i - \theta = I \quad (\text{II})$$

Положение касательных может быть определено в полярных координатах, которые здесь r и v . Маленький треугольник, в который входит угол i ,



можно рассматривать как прямоугольный, ибо он бесконечно малый, таким образом будет

$$\operatorname{tg} i = \frac{rdv}{dr}$$

Дифференцируя уравнение (II), получим

$$dv = d\theta - di$$

Следовательно, будет

$$\operatorname{tg} i = \frac{r(d\theta - di)}{dr} \quad (\text{III})$$

Величину di надо также исключить, для этого дифференцируем уравнение (I) следующим образом: взяв сперва логарифмы, имеем

$$\log r + \log \sin i - \log m = \log \text{const}$$

следовательно

$$\frac{dr}{r} + \cotg i di - \frac{dm}{m} = 0$$

значит

$$di = \frac{r dm - m dr}{rm} \cdot \operatorname{tg} i$$

и, на основании уравнения (III), будет

$$\operatorname{tg} i = \frac{md\theta}{dm}$$

следовательно

$$d\theta = \frac{dm}{m} \cdot \operatorname{tg} i$$

Отсюда можно исключить $\operatorname{tg} i$, воспользовавшись уравнением (I), что дает

$$d\theta = \frac{R \sin I \cdot dm}{\sqrt{r^2 M^2 - m^2 R^2 \sin^2 I}}$$

m может быть выражено так, что из 1 вычитается некоторая, сохраняющая для воздуха свое значение, постоянная, умноженная на плотность, что для практики достаточно точно, хотя и не вполне согласуется с опытом.

Очевидно, что m есть функция r и, наоборот, r есть функция от m . Установив какую угодно зависимость r от m , мы получим в правой части предыдущего уравнения функцию только m , в другой части находится θ , и уравнение может быть интегрировано.

Делая несколько таких подстановок, причем между m и r устанавливается различная зависимость, сличают результаты, даваемые вычислением,

с опытом, и подыскивают такую функцию для r , при которой достигается наилучшее согласие. Относительно этого предмета см.: *Kramp. Analyse des refractions astronomiques et terrestres, Strassbourg, 1799.*

В этом сочинении, однако, не принято во внимание изменение температуры атмосферы с высотою, поэтому таблицы Крампа не применимы на практике, и астрономы пользовались почти до самого последнего времени таблицами Bradley'я, которые более согласны с опытом.

Лаплас обработал этот предмет другим образом, и Delambre вычислил по данным им формулам таблицы, напечатанные в его таблицах Солнца, а также в «*Zodiacalsternkatalog*» Zach'a.

Другую таблицу составил Young в «*Nautical Almanac*», теория его помещена в «*Philosophical Transactions*» (1819), но я ее еще не видал. Bessel в своем исследовании Bradley'евских наблюданий дал наилучшую таблицу рефракции.

Из различных гипотез зависимости r от m я рассмотрю одну. Она составляет основание Bradley'евской таблицы, которой, как уже сказано, астрономы долгое время пользовались.

Величины r и m возрастают совместно снизу вверх, но весьма медленно. Что m пропорционально r — не может быть допущено, ибо тогда высота атмосферы была бы не более $\frac{1}{4}$ мили, как легко видеть по простому расчету. Поэтому пусть будет вообще

$$\frac{r}{R} = \left(\frac{m}{M}\right)^n$$

По подстановке этой величины в выражение $d\theta$, получим

$$d\theta = \frac{\sin I \cdot dm}{\sqrt{m^{2n} \cdot M^{2(1-n)} - m^2 \sin^2 I}}$$

пусть будет:

$$m = x^\lambda, \text{ тогда } dm = \lambda x^{\lambda-1} dx$$

$$d\theta = \frac{\lambda x^{\lambda-1} \cdot \sin I \cdot dx}{\sqrt{x^{2n\lambda} M^{2(1-n)} - x^{2\lambda} \sin^2 I}} = \frac{\lambda x^{\lambda-1} \sin I \cdot dx}{x^{n\lambda} \sqrt{M^{2-2n} - x^{2\lambda(1-n)} \sin^2 I}}$$

возьмем теперь λ , так чтобы было

$$n\lambda = \lambda - 1, \text{ иначе } \lambda = \frac{1}{1-n}$$

тогда будет

$$d\theta = \frac{\lambda}{1-n} \cdot \frac{\sin I \cdot dx}{\sqrt{M^{2(1-n)} - x^2 \sin^2 I}} = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{\sin I}{M^{1-n}} \cdot \sqrt{\frac{dx}{1 - \frac{x^2 \sin^2 I}{M^{2(1-n)}}}}$$

полагая теперь

$$\frac{x \cdot \sin I}{M^{1-n}} = y, \quad \text{значит} \quad dx = \frac{M^{1-n}}{\sin I} dy$$

получим

$$d\theta = \frac{\lambda}{1-n} \cdot \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

и следовательно, по интегрированию, будет

$$\theta = \frac{\lambda}{1-n} \arcsin y + \text{const}$$

или, так как $n > 1$,

$$\theta = \text{const} - \frac{\lambda}{n-1} \arcsin y$$

Угол θ равен нулю, когда луч падает в глаз наблюдателя там, где $m = M$, тогда $x = M^{1-n}$, следовательно $\arcsin y = I$ и, значит, будет

$$\theta = \text{const} - \frac{1}{n-1} I$$

т. е.

$$\text{const} = \frac{1}{n-1} \cdot I$$

и

$$\theta = \frac{\lambda}{n-1} (I - \arcsin y)$$

причем

$$y = \frac{m^{1-n} \sin I}{M^{1-n}}$$

иначе:

$$\frac{m^{1-n} \sin I}{M^{1-n}} = \sin [I - (n-1)\theta]$$

Если рассматривать полный путь луча от входа его в атмосферу до входа в глаз наблюдателя, то $m = 1$, $I = z$ — видимое зенитное расстояние, $\theta = \rho$, и будет

$$M^{n-1} \sin z = \sin [z - (n-1)\rho]$$

Так как для больших зенитных расстояний определение по синусу не дает достаточной точности, то мы представим эту формулу в несколько ином виде, причем мы введем некоторую определенную рефракцию, именно — горизонтальную h , соответствующую $z = 90^\circ$. Тогда, очевидно,

$$M^{n-1} = \cos(n-1)h$$

Следовательно,

$$\cos(n-1)h \cdot \sin z = \sin[z - (n-1)\rho]$$

Затем

$$\sin z = \sin z$$

Вычитая первое уравнение из второго, затем приложив его ко второму и разделив одно на другое, имеем:

$$[1 - \cos(n-1)h] \sin z = 2 \sin \frac{n-1}{2} \rho \cos\left(z - \frac{n-1}{2} \rho\right)$$

$$[1 + \cos(n-1)h] \sin z = 2 \cos \frac{n-1}{2} \rho \cdot \sin\left(z - \frac{n-1}{2} \rho\right)$$

и

$$\operatorname{tg}^2 \frac{n-1}{2} h \cdot \operatorname{tg}\left(z - \frac{n-1}{2} \rho\right) = \operatorname{tg} \frac{n-1}{2} \rho$$

Величина ρ из этого уравнения находится всего удобнее последовательным приближением: приняв сперва приближенное значение ρ , подставив его в левую часть этого равенства, вычисляют значение правой, по ней находят более точное значение ρ ; это значение опять подставляют в левую часть, вычисляют правую и продолжают поступать таким образом, пока не получится достаточно близкой к истинной величины.

На практике эта метода легче, нежели она с первого взгляда представляется, и далеко не требует столько труда, как если бы решать предыдущее уравнение относительно ρ и вычислять его по составленной таким образом формуле.

Чтобы сделать вычисление еще проще, можно $\operatorname{tg} \frac{n-1}{2} \rho$ заменить самой дугой, и тогда будет

$$\frac{412540}{n-1} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{n-1}{2} h \cdot \operatorname{tg}\left(z - \frac{n-1}{2} \rho\right) = \rho$$

Затем пробуют, какое значение n всего лучше согласуется с опытом. Таким образом найдено, что $n = 7$ весьма близко к истинному. Это значение и легло в основание Bradley'евых таблиц.

Итак, рефракция пропорциональна тангенсу зенитного расстояния, уменьшенному тройною рефракцией.

Bradley'евые таблицы помещаются в «Berliner Sammlung astronomischer Tafeln», в «Connaissance des Temps» и т. п. Их аргументы даны через 1° . Maskelyne дал их через $10'$ и напечатал в собрании Гриничских наблюдений.

Таблицы, составленные Delambre'ом по теории Лапласа, находятся в таблицах Bureau des Longitudes и в «Tabulae astronomicae aberrationis et nutationis» Zach'a.

Всего ближе согласуются с наблюдениями таблицы, вычисленные Bessel'ем в его разборе наблюдений Bradley'я, как уже упомянуто выше. Прежде я пользовался одною из таблиц Carlini, которая хотя и основана на теории Лапласа, но Carlini воспользовался для ее составления лучшими наблюдениями, им самим произведенными.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ АСТРОНОМИЯ

§ 44. Суточное вращение Земли. Отклонение падающих тел. Учение о параллаксе составляет переход от Сферической к Теоретической астрономии, ибо уже оно показывает, что не всякое место может быть центром мира. Оно делает невероятным предположение, что все небесные тела обращаются около Земли, показывая сколь они удалены и что по большей части они значительно превосходят Землю по величине. Вскоре убеждаются, что обращение небесных тел вокруг Земли объясняется гораздо проще; если приписать вращение этой последней. Это пробовали делать уже древние, но лишь Коперник сделал это вполне ясным, объяснив все явления.

Уже давно были убеждены, что Земля вращается вокруг своей оси, но очевидное доказательство дано лишь несколько лет тому назад.

Вскоре после смерти Коперника (он издал свою систему мира — «De revolutionibus...» — незадолго перед смертью с помощью своего друга Rheticus'a), когда еще с яростью спорили о вращении Земли, противники его утверждали, что падающий с высоты камень должен, если Земля вращается, падать западнее.

Последователи новой системы утверждали, что этого не бывает, ибо тело, падающее с вершины мачты быстро идущего корабля, падает на корабль, а не позади его в море, ибо оно и при своем падении сохраняет скорость, полученную им от корабля, и даже такой опыт был произведен в Марсельской гавани, который и оказался в пользу приверженцев новой теории.

Затем Ньютон вновь привлек внимание к этому вопросу: падающему телу в верхних областях вращением Земли сообщается большая абсолютная скорость, причем на всяком расстоянии абсолютная скорость пропорциональна радиусу, следовательно падающее тело отклоняется к востоку от

отвесной линии. Гук произвел испытания в церкви Св. Павла в Лондоне, но они не дали решающего результата. Много лет спустя Guglielmini в Болонье получил, после в высшей степени точных опытов, отклонение к востоку, но также и к югу. Затем в этих опытах была обнаружена постоянная погрешность, определить величину которой было невозможно, таким образом эти превосходные опыты оказались непригодными.

Вследствие этого Benzenberg произвел опыты в Michaelisthurm'e в Гамбурге, они также показали отклонение к востоку, именно 4.5 линии на 340 футов, но, кроме того, и к югу на 1.5 линии. Теория же, данная Olbers'ом, Гауссом и Лапласом и ваконец Bohnenberger'ом, давала отклонение к востоку такой же величины, как наблюденное, но не давала отклонения к югу, поэтому Benzenberg повторил свои опыты в одной угольной шахте в Силезии, причем отклонения к югу не оказалось.

Все вышеизложенное собрано весьма хорошо в сочинении Benzenberg'a — «Versuche über die Umdrehung der Erde» (1804), где приведены и теории Гаусса, Olbers'a и Лапласа. Статья Bohnenberger'a находится в «Monatliche Correspondenz» за 1803 г.

§ 45. Видимое собственное движение планет. Коперник трудился 36 лет над своим сочинением и долго колебался, ранее чем выпустить его в свет, что и было исполнено лишь за несколько дней до его смерти в 1547 г.

Celi Coliagnini написал в 1541 г. в Ферраре статью, вышедшую лишь в 1544 г. под заглавием: «Quod coelum stit et terra moveatur» (Небо стоит, Земля же движется).

Итак, мы принимаем, что Земля вращается вокруг своей оси, и таким образом объясняем суточное движение звезд.

Собственное движение Солнца и планет мы пока рассмотрим так, как оно представляется наблюдателю с Земли, чтобы по неправильностям его показать невозможность того, чтобы мы могли находиться в центре их путей.

Планеты подразделяются на два класса — верхние и нижние, которые существенно различны по своему движению, как это будет видно из тех двух примеров, которые я приведу.

1°) *Юпитер*. Я буду рассматривать лишь движение по долготе; движение планеты по широте, исключая Весты, которая отходит до 50° , совершается внутри пояса, шириной в 16° , с эклиптикою посередине. Этот пояс называется *зодиаком*.

19 февраля 1820 г. долгота Юпитера была одинакова с долготою Солнца, именно $329^{\circ}46'$. Этот момент называется *соединением*. От этого положения Юпитер имеет движение, происходящее вперед (как у Солнца), но медленнее Солнца: его суточное движение составляет $14'5$, движения Солнца — почти 1° . Это суточное движение планеты становится все менее: Юпитер отстает от Солнца все более и более и, наконец, через 114 дней — 12 июня — будет отстоять на 90° от Солнца. Это положение называется его первою квадратурою. Долгота Юпитера составляет тогда $351^{\circ}49'$, долгота Солнца $81^{\circ}49'$. Суточное движение Юпитера уменьшилось до $5'6$, и это уменьшение продолжается и далее, и лишь через месяц, 12 июля, его суточное движение равно 0 при долготе $353^{\circ}17'$ и долготе Солнца $110^{\circ}24'$. После этого момента планета идет обратно, поэтому говорят, что в этот момент планета стационарна, или находится в стоянии. В продолжение следующих двух периодов ее движение называется попятным (*motus directus, motus retrogradus*). Расстояние Юпитера до Солнца быстро возрастает до 180° , это случится 11 сентября, причем его долгота будет $348^{\circ}15'$, долгота Солнца $168^{\circ}15'$. Это положение планеты называется ее *противостоянием*; суточное движение Юпитера при этом $8'$; после этого попятное движение становится медленнее, так что $8'$ есть наибольшая его суточная величина; наконец, планета вновь останавливается 8 ноября в долготе $343^{\circ}29'$. Юпитер 6 декабря опять находится в расстоянии 90° от Солнца в долготе $345^{\circ}45'$, долгота же Солнца $254^{\circ}45'$, т. е. его вторая квадратура, суточное движение тогда равно $5'4$; так продолжается, пока Солнце не нагонит Юпитера, что произойдет через 4 месяца — 27 марта 1821 г., когда долготы Солнца и Юпитера составят $6^{\circ}14'$ и суточное движение будет вновь $14'5$.

