АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СОБРАНИЕ ТРУДОВ АКАДЕМИКА А.Н.КРЫЛОВА

VIII

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА • ЛЕНИНГРАД

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СОБРАНИЕ ТРУДОВ

АКАДЕМИКА

А. Н. КРЫЛОВА

- 123414 -

VIII

МЕХАНИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1950 ЛЕНИНГРАД

Ответственный редактор
проф. Н. И. ИДЕЛЬСОН

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

От Комиссии по изданию Собрания трудов академика А. Н. Крылова . . . 7

Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений

Предисловие 11

Введение

Основные сведения из кинематики и динамики твердого тела 17

§§

1, 2. Преобразование координат в пространстве. Соотношения между косинусами углов между осями двух прямолинейных прямоугольных систем координат 17

3. Эйлеровы углы. Выражение косинусов углов между осями через Эйлеровы углы 21

4, 5. Движение твердого тела поступательное и вращательное. Угловая скорость. Сложение и разложение угловых скоростей 27

6. Линейная скорость точки твердого тела. Выражение ее проекций на оси координат 33

7. Выражение проекций угловой скорости через Эйлеровы углы и их производные 36

8. Начало возможных перемещений. Определение положения равновесия материальной системы 39

9. Методы Лагранжа: 1) способ множителей, 2) способ обобщенных координат 41

10. Составление уравнений движения материальной системы. Начало д'Аламберта. Первая Лагранжева форма 44

11, 12. Вторая Лагранжева форма уравнений движения материальной системы 48

13. Живая сила твердого тела. Моменты инерции. Главные оси 53

14. Закон количеств движения 58

15. Закон моментов количеств движения 63

16. Уравнения движения твердого тела 64

17. Количество движения и момент количеств движения для твердого тела 68

18. Составление уравнений движения твердого тела на основании законов количеств движения и момента количеств движения 71

19, 20. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами 72

21. Определение постоянных произвольных по начальным условиям. Свободные колебания, погашение их 78

§§ Стр.

22, 23. Вынужденные колебания. Явления резонанса. Примеры из теории качаний корабля на волнении 84
24, 25. Интегрирование системы двух совокупных линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами 96
26. Определение постоянных произвольных по начальным условиям 103
27. Нахождение частного интеграла 103
28. Случай мнимых корней характеристического уравнения 104
29. Численное вычисление корней алгебраических уравнений третьей и четвертой степени 106

Часть первая

Аналитическое изложение общей теории гироскопов 111

Глава I. Простейшие случаи движения тела вращения 111

30. Движение твердого тела вращения по инерции. Применение уравнений Эйлера 111
31. Применение второй Лагранжевой формы. Прецессия и нутация земной оси 118
32. Движение с постоянной прецессией без нутации. Прецессия быстрая и медленная 122
33. Определение реакций вращающихся тел на оси. Примеры: турбина на корабле. Гребные колеса 125
34, 35. Движение волчка под действием силы тяжести. Влияние трения . . 130
36. Влияние периодических возмущающих сил 140

Глава II. Гироскоп Фуко и его видоизменения 142

37. Устройство гироскопа Фуко 142
38. Гироскоп Фуко с тремя степенями свободы, когда ось наружного кольца направлена по оси мира 143
39, 40. Движение материальной точки при трении. Влияние трения в осях колец на гироскоп Фуко, необходимость большой угловой скорости вращения маховика 147
41. Гироскоп Фуко с тремя степенями свободы, когда ось наружного кольца вертикальна 163
42. Гироскоп Фуко с двумя степенями свободы — внутреннее кольцо скреплено неподвижно с наружным 164
43. Гироскоп Фуко с двумя степенями свободы — наружное кольцо закреплено в плоскости меридиана места 167
44. Влияние массы колец на гироскоп Фуко 169

Глава III. Гироскоп на подвижном фундаменте 170

45. Общая метода исследования движения гироскопа, находящегося на подвижном по отношению к Земле фундаменте 170
46, 47. Маятниковый кренометр на корабле. Кренометр малого и кренометр большого периода 172
48. Влияние трения в осях подвеса 182
49, 50. Гидравлический успокоитель в применении к маятниковому кренометру 186

Стр.

51—53. Гироскопический маятник. Применение к нему гидравлического успокоителя. Влияние вращения Земли 195
54—57. Гироскопический компас, курсовая погрешность гирокомпаса, баллистическая погрешность гирокомпаса 208

Глава IV. Применение гироскопа для стабилизации 230

58—61. Успокоитель качки корабля. Система Шлика. Система Сперри. Случай свободного гироскопа 230
62. Применение электромагнитного тормоза к успокоителю качки 244
63. Активный успокоитель Сперри 247
64. Стабилизация платформы на корабле помощью гироскопов 249

Часть вторая

Описание некоторых гироскопических приборов 257

65. Прибор адмирала Париса. Гироскопический коллиматор адмирала Флерие 257
66. Прибор Обри 260
67. Гирокомпас Аншютца 262
68. Гирокомпас Сперри 264
69. Гирокомпас Брауна 265
70. Гироскопический замыкатель Круппа для стрельбы на качающемся корабле 267
71. Указатель горизонта для аэропланов 270
72. Стабилизатор Сперри. Стабилизатор Фиэ. Прибор Петровача для записи качки 272

Некоторые работы по механике (1938—1940)

О вибрации фундаментов не вполне уравновешенных машин и способах ее уменьшения 279
Движение сферического маятника 299
О движении материальной точки относительно поверхности Земли . . . 315
О перемещениях твердого тела 333

ОТ КОМИССИИ ПО ИЗДАНИЮ СОБРАНИЯ ТРУДОВ АКАДЕМИКА А. Н. КРЫЛОВА

Публикуемый VIII том Собрания трудов академика А. Н. Крылова содержит некоторые его работы по механике и является продолжением томов, изданных при жизни Алексея Николаевича, именно дополнения к томам V и VI („Новая теория движения Луны" Леонарда Эйлера) и тома VII („Математические начала натуральной философии Ис. Ньютона").

В состав VIII тома вошли две работы, вышедшие при жизни автора после публикации только что названных томов, и три статьи, извлеченные из его наследия, хранящегося в Архиве Академии Наук. Эти последние, имеющие преимущественно методический характер, публикуются теперь как дань уважения той неустанной научно-педагогической работе, которую в течение десятилетий Алексей Николаевич вел с неослабеваемым энтузиазмом и чутким пониманием запросов подрастающих поколений его учеников.

Таким образом, в состав VIII тома входят:

1) „Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений", — опубликованную акад. А. Н. Крыловым совместно с проф. Ю. А. Крутковым отдельной книгой в 1932 г.;

2) „О вибрации фундаментов не вполне уравновешенных машин и способах ее уменьшения" (Вестник металлопромышленности, 1938, № 11, стр. 82—99);

3) „О движении сферического маятника" (Архив Акад. Наук СССР, фонд 759, опись I, № 91);

4) „О движении материальной точки относительно поверхности Земли" (там же, № 90);

5) „О перемещениях твердого тела" (там же, № 89а).

При настоящем переиздании „Общей теории гироскопов" включена только та часть этой работы, которая принадлежит акад. А. Н. Крылову. Несколько параграфов текста, относящиеся к гирокомпасам (именно §§ 45, 52, 90 и 91 издания 1932 г.), объединены в одном месте и составили содержание §§ 54, 55, 56, 57 настоящего тома.

Наконец, из бывшей III части этой книги исключены некоторые иллюстрации (снимки различных гироскопических устройств), не представляющие интереса в настоящее время.

В тексте исправлены замеченные опечатки и описки. Немногочисленные дополнения редакции помещены в подстрочных сносках и оговорены.

В подготовке настоящего тома к печати принимали участие: акад. В. И. Смирнов, проф. Ю. А. Крутков, проф. Н. И. Идельсон и канд. ф.-м. н. Д. Р. Меркин.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ГИРОСКОПОВ И НЕКОТОРЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ ИХ ПРИМЕНЕНИЙ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга представляет дополненное и развитое изложение лекций, прочитанных акад. А. Н. Крыловым и проф. Ю. А. Крутковым группе слушателей Военно-воздушной академии за время с 17 августа по 20 сентября 1931 г. в Физико-математическом институте Академии Наук.

Эта группа слушателей избрала своей специальностью конструкцию аэронавигационных приборов, в которых широко используются свойства гироскопа вообще, что налагало особое требование как на содержание, так и на способ изложения наших лекций, являющихся не совсем обычными.

Литература о гироскопах весьма обширна, — так, на русском языке по теории гироскопа имеется превосходная диссертация Ар. Домогарова (О свободном гироскопе. СПб., 1893), где теория гироскопа изложена с исчерпывающей полнотою, но с точки зрения математически точного, общего и строгого решения трудного вопроса механики, а не с точки зрения практических применений в специальной области.

Из иностранной литературы достаточно отметить следующие три основных сочинения: 1) F. Klein und A. Sommerfeld. Theorie des Kreisels. Leipzig, 1897—1910. — 2) Sir G. Greenhill. Report on gyroscopis theory. London, Advisory committee for aeronautics, 1914. — 3) A. Gray. Gyrostatics and rotational motion. London, 1918.

Авторы „Theorie des Kreisels“ суть умерший в 1925 г. германский математик проф. Феликс Клейн, творивший во всех областях чистой математики и привлекавший в свою геттингенскую аудиторию слушателей со всего мира, и его тогда еще молодой ученик и ассистент, а теперь один из видных физиков-теоретиков, проф. Арнольд Зоммерфельд.

В своем объемистом сочинении (960 стр. in 8°) авторы дают изложение учения о движении волчка, т. е. твердого тела, имеющего ось симметрии и вращающегося около неподвижной точки, лежащей на этой оси. Их цель — дать полную и строгую математическую теорию этого движения, избегая длинных и громоздких выкладок, а проводя все исследование на основании общих соображений теории функций. Такое

изложение, весьма поучительное для математиков, не дает того, что нужно технику и конструктору для расчета и проектирования прибора, отвечающего наперед заданному назначению.

Сэр Джорж Гринхиль, скончавшийся в 1926 г., был одним из известнейших знатоков теории эллиптических функций, вместе с тем Гринхиль более сорока лет преподавал математику и механику в английской военной академии в Вульвиче, и, наряду со множеством работ по чистой математике, главным образом относящихся к теории эллиптических функций и интегралов, у него есть ряд работ по баллистике, по теории корабля, вообще по прикладной математике, поэтому казалось бы, что его сочинение, изданное „Совещательным комитетом по аэронавтике", должно отвечать нашей цели и служить нам образцом.

Но на деле это далеко не так, ибо „Report" Гринхиля заключает 277 страниц формата малого in folio, которые почти сплошь заняты сложнейшими формулами теории эллиптических функций в их Вейерштрассовой форме. Эта сложность получилась потому, что Гринхиль стремится дать общее, математически точное и полное решение уравнений движения гироскопов разного устройства и назначения при различных внешних условиях, а также полную теорию вращательного движения твердого тела, имеющего ось симметрии.

Сложность примененного Гринхилем математического аппарата, вызванная самою постановкою им вопроса, и неприспособленность окончательных формул, им даваемых (по отсутствию таблиц эллиптических функций) для числовых расчетов, делает это замечательное с математической стороны сочинение совершенно неподходящим для той цели, которую мы имели в виду в наших лекциях.

Сочинение Гринхиля потребовало бы годы для полного его изучения, мы же имели в своем распоряжении по 30 часов.

Автор третьего сочинения, тоже уже умерший профессор университета в Гласгоу Андре Грей, не менее знаменит, чем и авторы двух других сочинений — достаточно сказать, что когда Вильям Томсон (лорд Кельвин) после 52-летнего руководства кафедрой физики в Гласгоуском университете ушел на покой, то его преемником был избран Грей, уже в то время известный по своим сочинениям „Абсолютные измерения в электричестве и магнетизме", „Теория магнетизма и электричества", „Теория Бесселевых функций" и проч. и по множеству статей по теоретической физике и механике, в которых изящество изложения соединено с простотою и строгостью.

Сочинение проф. Грея „Gyrostatics and rotational motion" представляет том в 530 страниц большого in 8°; оно могло бы более, чем остальные, отвечать нашей цели, но в нем автор имел в виду совершенно иную задачу, а именно, дать как бы дополнительное руководство по теоретической механике, отлагая действительные расчеты приборов практического, а не лекционного назначения, до второго тома.

К сожалению, этот второй том до сих пор не вышел, хотя со времени издания первого тома прошло 13 лет, и кафедру А. Грея занял его сын Дж. Г. Грей, также много работавший в области гироскопии.

Таким образом, А. Грей из педагогических видов, разбирая различные случаи вращательного движения твердого тела, обращает особенное внимание на механическую сторону явления и на применение к его изучению и объяснению общих принципов механики, главным образом законов количеств движения, момента количеств движения и закона живых сил. Расчетной стороне дела он отводит как бы второстепенную роль. Вследствие этого, обширное сочинение А. Грея, являясь превосходным дополнением к курсам теоретической механики, не приспособлено к надобностям техника и инженера узкой специальности.

Было бы слишком долго перечислять причины, вследствие которых мы не остановились, например, на сочинении Богэра (Bogaert. Effet gyrostatique) или Граммеля (Grammel. Der Kreisel und seine Anwendungen), или превосходной статьи Лоренца (H. Lorenz. Technische Anwendungen der Kreiselbewegung), или Раулингса (Rawlings. The Theory of the gyroscopic compass and its deviations), — мы ими пользовались, как и указанными выше классическими трактатами, но ни одно из них не являлось вполне подходящим для поставленной нам задачи.

Курс прочитанных нами лекций состоит из „Введения“ и трех частей. Введение и первая часть были прочитаны и изложены для печати А. Н. Крыловым, вторая часть прочитана и изложена для печати Ю. А. Крутковым, третья часть, заключающая описание приборов, заимствована А. Н. Крыловым из сочинения Ауэрбаха и Хорта (F. Auerbach und W. Hort. Technische und physikalische Mechanik, Bd. II), также из журналов и иных печатных материалов на иностранных языках.

Эта часть на лекциях полностью не излагалась, ибо слушатели изучали устройство приборов на деле в Гирокомпасной части Главного гидрографического управления под руководством начальника этой части Б. И. Кудревича. Мы присоединили эту часть для тех читателей, которые самих приборов под руками иметь не будут, главным же образом чтобы дать примеры того, как на практике использовались те свойства гироскопов, общая теория которых развита в первых двух частях.

Введение содержит изложение начал кинематики и динамики твердого тела, служащих основой для дальнейшего. Кроме того, „Введение“ дополнено чисто математическим отделом, в котором изложены способы интегрирования линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений, с которыми нам все время приходится иметь дело, и в заключение приведено изложение способа численного вычисления корней уравнений третьей и четвертой степени, чтобы для численных расчетов иметь под руками

необходимые формулы. Это введение было прочитано и развито по желанию самих слушателей для облегчения пользования нашей книгой.

Первая часть заключает аналитическое изложение общей теории гироскопов, подразделенное на четыре главы, содержание которых следующее:

Глава 1. Простейшие случаи движения тела вращения. Волчок, прецессия и нутация.

Глава 2. Гироскоп Фуко и его видоизменения. Теория и свойства этих приборов, предполагая, что приборы находятся на неподвижном по отношению к Земле фундаменте.

Глава 3. Гироскоп на движущемся по отношению к Земле фундаменте, связанном, например, с кораблем или аэропланом. Применение гироскопа к получению на корабле меридиана, горизонта и вертикали.

Глава 4. Применение гироскопа для стабилизации корабля или платформы на корабле.

Во всех практических применениях гироскопа, кроме стабилизации, от него требуется, чтобы ось маховика обладала определенным положением устойчивого равновесия, около которого она должна совершать быстро затухающие свободные колебания и весьма малые вынужденные, вызываемые действием сил, происходящих от движений корабля или аэроплана, на котором прибор установлен. Таким образом, для целей практических и надо рассматривать эти малые колебания, для чего еще Лагранжем развита общая метода; поэтому, при рассмотрении всех вопросов, затронутых в этой части, принят совершенно однообразный прием решения — правда, приближенного, но такого, что его точность для практики более чем достаточна. Этот прием состоит в следующем: сперва составляются во второй Лагранжевой форме *точные* уравнения движения для данного прибора, не рассматривая, однако, возмущающих сил, происходящих от трения в связях с фундаментом; затем в этих уравнениях отбрасываются те второстепенные члены, которые являются весьма малыми по сравнению с главными, по полученным упрощенным уравнениям определяется положение динамического равновесия оси маховика, составляющего главную часть гироскопа, после чего исследуются *малые* колебания его около этого положения равновесия, разбираются способы погашения свободных колебаний, влияние трения в подпятниках и цапфах прибора, влияние возмущающих сил, происходящих от движения фундамента, и устанавливаются необходимые соотношения между главными конструктивными элементами прибора, которые должны быть соблюдены, чтобы прибор с требуемой степенью точности отвечал своему назначению.

Эта расчетная сторона дела выдвинута на первый план, не касаясь ни физико-механического объяснения происходящих явлений, которое отнесено во вторую часть, ни описания действительного устройства исполненных приборов, которое отнесено в третью часть.

Остается сказать несколько слов о второй части, которая стоит как бы особняком.

Вторая форма уравнений Лагранжа, исключительно применяемая в первой части, имеет свои достоинства и недостатки.

Достоинство этой методы состоит в ее общности, однообразии хода действий для составления уравнений движения системы, причем требуются только дифференцирования и не требуется никаких сложных рассуждений или пространственных представлений, благодаря чему достигается легкость проверки выкладок и результатов, ибо гораздо легче найти ошибку в дифференцировании, нежели заметить ее в рассуждении.

Но следствием этих достоинств является и главный недостаток метода — его математическая отвлеченность и отсутствие наглядности, вследствие чего утрачивается представление о физических причинах явления и общем его ходе.

Для устранения этого недостатка и включена вторая часть, в которой все главнейшие выводы первой части получены вновь применением векторного анализа.

В векторном анализе все как раз основано на наглядном представлении самого хода явления, но зато здесь для получения весьма сжатых и кратких формул требуется гораздо большая затрата внимания, рассуждения и воображения, нежели при сравнительно громоздких выкладках в методе Лагранжа.

Другая причина включения второй части в наш курс состояла в том, что во многих иностранных статьях и руководствах по гироскопии применяется векторный анализ, — необходимо было ознакомить слушателей с этим методом, чтобы дать им возможность свободно разбираться в новейшей литературе предмета.

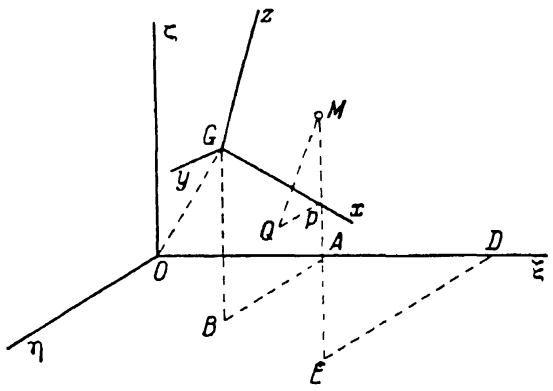
Октябрь 1931.

А. Крылов.
Ю. Крутков.

ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1. Движение твердого тела считается известным, когда в любой заданный момент времени t известно положение каждой точки тела.

Для определения положения тела выбирают в пространстве три взаимно перпендикулярные оси координат $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$; в теле принимают за начало какую-либо точку G и проводят через нее три оси координат Gx, Gy, Gz, неизменно связанные с телом.



Фиг. 1.

Оси координат условимся всегда брать такие, чтобы, смотря по положительной части оси $O\zeta$ на плоскость $\xi O\eta$, иметь положительную часть оси $O\xi$ расположенной так, чтобы поворотом в плоскости $\xi O\eta$ на 90° по часовой стрелке ось $O\xi$ переводилась в $O\eta$. Точно так же, чтобы, смотря по положительной оси $O\xi$ на плоскость $\eta O\zeta$, иметь оси так расположенными, что поворотом по часовой стрелке на 90° ось $O\eta$ переходит в $O\zeta$, тогда и ось $O\zeta$ поворотом на 90° в плоскости $\zeta O\xi$ по часовой стрелке переходит в $O\xi$.

Оси $Gxyz$ берем так, чтобы, совместив плоскость Gxy с плоскостью $O\xi\eta$ и направив ось Gx по $O\xi$, иметь и оси Gy, совпадающей с $O\eta$, и Gz, совпадающей с $O\zeta$, как это будет для осей, изображенных на фиг. 1.[1]

Возьмем в теле какую-либо точку M — ее координаты относительно осей $Gxyz$ обозначим через x, y, z; эта же точка по отношению к осям $O\xi\eta\zeta$ имеет координаты ξ, η, ζ, требуется найти зависимость между величинами x, y, z и величинами ξ, η, ζ.

---

[1] Такую систему осей называют „левой".

Положение осей $Gxyz$ относительно осей $O\xi\eta\zeta$ задается координатами точки G, именно:

$$\xi_0 = OA$$
$$\eta_0 = AB$$
$$\zeta_0 = BG$$

направление же каждой из осей — косинусами углов, которые эта ось составляет с $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Эти косинусы обозначим, как показывает следующая таблица:

	x	y	z
ξ	a_1	a_2	a_3
η	b_1	b_2	b_3
ζ	c_1	c_2	c_3

так что, например,

$$\cos(\widehat{x\xi}) = \cos(\widehat{\xi x}) = a_1$$
$$\cos(\widehat{x\eta}) = \cos(\widehat{\eta x}) = b_1$$

и т. д.

Тогда, рассматривая OM как замыкающую ломаной $OGPQM$ и замечая, что

$$x = GP; \quad y = PQ; \quad z = QM$$

и что проекция OM на ось $O\xi$ есть координата ξ точки M, получим

$$OD = \xi = \xi_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z \tag{1}$$

Совершенно так же, проектируя ту же ломаную на оси $O\eta$ и $O\zeta$, получим

$$DE = \eta = \eta_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z \tag{1'}$$

и

$$EM = \zeta = \zeta_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z \tag{1''}$$

Между показанными в таблице косинусами имеют место следующие соотношения.

Во-первых,

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1 \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1 \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ибо оси $O\xi\eta\zeta$ — прямоугольные.

Во-вторых,

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1 \end{aligned} \tag{2'}$$

ибо оси $Gxyz$ — прямоугольные.

В-третьих, соотношения

$$\begin{aligned} a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= 0 \\ a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 &= 0 \\ a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

которые выражают, что оси Gx, Gy, Gz взаимно перпендикулярны, т. е. что каждая из них перпендикулярна к каждой из двух остальных.

В-четвертых, соотношения

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 &= 0 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

которые выражают, что оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ взаимно перпендикулярны.

Заметим следующее тожество, данное Эйлером, которое легко проверить:

$$\begin{aligned} (A^2 + B^2 + C^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (Aa + Bb + Cc)^2 = \\ = (Ab - Ba)^2 + (Bc - Cb)^2 + (Ac - Ca)^3 \end{aligned} \tag{5}$$

Как сказано, это равенство представляет собою *тожество*, т. е. имеет место при всяких значениях букв, в него входящих.

Напишем первые два из уравнений (3) так:

$$\begin{aligned} \frac{b_1}{a_1} \cdot b_2 + \frac{c_1}{a_1} \cdot c_2 &= -a_2 \\ \frac{b_1}{a_1} \cdot b_3 + \frac{c_1}{a_1} \cdot c_3 &= -a_3 \end{aligned}$$

решив их относительно $\frac{b_1}{a_1}$ и $\frac{c_1}{a_1}$, принимаемых за неизвестные, получим

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{c_2 a_3 - a_2 c_3}{b_2 c_3 - c_2 b_3}; \qquad \frac{c_1}{a_1} = \frac{a_2 b_3 - b_2 a_3}{b_2 c_3 - c_2 b_3}$$

Эти два равенства можно писать в виде такой пропорции:

$$\frac{b_2 c_3 - c_2 b_3}{a_1} = \frac{c_2 a_3 - a_2 c_3}{b_1} = \frac{a_2 b_3 - b_2 a_3}{c_1} = s \tag{*}$$

где через s обозначена общая величина этих трех отношений, нам пока неизвестная. Чтобы ее найти, составим производную пропорцию, взяв

отношение суммы квадратов всех предыдущих к сумме квадратов всех последующих членов, тогда получим

$$\frac{(b_2 c_3 - c_2 b_3)^2 + (c_2 a_3 - a_2 c_3)^2 + (a_2 b_3 - b_2 a_3)^2}{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = s^2$$

Откуда следует

$$s^2 = (b_2 c_3 - c_2 b_3)^2 + (c_2 a_3 - a_2 c_3)^2 + (a_2 b_3 - b_2 a_3)^2$$

ибо

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$$

Возьмем тожество Эйлера и сделаем в нем, например:

$$A = a_2; \quad B = b_2; \quad C = c_2$$
$$a = a_3; \quad b = b_3; \quad c = c_3$$

и воспользуемся уравнением (2) и (3), тогда получим

$$(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2) - (a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3)^2 =$$
$$= (b_2 c_3 - c_2 b_3)^2 + (c_2 a_3 - a_2 c_3)^2 + (a_2 b_3 - b_2 a_3)^2 = 1$$

Отсюда следует

$$s^2 = 1$$

и значит

$$s = \pm 1$$

Чтобы решить, какой надо взять знак, положим, что оси $Gxyz$ приведены в такое положение, что Ox параллельна $G\xi$, ось Gy параллельна $O\eta$ и ось Gz параллельна $O\zeta$, это возможно, ибо обе системы осей одинаковы; тогда будет

$$a_1 = 1; \quad b_2 = 1; \quad c_3 = 1$$

все же остальные косинусы — нули; из первого из отношений (*) следует

$$s = +1$$

и затем из формул (*) имеем

$$\begin{aligned} a_1 &= b_2 c_3 - c_2 b_3 \\ b_1 &= c_2 a_3 - a_2 c_3 \\ c_1 &= a_2 b_3 - b_2 a_3 \end{aligned} \tag{6}$$

Совершенно так же получим

$$\begin{aligned} a_2 &= b_3 c_1 - c_3 b_1 \\ b_2 &= c_3 a_1 - a_3 c_1 \\ c_2 &= a_3 b_1 - b_3 a_1 \end{aligned} \tag{6'}$$

и

$$\begin{aligned} a_3 &= b_1 c_2 - c_1 b_2 \\ b_3 &= c_1 a_2 - a_1 c_2 \\ c_3 &= a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{aligned} \qquad (6'')$$

Таким образом между девятью косинусами $a_1, b_1, \ldots c_3$ мы получили множество соотношений, но эти соотношения не суть независимые между собою. Независимых между собою соотношений *шесть*, так, например, (2) и (3). Таким образом можно задавать *три* косинуса (но только не такие, которые в таблице стоят в одной и той же строке или в одном и том же столбце), остальные шесть найдутся из сказанных шести уравнений или их следствий.

§ 2. Уравнения

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ \eta &= \eta_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ \zeta &= \zeta_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{aligned} \qquad (1)$$

дают возможность по данным x, y, z вычислять ξ, η, ζ, т. е. для данной точки в теле вычислить ее координаты в пространстве; если же ставится обратный вопрос, т. е. какая точка тела находится в заданной точке пространства, то эти уравнения надо решить относительно x, y, z. Умножив первое уравнение на a_1, второе на b_1 и третье на c_1, мы на основании (2) и (3) § 1 получим

$$x = -(a_1 \xi_0 + b_1 \eta_0 + c_1 \zeta_0) + a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta$$

и совершенно подобно

$$y = -(a_2 \xi_0 + b_2 \eta_0 + c_2 \zeta_0) + a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta \qquad (2)$$

и

$$z = -(a_3 \xi_0 + b_3 \eta_0 + c_3 \zeta_0) + a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \zeta$$

Понятно, что эти формулы можно писать и так:

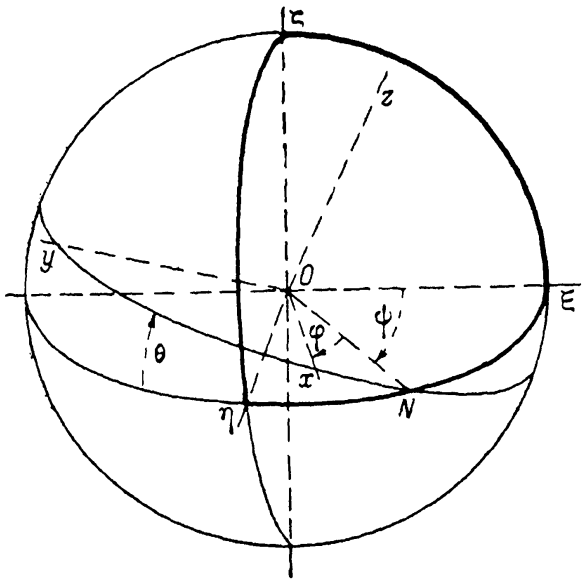
$$\begin{aligned} x &= a_1 (\xi - \xi_0) + b_1 (\eta - \eta_0) + c_1 (\zeta - \zeta_0) \\ y &= a_2 (\xi - \xi_0) + b_2 (\eta - \eta_0) + c_2 (\zeta - \zeta_0) \\ z &= a_3 (\xi - \xi_0) + b_3 (\eta - \eta_0) + c_3 (\zeta - \zeta_0) \end{aligned} \qquad (2')$$

§ 3. Вместо того, чтобы задавать три из девяти косинусов таблички § 1, Эйлер задает три угла, через тригонометрические функции которых все девять косинусов выражаются. Так как дело идет только об углах, составляемых осями двух координатных систем, то очевидно, что можно их рассматривать как имеющие общее начало.

Во всех случаях, когда приходится иметь дело с различными направлениями в пространстве, удобно пользоваться приемом, издревле применяемым в астрономии: надо вообразить сферу произвольного радиуса (этот радиус часто принимают равным длине, принятой

за единицу), описанную из начала координат, как центра (фиг. 2). Всякая плоскость, проходящая через начало, пересекает эту сферу по большому кругу, всякая прямая, проведенная через начало в одном направлении, пересекает сферу в *одной* точке, значит всякому направлению в пространстве соответствует одна и только одна точка этой вспомогательной сферы (в астрономии эту сферу зовут небесной).

Таким образом, в нашем случае получатся на сфере точки ξ, η, ζ и точки x, y, z, соответствующие осям координат, и большие круги $\xi\eta$, $\eta\zeta$, $\zeta\xi$ и xy, yz, zx, соответствующие плоскостям координат. Дуги больших кругов ζx, ξy, ..., ζz и будут измерять углы между этими осями, причем когда оси „левые", то все эти дуги, как и соответствующие им углы, надо считать по часовой стрелке.



Фиг. 2.

Сделав указанное построение, отметим прямую ON пересечения плоскости $\xi O\eta$ с плоскостью xOy, иными словами точку N пересечения дуги $\xi\eta$ с дугою xy.

Следуя астрономической терминологии, точку N называют *узлом* и прямую ON — линией узлов.

Положение этой прямой определяется заданием угла $\psi = \xi ON$, считаемого от оси $O\xi$ до прямой ON по часовой стрелке от 0 до 2π. Положение плоскости xOy определяется заданием угла θ, образуемого при ребре ON (линии узлов) плоскостями $\xi O\eta$ и xOy. На сфере это будет сферический угол $\eta Nx = \theta$, образуемый при точке N дугами $\xi\eta$ и xy. Этот угол надлежит считать от 0 до 2π от дуги $\xi\eta$ или ее продолжения по часовой стрелке. Наконец, положение оси Ox в плоскости xOy определяется углом φ, считаемым от линии узлов ON от 0 до 2π по часовой стрелке в сторону к оси Ox, так что для оси Oy угол NOy будет равен $\varphi + \frac{\pi}{2}$.

Эти три угла, введенные Эйлером, называются Эйлеровыми углами.

Чтобы вывести выражения косинусов углов между осями через Эйлеровы углы и не подвергать их ограничениям, которые налагаются формулами сферической тригонометрии, обратим сперва внимание на формулы преобразования координат на плоскости, а именно (фиг. 3):

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha \\ y &= x_1 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + y_1 \cos\alpha = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha \end{aligned} \qquad (1)$$

откуда следует

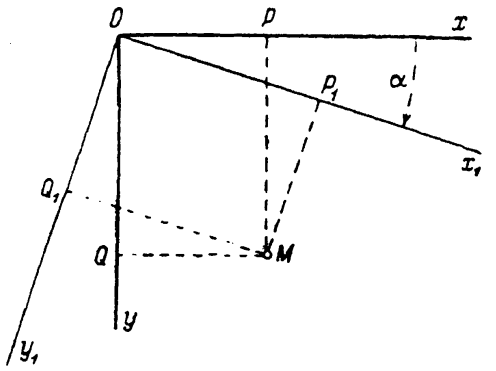
$$\begin{aligned} x_1 &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y_1 &= y\cos\alpha - x\sin\alpha \end{aligned} \tag{2}$$

Эти формулы получаются, применяя теорему проекций к ломаной OP_1M, и имеют место при всяком значении угла α, считаемого от оси Ox по часовой стрелке до оси Ox_1 от 0 до 2π.

Чтобы получить требуемые выражения косинусов углов, надо выразить зависимость между координатами ξ, η, ζ и x, y, z одной и той же точки и сличить с формулами §§ 1 и 2.

Чтобы это выполнить, будем производить последовательное преобразование координат. 1) Вообразим, что система осей ξ, η, ζ повернута около оси $O\zeta$, остающейся неподвижной, на угол ψ, тогда ось $O\xi$ ляжет по прямой ON; возьмем вспомогательную систему ξ_1, η_1, в которой ось $O\xi_1$ совпадает с ON, тогда имеем

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1\cos\psi - \eta_1\sin\psi \\ \eta &= \xi_1\sin\psi + \eta_1\cos\psi \\ \zeta &= \zeta_1 \end{aligned} \tag{3}$$



Фиг. 3.

2) Вообразим, что система ξ_1, η_1, ζ_1 повернута около оси $O\xi_1$ на угол θ, пока плоскость $\xi_1 O\eta_1$ совпадает с плоскостью xOy; получим новую систему ξ_2, η_2, ζ_2, причем формулы преобразования будут

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_2 \\ \eta_1 &= \eta_2\cos\theta - \zeta_2\sin\theta \\ \zeta_1 &= \eta_2\sin\theta + \zeta_2\cos\theta \end{aligned} \tag{4}$$

при этом заметим, что так как плоскость $\xi_2 O\eta_2$ совпадает с плоскостью xOy, то будет

$$\zeta_2 = z$$

3) Вообразим теперь, что система ξ_2, η_2, ζ_2 будет повернута около оси ζ_2, или, что то же, оси z, на угол φ, тогда она совпадает с системою x, y, z, и для перехода от ξ_2, η_2, ζ_2 к x, y, z послужат формулы

$$\begin{aligned} \xi_2 &= x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ \eta_2 &= x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ \zeta_2 &= z \end{aligned} \tag{5}$$

Исключая из уравнений (3), (4), (5) величины

$$\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,\ \xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2$$

получаем

$$\xi = x(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) - y(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) + z\sin\psi\sin\theta$$

$$\eta = x(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) + y(-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) - z\cos\psi\sin\theta$$

$$\zeta = x\sin\varphi\sin\theta + y\cos\varphi\sin\theta + z\cos\theta$$

Таким образом, положив в формуле (1) § 2

$$\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$$

и сличив с этими, имеем

$$\begin{aligned}
\cos(\widehat{x\xi}) &= a_1 = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta \\
\cos(\widehat{x\eta}) &= b_1 = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta \\
\cos(\widehat{x\zeta}) &= c_1 = \sin\varphi\sin\theta \\
\cos(\widehat{y\xi}) &= a_2 = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta \\
\cos(\widehat{y\eta}) &= b_2 = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta \\
\cos(\widehat{y\zeta}) &= c_2 = \cos\varphi\sin\theta \\
\cos(\widehat{z\xi}) &= a_3 = \sin\psi\sin\theta \\
\cos(\widehat{z\eta}) &= b_3 = -\cos\psi\sin\theta \\
\cos(\widehat{z\zeta}) &= c_3 = \cos\theta
\end{aligned} \qquad (6)$$

Заметим, что все эти формулы могут быть написаны почти сразу, применяя основную теорему сферической тригонометрии к сферическим треугольникам, одна вершина которых в точке N, другие же две в точках, соответствующих тем двум осям, угол между которыми требуется.

Для примера составим выражение для a_2. Берем треугольник $Ny\xi$; в этом треугольнике

$$\xi N = \psi; \quad Ny = \frac{\pi}{2} + \varphi; \quad \xi Ny = \pi - \theta$$

имеем

$$\cos(\widehat{y\xi}) = \cos(\widehat{\xi N})\cdot\cos(\widehat{Ny}) + \sin(\widehat{\xi N})\cdot\sin(\widehat{Ny})\cdot\cos\widehat{\xi Ny}$$

подставляя, получаем

$$\cos(\widehat{y\xi}) = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta$$

Не следует думать, что выбор Эйлеровых углов — единственный; напротив, во многих вопросах выгоднее брать Эйлеровы углы иначе, а именно: за линию узлов принимать не пересечение двух, так сказать, одноименных плоскостей, т. е. таких, которые при параллельности осей совпадали бы, а таких, которые при параллельности осей были бы взаимно перпендикулярны, т. е., например, плоскость xy с плоскостью $\zeta\xi$ или $\zeta\eta$ (фиг. 4). Для примера возьмем последний случай и напишем формулы косинусов, пользуясь сферической тригонометрией.

В треугольнике ξNx будет

$$Nx = \varphi; \quad \xi N = \frac{\pi}{2}; \quad \xi Nx = \frac{3\pi}{2} - \theta$$

Значит,

$$\cos(\widehat{\xi x}) = -\sin\varphi \cdot \sin\theta$$

В треугольнике ξNy будет

$$Ny = \frac{\pi}{2} + \varphi; \quad \xi N = \frac{\pi}{2}; \quad \xi Ny = \frac{3\pi}{2} - \theta$$

Значит,

$$\cos(\widehat{\xi y}) = -\cos\varphi \cdot \sin\theta$$

В треугольнике ξNz будет

$$Nz = \frac{\pi}{2}; \quad N\xi = \frac{\pi}{2}; \quad \xi Nz = \pi - \theta$$

$$\cos(\widehat{\xi z}) = -\cos\theta$$

Совершенно так же напишутся и остальные формулы, на чем мы останавливаться не будем.