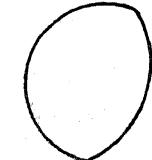
После этого описанное движение начнет опять повторяться.

Такое же движение имеют и остальные верхние планеты, лишь числа будут иные. В моменты противостояний угловая скорость меньше, нежели

в соединениях. Квадратуры происходят всегда до стояний, попятное движение медленнее, нежели прямое. В противостояниях кометы кажутся наиболее яркими. В трубу можно наблюдать, что в одинаковом отношении с светом убывают и диаметры их. Это уменьшение для Марса весьма велико, в квадратурах он не

представляется круглым диском, но подобно Луне круговое его очертание обращено к Солнцу и эллиптическое — от Солнца.

В следующей таблице дано для примера движение Марса на ближайший период.



День	Месяц	Лето	Лунный день	Долгота Солнца	Долгота Марса	Скорость
1	Март	Лето	1	$27^{\circ}45'$	$27^{\circ}45'$	0
10	Март	Лето	10	$30^{\circ}15'$	$30^{\circ}15'$	$1'5$
20	Март	Лето	20	$32^{\circ}45'$	$32^{\circ}45'$	$3'5$
30	Март	Лето	30	$35^{\circ}15'$	$35^{\circ}15'$	$6'5$
10	Апрель	Лето	40	$37^{\circ}45'$	$37^{\circ}45'$	$8'5$
20	Апрель	Лето	50	$40^{\circ}15'$	$40^{\circ}15'$	$9'5$
30	Апрель	Лето	60	$42^{\circ}45'$	$42^{\circ}45'$	$9'5$
10	Май	Лето	70	$45^{\circ}15'$	$45^{\circ}15'$	$8'5$
20	Май	Лето	80	$47^{\circ}45'$	$47^{\circ}45'$	$6'5$
30	Май	Лето	90	$50^{\circ}15'$	$50^{\circ}15'$	$3'5$
10	Июнь	Лето	100	$52^{\circ}45'$	$52^{\circ}45'$	$1'5$
20	Июнь	Лето	110	$55^{\circ}15'$	$55^{\circ}15'$	0
30	Июнь	Лето	120	$57^{\circ}45'$	$57^{\circ}45'$	$1'5$
10	Июль	Лето	130	$60^{\circ}15'$	$60^{\circ}15'$	$3'5$
20	Июль	Лето	140	$62^{\circ}45'$	$62^{\circ}45'$	$6'5$
30	Июль	Лето	150	$65^{\circ}15'$	$65^{\circ}15'$	$8'5$
10	Август	Лето	160	$67^{\circ}45'$	$67^{\circ}45'$	$9'5$
20	Август	Лето	170	$70^{\circ}15'$	$70^{\circ}15'$	$9'5$
30	Август	Лето	180	$72^{\circ}45'$	$72^{\circ}45'$	$8'5$
10	Сентябрь	Лето	190	$75^{\circ}15'$	$75^{\circ}15'$	$6'5$
20	Сентябрь	Лето	200	$77^{\circ}45'$	$77^{\circ}45'$	$3'5$
30	Сентябрь	Лето	210	$80^{\circ}15'$	$80^{\circ}15'$	$1'5$
10	Октябрь	Лето	220	$82^{\circ}45'$	$82^{\circ}45'$	0
20	Октябрь	Лето	230	$85^{\circ}15'$	$85^{\circ}15'$	$1'5$
30	Октябрь	Лето	240	$87^{\circ}45'$	$87^{\circ}45'$	$3'5$
10	Ноябрь	Лето	250	$90^{\circ}15'$	$90^{\circ}15'$	$6'5$
20	Ноябрь	Лето	260	$92^{\circ}45'$	$92^{\circ}45'$	$8'5$
30	Ноябрь	Лето	270	$95^{\circ}15'$	$95^{\circ}15'$	$9'5$
10	Декабрь	Лето	280	$97^{\circ}45'$	$97^{\circ}45'$	$9'5$
20	Декабрь	Лето	290	$100^{\circ}15'$	$100^{\circ}15'$	$8'5$
30	Декабрь	Лето	300	$102^{\circ}45'$	$102^{\circ}45'$	$6'5$
10	Январь	Лето	310	$105^{\circ}15'$	$105^{\circ}15'$	$3'5$
20	Январь	Лето	320	$107^{\circ}45'$	$107^{\circ}45'$	$1'5$
30	Январь	Лето	330	$110^{\circ}15'$	$110^{\circ}15'$	0
10	Февраль	Лето	340	$112^{\circ}45'$	$112^{\circ}45'$	$1'5$
20	Февраль	Лето	350	$115^{\circ}15'$	$115^{\circ}15'$	$3'5$
30	Февраль	Лето	360	$117^{\circ}45'$	$117^{\circ}45'$	$6'5$
10	Март	Лето	370	$120^{\circ}15'$	$120^{\circ}15'$	$8'5$
20	Март	Лето	380	$122^{\circ}45'$	$122^{\circ}45'$	$9'5$
30	Март	Лето	390	$125^{\circ}15'$	$125^{\circ}15'$	$9'5$
10	Апрель	Лето	400	$127^{\circ}45'$	$127^{\circ}45'$	$8'5$
20	Апрель	Лето	410	$130^{\circ}15'$	$130^{\circ}15'$	$6'5$
30	Апрель	Лето	420	$132^{\circ}45'$	$132^{\circ}45'$	$3'5$
10	Май	Лето	430	$135^{\circ}15'$	$135^{\circ}15'$	$1'5$
20	Май	Лето	440	$137^{\circ}45'$	$137^{\circ}45'$	0
30	Май	Лето	450	$140^{\circ}15'$	$140^{\circ}15'$	$1'5$
10	Июнь	Лето	460	$142^{\circ}45'$	$142^{\circ}45'$	$3'5$
20	Июнь	Лето	470	$145^{\circ}15'$	$145^{\circ}15'$	$6'5$
30	Июнь	Лето	480	$147^{\circ}45'$	$147^{\circ}45'$	$8'5$
10	Июль	Лето	490	$150^{\circ}15'$	$150^{\circ}15'$	$9'5$
20	Июль	Лето	500	$152^{\circ}45'$	$152^{\circ}45'$	$9'5$
30	Июль	Лето	510	$155^{\circ}15'$	$155^{\circ}15'$	$8'5$
10	Август	Лето	520	$157^{\circ}45'$	$157^{\circ}45'$	$6'5$
20	Август	Лето	530	$160^{\circ}15'$	$160^{\circ}15'$	$3'5$
30	Август	Лето	540	$162^{\circ}45'$	$162^{\circ}45'$	$1'5$
10	Сентябрь	Лето	550	$165^{\circ}15'$	$165^{\circ}15'$	0
20	Сентябрь	Лето	560	$167^{\circ}45'$	$167^{\circ}45'$	$1'5$
30	Сентябрь	Лето	570	$170^{\circ}15'$	$170^{\circ}15'$	$3'5$
10	Октябрь	Лето	580	$172^{\circ}45'$	$172^{\circ}45'$	$6'5$
20	Октябрь	Лето	590	$175^{\circ}15'$	$175^{\circ}15'$	$8'5$
30	Октябрь	Лето	600	$177^{\circ}45'$	$177^{\circ}45'$	$9'5$
10	Ноябрь	Лето	610	$180^{\circ}15'$	$180^{\circ}15'$	$9'5$
20	Ноябрь	Лето	620	$182^{\circ}45'$	$182^{\circ}45'$	$8'5$
30	Ноябрь	Лето	630	$185^{\circ}15'$	$185^{\circ}15'$	$6'5$
10	Декабрь	Лето	640	$187^{\circ}45'$	$187^{\circ}45'$	$3'5$
20	Декабрь	Лето	650	$190^{\circ}15'$	$190^{\circ}15'$	$1'5$
30	Декабрь	Лето	660	$192^{\circ}45'$	$192^{\circ}45'$	0
10	Январь	Лето	670	$195^{\circ}15'$	$195^{\circ}15'$	$1'5$
20	Январь	Лето	680	$197^{\circ}45'$	$197^{\circ}45'$	$3'5$
30	Январь	Лето	690	$200^{\circ}15'$	$200^{\circ}15'$	$6'5$
10	Февраль	Лето	700	$202^{\circ}45'$	$202^{\circ}45'$	$8'5$
20	Февраль	Лето	710	$205^{\circ}15'$	$205^{\circ}15'$	$9'5$
30	Февраль	Лето	720	$207^{\circ}45'$	$207^{\circ}45'$	$9'5$
10	Март	Лето	730	$210^{\circ}15'$	$210^{\circ}15'$	$8'5$
20	Март	Лето	740	$212^{\circ}45'$	$212^{\circ}45'$	$6'5$
30	Март	Лето	750	$215^{\circ}15'$	$215^{\circ}15'$	$3'5$
10	Апрель	Лето	760	$217^{\circ}45'$	$217^{\circ}45'$	$1'5$
20	Апрель	Лето	770	$220^{\circ}15'$	$220^{\circ}15'$	0
30	Апрель	Лето	780	$222^{\circ}45'$	$222^{\circ}45'$	$1'5$
10	Май	Лето	790	$225^{\circ}15'$	$225^{\circ}15'$	$3'5$
20	Май	Лето	800	$227^{\circ}45'$	$227^{\circ}45'$	$6'5$
30	Май	Лето	810	$230^{\circ}15'$	$230^{\circ}15'$	$8'5$
10	Июнь	Лето	820	$232^{\circ}45'$	$232^{\circ}45'$	$9'5$
20	Июнь	Лето	830	$235^{\circ}15'$	$235^{\circ}15'$	$9'5$
30	Июнь	Лето	840	$237^{\circ}45'$	$237^{\circ}45'$	$8'5$
10	Июль	Лето	850	$240^{\circ}15'$	$240^{\circ}15'$	$6'5$
20	Июль	Лето	860	$242^{\circ}45'$	$242^{\circ}45'$	$3'5$
30	Июль	Лето	870	$245^{\circ}15'$	$245^{\circ}15'$	$1'5$
10	Август	Лето	880	$247^{\circ}45'$	$247^{\circ}45'$	0
20	Август	Лето	890	$250^{\circ}15'$	$250^{\circ}15'$	$1'5$
30	Август	Лето	900	$252^{\circ}45'$	$252^{\circ}45'$	$3'5$
10	Сентябрь	Лето	910	$255^{\circ}15'$	$255^{\circ}15'$	$6'5$
20	Сентябрь	Лето	920	$257^{\circ}45'$	$257^{\circ}45'$	$8'5$
30	Сентябрь	Лето	930	$260^{\circ}15'$	$260^{\circ}15'$	$9'5$
10	Октябрь	Лето	940	$262^{\circ}45'$	$262^{\circ}45'$	$9'5$
20	Октябрь	Лето	950	$265^{\circ}15'$	$265^{\circ}15'$	$8'5$
30	Октябрь	Лето	960	$267^{\circ}45'$	$267^{\circ}45'$	$6'5$
10	Ноябрь	Лето	970	$270^{\circ}15'$	$270^{\circ}15'$	$3'5$
20	Ноябрь	Лето	980	$272^{\circ}45'$	$272^{\circ}45'$	$1'5$
30	Ноябрь	Лето	990	$275^{\circ}15'$	$275^{\circ}15'$	0
10	Декабрь	Лето	1000	$277^{\circ}45'$	$277^{\circ}45'$	$1'5$
20	Декабрь	Лето	1010	$280^{\circ}15'$	$280^{\circ}15'$	$3'5$
30	Декабрь	Лето	1020	$282^{\circ}45'$	$282^{\circ}45'$	$6'5$
10	Январь	Лето	1030	$285^{\circ}15'$	$285^{\circ}15'$	$8'5$
20	Январь	Лето	1040	$287^{\circ}45'$	$287^{\circ}45'$	$9'5$
30	Январь	Лето	1050	$290^{\circ}15'$	$290^{\circ}15'$	$9'5$
10	Февраль	Лето	1060	$292^{\circ}45'$	$292^{\circ}45'$	$8'5$
20	Февраль	Лето	1070	$295^{\circ}15'$	$295^{\circ}15'$	$6'5$
30	Февраль	Лето	1080	$297^{\circ}45'$	$297^{\circ}45'$	$3'5$
10	Март	Лето	1090	$300^{\circ}15'$	$300^{\circ}15'$	$1'5$
20	Март	Лето	1100	$302^{\circ}45'$	$302^{\circ}45'$	0
30	Март	Лето	1110	$305^{\circ}15'$	$305^{\circ}15'$	$1'5$
10	Апрель	Лето	1120	$307^{\circ}45'$	$307^{\circ}45'$	$3'5$
20	Апрель	Лето	1130	$310^{\circ}15'$	$310^{\circ}15'$	$6'5$
30	Апрель	Лето	1140	$312^{\circ}45'$	$312^{\circ}45'$	$8'5$
10	Май	Лето	11			

Явления Марса ♂ в ближайший период.

Положение	Год, месяц и число	Долгота ♂	Долгота ☉	Суточн. дв.
Соединение	1821 Январь 12	291° 33'	291° 33'	+ 47'
Квадратура	» Ноябрь 18	146 43	236 43	- 26
Стояние	1822 Январь 9	159 42	289 13	0
Противостояние	» Февраль 18	150 09	330 09	- 24
Стояние	» Апрель 1	140 13	11 40	0
Квадратура	» Май 25	153 54	63 54	- 26
Соединение	1823 Март 15	3 58	3 58	+ 47

Как пример нижней планеты я возьму *Венеру ♀*, движение которой и дано в следующей таблице.

Год, месяц и число	Долгота ♀	Долгота ☉	Суточн. движен.	Элонгация	Примечание
1819 Окт. 8 . . .	194° 24'	194° 24'	+75'	0	Первое соедин., ☉ отстает.
1820 Май 21 . . .	105 36	60 14	+58' = дв. ☉	+45° 22'	Наиб. вост. элон. Сут. дв. ♀ = = сут. дв. ☉
» Июль 9 . . .	135 26	106 42	0	+28 44	Первое стояние. Дв. стан. поп.
» » 30 . . .	127 16	127 16	-36'	0	Второе соедине- ние.
» Авг. 21 . . .	119 01	148 7	0	-29 6	Второе стояние. Движ. станов. прямым.
» Окт. 9 . . .	149 46	196 3	+59	-46 17	Наиб. зап. элон. Сут. движ. ♀ = = сут. дв. ☉
1821 Май 21 . . .	61 36	61 36	+74	0	Вновь первое соединение.

После первого соединения планета представляется вправо от Солнца, после второго — влево. Элонгацией называется выраженное в градусах расстояние планеты от Солнца.

Такой ход планет был уже известен и древним.

Зрительные трубы дали нам возможность обнаружить и еще ряд явлений. В начале периода Венера представляется обладающей быстрым движением, при втором соединении движение не столь быстрое, наибольшую яркость она имеет приблизительно при наибольшей элонгации, после чего и до соединения яркость убывает. Диаметр увеличивается с $10''$ при начале периода до $53''$ к его середине. Затем вновь убывает до $10''$ к концу его. При наибольшей элонгации диаметр $24''$, наиболее быстро возрастание происходит между наибольшую восточной элонгацией и первым стоянием. В начале периода диск совершенно круглый, при наибольшей элонгации подобен полумесяцу с выпуклою стороной, обращенной к Солнцу. После первого стояния диск становится все уже, при втором соединении она совершенно пропадает, и если в это время широта Венеры равна нулю, то ее видно в виде малого черного диска перед Солнцем. После того она появляется в виде серпа, обращенного в другую сторону от Солнца, и при наибольшей западной элонгации опять представляется подобной полумесяцу.

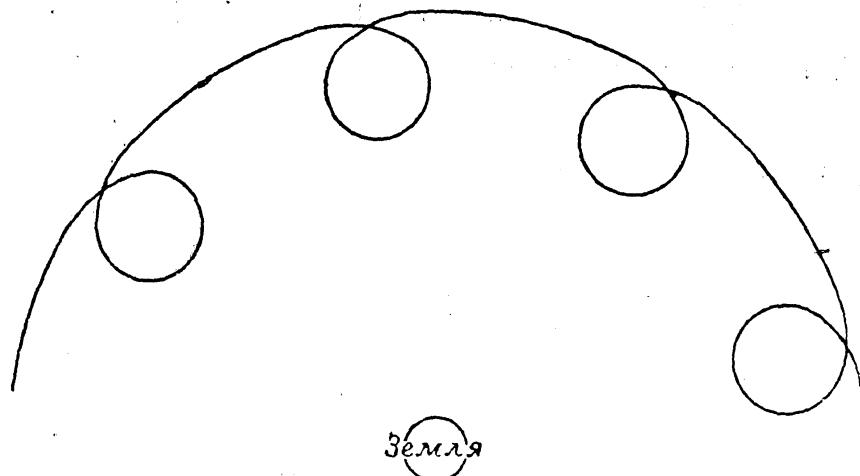
§ 46. Система Птоломея. Древними, в особенности Птоломеем, дано такому движению планет объяснение, которое, если только не делать весьма точных и разнообразных наблюдений, действительно дает возможность воспроизвести их синтетически.

Я дам здесь развитие Птоломеевой системы мира, чтобы показать, что если принять, что Земля стоит на месте, лишь вращаясь около своей оси, то эта система, действительно, следует из наблюдаемых явлений и не должна рассматриваться как простая гипотеза, хорошо согласующаяся с опытом.

Само собой ясно, что по видимым диаметрам планет могут быть найдены расстояния до них, выраженные в радиусах планет. Следовательно, если наблюдать весьма часто диаметры планеты за время периода ее видимости, то, рассчитав по наблюденным диаметрам расстояния до планеты в радиусах ее, можно вычертить ее путь, который представляется таким (фиг. 30).

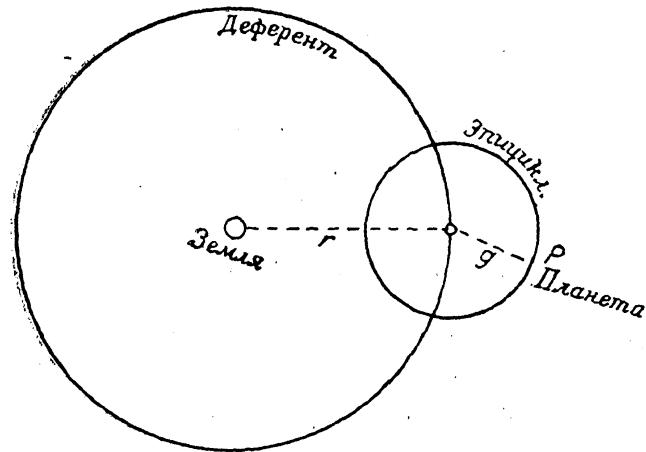
Вообразим теперь точку, движущуюся вокруг Земли по кругу с равномерною скоростью, выбранною так, что эта точка и движущаяся вокруг Земли планета в начале и в конце каждого оборота одновременно вступают в соединение с Солнцем.

Расстояние этой точки до Земли берется равным среднему между наибольшим и наименьшим расстоянием до планеты. Окажется, что эта воображаемая точка будет и при средине периода совпадать с планетою.



Фиг. 30.

Затем из наблюдений можно для каждого момента вычислить расстояние планеты до воображаемой точки, это — не более как задача Плоской тригонометрии. Таким образом окажется, что расстояние планеты до вообра-



Фиг. 31.

жаемой точки постоянное. Сличая затем попарно различные положения планеты, обнаружим, что планета движется равномерно по кругу около воображаемой точки.

Такова была Птоломеева система мира. Он полагал, что планета обращается около воображаемой точки, которая, в свою очередь, движется равномерно по кругу около Земли. Круг, описываемый воображаемой точкой,

называется *circulus deferens* (несущий круг), круг, описываемый планетою, — *epicyclus*. Следующие соотношения имеют место между различными встречающимися здесь величинами:

$$\frac{1}{2} [\text{наиб. раз. пл.} - \text{наим. рас. пл.}] = r = \text{радиус дефер.}$$

$$\frac{1}{2} [\text{наиб. раз. пл.} - \text{наим. рас. пл.}] = \rho = \text{радиус эпиц.}$$

Очевидно, что всегда $r > \rho$. Затем скорость обращения по эпипикулу больше скорости по деференту.

Если обозначить суточную угловую скорость планеты по эпипикулу через μ и угловую скорость воображаемой точки в ее движении по деференту через m , то $m < \mu$.

Итак, пусть t — время, т. е. число суток, в продолжение которого планета перешла из D в P (Фиг. 32), CD есть ось абсцисс, проходящая через первое соединение планеты, Δ — расстояние планеты до Земли, угол $PCD = u$, т. е. долгота планеты, считаемая от D , тогда будет:

$$ACD = mt; \quad PAB = \mu t$$

Координаты точки A :

$$r \cos mt; \quad r \sin mt$$

Координаты точки P (относительно оси AB параллельной CD):

$$\rho \cos \mu t; \quad \rho \sin \mu t$$

Сумма этих величин дает координаты планеты P .

Итак,

$$r \cos mt + \rho \cos \mu t = \Delta \cdot \cos u \quad (1)$$

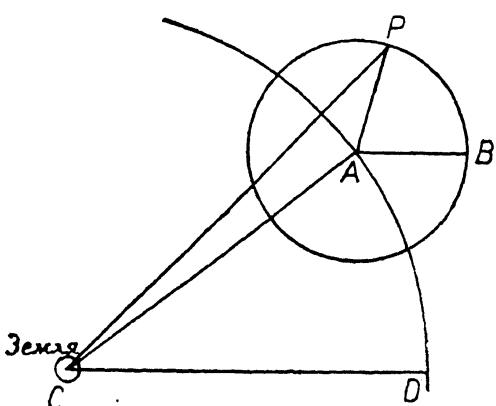
$$r \sin mt + \rho \sin \mu t = \Delta \cdot \sin u \quad (2)$$

Следовательно,

$$\rho^2 + r^2 + 2r\rho \cos(\mu t - mt) = \Delta^2 \quad (3)$$

$$\frac{r \sin mt + \rho \sin \mu t}{r \cos mt + \rho \cos \mu t} = \tan u \quad (4)$$

Чтобы найти быстроту изменения долготы или суточное движение планеты по долготе, надо, продифференцировав уравнение (4), выразить $\frac{du}{dt}$,



Фиг. 32.

получим

$$\frac{du}{dt} = \frac{mr^2 + \mu\rho^2 + (m - \mu)r\rho \cos(\mu t - mt)}{r^2 + \rho^2 + 2r\rho \cos(\mu t - mt)}$$

Этой дроби можно придать следующий вид:

$$\frac{du}{dt} = \frac{A + B \cos \psi}{C + D \cos \psi} = \frac{B}{D} + \frac{A - \frac{BC}{D}}{C + D \cos \psi}$$

но

$$\frac{A - \frac{BC}{D}}{C + D \cos \psi} = \frac{(\mu - m)(\rho^2 - r^2)}{2[\rho^2 + r^2 + 2r\rho \cos(\mu t - mt)]}$$

Здесь знаменатель всегда положительный, ибо $\cos(\mu t - mt)$ всегда заключается между $+1$ и -1 и $2r\rho < \rho^2 + r^2$; числитель всегда отрицательный, ибо μ всегда больше m и $\rho < r$, следовательно суточное движение по долготе $\frac{du}{dt}$ всего больше, когда $\cos(\mu t - mt) = +1$, и всего меньше, когда $\cos(\mu t - mt) = -1$.

Так как μ всегда больше m , то первое имеет место, когда

$$\mu t - mt = 360^\circ$$

т. е. в соединениях планеты и воображаемой точки. В самом деле, в этом случае будет

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} mt \quad \text{и} \quad u = mt$$

причем u есть долгота планеты, mt — долгота воображаемой точки.

Второе имеет место, когда $\mu t - mt = 180^\circ$, т. е. когда планета и воображаемая точка находятся во втором соединении (противостоянии).

До сих пор мы совершенно не рассматривали Солнца, но если сличить движение воображаемой точки и Солнца, то из изложенного выше легко вывести следующее.

Для низких планет. Суточное движение по долготе:

$$\frac{du}{dt} = \frac{m - \mu}{2} - \frac{(\mu - m)(r^2 - \rho^2)}{2[r^2 + \rho^2 + 2r\rho \cos(\mu t - mt)]}$$

т. е. в начале периода, когда $t = 0$, суточное движение планеты всего быстрее. В этот момент воображаемая точка имеет одинаковую с планетой долготу, то же относится и до Солнца, следовательно здесь Солнце и воображаемая точка имеют ту же долготу.

Наибольшее расстояние планеты (наибольшая элонгация) от воображаемой точки наступает, когда $u - mt$ принимает наибольшую величину.

Это происходит, так как u есть функция только t , тогда, когда $\frac{du}{dt} = m$, иначе когда суточное движение планеты равно суточному движению воображаемой точки. В этот момент наибольшей элонгации, как видно, Солнце и воображаемая точка имеют опять ту же долготу.

Суточное движение планеты, перейдя через 0, становится отрицательным — наименьшая его величина или наибольшее отрицательное значение будет при $\cos(\mu t - mt) = -1$, выше же показано, что при этом планета и воображаемая точка находятся в соединении, Солнце и планета — также, значит и здесь долгота Солнца и долгота воображаемой точки одинаковы.

Продолжая таким образом, будем всегда находить, что Солнце и воображаемая точка для нижних планет постоянно имеют одну и ту же долготу, следовательно

$$m = \text{суточное движение } \odot$$

Для верхних планет. В начале периода, когда $t = 0$, и здесь суточное движение наибольшее. Точно так же $u = mt = 0$, т. е. планета и воображаемая точка находятся в соединении, также и Солнце. Значит, здесь Солнце и воображаемая точка имеют одинаковую долготу. Начиная отсюда, планета отстает от Солнца, суточное движение проходит через 0, становится затем отрицательным и наименьшим, когда $\cos(\mu t - mt) = -1$, т. е. когда $\mu t - mt = 180^\circ$, но при этом воображаемая точка находится в соединении с планетой, Солнце же продвинулось на 180° далее, следовательно оно находилось как раз в таком положении, как если бы оно двигалось по деференту с угловой скоростью μ .

В дальнейшем $\mu t - mt$, продолжая возрастать, достигнет 360° , тогда суточное движение становится опять наибольшим, воображаемая точка и планета опять в соединении, Солнце — также, ибо оно теперь находится на 360° впереди планеты, следовательно оно опять занимает такое положение, как будто оно двигалось с угловой скоростью μ .

Из обоих этих обозрений видна тесная связь между движением Солнца и планет. Для нижних планет Солнце движется с тою же угловой скоростью, как и воображаемая точка, и значит, имеет с нею постоянно одинаковую долготу; для верхних планет угловая скорость движения планеты по эпиклику равна угловой скорости Солнца.

Такова схема системы Птоломея. В ней давалось отношение r к ρ , об их абсолютной величине не ставилось вопроса, еще менее — о соотношении между Солнцем и планетами. Сверх того, Земля рассматривалась находя-

щейся в полном покое, так что, кроме движения отдельных планет, принималось еще суточное вращение всего небесного свода.

Сами птоломеицы, после того как наблюдениями обнаружились недостатки системы, сделали в ней ряд изменений. Они поместили Землю вне центра деферента, затем они заставили планету равномерно обращаться по кругу около центра, который сам двигался по эпициклю около воображаемой точки, которая шла по деференту и т. д., нагромождая один эпицикл на другой, и делали тем систему более и более сложной, так что некий испанский король сказал, что если бы творец его спросил, как устроить движение планет, то он сделал бы это проще.

§ 47. Система Тихо Браге. Наилучшее исправление Птоломеевой системы сделал Тихо, который знал систему Коперника, Кеплер, на основании его же, Тихо, наблюдений, ее впоследствии подтвердил, но по каким-либо обстоятельствам или из ревности Тихо этой системы не принимал.