Обыкновенно (ниже будет указано по какой причине) за начало G координат, связанных с телом, берут его центр тяжести, таким образом можно сказать, что для определения положения твердого тела надо задать: координаты ξ_0, η_0, ζ_0 его центра тяжести и три Эйлерова угла ψ, φ, θ.

Во многих случаях Эйлеровы углы выбирают следующим образом, указывая их не как пересечения различных плоскостей, а как сферические углы или дуги больших кругов сферы.

Такой выбор представлен на фиг. 5; на сфере точку ζ (т. е. пересечение сферы с осью $O\zeta$) принимают за полюс и задают положение точки z сферическим углом $\xi\zeta z = \psi$, считаемым от круга $\xi\zeta$, и дугою $\zeta z = \theta$, затем положение плоскости zOx, или, что то же, круга zx, определяется углом φ, считаемым от продолжения дуги ζz.

Отложив по кругу zx дугу $zx = \frac{\pi}{2}$, получаем положение точки x и по точкам z и x наносим точку y и проводим дуги xy и zy.

Отметим точку N пересечения круга xy с кругом $\xi\eta$ и точку B пересечения круга xy с кругом ζz.

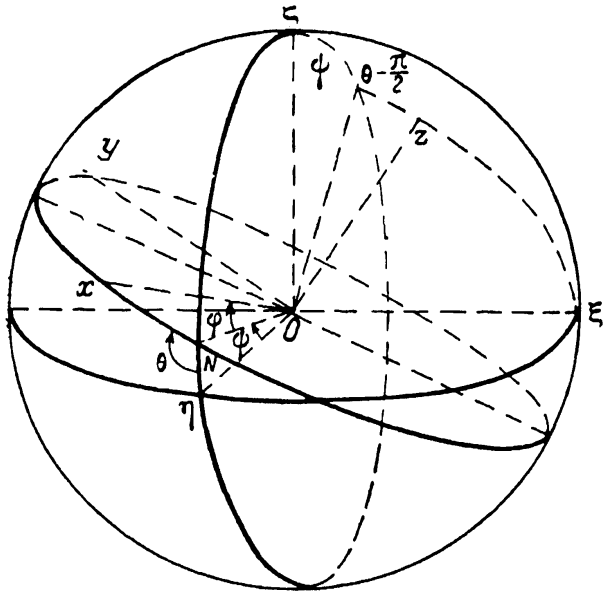
Таким образом будем иметь

$$\zeta z = \theta; \quad \xi\zeta z = \psi; \quad Bzx = \varphi$$

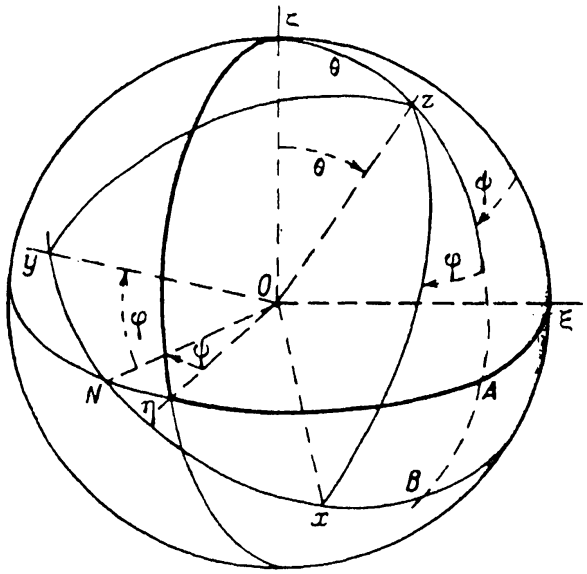
$$\xi N = 90°; \quad zN = 90°; \quad Ny = \varphi; \quad \eta N = \psi$$

$$\zeta Nx = \eta Nx = \theta$$

Составив этот чертеж и применив основную формулу сферической тригонометрии к нижепоказанным треугольникам, получаем следующие формулы:



Фиг. 4.



Фиг. 5.

$$\begin{aligned}
Nx\xi &\quad \cos(\widehat{x\xi}) = -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta \\
Nx\eta &\quad \cos(\widehat{x\eta}) = \cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi\cos\theta \\
Nx\zeta &\quad \cos(\widehat{x\zeta}) = -\cos\varphi\sin\theta \\
Ny\xi &\quad \cos(\widehat{y\xi}) = -\sin\psi\cos\varphi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta \\
Ny\eta &\quad \cos(\widehat{y\eta}) = \cos\psi\cos\varphi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta \\
Ny\zeta &\quad \cos(\widehat{y\zeta}) = \sin\varphi\sin\theta \\
Nz\xi &\quad \cos(\widehat{z\xi}) = \cos\psi\sin\theta \\
Nz\eta &\quad \cos(\widehat{z\eta}) = \sin\psi\sin\theta \\
Nz\zeta &\quad \cos(\widehat{z\zeta}) = \cos\theta
\end{aligned} \qquad (7)$$

В астрономии применяются оба представления Эйлеровых углов, причем за плоскость $\xi O\eta$ принимается плоскость эклиптики и за

плоскость xOy плоскость экватора, тогда точка ζ есть полюс эклиптики, точка z — полюс мира; первый выбор Эйлеровых углов можно характеризовать тем, что им определяется положение экватора по отношению к эклиптике, второй — что им определяется положение полюса мира по отношению к полюсу эклиптики.

Соответственно астрономическому значению угол ψ называют углом прецессии, дуга или угол θ представляет наклонение эклиптики к экватору, изменяемость его называют нутацией, поэтому и самый угол часто зовут углом нутации. Изменяемость угла φ представляет суточное вращение Земли, поэтому его называют углом собственного вращения. Для краткости речи мы будем пользоваться этими астрономическими терминами.

§ 4. Движение твердого тела называется *поступательным*, если тело перемещается так, что всякая прямая, в нем взятая, все время остается параллельной своему первоначальному положению, или, как условно говорят, что всякая прямая перемещается, оставаясь все время параллельной самой себе.

Понятно, что при таком движении перемещения всех точек тела между собою равны и параллельны, следовательно и скорости и ускорения всех точек тела во всякий момент времени между собою равны и параллельны, значит, чтобы знать поступательное движение тела, достаточно знать движение *одной* какой-либо его точки.

§ 5. Другой простейший вид движения твердого тела есть его вращение около *неподвижной оси*.

При таком движении всякая точка тела описывает в плоскости, перпендикулярной к оси, окружность, центр которой находится на оси, при этом в течение любого промежутка времени все радиусы, соединяющие точки тела с центрами описываемых ими окружностей, поворачиваются на один и тот же угол. Вращение называется равномерным, если этот угол поворота пропорционален времени; тогда угол поворота в единицу времени называется *угловою скоростью* вращения. Угловую скорость выражают различно, и не требуют пояснения термины: 120 оборотов в минуту, или 2 оборота в секунду, или 720° в секунду и т. п. Понятно, что угловая скорость зависит от тех единиц, в которых выражается угол и в которых выражается время. Мы условимся раз навсегда в формулах всякий угол выражать отвлеченным числом, показывающим отношение длины дуги, этот угол стягивающей, к ее радиусу, время же выражать в секундах, поэтому, если тело делает n оборотов в секунду, то угловая его скорость

$$\omega = 2\pi n$$

В том случае, когда тело вращается неравномерно, отношение угла поворота в течение какого-либо промежутка времени к этому промежутку называют среднею угловою скоростью в течение этого проме-

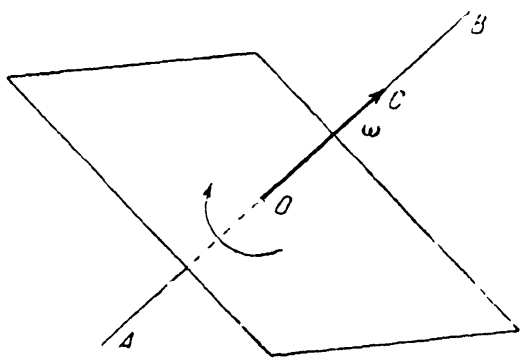
жутка, и, наконец, угловою скоростью в данный момент называют предел средней угловой скорости за бесконечно малый промежуток времени, предшествующий или последующий за данным моментом. Отсюда следует, что если положение тела, вращающегося около неподвижной оси, будет задано функциональною зависимостью угла его поворота φ от времени t, например

$$\varphi = f(t)$$

то угловая скорость в момент t выразится производною этой функции, т. е. будет

$$\omega = \varphi' = f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

При этом понятно, что когда координатные оси — левые, угол φ от начального положения какого-нибудь радиуса до конечного его положения надо считать положительным, если вращение идет по часовой стрелке если же оси — правые, то счет углов надо брать против часовой стрелки, соответственно этому, когда изменение угла положительное, то и угловая скорость положительная.



Фиг. 6.

Если тело вращается с угловою скоростью ω около какой-либо оси AB (фиг. 6), то эту угловую скорость можно представить вектором так: взяв на оси AB произвольную точку O, откладывают по ней длину OC, пропорциональную величине ω, в такую сторону, чтобы, смотря из точки C на точку O, видеть вращение, совершающимся по часовой стрелке. Вектор OC и будет представлять угловую скорость ω, характеризуя как быстроту вращения, так и ось, около которой оно происходит, и направление вращения.

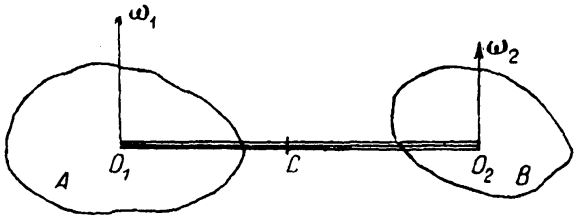
Отсюда понятно, что́ следует разуметь под словами *направление угловой скорости*, — это есть направление вектора OC, задаваемое косинусами углов, составляемых им с осями координат; *проекция угловой скорости* на какую-либо ось, в частности на оси координат, — это проекция сказанного вектора, причем сам этот вектор, т. е. длина OC, рассматривается как величина положительная, знак же проекции определяется знаком соответствующего косинуса.

Чтобы по отношению к дальнейшему изложению не возникло никаких сомнений или недоразумений, покажем, что сложение и разложение угловых скоростей, так представляемых, следуют тем же правилам сложения векторов, которые установлены в статике для сил.

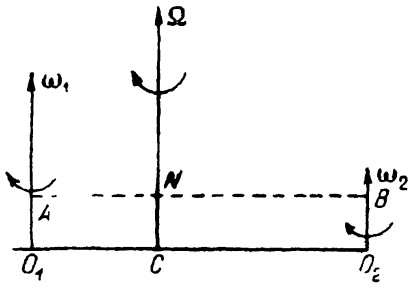
Поясним сперва, что надо разуметь под сложением вращений или угловых скоростей. Положим, что имеем тело A (фиг. 7), которое может вращаться около оси O_1, и положим, что оно несет рукоятку C, несущую в свою очередь ось O_2, около которой может вращаться тело B.

Вообразим сперва, что тело A и рукоятка C, а значит и ось O_2, неподвижны, а телу B сообщено вращение с угловою скоростью ω_2; положим теперь, что и телу A сообщено вращение около его оси O_1 с угловою скоростью ω_1, подобно тому как это было бы, если, скажем, тело A было корабль, а тело B — башня на нем, тогда мы скажем, что тело B обладает двумя вращениями около осей O_1 и O_2 с угловыми скоростями ω_1 и ω_2.

Итак положим, что тело B обладает двумя вращениями около осей O_1 и O_2 с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 (фиг. 8), направленными



Фиг. 7.



Фиг. 8.

в одну и ту же сторону; докажем, что во всякий момент можно рассматривать, что тело B вращается около оси C, параллельной O_1 и O_2, с угловою скоростью

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2$$

и что точка C разделяет расстояние $O_1 O_2$ на части, обратно пропорциональные данным скоростям, т. е.

$$O_1 C : O_2 C = \omega_2 : \omega_1 \qquad (*)$$

В самом деле, возьмем на оси O_2 какую-либо точку B, принадлежащую телу B, отметим на прямой $O_1 O_2$ точку C, подразделяющую $O_1 O_2$ в отношении (*), и, проводя прямую CN, параллельную осям $O_1 A$ и $O_2 B$, будем рассматривать эту прямую как принадлежащую телу B, т. е. неизменно с этим телом связанную. Пусть N есть какая-либо точка этой прямой, само собою разумеется, принадлежащая телу B. Покажем, что эта точка, когда оба вращения совершаются одновременно, остается неподвижной в пространстве. В самом деле, если бы тело A не вращалось, то точка N от вращения тела B имела бы скорость v_2, направленную перпендикулярно плоскости чертежа в сторону от читателя, причем

$$v_2 = BN \cdot \omega_2 = O_2 C \cdot \omega_2$$

Вследствие же вращения тела B, увлекаемого телом A, та же точка обладала бы скоростью

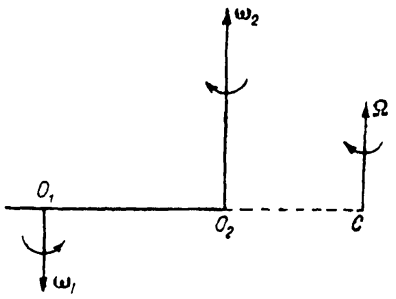
$$v_1 = AN \cdot \omega_1 = O_1 C \cdot \omega_1$$

направленною обратно v_2, отсюда ясно, что абсолютная скорость точки N в пространстве есть

$$v_2 - v_1 = O_2 C \cdot \omega_2 - O_1 C \cdot \omega_1 = 0$$

на основании равенства (*).

Значит точка N, а следовательно и вся прямая CN, принадлежащая телу B, остается в пространстве неподвижной, т. е. есть ось вращения для этого тела.



Фиг. 9.

Чтобы найти угловую скорость вращения тела B около этой оси, надо рассчитать линейную скорость какой-либо его точки при совместном существовании обоих вращений. Возьмем, например, точку O_2 — вследствие вращения ω_2 скорость ее есть нуль, вследствие вращения вместе с телом A эта скорость есть

$$\omega_1 \cdot O_1 O_2 = \omega_1 (O_1 C + CO_2)$$

и вследствие вращения около оси C эта скорость должна равняться $\Omega \cdot CO_2$, откуда для определения Ω уравнение

$$\Omega \cdot CO_2 = \omega_1 (O_1 C + CO_2)$$

но по равенству (*)

$$\omega_1 \cdot O_1 C = \omega_2 \cdot CO_2$$

подставляя и сокращая на CO_2, имеем

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2$$

т. е. составная или равнодействующая скорость вращения равна сумме составляющих.

Совершенно так же докажем, что когда вращения направлены в разные стороны (фиг. 9), то составная угловая скорость равна разности составляющих, направлена в сторону большей угловой скорости, параллельна им, и расстояния оси составного вращения до осей составляющих обратно пропорциональны этим скоростям, т. е.

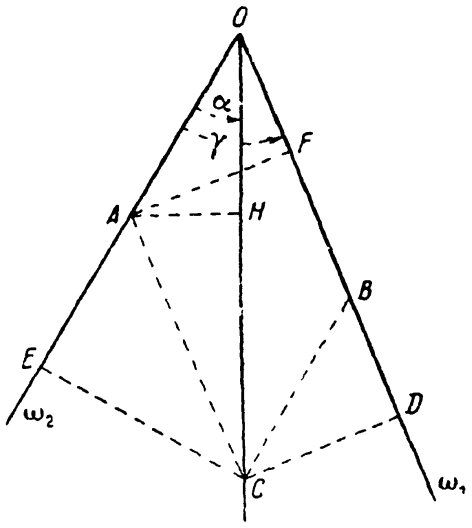
$$\Omega = \omega_2 - \omega_1$$

$$\omega_1 \cdot O_1 C = \omega_2 \cdot O_2 C$$

причем точка C лежит на продолжении прямой O_1O_2 ближе к большей скорости.

Таким образом видим, что сложение угловых скоростей около осей параллельных следует совершенно тем же правилам, как сложение параллельных сил.

Положим теперь, что тело B вращается около оси OB с угловою скоростью ω_1 и что оно несет на себе тело A, вращающееся около оси OA с угловою скоростью ω_2 (например тело B — станок, вращающийся около своего центрального штыра, тело A — орудие, вращающееся около оси цапф) и что сказанные оси пересекаются в точке O; тогда говорят, что тело A обладает двумя вращениями около пересекающихся осей. Докажем, что в этом случае угловые скорости складываются по правилу параллелограмма, т. е. что угловая скорость составного вращения из двух вращений, происходящих около пересекающихся осей, по величине и по направлению представляется диагональю параллелограмма, построеного на угловых скоростях составляющих вращений, как сторонах.



Фиг. 10.

Чтобы доказать эту теорему, надо сперва доказать, что диагональ OC (фиг. 10) параллелограмма, построенного на данных угловых скоростях, служит мгновенною осью вращения, а затем найти угловую скорость около этой оси.

Возьмем точку C — конец сказанной диагонали — и вообразим, что она принадлежит телу A, а тело B неподвижно.

Мгновенная скорость точки C вследствие этого вращения есть

$$v_2 = \omega_2 \cdot CE$$

где CE есть перпендикуляр, опущенный из точки C на ось ω_2, и скорость эта направлена перпендикулярно плоскости чертежа от читателя. Положим теперь, что тело B вращается и, значит, увлекает и точку C, тогда, вследствие только этого вращения, ее скорость была бы $v_1 = \omega_1 \cdot CD$ и направлена перпендикулярно к плоскости чертежа к читателю. Следовательно, скорость точки C в результате обоих движений есть

$$v_1 - v_2 = \omega_1 \cdot CD - \omega_2 \cdot CE$$

но

$$CD = OA \cdot \sin\gamma; \qquad CE = OB \cdot \sin\gamma$$

значит,

$$v_1 - v_2 = (\omega_1 \cdot OA - \omega_2 \cdot OB)\sin\gamma$$

но длины OB и OA пропорциональны ω_2 и ω_1, т. е.

$$\frac{OB}{OA} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

значит,

$$\omega_1 \cdot OA - \omega_2 \cdot OB = 0$$

следовательно и

$$v_1 - v_2 = 0$$

т. е. точка C, принадлежащая телу A, неподвижна, значит и вся прямая OC этого тела неподвижна и есть его мгновенная ось вращения.

Чтобы определить скорость Ω вращения тела B около оси OC, найдем, например, линейную скорость точки A, рассматриваемую как принадлежащую телу B. Вследствие вращения ω_2 и увлечения тела B телом A эта скорость есть нуль, вследствие вращения ω_1 тела B эта скорость есть

$$\omega_1 \cdot AF = \omega_1 \cdot OA \cdot \sin\gamma$$

С другой стороны, скорость той же точки должна выражаться и формулою

$$\Omega \cdot AH = \Omega \cdot OA \cdot \sin\alpha$$

и, значит, должно иметь место равенство

$$\Omega \sin\alpha = \omega_1 \sin\gamma$$

иначе

$$\frac{\Omega}{\omega_1} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

из треугольника же OAC следует

$$\frac{OC}{AC} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

значит,

$$\frac{\Omega}{\omega_1} = \frac{OC}{OB}$$

или

$$\frac{\Omega}{OC} = \frac{\omega_1}{OB}$$

но мы имели пропорцию

$$\frac{\omega_1}{OB} = \frac{\omega_2}{OA}$$

следовательно,

$$\frac{\Omega}{OC} = \frac{\omega_2}{OA} = \frac{\omega_1}{OB}$$

т. е. длина OC представляет угловую скорость Ω и по величине, следовательно, высказанная теорема доказана.

Само собою разумеется, что стоит только повторить относительно сложения угловых скоростей рассуждения, подобные рассуждениям о сложении сил, чтобы получить „параллелопипед“ угловых скоростей или многоугольник угловых скоростей и т. д.

Заметим также, что мы получили бы совершенно тот же результат, если бы рассматривали, что не тело B увлекает в своем движении тело A, а, наоборот, тело A, вращающееся с угловой скоростью ω_2, несет на себе ось OB, около которой вращается тело A с угловою скоростью ω_1 так, что это тело увлекается телом A; значит, при сложении и разложении угловых скоростей нет надобности оговаривать, которое тело влекущее, которое влекомое, — составная угловая скорость будет та же самая.

Отсюда понятно, что угловую скорость можно „проектировать“ на оси координат или „разлагать“ на составляющие по осям координат, — проекции и составляющие будут выражаться формулами

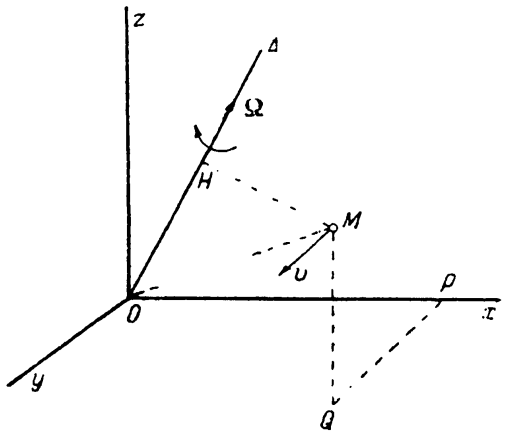
$$\Omega_x = \Omega \cos(\widehat{\Omega x})$$

$$\Omega_y = \Omega \cos(\widehat{\Omega y})$$

$$\Omega_z = \Omega \cos(\widehat{\Omega z})$$

при само собою понятном обозначении.

§ 6. Положим, что тело, с которым неизменно связаны координатные оси x, y, z, вращается в рассматриваемый момент около оси OA с угловою скоростью Ω (фиг. 11); требуется определить линейную скорость любой точки тела M и ее проекции на оси Ox, Oy, Oz, связанные с телом, а также и на оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, неподвижные в пространстве.



Фиг. 11.

Опустим из точки M перпендикуляр MH на ось вращения, тогда линейная скорость точки M в рассматриваемый момент по величине равна $\Omega \cdot \overline{MH}$ и направлена перпендикулярно плоскости MOA в сторону, показанную на чертеже стрелкой.

Чтобы вычислить скорость v, обозначим через x, y, z координаты точки M и через α, β, γ — углы, составляемые осью OA с осями координат x, y, z, тогда имеем

$$\overline{MH}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OH}^2$$

но

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$OH = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

значит,

$$\overline{MH}^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2$$

Заметим, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

воспользуемся для преобразования предыдущего равенства тожеством Эйлера, будем иметь

$$\overline{MH}^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) -$$

$$-(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 =$$

$$= (y\cos\alpha - x\cos\beta)^2 + (x\cos\gamma - z\cos\alpha)^2 + (z\cos\beta - y\cos\gamma)^2$$

Умножив это равенство на Ω^2 и положив

$$\Omega\cos\alpha = p; \quad \Omega\cos\beta = q; \quad \Omega\cos\gamma = r$$

так что p, q, r суть проекции угловой скорости на оси координат x, y, z, получим

$$V^2 = \Omega^2\,\overline{MH}^2 = (py - qx)^2 + (rx - pz)^2 + (qz - ry)^2 \qquad (1)$$

Чтобы получить направление скорости v, обозначим через a, b, c, косинусы углов, составляемых ее направлением с осями координат, тогда имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ ap + bq + cr &= 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

из коих первое выражает условие, что направление скорости v перпендикулярно к прямой OM, второе, что оно перпендикулярно к оси вращения OA.

Из уравнений (*), совершенно подобно тому как в § 1, следует

$$\frac{a}{qz - ry} = \frac{b}{rx - pz} = \frac{c}{py - qx} =$$

$$= \frac{1}{\pm\sqrt{(qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2}}$$

Чтобы определить знак перед корнем, стоит только взять какой-либо частный случай, например,

$$p = 0; \quad q = 0; \quad r = \Omega$$

и точку $x = x_0$; $y = 0$; $z = 0$, очевидно, что скорость этой точки направлена параллельно оси y и равна Ω, x_0, следовательно, перед кор-

нем надо брать знак +. Заметив, что подкоренная величина равна v^2, мы имеем

$$\begin{aligned} v_x &= v \cdot \cos(\widehat{vx}) = pz - ry \\ v_y &= v \cdot \cos(\widehat{vy}) = rx - pz \\ v_z &= v \cdot \cos(\widehat{vz}) = py - qx \end{aligned} \tag{2}$$

Эти формулы понадобятся нам не раз, поэтому дадим для них еще наглядный геометрический вывод.

Вращение Ω около оси OA можно разложить на три вращения около осей координат Ox, Oy, Oz с угловыми скоростями p, q, r, причем будет

$$\begin{aligned} p &= \Omega \cos(\widehat{\Omega x}) = \Omega \cos\alpha \\ q &= \Omega \cos(\widehat{\Omega y}) = \Omega \cos\beta \\ r &= \Omega \cos(\widehat{\Omega z}) = \Omega \cos\gamma \end{aligned}$$

Но вращение p в течение бесконечно-малого времени dt сообщает точке M перемещения:

по оси Ox	0
„ „ Oy	$-pz \cdot dt$
„ „ Oz	$+py \cdot dt$

иначе скорости:

по оси Ox	0
„ „ Oy	$-pz$
„ „ Oz	$+py$

Совершенно так же вращение q дает скорости:

по оси Ox	$+qz$
„ „ Oy	0
„ „ Oz	$-qx$

и, наконец, вращение r дает скорости:

по оси Ox	$-ry$
„ „ Oy	$+rx$

Таким образом получаем табличку:

Вращение	Оси		
	Ox	Oy	Oz
p	0	$-pz$	$+py$
q	$+qz$	0	$-qx$
r	$-ry$	$+rx$	0

Складывая проекции скорости по каждой оси, получим формулы (2).

Само собою разумеется, что, обозначив через P, Q, R проекции угловой скорости Ω на оси $O\xi\eta\zeta$, не связанные с телом, а неподвижные в пространстве, мы совершенно так же получили бы формулы

$$\begin{aligned} V_\xi &= Q\zeta - R\eta \\ V_\eta &= R\xi - P\zeta \\ V_\zeta &= P\eta - Q\xi \end{aligned} \qquad (3)$$

§ 7. Мы видели, что положение твердого тела, имеющего неподвижную точку O, или, что то же, положение системы осей $Oxyz$ по отношению к системе осей $O\xi\eta\zeta$, определяется тремя Эйлеровыми углами. Когда тело вращается, увлекая с собою и неизменно с ним связанную систему осей $Oxyz$, то эти углы с течением времени изменяются. Чтобы задать вращательное движение тела, т. е. чтобы во всякий данный момент времени t можно было определить его положение, надо задать функциональную зависимость Эйлеровых углов от времени t.

Итак, пусть будет

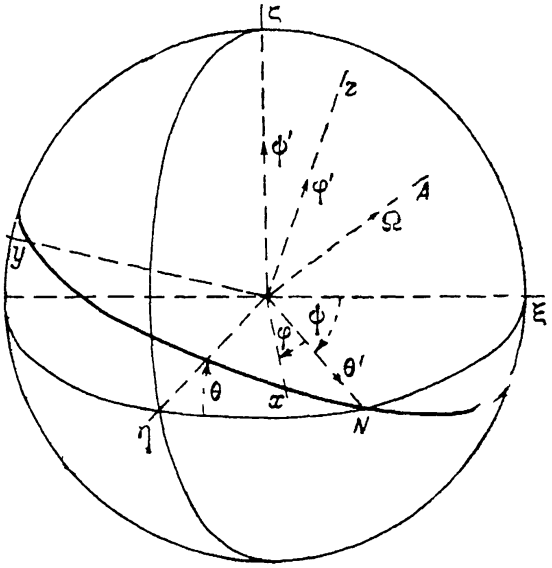
$$\begin{aligned} \psi &= \psi(t) \\ \varphi &= \varphi(t) \\ \theta &= \theta(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

требуется найти зависимость между величинами проекций угловой скорости p, q, r, Эйлеровыми углами и их производными, т. е. производными тех функций (1), коими выражается зависимость этих углов от времени t.

Чтобы вывести эти формулы, положим, что в рассматриваемый момент t тело вращается около оси OA с угловою скоростью Ω, слагающие которой по осям координат Ox, Oy, Oz суть соответственно p, q, r. Это вращение вызывает изменение углов ψ, φ, θ; быстрота изменения угла ψ измеряется производною ψ', которая представляет

собою угловую скорость, направленную по оси $O\zeta$, около которой происходит то вращение, при котором изменяется только угол ψ, точно так же быстрота изменения угла φ, т. е. производная φ', представляет угловую скорость, направленную по Oz, и, наконец, производная θ представляет угловую скорость, направленную по линии узлов ON (фиг. 12).

Таким образом, угловая скорость Ω могла бы быть разложена по указанным осям, и ее слагающие были бы ψ', φ' и θ'; проекции той же скорости на оси координат Ox, Oy, Oz суть p, q, r.



Фиг. 12.

Применив теорему проекций, получаем равенства

$$\Omega\cos(\widehat{\Omega x}) = p = \psi'\cos(\widehat{\zeta x}) + \varphi'\cos(\widehat{z x}) + \theta'\cos(\widehat{NOx})$$
$$\Omega\cos(\widehat{\Omega y}) = q = \psi'\cos(\widehat{\zeta y}) + \varphi'\cos(\widehat{z y}) + \theta'\cos(\widehat{NOy})$$
$$\Omega\cos(\widehat{\Omega z}) = r = \psi'\cos(\widehat{\zeta z}) + \varphi'\cos(\widehat{z z}) + \theta'\cos(\widehat{NOz})$$

Но мы имеем [см. § 3, формулы (6)]:

$$\cos(\widehat{\zeta x}) = \sin\varphi\sin\theta; \quad \cos(\widehat{z x}) = 0; \quad \cos(\widehat{NOx}) = \cos\varphi$$

$$\cos(\widehat{\zeta y}) = \cos\varphi\sin\theta; \quad \cos(\widehat{z y}) = 0; \quad \cos(\widehat{NOy}) = \cos\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi$$

$$\cos(\widehat{\zeta z}) = \cos\theta; \quad \cos(\widehat{z z}) = 1; \quad \cos(\widehat{NOz}) = 0$$

подставляя, получаем

$$\begin{aligned} p &= \psi'\sin\varphi\sin\theta + \theta'\cos\varphi \\ q &= \psi'\cos\varphi\sin\theta - \theta'\sin\varphi \\ r &= \psi'\cos\theta' + \varphi' \end{aligned} \tag{2}$$

Подобным же образом можно вывести и выражения проекций P, Q, R угловой скорости на неподвижные оси координат ξ, η, ζ, и мы получим

$$\Omega\cos(\widehat{\Omega\xi}) = P = \psi'\cos(\widehat{\zeta\xi}) + \varphi'\cos(\widehat{z\xi}) + \theta'\cos(\widehat{N\xi})$$
$$\Omega\cos(\widehat{\Omega\eta}) = Q = \psi'\cos(\widehat{\zeta\eta}) + \varphi'\cos(\widehat{z\eta}) + \theta'\cos(\widehat{N\eta})$$
$$\Omega\cos(\widehat{\Omega\zeta}) = R = \psi'\cos(\widehat{\zeta\zeta}) + \varphi'\cos(\widehat{z\zeta}) + \theta'\cos(\widehat{N\zeta})$$

Затем имеем

$$\cos(\widehat{\zeta\xi}) = 0; \quad \cos(\widehat{z\xi}) = \sin\psi\sin\theta; \quad \cos(\widehat{N\xi}) = \cos\psi$$
$$\cos(\widehat{\zeta\eta}) = 0; \quad \cos(\widehat{z\eta}) = -\cos\psi\sin\theta; \quad \cos(\widehat{N\eta}) = \sin\psi$$
$$\cos(\widehat{\zeta\zeta}) = 1; \quad \cos(\widehat{z\zeta}) = \cos\theta; \quad \cos(\widehat{N\zeta}) = 0$$

Подставляя, имеем

$$\begin{aligned} P &= \varphi'\sin\psi\sin\theta + \theta'\cos\psi \\ Q &= -\varphi'\cos\psi\sin\theta + \theta'\sin\psi \\ R &= \psi' + \varphi'\cos\theta \end{aligned} \tag{3}$$

Мы уже упоминали, что Эйлеровы углы могут быть выбраны на множество манеров. В каждом частном вопросе надо сделать надлежащий для этого вопроса наивыгоднейший выбор и соответственно этому выбору составить выражения косинусов углов и проекций угловой скорости, поэтому мы и остановились так подробно на этих выводах.

Когда Эйлеровы углы выбраны, как показано на фиг. 5, то угловые скорости ψ', φ' и θ' направлены

ψ' по оси $O\zeta$
φ' „ „ Oz
θ' по линии узлов ON

соответственно этому будет

$$\begin{aligned} p &= \psi'\cos(x\zeta) + \theta'\cos(xN) \\ q &= \psi'\cos(y\zeta) + \theta'\cos(yN) \\ r &= \varphi' + \psi'\cos(z\zeta) \end{aligned}$$

что на основании формул (7) § 3 будет

$$\begin{aligned} p &= -\psi'\cos\varphi\sin\theta + \theta'\sin\varphi \\ q &= \psi'\sin\varphi\sin\theta + \theta'\cos\varphi \\ r &= \varphi' + \psi'\cos\theta \end{aligned} \tag{2'}$$

§ 8. До сих пор мы рассматривали различные соотношения между геометрическими элементами движения тела, не рассматривая связи между движением тела и причинами, иначе — силами, это движение производящими.

Перейдем теперь к этому последнему рассмотрению.

Совокупность материальных точек, между которыми существуют различные *связи*, называют материальной системой. Под связями разумеют те условия, которым подчинены точки системы; так, например, некоторые точки могут быть между собою соединены неизменно, скажем, стержнем или как-нибудь иначе, другие точки не должны сходить с данных поверхностей или линий и т. п.

Все такие связи выражаются аналитически некоторыми зависимостями между координатами точек системы, причем эти зависимости могут явным образом заключать и время.

Мы ограничимся исключительно такими системами и исключим из нашего рассмотрения системы, в которых связи включают соотношения между скоростями точек системы или их бесконечно-малыми перемещениями, ибо с системами подобного рода нам иметь дела не придется.

Аналитические выражения тех условий, которым подчинены точки системы, называют уравнениями связей.

Так, например, если задано, что точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ соединены между собою неизменно так, что расстояние между ними равно l, то это условие выразится уравнением

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=l$$

или

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-l^2=0$$

Если, например, точка M_1 должна постоянно находиться на заданной поверхности

$$F(x, y, z)=0$$

то эта связь выразится уравнением

$$F(x_1, y_1, z_1)=0$$

показывающим, что координаты точки M_1 удовлетворяют уравнению поверхности, и т. д.

Вообще говоря, если система состоит из n точек, координаты коих суть

$$x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ \ldots\ x_n, y_n, z_n$$

то уравнения связей будут вида

$$\begin{aligned}
&F_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots z_n)=0\\
&F_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots z_n)=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&F_k(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots z_n)=0
\end{aligned} \qquad (I)$$

причем число этих уравнений k должно быть меньше числа $3n$ координат точек системы.

Если система переместится, то координаты всех или некоторых ее точек изменятся и обратятся соответственно в

$$(x_1 + \delta x_1,\ y_1 + \delta y_1,\ z_1 + \delta z_1),\ \ldots\ (x_n + \delta x_n,\ y_n + \delta y_n,\ z_n + \delta z_n)$$

причем если связи не нарушаются, то и новые значения координат удовлетворяют уравнениям (I), и, значит, перемещения $\delta x_1,\ \delta y_1,\ \ldots\ \delta z_n$ не могут быть задаваемы произвольно. Мы ограничимся случаем бесконечно-малых перемещений и выведем те условия, которым они должны удовлетворять.

Такие бесконечно-малые перемещения, при которых новые значения координат удовлетворяют уравнениям связей, называются *возможными*.

Итак, возможные перемещения должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned}
&F_1(x_1 + \delta x_1,\ y_1 + \delta y_1,\ z_1 + \delta z_1,\ \ldots\ z_n + \delta z_n) = 0\\
&F_2(x_1 + \delta x_1,\ y_1 + \delta y_1,\ z_1 + \delta z_1,\ \ldots\ z_n + \delta z_n) = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&F_k(x_1 + \delta x_1,\ y_1 + \delta y_1,\ z_1 + \delta z_1,\ \ldots\ z_n + \delta z_n) = 0
\end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Вычитая из каждого из этих уравнений соответствующее ему уравнение (I), получим, отбросив члены высших порядков,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\delta z_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial z_n}\delta z_n = 0\\
&\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial F_2}{\partial z_1}\delta z_1 + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial z_n}\delta z_n = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial F_k}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F_k}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial F_k}{\partial z_1}\delta z_1 + \ldots + \frac{\partial F_k}{\partial z_n}\delta z_n = 0
\end{aligned} \qquad \text{(III)}$$

Это суть те уравнения, которым должны удовлетворять *возможные* перемещения. Отличие и преимущество этих уравнений перед уравнениями (II) состоит в том, что они *линейные* относительно $\delta x_1,\ \delta y_1,\ \ldots\ \delta z_n$.

В статике доказывается следующее „начало возможных перемещений“: *для равновесия всякой материальной системы необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех сил, действующих на все точки системы, равнялась нулю для всякого возможного перемещения этой системы.*

Пусть

$$X_1,\ Y_1,\ Z_1;\quad X_2,\ Y_2,\ Z_2;\ \ldots\ X_n,\ Y_n,\ Z_n$$

суть составляющие по осям координат всех сил, действующих на точки

$$(x_1, y_1, z_1),\ (x_2, y_2, z_2),\ \ldots\ (x_n, y_n, z_n)$$

системы, подчиненной уравнениям связей (I); тогда элементарная работа сил, действующих на точку x_1, y_1, z_1, выразится суммою

$$X_1 \delta x_1 + Y_1 \delta y_1 + Z_1 \delta z_1$$

и, значит, высказанное начало выражается уравнением

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0 \qquad \text{(IV)}$$

которое должно иметь место для всех бесконечно-малых перемещений

$$\delta x_1, \ \delta y_1, \ \ldots \delta z_n$$

которые суть *возможные*, т. е. которые удовлетворяют уравнениям (III).