Он определил ту роль, которую играет Солнце в планетной системе, но, вследствие весьма несовершенных инструментов, его наблюдения не были особенно точны, а также вследствие весьма несовершенных способов расчета, которыми тогда владели, он и остановился на этом.

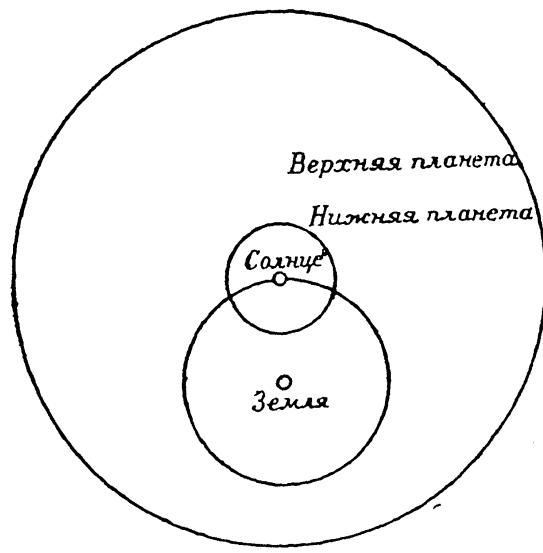
Мы будем оставаться на почве опыта, чтобы показать, что система Тихо не была простою гипотезою, но непосредственно следовала из наблюдений, произведенных не с особенно большою точностью.

Для нижних планет наблюдения показывают, что когда планета представляет полудиск, то она занимает по отношению к Солнцу такое положение, что прямые, соединяющие планету с Солнцем и планету с Землею, взаимно перпендикулярны; поэтому, если в этот момент было наблюдено угловое расстояние планеты до Солнца, т. е. разность долгот планеты и Солнца, то будет известен и угол с вершиною при Солнце. Таким образом окажется, что тангенс этого угла близок к 1 и, следовательно, расстояние от Солнца до Земли немногим более, нежели до планеты. Так как воображаемая точка и Солнце для нижних планет всегда лежат на одной прямой линии, проведенной через Землю, то Солнце и воображаемая точка совпадают, и значит, нижние планеты обращаются около Солнца.

Для верхних планет можно обменять взаимно деферент и эпицикл, ход планеты от этого не претерпит изменений. Это легко видеть из приведенных выше формул, выражающих координаты, определяющие положение планеты:

$$\begin{aligned}r \cos mt + \rho \cos \mu t \\r \sin mt + \rho \sin \mu t\end{aligned}$$

в которых, очевидно, можно по произволу переставлять буквы r и ρ и t и μ , не изменяя этих сумм. Если принять в этих формулах, что суточное движение Солнца равно μ и что это же есть, после указанного обмена, и суточное движение воображаемой точки, то и здесь Солнце, воображаемая точка и Земля находятся на одной прямой. Доказав из наблюдений, для которых могут служить спутники верхних планет, что и для верхних планет Солнце находится в центре их путей, мы и придем к системе Тихо Браге, изображенной схематически на фиг. 33.



Фиг. 33.

§ 48. Система Коперника.

Почти одновременно с этим Коперник нашел, что гораздо проще объяснить движение планет, положив, что Солнце стоит в покое, а Земля и планеты обращаются вокруг него. Легко видеть, что вся система мира может двигаться в любом направлении, без того чтобы явления представлялись с Земли, участвующей в этом движении, иными, ибо относительные положе-

ния тел сохранятся. Если это движение избрать таким же, как движение Солнца, но направленным в обратную сторону, то движение Солнца этим будет уничтожено. Земля будет тогда двигаться с такою же скоростью вокруг Солнца, с какою ранее имело место обратное. Остальные планеты будут, так же как и прежде, обращаться около Солнца, но только с другою скоростью.

Таким образом получается система Коперника.

При установлении своем система Коперника имела перед системою Тихо преимущество в большей своей вероятности, причем на основании Коперниковской системы все явления могли быть объяснены гораздо проще, и было вероятнее, что такое малое тело, как Земля, вращается около большего — Солнца, а не наоборот. Но лишь теперь можно решить по наблюдениям aberrации вопрос в пользу Коперниковой системы, ибо это явление доказывает, что Земля не находится в покое.

§ 49. Система Кеплера. Древние не могли освободиться от предвзятого предположения, что небесные светила должны двигаться по кругам с постоянною скоростью (Птоломей говорил лишь о среднем движении Солнца,

об его вращении он ничего не знал, иначе он заставил бы Землю вращаться около своей оси, чтобы объяснить суточное движение небесного свода). Поэтому древние были вынуждены изобретать сложную систему эпиклинов, которая в конце концов оказалась недостаточной.

Тихо, который по своим наблюдениям знал, что Солнце движется неравномерно (он именно заметил, что эксцентрическое положение Земли не объясняет изменений долгот Солнца, если только ему присвоить равномерное движение), освободился от второго из упомянутых предположений древних, и это составляет самое существенное отличие его системы от Птоломеевой, и ему не надо было многих эпиклинов.

Но что движение светил происходит по кругам полагал и он и Коперник.

Найти истинный вид путей планет было предоставлено Кеплеру, который, пока Тихо жил в Праге, был его помощником и унаследовал его рукописи, заключавшие 30—40-летние наблюдения.

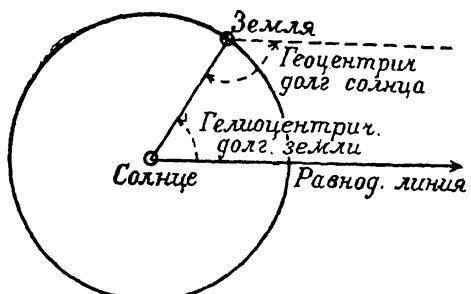
Я сперва покажу, каким образом теперь можно было найти из наблюдений, что абсолютная скорость Земли не везде одна и та же, а также и закон ее изменения.

Для этого необходимо иметь возможность определять в любой момент положение Земли относительно Солнца.

Это производят, пользуясь долготою Солнца. Теперь, когда Солнце предполагается в покое, а Земля же обращающаяся около него, то долгота есть угол, образуемый прямою, проведенной от Солнца к Земле, с равноденственной линией, т. е. с прямою пересечения плоскости эклиптики с плоскостью экватора. Прямая эта при всех положениях Земли остается параллельной самой себе. Эта долгота называется *геоцентрической* долготой Солнца (т. е. долготою, измеренной из центра Земли). Угол, образуемый при Солнце прямою, проведенной от Солнца к Земле, с тою же линией, называют *гелиоцентрической* долготою Земли. Таким образом будет

$$\text{геоцентрич. долг. Солн.} + \text{гелиоцентр. долг. Земли} = 180^\circ$$

Расстояния от Земли до Солнца при различных ее положениях на ее орбите, выраженные в диаметрах Солнца, получают, наблюдая видимый угловой диаметр его. Такие наблюдения производятся гелиометром (объективный микрометр). Изобретателем этого прибора был Bouguer. Доллонд улучшил его, Фраунгофер довел до высшей степени совершенства.



Фиг. 34.

Предмет, рассматриваемый в зрительную трубу, представляется, на основании законов оптики, всегда целым, даже и тогда, когда часть объектива будет прикрыта или отрезана, только яркость становится меньше.

Трубу можно устроить так, что объектив ее будет состоять из двух половинок. Если обе половинки соприкасаются, то будет видно лишь одно изображение, как будто бы разделя не было. Если развести половинки, то появятся два изображения, оба полных, но каждое с половиною яркостью по сравнению с первоначальной.

Если в такую трубу с разведенными полуобъективами смотреть на 2 звезды, не слишком удаленные друг от друга, то будет видно четыре изображения.

Если объективы разведены в вертикальном направлении и звезды лежат в одном вертикале, то и все четыре изображения будут также находиться в одном вертикале; теперь можно будет настолько сблизить полуобъективы, чтобы верхнее изображение нижней звезды совпало с нижним изображением верхней, тогда расстояние полуобъективов будет пропорционально расстоянию между звездами, по крайней мере для величин углов, которые могут быть измерены такого рода инструментами.

Расстояние между полуобъективами может быть измеряено с большою степенью точности при помощи делений, нанесенных на головку винта, их перемещающего. Этот винт делается очень точно, и каждый его оборот передвигает один из полуобъективов на одну и ту же величину. Каково отношение этой величины к величине измеряемого угла, — находится по земным или по небесным предметам для всякого прибора в отдельности.

Нулевое положение определяется, если оба полуобъектива сблизить настолько, чтобы они друг друга касались и получалось одно изображение. При прежнем Bouguer'овском устройстве прибора это было невозможно, ибо каждый из его объективов был больше полукруга, поэтому это устройство и оставлено.

Доллонд просто оправил две половинки того же самого объектива и придал им перемещения параллельно линии разреза, получив таким образом ту выгоду, что перемещение могло быть производимо в любую сторону, и значит, можно было применять повторительный способ при измерении углов, чем повышается точность самого измерения.

Наконец, Фраунгофер применил, для измерения перемещения, микрометрический винт, который при каждом обороте дает определенное перемещение, на головке винта сделано деление, дающее доли оборота. Прежде

чтобы получить возможно точное измерение перемещения, делали объективы весьма плоскими, чтобы их приходилось раздвигать дальше и для того же самого угла получать возможно большее перемещение, но тогда и самую трубу приходилось делать весьма длинной. Для устранения этого недостатка, непосредственно за полуобъективами ставили линзу, которая опять собирала лучи, или же все приспособление навинчивали на обычновенный телескоп, но такой способ вызывает цветные изображения и наблюдения становятся менее точными.

Единственная невыгода Фраугофферовского устройства состоит в потере времени, сопряженной с необходимостью делать много оборотов винтом.

Из многих наблюдений диаметра Солнца имеется достаточно данных для вычерчивания пути Земли вокруг Солнца, после которого окажется, что Солнце не находится в центре этого пути, но так как его эксцентриситет весьма мал ($\frac{1}{60}$ диаметра земного пути), то по этим наблюдениям определить, уклоняется ли путь Земли от круга или нет, — невозможно.

Возможно будет обнаружить, что движение Земли вокруг Солнца неравномерное. Кеплер первый отнес движение Земли к Солнцу, а не к центру самой орбиты, и тогда оказалось, что Земля движется всего быстрее там, где она всего ближе к Солнцу, и обратно, и притом так, что произведение абсолютной скорости на расстояние остается постоянным.

Пусть r есть расстояние Земли до Солнца, ω — угловая скорость Земли, t — время, тогда $r\omega$ есть абсолютная скорость Земли; наблюдения показывают, что произведение $r \cdot r\omega = r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const}$, где θ есть гелиоцентрическая доля Земли. Так, напр., при ближайшем расстоянии суточное движение составляет $1^\circ 1' 10''$, при наибольшем $0^\circ 57' 12''$. Наибольшее расстояние 1.0168, наименьшее 0.9832; легко проверить что

$$(1^\circ 1' 10'') \cdot (0.9832)^2 = (0^\circ 57' 11'') \cdot (1.0168)^2$$

Но $r^2 d\theta$ есть удвоенный элемент площади, отнесенной к полярным координатам, таким образом имеем

$$\int r^2 d\theta = ct$$

т. е. Земля описывает в равные времена равные площади вокруг Солнца, причем это совершенно не зависит от вида орбиты. Этот же закон был найден Кеплером из наблюдений над Марсом.

§ 50. Понятие об определении элементов орбиты планеты на основании многолетних наблюдений. Здесь полезно упомянуть, каким образом могут быть найдены из наблюдений те элементы, которые необходимы для определения орбиты планеты.

Легко определить отдельные периоды планетного пути, предполагая, что r , ρ , μ и m известны (r — расстояние от Земли до Солнца, ρ — расстояние планеты до Солнца, μ — суточная угловая скорость планеты, m — суточная угловая скорость Земли).

Для примера возьмем Венеру.

Разность гелиоцентрических долгот Земли и Венеры, очевидно, равна $\mu - m$, умноженному на число дней, протекших после соединения. Когда эта разность составит 360° , то, значит, протек полный период τ , следовательно

$$(\mu - m)\tau = 360^\circ \quad \text{и} \quad \tau = \frac{360^\circ}{\mu - m}$$

таким образом можно найти τ , т. е. продолжительность полного периода обращения Венеры. Величина $\frac{360^\circ \cdot m}{\mu - m}$ выражает долготу Земли в конце этого периода.

Наибольшее видимое угловое расстояние Венеры от Солнца бывает, когда прямая, проведенная от Земли к Венере, касается ее орбиты. Так как в треугольнике SEV стороны $SV = \rho$, $SE = r$ известны, то легко найти углы ESV и SEV , т. е. найти разность гелиоцентрических долгот Земли и Венеры в этот момент и расстояние Венеры до Земли. Момент t' , когда это имеет место, находится по предыдущему из равенств

$$(\mu - m)t' = ESV \quad \text{и} \quad t' = \frac{ESV}{\mu - m}$$

Совершенно так же могут быть найдены все точки пути верхней планеты, поэтому я на этом останавливаюсь не буду.

Я укажу лишь одну или две методы, каким образом можно определить из наблюдений времена обращения планет.

Мы уже знаем, что вместе с долготой планеты изменяется и ее широта, которая то увеличивается, то уменьшается и становится отрицательной, в некоторых же точках равна нулю. Из наблюдений можно будет вскоре убедиться, что это происходит в двух точках, разность долгот которых равна 180° , поэтому, предположив, что орбиты всегда замыкаются, что весьма близко к истине, можно, замечая моменты, когда широта равна нулю, найти время оборота планеты.

Правда, это не дает точного определения, но на основании многих наблюдений оно может быть исправлено.

Mars

Пример:

1817 г.	16 октября . . .	$\beta = 0$
1818	3 ноября . . .	$\beta = 0$
1819	3 сентября . . .	$\beta = 0$
1820	21 » . . .	$\beta = 0$

Следовательно, время обращения 687—688 дней.

Для верхних планет время обращения может быть найдено более точно следующим образом: в моменты противостояния гелиоцентрическая и геоцентрическая долготы планеты между собою равны. Это относится также и к моментам соединений, однако эти последние неудобно наблюдать.