Чтобы найти положения равновесия системы, надо из уравнений (III), число которых k, выразить k величин δx_1, δy_1, δz_1, ... δy_α в функции остальных $3n - k$; это потребует решения лишь уравнений первой степени, и сказанные величины выразятся линейным же образом через остальные $3n - k$ величин; найденные значения надо подставить в уравнение (IV), собрать в нем члены, содержащие каждое из этих $3n - k$ бесконечно-малых перемещений, и так как они совершенно произвольны, то, чтобы уравнение, в которое обратится уравнение (IV), имело место, необходимо, чтобы каждый член его в отдельности (т. е. множитель, стоящий при каждой из бесконечно-малых δ) равнялся нулю.

Таким образом, это преобразованное уравнение (IV) распадется на $3n - k$ уравнений, которые, будучи присоединены к k уравнениям (II) связей, и послужат для определения $3n$ неизвестных координат

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots (x_n, y_n, z_n)$$

значения коих и дадут положение или вообще положения равновесия системы, если таковых несколько.

§ 9. Таков общий ход решения задачи о разыскании положений равновесия системы. Может оказаться, что требующиеся для этого выкладки будут очень сложны. Лагранж предложил два способа для упрощения этих выкладок.

Первый способ, называемый *способом множителей*, состоит в следующем: умножим уравнения (III) соответственно на множители λ_1, λ_2, ... λ_k и придадим к уравнению (IV), оно примет тогда вид

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left[X_i + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \right) \delta x_i + \right.$$
$$+ \left(Y_i + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_i} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial y_i} \right) \delta y_i +$$
$$\left. + \left(Z_i + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_i} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial z_i} \right) \delta z_i \right] = 0 \qquad \text{(IV')}$$

Распорядимся теперь этими множителями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ так, чтобы те величины $\delta x_1, \delta y_1, \ldots \delta y_\alpha$, которые мы имели в виду выразить через остальные, в сумме (IV′) пропадали, иными словами, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned}
&X_1 + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_1} = 0 \\
&Y_1 + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial y_1} = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&Y_\alpha + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_\alpha} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_\alpha} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial y_\alpha} = 0
\end{aligned} \qquad (V)$$

число которых, как уже сказано, есть k, тогда в сумме (IV) останутся лишь члены, содержащие те $3n - k$ бесконечно-малых $\delta z_\alpha, \ldots \delta z_n$, которые совершенно произвольны, и, значит, уравнение (IV′) распадается после того на $3n - k$ уравнений

$$\begin{aligned}
&Z_\alpha + \lambda_1 \frac{\partial E_1}{\partial z_\alpha} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial z_\alpha} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial z_\alpha} = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&Z_n + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_n} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial z_n} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial z_n} = 0
\end{aligned} \qquad (V')$$

Таким образом у нас будет: k уравнений (II), k уравнений (V) и $3n - k$ уравнений (V′), а всего $3n + k$ уравнений, которые и послужат для определения $3n$ неизвестных координат:

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots (x_n, y_n, z_n)$$

и k неизвестных множителей:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$$

Мы не будем вдаваться в дальнейшие подробности об этой методе, ибо нам не придется ее применять в этом исследовании.

Вторая метода Лагранжа есть метода *координатных параметров*. Сущность этой методы состоит в следующем.

Вообразим, что в уравнениях связей мы $3n - k = h$ величин приняли бы произвольными и решили бы эти уравнения относительно k остальных; очевидно, что если бы выражения этих k величин в функции остальных мы подставили бы в уравнения связей, то эти уравнения удовлетворялись бы тожественно.

Понятно также, что вместо этих h произвольных (переменных) величин можем ввести такое же число новых переменных

$$q_1, q_2, \ldots q_h$$

уравнениями вида

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \ldots q_h) \\ y_1 &= y_1(q_1, q_2, \ldots q_h) \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (*)$$

Подставляя эти значения в выражения k координат через наши избранные h, мы и эти k координат выразим через переменные

$$q_1, q_2, \ldots q_h$$

причем этими выражениями и выражениями (*) уравнения связей будут удовлетворяться *тожественно*, таким образом мы выразим *все* координаты через „параметры“

$$q_1, q_2, \ldots q_h$$

так, что уравнения связей удовлетворяются *тожественно*.

Пусть эти выражения будут

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(q_1, q_2, \ldots q_h) \\ y_1 &= \psi_1(q_1, q_2, \ldots q_h) \\ z_1 &= \omega_1(q_1, q_2, \ldots q_h) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \varphi_n(q_1, q_2, \ldots q_h) \\ y_n &= \psi_n(q_1, q_2, \ldots q_h) \\ z_n &= \omega_n(q_1, q_2, \ldots q_h) \end{aligned} \qquad (1)$$

Мы видели, что условия равновесия системы получаются из уравнения

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0 \qquad (IV)$$

но в силу уравнения (1) будет

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_h}\delta q_h \\ \delta y_i &= \frac{\partial \psi_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \psi_i}{\partial q_h}\delta q_h \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n) \\ \delta z_i &= \frac{\partial \omega_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \omega_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \omega_i}{\partial q_h}\delta q_h \end{aligned} \qquad (2)$$

причем опять-таки эти выражения таковы, что ими уравнения связей, а значит и уравнение (III), удовлетворяются тожественно.

Подставляем выражения (2) в уравнение (IV).

По подстановке в уравнение (IV) мы ему придадим вид

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_h \delta q_h = 0 \qquad (V'')$$

а так как

$$\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_h$$

произвольные бесконечно-малые величины, то это уравнение не иначе имеет место, как если

$$Q_1 = 0;\ Q_2 = 0;\ Q_3 = 0;\ \ldots\ Q_h = 0 \qquad (V''')$$

где

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{i=n} \left(X_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_\alpha} + Y_i \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha} + Z_i \frac{\partial \omega_i}{\partial q_\alpha} \right) \qquad (V^{IV})$$

Уравнения (V''') и послужат для определения тех значений параметров, при которых система находится в равновесии.

Обыкновенно во всяком частном вопросе бывает возможно, не переходя через составление уравнений связей в прямоугольных координатах, выбрать те координатные параметры, которыми вполне определяется положение и конфигурация системы, и непосредственно составить выражения (1) и выражения (V''').

§ 10. Перейдем теперь к составлению уравнений движения материальной системы; из этих уравнений мы и получим затем общие уравнения движения твердого тела.

Уравнения движения свободной материальной точки можно написать в таком виде:

$$\begin{aligned} \Sigma X - m\frac{d^2x}{dt^2} &= 0 \\ \Sigma Y - m\frac{d^2y}{dt^2} &= 0 \\ \Sigma Z - m\frac{d^2z}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

причем ΣX, ΣY, ΣZ суть суммы проекций всех сил, действующих на точку, масса коей m и координаты которой x, y, z рассматриваются как неизвестные функции времени t; дифференциальные уравнения (1) и служат вместе с начальными условиями для определения этих функций, т. е. движения точки.

Уравнения (1) имеют совершенно тот же вид, как уравнения равновесия точки, если вообразить, что на нее действует сверх сил, непосредственно приложенных, суммы проекций коих суть

$$\Sigma X,\ \Sigma Y,\ \Sigma Z$$

еще сила F, которой проекции суть

$$-m\frac{d^2x}{dt^2},\quad -m\frac{d^2y}{dt^2},\quad -m\frac{d^2z}{dt^2}$$

т. е. сила, по величине равная произведению из массы точки на ее ускорение и направленная в сторону, противоположную этому ускорению. Эта фиктивная сила называется *силою инерции*.

Таким образом можно сказать, что при движении свободной материальной точки имеет место равновесие между силами, к ней непосредственно приложенными, и силою инерции.

Если точка не свободна, а должна, например, двигаться по заданной поверхности

$$F(x, y, z)=0$$

то можно рассуждать так: при движении точка, будучи вынужденной оставаться на поверхности, производит на нее некоторое давление и, значит, встречает противоположно направленное и равное ему противодействие поверхности. Это противодействие представляет собою силу, приложенную к точке, поэтому если бы поверхность убрать, но зато во всякий момент прилагать к точке сказанную силу, то можно бы точку рассматривать как свободную, и тогда имело бы место равновесие между: силами, к точке непосредственно приложенными, силою, представляющей противодействие поверхности, и силою инерции.

Но вместо того, чтобы прилагать сказанное противодействие и считать точку свободной, можно восстановить ту связь, которая этим противодействием заменена, тогда можно сказать, что между силою инерции и силами, к точке непосредственно приложенными, имеет место равновесие при посредстве той связи, коей точка подчинена, и, значит, в нашем случае уравнения движения точки написались бы, пользуясь „методою множителей“, так:

$$\left(X+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+$$
$$+\left(Z+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z=0 \qquad (1')$$

Это уравнение распадается на три следующих:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=X+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=Y+\lambda\frac{dF}{dy}\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=Z+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}\end{aligned} \qquad (1'')$$

причем к этим трем дифференциальным уравнениям надо присоединить еще и заданное конечное уравнение связи

$$F(x, y, z)=0 \qquad (2)$$

В общем случае, при движении системы материальных точек, каждая точка находится под действием сил, к ней непосредственно приложен-

ных, как *внешних*, т. е. происходящих от масс, к рассматриваемой системе не принадлежащих, так и *внутренних*, т. е. происходящих от прочих точек самой системы, и, наконец, *противодействий* связей, коим эта точка подчинена. Если эти противодействия причислить, подобно тому как мы делали выше для одной точки, к силам, действующим на точки системы, то систему можно рассматривать как „свободную", т. е. в которой связей нет, тогда для каждой точки можно сказать, что имеет место равновесие между силами, непосредственно к этой точке приложенными, противодействиями, заменяющими связи, и силою инерции этой точки.

Но можно, вместо того чтобы заменять связи указанными противодействиями, эти связи восстановить и сказать, *что во всякий момент при посредстве связей имеет место равновесие между силами, как внутренними, так и внешними, действующими на каждую точку системы, и силами инерции.*

В этом и состоит так называемый принцип д'Аламберта, сводящий составление уравнений движения системы к составлению уравнений равновесия.

Пусть m_1, m_2,... m_n суть массы соответствующих точек системы,

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots (x_n, y_n, z_n)$$

— координаты этих точек.

Определить движение системы — значит выразить координаты всех ее точек в функции времени так, что для любого заданного момента (частного значения времени) можно вычислить координаты любой точки системы.

При движении системы точек уравнения связей могут вообще заключать и время t явным образом, т. е. быть вида

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_k(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0 \end{aligned} \qquad (I)$$

Итак, положим, что имеется система точек, массы коих m_1, m_2,... m_n и которые подчинены связям, выражаемым уравнениями (I), пусть равнодействующая всех внешних и внутренних сил, приложенных к точке m_1, есть G_1, составляющие ее по осям координат X_1, Y_1, Z_1, точно так же для точки m_2—сила G_2, которой составляющие X_2, Y_2, Z_2,... и т. д., для точки m_n — сила G_n, коей составляющие X_n, Y_n, Z_n; требуется составить дифференциальные уравнения движения этой системы.

По определению составляющие сил инерции точек системы суть

$$
\begin{array}{lll}
-m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}, & -m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}, & -m_1\frac{d^2z_1}{dt^2} \\
-m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}, & -m_2\frac{d^2y_2}{dt^2}, & -m_2\frac{d^2z_2}{dt^2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\
-m_n\frac{d^2x_n}{dt^2}, & -m_n\frac{d^2y_n}{dt^2}, & -m_n\frac{d^2z_n}{dt^2}
\end{array}
$$

По принципу д'Аламберта имеет место равновесие между силами инерции и силами, действующими на точки системы во всякий момент времени t, на основании связей, в *этот момент* в системе существующих; следовательно, мы будем иметь уравнение

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left[\left(X_i - m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)\delta x_i + \left(Y_i - m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right)\delta y_i + \left(Z_i - m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)\delta z_i\right] = 0 \qquad \text{(II)}$$

для всех „возможных", т. е. удовлетворяющих уравнениям связей перемещений. Для составления тех линейных уравнений, коим эти бесконечно-малые перемещения удовлетворяют, надо дифференцировать уравнения (I), *рассматривая в них время t как постоянную,* ибо нам надо найти зависимость между бесконечно-малыми перемещениями, „возможными" в данный момент t, а не в два последующие момента t и $t+\delta t$. Таким образом из уравнения (I) имеем

$$
\begin{array}{l}
\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\delta z_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial z_n}\delta z_n = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \text{(I')} \\
\frac{\partial F_k}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F_k}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial F_k}{\partial z_1}\delta z_1 + \ldots + \frac{\partial F_k}{\partial z_n}\delta z_n = 0
\end{array}
$$

Применяя методу множителей, как указано в § 9, мы из уравнений (II) и (I′) получим следующие дифференциальные уравнения движения нашей материальной системы:

$$
\begin{array}{l}
m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = X_1 + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_k\frac{\partial F_k}{\partial x_1} \\
m_1\frac{d^2y_1}{dt^2} = Y_1 + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \ldots + \lambda_k\frac{\partial F_k}{\partial y_1} \\
m_1\frac{d^2z_1}{dt^2} = Z_1 + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial z_1} + \ldots + \lambda_k\frac{\partial F_k}{\partial z_1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \text{(III)} \\
m_n\frac{d^2x_n}{dt^2} = X_n + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_n} + \lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_k\frac{\partial F_k}{\partial x_n}
\end{array}
$$

$$m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} = Y_n + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_n} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_n} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial y_n}$$

$$m_n \frac{d^2 z_n}{dt^2} = Z_n + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_n} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial z_n} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial z_n}$$

Таким образом получается система $3n$ дифференциальных уравнений второго порядка, к этим уравнениям надо еще присоединить k конечных уравнений связей (I); эти $3n+k$ уравнений и послужат для определения $3n+k$ неизвестных, т. е. $3n$ координат и k множителей.

Интегрирование этой системы внесет $6n$ произвольных постоянных, которые определятся по начальным условиям, т. е. по заданию в начальный момент $t=t_0$ положения каждой точки системы и той скорости, которою каждая точка в этот начальный момент обладает.

Мы ограничимся этим общим замечанием, ибо в тех непосредственных приложениях, которые мы имеем в виду, мы не будем пользоваться этою формою уравнений движения, называемой первой Лагранжевой формой их.

§ 11. Соответственно тому, как в § 9 была приведена вторая метода Лагранжа для составления уравнений равновесия системы — введение независимых координатных параметров, так и для дифференциальных уравнений движения системы им же дана вторая форма.

Итак, положим, что конфигурация и положение системы вполне определяются $h=3n-k$ независимыми координатными параметрами

$$q_1,\ q_2,\ q_3, \ldots q_h$$

такими, что если через них выразить координаты точек системы уравнениями вида

$$\begin{aligned} x_i &= \varphi_i(q_1,\ q_2, \ldots q_h,\ t) \\ y_i &= \psi_i(q_1,\ q_2, \ldots q_h,\ t) \qquad (i=1, 2, \ldots n) \qquad \text{(I)} \\ z_i &= \omega_i(q_1,\ q_2, \ldots q_h,\ t) \end{aligned}$$

то уравнения связей этими выражениями координат удовлетворяются *тожественно.*

Заметим, что так как в общем случае уравнения связей могут содержать и время t явным образом, то и выражения (I) координат точек системы могут содержать время явно.

Требуется составить те дифференциальные уравнения, которыми определяются координатные параметры $q_1,\ q_2, \ldots q_h$ при движении системы.

Понятно, что мы этого достигнем, заменив в уравнении (V″) § 9 величины $X_i,\ Y_i,\ Z_i$ соответственно через

$$X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2},\quad Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2},\quad Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}$$

т. е. присовокупив к числу сил, приложенных к точкам системы, и силы инерции этих точек.

Сделав эту замену, напишем это уравнение так:

$$(Q_1 - P_1)\delta q_1 + (Q_2 - P_2)\delta q_2 + \ldots + (Q_h - P_h)\delta q_h = 0 \qquad \text{(II)}$$

причем

$$P_\alpha = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\frac{d^2 x_i}{dt^2}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_\alpha} + \frac{d^2 y_i}{dt^2}\frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha} + \frac{d^2 z_i}{dt^2}\frac{\partial \omega_i}{\partial q_\alpha}\right]$$

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{i=n} \left[X_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_\alpha} + Y_i \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha} + Z_i \frac{\partial \omega_i}{\partial q_\alpha}\right]$$

и, как уже указано,

$$\begin{aligned} x_i &= \varphi_i(q_1, q_2, \ldots q_h, t) \\ y_i &= \psi_i(q_1, q_2, \ldots q_h, t) \\ z_i &= \omega_i(q_1, q_2, \ldots q_h, t) \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n)$$

Уравнение (II), которое должно иметь место при всяких бесконечно-малых

$$\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_h$$

распадается на следующие h уравнений:

$$\begin{aligned} P_1 &= Q_1 \\ P_2 &= Q_2 \\ &\ldots \\ P_h &= Q_h \end{aligned} \qquad \text{(III)}$$

Выразив в этих уравнениях

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2}, \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2}, \ldots \frac{d^2 z_n}{dt^2}$$

через переменные $q_1, \ldots q_h$ и их производные первого и второго порядка и время t, пользуясь для этого уравнениями (I), мы и получили бы требуемые h дифференциальных уравнений для определения параметров $q_1, q_2, \ldots q_h$, а значит, и движения системы.

Но такой прием потребовал бы сложных выкладок, которые все могут быть обойдены, ибо Лагранж показал, каким образом могут быть составлены уравнения (III), не прибегая к двукратному дифференцированию уравнения (I).

§ 12. В уравнениях (III), выражения для Q_α не требуют преобразования, ибо они составляются непосредственно подстановкою, — надо показать, каким образом преобразуются выражения P_α:

$$P_\alpha = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_\alpha} + \frac{d^2 y_i}{dt^2}\frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha} + \frac{d^2 z_i}{dt^2}\frac{\partial \omega_i}{\partial q_\alpha}\right)$$

Это выражение можно написать, делая для каждого члена то преобразование, которым пользуются при интегрировании по частям, так:

$$P_\alpha = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_\alpha} + \frac{dy_i}{dt}\frac{\partial\psi_i}{\partial q_\alpha} + \frac{dz_i}{dt}\frac{\partial\omega_i}{\partial q_\alpha}\right) -$$
$$- \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left[\frac{dx_i}{dt}\frac{d\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_\alpha}}{dt} + \frac{dy_i}{dt}\frac{d\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_\alpha}}{dt} + \frac{dz_i}{dt}\frac{d\frac{\partial\omega_i}{\partial q_\alpha}}{dt}\right]$$

Здесь надо обратить внимание, что знаками ∂ обозначены частные производные, знаком же d — полная производная по времени t.

Положим для сокращения письма

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i'; \quad \frac{dy_i}{dt} = y_i'; \quad \frac{dz_i}{dt} = z_i'$$

$$\frac{dq_1}{dt} = q_1'; \quad \frac{dq_2}{dt} = q_2'; \ldots \frac{dq_h}{dt} = q_h'$$

тогда предыдущее равенство напишется так:

$$P_\alpha = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(x_i'\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_\alpha} + y_i'\frac{\partial\psi_i}{\partial q_\alpha} + z_i'\frac{\partial\omega_i}{\partial q_\alpha}\right) -$$
$$- \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(x_i'\frac{d\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_\alpha}}{dt} + y_i'\frac{d\frac{\partial\psi_i}{\partial q_\alpha}}{dt} + z_i'\frac{d\frac{\partial\omega_i}{\partial q_\alpha}}{dt}\right)$$

Но так как

$$x_i = \varphi_i(q_1, q_2, \ldots q_n, t)$$

то будет

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i' = \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_1}q_1' + \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_2}q_2' + \ldots + \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_n}q_n' + \frac{\partial\varphi_i}{dt} \qquad (*)$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_\alpha'} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_\alpha} \qquad (**)$$

Точно так же будет

$$\frac{\partial y_i'}{\partial q_\alpha'} = \frac{\partial\psi_i}{\partial q_\alpha}$$
$$\frac{\partial z_i'}{\partial q_\alpha'} = \frac{\partial\omega_i}{\partial q_\alpha} \qquad (**)$$

Следовательно, первая сумма в выражении P_α может быть написана так:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left[x_i'\cdot\frac{\partial x_i'}{\partial q_\alpha'} + y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_\alpha'} + z_i'\frac{\partial z_i'}{\partial q_\alpha'}\right]$$

Чтобы преобразовать вторую сумму, составим выражение $\frac{d\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_\alpha}}{dt}$ в развитой форме; имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_\alpha}\right)=\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial q_\alpha\,\partial q_1}q_1'+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial q_\alpha\,\partial q_2}q_2'+\ldots+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial q_\alpha\,\partial q_h}q_h'+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial q_\alpha\,\partial t}$$

С другой стороны, составив частную пройзводную от x_i' [формула (*)] по переменной q_α, имеем

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial q_1\,\partial q_\alpha}q_1'+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial q_2\,\partial q_\alpha}q_2'+\ldots+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial q_h\,\partial q_\alpha}q_h'+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t\,\partial q_\alpha}$$

так как

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t\,\partial q_\alpha}=\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial q_\alpha\,\partial t}$$

то из сличения двух предыдущих равенств следует

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_\alpha}\right)=\frac{\partial x_i'}{\partial q_\alpha} \qquad (***)$$

совершенно так же получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial q_\alpha}\right)=\frac{\partial y_i'}{\partial q_\alpha}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial z_i'}{\partial q_\alpha} \qquad (***)$$

и, значит, вторая сумма в выражении $P_{i\alpha}$ будет

$$\sum_{i=1}^{i=n}m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_\alpha}+y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_\alpha}+z_i'\frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha}\right)$$

Таким образом будет

$$P_\alpha=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n}m_i\left[x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_\alpha'}+y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_\alpha'}+z_i'\frac{\partial z_i'}{\partial q_\alpha'}\right]-$$
$$-\sum_{i=1}^{i=n}m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_\alpha}+y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_\alpha}+z_i'\frac{\partial z_i'}{\partial q_\alpha}\right)$$

Припомнив, что живою силою материальной точки называется половина произведения из ее массы на квадрат скорости, видим, что живая сила нашей системы, равная сумме живых сил всех ее точек, будет

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)$$

Отсюда следует, что первая сумма в выражении P_α есть частная производная от живой силы по переменной q_α', вторая сумма есть частная производная от живой силы по переменной q_α, так что будет

$$P_\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$$

Таким образом, уравнения движения системы напишутся по схеме

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_h'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h
\end{aligned} \qquad \text{(IV)}$$

Заметив, что выражение

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_h \delta q_h$$

произошло от преобразования к новым переменным q выражения

$$\delta U = \sum_{i=1}^{i=n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i)$$

представляющего элементарную работу, видим, что и предыдущая сумма есть элементарная работа всех сил системы; в ней член $Q_\alpha \delta q_\alpha$ есть, следовательно, элементарная работа, производимая всеми силами, действующими на точки системы, когда параметр q_α получает приращение δq_α. На основании этого замечания часто можно упростить составление выражений Q_α и не прибегать к общему их виду.

Следовательно, для составления дифференциальных уравнений движения в каких угодно координатных параметрах

$$q_1, q_2, q_3, \ldots q_h$$

независимых между собой и вполне определяющих положение и конфигурацию системы, т. е. таких, через которые выражаются координаты всех точек системы *конечными уравнениями* и этими выражениями уравнения связей удовлетворяются тожественно, надо составить через эти координатные параметры и их производные по времени выражения:

во-первых, живой силы:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = T(q_1, q_2, \ldots q_h, q_1', q_2', \ldots q_h', t)$$

во-вторых, элементарной работы:

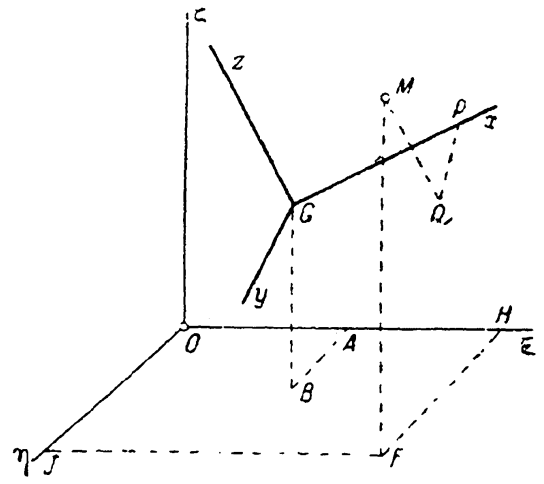
$$\delta U = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_h \delta q_h$$

тогда уравнения движения получатся по схеме (IV), называемой их второй Лагранжевой формой.

§ 13. Чтобы применить предыдущие выводы к составлению уравнений движения твердого тела, нам прежде всего надо составить выражение живой силы твердого тела, которое мы будем сперва предполагать однородным.

Для определения положения твердого тела в пространстве будем поступать как указано в § 1, т. е. берем в теле какую угодно постоянную точку G (фиг. 13) и проводим через нее три взаимно перпендикулярные оси $Gxyz$, неизменно связанные с телом. Затем берем какую-нибудь неизменную неподвижную систему координат $O\xi\eta\zeta$ в пространстве, тогда положение всякой точки в теле определяется ее координатами x, y, z; положение той же точки в пространстве определяется ее координатами ξ, η, ζ, причем между этими величинами и предыдущими имеют место уравнения

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ \eta &= \eta_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ \zeta &= \zeta_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{aligned} \qquad (1)$$



Фиг. 13

Когда тело движется, то с течением времени изменяются величины ξ_0, η_0, ζ_0 и a_1, a_2, ... c_3, величины же x, y, z от времени не зависят.

Дифференцируя выражения (1), мы получим проекции скорости нашей точки

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi_0' + a_1' x + a_2' y + a_3' z \\ \eta' &= \eta_0' + b_1' x + b_2' y + b_3' z \\ \zeta' &= \zeta_0' + c_1' x + c_2' y + c_3' z \end{aligned} \qquad (2)$$

Причем, как видно, члены ξ_0', η_0', ζ_0' суть проекции скорости V_0 точки G. Если бы тело (иначе оси $Gxyz$) не вращалось, то все величины $a_1', \ldots c_3'$ были бы равны нулю, — тело двигалось бы поступательно, и скорости всех его точек были бы одинаковы, т. е. между собою равны и параллельны и равны скорости V_0 точки G.

Члены

$$(a_1' x + a_2' y + a_3' z), \quad (b_1' x + b_2' y + b_3' z), \quad (c_1' x + c_2' y + c_3' z)$$

представляют проекции вращательной скорости точки (x, y, z) тела. Как видно, они не зависят от координат точки G и остаются неизменными, движется ли эта точка или находится в покое. В § 6 показаны различные выражения проекций этой вращательной скорости.

Назовем для краткости письма эти проекции соответственно через

$$V_\xi,\ V_\eta,\ V_\zeta$$

тогда формулы (2) напишутся

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi_0' + V_\xi \\ \eta' &= \eta_0' + V_\eta \\ \zeta' &= \zeta_0' + V_\zeta \end{aligned} \tag{3}$$

и показывают, что скорость каждой точки тела слагается (геометрически) из поступательной скорости какой-либо его точки G и вращательной около этой точки, принимаемой за неподвижную.

Живая сила тела равна сумме живых сил всех частиц его. Пусть m есть масса той частицы, коей координаты суть x, y, z, тогда будет

$$\begin{aligned} 2T = \Sigma m(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = \Sigma m[(\xi_0' + V_\xi)^2 + (\eta_0' + V_\eta)^2 + (\zeta_0' + V_\zeta)^2] = \\ = (\xi_0'^2 + \eta_0'^2 + \zeta_0'^2)\Sigma m + 2\xi_0'\Sigma m V_\xi + 2\eta_0'\Sigma m V_\eta + 2\zeta_0'\Sigma m V_\zeta + \\ + \Sigma m(V_\xi^2 + V_\eta^2 + V_\zeta^2) \end{aligned}$$

где все суммы должны распространяться на все частицы тела.

Очевидно, что Σm, т. е. сумма масс всех частиц тела, есть масса M всего тела.

Предыдущее выражение примет более простой вид, если за точку G принять центр тяжести тела.

В самом деле, тогда по определению центра тяжести будет

$$\Sigma mx = 0;\quad \Sigma my = 0;\quad \Sigma mz = 0$$

но

$$V_\xi = a_1' x + a_2' y + a_3' z$$

значит,

$$\Sigma m V_\xi = a_1' \Sigma mx + a_2' \Sigma my + a_3' \Sigma mz = 0$$

так как a_1', a_2', a_3' от x, y, z не зависят. Таким образом будет

$$2T = (\xi_0'^2 + \eta_0'^2 + \zeta_0'^2)M + \Sigma m(V_\xi^2 + V_\eta^2 + V_\zeta^2) \tag{4}$$

Эта формула выражает такое свойство:

Живая сила твердого тела равна живой силе материальной точки, масса которой равна массе тела и скорость которой равна скорости центра тяжести тела плюс живая сила вращательного

движения тела около его центра тяжести, принимаемого за неподвижный.

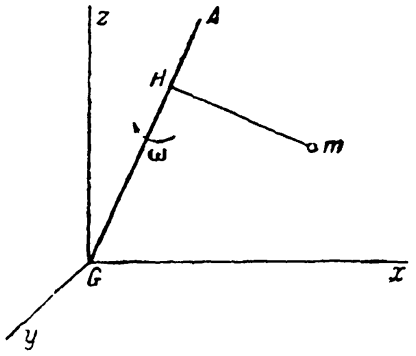
Разовьем теперь подробнее выражение живой силы вращательного движения тела.

Положим, что в рассматриваемый момент тело вращается около мгновенной оси GA с угловою скоростью ω, и m есть та частица, координаты которой суть x, y, z (фиг. 14), тогда ее скорость v равна по величине произведению $\omega\rho = \omega \cdot mH$, где $mH = \rho$ есть расстояние рассматриваемой точки до оси; живая сила этой точки будет

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 \rho^2$$

следовательно, живая сила T_1 всего тела при вращательном движении его будет

$$T_1 = \frac{1}{2} \omega^2 \Sigma m\rho^2$$



Фиг. 14.

множитель ω^2 вынесен за знак суммы, ибо он один и тот же для всех частиц тела.

Сумма $\Sigma m\rho^2$, т. е. сумма произведений масс всех частиц тела на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси, называется *моментом инерции тела* около этой оси.

Итак, живая сила вращательного движения твердого тела равна половине произведения квадрата угловой скорости на момент инерции относительно оси вращения.

Положим, что ось вращения GA составляет с осями $Gxyz$ (фиг. 14) углы α, β, γ, тогда проекции угловой скорости на оси координат суть

$$\omega\cos\alpha = p; \quad \omega\cos\beta = q; \quad \omega\cos\gamma = r$$

вместе с тем линейная скорость точки m (x, y, z) имеет своими проекциями на те же оси

$$v_x = qz - ry$$

$$v_y = rx - pz$$

$$v_z = py - qx$$

Так как квадрат скорости этой точки есть

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

то будет

$$2T_1 = \Sigma mv^2 = \Sigma m[(qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2] = p^2 \Sigma m(y^2 + z^2) +$$
$$+ q^2 \Sigma m(x^2 + z^2) + r^2 \Sigma m(x^2 + y^2) - 2pq \Sigma mxy - 2pr \Sigma mxz - 2qr \Sigma myz$$

Положим

$$\Sigma m(y^2+z^2)=A;\quad \Sigma m(x^2+z^2)=B;\quad \Sigma m(x^2+y^2)=C;$$
$$\Sigma mxy=D;\quad \Sigma mxz=E;\quad \Sigma myz=F \tag{5}$$

все эти величины для данного тела и заданного в нем положения осей будут некоторые вполне определенные постоянные, причем, как видно, A есть момент инерции тела около оси Ox; B — момент инерции около оси Oy и C — момент инерции около оси Oz. Величины же D, E, F у английских авторов называются „произведения инерции“ — (products of inertia), в русской же научной литературе принят термин — центробежные моменты. Таким образом, удвоенная живая сила вращательного движения твердого тела выражается формулою

$$2T_1=Ap^2+Bq^2+Cr^2-2Dpq-2Epr-2Fqr \tag{6}$$

С другой стороны, обозначая через I момент инерции около оси OA, мы для той же живой силы имели формулу

$$2T_1=I\omega^2 \tag{7}$$

Заметив, что

$$p=\omega\cos\alpha;\quad q=\omega\cos\beta;\quad r=\omega\cos\gamma$$

подставим эти выражения в формулу (6), тогда, уравняв выражения (6) и (7), по сокращении на ω^2, получим

$$I=A\cos^2\alpha+B\cos^2\beta+C\cos^2\gamma-2D\cos\alpha\cos\beta-$$
$$-2E\cos\alpha\cos\gamma-2F\cos\beta\cos\gamma \tag{8}$$

Эта формула дает зависимость момента инерции I относительно оси, составляющей с осями координат углы α, β, γ, от моментов инерции и центробежных моментов, взятых относительно осей координат.

Не приводя выводов и доказательств, упомянем, что во всяком теле всегда можно выбрать три взаимно перпендикулярные оси так, чтобы по отношению к этим осям было

$$\Sigma mxy=0;\quad \Sigma mxz=0;\quad \Sigma myz=0 \tag{9}$$

такие оси называются *главными осями*, а соответствующие им моменты инерции — *главными моментами инерции*.

Нетрудно видеть, что для однородного тела вращения ось симметрии будет главною, т. е. что оба центробежные момента, относящиеся к этой оси, будут равны нулю.

В самом деле, положим, что такою осью является ось Ox, тогда в сумме Σmxy для всякого избранного значения x и y будет равный член с тем же значением x и обратным значением y, так что эти два элемента суммы уничтожаются, и сумма Σmxy будет равна нулю.

Совершенно так же и сумма $\Sigma mxz = 0$, а это и выражает, что ось Ox есть главная.

Другие две главные оси лежат в плоскости yOz, перпендикулярной к оси Ox, и так как в этой плоскости, какую бы ось ни брать, моменты инерции одинаковы, то любая ось в плоскости xOy может быть взята за главную.

Таким образом, приняв для тела вращения ось Ox за ось симметрии, видим, что его моменты инерции будут

$$A,\ B \text{ и } B$$

ибо момент инерции $C = B$.

Как уже сказано, мы начало координат берем в центре тяжести тела, тогда оказывается, что если

$$B < A$$

то этот момент инерции есть наименьший из всех моментов инерции этого тела, взятых относительно любой оси.

Мы не будем приводить других свойств моментов инерции, ибо они нам в дальнейшем не понадобятся.

Таким образом, живая сила вращательного движения твердого тела выразится

$$2T_1 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 \tag{10}$$

если за оси в теле приняты его главные оси инерции.

Если, кроме того, это тело есть тело вращения, то будет

$$2T_1 = Ap^2 + B(q^2 + r^2) \tag{10'}$$

предполагая, что ось симметрии тела есть ось Ox.

Вместе с тем формула (8) примет соответственно виды

$$I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma$$

и

$$I = A\cos^2\alpha + B(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) \tag{11}$$

но так как

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

то будет

$$\cos^2\beta + \cos^2\gamma = \sin^2\alpha$$

и последняя формула напишется так:

$$I = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha \tag{12}$$

Заметим, что эту формулу можно писать так:

$$I = A - (A - B)\sin^2\alpha = B + (A - B)\cos^2\alpha$$

отсюда и видно, что если

$$A > B$$

то

$$A > I > B$$

т. е. A есть наибольший из моментов инерции и B — наименьший для всех осей, проведенных через точку O.

§ 14. Прежде чем составить уравнения движения твердого тела, рассмотрим два общих свойства движения какой угодно системы точек.

Пусть $m_1, m_2, \ldots m_n$ — массы точек системы,

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots (x_n, y_n, z_n)$$

— координаты этих точек, и пусть между этими точками существуют связи, выражающиеся уравнениями, не содержащими явно времени t, т. е. уравнениями вида

$$F_\alpha(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n) = 0 \qquad (\alpha = 1,2,\ldots k)$$

Силы, действующие на точки системы, подразделим на три группы: 1) силы внешние, т. е. такие, которые происходят от масс, не принадлежащих к системе, или от каких-нибудь иных причин, 2) силы внутренние, которые происходят от взаимодействий между точками системы, и 3) противодействия или, как их называют, реакции связей.