Итак, много лет под ряд наблюдают противостояния и избирают из них два таких, где долготы одинаковы, после этого легко найти и время обращения, если только известно (а это легко найти по вышеуказанному способу), сколько полных оборотов планета за это время совершила.

Нет надобности в том, чтобы долготы обоих противостояний были в точности между собою равны, достаточно, чтобы разность между ними была малая.

Пример. Противостояния Марса

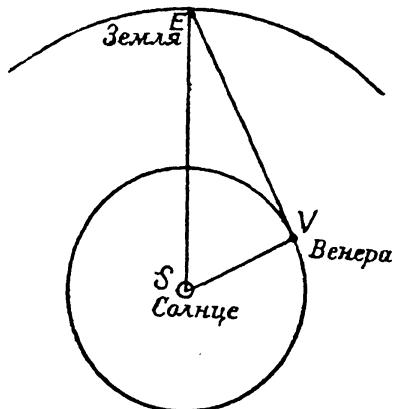
1773 г.	январь . . .	20.275	долгота $\delta = 121^\circ 6' 53''$
1805	» . . .	29.022	» $129^\circ 13' 37''$
1820	» . . .	16.438	» $115^\circ 46' 11''$

С 1773 г. по 1805 г. Марс совершил 17 полных обращений (что легко расчислить по проведенному выше определению времени обращения с точностью до нескольких дней).

С 1773 по 1820 г. он сделал 25 обращений.

Итак, Марс прошел:

С 1773 г. по 1805 в 11695.744 дня . . . $17.360^\circ + 8^\circ 6' 44''$
» 1773 г. » 1820 в 17161.163 » . . . $25.360^\circ - 5^\circ 20' 42''$



Фиг. 35.

Обозначая через x — полное время обращения и через y — то время, которое он употребляет, чтобы в этом месте своей орбиты пройти 1° , получим следующие два уравнения:

$$\begin{aligned}17x + 8.112y &= 11695.747 \\25x - 5.345y &= 17161.163\end{aligned}$$

Откуда найдем

$$x = 686^{\text{дней}} 22^{\text{ч}} 5^{\text{м}} 50^{\text{с}}$$

вместо

$$686^{\text{дней}} 22^{\text{ч}} 18^{\text{м}} 47^{\text{с}}$$

так что разница от истинного составляет $12^{\text{м}} 57^{\text{с}}$.

§ 51. Элементы орбиты. Движется ли планета, действительно, в одной плоскости, — может быть легко определено из наблюдений. Наблюдают прямые восхождения и склонения, вычисляют несколько долгот и широт и, комбинируя попарно такие наблюдения, вычисляют, пользуясь сферической тригонометрией, угол, составляемый орбитою с эклиптикою. Если окажется, что этот угол всегда один и тот же, то планета наверное движется по большому кругу, значит в плоскости.

Можно брать и по три наблюдения и выполнять вычисление следующим образом: пусть u есть долгота восходящего узла Ω , λ — гелиоцентрическая долгота, β — гелиоцентрическая широта планеты, i — наклонность орбиты к плоскости эклиптики, тогда, на основании трех наблюдений, имеем:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \beta &= \operatorname{tg} i \sin(\lambda - u) \\ \operatorname{tg} \beta' &= \operatorname{tg} i \sin(\lambda' - u) \\ \operatorname{tg} \beta'' &= \operatorname{tg} i \sin(\lambda'' - u)\end{aligned}$$

Но, как известно (*Gauss. Theoria Motus Corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*), имеет место следующее общее соотношение:

$$\sin A \sin(B - C) + \sin B \sin(C - A) + \sin C \sin(A - B) = 0$$

следовательно будет

$$\begin{aligned}\sin(\lambda - u) \sin(\lambda' - \lambda'') + \sin(\lambda' - u) \sin(\lambda'' - \lambda') + \\ + \sin(\lambda'' - u) \sin(\lambda - \lambda') = 0\end{aligned}$$

иначе:

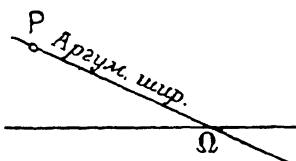
$$\operatorname{tg} \beta \cdot \sin(\lambda' - \lambda'') + \operatorname{tg} \beta' \sin(\lambda'' - \lambda') + \operatorname{tg} \beta'' \sin(\lambda - \lambda') = 0;$$

если наблюдения удовлетворяют этому соотношению, то наверное орбита лежит в одной плоскости.

Термины. Узлами называют обе точки, в которых эклиптика пересекается орбитою планеты или кометы. Различают восходящий узел, в котором светило переходит из южного полушария в северное, и другой — нисходящий. Для комет, у которых направление движения бывает обратным направлению движения планет, это есть единственное различие узлов. Наклонностью орбиты называется угол наклонения, составляемый ее плоскостью с плоскостью эклиптики. В моей «Theoria Motus Corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium» я рассматриваю лишь тот угол наклонения, который лежит по ту сторону эклиптики, куда движение



Фиг. 36.



Фиг. 37.

планеты или кометы направлено, так что для комет наклонность может превосходить 90° . При этом получается то преимущество, что по наклонности видно движение светила прямое или попятное (т. е. происходит ли в одну сторону с движением планет, или в обратную), как это имеет место для многих комет.

Орбиту планеты подразделяют на 360° или, точнее говоря, тот большой круг, который описывается прямою, соединяющей планету с Солнцем. Эти градусы считают от восходящего узла, и расстояние светила до этого узла называют аргументом широты. Сумму долготы узла и аргумента широты называют долготою в орбите, которая, таким образом, отличается от гелиоцентрической долготы, хотя для старых планет и не особенно много, так как наклонность их орбит малая.

Если светило, долгота которого определяется, есть комета, движение которой попятное, то считают от точки весеннего равноденствия до восходящего узла Ω в прямом направлении и от узла до места светила по его орбите в направлении попутном, так что здесь:

$$\text{долгота в орбите} = \text{долгота } \Omega - \text{аргумент широты}$$

Такой счет может легко повести к ошибкам, напр., для комет, наклонность которых близка к 90° , и еще в точности неизвестно, больше она или меньше 90° , значит для двух точек, лежащих весьма близко между собою, можно было бы получить два весьма различных выражения, поэтому я совершенно не пользуюсь этим способом определения положения светила

для комет, а лишь для планет, где ошибка невозможна, ибо движение всех их происходит в одну сторону.

Разность между долготою в орбите и гелиоцентрической долготою, равная разности аргумента широты и долготы планеты, считаемой от ее восходящего узла, называется *приведением к эклиптике*.

Если в таблице сопоставить вычисленные на основании весьма многих наблюдений долготы, широты и радиусы-векторы для многих последовательных моментов, то можно судить о виде орбиты планеты.

Таким образом Кеплер нашел, что орбита Марса значительно отклоняется от круга; он перешел тогда к эллису, как к простейшей после круга кривой, и все совпало превосходно.

Он поместил Солнце в фокусе, так как был того мнения, что орбита, будучи эллиптической, должна находиться в определенном соотношении с Солнцем.

Наконец, он сопоставил движение по долготе в орбите с радиусами-векторами и нашел, что произведение квадрата радиуса-вектора на движение по долготе остается одно и то же для всех точек орбиты. См.: *Keppler. De Stella Martis, astronomia ευδεολογητοσ*.

Гораздо позже он нашел, что это постоянное произведение — различное для различных планет. Так как он не знал логарифмов, то ему было довольно-затруднительно найти соотношение между этими постоянными, но если бы он имел логарифмы, то ему стоило только взять разности логарифмов, чтобы заметить это соотношение. После вычислений, продолжавшихся многие месяцы, он нашел, что квадраты времен обращения, разделенные на кубы средних расстояний (большие полуоси эллисов), представляют величину постоянную.

§ 52. Формулы эллиптического движения планет. Таким образом Кеплером высказаны следующие три закона движения планет:

1°) Планеты движутся по эллисам вокруг Солнца, которое находится в одном из фокусов этих эллисов.

2°) Площади, описываемые радиусом-вектором каждой планеты, пропорциональны времени их описания.

3°) Квадраты времен обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.

Остается показать соотношения между различными величинами, которыми определяются движения планет, на основании законов Кеплера.

Мы будем исходить из данного в Аналитической геометрии определения эллипса, что это есть круг, коего ординаты уменьшены в определенном

отношении.

Пусть будет:

$$\text{Большая полуось . . . } AC = a$$

$$\text{Малая полуось . . . } CD = b$$

Точка S , расположенная так, что $DS = AC = a$, есть тот фокус эллипса, в котором находится Солнце:

$$\frac{CS}{SD} = e = \text{эксцентриситет} \quad (1)$$

Таким образом непосредственно имеем:

$$a^2 = b^2 + a^2 e^2$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Это выражение становится более удобным, если положить $\frac{a}{b} = \cos \varphi$, тогда будет: $e = \sin \varphi, b = a \cos \varphi$

Кроме того, положим:

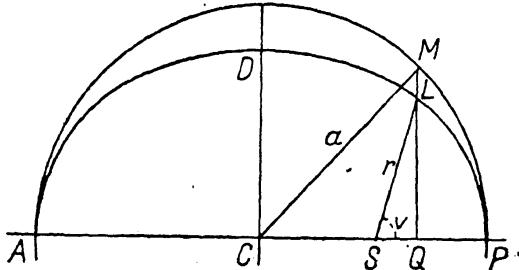
радиус-вектор: $SL = r$;

расстояния до перигелия: $PP = a - ae$;

расстояние до афелия: $SAA = a + ae$;

истинная аномалия: $PSL = v$;

эксцентрическая аномалия: $PCM = E$.



Фиг. 38.

Имеем:

$$CQ = a \cos E; \quad MQ = a \sin E$$

и по определению эллипса:

$$LQ = b \sin E$$

Затем,

$$SQ = r \cos v = a \cos E - ae$$

$$LQ = r \sin v = b \sin E$$

Значит,

$$\sin E = \frac{r \sin v}{b}$$

$$\cos E = \frac{r \cos v + ae}{a}$$

сложив квадраты, получаем

$$1 = \frac{r^2 \sin^2 v}{b^2} + \frac{r^2 \cos^2 v + 2ae r \cos v + a^2 e^2}{a^2}$$

а так как

$$b^2 = a^2 - a^2 e^2 \quad \text{и} \quad \sin^2 v = 1 - \cos^2 v$$

то будет

$$a^2 - a^2 e^2 = r^2 - r^2 \cos^2 v + r^2 \cos^2 v + 2ae r \cos v + a^2 e^2 - e^2 r^2 \cos^2 v - 2ae^3 r \cos v - a^2 e^4$$

откуда

$$r^2 = (a - ae^2 - er \cos v)^2$$

следовательно

$$a - ae^2 - er \cos v = \pm r$$

Здесь надо брать только знак $-$, так как r должно рассматриваться как положительную величину.

Итак,

$$a - ae^2 = r + re \cos v$$

т. е.

$$r = \frac{a - ae^2}{1 + e \cos v} = \frac{a \cos^2 \varphi}{1 + e \cos v} = \frac{p}{1 + e \cos v} \quad (2)$$

Из выше приведенных двух уравнений

$$\left. \begin{array}{l} b \sin E = r \sin v \\ a \cos E - ae = r \cos v \end{array} \right\} \quad (3)$$

вместо того, чтобы исключить E , можно исключить r , разделив одно на другое:

$$\frac{b \sin E}{a \cos E - ae} = \operatorname{tg} v$$

Из уравнений (2) и (3) можно исключить $\cos v$:

$$\begin{aligned} \frac{a \cos E - ae}{r} &= \frac{a - ae^2 - r}{re} \\ r &= a(1 - e \cos E) \end{aligned} \quad (4)$$

Итак, имеем

$$\frac{a - ae^2}{1 + e \cos v} = a(1 - e \cos E)$$

значе:

$$0 = e + \cos v - \cos E(1 + e \cos v)$$

$$\cos E = \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v} \quad (5)$$

Затем из (3) и (4):

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad (6)$$

$$\sin v = \frac{b \sin E}{a(1 - e \cos E)} \quad (7)$$

Но так как

$$\frac{1 - \cos v}{\sin v} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v$$

то будет:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{1}{2} v &= \frac{\frac{1-e \cos E - e}{b \sin E}}{\frac{a(1-e \cos E)}{a(1-e \cos E)}} = \frac{a(1+e)(1-\cos E)}{b \sin E} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} v &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} E \cdot \frac{a(1+e)}{b} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} E\end{aligned}\quad (8)$$

заменив e его величиною $\sin \varphi$, получим

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} E \quad (9)$$

Сводка этих формул следующая:

$$p = a \cos^2 \varphi \quad (\text{I})$$

$$r = \frac{p}{1+e \cos v} \quad (\text{II})$$

$$r = a(1-e \cos E) \quad (\text{III})$$

$$\cos E = \frac{\cos v + e}{1+e \cos v}, \quad \cos v = \frac{\cos E - e}{1-e \cos E} \quad (\text{IV})$$

$$\begin{aligned}\sin \frac{1}{2} E &= \sqrt{\frac{1-\cos E}{2}} = \sin \frac{1}{2} v \sqrt{\frac{1-e}{1+e \cos v}} = \sin \frac{1}{2} v \sqrt{\frac{r(1-e)}{p}} = \\ &= \sin \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{\frac{r}{a(1+e)}}\end{aligned}\quad (\text{V})$$

$$\begin{aligned}\cos \frac{1}{2} E &= \sqrt{\frac{1+\cos E}{2}} = \cos \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1+e \cos v}} = \cos \frac{1}{2} v \sqrt{\frac{r(1+e)}{p}} = \\ &= \cos \frac{1}{2} v \sqrt{\frac{r}{a(1-e)}}\end{aligned}\quad (\text{VI})$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \cdot \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right) \quad (\text{VII})$$

$$\sin E = \frac{r \sin v \cos \varphi}{p} = \frac{r \sin v}{a \cos \varphi} \quad (\text{VIII})$$

$$r \cos v = a(\cos E - e) =$$

$$= 2a \cos \left[\frac{1}{2} E + \frac{1}{2} \varphi + 45^\circ \right] \cdot \cos \left[\frac{1}{2} E - \frac{1}{2} \varphi - 45^\circ \right] \quad (\text{IX})$$

$$\sin \frac{1}{2}(v-E) = \sin \frac{1}{2} \varphi \sin v \sqrt{\frac{r}{p}} = \sin \frac{1}{2} \varphi \sin E \sqrt{\frac{a}{r}} \quad (\text{X})$$

$$\sin \frac{1}{2}(v+E) = \cos \frac{1}{2} \varphi \sin v \sqrt{\frac{r}{p}} = \cos \frac{1}{2} \varphi \sin E \sqrt{\frac{a}{r}} \quad (\text{XI})$$

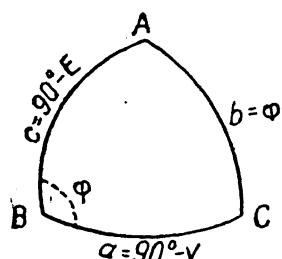
В таком виде они и приведены в «Theoria Motus Corporum coelistium in sectionibus conicis solem ambientium».