Условимся обозначать: сумму проекций на оси координат внешних сил, приложенных к точке m_h, через

$$X_e^{(h)}, \; Y_e^{(h)}, \; Z_e^{(h)}$$

сумму проекций внутренних сил, приложенных к той же точке и происходящих от действия на эту точку (m_h) массы m_j, через

$$X_{jh}, \; Y_{jh}, \; Z_{jh}$$

Заметим здесь же, что действие массы m_h на массу m_j имеет слагающие

$$X_{hj}, \; Y_{hj}, \; Z_{hj}$$

и так как это действие равно и прямо противоположно предыдущему, то будет

$$X_{jh} = -X_{hj}; \quad Y_{jh} = -Y_{hj}; \quad Z_{jh} = -Z_{hj}$$

Наконец проекции реакции связи

$$F_\alpha(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n) = 0$$

обозначим через

$$N_\alpha^{(h)}, \; P_\alpha^{(h)}, \; Q_\alpha^{(h)}$$

При этих обозначениях уравнения движения точек системы напишутся так:

$$\begin{aligned}
m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= X_e^{(1)} + \sum_j X_{j1} + \sum_\alpha N_\alpha^{(1)}\\
m_1\frac{d^2y_1}{dt^2} &= Y_e^{(1)} + \sum_j Y_{j1} + \sum_\alpha \\
m_1\frac{d^2z_1}{dt^2} &= Z_e^{(1)} + \sum_j Z_{j1} + \sum_\alpha Q_\alpha^{(1)}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
m_n\frac{d^2x_n}{dt^2} &= X_e^{(n)} + \sum_j X_{jn} + \sum_\alpha N_\alpha^{(n)}\\
m_n\frac{d^2y_n}{dt^2} &= Y_e^{(n)} + \sum_j Y_{jn} + \sum_\alpha P_\alpha^{(n)}\\
m_n\frac{d^2z_n}{dt^2} &= Z_e^{(n)} + \sum_j Z_{jn} + \sum_\alpha Q_\alpha^{(n)}
\end{aligned} \qquad (1)$$

Прежде всего, сличая эти уравнения с уравнениями (III) § 10, видим, что, например, в первом уравнении стоит сумма

$$\sum_\alpha N_\alpha^{(1)} = N_1^{(1)} + N_2^{(1)} + \ldots + N_k^{(1)}$$

в уравнениях же (III) § 10 стоит сумма

$$\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_k\frac{\partial F_k}{\partial x_1}$$

причем и та и другая сумма представляет то действие, которое оказывают связи на точку m_1, и нетрудно видеть, что так как первые части уравнения (III) и уравнения (I) одинаковы, то будет

$$N_1^{(1)} = \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1};\quad N_2^{(1)} = \lambda_1\frac{\partial F_2}{\partial x_1};\quad \ldots N_k^{(1)} = \lambda_1\frac{\partial F_k}{\partial x_1}, \qquad (2)$$

аналогичные равенства имеют место и для всех прочих слагающих и для всех точек.

Сложив почленно соответственные уравнения (1), получим

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{i=n} m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{i=n} X_e^{(i)} + \sum_{i=1}^{i=n}\left(\sum_\alpha N_\alpha^{(i)}\right)\\
\sum_{i=1}^{i=n} m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{i=n} Y_e^{(i)} + \sum_{i=1}^{i=n}\left(\sum_\alpha P_\alpha^{(i)}\right)\\
\sum_{i=1}^{i=n} m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{i=n} Z_e^{(i)} + \sum_{i=1}^{i=n}\left(\sum_\alpha Q_\alpha^{(i)}\right)
\end{aligned} \qquad (3)$$

Сумм, заключающих внутренние силы, мы не пишем, ибо они тождественно равны нулю, так как всякому члену X_{ji} есть равный по величине, но противоположный по знаку член X_{ij}.

Уравнения (3) выражают следующее свойство движения центра тяжести системы.

Обозначим координаты центра тяжести через x_0, y_0, z_0, тогда будет

$$\begin{aligned} Mx_0 &= \sum_i m_i x_i \\ My_0 &= \sum_i m_i y_i \\ Mz_0 &= \sum_i m_i z_i \end{aligned} \qquad (*)$$

где

$$M = \sum_i m_i$$

есть масса всей системы. Дифференцируя уравнения (*) по времени два раза, получим

$$\begin{aligned} M\frac{d^2x_0}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} \\ M\frac{d^2y_0}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} \\ M\frac{d^2z_0}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} \end{aligned}$$

и уравнения (3) напишутся

$$\begin{aligned} M\frac{d^2x_0}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{i=n} X_e^{(i)} + \sum_{i=1}^{i=n}\left(\sum_\alpha N_\alpha^{(i)}\right) \\ M\frac{d^2y_0}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{i=n} Y_e^{(i)} + \sum_{i=1}^{i=n}\left(\sum_\alpha P_\alpha^{(i)}\right) \\ M\frac{d^2z_0}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{i=n} Z_e^{(i)} + \sum_{i=1}^{i=n}\left(\sum_\alpha Q_\alpha^{(i)}\right) \end{aligned} \qquad (4)$$

Эти уравнения совершенно подобны уравнениям движения материальной точки, масса которой есть M и к которой была бы приложена сила, равная геометрической сумме (равнодействующей) главного вектора всех *внешних* сил, действующих на все точки системы, и главного вектора реакций связей.

Таким образом имеем следующий закон движения центра тяжести системы: *центр тяжести системы движется так, как двигалась бы материальная точка, масса коей равна массе всей системы, под действием главного вектора всех сил вместе с главным вектором реакций связей.*

Во многих случаях, в частности, когда связи системы состоят в том, что расстояния между точками системы неизменны (как для твердого тела), главный вектор реакций связей равен нулю.

В самом деле, неизменность расстояния, например, между точкою m_1 и m_2 выражается уравнением

$$F_1(x_1, \ldots z_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = -2(x_2 - x_1); \quad \frac{\partial F_1}{\partial y_1} = -2(y_2 - y_1); \quad \frac{\partial F_1}{\partial z_1} = -2(z_2 - z_1)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 2(x_2 - x_1); \quad \frac{\partial F_1}{\partial y_2} = 2(y_2 - y_1); \quad \frac{\partial F_1}{\partial z_1} = 2(z_2 - z_1)$$

в суммах все эти члены пропадают, тогда уравнения (4) примут вид

$$M\frac{d^2 x_0}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=n} X_e^{(i)}$$

$$M\frac{d^2 y_0}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=n} Y_e^{(i)} \qquad (4')$$

$$M\frac{d^2 z_0}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=n} Z_e^{(i)}$$

Эти уравнения выражают такое свойство: если главный вектор реакций связей равен нулю, то центр тяжести системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы, под действием силы, равной главному вектору всех внешних сил, действующих на все точки системы.

Уравнениям (4′) может быть придано и другое толкование; для простоты ограничимся тем случаем, когда главный вектор реакций связей равен нулю.

Имеем

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{dx_i}{dt}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{dy_i}{dt}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{dz_i}{dt}$$

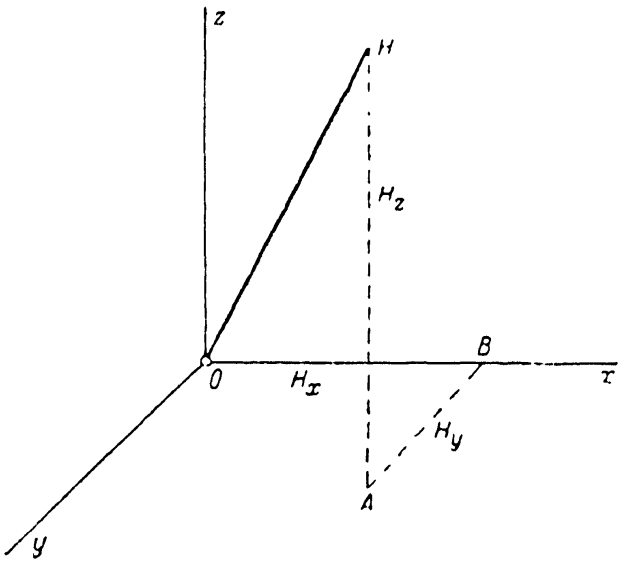
Припомним, что количеством движения материальной точки называется произведение массы этой точки на ее скорость, причем количество движения есть величина *векториальная*, т. е. ему приписывают направление — именно направление скорости. Отсюда понятно, что количество движения можно проектировать на любую ось и что проекция количества движения на какую-либо ось равна произведению из массы точки на проекцию ее скорости на эту ось.

Таким образом, проекции количества движения точки m_i суть

$$m_i\frac{dx_i}{dt},\quad m_i\frac{dy_i}{dt},\quad m_i\frac{dz_i}{dt}$$

Если взять вектор H, коего проекции на оси координат были бы (фиг. 15):

$$H_x=\sum_{i=1}^{i=n} m_i\frac{dx_i}{dt};\quad H_y=\sum_{i=1}^{i=n} m_i\frac{dy_i}{dt};\quad H_z=\sum_{i=1}^{i=n} m_i\frac{dz_i}{dt}$$



Фиг. 15.

то этот вектор, равный *геометрической* сумме векторов, представляющих количества движения каждой из точек системы, называется количеством движения всей системы, и предыдущие уравнения напишутся

$$\frac{dH_x}{dt}=\sum_{i=1}^{i=n} X_e^{(i)};$$

$$\frac{dH_y}{dt}=\sum_{i=1}^{i=n} Y_e^{(i)};\qquad (5)$$

$$\frac{dH_z}{dt}=\sum_{i=1}^{i=n} Z_e^{(i)}$$

Если вообразить, что из начала координат проведен луч, коего проекции на оси были бы H_x, H_y, H_z, то эти величины представили бы координаты конца этого луча. Производные $\frac{dH_x}{dt}$, $\frac{dH_y}{dt}$, $\frac{dH_z}{dt}$ представляют проекции скорости точки H (т. е. конца луча OH), и предыдущие уравнения показывают, что эти проекции скорости точки H равны соответствующим проекциям главного вектора сил, короче говоря: *скорость точки H — конца вектора, изображающего количество движения системы, по величине и направлению равна главному вектору внешних сил, действующих на систему, предполагая, что главный вектор реакций связей равен нулю.*

§ 15. Возьмем опять те же уравнения (1) § 14, но будем в них для краткости производные по времени обозначать значками, и суммы

$$\sum_\alpha N_\alpha^{(i)}, \quad \sum_\alpha P_\alpha^{(i)}, \quad \sum_\alpha Q_\alpha^{(i)}$$

обозначим просто $N^{(i)}$, $P^{(i)}$, $Q^{(i)}$, суммы

$$\sum_j X_{ji}, \quad \sum_j Y_{ji}, \quad \sum_j Z_{ji}$$

обозначим через $A^{(i)}$, $B^{(i)}$, $C^{(i)}$, тогда уравнения движения напишутся так:

$$\begin{aligned} m_i x_i'' &= X_e^{(i)} + A^{(i)} + N^{(i)} \\ m_i y_i'' &= Y_e^{(i)} + B^{(i)} + P^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \\ m_i z_i'' &= Z_e^{(i)} + C^{(i)} + Q^{(i)} \end{aligned}$$

Умножим первое уравнение на $-y_i$, второе — на x_i и сложим; получим, опуская для простоты письма значок i:

$$m(y''x - yx'') = (Y_e x - X_e y) + (Bx - Ay) + (Px - Ny)$$

Заметив, что

$$y''x - yx'' = (y'x - yx')' = \frac{d}{dt}(y'x - yx'),$$

получим

$$\frac{d}{dt}[m(y'x - yx')] = (Y_e x - X_e y) + (Bx - Ay) + (Px - Ny) \qquad (*)$$

Величина $m(y'x - yx') = my' \cdot x - mx' \cdot y$ представляет собою момент относительно оси z вектора, изображающего количество движения точки m, совершенно подобно тому как величина $Y_e x - X_e y$ представляет момент относительно той же оси силы, коей слагающие Y_e и X_e; величину $m(y'x - yx')$ называют поэтому моментом количества движения точки m относительно оси z.

Составим выражения, подобные (*), для всех точек системы и сложим их, увидим, что суммы, содержащие силы внутренние, тожественно обратятся в нуль, ибо каждому члену будет соответствовать член, равный и противоположный по знаку, тогда останется

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i(y_i' x_i - x_i' y_i) = \sum_{i=1}^{i=n}(Y_e^{(i)} x_i - X_e^{(i)} y_i) + \sum_{i=1}^{i=n}(P^{(i)} x_i - N^{(i)} y_i) \quad (1)$$

Совершенно подобным же образом получатся уравнения

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i(x_i' z_i - z_i' x_i) = \sum_{i=1}^{i=n}(X_e^{(i)} z_i - Z_e^{(i)} x_i) + \sum_{i=1}^{i=n}(N^{(i)} z_i - Q^{(i)} x_i) \quad (1')$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i(z_i' y_i - y_i' z_i) = \sum_{i=1}^{i=n}(Z_e^{(i)} y_i - Y_e^{(i)} z_i) + \sum_{i=1}^{i=n}(Q^{(i)} y_i - P^{(i)} z_i) \quad (1'')$$

В левой части этих равенств стоят производные по времени от суммы моментов количеств движения относительно осей координат, в правой — суммы моментов внешних сил относительно тех же осей и суммы моментов реакций связей. Совершенно подобно предыдущему увидим, что если связи состоят в том, что точки сохраняют неизменными взаимные расстояния (как в твердом теле), то суммы моментов реакций связей обращаются в нуль, и предыдущие уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i(y_i' x_i - x' y_i) &= \sum_{i=1}^{i=n}(Y_e^{(i)} x_i - X_e^{(i)} y_i) \\
\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i(x_i' z_i - z_i' x_i) &= \sum_{i=1}^{i=n}(X_e^{(i)} z_i - Z_e^{(i)} x_i) \qquad (2) \\
\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i(z_i' y_i - y_i' z_i) &= \sum_{i=1}^{i=n}(Z_e^{(i)} y_i - Y_e^{(i)} z_i)
\end{aligned}$$

Суммы, стоящие в правых частях этих равенств, представляют суммы моментов внешних сил относительно осей координат, или, как говорят, проекции главного момента сил на оси координат, подобно этому суммы в левых частях представляют проекции момента количеств движения системы на те же оси. Изображая и тот и другой момент вектором, имеющим соответствующие проекции, видим, что предыдущие равенства выражают такое свойство: *скорость точки, представляющей конец вектора, изображающего момент количеств движения системы, равна и параллельна вектору, изображающему главный момент внешних сил, действующих на систему; при этом предполагается, что главный момент реакций связей равен нулю.*

Эти два свойства движения системы называются законами количеств движения и моментов количеств движения; они нам понадобятся при составлении уравнений движения твердого тела, отнесенного к осям координат, движущимся как в самом теле, так и в пространстве.

§ 16. Перейдем теперь к составлению уравнений движения твердого тела и воспользуемся для этого второю Лангранжевой формой уравнений движения любой системы.

Мы рассматриваем твердое тело как систему множества частиц, принимаемых за материальные точки, расстояния между которыми сохраняются неизменными.

Из сказанного в § 1 видно, что положение твердого тела и всякой точки в нем определяется, если, взяв какие-либо неподвижные оси координат в пространстве $(O\xi\eta\zeta)$, принять центр тяжести G тела за начало координатных осей $Gxyz$, неизменно с телом связанных, и задать: 1) координаты ξ_0, η_0, ζ_0 точки G, т. е. центра тяжести тела, 2) три Эйлеровы угла ψ, φ, θ, определяющие положение осей $Gxyz$ относительно осей $G\xi_1\eta_1\zeta_1$, параллельных осям $O\xi\eta\zeta$ и проведенных через центр тяжести тела.

Эти шесть независимых друг от друга величин и представляют координатные параметры для твердого тела.

Итак, положим, что имеется твердое тело, положение коего определяется, как указано выше, и к этому телу приложены различные силы, заданные всеми своими элементами.

Как известно, все силы, приложенные к твердому телу, можно привести к одной силе (главный вектор сил) и к одной паре (главный момент сил). Положим, что такое приведение сделано, причем за начало координат в теле взята точка G — его центр тяжести.

Пусть F есть главный вектор сил и F_ξ, F_η, F_ζ — его проекции на неподвижные оси координат.

Пусть K есть главный момент сил и L, M, N — его проекции на оси Gx, Gy, Gz, неизменные в теле, и пусть M_0 есть масса всего тела.

Мы видели, что, когда начало подвижных координат взято в центре тяжести тела, живая сила его выражается так:

$$2T = M_0(\xi_0'^2 + \eta_0'^2 + \zeta_0'^2) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Dpq - \\ - 2Epr - 2Fqr \qquad (*)$$

где p, q, r — проекции угловой скорости на оси Gx, Gy, Gz, и A, B, C — моменты инерции относительно этих осей; D, E, F — центробежные моменты.

Элементарная работа сил, действующих на тело, выразится так:

$$\delta U = F_\xi \delta\xi_0 + F_\eta \delta\eta_0 + F_\zeta \delta\zeta_0 + \Psi\delta\psi + \Phi\delta\varphi + \Theta\delta\theta$$

первые три члена представляют работу главного вектора сил, т. е. их работу при поступательном перемещении тела, последние три — работу при вращательном перемещении.

По схеме (IV) § 12 Лангранжа мы можем сразу написать три уравнения, определяющие поступательное движение тела, это будут уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_0} = F_\xi$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \eta_0} = F_\eta$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \zeta_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \zeta_0} = F_\zeta$$

которые по выполнении дифференцирований примут вид

$$M_0 \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} = F_\xi$$
$$M_0 \frac{d^2 \eta_0}{dt^2} = F_\eta \qquad (1)$$
$$M_0 \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2} = F_\zeta$$

Эти уравнения, очевидно, представляют движение центра тяжести тела.

Остается составить уравнения вращательного движения тела около его центра тяжести.

Эти уравнения напишутся по схеме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = \Psi$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \Phi \qquad (2)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \Theta$$

причем T дается формулой (*), величины же p, q, r, в эту формулу входящие, выражаются так (§ 6, 2):

$$p = \psi' \sin\varphi \sin\theta + \theta' \cos\varphi$$
$$q = \psi' \cos\varphi \sin\theta - \theta' \sin\varphi \qquad (3)$$
$$r = \psi' \cos\theta + \varphi'$$

Заметив, что ось вращения φ' совпадает с осью Gz, видим, что при бесконечно-малом перемещении $\delta\varphi$ совершает работу лишь пара N, лежащая в плоскости Gxy, и элементарная работа этой пары будет $N\delta\varphi$, следовательно,

$$\Phi = N$$

Значит, не составляя пока других выражений, мы можем писать

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = N \qquad (**)$$

Но

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \varphi'} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \varphi'} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \varphi'} = \frac{\partial T}{\partial r}$$

ибо

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi'} = 0; \quad \frac{\partial q}{\partial \varphi'} = 0; \quad \frac{\partial r}{\partial \varphi'} = 1$$

Затем

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \varphi} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \varphi} = q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q}$$

ибо

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \psi' \cos\varphi \sin\theta - \theta' \sin\varphi = q$$
$$\frac{\partial q}{\partial \varphi} = -\psi' \sin\varphi \sin\theta - \theta' \cos\varphi = -p$$
$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = 0$$

Таким образом, подставляя в формулу (**), имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) + q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q} = N = \Sigma(xY - yX) \tag{4}$$

где N есть момент всех действующих сил относительно оси Gz, т. е. той, проекция угловой скорости на которую есть r; заметив это, можем остальные два уравнения написать простою заменою букв, и у нас будет

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) + p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p} &= M = \Sigma(zX - xZ) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) + r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r} &= L = \Sigma(yZ - zY) \end{aligned} \tag{4'}$$

В том случае, когда за оси координат приняты главные оси инерции тела, предыдущие уравнения принимают более простой вид, а именно, живая сила будет

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + M_0(\xi_0'^2 + \eta_0'^2 + \zeta_0'^2) \tag{5}$$

и уравнения вращательного движения тела будут

$$\begin{aligned} C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= N = \Sigma(xY - yX) \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= M = \Sigma(zX - Xz) \\ A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= L = \Sigma(yZ - zY) \end{aligned} \tag{6}$$

причем

$$\begin{aligned} p &= \psi' \sin\varphi \sin\theta + \theta' \cos\varphi \\ q &= \psi' \cos\varphi \sin\theta - \theta' \sin\varphi \\ r &= \psi' \cos\theta + \varphi' \end{aligned} \tag{3}$$

Эти шесть уравнений называются Эйлеровыми уравнениями вращательного движения твердого тела.

В том случае, когда два главные момента инерции между собою равны, выгодно взять за ось z, при вышеуказанном выборе Эйлеровых углов, ось симметрии тела, тогда будет

$$A = B$$

и уравнения вращательного движения примут вид

$$\begin{aligned} C\frac{dr}{dt} &= N = \Sigma(xY - yX) \\ A\frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= M = \Sigma(zX - Xz) \\ A\frac{dp}{dt} + (C - A)qr &= L = \Sigma(yZ - zY) \end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что в этом случае живая сила будет выражаться так:

$$2T = M_0(\xi_0'^2 + \eta_0'^2 + \zeta_0'^2) + A(p^2 + q^2) + Cr^2 =$$

$$= M_0(\xi_0'^2 + \eta_0'^2 + \zeta_0'^2) + A(\psi'^2 \sin^2\theta + \theta'^2) + C(\psi' \cos\theta + \varphi')^2$$

и не содержит явно самих переменных ψ и φ; тогда

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0 \text{ и } \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

и Лагранжевы уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right) &= \Psi \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\right) &= \Phi \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= \Theta. \end{aligned}$$

§ 17. Мы видели в § 14, что при рассмотрении движения системы имеют важное значение количество движения системы и момент количеств движения, поэтому покажем, каким образом эти величины выражаются для твердого тела.

Чтобы получить количество движения тела, надо составить его проекции на оси координат, ибо количество движения есть величина векториальная, т. е. имеет не только величину, но и направление.

Если обозначим через V_x, V_y, V_z проекции на оси $Gxyz$ скорости точки, коей координаты суть x, y, z, то, заметив, что проекции скорости точки G на оси ξ, η, ζ суть

$$\xi_0', \ \eta_0', \ \zeta_0'$$

проекции же вращательной скорости на оси $Gxyz$ суть

$$\begin{aligned} v_x &= qz - ry \\ v_y &= rx - pz \\ v_z &= py - qx \end{aligned} \tag{1}$$

следовательно будет

$$V_x = a_1 \xi_0' + b_1 \eta_0' + c_1 \zeta_0' + qz - ry$$

Умножив это выражение на массу m частицы и взяв сумму для всех частиц тела, получим проекцию количества движения тела на ось Ox, именно будет

$$H_x = \Sigma m V_x = M_0 (a_1 \xi_0' + b_1 \eta_0' + c_1 \zeta_0') + q\Sigma mz - r\Sigma my$$

но когда за начало координат $Gxyz$ взят центр тяжести тела, то

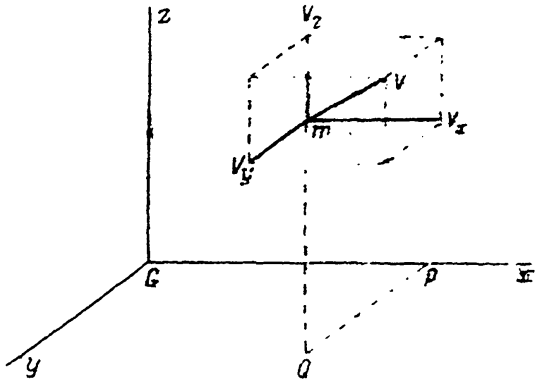
$$\Sigma mz = 0 \text{ и } \Sigma my = 0$$

тогда, обратив внимание, что величина $a_1 \xi_0' + a_2 \eta_0' + a_3 \zeta_0'$ есть проекция скорости V_0 центра тяжести тела на ось Gx, т. е. $V_0 \cos(\widehat{V_0 x})$, получим

$$H_x = M_0 V_0 \cos(\widehat{V_0 x})$$

и точно так же

$$H_y = M_0 V_0 \cos(\widehat{V_0 y})$$
$$H_z = M_0 V_0 \cos(\widehat{V_0 z})$$



Фиг. 16.

Но $M_0 V_0$ есть количество движения точки, масса которой есть M_0, т. е. равна массе тела, и скорость которой есть V_0, т. е. скорость центра тяжести тела. Таким образом мы видим, что количество движения тела не зависит от формы и распределения масс в теле, а по величине и направлению равно произведению массы тела на скорость его центра тяжести.

Составим теперь выражения момента количеств движения относительно осей Gx, Gy, Gz.

Возьмем, например, ось Gx и какую-либо частицу m, коей координаты x, y, z (фиг. 16).

Пусть скорость этой частицы есть V, и проекции этой скорости на оси координат пусть будут

$$V_x,\ V_y,\ V_z$$

тогда проекции, иначе составляющие количества движения mV частицы m, параллельные осям координат, суть

$$mV_x,\ mV_y,\ mV_z$$

момент вектора mV относительно оси Gx, подобно моменту силы, выражается так:

$$mV_z \cdot y - mV_y \cdot z = m(V_z y - V_y z)$$

и точно так же

$$V_y = \xi_0' a_2 + \eta_0' b_2 + \zeta_0' c_2 + rx - pz$$
$$V_z = \xi_0' a_3 + \eta_0' b_3 + \zeta_0' c_3 + py - qx$$

Составив выражение $V_z y - V_y z$, умножив его на m и взяв сумму для всех частиц тела, получим момент количеств движения около оси Gx; обозначая этот момент через S_x, увидим, что все члены, содержащие множители ξ_0', η_0', ζ_0', пропадут, ибо будут заключать один из множителей

$$\Sigma my = 0 \quad \text{и} \quad \Sigma mz = 0$$

и остаются только члены, содержащие p, q, r, именно будет

$$S_x = p\Sigma m(y^2 + z^2) - q\Sigma mxy + r\Sigma mxz = Ap - Dq - Er$$

пользуясь обозначениями § 13 для момента инерции и центробежных моментов.

Обратив внимание на выражение живой силы, видим, что

$$S_x = \frac{\partial T}{\partial p} \tag{2}$$

Значит, можно сразу написать

$$\begin{aligned} S_y &= \frac{\partial T}{\partial q} = Bq - Dp - Fr \\ S_z &= \frac{\partial T}{\partial r} = Cr - Ep - Fq \end{aligned} \tag{2'}$$

В том случае, когда за оси $Gxyz$ приняты главные оси инерции тела, будет

$$D = 0; \quad E = 0; \quad F = 0$$

и предыдущие формулы принимают следующий простой вид:

$$\begin{aligned} S_x &= Ap \\ S_y &= Bq \\ S_z &= Cr \end{aligned} \tag{3}$$

Полный момент количеств движения

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \tag{4}$$

и направление его определяются следующими косинусами углов с осями $Gxyz$:

$$\begin{aligned} \cos(\hat{S}x) &= \frac{S_x}{S} \\ \cos(\hat{S}y) &= \frac{S_y}{S} \\ \cos(\hat{S}z) &= \frac{S_z}{S} \end{aligned} \tag{5}$$

Для главных осей инерции будем иметь

$$S=\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2} \tag{6}$$

$$\cos(\hat{Sx})=\frac{Ap}{S}$$

$$\cos(\hat{Sy})=\frac{Bq}{S} \tag{6'}$$

$$\cos(\hat{Sz})=\frac{Cr}{S}$$

Во всех этих формулах перед корнем надо брать знак +, т. е. считать величину S существенно положительной, тогда знаки косинусов будут определяться знаками S_x, S_y, S_z или Ap, Bq, Cr, т. е. знаками p, q, r, ибо величины A, B, C положительные.

Обратим внимание на ошибку, которую иногда делают: для живой силы мы имели выражение

$$T=\frac{1}{2}\omega^2 I$$

где I — момент инерции тела около оси вращения и ω — угловая скорость его, но было бы ошибочно писать вообще для момента количеств движения формулу

$$S=I\omega$$

эта формула имеет место только, если ось вращения совпадает с одною из главных осей инерции тела.

§ 18. Закон количеств движения и закон моментов количеств движения, которые выражены в §§ 14 и 15, дают возможность составлять уравнения движения твердого тела почти без вычислений и притом для каких угодно координатных осей, как неизменно связанных с телом, так и движущихся относительно тела.

Возьмем случай осей неподвижных в теле, совпадающих с главными осями инерции тела.

Мы имеем следующие выражения проекций момента количеств движения

$$Ap,\ Bq,\ Cr$$

таким образом, координаты точки S — конца вектора, представляющего момент количества движения тела, будут

$$\bar{x}=Ap;\quad \bar{y}=Bq;\quad \bar{z}=Cr$$

Если бы вектор не изменялся, т. е. координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ были бы постоянные, то проекции скорости точки S на оси Gx, Gy, Gz были бы

$$v_x=q\bar{z}-r\bar{y}$$
$$v_y=r\bar{x}-p\bar{z}$$
$$v_z=p\bar{y}-q\bar{x}$$

но сам вектор S изменяется с течением времени, и проекции на те же оси скорости перемещения точки S вследствие этого изменения будут

$$\frac{d\bar{x}}{dt}, \frac{d\bar{y}}{dt}, \frac{d\bar{z}}{dt}$$

эти величины и надо приложить к предыдущим, и полученные выражения уравнять проекциями главного момента сил, т. е. L, M, N. Таким образом, будет

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} + q\bar{z} - r\bar{y} &= L \\ \frac{d\bar{y}}{dt} + r\bar{x} - p\bar{z} &= M \\ \frac{dz}{dt} + p\bar{y} - q\bar{x} &= N \end{aligned}$$

Подставляя вместо $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ их величины, имеем

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr &= L \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)pr &= M \\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq &= N \end{aligned} \qquad (1)$$

т. е. уравнения Эйлера, которые мы имели и раньше, выведенные другим образом.

§ 19. Нам постоянно придется иметь дело с дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2h\frac{dy}{dt} + n^2y = f(t) \qquad (1)$$

которые, обозначая производные значками, мы будем писать так:

$$y'' + 2hy' + n^2y = f(t) \qquad (2)$$

В этом уравнении коэффициенты h и k мы будем считать заданными постоянными, $f(t)$ — заданной функцией переменной независимой t, которая будет представлять время.

Соответствующее уравнению (1) уравнение без последнего члена есть

$$u'' + 2hu' + n^2u = 0 \qquad (3)$$

Положив

$$u = e^{-ht}v$$

где v — новая неизвестная, мы приведем уравнение (3) к такому:

$$v'' + (n^2 - h^2)v = 0 \qquad (4)$$

Уравнение (1) подобною же подстановкою

$$y = e^{-ht} z$$

приводится к виду

$$z'' + (n^2 - h^2) z = e^{ht} f(t) \qquad (4')$$

В том случае, когда

$$n^2 - h^2 > 0$$

который постоянно будет иметь место в наших задачах, полагаем

$$n^2 - h^2 = n_1^2$$

так что уравнение (3) будет

$$v'' + n_1^2 v = 0 \qquad (3')$$

имеющее общий интеграл

$$v = C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t \qquad (5)$$

причем C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а так как

$$u = e^{-ht} v$$

то общий интеграл уравнения

$$u'' + 2hu' + n^2 v = 0 \qquad (2')$$

есть

$$u = e^{-ht} (C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t) \qquad (6)$$

Положив для краткости письма

$$e^{ht} f(t) = F(t)$$

применим для нахождения частного решения уравнения

$$z'' + n_1^2 z = F(t) \qquad (4'')$$

способ изменения постоянных произвольных, состоящий в следующем: будем искать это частное решение

$$z = Z$$

под видом

$$Z = A \cos n_1 t + B \sin n_1 t \qquad (7)$$

т. е. под тем же самым, как и общий интеграл уравнения без последнего члена, но величины A и B будем считать не постоянными, а неизвестными функциями переменной t. Этих функций, таким образом, будет *две*, величина же Z должна удовлетворять уравнению (4'), зна-

чит A и B будут подчинены одному необходимому условию, следовательно можно их подчинить еще одному какому угодно условию.

Лагранж, которому принадлежит излагаемый метод, взял за это второе условие такое: *производная Z' при переменных A и B должна выражаться так же, как и при A и B постоянных.*

При A и B постоянных будет

$$Z' = -n_1 A \sin n_1 t + n_1 B \cos n_1 t \tag{8}$$

при переменных будет

$$Z' = -n_1 A \sin n_1 t + n_1 B \cos n_1 t + A' \cos n_1 t + B' \sin n_1 t \tag{9}$$

следовательно должно быть

$$A' \cos n_1 t + B' \sin n_1 t = 0 \tag{10}$$

Затем будет

$$Z'' = -n_1^2 A \cos n_1 t - n_1^2 B \sin n_1 t - n_1 A' \sin n_1 t + n_1 B' \cos n_1 t$$

вместе с тем

$$n_1^2 Z = n_1^2 A \cos n_1 t + n_1^2 B \sin n_1 t$$

следовательно

$$Z'' + n_1^2 Z = -n_1 A' \sin n_1 t + n_1 B' \cos n_1 t$$

а так как Z должно удовлетворять уравнению

$$Z'' + n_1^2 Z = F(t)$$

то должно быть

$$-n_1 A' \sin n_1 t + n_1 B' \cos n_1 t = F(t) \tag{11}$$

Таким образом, для определения неизвестных функций A и B имеем уравнения (10) и (11), из которых следует

$$A' = -\frac{1}{n_1} F(t) \sin n_1 t; \qquad B' = \frac{1}{n_1} F(t) \cos n_1 t$$

значит,

$$A = -\frac{1}{n_1} \int_a^t F(t) \sin n_1 t \, dt; \qquad B = \frac{1}{n_1} \int_a^t F(t) \cos n_1 t \, dt \tag{12}$$

где a есть какое угодно *заданное* число, которое можно впоследствии выбрать так, чтобы выкладка становилась проще.

Написав, во избежание неясности, под знаком интеграла вместо буквы t букву ξ, получим

$$Z = \frac{1}{n_1} \sin n_1 t \cdot \int_a^t F(\xi) \cos n_1 \xi \, d\xi - \frac{1}{n_1} \cos n_1 t \cdot \int_a^t F(\xi) \sin n_1 \xi \, d\xi \tag{13}$$

или иначе

$$Z = \frac{1}{n_1} \int_a^t F(\xi) \sin n_1 (t - \xi)\, d\xi \qquad (13')$$

тогда будем иметь общий интеграл уравнения (4') в таком виде:

$$z = C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t + \frac{1}{n_1} \int_a^t F(\xi) \sin n_1 (t - \xi)\, d\xi \qquad (14)$$

отсюда следует общий интеграл уравнения (1),

$$y = e^{-ht} (C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t) + \frac{1}{n_1} \int_a^t e^{-h(t-\xi)} f(\xi) \sin n_1 (t - \xi)\, d\xi \qquad (15)$$

причем

$$n_1^2 = n^2 - h^2 > 0$$

Если бы было

$$n^2 - h^2 < 0$$

то, положив

$$n^2 - h^2 = -n_2^2$$

иначе

$$n_2^2 = h^2 - n^2$$

и вводя вместо функций тригонометрических так называемые гиперболические, определяемые равенствами

$$\cos \text{hyp}\, n_2 t = \text{ch}\, n_2 t = \frac{e^{n_2 t} + e^{-n_2 t}}{2}$$

$$\sin \text{hyp}\, n_2 t = \text{sh}\, n_2 t = \frac{e^{n_2 t} - e^{-n_2 t}}{2}$$

получим

$$y = e^{-ht} (C_1 \text{ch}\, n_2 t + C_2 \text{sh}\, n_2 t) + \frac{1}{n_2} \int_a^t e^{-h(t-\xi)} \text{sh}\, n_1 (t - \xi) f(\xi)\, d\xi \qquad (16)$$

На выводе этой формулы останавливаться не будем, ибо во всех случаях, с которыми нам придется иметь дело, будет

$$n^2 - h^2 > 0$$

Наконец, если бы было

$$n^2 - h^2 = 0$$

то уравнение (3') будет

$$v'' = 0$$

его общий интеграл есть

$$v = C_1 + C_2 t$$

соответственно чему будет

$$y = e^{-ht}(C_1 + C_2 t) + \int_a^t e^{-h(t-\xi)} f(\xi)(t-\xi) \cdot d\xi \qquad (17)$$

что легко получается и из общего выражения (15), приняв n_1 бесконечномалым и переходя к пределу $n_1 = 0$.

Этот случай у нас также встречаться не будет.

§ 20. Формулы (12)—(17) предыдущего параграфа — совершенно общие и имеют место при любой функции $f(\xi)$, но в том частном случае, с которым нам придется главным образом иметь дело, нахождение частного решения может быть выполнено проще, нежели по общим формулам, воспользовавшись способом неопределенных коэффициентов.

Так, в нашем случае функция $f(t)$ будет часто вида

$$f(t) = A \sin(kt + \gamma)$$

и уравнение (1) будет вида

$$y'' + 2hy' + n^2 y = A \sin(kt + \gamma) \qquad (1)$$

Будем искать частное решение Y этого уравнения под видом

$$Y = M \sin(kt + \gamma) + N \cos(kt + \gamma)$$

где M и N — неизвестные *постоянные* коэффициенты, которые определим так, чтобы величина Y удовлетворяла уравнению (1) при *всяком значении* t.

Подставляя в уравнение (1) вместо y величину Y и собирая члены с косинусом и синусом аргумента $kt + \alpha$, получим

$$[(n^2 - k^2)M - 2khN]\sin(kt + \gamma) +$$

$$+ [2khM + (n^2 - k^2)N]\cos(kt + \gamma) = A \sin(kt + \gamma)$$

Чтобы это равенство имело место при всяком значении t, необходимо, чтобы было

$$(n^2 - k^2)M - 2hkN = A$$
$$2khM + (n^2 - k^2)N = 0$$

откуда следует

$$M = \frac{n^2 - k^2}{(n^2 - k^2)^2 + 4k^2h^2} A$$

$$N = -\frac{2hk}{(n^2 - k^2)^2 + 4k^2h^2} A$$

и значит

$$Y = \frac{A}{(n^2 - k^2) + 4k^2h^2}[(n^2 - k^2)\sin(kt + \gamma) - 2hk\cos(kt + \gamma)]$$

Пусть будет

$$n^2 - k^2 = B\cos\delta$$
$$-2hk = B\sin\delta$$

так что

$$B = \sqrt{(n^2-k^2)^2 + 4h^2k^2}$$

$$\cos\delta = \frac{n^2-k^2}{B}; \qquad \sin\delta = -\frac{2hk}{B}$$

и условимся брать угол δ *положительным*, так что

$$0 < \delta < 360°$$

соответственно знакам косинуса и синуса тогда будет

$$Y = \frac{A}{\sqrt{(n^2-k^2)^2 + 4k^2h^2}}\sin[kt + \gamma + \delta]$$

Таким образом, общий интеграл уравнения

$$y'' + 2hy' + n^2y = A\sin(kt+\gamma) \tag{1}$$

будет

$$y = e^{-ht}(C_1\cos n_1 t + C_2\sin n_1 t) + Y \tag{2}$$

причем

$$Y = \frac{A}{(n^2-k^2)^2 + 4k^2h^2}[(n^2-k^2)\sin(kt+\gamma) - 2hk\cos(kt+\gamma)] = \frac{A}{\sqrt{(n^2-k^2)^2+4k^2h^2}}\sin[kt+\gamma+\delta] \tag{3}$$

где

$$\cos\delta = \frac{n^2-k^2}{\sqrt{(n^2-k^2)^2+4k^2h^2}}; \qquad \sin\delta = \frac{-2hk}{\sqrt{(n^2-k^2)^2+4k^2h^2}} \tag{4}$$

$$0 < \delta < 360°$$

В частном случае, когда

$$h = 0$$

уравнение (1) имеет вид

$$y'' + n^2y = A\sin(kt+\gamma) \tag{1'}$$

тогда будет

$$y = C_1\cos nt + C_2\sin nt + \frac{A}{n^2-k^2}\sin(kt+\gamma) \tag{2'}$$

как это следует из общей формулы, а также без труда получается непосредственно.

Заметим, что это решение не имеет места в том случае, когда

$$k = n$$

ибо тогда знаменатель в последнем члене обращается в нуль.

В этом случае надо искать частное решение вида

$$Y = Pt\cos(nt + \gamma) \qquad (*)$$

где P — пока неизвестная постоянная. Составив производные, имеем

$$\begin{aligned} Y' &= P\cos(nt+\gamma) - nPt\sin(nt+\gamma) \\ Y'' &= -2nP\sin(nt+\gamma) - n^2 Pt\cos(nt+\gamma) \end{aligned} \qquad (**)$$

подставляя значения (*) и (**) в предложенное уравнение, которое в рассматриваемом случае будет

$$y'' + n^2 y = A\sin(nt+\gamma) \qquad (***)$$

получим для определения P равенство

$$-2nP = A$$

из которого следует

$$P = -\frac{1}{2n}A$$

таким образом, общий интеграл уравнения (***) есть

$$y = C_1\cos nt + C_2\sin nt - \frac{A}{2n}t\cos(nt+\gamma). \qquad (2'')$$

§ 21. В задачах механики обыкновенно требуется не только найти общий интеграл, но и определить входящие в состав его произвольные постоянные C_1 и C_2 так, чтобы были удовлетворены так называемые начальные условия, которые состоят в том, чтобы величина y в начальный момент $t = t_0$ принимала заданное значение y_0 и ее производная принимала также заданное значение y'_0.

Выкладки упрощаются, если время считать с начального момента, т. е. полагать $t_0 = 0$.

Начнем с простейшего случая

$$y'' + n^2 y = 0 \qquad (1)$$

и начальных условий: при $t = 0$ должно быть

$$y = y_0; \quad y' = y'_0 \qquad (2)$$

Общий интеграл уравнения (1) есть

$$y = C_1\cos nt + C_2\sin nt$$

полагая $t=0$, получаем для определения C_1 равенство

$$y_0=C_1$$

Составив производную

$$y'=-nC_1\sin nt+nC_2\cos nt$$

положив в ней $t=0$ и уравняв заданному значению y'_0, получаем

$$y'_0=nC_2$$

откуда

$$C_2=\frac{1}{n}y'_0$$

Таким образом, решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2), есть

$$y=y_0\cos nt+\frac{1}{n}y'_0\sin nt \qquad (3)$$

Часто за начальный момент берут тот, когда y имеет свое наибольшее значение, например

$$y=a$$

Ясно, что в этот момент

$$y'=0$$

так что начальные условия будут: при $t=0$ должно быть

$$y=a \quad \text{и} \quad y'=0$$

и, значит, решение, удовлетворяющее этим начальным условиям, будет

$$y=a\cos nt$$

Положим

$$n=\frac{2\pi}{\tau}$$

тогда формула (3) примет вид

$$y=y_0\cos\frac{2\pi t}{\tau}+\frac{1}{n}y'_0\sin\frac{2\pi t}{\tau} \qquad (4)$$

и формула (4) будет

$$y=a\cos\frac{2\pi t}{\tau} \qquad (5)$$

Так как период функций $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ есть 2π, то период функций

$$\cos\frac{2\pi t}{\tau} \quad \text{и} \quad \sin\frac{2\pi t}{\tau}$$

есть τ, так что в моменты

$$t=0,\ \tau,\ 2\tau,\ 3\tau,\ \ldots$$

величина y и ее производная принимают те же самые значения.

Когда y выражается формулой (5), эти значения будут

$$y=a;\quad y'=0$$

При значениях

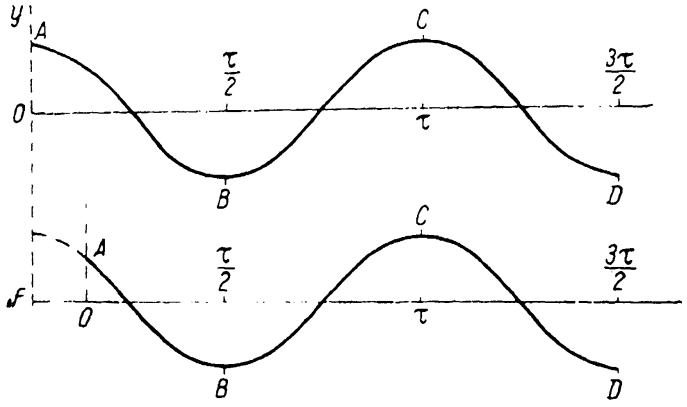
$$t=\frac{\tau}{2},\quad \frac{3\tau}{2},\quad \frac{5\tau}{2},\ \ldots$$

аргумент $\frac{2\pi t}{\tau}$ будет иметь значения

$$\pi,\ 3\pi,\ 5\pi,\ \ldots$$

так что будет

$$\cos\frac{2\pi t}{\tau}=-1;\quad \sin\frac{2\pi t}{\tau}=0$$



Фиг. 17.

значит в эти моменты будет

$$y=-a;\quad y'=0$$

т. е. величина y будет достигать своего крайнего отрицательного значения.

Графически изменяемость величины y с течением времени представляется верхним чертежом (фиг. 17), изображающим так называемое простое гармоническое колебательное движение с амплитудою a и периодом τ.

Положим в формуле (4):

$$y_0=b\cos\beta$$

$$\frac{y_0'}{n}=-b\sin\beta$$

так что, взяв

$$b=+\sqrt{y_0^2+\left(\frac{y_0'}{n}\right)^2}$$

имеем

$$\cos\beta=\frac{y_0}{b};\qquad \sin\beta=-\frac{y_0'}{nb}. \tag{6}$$

Этими формулами величина b и угол β *вполне* определяются, т. е. по знакам косинуса и синуса будет известна и та четверть окружности, в которой надо брать угол β. Условимся этот угол всегда брать *положительным*, считая его от 0 до 360°, тогда будет

$$y=b\cos(nt+\beta)=b\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}+\beta\right) \tag{7}$$

и движение представится нижним чертежом (фиг. 17), на котором отложено

$$OF = -\tau \cdot \frac{\beta}{2\pi}$$

и, приняв точку F как бы за начало, построена та же синусоида, как для первого случая.

Величина β называется „начальною фазою“, весь же аргумент

$$\frac{2\pi t}{\tau} + \beta$$

— фазою в момент t.

Перейдем теперь к уравнению

$$y'' + 2hy' + n^2 y = 0 \tag{8}$$

и пусть начальные условия будут попрежнему: при $t=0$ должно быть

$$y = y_0 \quad \text{и} \quad y' = y_0' \tag{9}$$

Мы видели, что общий интеграл этого уравнения есть

$$y = e^{-ht}(C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t)$$

причем по предположению

$$n_2 - h^2 = n_1^2 > 0$$

Имеем

$$y' = -he^{-ht}(C_1 \cos n_1 t + C_2 \sin n_1 t) + e^{-ht}(-n_1 C_1 \sin n_1 t + n_1 C_2 \cos n_1 t)$$

таким образом для определения значений C_1 и C_2 получим уравнения

$$y_0 = C_1$$
$$y_0' = -hC_1 + n_1 C_2$$

из которых следует

$$C_1 = y_0$$
$$C_2 = \frac{y_0' + hy_0}{n_1}$$

и решение, удовлетворяющее начальным условиям, есть

$$y = e^{-ht}\left[y_0 \cos n_1 t + \frac{y_0' + hy_0}{n_1} \sin n_1 t\right] \tag{10}$$

которое при $y_0' = 0$ будет

$$y = y_0 e^{-ht}\left[\cos n_1 t + \frac{h}{n_1} \sin n_1 t\right] \tag{10'}$$

Положим

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{n_1} \tag{11}$$

тогда будет

$$y = \frac{y_0}{\cos\beta} e^{-ht} \cos(n_1 t - \beta) \tag{12}$$

Затем имеем

$$y' = -\frac{y_0}{\cos\beta} e^{-ht} [h\cos(n_1 t - \beta) + n_1 \sin(n_1 t - \beta)] =$$
$$= -\frac{n_1 y_0}{\cos\beta} e^{-ht} [\operatorname{tg}\beta \cos(n_1 t - \beta) + \sin(n_1 t - \beta)] =$$
$$= -\frac{n_1 y_0}{\cos^2\beta} e^{-ht} \cdot \sin n_1 t$$

Отсюда видно, что

$$y' = 0$$

в моменты

$$t = 0, \quad \frac{\pi}{n_1}, \quad \frac{2\pi}{n_1}, \ldots \frac{k\pi}{n_1}$$

или, положив

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{n_1}$$

в моменты

$$t = 0, \quad \frac{\tau}{2}, \quad \tau_1, \quad \frac{3\tau_1}{2}, \ldots k\frac{\tau_1}{2}$$

Соответствующие значения y будут

$$y_0, \quad -y_0 e^{-\frac{h\tau_1}{2}}, \quad y_0 e^{-h\tau_1}, \quad -y_0 e^{-\frac{3h\tau_1}{2}}, \ldots (-1)^k y_0 e^{-k\frac{h\tau_1}{2}}$$

т. е. амплитуды размахов в ту и другую сторону убывают в геометрической прогрессии, знаменатель коей есть

$$e^{-\frac{h\tau_1}{2}}$$

так что величина y представится графически таким чертежом (фиг. 18), при составлении которого принято

$$e^{-\frac{h\tau_1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Заметим, что уменьшение амплитуды размахов, или, как его зовут, „затухание“, совершается весьма быстро даже при значениях h, малых по сравнению с n.

В самом деле, пусть, например,

$$h=\frac{1}{10}n$$

тогда будет

$$n_1=\sqrt{n^2-h^2}=n\sqrt{1-\frac{1}{100}}\approx n\left(1-\frac{1}{200}\ldots\right)$$

поэтому, если мы положим

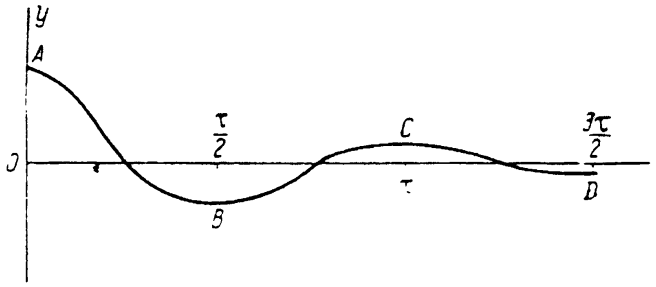
$$\tau=\frac{2\pi}{n}$$

а также

$$\tau_1=\frac{2\pi}{n_1}$$

то будет

$$\frac{\tau_1}{\tau}=\frac{n}{n_1}\approx\frac{1}{1-\frac{1}{200}}\approx 1+\frac{1}{200}$$



Фиг. 18

т. е. период возрастет на $\frac{1}{200}$ своей величины, между тем как будет

$$\tau_1\cdot\frac{h}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{n_1}\cdot\frac{n}{10}\approx\frac{\pi}{10}\left(1+\frac{1}{200}\right)\approx\frac{\pi}{10}$$

т. е.

$$e^{-h\frac{\tau_1}{2}}=e^{-\frac{\pi}{10}}\approx\frac{1}{1.37}\approx 0.73\approx\frac{3}{4}$$

и если, например, было

$$y_0=10^\circ$$

то последовательные размахи будут

$$10^\circ,\quad -7^\circ5,\quad +5^\circ6,\quad -4^\circ2,\quad +3^\circ1 \text{ и т. д.}$$

Если, например, будет

$$h=0.22\,n$$

то

$$n_1=n\sqrt{1-0.0484}=n\,(1-0.0242\ldots)\approx n\left(1-\frac{1}{40}\right)$$

т. е. период изменится всего на 2.5% своей величины, затухание же размахов будет итти в прогрессии

$$e^{-\frac{h\tau_1}{2}}=\frac{1}{2}$$

т. е. при начальном размахе в 10° их последовательность будет такова:

$$10°,\quad -5°,\quad +2°.5,\quad -1°.25,\quad +0°.62,\quad -0°.31 \text{ и т. д.}$$

Если взять

$$h=\frac{1}{2}n$$

то будет

$$n_1=n\sqrt{1-\frac{1}{4}}=n\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0.87\,n$$

$$\tau_1=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot n=1.16\,\tau$$

$$e^{-\frac{h\tau_1}{2}}=\frac{1}{38.5}=0.026$$

и при начальном размахе, например, в 10° их последовательная величина будет

$$10°,\quad -0°.26,\quad +0°.07 \text{ и т. д.}$$

что служит ясным примером быстроты погашения.

Наконец, если взять

$$h=\frac{\sqrt{3}}{2}n$$

то будет

$$n_1=\frac{1}{2}n;\quad \tau_1=2\tau$$

$$e^{-\frac{h\tau_1}{2}}=250$$

так что последовательные размахи были бы

$$10°,\quad -0°.04,\quad 0°.0001$$

т. е. размахи почти „апериодические“.

Такая величина погашения во многих случаях практически достижима без больших затруднений.

Для быстрого расчета заметим следующие данные:

$$\lg e^{\pi}=1.3644$$
$$e^{\pi}=23.14$$

§ 22. Колебания, рассмотренные в предыдущем параграфе, происходят лишь вследствие начального отклонения колеблющегося тела от его положения равновесия ($y=0$) и сообщенной ему в начальный момент скорости, *без действия внешних сил*. Такие колебания называются *свободными*.

В том же случае, когда на тело действуют внешние силы, изменяющиеся заданным образом с течением времени, то уравнения движения в нашем случае будут вида

$$y'' + n^2 y = f(t) \tag{1}$$

и

$$y'' + 2hy' + n^2 y = f(t) \tag{2}$$

для которых в §§ 19 и 20 составлены общие интегралы как для произвольной функции $f(t)$, так и для случая, когда эта функция вида

$$f(t) = A \sin(kt + \gamma)$$

этот последний случай и разберем подробнее.

Мы видели, что для уравнения

$$y'' + n^2 y = A \sin(kt + \gamma)$$

общий интеграл есть

$$y = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt + \frac{A}{n^2 - k^2} \sin(kt + \gamma)$$

При начальных условиях: в момент $t = 0$ должно быть

$$y = y_0, \quad y' = y_0'$$

имеем для определения постоянных произвольных C_1 и C_2 уравнения

$$y_0 = C_1 + \frac{A}{n^2 - k^2} \sin\gamma$$

$$y_0' = nC_2 + \frac{k}{n^2 - k^2} A \cos\gamma$$

из которых следует

$$C_1 = y_0 - \frac{A}{n^2 - k^2} \sin\gamma = G$$

$$C_2 = \frac{1}{n} y_0' - \frac{k}{n(n^2 - k^2)} A \cos\gamma = H$$

и, значит, решение, удовлетворяющее начальным условиям, будет

$$y = G \cos nt + H \sin nt + \frac{A}{n^2 - k^2} \sin(kt + \gamma)$$

Полагая

$$G = b \cos\beta$$

$$-H = b \sin\beta$$

и взяв, как и раньше,

$$b = + \sqrt{G^2 + H^2}$$

и

$$\cos\beta = \frac{G}{b}; \quad \sin\beta = -\frac{H}{b}, \quad 0 < \beta < 360^\circ$$

получим

$$y = b\cos(nt + \beta) + \frac{A}{n^2 - k^2}\sin(kt + \gamma) \tag{3}$$

Полагая

$$\tau = \frac{2\pi}{n}$$

и

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{k}$$

напишем это решение в виде

$$y = b\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \beta\right) + \frac{A}{n^2 - k^2}\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \gamma\right) \tag{3'}$$

первый член, как мы видели, представляет простое гармоническое колебание с амплитудою b, периодом τ и начальною фазою β; очевидно, что второй член представляет также гармоническое колебание с амплитудою

$$C = \left|\frac{A}{n^2 - k^2}\right|$$

начальною фазою γ, если $n^2 > k^2$, и с начальною фазою $\gamma + \pi$, если $n^2 < k^2$, и с периодом τ_1 в обоих случаях.

Первый член представляет свободные колебания тела, зависящие от начальных условий, второй, — зависящий от интенсивности A „возмущающей силы“ и *не зависящий от начальных условий*, представляет колебания, называемые *вынужденными*.

Общий интеграл уравнения

$$y'' + 2hy' + n^2 y = A\sin(kt + \gamma) \tag{4}$$

есть

$$y = e^{-ht}(C_1\cos n_1 t + C_2\sin n_1 t) + \frac{A}{\sqrt{(n^2 - k^2)^2 + 4k^2h^2}}\sin(kt + \gamma + \delta)$$

Когда даны начальные условия: при $t = 0$ должно быть

$$y = y_0; \quad y' = y_0'$$

то для определения постоянных произвольных C_1 и C_2 будем иметь уравнения

$$y_0 = C_1 + \frac{A}{\sqrt{(n^2-k^2)^2+4k^2h^2}} \sin(\gamma+\delta)$$

$$y_0' = -hC_1 + n_1 C_2 + \frac{k \cdot A}{\sqrt{(n^2-k^2)^2+4k^2h^2}} \cos(\gamma+\delta)$$

откуда следует

$$C_1 = y_0 - \frac{A \sin(\gamma+\delta)}{\sqrt{(n^2-k^2)^2+4k^2h^2}} = G$$

$$C_2 = \frac{y_0' + hy_0 - A[h\sin(\gamma+\delta)+k\cos(\gamma+\delta)]}{n_1} = H$$

так что будет

$$y = e^{-ht}[G\cos n_1 t + H \sin p_1 t] + \frac{A}{\sqrt{(n^2-k^2)^2+4h^2k^2}} \sin(kt+\gamma+\delta)$$

или, полагая попрежнему

$$G = b\cos\beta$$

$$-H = b\sin\beta$$

и взяв

$$b = +\sqrt{G^2+H^2}$$

и

$$\cos\beta = \frac{G}{b}; \quad \sin\beta = -\frac{H}{b}, \quad 0 < \beta < 360°$$

будем иметь

$$y = be^{-ht}\cos(n_1 t+\beta) + \frac{A}{\sqrt{(n^2-k^2)^2+4h^2k^2}} \sin(kt+\gamma+\delta) \qquad (5)$$

Как видно, и в этом случае полное колебание состоит из колебаний свободных, период которых есть

$$\tau = \frac{2\pi}{n_1}$$

и вынужденных с периодом

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{k}$$

но в этом случае свободные колебания затухают более или менее быстро, смотря по величине h, и после затухания их остаются одни вынужденные.

Графически зависимость величины y от времени t представляется чертежом (фиг. 19), на котором прерывною чертою изображены колебания свободные, штрих-пунктирною — вынужденные и сплошною — наложение их, т. е. полное колебание y. Этот чертеж с ясностью по-

казывает, как по мере затухания свободных колебаний неправильное вначале колебание переходит в простое синусоидальное вынужденное колебание, не зависящее от начальных условий. Но такое затухание свободных колебаний имеет место лишь в том случае, если возмущающая сила *все время* представляется формулою

$$f(t) = A \sin(kt + \gamma) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \gamma\right)$$

сохраняя неизменными свою интенсивность A, период τ_1 и начальную фазу γ; в противном же случае свободные колебания не погашаются, а вследствие изменяемости силы все время поддерживаются.

Поясним это обстоятельство примером, взятым из теории качки корабля на волнении.

Если принять сопротивление воды пропорциональным первой степени скорости, то размахи боковой качки корабля определяются уравнением вида

$$\theta'' + 2h\theta' + n^2\theta = A \sin(kt + \gamma) \qquad (6)$$

где

$$A = n^2 \Theta_0$$

причем Θ_0 есть наибольший угол волнового склона (около 7° для крупной правильной океанской зыби). Обозначим

$$n_1 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{и} \quad k = \frac{2\pi}{\tau}$$

где T есть период свободных качаний корабля, τ — период волн.

Мы видели, что решение этого уравнения будет вида

$$\theta = be^{-ht} \sin(n_1 t + \beta) + \frac{A}{\sqrt{(n^2 + k^2)^2 + 4h^2 k^2}} \sin(kt + \gamma + \delta) \qquad (7)$$

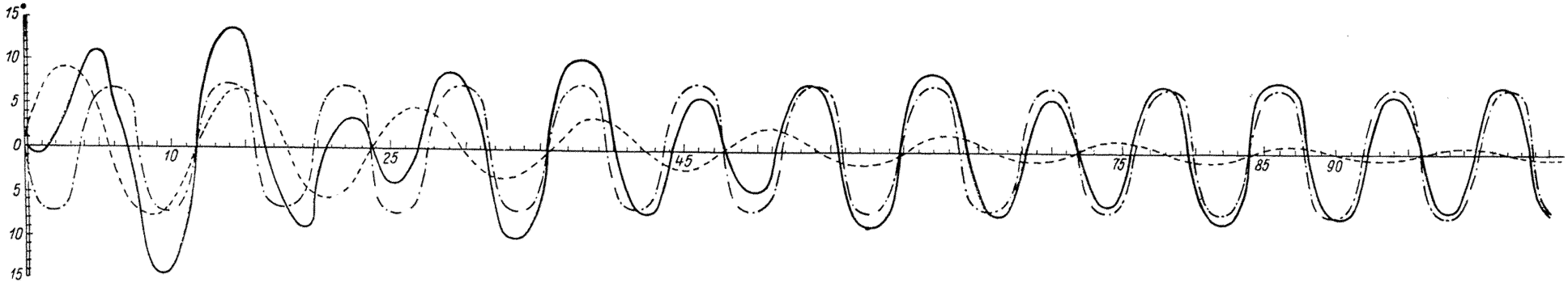
Так, для некоторого корабля с периодом

$$T = 12 \text{ сек.}$$

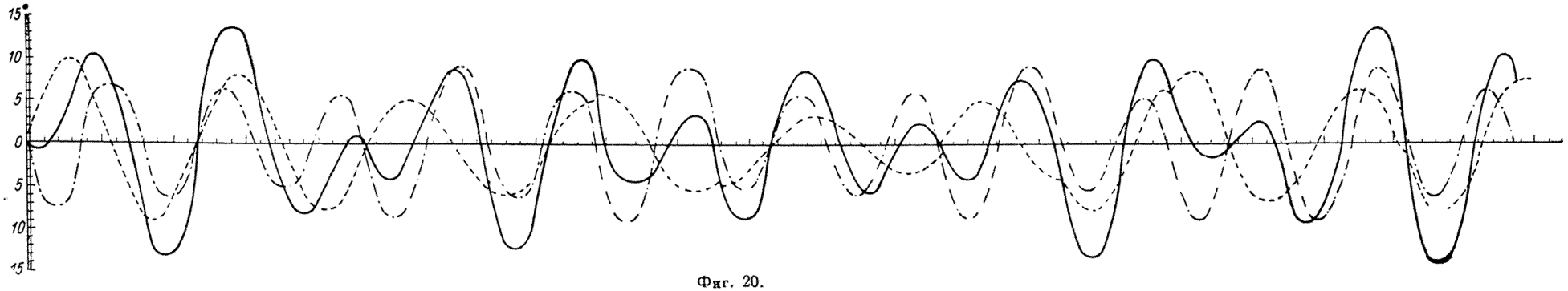
качающегося на волне с периодом $\tau = 8$ сек., получено

$$\theta = 10°.79\, e^{-0.03t} \sin\left(\frac{2\pi t}{12} + 5°.2\right) + 7°.19 \sin\left(\frac{2\pi t}{8} + 187°.8\right) \qquad (8)$$

Положим, что зыбь — идеально правильная, тогда, графически, первый член, т. е. свободные колебания, представится кривою, изображенной прерывною чертою, второй член — штрих-пунктирною кривою, и ясно видно, как после прохода 13 волн свободные колебания можно считать совершенно погашенными и качания корабля правильными синусоидальными.



Фиг. 19.



Фиг. 20.

Чтобы иметь качания на каждой отдельной волне, стоит только в эту формулу подставлять последовательно

$$t=8+t_1;\quad t=16+t_1;\quad t=24+t_1,\ \text{и т. д.}$$

и мы получим, например, для второй волны

$$\theta_2=10^\circ.79\,e^{-0.2t}\,e^{-0.03t_1}\sin\left(\frac{2\pi t_1}{12}+245^\circ.2\right)+$$

$$+7^\circ.19\sin\left(\frac{2\pi t_1}{8}+187^\circ.8\right)= \tag{9}$$

$$=8^\circ.51\,e^{-0.03t_1}\sin\left(\frac{2\pi t_1}{12}+245^\circ.2\right)+7^\circ.19\sin\left(\frac{2\pi t_1}{8}+187^\circ.8\right)$$

Второй член остался без перемены, ибо от замены t на $8+t_1$ аргумент этого члена становится равным

$$2\pi+\frac{2\pi t_1}{8}+187^\circ.8$$

очевидно, что вместо этого аргумента можно брать просто

$$\frac{2\pi t_1}{8}+187^\circ.8$$

Вообще от вышеуказанной замены второй член изменяться не будет, так как аргумент

$$\frac{2\pi t}{\tau}+187^\circ.8$$

будет лишь увеличиваться на $2\pi(N-1)$, где N есть номер волны.

Таким образом получается следующая таблица, по которой и составлен график (см. стр. 90).

Положим теперь, что корабль находится на зыби, все волны которой имеют одинаковый волновой склон и разнятся лишь незначительно по своим периодам — пусть, например, эти периоды будут

8.2, 7.7, 7.5, 8.5, 7.7, 8.5, 7.5, 7.7, 8.5, 7.5, 8.5, 8.5, 7.7 сек.

такая система волн будет представляться наблюдателю, находящемуся на корабле, весьма правильной, так как невозможно различить доли секунд при определении периода каждой волны в отдельности, и эта система будет отмечена как вполне правильная зыбь с периодом 8 сек., который является средним из вышеприведенных, между тем качка на такой системе будет совершенно иная, нежели на идеально правильной зыби.

Таблица последовательных качаний корабля на однообразной зыби

№ волны	Закон колебания на волне
1	$\theta = 10°.79\, e^{-0.03t_1} \sin\left(\frac{2\pi t_1}{12} + 5°.2\right) + 7°.19 \sin\left(\frac{2\pi t_1}{8} + 187°.8\right)$
2	$\theta = 8°.51\, e^{-0.03t_1} \sin\left(\frac{2\pi t_1}{12} + 245°.2\right) + D°$
3	$\theta = 6°.70\, e^{-0.03t_1} \sin\left(\frac{2\pi t_1}{12} + 125°.2\right) + D°$
4	$\theta = 5°.27\, e^{-0.03t_1} \sin\left(\frac{2\pi t_1}{12} + 5°.2\right) + D°$
5	$\theta = 4°.15\, e^{-0.03t_1} \sin\left(\frac{2\pi t_1}{12} + 245°.2\right) + D°$
6	$\theta = 3°.26\, e^{-0.03t_1} \sin\left(\frac{2\pi t_1}{12} + 125°.2\right) + D°$
7	$\theta = 2°.57\, e^{-0.03t_1} \sin\left(\frac{2\pi t_1}{12} + 5°.2\right) + D°$
8	$\theta = 2°.02\, e^{-0.03t_1} \sin\left(\frac{2\pi t_1}{12} + 245°.2\right) + D°$
9	$\theta = 1°.59\, e^{-0.03t_1} \sin\left(\frac{2\pi t_1}{12} + 125°.2\right) + D°$
10	$\theta = 1°.25\, e^{-0.03t_1} \sin\left(\frac{2\pi t_1}{12} + 5°.2\right) + D°$
11	$\theta = 0°.98\, e^{-0.03t_1} \sin\left(\frac{2\pi t_1}{12} + 245°.2\right) + D°$
12	$\theta = 0°.78\, e^{-0.03t_1} \sin\left(\frac{2\pi t_1}{12} + 125°.2\right) + D°$
13	$\theta = 0°.61\, e^{-0.03t_1} \sin\left(\frac{2\pi t_1}{12} + 5°.2\right) + D°$

Так, при тех же начальных условиях, как в первом случае, мы для первой волны получим

$$\theta = 11°.48 \cdot e^{-0.03t} \sin\left(\frac{2\pi t}{12} + 5°.6\right) + 7°.86 \sin\left(\frac{2\pi t}{8.2} + 188°.7\right) \qquad (10)$$

Чтобы найти качание на второй волне, нельзя просто заменить в этом уравнении t на $8.2 + t_1$, а надо иметь в виду, что само основное дифференциальное уравнение после прохода первой волны заменяется таким:

$$\theta'' + 2h\theta' + n^2\theta = n^2\theta_0 \sin\frac{2\pi t}{7.7} \qquad (11)$$

сохраняя для простоты везде $\gamma = 0$; между тем для начальной волны это уравнение было

$$\theta'' + 2h\theta' + n^2\theta = n^2\Theta_0 \sin\frac{2\pi t}{8.2} \tag{12}$$

поэтому уравнение (11) надо интегрировать непосредственно и определить постоянные произвольные по соответствующим ему начальным условиям. Эти условия получатся, положив $t = 8.2$, в уравнении (10) и в уравнении, следующем из него, дифференцированием

$$\theta' = -11^\circ.48 \cdot 0.03\, e^{-0.03t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{12} + 5^\circ.6\right) +$$

$$+ 11^\circ.48 \cdot \frac{2\pi}{12} \cdot e^{-0.03t} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{12} + 5^\circ.6\right) + 7^\circ.86 \cdot \frac{2\pi}{8.2} \cos\left(\frac{2\pi t}{8.2} + 188^\circ.7\right) =$$

$$= e^{-0.03t}\left(5^\circ.96 \cos\frac{2\pi t}{12} - 0^\circ.90 \sin\frac{2\pi t}{12}\right) - 5^\circ.96 \cos\frac{2\pi t}{8.2} + 0^\circ.93 \sin\frac{2\pi t}{8.2}$$

что дает

$$\theta_1 = -9^\circ.67; \quad \theta_1' = -7^\circ.21$$

При этих начальных условиях, считая для второй волны время t от момента ее подхода, получим из уравнения (11)

$$\theta = 9^\circ.96\, e^{-0.03t} \sin\left(\frac{2\pi t}{12} + 243^\circ\right) + 6^\circ.29 \sin\left(\frac{2\pi t}{7.7} + 187^\circ\right) \tag{13}$$

Взяв производную θ' и полагая затем в равенстве (13) и его производной $t = 7.7$, получим начальные условия для третьей волны, для которой уравнение движения есть

$$\theta'' + 2h\theta' + n^2\theta = n^2\Theta_0 \sin\frac{2\pi t}{7.5} \tag{14}$$

и найдем

$$\theta = 8^\circ.87\, e^{-0.03t} \sin\left(\frac{2\pi t}{12} + 126^\circ\right) + 5^\circ.75 \sin\left(\frac{2\pi t}{7.5} + 187^\circ\right) \tag{15}$$

и, продолжая таким образом далее, найдем те результаты, которые сгруппированы в следующей таблице (см. стр. 92).

На фиг. 20 результаты этой таблицы представлены графически и с ясностью видно, что свободные колебания сперва уменьшались, а затем стали опять возрастать, и качка сохраняет все время свой неправильный характер.

Происходит это потому, что для каждой волны начальными условиями служат значения θ и θ' в конце предыдущей волны, эти же значения образуются не только от свободных колебаний, но и от вынужденных. По этим значениям определяются для каждой волны соответствующие значения произвольных постоянных, таким образом

Таблица последовательных качаний корабля на волнах с изменяющимся периодом

№ волны	Период волны	Закон колебания на волне
1	8.2	$\theta = 11°.48\, e^{-0.03t} \sin\left(\frac{2\pi t}{12} + 5°.6\right) + 7°.86 \sin\left(\frac{2\pi t}{8.2} + 188°.7\right)$
2	7.7	$\theta = 9°.96\, e^{-0.03t} \sin\left(\frac{2\pi t}{12} + 243°\right) + 6°.29 \sin\left(\frac{2\pi t}{7.7} + 187°\right)$
3	7.5	$\theta = 8°.87\, e^{-0.03t} \sin\left(\frac{2\pi t}{12} + 126°\right) + 5°.75 \sin\left(\frac{2\pi t}{7.5} + 187°\right)$
4	8.5	$\theta = 5°.79\, e^{-0.03t} \sin\left(\frac{2\pi t}{12} + 4°\right) + 9°.11 \sin\left(\frac{2\pi t}{8.5} + 189°\right)$
5	7.7	$\theta = 6°.53\, e^{-0.03t} \sin\left(\frac{2\pi t}{12} + 228°\right) + 6°.29 \sin\left(\frac{2\pi t}{7.7} + 187°\right)$
6	8.5	$\theta = 6°.35\, e^{-0.03t} \sin\left(\frac{2\pi t}{12} + 67°\right) + 9°.11 \sin\left(\frac{2\pi t}{8.5} + 189°\right)$
7	7.5	$\theta = 4°.52\, e^{-0.03t} \sin\left(\frac{2\pi t}{12} + 254°\right) + 5°.75 \sin\left(\frac{2\pi t}{7.5} + 187°\right)$
8	7.7	$\theta = 3°.29\, e^{-0.03t} \sin\left(\frac{2\pi t}{12} + 102°\right) + 6°.29 \sin\left(\frac{2\pi t}{7.7} + 187°\right)$
9	8.5	$\theta = 5°.40\, e^{-0.03t} \sin\left(\frac{2\pi t}{12} + 5°.5\right) + 9°.11 \sin\left(\frac{2\pi t}{8.5} + 189°\right)$
10	7.5	$\theta = 8°.91\, e^{-0.03t} \sin\left(\frac{2\pi t}{12} + 214°\right) + 5°.75 \sin\left(\frac{2\pi t}{7.5} + 187°\right)$
11	8.5	$\theta = 9°.13\, e^{-0.03t} \sin\left(\frac{2\pi t}{12} + 48°\right) + 9°.11 \sin\left(\frac{2\pi t}{8.5} + 189°\right)$
12	8.5	$\theta = 7°.10\, e^{-0.03t} \sin\left(\frac{2\pi t}{12} + 3°\right) + 9°.11 \sin\left(\frac{2\pi t}{8.5} + 189°\right)$
13	7.7	$\theta = 8°.59\, e^{-0.03t} \sin\left(\frac{2\pi t}{12} + 185°\right) + 6°.29 \sin\left(\frac{2\pi t}{7.7} + 187°\right)$

свободные колебания с проходом каждой волны как бы подновляются за счёт вынужденных.

§ 23. Мы видели, что при отсутствии сопротивления, т. е. для уравнения

$$y'' + n^2 y = A \sin(kt + \gamma) \tag{1}$$

амплитуда вынужденных колебаний выражается формулою

$$C = \left| \frac{A}{n^2 - k^2} \right| \tag{2}$$

т. е. абсолютною величиною количества

$$\frac{A}{n^2-k^2}$$

Представим это выражение в несколько ином виде, более удобном для его механического истолкования.

Положим, что на данное тело действовала бы постоянная сила, интенсивность которой есть A, — это тело заняло бы положение равновесия, определяемое равенством

$$n^2 y_0 = A$$

т. е. его отклонение было бы

$$y_0 = \frac{1}{n^2} A$$

Величина y_0 представляет то статическое отклонение, которое произвела бы *постоянная* сила, интенсивность которой равна A.

Заменив в формуле (2) A его величиною $n^2 y_0$, получим

$$C = \frac{n^2}{n^2-k^2} y_0 \tag{3}$$

или, вводя вместо частот n и k соответствующие периоды

$$\tau = \frac{2\pi}{n} \quad \text{и} \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{k}$$

получим

$$C = \frac{\frac{4\pi^2}{\tau^2}}{\frac{4\pi^2}{\tau^2} - \frac{4\pi^2}{\tau_1^2}} y_0 = \frac{\tau_1^2}{\tau_1^2 - \tau^2} y_0 = \frac{1}{1 - \frac{\tau^2}{\tau_1^2}} y_0$$

Из этой формулы видно, что амплитуда вынужденных колебаний получается, умножив статическое отклонение y_0 на множитель

$$\frac{\tau_1^2}{\tau_1^2 - \tau^2} = \frac{1}{1 - \frac{\tau^2}{\tau_1^2}} \tag{4}$$

Отсюда ясно, что в том случае, когда отношение

$$\frac{\tau^2}{\tau_1^2}$$

малое, то величина C будет мало отличаться от y_0; так, например, если

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \frac{1}{5}$$

и

$$\frac{\tau^2}{\tau_1^2}=\frac{1}{25}$$

то будет

$$C=\frac{24}{25}y_0$$

иными словами: *если период свободных колебаний системы весьма мал по сравнению с периодом возмущающей силы, то амплитуда вынужденных колебаний весьма близка к статическому отклонению, производимому силою.*

Наоборот, если отношение $\frac{\tau^2}{\tau_1^2}$ весьма велико, то дробь

$$\frac{1}{1-\frac{\tau^2}{\tau_1^2}}$$

будет по абсолютной величине весьма мала; так, например, если

$$\frac{\tau}{\tau_1}=10$$

то

$$\frac{\tau^2}{\tau_1^2}=100$$

и сказанная дробь будет $\frac{1}{99}$, поэтому; *когда период свободных колебаний весьма велик по сравнению с периодом возмущающей силы, то амплитуда вынужденных колебаний весьма мала по сравнению со статическим отклонением*, т. е. тело весьма мало отклоняется от свого естественного положения равновесия $y=0$.