Можно получить еще некоторые, весьма изящные, формулы следующим образом. Из (6) и (7), заменив в (6) e через $\sin \varphi$, имеем

$$\cos v = \frac{\cos E - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi \cos E}$$

следовательно

$$\cos v - \cos v \sin \varphi \cos E = \cos E - \sin \varphi \quad (a)$$



и

$$\sin \varphi = \frac{\cos E - \cos v}{1 - \cos v \cos E}$$

Подставляя в (7) $\sin \varphi$ вместо e и $a \cos \varphi$ вместо b , имеем

Фиг. 39.

$$\sin v = \frac{\cos \varphi \sin E}{1 - \sin \varphi \cos E}$$

Но, на основании (а),

$$1 - \sin \varphi \cos E = \frac{\cos E - \sin \varphi}{\cos v}$$

следовательно

$$\sin v = \frac{\cos \varphi \sin E \cos v}{\cos E - \sin \varphi} = \frac{\cos \varphi (1 - \cos v \cos E)}{\sin E}$$

Отсюда

$$\cos \varphi = \frac{\sin v \sin E}{1 - \cos v \cos E}$$

иначе:

$$1 = \cos v \cos E + \frac{\sin v \sin E}{\cos \varphi}$$

т. е.

$$\cos \varphi = \sin v \sin E + \cos \varphi \cos v \cos E$$

Эта формула показывает, что если в сферическом треугольнике взять

$$C = 90^\circ - v; \quad a = 90^\circ - E; \quad B = \varphi.$$

то противолежащая этому углу сторона также будет равна φ .

§ 53. Уравнение Кеплера. Решение его методом последовательных приближений и по методе Гаусса. Величина v есть истинная аномалия, E — эксцентрическая, остается еще установить соотношение между предыдущими величинами и средней аномалией, которую

я обозначу через M . Для этого ничего более не надо, как знать время, потребное планете, чтобы достигнуть некоторой истинной аномалии.

Это время, умноженное на среднее движение, дает среднюю аномалию в этот момент. Но время, как уже показано, пропорционально описанной площади, которая равна $\frac{1}{2} \int r^2 dv$. Чтобы выполнить это интегрирование, нужно одно соотношение между r и v , которое мы получим, выразив r и v через E .

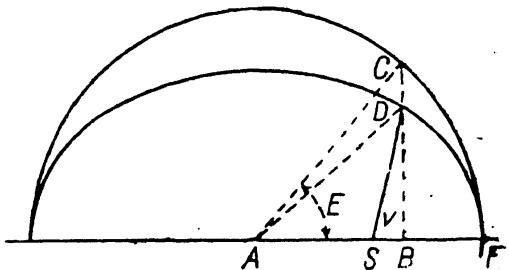
Из (III) имеем

$$r^2 = a^2(1 - e \cos E)^2$$

по (8):

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} E$$

следовательно



Фиг. 40.

$$r^2 dv = \frac{a^2(1 - e \cos E)^2}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} v\right) \cos^2 \frac{1}{2} E} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot dE$$

подставив вместо $\operatorname{tg} \frac{1}{2} v$ его величину через E и затем .

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} E = \frac{1 - \cos E}{1 + \cos E}$$

получим

$$r^2 dv = a^2(1 - e \cos E) \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot dE$$

и

$$\frac{1}{2} \int r^2 dv = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{1 - e^2} (E - e \sin E)$$

Эта площадь могла бы быть найдена и геометрически. Известно, что лежащие на том же основании площади простых фигур, коих высоты во всех точках находятся в одинаковом отношении, находятся в том же отношении.

Таким образом

$$\frac{\text{сектор } DAB}{\text{сектор } BAC} = \frac{DB}{BC} = \frac{b}{a}$$

но

$$\text{сектор } BAC = \frac{\pi E}{360^\circ} \cdot a^2$$

следовательно

$$\text{сектор } DAB = \frac{\pi E}{360^\circ} \cdot ab$$

и

$$\begin{aligned}\text{сект. } FSD &= \text{сект. } DAB - \text{треуг. } DSA = \\ &= \frac{\pi ab}{360^\circ} \cdot E - \frac{ae \cdot b \cdot \sin E}{2} = \\ &= \frac{1}{2} a^2 \sqrt{1 - e^2} \left(\frac{E \cdot \pi}{180^\circ} - e \sin E \right)\end{aligned}$$

Эта формула тождественна с предыдущей, ибо $\pi = 180^\circ$, если дуги измерять в долях радиуса, принятого за единицу, как это всегда делается при дифференцированиях.

Теперь легко найти M по E . Обозначим через T — полное время обращения планеты, t — время, протекшее, пока она достигла истинной аномалии v , которую и требуется по приведенным выше формулам обратить в среднюю.

Времени T соответствует описываемая площадь $\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$, времени t — площадь: $\frac{1}{2} a^2 \sqrt{1 - e^2} \left[\frac{\pi}{180^\circ} \cdot E - e \sin E \right]$, следовательно будет

$$t = T \cdot \left[\frac{\pi}{180^\circ} \cdot E - e \sin E \right]$$

причем E надо выражать в градусах.

Но так как

$$T:t = 360^\circ:M$$

то будет

$$M = E - \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot e \sin E = E - 206265'' \cdot e \sin E \quad (*)$$

или, если выражать дуги в долях радиуса,

$$M = E - e \sin E \quad (**) \quad (**)$$

Обыкновенно, для вычисления M , применяют формулу (*).

Величина $206265'' \cdot e$ показывается в астрономических таблицах для всякой планеты, т. е. эксцентриситет в этих таблицах выражается в градусной мере.

Гораздо труднее обратная задача: по данному M найти v , т. е. по средней аномалии найти истинную.

Эта задача известна под названием задачи Кеплера; ею занимались многие астрономы: в последнее время Шуберт в Петербурге и Degen в Копенгагене.

Прямое решение, как легко видеть, невозможно, если только не принимать за прямое приближенное решение помошью ряда. Наибольшую трудность представляет переход от M к E : после того как E найдено, v находится легко.

Lagrange дал ряд для вычисления величины y , определяемой уравнением

$$x = y + \alpha Y$$

где X есть заданная функция от y . Пользуясь этим рядом, легко получить, решение задачи в виде бесконечного ряда, на этом я останавливаюсь не буду, ибо это решение не применяется на практике.

Косвенное решение, которое, однако, ведет также довольно медленно к цели, следующее: уравнение, которое надо решить, есть

$$E = M + e \sin E$$

где e для планет весьма мало, так что E немногим отличается от M , поэтому полагают для первого приближения $E = M$. Это приближенное значение подставляют в данное уравнение, тогда

$$E = M + e \sin M$$

есть второе приближение.

По подстановке его в уравнение, получим

$$E = M + e \sin(M + e \sin M)$$

для третьего приближения. Это действие можно продолжать до тех пор, пока новое приближение не вызывает изменения величины E . Насколько рано или поздно это будет достигнуто, — зависит от величины разности между M и E и точности логарифмических таблиц.

Пусть, напр., при $e = 14^\circ 3' 20'' = 50600''$ дано $M = 332^\circ 28' 55''$, требуется найти E . Последовательные значения по приведенному выше процессу следующие:

Приблизительные значения E	Разности
$332^\circ 28' 55''$	$23379''$
$325^\circ 59' 16''$	$4925''$
$324^\circ 37' 11''$	$993''$
$20' 38''$	$199''$
$17' 19''$	$39''$
$16' 40''$	$8''$
$32''$	$2''$
$30''$	

последнее значение весьма близко к истинному $324^\circ 16' 29''$, найденному другим способом.

Это вычисление может быть несколько сокращено, если обратить внимание, что разности убывают приблизительно в геометрической прогрессии, поэтому надо вычислить три последовательные величины E и их разности a и b , тогда $\frac{b}{a}$ есть знаменатель прогрессии, и значит, будет

$$E = E' - \left(\frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3} + \dots \right) = E' - \frac{b^2}{a - b}$$

где E' есть последнее из найденных значений. По этой формуле для предыдущего примера получим $324^\circ 15' 17''$, что далеко не так близко к истине, как величина, приведенная выше. Было бы правильнее вычислить четыре значения E и применить предыдущий прием к разностям 2-го, 3-го и 4-го значения.

Все эти способы все-таки еще весьма не совершенны, в чем легко убедиться на практике. Я пользуюсь при таких вычислениях следующим способом, изложенным мною в «Theoria Motus Corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium».

Пусть ϵ есть приближенное значение E , x — число минут или секунд, которое надо придать к ϵ , чтобы получить E , так что

$$E = \epsilon + x$$

Если желательно подставить эту величину в уравнение $E = M + e \sin E$, то надо знать логарифм синуса $\epsilon + x$. Но так как величина x нам не известна, то пусть λ есть разность логарифмов $\sin \epsilon$ на 1 минуту (или на 1 секунду, если логарифмические таблицы составлены с такою точностью), тогда будет

$$\log e + \log \sin \epsilon + \lambda x = \log (e \sin E)$$

На сумму первых двух логарифмов подыскивают число и замечают разность на одну единицу числа, пусть она есть μ , тогда будет

$$e \sin E = e \sin \epsilon + \frac{\lambda x}{\mu}$$

Таким образом имеем два уравнения:

$$\begin{aligned} E &= M + e \sin \epsilon + \frac{\lambda x}{\mu} \\ E &= \epsilon + x \end{aligned}$$

Отсюда находим x следующим образом: обозначим

$$M + e \sin \epsilon = E,$$

•тогда

$$x = \frac{\mu}{\mu - \lambda} [E_1 - \varepsilon]$$

И

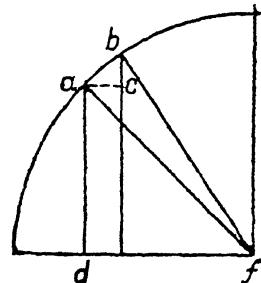
$$E = E_1 + \frac{\lambda}{\mu - \lambda} [E_1 - \varepsilon]$$

Прием этот основан на том, что без значительной ошибки можно принять, что в тесном промежутке около минуты изменения логарифмов пропорциональны изменению чисел.

Остается только, соответственно, видоизменить этот прием сообразно четверти, в которой лежит E .

Всегда $\mu > \lambda$. Легко доказать, что $\Delta \sin E = \frac{\cos E}{206265}$ при изменении E на $1''$. В самом деле, пусть дуга ab , на которую изменяется угол $d\alpha$, равна $1''$, тогда будет

$$\frac{bc}{ab} = \frac{af}{df}$$



Фиг. 41.

но когда $ab = 1''$, то $af = 206265''$ и $df = \cos E$, значит

$$\Delta \sin E = \frac{\cos E}{206265}$$

Но также

$$\Delta \log \sin E = \frac{\Delta \sin E}{\sin E} \cdot K$$

при весьма малых изменениях угла E , здесь K есть модуль логарифмов ($K = 0.43$ для обыкновенных логарифмов), значит

$$\lambda = \Delta \log \sin E = \frac{K \cdot \cos E}{206265 \cdot \sin E}$$

Затем

$$\mu = \frac{K}{e \sin E}$$

следовательно

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{e \cos E}{206265},$$

т. е. $\mu > \lambda$, ибо e всегда меньше 1, т. е. $206265''$.

В первой четверти $\lambda > 0$ и $\mu > 0$, поэтому будет

$$E = E_1 + \frac{\lambda}{\mu - \lambda} (E_1 - E) \quad (1)$$

Во второй четверти $\lambda < 0$, $\mu > 0$, и

$$E = E_1 - \frac{\lambda}{\mu + \lambda} (E_1 - E) \quad (2)$$

В третьей четверти $\lambda > 0$ и $\mu > 0$, и

$$E = E_1 - \frac{\lambda}{\mu + \lambda} (E_1 - E) \quad (3)$$

Наконец, в четвертой четверти $\lambda < 0$ и $\mu < 0$, и будет

$$E = E_1 + \frac{\lambda}{\mu - \lambda} (E_1 - E) \quad (4)$$

в этих формулах под λ и μ надо разуметь их абсолютные величины, непосредственно выбираемые из таблицы логарифмов.

Итак, вблизи перигелия надо E_1 увеличивать, вблизи афелия — уменьшать, или в удобной для запоминания форме: когда планета движется всего быстрее, надо E_1 увеличивать, там же, где она движется всего медленнее, — уменьшать.

§ 54. Определение места планеты на небесной сфере в данный момент по известным элементам ее орбиты. Теперь мы имеем все средства для определения положения планеты в любой момент по заданным элементам ее орбиты.

Из этих элементов обыкновенно задают следующие семь:

1) *Эксцентриситет* орбиты, вместо которого часто дается угол φ .
2) *Большая полуось* эллипса, вместо нее может быть дан и параметр p .
3) *Время обращения* или лучше *суточное движение* планеты.
4) *Эпоха* планеты, под которойю разумеют *среднюю долготу планеты*¹ в определенный момент, именно — у новых французских астрономов в полночь между 31 декабря и 1 января (иначе в 0 часов 1 января, у большей же части астрономов, считающих еще [по-старому], 1 января 0 часов, если год високосный, и 31 декабря 0 часов, если год простой). Эта разница делается для того, чтобы в продолжение 10 месяцев после февраля не обращать внимания, что год високосный, что дает некоторое удобство для таблиц).

Если время обращения задается в годах, то всегда предполагается Юлианский год $365\frac{1}{4}$ дней.

Эти четыре элемента достаточны для определения самой орбиты; необходимо еще три, чтобы определить положение орбиты относительно эклиптики. Эти элементы следующие.