Наконец, если отношение периодов близко к единице, то в выражении

$$\frac{1}{1-\frac{\tau^2}{\tau_1^2}}$$

знаменатель будет весьма малый, и, значит, дробь весьма велика по абсолютной величине; так, например, если

$$\frac{\tau_1}{\tau}=0.9$$

то

$$\frac{\tau_1^2}{\tau^2}=0.81$$

и будет

$$\frac{1}{1-\frac{\tau_1^2}{\tau^2}}=\frac{1}{1-0.81}=5.2$$

или когда

$$\frac{\tau_1}{\tau} = 1.1$$

то

$$\frac{\tau_1^2}{\tau^2} = 1.21$$

и будет

$$\left| \frac{1}{1 - \frac{\tau_1^2}{\tau^2}} \right| = \left| \frac{1}{1 - 1.21} \right| = \frac{1}{0.21} = 4.8$$

таким образом: *когда отношение периода свободных колебаний системы к периоду возмущающей силы близко к единице, то амплитуда вынужденных колебаний значительно больше статического отклонения и по мере приближения сказанного отношения к единице неопределенно возрастает.*

В этом свойстве состоит так называемое явление резонанса.

Рассмотрим теперь случай, когда на систему действует сопротивление, пропорциональное скорости, т. е. уравнение движения ее есть

$$y'' + 2hy' + n^2 y = A \sin(kt + \gamma) \tag{5}$$

Мы видели, что в этом случае амплитуда вынужденных колебаний C выражается формулой

$$C = \frac{A}{\sqrt{(n^2 - k^2)^2 + 4h^2 k^2}} = \frac{n^2}{\sqrt{(n^2 - k^2)^2 + 4h^2 k^2}} \cdot y_0 \tag{6}$$

и множитель, показывающий отношение амплитуды вынужденных колебаний к статическому отклонению, есть

$$\lambda = \frac{n^2}{\sqrt{(n^2 - k^2)^2 + 4h^2 k^2}} \tag{6'}$$

Это отношение может быть написано так:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{n^2} \cdot \frac{k^2}{n^2}}}$$

положив

$$\frac{k}{n} = \frac{\tau}{\tau_1} = q$$

и

$$\frac{2h}{n} = \alpha$$

имеем

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-q^2)^2 + \alpha^2 q^2}} \tag{7}$$

Из этой формулы видно, что λ есть функция не трех переменных n, h и k, а лишь двух переменных q и α. На фиг. 21 представлены кривые λ в функции переменной q при различных значениях α, показанных на каждой из этих кривых.

Эти кривые с ясностью обнаруживают явление резонанса, состоящее в том, что величина λ при приближении q к 1 быстро возрастает, достигает резкого максимума и при дальнейшем возрастании быстро падает.

§ 24. Нам постоянно придется иметь дело с системою *двух* уравнений второго порядка, линейных и с постоянными коэффициентами. Общий вид такой системы есть

$$\begin{aligned} A_1\theta'' + B_1\theta' + C_1\theta + D_1\psi'' + E_1\psi' + F_1\psi &= G_1(t) \\ A_2\theta'' + B_2\theta' + C_2\theta + D_2\psi'' + E_2\psi' + F_2\psi &= G_2(t) \end{aligned} \tag{I}$$

причем

$$A_1,\ B_1, \ldots E_2,\ F_2$$

— заданные постоянные, $G_1(t)$ и $G_2(t)$ — заданные функции переменной независимой t.

Для интегрирования такой системы двух уравнений с неизвестными θ и ψ можно применить два приема, которые мы и рассмотрим в отдельности.

Первый прием состоит в следующем: условимся обозначать знаком δ дифференцирование по переменной независимой t, так что, например, $\delta\theta$ означает $\frac{d\theta}{dt}$; $\delta^2\theta$ означает $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ или θ'', и т. д., тогда можно этот символ действия отделять от того количества, над которым действие производится, и писать, например,

$$(\delta^2 + 7\delta + 15)\theta = \delta^2\theta + 7\delta\theta + 15\theta$$

вместо $\theta'' + 7\theta' + 15\theta$.

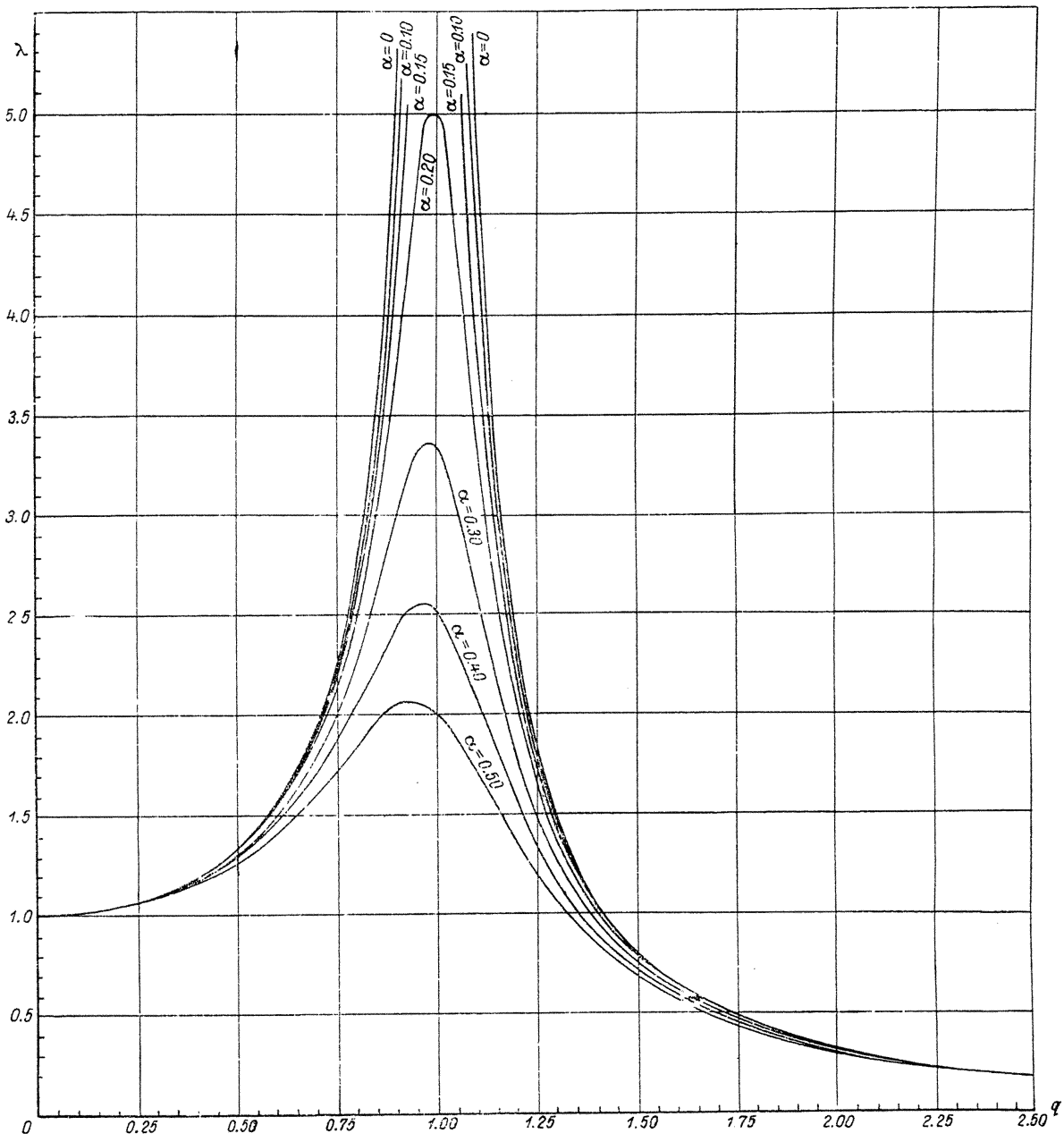
При таком условном или символическом обозначении над этим отделенным символом можно по правилам алгебры производить действия сложения, умножения и возвышения в целую положительную степень, а затем результат истолковывать, как указано.

Так, например, пусть

$$U = \theta'' + 7\theta' + 15\theta$$

и надо составить выражение

$$U'' + 5U$$


λ
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
2.25
2.50
q
α=0
α=0.10
α=0.15
α=0.20
α=0.15
α=0.10
α=0
α=0.30
α=0.40
α=0.50

Фиг. 21.

Тогда, действуя не символически, мы поступили бы так:

$$U'' = \theta^{IV} + 7\theta''' + 15\theta''$$

$$5U = \qquad\qquad 5\theta'' + 35\theta' + 75\theta$$

$$U'' + 5U = \theta^{IV} + 7\theta''' + 20\theta'' + 35\theta' + 75\theta$$

Символически мы можем писать

$$U'' + 5U = (\delta^2 + 5)\, U = [(\delta^2 + 5)(\delta^2 + 7\delta + 15)]\,\theta =$$
$$= (\delta^4 + 7\delta^3 + 20\delta^2 + 35\delta + 75)\,\theta = \theta^{IV} + 7\theta''' + 20\theta'' + 35\theta' + 75\theta$$

Совершенно так же, как для одного линейного уравнения, так и для системы таких уравнений, стоящие в правой части известные функции $G_1(t)$ и $G_2(t)$ называются последними членами, и система уравнений

$$\begin{aligned} A_1 u'' + B_1 u' + C_1 u + D_1 v'' + E_1 v' + F_1 v = 0 \\ A_2 u'' + B_2 u' + C_2 u + D_2 v'' + E_2 v' + F_2 v = 0 \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

называется системою уравнений без последних членов соответствующей (I).

Для систем уравнений *без последних членов* легко проверить следующие свойства:

1) Если функции $f_1(t)$ и $h_1(t)$:

$$u = f_1(t); \qquad v = h_1(t)$$

суть решения предложенной системы (II) [т. е. по подстановке вместо u и v обращают оба уравнения (II) в тожества] и функции

$$u = f_2(t); \quad v = h_2(t)$$

также суть решения этой системы, то функции

$$u = f_1(t) + f_2(t); \quad v = h_1(t) + h_2(t)$$

суть решения этой системы.

2) Если функции

$$u = f_1(t); \quad v = h_1(t)$$

суть решения системы (II), то и функции

$$u = C_1 \cdot f_1(t); \quad v = C_2 \cdot h_1(t)$$

где C_1 и C_2 произвольные постоянные, — решения ее.

3) Из сопоставления этих двух свойств следует, что если функции

$$f_1(t) \text{ и } h_1(t)$$
$$f_2(t) \text{ и } h_2(t)$$

суть решения системы (II), то функции

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$$

$$C_1 h_1(t) + C_2 h_2(t)$$

суть решения ее, т. е. функции

$$u = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$$
$$v = C_1 h_1(t) + C_2 h_2(t)$$

удовлетворяют системе и, по подстановке вместо u и v, обращают оба уравнения системы (II) в тожества.

4) Пусть функции

$$\theta = Q(t)$$
$$\psi = P(t)$$

представляют какое-нибудь решение системы (I) с последними членами, тогда функции

$$\theta = f(t) + Q(t)$$
$$\psi = h(t) + P(t)$$

где $f(t)$ и $h(t)$ суть какие угодно решения системы (II) без последних членов соответствующей (I), будут решениями этой последней.

На основании этого свойства разыскание общего решения системы (I), которое должно содержать четыре постоянных произвольных, и называется общим интегралом системы, сводится к нахождению общего интеграла, т. е. решения, содержащего четыре произвольных постоянных для системы (II) уравнений без последних членов соответствующей (I) и какого-нибудь решения системы (I).

Пользуясь символическим обозначением, напишем систему (II) без последних членов так:

$$\begin{aligned}(A_1\delta^2 + B_1\delta + C_1)u + (D_1\delta^2 + E_1\delta + F_1)v = 0\\ (A_2\delta^2 + B_2\delta + C_2)u + (D_2\delta^2 + E_2\delta + F_2)v = 0\end{aligned} \qquad (1)$$

обозначим для краткости письма

$$\begin{aligned}A_1\delta^2 + B_1\delta + C_1 &= p_1(\delta)\\ D_1\delta^2 + E_1\delta + F_1 &= q_1(\delta)\\ A_2\delta^2 + B_2\delta + C_2 &= p_2(\delta)\\ D_2\delta^2 + E_2\delta + F_2 &= q_2(\delta)\end{aligned} \qquad (2)$$

тогда система (1) напишется так:

$$\begin{aligned} p_1(\delta)\,u + q_1(\delta)\,v &= 0 \\ p_2(\delta)\,u + q_2(\delta)\,v &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Исключая v, имеем

$$[p_1(\delta)\,q_2(\delta) - p_2(\delta)\,q_1(\delta)]\,u = 0 \tag{4}$$

Обозначим через $S(\delta)$ стоящую в скобках величину, т. е. положим

$$\begin{aligned} S(\delta) = p_1(\delta)\,q_2(\delta) - p_2(\delta)\,q_1(\delta) = (A_1\delta^2 + B_1\delta + C_1)(D_2\delta^2 + E_2\delta + F_2) - \\ - (A_2\delta^2 + E_2\delta + C_2)(D_1\delta^2 + E_1\delta + F_1) \end{aligned} \tag{5}$$

очевидно, что это будет целая функция четвертой степени относительно δ:

$$S(\delta) = (A_1 D_2 - A_2 D_1)\,\delta^4 + \ldots + (C_1 F_2 - C_2 F_1)$$

таким образом, неизвестная u определяется линейным уравнением четвертого порядка с постоянными коэффициентами, которое символически пишется

$$S(\delta)\,u = 0 \tag{6}$$

или в развитой, не символической форме

$$(A_1 D_2 - A_2 D_1)\,u^{IV} + \ldots + (C_1 F_2 - C_2 F_1)\,u = 0 \tag{6'}$$

По общему правилу решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами ищем решение вида

$$u = e^{\lambda t} \tag{7}$$

где λ — неизвестная постоянная, для определения которой служит так называемое характеристическое уравнение

$$S(\lambda) = p_1(\lambda)\,q_2(\lambda) - p_2(\lambda)\,q_1(\lambda) = 0 \tag{8}$$

т. е. уравнение

$$(A_1 D_2 - A_2 D_1)\,\lambda^4 + \ldots + (C_1 F_2 - C_2 F_1) = 0 \tag{9}$$

Пусть корни этого уравнения суть

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4$$

тогда будет

$$u = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + K_3 e^{\lambda_3 t} + K_4 e^{\lambda_4 t} \tag{10}$$

причем

$$K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4$$

суть произвольные постоянные.

Корни λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 мы предположим между собою различными и случая равных корней рассматривать не будем, ибо в тех приложениях, которые мы имеем в виду, этот случай не встречается.

Совершенно так же, если бы мы из уравнений (3) исключили неизвестную u, то получили бы уравнение

$$[p_1(\delta)\,q_2(\delta) - p_2(\delta)\,q_1(\delta)]\,v = 0 \tag{11}$$

того же вида, как и уравнение (4), т. е.

$$S(\delta)\,v = 0 \tag{12}$$

значит, имели бы

$$v = L_1 e^{\lambda_1 t} + L_2 e^{\lambda_2 t} + L_3 e^{\lambda_3 t} + L_4 e^{\lambda_4 t} \tag{13}$$

причем L_1, L_2, L_3, L_4 — произвольные постоянные.

Необходимо еще рассмотреть, являются ли постоянные $K_1, \ldots K_4$ и $L_1, \ldots L_4$ между собой независимыми или между ними есть какие-либо соотношения, и тогда — какие именно.

Для этого надо обратиться к самим уравнениям (1) или, что то же, (2) и выбрать постоянные K и L так, чтобы величины (10) и (13) удовлетворяли этим уравнениям *тожественно*.

Но мы имеем

$$\delta^2(u) = u''; \quad \delta(u) = u'$$

следовательно, будет

$$\delta^2 e^{\lambda_1 t} = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t}; \quad \delta e^{\lambda_1 t} = \lambda_1 e^{\lambda_1 t}$$

и

$$(A_1\delta^2 + B_1\delta + C_1)\,e^{\lambda_1 t} = (A_1\lambda_1^2 + B_1\lambda_1 + C_1)\,e^{\lambda_1 t} = p_1(\lambda_1)\cdot e^{\lambda_1 t}$$

значит, после сказанной подстановки первое уравнение системы (1) обратится в такое:

$$\begin{aligned}[p_1(\lambda_1)K_1 + q_1(\lambda_1)L_1]\,e^{\lambda_1 t} + [p_1(\lambda_2)K_2 + q_1(\lambda_2)L_2]\,e^{\lambda_2 t} + \\ + [p_1(\lambda_3)K_3 + q_1(\lambda_3)L_3]\,e^{\lambda_3 t} + [p_1(\lambda_4)K_4 + q_1(\lambda_4)L_4]\,e^{\lambda_4 t} = 0\end{aligned} \tag{14}$$

а так как все величины λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 между собою различны, то это равенство может иметь место *тожественно*, т. е. при всяком значении переменной t, лишь если каждый его член в отдельности равен нулю, т. е.

$$\begin{aligned}p_1(\lambda_1)K_1 + q_1(\lambda_1)L_1 &= 0\\ p_1(\lambda_2)K_2 + q_1(\lambda_2)L_2 &= 0\\ p_1(\lambda_3)K_3 + q_1(\lambda_3)L_3 &= 0\\ p_1(\lambda_4)K_4 + q_1(\lambda_4)L_4 &= 0\end{aligned} \tag{15}$$

Откуда следует

$$L_1 = -\frac{p_1(\lambda_1)}{q_1(\lambda_1)} K_1; \quad L_2 = -\frac{p_1(\lambda_2)}{q_1(\lambda_2)} K_2$$
$$L_3 = -\frac{p_1(\lambda_3)}{q_1(\lambda_3)} K_3; \quad L_4 = -\frac{p_1(\lambda_4)}{q_1(\lambda_4)} K_4 \tag{16}$$

Совершенно так же второе уравнение системы (1) доставило бы нам равенства

$$L_1 = -\frac{p_2(\lambda_1)}{q_2(\lambda_1)} K_1; \quad L_2 = -\frac{p_2(\lambda_2)}{q_2(\lambda_2)} K_2$$
$$L_3 = -\frac{p_2(\lambda_3)}{q_2(\lambda_3)} K_3; \quad L_4 = -\frac{p_2(\lambda_4)}{q_2(\lambda_4)} K_4 \tag{17}$$

Так как

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3, \ \lambda_4$$

суть корни уравнения

$$S(\lambda) = p_1(\lambda) q_2(\lambda) - p_2(\lambda) q_1(\lambda) = 0$$

то

$$p_1(\lambda_1) q_2(\lambda_1) - p_2(\lambda_1) q_1(\lambda_1) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_1(\lambda_4) q_2(\lambda_4) - p_2(\lambda_4) q_1(\lambda_4) = 0$$

т. е.

$$\frac{p_1(\lambda_1)}{q_1(\lambda_1)} = \frac{p_2(\lambda_1)}{q_2(\lambda_1)}; \quad \frac{p_1(\lambda_2)}{q_1(\lambda_2)} = \frac{p_2(\lambda_2)}{q_2(\lambda_2)}$$
$$\frac{p_1(\lambda_3)}{q_1(\lambda_3)} = \frac{p_2(\lambda_3)}{q_2(\lambda_3)}; \quad \frac{p_1(\lambda_4)}{q_1(\lambda_4)} = \frac{p_2(\lambda_4)}{q_2(\lambda_4)}$$

и, значит, равенства (16) и (17) между собою *одинаковы* и можно брать лишь одну, например, первую систему их.

Таким образом все четыре постоянные L выражаются через постоянные K, которые остаются *произвольными*, и решение системы (1) будет

$$u = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + K_3 e^{\lambda_3 t} + K_4 e^{\lambda_4 t} \tag{18}$$

$$v = -\frac{p_1(\lambda_1)}{q_1(\lambda_1)} K_1 e^{\lambda_1 t} - \frac{p_1(\lambda_2)}{q_1(\lambda_2)} K_2 e^{\lambda_2 t} - \frac{p_1(\lambda_3)}{q_1(\lambda_3)} K_3 e^{\lambda_3 t} - \frac{p_1(\lambda_4)}{q_1(\lambda_4)} K_4 e^{\lambda_4 t}$$

Это решение можно писать и в другой форме: положим

$$q_1(\lambda_1) N_1 = K_1; \quad q_1(\lambda_2) N_2 = K_2; \quad q_1(\lambda_3) N_3 = K_3; \quad q_1(\lambda_4) N_4 = K_4$$

очевидно, что N_1, N_2, N_3, N_4 будут такие же произвольные постояные, как и K_1, K_2, K_3, K_4, и мы получим

$$u = q_1(\lambda_1) N_1 e^{\lambda_1 t} + q_1(\lambda_2) N_2 e^{\lambda_2 t} + q_1(\lambda_3) N_3 e^{\lambda_3 t} + q_1(\lambda_4) N_4 e^{\lambda_4 t}$$
$$v = -p_1(\lambda_1) N_1 e^{\lambda_1 t} - p_1(\lambda_2) N_2 e^{\lambda_2 t} - p_1(\lambda_3) N_3 e^{\lambda_3 t} - p_1(\lambda_4) N_4 e^{\lambda_4 t}. \tag{19}$$

§ 25. Второй прием состоит в следующем: для предложенной системы уравнений

$$\begin{aligned} A_1 u'' + B_1 u' + C_1 u + D_1 v'' + E_1 v' + F_1 v = 0 \\ A_2 u'' + B_2 u' + C_2 u + D_2 v'' + E_2 v' + F_2 v = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

будем искать подобно тому, как для одного уравнения, решение вида

$$\begin{aligned} u = Ke^{\lambda t} \\ v = Le^{\lambda t} \end{aligned} \tag{2}$$

причем K, L, λ — пока неизвестные постоянные, из которых K и L не должны равняться нулю.

Подставляя величины (2) в предложенные уравнения (1), имеем по сокращении на $e^{\lambda t}$:

$$\begin{aligned} (A_1 \lambda^2 + B_1 \lambda + C_1) K + (D_1 \lambda^2 + E_1 \lambda + F_1) L = 0 \\ (A_2 \lambda^2 + B_2 \lambda + C_2) K + (D_2 \lambda^2 + E_2 \lambda + F_2) L = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Чтобы эти уравнения были совместны и имели по отношению к неизвестным K и L решение, отличное от нуля, необходимо, чтобы было

$$\frac{L}{K} = -\frac{A_1 \lambda^2 + B_1 \lambda + C_1}{D_1 \lambda^2 + E_1 \lambda + F_1} = -\frac{A_2 \lambda^2 + B_2 \lambda + C_2}{D_2 \lambda^2 + E_2 \lambda + F_2} \tag{4}$$

или, полагая попрежнему

$$A_1 \lambda^2 + B_1 \lambda + C_1 = p_1(\lambda); \quad A_2 \lambda^2 + B_2 \lambda + C_2 = p_2(\lambda)$$

$$D_1 \lambda^2 + E_1 \lambda + F_1 = q_1(\lambda); \quad D_2 \lambda^2 + E_2 \lambda + F_2 = q_2(\lambda)$$

чтобы λ было корнем уравнения

$$\frac{p_1(\lambda)}{q_1(\lambda)} = \frac{p_2(\lambda)}{q_2(\lambda)}$$

т. е. уравнения

$$S(\lambda) = p_1(\lambda) q_2(\lambda) - p_2(\lambda) q_1(\lambda) = 0 \tag{5}$$

Пусть корни этого уравнения суть

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3, \ \lambda_4$$

неравные между собою, тогда каждому корню соответствует свое решение, а именно:

$$\begin{aligned} &\text{корню } \lambda = \lambda_1 \quad u = K_1 e^{\lambda_1 t}; \quad v = L_1 e^{\lambda_1 t} \\ &\text{„ } \quad \lambda = \lambda_2 \quad u = K_2 e^{\lambda_2 t}; \quad v = L_2 e^{\lambda_2 t} \\ &\text{„ } \quad \lambda = \lambda_3 \quad u = K_3 e^{\lambda_3 t}; \quad v = L_3 e^{\lambda_3 t} \\ &\text{„ } \quad \lambda = \lambda_4 \quad u = K_4 e^{\lambda_4 t}; \quad v = L_4 e^{\lambda_4 t} \end{aligned} \tag{5'}$$

но на основании равенства (4) будет

$$L_1 = -\frac{p_1(\lambda_1)}{q_1(\lambda_1)} K_1; \quad L_2 = -\frac{p_1(\lambda_2)}{q_1(\lambda_2)} K_2$$
$$L_3 = -\frac{p_1(\lambda_3)}{q_1(\lambda_3)} K_3; \quad L_4 = -\frac{p_1(\lambda_4)}{q_1(\lambda_4)} K_4 \qquad (6)$$

Заменив постоянные L этими выражениями и заметив, что сумма решений есть также решение предложенной системы, получим, как и раньше,

$$u = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + K_3 e^{\lambda_3 t} + K_4 e^{\lambda_4 t}$$

$$v = -\frac{p_1(\lambda_1)}{q_1(\lambda_1)} K_1 e^{\lambda_1 t} - \frac{p_1(\lambda_2)}{q_1(\lambda_2)} K_2 e^{\lambda_2 t} - \frac{p_1(\lambda_3)}{q_1(\lambda_3)} K_3 e^{\lambda_3 t} - \frac{p_1(\lambda_4)}{q_1(\lambda_4)} K_4 e^{\lambda_4 t},$$

где K_1, K_2, K_3, K_4 — произвольные постоянные, или, положив

$$K_1 = q_1(\lambda_1) N_1; \quad K_2 = q_1(\lambda_2) N_2; \quad K_3 = q_1(\lambda_3) N_3; \quad K_4 = q_1(\lambda_4) N_4$$

получим, как и прежде,

$$u = q_1(\lambda_1) N_1 e^{\lambda_1 t} + q_1(\lambda_2) N_2 e^{\lambda_2 t} + q_1(\lambda_3) N_3 e^{\lambda_3 t} + q_1(\lambda_4) N_4 e^{\lambda_4 t}$$
$$v = -p_1(\lambda_1) N_1 e^{\lambda_1 t} - p_1(\lambda_2) N_2 e^{\lambda_2 t} - p_1(\lambda_3) N_3 e^{\lambda_3 t} - p_1(\lambda_4) N_4 e^{\lambda_4 t} \qquad (7)$$

— более симметричный вид решения.

§ 26. Рассмотрим теперь, каким образом удовлетворить начальным условиям, которые возьмем в такой форме: при $t = 0$ должно быть

$$u = u_0; \quad u' = u_0'$$
$$v = v_0; \quad v' = v_0'$$

причем u_0, u_0', v_0, v_0' — заданные величины. Полагая в уравнениях (7) и в первой от них производной $t = 0$, получим

$$u_0 = q_1(\lambda_1) N_1 + q_1(\lambda_2) N_2 + q_1(\lambda_3) N_3 + q_1(\lambda_4) N_4$$
$$v_0 = -p_1(\lambda_1) N_1 - p_1(\lambda_2) N_2 - p_1(\lambda_3) N_3 - p_1(\lambda_4) N_4$$
$$u_0' = \lambda_1 q_1(\lambda_1) N_1 + \lambda_2 q_1(\lambda_2) N_2 + \lambda_3 q_1(\lambda_3) N_3 + \lambda_4 q_1(\lambda_4) N_4$$
$$v_1' = -\lambda_1 p_1(\lambda_1) N_1 - \lambda_2 p_1(\lambda_2) N_2 - \lambda_3 p_1(\lambda_3) N_3 - \lambda_4 p_1(\lambda_4) N_4$$

Эти четыре уравнения первой степени относительно четырех неизвестных N_1, N_2, N_3, N_4 и послужат для нахождения их значений.

§ 27. Мы не будем выводить общих формул для нахождения частного решения системы уравнений

$$(A_1 \delta^2 + B_1 \delta + C_1) u + (D_1 \delta^2 + E_1 \delta + F_1) = G_1(t)$$
$$(A_2 \delta^2 + B_2 \delta + C_2) u + (D_2 \delta^2 + E_2 \delta + F_2) = G_2(t) \qquad (1)$$

а ограничимся частным случаем, когда

$$\begin{aligned} G_1(t) &= g_1 e^{kt} \\ G_2(t) &= g_2 e^{kt} \end{aligned} \tag{2}$$

где g_1, g_2 и k — заданные постоянные, к которому приводятся все те случаи, которые встретятся в наших приложениях.

Будем искать частное решение вида

$$\begin{aligned} u &= Pe^{kt} \\ v &= Qe^{kt} \end{aligned} \tag{3}$$

где P и Q — постоянные, которые определим по условию, чтобы величины (3) удовлетворяли при всяком значении t нашей системе, которую напишем попрежнему так:

$$\begin{aligned} p_1(\delta)\, u + q_1(\delta)\, v &= g_1 e^{kt} \\ p_2(\delta)\, u + q_2(\delta)\, v &= g_2 e^{kt} \end{aligned} \tag{1'}$$

Подставляя и сократив на e^{kt}, получим для определения P и Q уравнения

$$\begin{aligned} p_1(k)\, P + q_1(k)\, Q &= g_1 \\ p_2(k)\, P + q_2(k)\, Q &= g_2 \end{aligned} \tag{4}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} P &= \frac{g_1 q_2(k) - g_2 q_1(k)}{p_1(k)\, q_2(k) - p_2(k)\, q_1(k)} = \frac{g_1 q_2(k) - g_2 q_1(k)}{S(k)} \\ Q &= \frac{g_2 p_1(k) - g_1 p_2(k)}{p_1(k)\, q_2(k) - p_2(k)\, q_1(k)} = \frac{g_2 p_1(k) - g_1 p_2(k)}{S(k)} \end{aligned} \tag{5}$$

Мы предполагаем, что k не равно ни одному из корней $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ характеристического уравнения

$$S(\lambda) = 0$$

Если же k равно одному из этих корней, например

$$k = \lambda_1$$

то частное решение надо искать под видом

$$\begin{aligned} u &= Pte^{kt} = Pte^{\lambda_1 t} \\ v &= Qte^{kt} = Qte^{\lambda_1 t} \end{aligned} \tag{6}$$

на чем мы останавливаться не будем, так как этот случай у нас не встретится.

§ 28. Корни характеристического уравнения могут быть как вещественные, так и мнимые; все формулы предыдущих параграфов остаются

справедливыми как для комплексных корней, так и для чисто мнимых, но для численных приложений надо будет эти формулы преобразовать так, чтобы избавиться от мнимых знаков.

Чтобы этого достигнуть, необходимо будет пользоваться следующими формулами Эйлера.

Обозначим, как обыкновенно,

$$\sqrt{-1}=i$$

тогда будет

$$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha;\quad e^{-i\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha$$
$$\sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i};\quad \cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} \tag{1}$$

Так как коэффициенты характеристического уравнения вещественные, то мнимые корни будут попарно сопряженные.

Пусть будет λ_1 и λ_2 пара таких сопряженных корней:

$$\lambda_1=a+bi$$
$$\lambda_2=a-bi$$

Возьмем пару решений, им соответствующих, и преобразуем ее так, чтобы мнимых знаков не было.

Имеем

$$p_1(\lambda_1)=A_1(a^2-b^2)+B_1a+C_1+(B_1b+2A_1ab)i=\alpha+\beta i$$
$$p_1(\lambda_2)=A_1(a^2-b^2)+B_1a+C_1-(B_1b+2A_1ab)i=\alpha-\beta i$$

значит, будет на основании формул (7) § 25

$$v=-e^{at}\{(\alpha+\beta i)K_1e^{bit}+(\alpha-\beta i)K_2e^{-bit}\}$$

подставляя вместо e^{bit} и e^{-bit} величины

$$e^{bit}=\cos bt+i\sin bt;\quad e^{-bit}=\cos bt-i\sin bt$$

получим

$$v=-e^{at}\{[\alpha(K_1+K_2)\cos bt-\beta(K_1+K_2)\sin bt]+$$
$$+i[(K_1-K_2)\beta\cos bt+(K_1-K_2)\alpha\sin bt]\}$$

Положив теперь

$$K_1+K_2=M;\quad K_1-K_2=Ni$$

получим

$$v=-e^{at}[(\alpha M-\beta N)\cos bt-(\beta M+\alpha N)\sin bt] \tag{2}$$

причем M и N — произвольные постоянные.

Совершенно так же преобразуем выражение u, и, очевидно, положив

$$q_1(\lambda_1)=D_1(a^2-b^2)+E_1a+F_1+(E_1b+2D_1ab)i=\gamma+\varepsilon i$$
$$q_1(\lambda_2)=D_1(a^2-b^2)+E_1a+F_1-(E_1b+2D_1ab)i=\gamma-\varepsilon i$$

получим

$$u = e^{at}\{(\gamma M - \varepsilon N)\cos bt - (\varepsilon M + \gamma N)\sin bt\} \tag{3}$$

после чего решение, соответствующее паре мнимых корней, мнимых знаков содержать не будет.

Если бы и вторая пара корней была мнимая, то, очевидно, и для нее поступили бы совершенно так же.

§ 29. При производстве численных расчетов придется вычислять значения корней

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$$

характеристического уравнения

$$S(\lambda) = 0$$

Приведем здесь общий способ такого решения.

Пусть предложенное уравнение есть

$$\lambda^4 + p\lambda^3 + q\lambda^2 + r\lambda + s = 0 \tag{1}$$

подставим вместо λ:

$$\lambda = z - \frac{p}{4}$$

тогда преобразованное уравнение не будет содержать члена с z^3, т. е. будет вида

$$z^4 + az^2 + bz + c = 0 \tag{2}$$

положим

$$z^4 + az^2 + bz + c = (z^2 + ez + f)(z^2 - ez + g) \tag{3}$$

и покажем, каким образом найти коэффициенты e, f, g.

Уравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в предыдущем равенстве, имеем

$$\begin{aligned} g + f - e^2 &= a \\ e(g - f) &= b \\ gf &= c \end{aligned} \tag{4}$$

находя из первых двух уравнений величины g и f, подставляем их в третье и получаем для определения e уравнение

$$\left(a + e^2 + \frac{b}{e}\right)\left(a + e^2 - \frac{b}{e}\right) = 4c$$

или по приведении

$$e^6 + 2ae^4 + (a^2 - 4c)e^2 - b^2 = 0 \tag{5}$$

Это есть уравнение третьей степени относительно e^2, и так как известный член есть $-b^2$, величина отрицательная, то это уравнение

всегда имеет, по крайней мере, один положительный корень; пусть этот корень будет

$$e^2 = n$$

причем, повторяем, $n > 0$. Берем

$$e = +\sqrt{n}$$

Из уравнений (4) находим

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2}(a + n) + \frac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{n}} \\ f &= \frac{1}{2}(a + n) - \frac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{n}} \end{aligned} \tag{6}$$

и разыскание величин z привелось к решению двух квадратных уравнений:

$$\begin{aligned} z^2 + ez + f &= 0 \\ z^2 - ez + g &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

пусть корни первого суть

$$z_1 \text{ и } z_2$$

корни второго

$$z_3 \text{ и } z_4$$

тогда будет

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= z_1 - \frac{p}{4}; \quad \lambda_2 = z_2 - \frac{p}{4} \\ \lambda_3 &= z_3 - \frac{p}{4}; \quad \lambda_4 = z_4 - \frac{p}{4} \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, все дело привелось к нахождению *положительного* корня уравнения

$$y^3 + 2ay^2 + (a^2 - 4c)y - b^2 = 0$$

в которое обращается уравнение (5), положив $e^2 = y$.

Практически искомый корень находится быстрее всего попытками, найдя сперва непосредственной подстановкой два таких положительных значения

$$y = \alpha \text{ и } y = \beta$$

при которых левая часть имеет разные знаки, и затем сближая эти пределы.

Если бы оказалось, что такие два числа найти не удается, то, положив

$$y = x - \frac{2a}{3}$$

приводим предыдущее уравнение к такому, которое x^2 не содержит, т. е. будет вида

$$x^3+px+q=0$$

Обозначим первую часть этого уравнения через $f(x)$, так что

$$f(x)=x(x^2+p)+q$$

Очевидно, будет

$$f(-\infty)<0$$

$$f(0)=q$$

$$f(+\infty)>0$$

Известно, что это уравнение имеет все три корня вещественные, когда

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2<0$$

I. При соблюдении этого условия будет:

1) если $q<0$, то: два корня отрицательные и один положительный, ибо сумма корней равна нулю;

2) если $q>0$, то: один корень отрицательный и два положительных; из них надо взять тот, который

больше $\frac{2a}{3}$.

II. Когда

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2>0$$

то уравнение имеет *один* вещественный корень, другие два — мнимые; чтобы этот корень был положительный, надо, чтобы было $q<0$.

I. Очевидно, что условие

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2<0$$

возможно лишь в том случае, когда $p<0$, т. е. отрицательное, так что, положив $p=-m$, будем иметь $m>0$, и уравнение будет вида

$$x^3-mx+q=0 \qquad (9)$$

причем

$$\left(\frac{m}{3}\right)^3>\left(\frac{q}{2}\right)^2$$

Полагаем

$$\cos\alpha=\frac{q}{2}\left(\frac{3}{m}\right)^{\frac{3}{2}}$$

и, вычислив α, определяем x по формулам

$$x_1 = -2\sqrt{\frac{m}{3}}\cos\frac{1}{3}\alpha$$

$$x_2 = 2\sqrt{\frac{m}{3}}\cos\frac{1}{3}(\pi+\alpha) \qquad (9')$$

$$x_3 = 2\sqrt{\frac{m}{3}}\cos\frac{1}{3}(\pi-\alpha)$$

и берем тот положительный корень, который больше $\frac{2}{3}a$.

Когда

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2>0 \text{ и } q<0$$

и при этом $p<0$, так что уравнение имеет вид

$$x^3-mx-n=0 \qquad (m>0,\ n>0) \quad (10)$$

то надо брать

$$\operatorname{ch}\alpha=\frac{n}{2}\left(\frac{3}{m}\right)^{\frac{3}{2}}$$

и

$$x=2\sqrt{\frac{m}{3}}\operatorname{ch}\frac{1}{3}\alpha \qquad (10')$$

другие два корня мнимые.

II. Когда

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2>0 \text{ и } q<0 \text{ и } p>0$$

так что уравнение имеет вид

$$x^3+px-n=0,\ n>0 \qquad (11)$$

то, положив

$$\operatorname{sh}\alpha=\frac{n}{2}\left(\frac{3}{p}\right)^{\frac{3}{2}}$$

и определив из этого равенства α_1, находим x по формуле

$$x=2\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{sh}\frac{1}{3}\alpha \qquad (11')$$

Другие два корня — мнимые.

Во втором и третьем случаях, когда уравнение имеет один вещественный корень, его удобно вычислять по формуле Кардана

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad (12)$$

пользуясь таблицею квадратов, кубов, корней квадратных и корней кубичных, имеющихся при всяком инженерном справочнике; после того как этот корень вычислен, если бы потребовалось знать и мнимые корни, то разыскание их сразу приводится к решению квадратного уравнения.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ГИРОСКОПОВ

ГЛАВА I

ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

§ 30. Самым простым случаем вращательного движения твердого тела есть его движение по инерции, т. е. без действия внешних сил.

Ясно, что центр тяжести тела в этом случае или движется равномерно и прямолинейно, или находится в покое. Так как нас интересует лишь вращательное движение тела вращения, то будем считать, что центр тяжести его находится в покое.

Возьмем ось симметрии тела за ось OZ, эта ось будет главною осью инерции, другие же две главных оси будут лежать в плоскости, перпендикулярной к OZ, причем любые две взаимно перпендикулярные прямые, лежащие в этой плоскости, можно принять за главные оси инерции.

Все моменты инерции относительно любой оси, лежащей в этой плоскости, равны между собой.

Таким образом, в уравнениях Эйлера (§ 16) будет

$$A=B$$

$$L=M=N=0$$

и эти уравнения будут

$$A\frac{dp}{dt}+(C-A)qr=0 \tag{1}$$

$$A\frac{dq}{dt}+(A-C)pr=0 \tag{2}$$

$$C\frac{dr}{dt}=0 \tag{3}$$

Вместе с тем имеем (см. стр. 38)

$$\begin{aligned} p &= -\psi' \cos\varphi \sin\theta + \theta' \sin\varphi \\ q &= \quad \psi' \sin\varphi \sin\theta + \theta' \cos\varphi \\ r &= \quad \varphi' + \psi' \cos\theta \end{aligned} \tag{4}$$

Необходимо еще задать начальные условия; пусть они будут: при

$$t = 0$$

должно быть

$$\begin{aligned} &\theta = \theta_0; \ \psi = \psi_0; \ \varphi = \varphi_0 \\ &\theta' = \theta_0'; \ \psi = \psi_0'; \ \varphi = \varphi_0' \end{aligned} \tag{5}$$

По этим начальным значениям, пользуясь формулами (4), вычисляем начальные значения p_0, q_0 и r_0 проекций угловой скорости на оси x, y, z.

Из уравнения (3) следует

$$Cr = C_1$$

где C_1 — произвольная постоянная, значение которой есть

$$C_1 = Cr_0$$

так что будет

$$r = r_0$$

и, положив $r_0 = n$, будем иметь

$$r = n \tag{6}$$

Подставив это значение в уравнения (1) и (2), получим

$$A\frac{dp}{dt} + (C - A)nq = 0$$

$$A\frac{dq}{dt} - (C - A)np = 0$$

Положим, как это всегда будет в наших приложениях, что момент инерции около оси симметрии наибольший, так что

$$C > A$$

и пусть

$$\frac{C - A}{A} \cdot n = k \tag{7}$$

тогда, обозначая производные значками, имеем

$$\begin{aligned} p' + kq &= 0 \\ q' - kp &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

откуда следует

$$p'' + k^2 p = 0$$

и по интегрировании

$$p = C_2 \cos kt + C_3 \sin kt$$

затем, на основании первого из уравнений (8), будет

$$q = C_2 \sin kt - C_3 \cos kt \tag{9}$$

Определив постоянные произвольные по начальным условиям, получим

$$\begin{aligned} p &= p_0 \cos kt - q_0 \sin kt \\ q &= q_0 \cos kt + p_0 \sin kt \end{aligned}$$

Пусть будет

$$\begin{aligned} p_0 &= \omega \cos \alpha \\ q_0 &= \omega \sin \alpha \end{aligned}$$

так что

$$\omega = + \sqrt{p_0^2 + q_0^2} \tag{10}$$

$$\cos \alpha = \frac{p_0}{\omega}; \qquad \sin \alpha = \frac{q_0}{\omega}$$

тогда будет

$$\begin{aligned} p &= \omega \cos (kt + \alpha) \\ q &= \omega \sin (kt + \alpha) \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, величины p, q, r выражаются весьма просто.

Для определения переменных θ, ψ, φ надо величины (11) подставить в уравнения (4), и мы получим следующую систему трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} -\psi' \cos\varphi \sin\theta + \theta' \sin\varphi &= \omega \cos (kt + \alpha) \\ \psi' \sin\varphi \sin\theta + \theta' \cos\varphi &= \omega \sin (kt + \alpha) \\ \varphi' + \psi' \cos\theta &= n \end{aligned} \tag{12}$$

Интегрирование этих уравнений в такой форме представляется затруднительным, поэтому вернемся к уравнениям (1), (2), (3) и на основании их установим некоторые общие свойства движения тела в рассматриваемом случае. Эти свойства дадут нам возможность ввести вместо неизвестных θ, ψ и φ новые неизвестные, которые определяются весьма просто, а по ним найдутся затем θ, ψ и φ.

Умножив уравнения (1), (2), (3) соответственно на $2p$, $2q$, $2r$ и сложив полученные равенства, имеем

$$2Appʹ + 2Aqqʹ + 2Crrʹ = 0$$

что по интегрировании дает

$$A(p^2 + q^2) + Cr^2 = C_4 = \text{постоянной}. \tag{13}$$

Умножив те же уравнения соответственно на $2Ap$, $2Aq$, $2Cr$ и сложив, имеем

$$2A^2 ppʹ + 2A^2 qqʹ + 2C^2 rrʹ = 0$$

т. е. по интегрировании

$$A^2 p^2 + A^2 q^2 + C^2 r^2 = H^2 = \text{постоянной}. \tag{14}$$

Очевидно, что формула (13) выражает интеграл живых сил, формула (14) — интеграл моментов количеств движения.

На основании начальных значений будет

$$C_4 = A(p_0^2 + q_0^2) + Cn^2$$

и на основании (11) и (10) будет

$$p^2 + q^2 = p_0^2 + q_0^2 = \omega^2 \tag{15}$$

что мы имели и раньше. Затем

$$H^2 = A^2(p_0^2 + q_0^2) + C^2 r_0^2 = A^2\omega^2 + C^2 n^2 \tag{16}$$

Так как $L = M = N = 0$, то на основании закона моментов количеств движения (§ 15) скорость точки, представляющей конец вектора, изображающего главный момент количеств движения, равна нулю, значит этот вектор имеет постоянную длину и занимает в пространстве постоянное направление.

Длина этого вектора есть, очевидно,

$$H = +\sqrt{A^2\omega^2 + C^2 n^2}$$

Примем это неизменное направление вектора H, т. е. линию OH, за новую ось координат $O\zeta_1$, *неподвижных* в пространстве, другие же две оси $O\eta_1$ и $O\xi_1$ направим, как будет указано ниже.

Проекции вектора H в начальный момент на оси x, y, z суть

$$Ap_0,\ Aq_0 \text{ и } Cn$$

В § 3 приведены выражения косинусов углов между осями ξ, η, ζ и x, y, z через Эйлеровы углы; полагая в этих формулах (7)

$$\theta = \theta_0;\ \psi = \psi_0;\ \varphi = \varphi_0$$

получим начальные значения сказанных косинусов, которые обозначим соответственно табличке § 1

$$a_1^0,\ a_2^0,\ a_3^0,\ \ldots\ c_3^0$$

тогда проекции вектора H на оси ξ, η, ζ будут

$$\begin{aligned} H_\xi &= Ap_0 a_1^0 + Aq_0 a_2^0 + Cn a_3^0 \\ H_\eta &= Ap_0 b_1^0 + Aq_0 b_2^0 + Cn b_3^0 \\ H_\zeta &= Ap_0 c_1^0 + Aq_0 c_2^0 + Cn c_3^0 \end{aligned} \tag{17}$$

значит будет

$$\cos(\zeta_1\hat{\xi}) = \frac{H_\xi}{H};\quad \cos(\zeta_1\hat{\eta}) = \frac{H_\eta}{H};\quad \cos(\zeta_1\hat{\zeta}) = \frac{H_\zeta}{H} \tag{18}$$

и направление оси ζ_1 по отношению к осям ξ, η, ζ вполне определяется и может быть нанесено на вспомогательную сферу, после чего можем избрать оси $O\xi_1$ и $O\eta_1$, например, как показано на фиг. 22.

Будем теперь определять положение осей x, y, z по отношению к этим новым координатным осям ζ_1, η_1, ξ_1 Эйлеровыми углами

$$\theta_1,\ \psi_1,\ \varphi_1$$

Так как проекции вектора H на оси x, y, z суть

$$Ap,\ Aq,\ Cr$$

с другой же стороны, те же проекции выражаются равенствами

$$H\cos(x\hat{\zeta}_1),\ H\cos(y\hat{\zeta}_1) \text{ и } H\cos(z\hat{\zeta}_1)$$

и по формулам § 3 мы имели вообще (стр. 26):

$$\cos(x\hat{\zeta}_1) = -\cos\varphi_1 \sin\theta_1$$

$$\cos(y\hat{\zeta}_1) = \sin\varphi_1 \sin\theta_1$$

$$\cos(z\hat{\zeta}_1) = \cos\theta_1$$

то будет

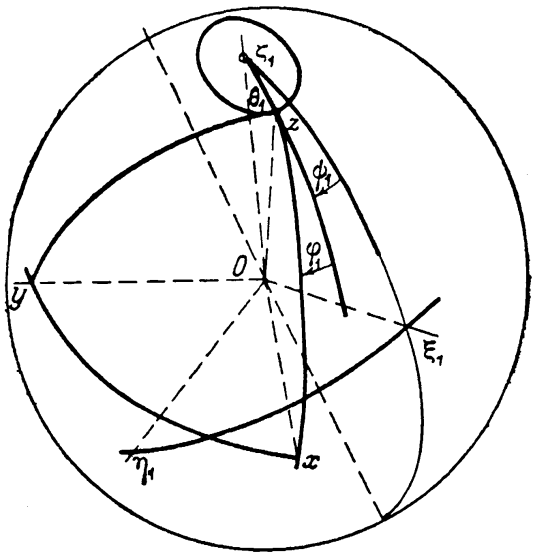
$$\frac{Ap}{H} = -\cos\varphi_1 \sin\theta_1$$

$$\frac{Aq}{H} = \sin\varphi_1 \sin\theta_1 \qquad (19)$$

$$\frac{Cr}{H} = \cos\theta_1$$

Последнее уравнение дает

$$\cos\theta_1 = \frac{Cn}{H} = \frac{Cn}{\sqrt{A^2\omega^2 + C^2 n^2}}$$



Фиг. 22

т. е. угол θ_1 сохраняет *постоянное* значение, которое обозначим через γ, так что

$$\theta_1 = \gamma \qquad (20)$$

причем

$$\cos\gamma = \frac{Cn}{H} = \frac{Cn}{\sqrt{A^2\omega^2 + C^2 n^2}}$$

Отсюда следует

$$\theta_1' = 0$$

и на основании формул (12) и (11) будет

$$p = -\psi_1' \cos\varphi_1 \sin\gamma = \omega\cos(kt + \alpha)$$

$$q = \psi_1' \sin\varphi_1 \sin\gamma = \omega\sin(kt + \alpha)$$

следовательно,

$$\frac{q}{p} = -\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}(kt + \alpha)$$

При $t = 0$ будет

$$-\operatorname{tg}\varphi_1^0 = \operatorname{tg}\alpha$$

взяв

$$\varphi_1^0 = \pi - \alpha$$

будем иметь

$$\varphi_1 = \pi - \alpha - kt = \varphi_1^0 - kt \qquad (21)$$

следовательно,

$$\varphi_1' = -k$$

и на основании последней из формул (12) получим

$$\psi_1' \cos\gamma = n + k$$

Но на основании формулы (7)

$$n + k = \frac{C}{A} n$$

следовательно будет

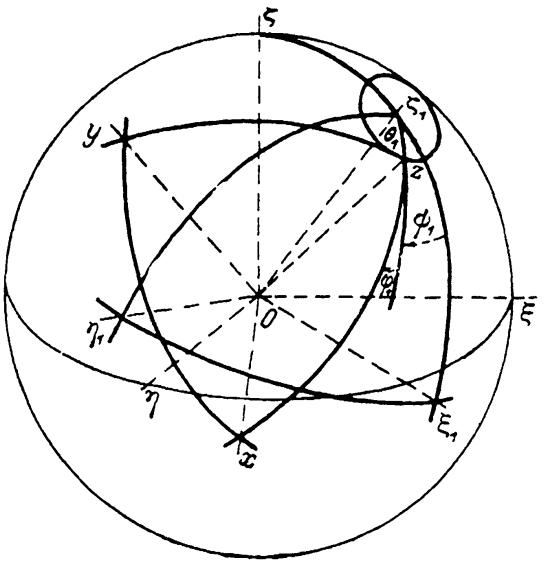
$$\psi_1' = \frac{Cn}{A \cos\gamma} = \frac{H}{A}$$

и

$$\psi_1 = \psi_1^0 + \frac{H}{A} t = \psi_1^0 + \frac{C}{A \cos\gamma} \cdot nt \qquad (22)$$

Формулы (20), (21) и (22) вполне определяют движение тела по отношению к осям ζ_1, η_1, ξ_1 и показывают, что ось Oz (фиг. 23) описывает вокруг оси $O\zeta_1$ круговой конус, угол при вершине которого есть 2γ, и тело вращается около оси Oz равномерно с угловою скоростью $-k$; сама же ось Oz, описывая сказанный конус, равномерно вращается около оси $O\zeta_1$ с угловою скоростью

$$\frac{Cn}{A \cos\gamma}$$



Фиг. 23.

Заметим, что в том случае, когда скорость n весьма велика по сравнению с p_0 и q_0, то n будет весьма велико и по сравнению с ω. Угол γ, для которого

$$\cos\gamma = \frac{Cn}{\sqrt{A^2\omega^2 + C^2 n^2}} \qquad (23)$$

и

$$\sin\gamma = \frac{A\omega}{\sqrt{A^2\omega^2 + C^2 n^2}}$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{A\omega}{Cn}$$

будет весьма малый, и, значит, практически будет представляться, что ось симметрии тела занимает неизменное положение в пространстве, ибо конус, описываемый этой осью вокруг главного вектора количеств движения, имеет весьма малый угол при вершине.

Так как положение осей ζ_1, η_1, ξ_1 по отношению к осям ζ, η, ξ вполне определенное, то когда движение тела по отношению к осям ζ_1, η_1, ξ_1 известно, то оно известно и относительно осей ζ, η, ξ, и вопрос

требует лишь преобразования одних координат в другие, на чем останавливаться не будем.

§ 31. В предыдущих параграфах мы дали пример применения уравнений Эйлера вращательного движения твердого тела, покажем теперь Лагранжеву форму этих уравнений, которой мы будем постоянно пользоваться в дальнейшем.

Когда центр тяжести тела неподвижен, то положение тела вполне определяется тремя Эйлеровыми углами

$$\theta,\ \psi,\ \varphi$$

которые и могут быть приняты за независимые Лагранжевские координатные параметры.

Для составления уравнений движения на основании сказанного в § 12 надо составить два выражения:

1) живой силы,

2) элементарной работы действующих на тело сил.

Всегда удобнее составлять выражение удвоенной живой силы $2T$, это будет целая функция второй степени относительно производных

$$\theta',\ \psi',\ \varphi'$$

сами же переменные будут входить гораздо более сложно; в наших приложениях время t явно входить не будет.

Итак, пусть будет

$$\text{Ж. С.} = T(\theta',\ \psi',\ \varphi',\ \theta,\ \varphi,\ \psi)$$

Элементарная работа будет вида

$$\delta U = \Theta\,\delta\varphi + \Psi\,\delta\psi + \Phi\,\delta\varphi$$

причем величины Θ, Ψ, Φ при движении тела в сопротивляющейся среде и под действием сил, изменяющихся со временем, будут известные функции переменных

$$\theta,\ \varphi,\ \psi;\ \theta',\ \psi'\ \varphi' \text{ и } t$$

Уравнения движения составляются по следующей схеме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \Theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \Phi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = \Psi$$

Для твердого тела вращения, вращающегося около своей оси симметрии, которую мы примем за ось z и которая будет главною осью инерции с моментом инерции C, другие два главные момента инерции A и B между собою равны, и удвоенная живая сила будет

$$2T = Ap^2 + Aq^2 + Cr^2$$

причем, как мы уже имели,

$$\begin{aligned} p &= \theta' \sin\varphi - \psi' \cos\varphi \sin\theta \\ q &= \theta' \cos\varphi + \psi' \sin\varphi \sin\theta \\ r &= \varphi' + \psi' \cos\theta \end{aligned} \tag{I}$$

таким образом будет

$$2T = A\theta'^2 + A\psi'^2 \sin^2\theta + C(\varphi' + \psi' \cos\theta)^2 \tag{II}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial T}{d\theta'} = A\theta'; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta'}\right) = A\theta''$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = A\psi'^2 \sin\theta\cos\theta - C\psi' \sin\theta\,(\varphi' + \psi'\cos\theta)$$

и первое уравнение движения будет

$$A\theta'' + (C - A)\psi'^2 \sin\theta\cos\theta + C\varphi'\psi'\sin\theta = \Theta \tag{1}$$

Затем имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = A\psi' \sin^2\theta + C\cos\theta(\varphi' + \psi'\cos\theta) = (A\sin^2\theta + C\cos^2\theta)\psi' + C\varphi'\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right) = (A\sin^2\theta + C\cos^2\theta)\psi'' + 2(A - C)\psi'\theta'\sin\theta\cos\theta +$$

$$+ C\varphi''\cos\theta - C\varphi'\theta'\sin\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0$$

Значит, второе уравнение будет

$$\begin{aligned} &(A\sin^2\theta + C\cos^2\theta)\psi'' + 2(A - C)\psi'\theta'\sin\theta\cos\theta + \\ &+ C\varphi''\cos\theta - C\varphi'\theta'\sin\theta = \Psi \end{aligned} \tag{2}$$

Это же самое уравнение можно писать в такой форме:

$$\begin{aligned} &A\psi''\sin^2\theta + 2A\psi'\theta'\sin\theta\cos\theta - C(\varphi' + \psi'\cos\theta)\theta'\sin\theta + \\ &+ C\cos\theta(\varphi' + \psi'\cos\theta)' = \Psi \end{aligned} \tag{2'}$$

Наконец, для третьего уравнения имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = C(\varphi' + \psi' \cos\theta); \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

так что это уравнение будет

$$C\frac{d}{dt}(\varphi' + \psi' \cos\theta) = \Phi \tag{3}$$

Во многих случаях

$$\Phi = 0$$

тогда уравнение (3) дает

$$\varphi' + \psi' \cos\theta = n \tag{4}$$

причем n есть величина *постоянная*.

На основании этого равенства уравнения (1) и (2) будут

$$A\theta'' - A\psi'^2 \sin\theta \cos\theta + Cn\psi' \sin\theta = \Theta \tag{5}$$

$$A\psi'' \sin^2\theta + 2A\psi'\theta' \sin\theta \cos\theta - Cn\theta' \sin\theta = \Psi \tag{6}$$

Во многих практических приложениях величина n весьма велика по сравнению с ψ' и θ', так что в предыдущих уравнениях член

$$A\psi'^2 \sin\theta \cos\theta$$

будет весьма мал по сравнению с членом

$$Cn\psi' \sin\theta$$

и член

$$2A\psi'\theta' \sin\theta \cos\theta$$

будет весьма мал по сравнению с

$$Cn\theta' \sin\theta$$

Отбрасывая эти малые члены, будем иметь

$$A\theta'' + Cn\psi' \sin\theta = \Theta \tag{7}$$

$$A\psi'' \sin^2\theta - Cn\theta' \sin\theta = \Psi \tag{8}$$

Наконец, если почему-либо движение тела таково, что изменения величин θ' и ψ' с течением времени весьма малы, так что и величины θ'' и ψ'' весьма малые, то предыдущие уравнения примут вид

$$\psi' \sin\theta = \frac{1}{Cn}\Theta \tag{9}$$

$$\theta' \sin\theta = -\frac{1}{Cn}\Psi \tag{10}$$

В этом последнем виде эти уравнения рассматриваются, например, в небесной механике в вопросе о движении Земли вокруг ее оси.

Вторые части этих уравнений в этом случае суть

$$\Theta = \frac{\partial U}{\partial \theta}; \quad \Psi = \frac{\partial U}{\partial \psi}$$

где U есть потенциал сил притяжения Солнца и Луны на Землю, так что

$$\Theta = \Theta(\theta, \varphi, \psi, t)$$

и

$$\Psi = \Psi(\theta, \varphi, \psi, t)$$

Сперва принимают в этих формулах

$$\theta = \theta_0; \quad \varphi = nt + \varphi_0; \quad \psi = \psi_0$$

тогда и Θ и Ψ становятся известными функциями времени t и уравнения (9) и (10) принимают вид

$$\psi' = \frac{1}{Cn \sin \theta_0} \Theta_1(t) \tag{9'}$$

$$\theta' = -\frac{1}{Cn \sin \theta_0} \Psi_1(t) \tag{10'}$$

Функции $\Theta_1(t)$ и $\Psi_1(t)$ содержат члены вида: во-первых,

$$\alpha + \beta t + \gamma t^2 + \ldots$$

так называемые непериодические или вековые и, во-вторых, члены периодические, т. е. выражающиеся через синусы и косинусы различных аргументов, линейно зависящих от времени, т. е. члены вида

$$a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + s_1\right) + a_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_2} + s_2\right) + \ldots$$

где a_1, τ_1, s_1, a_2, τ_2, s_2 и т. д. известные постоянные.

Члены первого рода по интегрировании дадут выражения вида

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_0 + \alpha_1 t + \beta_1 t^2 + \ldots \\ \theta_1 &= \theta_0 + \alpha_2 t + \beta_2 t^2 + \ldots \end{aligned} \tag{11}$$

Члены второго ряда дадут в составе ψ и θ члены с теми же самыми периодами τ_1, τ_2 и т. д.

Из этих членов для Земли наибольшие:

$$\psi_2 = -17''.2 \sin \Omega - 1''.3 \sin 2L - 0''.2 \sin \odot$$

$$\theta_2 = \quad 9''.2 \cos \Omega + 0''.55 \cos 2L + 0''.089 \cos 2\odot$$

В этих выражениях Ω — средняя долгота лунного узла (период $\tau_1 = 18.6$ года), L — средняя долгота Солнца (период $\tau_2 = 1$ году), период $2L$ есть $\frac{1}{2}\tau_2$, т. е. $\frac{1}{2}$ года, $\mathfrak{c}$ — средняя долгота Луны (период $\tau =$ лунному месяцу $= 27.3$ дня).

Совокупность членов

$$\psi_1 = \psi_0 + \alpha_1 t + \beta_1 t + \ldots$$

или, точнее говоря, $\frac{d\psi_1}{dt}$ составляет так называемую *прецессию*, совокупность членов θ_1 представляет вековое изменение наклонности эклиптики.

Периодические члены ψ_1 и θ_2 составляют так называемую *нутацию*.

Коэффициенты

$$\psi_0 = 0; \quad \alpha_1 = 50''.23; \quad \beta_1 = 0''.0002$$
$$\theta_0 = 23^\circ 27' 31''.83; \quad \alpha_2 = -0''.476; \quad \beta_2 = -0''.00000143$$

время t выражено в формуле (11) в годах, считая от 1 января 1850 г.

Как видно, прецессия составляет в год $50''.2$ и совершается все время в одну сторону; если бы прецессии не было, то полюс мира вследствие нутации описывал бы около своего среднего положения эллипс с полуосями $17''.2$ и $9''.2$; наоборот, если бы нутации не было, то полюс мира описывал бы около полюса эклиптики малый круг, сферический радиус коего равен $23^\circ 27'$, делая полный оборот в течение

$$\frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{50.2} = 25\,800 \text{ лет}$$

Является вопрос, может ли тело вращаться таким образом, чтобы была только постоянная прецессия без нутации? Этот вопрос разберем в следующем параграфе.

§ 32. Мы имели уравнения (5) и (6); § 31

$$A\theta'' - A\psi'^2 \sin\theta\cos\theta + Cn\psi' \sin\theta = \Theta \tag{5}$$

$$A\psi'' \sin^2\theta + 2A\psi'\theta' \sin\theta\cos\theta - Cn\theta' \sin\theta = \Psi \tag{6}$$

Чтобы тело двигалось с постоянной прецессией без нутации, необходимо, чтобы было

$$\psi' = \text{постоянной} = k$$

$$\theta = \text{постоянной} = \theta_0$$

отсюда следует

$$\psi'' = 0; \quad \theta' = 0; \quad \theta'' = 0$$

и уравнение (6) дает

$$\Psi = 0$$

Уравнение же (5) принимает вид

$$\Theta = Cnk \sin\theta_0 - Ak^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 \tag{12}$$

т. е. на тело должна действовать пара Θ, величина которой постоянна и равна значению (12).

Чтобы определить ось этой пары, стоит только обратиться к чертежу на фиг. 5 § 3 и уравнению (12), тогда ясно, что ось пары перпендикулярна к плоскости ζOz, т. е. это есть линия ON.

В нашем случае линия ON перемещается в плоскости $\xi O\eta$ с угловою скоростью $\psi' = k$. Таким образом, мы видим, что, при движении с постоянной прецессией без нутации, на тело должна действовать постоянная пара, лежащая в плоскости ζOz, момент этой пары должен быть

$$\Theta = Cnk \sin\theta_0 - Ak^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0$$

и надо, чтобы в начальный момент

$$\begin{aligned} \psi' &= k \\ \theta &= \theta_0 \\ \vartheta' &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Тогда и во всякий момент времени будет

$$\psi' = k; \quad \theta = \theta_0$$

и вместе с тем

$$\psi = \psi_0 + kt$$

т. е. ось Oz — собственного вращения тела — будет описывать равномерным движением конус с углом при вершине $2\theta_0$. Спрашивается, всякая ли пара, момент которой имеет постоянную величину, ось же направлена по линии узлов ON, может произвести движение с постоянной прецессией без нутации?

Пусть будет

$$\Theta = M$$

тогда надо в уравнении (12) поставить вместо Θ величину M и решить это уравнение относительно k.

Таким образом имеем

$$Ak^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 - Cnk \sin\theta_0 + M = 0 \tag{14}$$

отсюда следует

$$k = \frac{Cn}{2A\cos\theta_0} \pm \frac{1}{2A\sin\theta_0\cos\theta_0}\sqrt{C^2n^2\sin^2\theta_0 - 4M\cdot A\sin\theta_0\cos\theta_0}$$

необходимо, чтобы корни этого уравнения были *вещественные*, для чего должно быть

$$C^2n^2\sin^2\theta_0 \geqslant 4MA\sin\theta_0\cos\theta_0$$

считая, что $\sin\theta_0 \neq 0$, это условие есть

$$C^2n^2\sin\theta_0 \geqslant 4MA\cos\theta_0$$

иначе

$$\operatorname{tg}\theta_0 \geqslant \frac{4MA}{C^2n^2} \tag{14'}$$

выбором угла θ_0 этому условию всегда можно удовлетворить.

Положим, что угол θ_0 выбран так, что

$$C^2n^2\sin^2\theta_0 - 4MA\sin\theta\cos\theta = N^2$$

тогда для k будем иметь *два* возможных значения

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{Cn}{2A\cos\theta_0} + \frac{N}{2A\sin\theta_0\cos\theta_0} \\ k_2 &= \frac{Cn}{2A\cos\theta_0} - \frac{N}{2A\sin\theta_0\cos\theta_0} \end{aligned} \tag{15}$$

Предполагая, что $n > 0$, видим, что оба эти значения будут положительные и

$$k_1 > k_2$$

Таким образом, если на тело действует постоянный момент M вдоль линии узлов ON (фиг. 5) и начальные условия движения (13) удовлетворяют условиям (14) и (14'), то тело будет двигаться с постоянной прецессией без нутации, при этом скорость прецессии может быть двоякая — „большая“, или быстрая, прецессия (k_1) и „малая“, или медленная, прецессия (k_2).

Тело будет двигаться с тою или иною из этих двух скоростей, смотря каково значение $\dot{\psi}$ при $t = 0$; если это значение

$$\dot{\psi}_0' = k_1$$

то и все время будет

$$\dot{\psi}' = k_1$$

т. е. быстрая прецессия.

Если вначале было

$$\dot{\psi}_0' = k_2 \tag{16}$$

то и во все время движения будет

$$\psi' = k_2$$

т. е. прецессия медленная.

Если соблюдено условие

$$C^2 n^2 \sin\theta_0 = 4MA\cos\theta_0$$

то

$$k_1 = k_2 = \frac{Cn}{2A\cos\theta_0}$$

Если начальные условия при $t = 0$

$$\theta = \theta_0$$
$$\theta' = 0$$

и

$$\psi_0' = k_1$$

или

$$\psi_0' = k_2$$

не соблюдены, то прецессия будет сопровождаться нутацией.

§ 33. Формула (12) § 32 имеет ряд практических применений при определении тех пар и моментов, которые должны быть приложены к вращающемуся твердому телу, чтобы оно имело заданную скорость прецессии.

В этих приложениях обыкновенно угол $\theta_0 = 90°$, и формула (12) принимает вид

$$\Theta = Cn\psi' \qquad (16')$$

где C — момент инерции тела около его оси симметрии, n — угловая скорость вращения тела около этой оси, ψ' — скорость прецессии, Θ — момент пары, производящей прецессию, направленный по линии узлов так, что при положительном значении Θ этот вектор откладывается по направлению от O к N, при отрицательном — по направлению обратному (фиг. 5).

Во многих случаях практики эти моменты происходят от возбуждаемых движением добавочных реакций связей, например добавочных давлений вращающегося тела на свои подшипники.

Дадим некоторые приемы такого определения этих реакций.

1) Положим, что на корабле имеется турбина, приводящая во вращение гребной вал; спрашивается, какие добавочные реакции вызываются качкою и поворотами корабля. Здесь ось вращения турбины параллельна продольной оси корабля; примем, что турбина вращается, если на нее смотреть с кормы, по часовой стрелке. Положим, что корабль совершает поворот вправо, тогда угловая скорость ψ' будет изображаться вектором, откладываемым вверх. Пара Θ тогда будет

изображаться вектором, направленным перпендикулярно диаметральной плоскости корабля к левому борту, причем ее момент

$$\Theta = Cn\psi'$$

где ψ' — угловая скорость поворота.

Например, положим, что на большом корабле турбина делает 300 оборотов в минуту, тогда

$$n = \frac{300}{60} \cdot 2\pi = 31.4$$

пусть вес ротора, гребного вала и винта есть 80 т, радиус инерции всей этой системы 1.25 м, тогда

$$C = \frac{80}{9.80} \cdot (1.25)^2 = 10.7 \text{ т} \cdot \text{м}^2$$

Пусть корабль описывает полную циркуляцию в 3 минуты, тогда его угловая скорость

$$\psi' = \frac{2\pi}{180} = 0.0349$$

и значит

$$\Theta = 10.7 \cdot 31.4 \cdot 0.0349 = 11.0 \text{ т} \cdot \text{м}$$

и при положительном значении момент Θ сообщает дифферент на нос. Дифферент этот будет совершенно ничтожен, так, например, если водоизмещение корабля 10 000 т, длина 160 м, то на таком корабле момент, изменяющий дифферент на 1 см, составит около 125 т · м; значит, в нашем случае изменение дифферента, производимое парою Θ, составит около 1 мм, т. е. совершенно неприметную величину.

2) Положим, корабль совершает размахи килевой качки, т. е. качается около поперечной своей оси Oy, причем закон этих качаний есть

$$\psi = \alpha \cos \frac{2\pi t}{\tau_0}$$

Если положительная ось Ox направлена в корму и положительная ось Oy к правому борту, то ось z, согласно условию, сделанному в § 1, должна быть направлена вниз, и значит, когда $\psi' > 0$, то нос корабля опускается; в этом случае вектор Θ, изображающий пару, откладывается по оси Oz вниз и при отрицательном ψ' — вверх. Величина же момента пары есть

$$\Theta = Cn\psi'$$

При килевой качке

$$\psi' = -\frac{2\pi}{\tau_0} \alpha \cdot \sin \frac{2\pi t}{\tau_0}$$

наибольшая амплитуда α при весьма крупной океанской зыби не больше 7°, т. е. $\frac{1}{8}$, период τ_0 пусть будет 12 сек., тогда

$$\frac{2\pi}{\tau_0} \cdot \alpha = \frac{2\pi}{12} \cdot \frac{1}{8} = 0.065$$

и момент Θ будет

$$\Theta = -\frac{2\pi}{\tau_0} \cdot Cn\alpha \sin \frac{2\pi t}{\tau_0}$$

Наибольшее значение этого момента есть

$$0.065 \cdot 10.7 \cdot 31.4 = 22 \text{ т} \cdot \text{м}$$

Этот момент Θ, будучи переменным, соответствует „рысканию на курсе“, но величина этого рыскания ничтожно мала.

В самом деле, пусть угол рыскания есть σ и K — момент инерции корабля, тогда, даже не считая сопротивления воды, имели бы уравнение

$$K \cdot \sigma'' = -\frac{2\pi}{\tau_0} \cdot Cn\alpha \sin \frac{2\pi t}{\tau_0}$$

откуда

$$\sigma = \frac{\tau_0}{2\pi} \cdot \frac{Cn\alpha}{K} \cdot \sin \frac{2\pi t}{\tau_0}$$

Момент инерции нашего корабля будет приблизительно

$$K = \frac{10\,000}{9.80} \cdot \left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{10\,000}{9.80} \cdot (40)^2 \approx 1600000 \text{ т} \cdot \text{м}^2$$

следовательно наибольшее значение σ есть,

$$\sigma_0 = \frac{12}{2\pi} \cdot \frac{10.7 \cdot 31.4}{1600000} \cdot \frac{1}{8}$$

или, в секундах дуги,

$$\sigma_0 = \frac{12}{2\pi} \cdot \frac{10.7 \cdot 31.4}{1600000} \cdot \frac{1}{8} \cdot 206000 = 10''$$

т. е. такая величина, которая на корабле не только при громадной волне с видимым периодом 12 сек. и размахах килевой качки в 7° на сторону измерена быть не может, но и вообще, по своей малости, на корабле измерена быть не может.

Некоторые авторы, получив, например, момент 22 т · м и переведя его в килограммометры (22000 кг · м) и не имев дела с кораблем, выражают опасение насчет напряжений в связях, вызываемых таким изгибающим корабль моментом.

Необходимо заметить, что общие связи корабля рассчитываются приблизительно с пятерным запасом прочности на изгибающей момент

$$M=\frac{1}{30}D\cdot l$$

где D есть водоизмещение корабля, l — длина его. Так, в нашем случае будет

$$M=\frac{1}{30}\cdot 10000\cdot 160=53\,000\ \text{т}\cdot\text{м}$$

и ничтожность изгибающего момента в 22 т · м для общей крепости нашего корабля становится очевидной.

3) Как третий пример, приведем следующий, взятый из книги Граммеля (R. Grammel. Der Kreisel), в виду его наглядных, с кораблестроительной точки зрения, несообразностей. Вот этот пример (стр. 189): „Пусть момент инерции гребных колес колесного парохода равен 41 300 кг · м^2, что соответствует весу колес в 60 000 кг и радиусу инерции 2.6 м, то при 55 оборотах в минуту и продолжительности описания полной циркуляции $T_0=60$ сек., кренящий момент будет 25 000 кг · м, вследствие которого может произойти качание корабля с амплитудою в несколько (mehreren) градусов. При боковой качке в 15° на сторону и периоде 4 сек. получится гироскопический момент, достигающий 98 000 кг · м, т. е. на значительном волнении опасный по своей величине".

При сделанном нами условии, когда колеса вращаются на передний ход их, угловая скорость изображается вектором, перпендикулярным диаметральной плоскости корабля и направленным к правому борту.

При повороте вправо скорость прецессии изобразится вектором, направленным вверх, и пара Θ отложится в корму, так что крен, ею производимый, будет на *правую* сторону. Момент этой пары будет

$$\Theta=Cn\dot{\psi}'$$

В нашем случае

$$n=\frac{55}{60}\cdot 6.28=5.76$$

$$\dot{\psi}'=\frac{360^\circ}{60}=\frac{2\pi}{60}=0.1047$$

$$\Theta=41300\cdot 5.76\cdot 0.1047=25000\ \text{кг}\cdot\text{м}$$

Боковая качка корабля при указанной амплитуде будет представляться уравнением

$$\psi=15^\circ\cdot\cos\frac{2\pi t}{4}=0.262\cdot\cos\frac{2\pi t}{4}$$

$$\dot{\psi}'=-0.262\cdot\frac{\pi}{2}\sin\frac{2\pi t}{\tau}=-0.412\sin\frac{2\pi t}{\tau}$$

так что наибольший момент

$$\Theta = 41300 \cdot 5.76 \cdot 0.412 = 98000 \text{ кг} \cdot \text{м}$$

как и указано в примере.

В тексте не указаны ни водоизмещение, ни размеры того корабля, к которому приведенные данные относятся, а чтобы судить о том, какое влияние указанные моменты на корабль произведут, надо знать его элементы; если мы попытаемся хотя бы с грубым приближением подсчитать наименьшие размеры корабля, то мы придем к ряду несообразностей.