5) *Долгота восходящего узла.*

¹ Среднюю долготу планеты называют сумму средней аномалии и долготы перигелия.

6) *Наклонность орбиты* относительно эклиптики.

7) *Долгота перигелия*, т. е. сумма долготы восходящего узла и расстояния перигелия до узла, считаемого в плоскости самой орбиты.

По этим семи элементам может быть вычислено все, что относится до положения планеты в любой заданный момент.

Определяют промежуток времени между тем моментом, для которого желают знать положение планеты, и тем, для которого дана эпоха средней долготы. Умножив на этот промежуток среднее суточное движение и придав полученное произведение к долготе эпохи, получим среднюю долготу планеты в рассматриваемый момент. Вычтя отсюда долготу перигелия, получим среднюю аномалию, приложив к ней «уравнение центра» (разность между средней аномалией и истинной), получим истинную аномалию; сумма этой последней и долготы перигелия дает долготу в орбите, т. е.:

Долгота в орбите равна средней долготе \rightarrow уравнений центра.

Проекцию радиуса-вектора на плоскость эклиптики называют *укороченным* радиусом-вектором. Если по наклонности орбиты и по долготе в орбите вычислить угол, составляемый радиусом-вектором с его проекцией, т. е. с укороченным радиусом (т. е. гелиоцентрическую широту), и по приведенным выше формулам самую длину радиуса-вектора, то мы можем получить укороченный радиус и перпендикулярное расстояние планеты до плоскости эклиптики.

При помощи этих двух величин и разности гелиоцентрических долгот планеты и Земли, иначе — геоцентрической долготы планеты и радиусу-вектору Земли, легко вычислить расстояние Земли до планеты.

Все эти задачи подробно разобраны в моей «*Theoria Motus*», к которой я и отсылаю.

Угол, образуемый при Земле прямыми, приведенными одна к планете, другая к Солнцу, называется углом *элонгации*, угол с вершиною в Солнце — углом *коммутации*.

Для облегчения всех этих вычислений составлено множество различных таблиц, употребление которых само собою усваивается на практике.

В новейших из этих таблиц приняты в расчет небольшие отступления от законов Кеплера, которые вообще называются *возмущениями*.

§ 55. Понятие о возмущениях планетного движения. Кеплеровы законы движения планет справедливы не с полною точностью, ибо планеты притягиваются не одним только Солнцем, но и притягиваются друг к другу. Это производит отступления от правильного хода явле- однако эти отступления становятся заметными лишь по истечении столе-

Одно из этих медленных отступлений мы уже изучили — прецессию. Те, которые относятся к притяжениям планет друг другом и о которых теория дает полный отчет, еще медленнее прецессии, и поэтому называются *вековыми возмущениями*.

Изменяются: эксцентриситет, наклонность, долгота узла и перигелия орбиты; единственно, что, согласно теории, остается постоянным — это большие полуоси орбит и среднее движение.

Входить в теорию этих возмущений, составляющих труднейшую задачу Физической астрономии, здесь не место.

Принятие в расчет этих возмущений привело по большей части к усложнению таблиц, так что надо с большим вниманием изучить введение к каждой таблице, прежде нежели ею пользоваться, чтобы не впасть в ошибку.

В подробности по этому делу можно войти лишь при словесных объяснениях и на практике в употреблении этих таблиц, напр.: табл. Солнца — Zach'a, таблиц Марса, Меркурия и пр. — Lindenau, и т. п.

§ 56. Закон Titius'a и новые планеты. Долгое время было известно всего 6 планет. Лишь в конце XVIII в. Гершель открыл Урана, причем подтвердился вновь закон, который был подмечен Titius'ом в увеличении планетных расстояний: если расстояние Меркурия до Солнца разделить на 387 частей, то расстояния прочих планет, выраженные в этих же частях, возрастают в следующей прогрессии:

		Истинн. расст.
Меркурий	387	387
Венера	$387 + \frac{1}{2} \cdot 293 =$	723
Земля	$387 + 2.293 =$	1000
Марс	$387 + 4.293 =$	1524
Юпитер	$387 + 16.293 =$	5203
Сатурн	$387 + 32.293 =$	9541
Уран	$387 + 64.293 =$	19082

Этот закон, сколь мало он астрономами-математиками ни признавался, во-первых, потому, что он очень грубый, и во-вторых, потому, что это собственно не есть прогрессия (первый член должен бы быть $387 + \frac{1}{2} \cdot 293$), дал повод Bode предсказать существование новой планеты с расстоянием $387 + 8.293$ до Солнца.

Эта планета и была действительно открыта Piazzi в Палермо, но вскоре опять, вследствие его болезни, потеряна, но чаконец Olbers в Бремене, после того как ее долго и напрасно искали на всех европейских обсерваториях, открыл ее на основании орбиты, вычисленной Гауссом, по

новому способу, единственно пользуясь наблюдениями без всяких гипотез, к которым прибег Бургарт. Эта новая планета была названа *Церера*, и *Bode* издал о ней, как и об Уране, небольшое сочинение.

Впоследствии было обнаружено, что Уран ранее Гершеля был наблюдал многими астрономами, которые принимали его за неподвижную звезду, напр. *Tob. Mayer*, *Флемстид*, *Лемонье*, поэтому начали составлять более точные звездные карты, без которых нахождение новых планет было невозможно.

Olbers вскоре после того открыл Палладу.

Olbers был сторонником приведенного выше закона *Titius'a*, но так как его собственные открытия этому закону противоречили, то он высказал гипотезу, что обе эти планеты составляли прежде одно тело, которое разбралось от взрыва; вследствие вековых возмущений, его куски получили различные орбиты. Однако, на основании вычислений, произведенных под моим руководством г. Энке в Готе, эти орбиты должны постоянно сближаться, и приблизительно через 2000 лет придет время, когда они встретятся. Тем не менее, высказанная выше гипотеза имела то хорошее последствие, что *Olbers* подробно обследовал ту область неба, где обе планеты наиболее сближаются, чтобы найти, может быть, и еще куски того же разорвавшегося тела. Таким образом он через год, действительно, открыл *Весту*. Затем впоследствии *Harding* открыл *Юнону*.

§ 57. Таблица движений планет. Чтобы находить место планеты в данный момент, уже давно составлены таблицы. Стариннейшие суть Рудольфинские, составленные Кеплером.

Таблицы Галлея были уже гораздо точнее, и ими пользовались долгое время, хотя тогда возмущения еще не могли быть приняты во внимание, пока наконец *Lalande* дал такие таблицы в своей «Астрономии».

Эти старинные таблицы были совершенно вытеснены таблицами *Zach'a* — «*Sonnentafeln*», которые он затем сам привел к меньшему объему, исправил и даже издал в Италии в карманном формате, — я не вижу собственно с какой целью.

Почти одновременно со 2-м изданием вышли таблицы *Bureau des Longitudes*, вычисленные *Delambre'om* и весьма мало отличающиеся от таблиц *Zach'a*.

Теперь наилучшие таблицы Солнца суть таблицы *Carlini*, составленные весьма остроумно, так что желательно, чтобы и для планет были составлены таблицы с таким же расположением.

Для Юпитера Delambre и Бувар, для Сатурна Доси (Doci) составили весьма хорошие таблицы. Для Урана можно брать таблицы Warner'a; таблицы Марса и Венеры даны Lindenau, они очень хороши; для вновь открытых планет составляются эфемериды.

§ 58. Солнечные пятна. Определение положения оси вращения Солнца. Относительно перечисленных выше светил, кроме их движения, есть еще много замечательного, о чём я и упомяну.

Тотчас же после открытия зрительных труб заметили, что на поверхности Солнца видны черные пятна. Эти пятна двигались, становились больше или меньше и исчезали совсем. Они всегда появляются на левом краю солнечного диска в виде узкой длинноватой полоски, становятся постепенно шире по мере приближения к середине, переходят затем к правому краю, становясь уже и, достигнув края, исчезают. Такое прохождение их продолжается около 14 дней. Затем через 14 дней они часто вновь появляются на левом краю диска, иногда имея другое очертание, иногда же совсем пропадают.

Непозвестно, надо ли их принимать за шлаки, плавающие на огненном море Солнца, или за отверстия в светящейся его атмосфере, которой оно, по мнению некоторых, окружено. Одно лишь может быть по ним установлено с достоверностью, — что Солнце вращается около своей оси.

Чтобы определить места, через которые пятна проходят в различное время, и на основании этого вывести время обращения Солнца и положение его оси, можно применить следующий способ.

Определяют несколько мест пятен, наблюдая их долготы и широты или прямые восхождения и склонения, и замечают при этом время. Вообразим треугольник с вершинами в глазе, центре Солнца и пятне. В этом треугольнике нам известен угол при глазе, который мы найдем по разностям долгот и широт центра Солнца и пятна, кроме того мы знаем расстояние от глаза до центра Солнца и расстояние от пятна до центра Солнца, принимая, что пятно лежит на его поверхности. По этим данным мы можем решить треугольник и, пользуясь наклоном треугольника к плоскости эклиптики, который мы также получим по разности широт и долгот центра Солнца и пятна, мы найдем гелиоцентрические координаты пятна, т. е. его место на поверхности Солнца.

Определив несколько таких мест, мы можем, согласно изложенному в первой части учению о суточном движении неподвижных звезд, найти малый круг, по которому движутся пятна, и определить его положение относительно эклиптики. По наблюдениям же времени мы можем вычислить и время обращения Солнца.

§ 59. Кольца Сатурна и их фазы. На планетах были замечены подобные же явления (пятна), в особенности на Юпитере и на Сатурне, не столь ясно на Меркурии и Венере.

Подобным же способом рассчитали их вращения около их осей, положение их экваторов относительно эклиптики и т. д., а также нашли, что они сжаты у полюсов. Обо всем этом можно найти подробное описание в сочинении Schröter'a — «Aphroditographische, Hermographische und Chronographische Fragmente», поэтому я дальше на этом останавливаться не буду.

Можно дать изящное и применимое для планетных фаз математическое исследование о Сатурновых кольцах.

У Сатурна открыли одно, а впоследствии два кольца, которые его огибают подобно экваторам, не касаясь его поверхности. В направлении оси Сатурна они весьма тонки, по направлению же перпендикулярному имеют значительную ширину. Эти кольца представляются с Земли в весьма различных видах, зависящих как от положения Сатурна относительно Земли, так и от освещения его Солнцем.

Вообразим, что наружный или внутренний край кольца есть круг, находящийся в некотором расстоянии от шара Сатурна и так около него описанный, что центр этого круга и центр шара совпадают. Ставится вопрос, какова будет проекция (здесь слово проекция берется в более широком смысле, а не только одной прямоугольной проекции) окружности круга на плоскость, проведенную перпендикулярно прямой, соединяющей глаз с центром Сатурна, на которую проектируется также и самий шар.

Пусть x, y, z — координаты точки окружности, ось x направлена по линии пересечения плоскости проекций и плоскости круга, ось y — в самой плоскости проекций, ось z — к глазу. Обозначим через A — угловое расстояние рассматриваемой точки окружности от оси x .

Пусть R есть расстояние глаза или Земли от центра Сатурна, r — диаметр кольца, I — наклонение плоскости кольца к плоскости проекций.

Пусть $X, Y (Z$ очевидно 0) суть координаты проекции точки x, y, z , тогда, очевидно, будут:

$$(0, 0, R), \quad x = r \cos A, \quad y = r \sin A \cos I, \quad z = r \sin A \sin I; \quad (X, Y, 0)$$

координаты трех таких точек, которые лежат на одной прямой, а именно — глаза, точки окружности и ее проекции. Условие, чтобы эти три точки лежали на одной прямой, суть

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{R-r}{R}$$

Подставив вместо x, y, z их величины, имеем следующие уравнения:

$$X = \frac{Rr \cos A}{R - r \sin A \sin I}$$

$$Y = \frac{Rr \sin A \cos I}{R - r \sin A \sin I}$$

исключив угол A , для чего стоит только определить $\sin A$ и $\cos A$ и сложить их квадраты, получим:

$$r \sin A = \frac{YR}{Y \sin I + R \cos I}$$

$$r \cos A = \frac{XR \cos I}{Y \sin I + R \cos I}$$

Отсюда следует

$$r^2(Y \sin I + R \cos I)^2 = R^2 Y^2 + R^2 X^2 \cos^2 I$$

иначе:

$$R^2 \cos^2 I \cdot X^2 + Y^2(R^2 - r^2 \sin^2 I) - 2r^2 R \cos I \sin I \cdot Y - r^2 R^2 \cos^2 I = 0$$

или, положив:

$$Y - \frac{rR \cos I \sin I}{R^2 - r^2 \sin^2 I} = Y'$$

$$\frac{R^2 - r^2 \sin^2 I}{R^2 - r^2} X^2 + \left(\frac{R^2 - r^2 \sin^2 I}{rR \cos I} \right)^2 \cdot Y'^2 = 1$$

Отсюда видно, что проекция круга есть эллипс, коего полуоси суть

$$\frac{Rr}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 I}} \text{ и } \frac{rR^2 \cos I}{R^2 - r^2 \sin^2 I}$$

причем последняя не совпадает с прямую пересечения плоскости круга и плоскости проекций.

Эта проекция будет гиперболою, когда $R < r \sin I$, т. е. когда глаз был бы ближе к плоскости проекций, нежели высшая точка круга.

Но этого никогда для Сатурна не бывает, напротив r весьма мало по сравнению с R , тем более r^2 по сравнению с R^2 , и следовательно, проекция круга на плоскость, проведенную через центр Сатурна, есть эллипс, коего большая полуось равна r и совпадает с линией пересечения плоскости круга и проекций и коего малая полуось равна $r \cos I$.

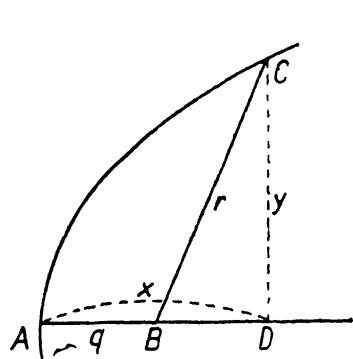
§ 60. О параболическом движении комет. Я рассматриваю кометы ранее спутников, ибо комета, теперь, видимая на небе, может мне служить примером.

Кометы движутся по параболам или по эллипсам, имеющим столь большую ось, что по наблюдениям они не могут быть отличены от параболы.

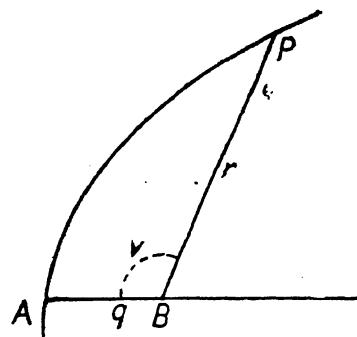
Известно, что уравнение параболы есть $ax = y^2$. Если на оси разыскать точку B , обладающую тем свойством, что абсциссы, от нее считаемые, находились бы в рациональном отношении к расстоянию до точек на кривой, имеющих сказанную абсциссу, то, обозначая через $q = AB$ — расстояние этой точки до вершины A и $CB = r$, получим:

$$r^2 = (x - q)^2 + y^2$$

$$r = \sqrt{(x - q)^2 + ax} = \sqrt{x^2 + (a - 2p)x + q^2}$$



Фиг. 42.



Фиг. 43.

Легко видеть, что r выразится рационально через x , если взять $a - 2q = 2q$, т. е. $q = \frac{1}{4}a$. Следовательно, вводя q вместо a , мы можем написать уравнение параболы так:

$$y^2 = 4qx$$

Здесь q есть расстояние фокуса до вершины. В фокусе находится Солнце.

Пусть v есть угол, составленный радиусом-вектором r с осью параболы, т. е. истинная аномалия кометы, тогда

$$x = q - r \cos v$$

а так как

$$r = x + q$$

то

$$r = 2q - r \cos v$$

т. е.

$$r = \frac{2q}{1 + \cos v} = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2v}}$$

Для параболы также времена пропорциональны описываемым площадям. Но площадь, очевидно, равна

$$\frac{2}{3}xy - \frac{1}{2}y(x-q)$$

значит удвоенная площадь есть

$$\frac{1}{3}y(x+3q) = \frac{1}{3}r \sin v (4q - r \cos v) = \frac{4}{3} \frac{q^2 \sin v (2 + \cos v)}{(1 + \cos v)^2}$$

Если требуется рассчитать по времени, протекшему после прохождения через перигелий, истинную аномалию или наоборот, то надо обратить внимание на то, что площади, описываемые в единицу времени, для всех планет и комет вообще пропорциональны $\sqrt{2q}$. Это легко доказать для эллиптических орбит. Пусть T и T' — времена обращения двух планет, a и a' — их средние расстояния, $\frac{1}{2}s$ и $\frac{1}{2}s'$ — площади, ими описываемые в единицу времени, тогда, как известно,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T'^2}{a'^3}$$

Но так как полные площади эллипсов суть

$$\pi ab = \frac{1}{2}Ts \quad \text{и} \quad \pi a'b' = \frac{1}{2}T's'$$

то будет:

$$T = \frac{2\pi ab}{s}; \quad T' = \frac{2\pi a'b'}{s'}$$

Следовательно,

$$\frac{4a^2 b^2 \pi^2}{a^3 s^2} = \frac{4a'^2 b'^2 \pi^2}{a'^3 s'^2}$$

иначе:

$$\frac{s}{s'} = \frac{\sqrt{\frac{b^2}{a}}}{\sqrt{\frac{b'^2}{a}}} = \frac{\sqrt{2q}}{\sqrt{2q'}}$$

ибо

$$\frac{b^2}{a} = 2q$$

Полагая вообще постоянное для всех планет и комет, удвоенное отношение описываемой площади к соответствующему времени равным k , которое получается всего проще для Земли, именно:

$$k = \frac{2\pi}{\text{Звездный год}} = \frac{2 \cdot 3.141592635 \dots}{365.2563885} = 0,0172021$$

считая расстояние Земли до Солнца равным 1, будем иметь удвоенную площадь, описываемую во время t , равной $kt\sqrt{2q}$.

Итак,

$$\frac{4}{3}q^2 \cdot \frac{\sin v(2 + \cos v)}{(1 + \cos v)^2} = kt\sqrt{2q}$$

Но так как

$$\cos v = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}v}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}v} \quad \text{и} \quad \frac{\sin v}{1 + \cos v} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}v$$

то будет

$$\frac{2}{3}q^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}v \left(3 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}v \right) = kt\sqrt{2q}$$

или

$$t = \frac{2}{3k\sqrt{2}}q^{\frac{3}{2}} \left[3\operatorname{tg} \frac{1}{2}v + \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2}v \right]$$

Пользуясь этим уравнением по данной истинной аномалии, легко найти время. Обратная задача не столь проста, для ее решения можно пользоваться тремя способами.

Первый способ есть прямой — решение кубического уравнения по формуле Кардана.

Пусть будет

$$\frac{k\sqrt{\frac{9}{8}}}{q^{\frac{3}{2}}} = \alpha \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}v = \theta$$

тогда

$$\theta^3 + 3\theta = 2\alpha t$$

и

$$\theta = \sqrt[3]{\alpha t + \sqrt{1 + \alpha^2 t^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha t + \sqrt{1 + \alpha^2 t^2}}}$$

Эти формулы можно сделать более удобными для вычисления, полагая:

$$\alpha t = \cot u \tag{I}$$

$$\theta = \sqrt[3]{\cot \frac{1}{2}u} - \frac{1}{\sqrt[3]{\cot \frac{1}{2}u}}$$

$$\sqrt[3]{\cot \frac{1}{2}u} = \cot \omega \tag{II}$$

тогда будет

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = 2 \operatorname{cotg} 2\omega$$

Второй способ состоит в том, что в уравнение подставляют два значения θ , между которыми заключено истинное его значение, и по результату подстановок смотрят, в каком направлении надо изменить одно из этих значений, чтобы приблизиться к истинному, к которому затем и приближаются, повторяя это вычисление.

Третий способ, наиболее употребительный, состоит в пользовании таблицами. Эти таблицы вначале были составлены так, что рассматривалось движение воображаемой кометы, причем в таблицах рядом с временем, сперва через $\frac{1}{4}$ суток, считая от прохождения через перигелий, потом реже, давались соответствующие истинные аномалии или, наоборот, рядом с истинной аномалией давалось время или его логарифм.

Превратить затем движение воображаемой кометы в движение истинной весьма просто, но было бы слишком длинно объяснять здесь подробно устройство таблицы. Наилучшие принадлежат Delambre'у, новейшие составлены Буркгардтом и действительно не оставляют желать лучшего.

Было бы слишком долго развивать здесь же способы, которые применялись или применяются и теперь, чтобы по наблюдениям найти элементы орбиты кометы.

Здесь надо в особенности упомянуть про Лапласа и про Legendre'a.

Кто хочет что-либо узнать о физических свойствах комет, может прочесть: Brandes. Astronomie in Briefen; я приведу лишь остроумную гипотезу Лапласа, рассматривающего хвост как образующийся из паров, происхождение которых умеряет жар на комете, приближающейся столь близко к Солнцу, и коих сгущение при удалении кометы от Солнца восстанавливает нужную для поддержания жизни теплоту.

§ 61. О Луне и главных неравенствах ее движения.
Определение географической долготы по наблюдениям Луны. Уже древние астрономы заметили значительные неравенства в движении Луны.

Она постоянно перемещается вперед, никогда не обращаясь обратно, как это иногда бывает с планетами, и если из многих наблюдений вычислить ее среднее движение сколь возможно точно, то оказывается, что оно значительно отклоняется от такового же, рассчитанного не только для того же периода, но и от периода к периоду.

Наибольших отклонений (неравенств) Луны *четыре*. Первое из них было известно уже во время Гиппарха, именно — *уравнение центра*, происходящее от отклонения Луны от круговой орбиты, подобно тому как это имеет место для планет.

Второе было открыто Птоломеем — *эвекция*, которая соответствует перемещению линий абсид лунной орбиты.

Третье — *вариация* — было открыто Тихо, причиною ее служит перемещение линий узлов лунной орбиты.

Четвертое — *годовое уравнение*, которое открыто Кеплером и зависит от уравнения центра земной орбиты.

Все эти неравенства можно практически определить из наблюдений, не зная причины их, как это и было выполнено древними. К этим главным неравенствам присоединяется еще множество других, ближайшее определение которых было исполнено лишь на основании теории, нашедшей в лице Лапласа такого превосходного истолкователя, что новейшие таблицы движения Луны, в особенности таблицы Буркгардта, не оставляют желать лучшего.

Предмет этот весьма обширен, и с ним нельзя справиться без глубоких теоретических исследований, поэтому мы отсылаем к сочинениям, к нему относящимся.

Луна движется по эллипсу вокруг Земли с такою скоростью, что ее путь вокруг Солнца представляет эпициклоиду, радиус кривизны которой всегда обращен к Солнцу. Луна притягивается Солнцем сильнее, нежели Землей.

Она обращена к нам всегда одной стороной с небольшими отклонениями, называемыми *либрацией* по долготе и по широте.

Она кажется совершенно круглой, однако по теории весьма вероятно, что по направлению, обращенному к нам, она несколько растянута. Ее экватор немного наклонен к плоскости ее орбиты, линия узлов ее экватора совпадает с линией узлов ее орбиты и движется так же, как эта последняя.

Поверхность Луны обследована весьма подробно: во-первых, Hevel'ем (*«Selenographia»*), затем весьма полно Schröter'ом (*«Selenographische Fragmente»*); эта поверхность покрыта многими горами, которые по большей части по своей высоте превышают горы Земли и имеют темные углубления, подобные кратерам. На темной части, освещаемой только светом от Земли, иногда замечали внезапно светящиеся точки и полагали, что видят извержения вулканов, однако Olbers, наблюдавший в феврале 1821 г. несколько вечеров под ряд такую точку, считает ее за отражающую поверхность имеющей, может быть, кристаллическое строение Луны, причем эта поверхность и отражает сильно свет Земли.

На основании резкого окраиния и постоянно остающейся одинаковой яркости Луны, а также и потому, что звезды при покрытиях ею исчезают не постепенно, а моментально, можно с большим основанием предполагать, что Луна не обладает атмосферою, которая могла бы поддерживать горение.

Точное знание движения Луны имеет особенное практическое значение для определения географической долготы. Для этого имеется пять способов.

Первый основан на пользовании лунными затмениями как сигналом, видимым в тот же момент в двух различных местах. Времена вступления и выступления точно замечаются. Разность этих времен на двух различных местах дает разность долгот этих мест во времени.

По второму способу наблюдают солнечные затмения и по наблюдениям ищут тот момент, когда Луна была действительно в соединении с Солнцем. Это время, наблюденное на двух различных местах, по вычитании одного из другого, дает опять разность долгот.

Третий способ состоит в том, что наблюдают покрытия звезд Луной, в особенности звезд первых трех величин, замечая как момент исчезновения, так и появления, затем на основании движения Луны, параллакса и пр., принятых в расчет, находят по наблюденным временам разность долгот. Это — наиболее точный способ, ибо звезда исчезает мгновенно, в особенности позади темного края Луны, тогда как наблюдение солнечного, особенно же лунного затмения подвержено всегда сомнению на несколько секунд. Но этот способ имеет с предыдущим то общее, что и он предполагает некоторое исключительное, редкое явление, так как только четыре звезды 1-й величины могут быть покрываемы Луной.

Четвертый способ, который может быть применяем ежедневно и где числом и точностью наблюдений можно восполнить неточность самого способа, в котором по малому приходится заключать о большом, есть наблюдение прямых восхождений Луны. Так как собственное движение Луны быстрое, то по разностям прямых восхождений, если только места не слишком между собою близки, можно судить и о разности долгот.

Пятый способ, единственный дающий скоро результат и всегда применимый, есть тот, которым пользуются мореплаватели: измеряют высоты Луны и звезды или Солнца и их взаимное расстояние и замечают время. Принимая в расчет параллакс и рефракцию, сличают это время с временем известного места (Гринича) в тот момент, когда Луна имела то же расстояние, как и измеренное. Вспомогательные для того таблицы даются в морских календарях.

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ:

- Крылов, А. Н., акад.—Лекции о приближенных вычислениях. Научно-техническая литература. Изд. 3-е, переработанное и значительно дополненное. 1935. 541 стр. 76 фиг. Ц. 15 р.
- Крылов, А. Н., акад.—Леонард Эйлер. Доклад, прочитанный на торжественном заседании Академии Наук 5 X 1933 г. Изд. 2-е. 1933. 39 стр. 1 портр. Ц. 75 к.
- Крылов, А. Н., акад.—Ньютона теория астрономической рефракции. 1935. 69 стр. 2 фиг. Ц. 3 р.
- Крылов, А. Н., акад.—Об определении критических скоростей вращающегося вала. Научно-техническая литература. 1932. 31 стр. 3 фиг. Ц. 75 к.
- Крылов, А. Н., акад., и Крутков, Ю. А.—Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений. Научно-техническая литература. 1932. 394 стр. 111 фиг. Ц. 7 р. 50 к.
- Крылов, А. Н., акад.—О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. Научно-техническая литература. Изд. 3-е. Одобрено и рекомендовано Всесоюзным комитетом по высшему техническому образованию при ЦИК СССР как учебное пособие для преподавателей и студентов. 1933. 472 стр. 68 фиг. Ц. 9 р.
- Крылов, А. Н., акад.—О расчете балок, лежащих на упругом основании. Справочно-техническая литература. Изд. 3-е. 1931. 154 стр. 10 фиг. Ц. 2 р. 25 к.
- Крылов, А. Н., акад.—О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем. 1932. 49 стр. Ц. 1 р.
- Крылов, А. Н., акад., и Бронников, Д. В.—Постановка кессона моста им. Володарского в Ленинграде. Научно-техническая литература. 1934. 66 стр. 7 табл. 21 фиг. Ц. 2 р.

ПРИЕМ ЗАКАЗОВ И ПОДПИСКИ

на все издания Академии Наук СССР производится: 1) в Отделе распространения Издательства Академии Наук СССР, Москва, проезд Художественного театра, 2. Тел. 33-44; 2) в Ленинградском отделе Издательства. Ленинград, 104, пр. Володарского 53а. Тел. 1-99-18. Заказы высыпаются наложенным платежом.