Сказано: число оборотов колес 55 в минуту, радиус инерции 2.6 м. При таком радиусе инерции диаметр колес должен быть около 6.5 м. Окружная скорость $3.25 \cdot 5.76 = 18.7$ м/сек., скидывая на скольжение 20%, видим, что скорость корабля должна бы быть 15 м/сек., т. е. 30 узлов — таких колесных судов нет. Но допустим, что судно проектируется. Корабль — морской; при диаметре 6.5 м погружение нижней точки колеса должно быть около 1.8 м, значит углубление корабля около 3.5 м, следовательно ширина его около 10 м, значит длина не меньше 90 м и водоизмещение около 2100 т. Метацентрическая высота около 1.5 м, положение центра тяжести близко к ватерлинии.

Сказано, что корабль описывает циркуляцию в 1 мин. (что невозможно), в таком случае окружность циркуляции составит около 900 м, ее радиус около 140 м, при таком радиусе циркуляции боковая слагающая сопротивления воды будет

$$\frac{2100}{9.8} \cdot \frac{15 \cdot 15}{140} = 345 \text{ т}$$

Эта сила будет приложена приблизительно на половине углубления, т. е. на 1.75 м ниже центра тяжести, и произведет на циркуляции, описываемой *вправо*, крен на *левый* борт (т. е. внаружу, а не внутрь, как кренится цирковая лошадь, бегая по арене) на угол k, определяемый по равенству

$$\sin k = \frac{345 \cdot 1.75}{2100 \cdot 1.5}$$

где 1.5 м есть метацентрическая высота, и будет

$$k = 11^{\circ}$$

Исчисленный же гироскопический момент производит крен k_1, определяемый равенством

$$\sin k_1 = \frac{25}{2100 \cdot 1.5}$$

$$k_1 = 0^{\circ}27'$$

и притом *на правый* борт, т. е. в сторону уменьшения крена, происходящего на повороте при описании циркуляции. Отсюда несообразность сделанного утверждения „о размахе в несколько градусов", вызываемом гироскопическим моментом, становится очевидной.

Момент

$$\text{(-)} = -98 \sin \frac{2\pi t}{4} \text{ т} \cdot \text{м}$$

который почитается даже опасным, может произвести рысканье на курсе, амплитуда коего будет

$$\sigma = 98 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{K}$$

где K — момент инерции корабля около вертикальной оси, который составит приблизительно

$$K = \frac{2100}{9.8} \cdot \left(\frac{90}{4}\right)^2 = 108000 \text{ т} \cdot \text{м}^2$$

и угол σ в секундах будет

$$\sigma = 98 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{206000}{108000} = 76'' \simeq 1'.3$$

такое рыскание не только не представляет никакой опасности, но не может быть на корабле даже замечено.

На связи же корабля этот момент в 98 т · м также никакого влияния оказать не может, ибо эти связи рассчитаны на изгибающий момент

$$M = \frac{1}{30} \cdot 2100 \cdot 90 = 6300 \text{ т} \cdot \text{м}$$

Мы вошли в эти подробности, чтобы показать, что гироскопические моменты, происходящие от вращающихся частей корабельных механизмов, на самый корабль практически никакого влияния не оказывают. Если на что они и действуют, то на свои подшипники и их болты, и могут вызывать неравномерность работы самих механизмов. Общая прочность правильно построенного корабля так велика, что по отношению к ней все эти моменты ничтожно малы.

§ 34. Рассмотрим в заключение этой главы движение волчка.

С механической точки зрения, волчок представляет „тяжелое", т. е. находящееся под действием силы тяжести, твердое тело вращения, подпертое в какой-либо точке своей оси симметрии, причем этому телу сообщено быстрое вращательное движение около оси симметрии.

Сделаем сперва некоторые упрощающие задачу предположения.

1) Положим, что конец оси волчка заканчивается острием, вполне отточенным, и опирается в маленькую сферическую абсолютно гладкую и твердую полость, подобно тому как у „топки" компаса, тогда можно

принять, что точка O — конец острия — неподвижна, реакция же опоры направлена по нормали в этой точке.

2) Трения в опоре нет.

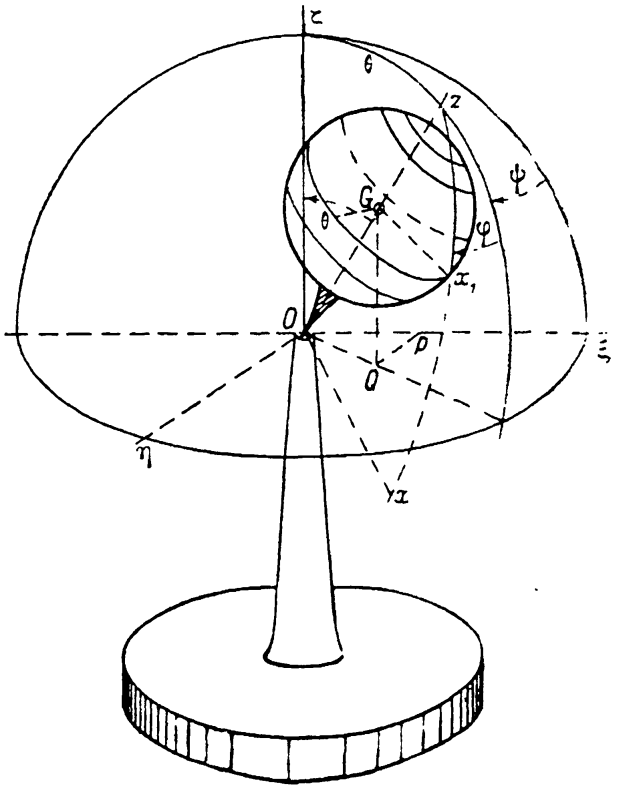
Положение волчка определяется координатами его центра тяжести

$$\xi_0, \quad \eta_0, \quad \zeta_0 \qquad (*)$$

относительно осей $O\xi\eta\zeta$, начало коих в точке O и ось $O\zeta$ направлена вертикально вверх, и тремя Эйлеровыми углами

$$\theta, \quad \psi, \quad \varphi \qquad (**)$$

как показано на чертеже (фиг. 24).



Фиг. 24.

Между величинами (*) и (**) имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= l\cos\theta \\ \eta_0 &= l\sin\theta\sin\psi \\ \xi_0 &= l\sin\theta\cos\psi \end{aligned} \qquad (17)$$

где $l = OG$ есть расстояние центра тяжести G до точки опоры, причем $l > 0$, если G выше O, и $l < 0$, если G лежит ниже O.

Из формул (17) следует

$$\begin{aligned} \zeta_0' &= -l\sin\theta\cdot\theta' \\ \eta_0' &= l\cos\theta\sin\psi\cdot\theta' + l\sin\theta\cos\psi\cdot\psi' \\ \xi_0' &= l\cos\theta\cos\psi\cdot\theta' - l\sin\theta\sin\psi\cdot\psi' \end{aligned}$$

Обозначая через M массу волчка, видим, что удвоенная живая сила поступательного движения его

$$2T_1 = M(\xi_0'^2 + \eta_0'^2 + \zeta_0'^2) = Ml^2(\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta)$$

живая сила вращательного движения по формуле (II) § 32 есть

$$2T_2 = A\theta'^2 + A\psi'^2\sin^2\theta + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2$$

Положив

$$A_1 = A + Ml^2$$

имеем полную живую силу волчка

$$2T = A_1\theta'^2 + A_1\psi'^2\sin^2\theta + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2$$

Элементарная работа

$$\delta U = -Mg\delta\zeta_0 = Mgl\sin\theta\cdot\delta\theta = Pl\sin\theta\cdot\delta\theta$$

где P есть вес волчка.

Значит

$$\Theta = Pl\sin\theta;\quad \Psi = 0;\quad \Phi = 0$$

Стоит только в уравнениях (5) и (6) вместо буквы A написать букву A_1 и подставить вышенаписанные значения Θ, Ψ и Φ, и мы получим уравнения движения волчка в такой форме:

$$\varphi' + \psi'\cos\theta = n$$

$$\begin{aligned} &A_1\theta'' - A_1\psi'^2\sin\theta\cos\theta + Cn\psi'\sin\theta = Pl\sin\theta \\ &A_1\psi''\sin^2\theta + 2A_1\psi'\theta'\sin\theta\cos\theta - Cn\theta'\sin\theta = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Заметим, что левая часть последнего уравнения есть

$$\frac{d}{dt}[A_1\psi'\sin^2\theta + Cn\cos\theta] \tag{19}$$

следовательно будет

$$A_1\psi'\sin^2\theta + Cn\cos\theta = C_1 \tag{19'}$$

где C_1 есть постоянная произвольная.

В тех приложениях, которые мы имеем в виду, величина ψ' будет весьма малая по сравнению с n, поэтому в последнем уравнении первый член будет мал по сравнению со вторым и можно писать

$$Cn\cos\theta = C_1$$

откуда следует

$$\theta = \theta_0 = \text{постоянной} \tag{20}$$

как первое приближение.

Первое уравнение (18), отбросив в нем член, содержащий множитель ψ'^2 и член $A_1\theta''$, дает

$$\psi' = \frac{Pl}{Cn} = \mu = \text{постоянной} \tag{21}$$

т. е. в первом приближении движение волчка совершается с постоянной прецессией без нутации.

Из (21) следует

$$\psi = \psi_0 + \mu t$$

выберем направление от $O\xi$ так, чтобы вначале было

$$\dot{\psi}_0 = 0$$

тогда, как первое приближение, имеем

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \mu t \\ \theta &= \theta_0 \end{aligned} \tag{21'}$$

Чтобы получить второе приближение, полагаем

$$\begin{aligned} \psi &= \mu t + \psi_1 \\ \theta &= \theta_0 + \theta_1 \end{aligned}$$

подставляем эти величины в уравнения (18) и ограничиваемся в них членами первого порядка относительно величин μ, ψ_1, θ_1, ψ_1' и θ_1', ибо все эти величины весьма малые.

Таким образом будет

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= \sin 2(\theta_0 + \theta_1) = \sin 2\theta_0 + 2\theta_1 \cos 2\theta_0 \\ \sin \theta &= \sin(\theta_0 + \theta_1) = \sin \theta_0 + \theta_1 \cos \theta_0 \\ \sin^2 \theta &= \sin^2(\theta_0 + \theta_1) = \sin^2 \theta_0 + \theta_1 \sin 2\theta_0 \\ \dot{\psi}' &= \mu + \dot{\psi}_1' \\ \theta'' &= \theta_1'' \end{aligned}$$

Подставляя эти величины в первое из уравнений (18) и в уравнение (19'), получим на основании (21):

$$\begin{aligned} A_1 \theta_1'' + Cn\dot{\psi}_1' \sin \theta_0 &= 0 \\ Cn\theta_1 - A_1 \dot{\psi}_1' \sin \theta_0 &= A_1 \mu \sin \theta_0 \end{aligned} \tag{22}$$

положим, что при $t = 0$:

$$\theta_1 = 0, \qquad \psi_1 = 0; \qquad \dot{\psi}_1' = -\mu, \qquad \theta_1' = 0$$

Мы взяли $\dot{\psi}_1' = -\mu$, ибо, пуская волчок, мы скорости $\dot{\psi}'$ не сообщаем, значит при $t = 0$ должно быть

$$\dot{\psi}_0' = 0 = \mu + \dot{\psi}_1'$$

Исключая $\dot{\psi}_1'$ из уравнений (22), получим

$$A_1^2 \theta_1'' + C^2 n^2 \theta_1 = A_1 Cn\mu \sin \theta_0$$

Отсюда, положив

$$p^2 = \frac{C^2 n^3}{A_1^2}$$

имеем

$$\theta_1 = G_1 \cos pt + G_2 \sin pt + \frac{A_1 \mu \sin \theta_0}{Cn}$$

где G_1 и G_2 — постоянные произвольные, значения которых, определенные по начальным условиям, суть

$$G_1 = -\frac{A_1 \mu \sin \theta_0}{Cn}$$

$$G_2 = 0$$

так что

$$\theta_1 = \frac{A_1 \mu \sin \theta_0}{Cn}\left(1 - \cos \frac{Cn}{A_1} t\right) \tag{23}$$

первое уравнение (22) по интегрировании дает

$$A_1 \theta_1' + Cn\psi_1 \sin \theta_0 = 0$$

так что на основании (23) будет

$$\psi_1 = -\frac{A_1 \mu}{Cn} \sin \frac{Cn}{A_1} t \tag{24}$$

Величины θ_1 и ψ_1, подобно тому как в движении земной оси, представляют нутацию.

Итак, мы имеем

$$\psi = \mu t - \frac{A_1 \mu}{Cn} \sin \frac{Cn}{A_1} t$$

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{A_1 \mu \sin \theta_0}{Cn}\left(1 - \cos \frac{Cn}{A_1} t\right)$$

причем

$$\mu = \frac{Pl}{Cn} \tag{21}$$

Пусть будет

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\mu} = 2\pi \cdot \frac{Cn}{Pl} \tag{25}$$

тогда τ_1 представляет период прецессии, т. е. тот промежуток времени, в течение которого ось волчка делает полный оборот вокруг оси $O\zeta$, т. е. вертикальной линии, проведенной через точку опоры, и пусть

$$\tau_2 = \frac{2\pi A_1}{Cn} \tag{26}$$

есть период нутации. Ясно, что отношение

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{A_1 Pl}{C^2 n^2} \tag{27}$$

при весьма большом значении n будет весьма малое, особенно, если и Pl малая величина; вместе с тем и величины нутации

$$\frac{A_1 \mu}{Cn}; \quad \frac{A_1 \mu}{Cn} \sin \theta_0$$

будут весьма малые.

Пусть, например,

$P = 200$ г,

$l = 0.1$ см,

$C = 0.8$,

$A_1 = 0.5$,

$n = 300$ (около 50 об. в секунду),

$\theta_0 = 5°$,

тогда будет

$$\mu = \frac{Pl}{Cn} = \frac{200 \cdot 0.1}{0.8 \cdot 300} = \frac{1}{12} \text{ сек.}^{-1}$$

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\mu} = 24\pi = 75 \text{ сек.}$$

$$\tau_2 = 2\pi \cdot \frac{0.5}{0.8 \cdot 300} = \frac{5\pi}{1200} = 0.013 \text{ сек.} = \frac{1}{76} \text{ сек.}$$

$$\frac{A_1 \mu}{Cn} = \frac{1}{12} \cdot \frac{0.5}{0.8 \cdot 300} = \frac{1}{5760} = 0°0'36''$$

$$\frac{A_1 \mu}{Cn} \cdot \sin \theta_0 = \theta_0 \cdot 0°0'07''$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{24\pi}{5\pi} \cdot 1200 = 5760$$

Из этих чисел видно, что траектория точки z будет состоять из 5760 завитков, таких, как acb, коих вершины, такие, как a и c, представляющие точки возврата, будут располагаться на круге, описанном сферическим радиусом $\theta_0 = 5°$; вершины же b будут располагаться посредине между a и c на круге, описанном сферическим радиусом $5°0'7''$ (фиг. 25).

Очевидно, что наблюдателю это мелкое дрожание (нутация) по своей малости заметно не будет и ему будет казаться, что волчок имеет только прецессию с периодом обращения 75 сек.

Если пренебречь нутацией, то, как видно, центр тяжести волчка движется равномерно по горизонтальному кругу, радиус коего равен $l \sin \theta_0$, описывая этот круг с угловою скоростью μ.

Спрашивается, какая же сила заставляет центр тяжести волчка двигаться таким образом? — Очевидно, что это есть горизонтальная

слагающая реакции опоры; обозначая эту слагающую через H и вертикальную слагающую через V, имеем равенства

$$V=P$$

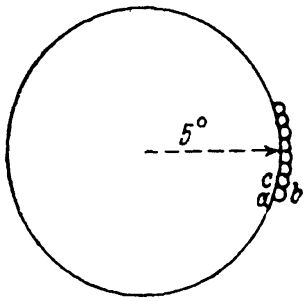
$$H=\frac{P}{g}\cdot\mu^2\cdot l\sin\theta_0$$

Мы предположили, что трения нет и что конец оси волчка есть точка, тогда этот конец будет опираться в точке E (фиг. 26) такой, что

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{H}{V}=\frac{\mu^2 l\sin\theta_0}{q} \tag{28}$$

При движении волчка точка E будет описывать малый круг EE_1, радиус которого есть

$$EF=b\sin\gamma \tag{29}$$



Фиг. 25.

где b — радиус топки, неподвижная же точка оси волчка есть центр топки O, и если этот радиус не настолько мал, чтобы им можно было пренебречь по сравнению с l, то в уравнениях (18)—(27) надо букву l заменить через $l-b$.

§ 35. Рассмотрим теперь влияние разного рода возмущающих сил, которые могут действовать на волчок.

В тех приложениях, которые мы будем иметь, эти силы будут двух родов:

1) Силы трения — в данном случае это будет трение шпильки о топку.

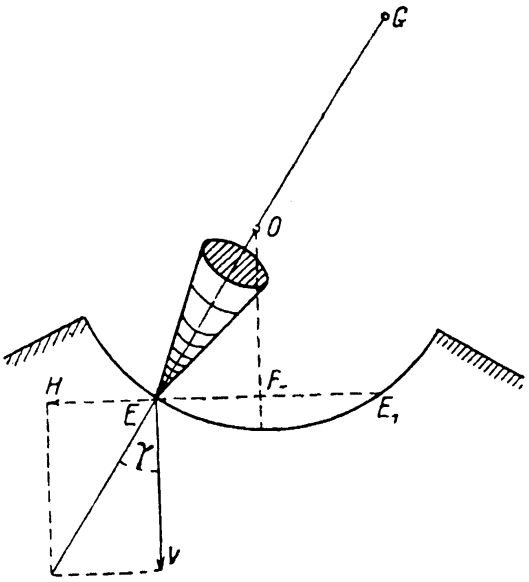
2) Возмущающие силы, происходящие от движения опоры, находящейся, например, на качающемся корабле или самолете, на которых волчком иногда пользуются для получения горизонтальной плоскости или отвесной линии. Эти силы будут выражаться известными функциями времени, обыкновенно периодическими.

Возвращаясь к нашему примеру, необходимо было бы еще принять во внимание то обстоятельство, что шпилька не оканчивается *точкою* в математическом смысле этого слова, а некоторою поверхностью вращения, радиусы кривизны которой весьма малы; для простоты можно принять, что эта поверхность сферическая, как то делал механик Брауер для картушек компаса, радиус a этой сферы будет весьма мал по сравнению с радиусом топки b, а этот последний мал по сравнению c расстоянием $GO=l$.

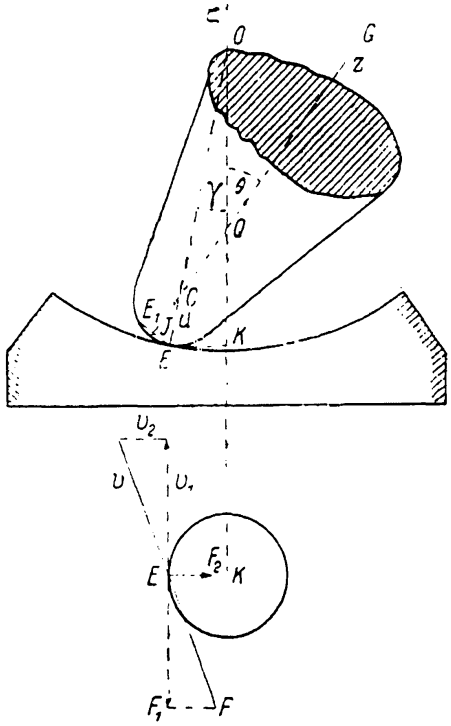
При этом предположении и допущении, что волчок занимает положение, близкое к прямому, при котором его ось вертикальна, так что углы θ и γ малые, можно приближенно учесть влияние трения, не прибегая к сложным выкладкам.

При малых углах θ и γ нормальное давление N будет равно весу волчка P, и, значит, нам не придется считаться с изменяемостью силы N при расчете сил трения.

Когда шпилька очерчена сферической поверхностью, то она будет касаться топки в точке E, нормаль в которой, т. е. радиус EO, составляет угол γ с отвесной линией; на этом радиусе расположится центр C очертания шпильки, через который проходит ось симметрии волчка, наклоненная под углом θ к отвесной линии, тогда, приняв плоскость чертежа за мгновенное положение плоскости ζOz, мы получим



Фиг. 26.



Фиг. 27.

положение конца шпильки, изображенное на фиг. 27 в сильно увеличенном виде.

Вследствие прецессии, точка E движется на топке по кругу радиуса EK, на шпильке эта точка не остается постоянной, а перемещается по кругу диаметром EE_1 с угловою скоростью n. Вследствие нутации, т. е. изменения угла θ', изменяются оба эти круга.

Трение шпильки о топку двоякого рода: 1) трение вследствие собственного вращения волчка, подобное трению пяты о подпятник; 2) скользящее трение вследствие движения точки E по кругу EK от прецессии ψ' и по меридиональному сечению вследствие нутации θ'.

Можно рассматривать дело и несколько иначе: при вращении волчка, точка E обладает скоростью, слагающие которой суть

$$v_1 = n \cdot \overline{EI} + \psi' \cdot \overline{EK} = na \cdot \sin(\theta - \gamma) + \psi' \cdot b \cdot \sin\gamma; \quad v_2 = b\theta' \qquad (1)$$

где

$$a=\overline{CE} \quad \text{и} \quad \overline{OE}=b$$

слагающая v_1 направлена перпендикулярно к плоскости чертежа, v_2 — в плоскости чертежа, так что в горизонтальной проекции мы получим нижнюю часть фиг. 27.

Сила трения

$$F=fP$$

и направлена в сторону, противоположную скорости; эта сила разлагается на слагающие F_1 и F_2, направленные по касательной в точке E к кругу EK и по радиусу EK.

Ввиду малости величины $\psi' b \sin\gamma$ и $b\theta'$ по сравнению с $na\sin(\theta-\gamma)$ будет

$$\begin{aligned} F_1&=F \\ F_2&=\frac{b\theta'}{na\sin(\theta-\gamma)}F \end{aligned} \tag{2}$$

Чтобы составить моменты этих сил, вообразим, что в рассматриваемый момент времени t угол $\varphi=0$, так что плоскость zGx совпадает с плоскостью чертежа, тогда координаты точки E будут

$$IE=x=a\cdot\sin(\theta-\gamma); \quad y=0; \quad z=GC+CI=l_1+a\cos(\theta-\gamma)\approx$$
$$\approx l_1+a$$

где

$$l_1=GC$$

Слагающие силы трения суть

$$\begin{aligned} Z&=0; \quad Y=F=-fP \\ X&=-fP\cdot\frac{b\theta'}{na\sin(\theta-\gamma)} \end{aligned} \tag{3}$$

следовательно, будет

$$M_z=-fPa\sin(\theta-\gamma) \tag{4}$$

другие два момента не будут нужны. Обращаясь к уравнениям движения, видим, что вместо уравнения

$$\frac{d}{dt}(\varphi'+\psi'\cos\theta)=0$$

у нас будет уравнение

$$C\cdot\frac{d}{dt}(\varphi'+\psi'\cos\theta)=M_z=-fPa\sin(\theta-\gamma) \tag{5}$$

и, значит, по интегрировании мы получим

$$\varphi' + \psi' \cos\theta = n - \frac{fPa}{C} \int_0^t \sin(\theta - \gamma)\, dt \qquad (6)$$

Очевидно, что интеграл

$$\int_0^t \sin(\theta - \gamma)\, dt > 0$$

и возрастает с течением времени, пока $\theta - \gamma > 0$, так что скорость собственного вращения вследствие трения все время *убывает*.

Обратимся теперь к уравнению (6) § 32, которое получилось из следующего:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right) = \frac{d}{dt}[A_1 \psi' \sin^2\theta + C\cos\theta(\varphi' + \psi'\cos\theta)] = \Psi \qquad (7)$$

В нашем случае $\Psi = 0$, так что по интегрировании и замене $\varphi' + \psi' \cos\theta$ его величиною (6) получим

$$A_1 \psi' \sin^2\theta + C\cos\theta \left[n - \frac{fPa}{C} \int_0^t \sin(\theta - \gamma)\, dt \right] = C_1$$

Так как при $t = 0$ должно быть

$$\psi' = 0; \quad \theta = \theta_0$$

то будет

$$C_1 = Cn\cos\theta_0$$

Величина $A_1 \psi' \sin^2\theta$ весьма мала по сравнению с $Cn(\cos\theta - \cos\theta)$, поэтому ее можно отбросить, и мы получим приближенно

$$n(\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{fPa}{C}\cos\theta \int_0^t \sin(\theta - \gamma)\, dt \qquad (8)$$

Правая часть этого равенства положительная и возрастающая, значит

$$\cos\theta - \cos\theta_0 > 0$$

т. е.

$$\theta < \theta_0$$

и притом с течением времени θ *убывает*, что показывает, что волчок, вследствие трения, приходит в прямое положение, хотя бы вначале он был пущен в положении наклонном.

Написав уравнение (8) так:

$$1 - \frac{\cos\theta_0}{\cos\theta} = \frac{fPa}{Cn} \cdot \int_0^t \sin(\theta - \gamma)\, dt$$

и продифференцировав, имеем

$$-\cos\theta_0 \cdot \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \cdot \theta' = \frac{fPa}{Cn} \cdot \sin(\theta - \gamma)$$

Мы видели из формулы (28) § 34, что угол γ весьма мал по сравнению как с θ_0, так и с θ, так что, отбросив его и сократив на $\sin\theta$, будет приближенно

$$-\cos\theta_0 \cdot \frac{\theta'}{\cos^2\theta} = \frac{fPa}{Cn}$$

Откуда следует

$$-\operatorname{tg}\theta = \frac{fPa}{Cn\cos\theta_0} \cdot t + C_1$$

или, на основании начальных условий,

$$\operatorname{tg}\theta_0 - \operatorname{tg}\theta = \frac{fPa}{Cn\cos\theta_0} \cdot t \tag{9}$$

При малых углах θ_0 и θ вместо этой формулы имеем

$$\theta = \theta_0 - \frac{fPa}{Cn} \cdot t \tag{10}$$

которая и имеет место, пока θ не обратится в нуль, т. е. волчок займет прямое положение.

Мы увидим во II части, каким образом это свойство волчка было использовано для получения отвесной линии или горизонта на корабле.

§ 36. Чтобы показать влияние периодических возмущающих сил, вернемся к уравнениям (18) § 34

$$\begin{gathered} A_1\theta'' - A_1\psi'^2\sin\theta\cos\theta + Cn\psi'\sin\theta = Pl\sin\theta \\ \frac{d}{dt}\left[A_1\psi'\sin^2\theta + Cn\cos\theta\right] = 0 \end{gathered} \tag{I}$$

в которых к правым частям надо присоединить возмущающие пары

$$\alpha\sin(kt+\gamma)$$
$$\beta\cos(kt+\delta)$$

где α, β, γ, δ — постоянные, так что эти уравнения будут

$$A_1\theta'' - A_1\psi'^2\sin\theta\cos\theta + Cn\psi'\sin\theta = Pl\sin\theta + \alpha\sin(kt+\gamma)$$

$$\frac{d}{dt}\left[A_1\psi'\sin^2\theta + Cn\cos\theta\right] = \beta\cos(kt+\delta)$$

Из последнего уравнения следует

$$A_1 \psi' \sin^2 \theta + Cn \cos \theta = \frac{\beta}{k} \sin (kt + \delta) + C_1$$

а так как при $t = 0$ должно быть

$$\theta = \theta_0; \qquad \psi' = 0$$

то мы получим

$$A_1 \psi' \sin^2 \theta + Cn (\cos \theta - \cos \theta_0) = \frac{\beta}{k} [\sin (kt + \delta) - \sin \delta]$$

При малых значениях θ и ψ' будем иметь приближенно

$$\cos \theta - \cos \theta_0 = \frac{\beta}{Cnk} [\sin (kt + \delta) - \sin \delta]$$

но

$$\cos \theta - \cos \theta_0 \simeq \frac{1}{2} (\theta_0^2 - \theta^2)$$

и предыдущее уравнение дает

$$\theta^2 = \theta_0^2 - \frac{2\beta}{Cnk} [\sin (kt + \delta) - \sin \delta] \tag{1}$$

т. е. θ^2 колеблется между значениями

$$\begin{aligned} &\theta_0^2 - \frac{2\beta}{Cnk} [1 - \sin \delta] \\ &\theta_0^2 + \frac{2\beta}{Cnk} [1 + \sin \delta] \end{aligned} \tag{2}$$

так что полная амплитуда этих колебаний есть

$$\frac{4\beta}{Cnk} \tag{3}$$

Величина β обыкновенно пропорциональна Pl, обозначим ее так:

$$\beta = h^2 Pl$$

тогда

$$\frac{4\beta}{Cnk} = \frac{4h^2}{k} \frac{Pl}{Cn}$$

Но мы видели, что

$$\frac{Pl}{Cn} = \frac{2\pi}{\tau_1}$$

где τ_1 есть период прецессии; положим

$$k = \frac{2\pi}{\tau}$$

тогда τ есть период возмущающей силы, и мы имеем

$$\frac{4\beta}{Cnk} = 4h^2 \frac{\tau}{\tau_1}$$

таким образом при весьма малом значении θ_0 амплитуда колебаний оси волчка будет

$$2h\sqrt{\frac{\tau}{\tau_1}} \qquad (4)$$

Эта формула показывает то значение, которое имеет период прецессии на сохранение волчком прямого положения при действии возмущающих сил, и почему, чтобы уменьшить это влияние, стараются увеличивать, по возможности, период прецессии, увеличивая число оборотов волчка и приближая его центр тяжести к точке опоры, т. е. к острию шпильки.

ГЛАВА II

ГИРОСКОП ФУКО И ЕГО ВИДОИЗМЕНЕНИЯ

§ 37. В 1852 г. знаменитый физик Леон Фуко представил Парижской Академии наук прибор, наглядно показывающий вращение Земли, прибор этот он назвал гироскоп (gyroscope), в переводе с греческого — „указатель вращения".

Прибор этот обладает рядом замечательных свойств, которые и были затем использованы для разного рода практических целей.

Мы разберем сперва самые существенные из этих свойств, вообразив сперва, что в приборе нет никаких вредных сопротивлений, а затем рассмотрим влияние их, чтобы яснее выяснились те предосторожности, которые надо принимать при конструкции прибора, чтобы обеспечить правильность его действия.

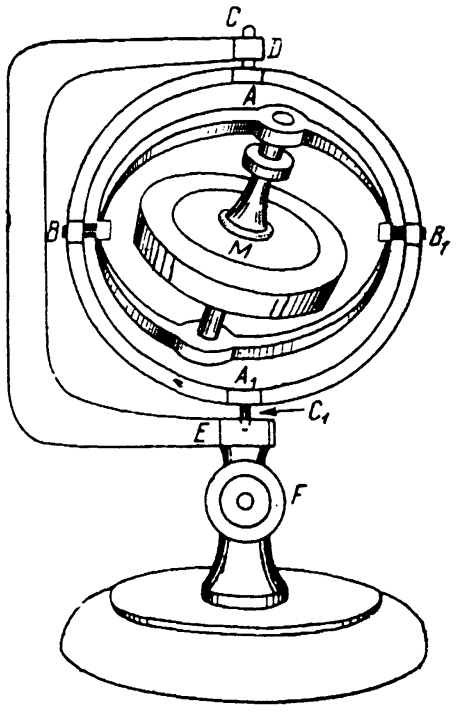
Сущность устройства гироскопа Фуко состоит в следующем: массивному маховику сообщается весьма быстрое вращение около его оси, подшипники этой оси укреплены в двух диаметрально противоположных точках кольца Кардановского подвеса; будем это кольцо называть *внутренним*.

По диаметру, перпендикулярному к оси маховика, к внутреннему кольцу прикреплены цапфы, которыми это кольцо кладется на подцапфенники второго кольца, называемого *наружным*. Наконец, наружное кольцо имеет в свою очередь цапфы, осевая линия которых перпендикулярна к осевой линии подцапфенников, несущих внутреннее кольцо. Этими цапфами наружное кольцо кладется в подцапфенники рамы, укрепленной на несущем весь прибор фундаменте.

Осевые линии всех цапф урегулированы так, чтобы они пересекались между собою и с осью маховика в его центре тяжести.

Таким образом, схема прибора следующая: M маховик (фиг. 28), AA_1 — его ось вращения, B и B_1 — цапфы внутреннего кольца, C и C_1 — цапфы наружного кольца, DE — рама, несущая весь прибор; эту раму можно поворачивать в зажимной головке F и придавать ей, а значит и оси CC_1, любой наклон.

Из этой схемы видно, что при таком устройстве прибора центр тяжести его остается неподвижным, ось маховика может принимать любое направление в пространстве и маховик свободно вращается около своей оси. Кроме того, раму прибора можно наклонять в ее плоскости, поворачивая около оси F, так что ось CC_1 наружного кольца можно ставить или вертикально, или под любым углом к горизонту.



Фиг. 28.

Наконец, наружное кольцо можно закреплять в раме так, чтобы оно около оси CC_1 вращаться не могло, точно так же и внутреннее кольцо можно скреплять с наружным, поставив его плоскость под любым углом к плоскости наружного кольца.

Когда оба кольца могут свободно вращаться около своих цапф, то маховик имеет *три* степени свободы: 1) вращение около своей оси, 2) вращение около оси внутреннего кольца и 3) вращение около оси наружного кольца; когда же одно из колец закреплено, то маховик имеет только две степени свободы.

Эти случаи мы прежде всего и разберем, делая следующие упрощающие предположения:

1) Массы колец ничтожно малы по сравнению с массою маховика, так что мы массою, а значит, и моментами инерции колец, будем пренебрегать, иными словами считать кольца невесомыми.

2) Трение в подшипниках маховика и цапфах колец будем считать *несуществующим*. Ясно, что эти условия, — чисто теоретические, неосуществимые практически, мы их вводим, чтобы выделить в чистом виде самую сущность дела, а затем мы введем в рассмотрение массы или инерцию колец и трение в осях.

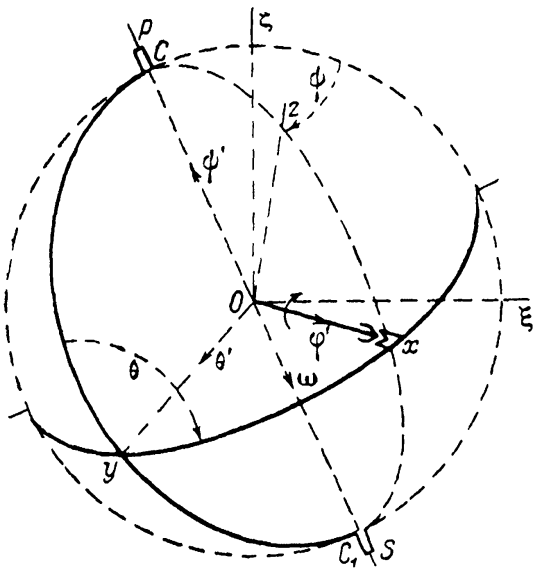
§ 38. Положим, что гироскоп имеет *три* степени свободы.

Поставим раму прибора так, чтобы ось наружного кольца была направлена *по оси мира*, т. е. лежала в плоскости меридиана места и была наклонена к горизонту под углом широты.

Условимся раз навсегда: 1) ось вращения маховика принимать за ось Ox; 2) ось цапф внутреннего кольца принимать за ось Oy, так что плоскость внутреннего кольца есть плоскость xOy.

Составим схематический чертеж, приняв за плоскость чертежа плоскость меридиана места, так что PS есть ось мира, с которой совпадает ось CC_1 наружного кольца (фиг. 29).

Возьмем оси $O\xi\eta\zeta$, неизменно связанные с фундаментом, а значит и с Землей, и направим их так: ось $O\zeta$ вертикально вверх, ось $O\xi$ горизонтально в плоскости меридиана к югу (чертеж составлен для северной широты), тогда ось $O\eta$ будет направлена горизонтально к западу.



Фиг. 29.

Пусть широта места есть λ, угловая скорость вращения Земли

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = \frac{1}{13700}\ \frac{1}{\text{сек.}}$$

Вектор, изображающий эту скорость, при нашем условии относительно изображения угловых скоростей, откладывается по оси мира *к южному* полюсу.

Примем за Лагранжевы координатные параметры:

1) Угол $\zeta Px = \psi$, т. е., говоря астрономически, „часовой“ угол точки x.

2) Угол $Pyx = \theta$, составляемый плоскостью внутреннего кольца с плоскостью наружного.

3) Угол φ поворота маховика около его оси.

Обозначим момент инерции маховика около оси Ox через A; другие два момента инерции около осей Oy и Oz, мгновенное положение которых указано на чертеже, будут равны между собою, обозначим их через B.

Составим выражение удвоенной живой силы $2T$, выражения элементарной работы δU составлять незачем, ибо оно тожественно равно нулю, так как маховик вполне уравновешен и центр тяжести его остается неподвижным.

Угловые скорости будут:

φ'	направлена	по	оси	Ox
ψ'	„	„	„	OP
θ'	„	„	„	Oy

Кроме того, вращение Земли дает скорость ω, направленную по линии OS; таким образом имеем слагающие:

$$\begin{array}{lll} \text{по оси } OP & \psi' - \omega \\ \text{„ „ } Oy & \theta' \\ \text{„ „ } Ox & \psi' \end{array}$$

Скорость $\psi' - \omega$, направленная по OP, разлагается на две:

$$\begin{array}{lll} \text{по оси } Ox & (\psi' - \omega)\cos\theta \\ \text{„ „ } Oz & (\psi' - \omega)\sin\theta \end{array}$$

Таким образом окончательно имеем

$$\begin{array}{lll} \text{по оси } Ox & p = \varphi' + (\psi' - \omega)\cos\theta \\ \text{„ „ } Oy & q = \theta' \\ \text{„ „ } Oz & r = (\psi' - \omega)\sin\theta \end{array}$$

следовательно будет

$$2T = A[\varphi' + (\psi' - \omega)\cos\theta]^2 + B[\theta'^2 + (\psi' - \omega)^2 \sin^2\theta]$$

Затем имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = A[\varphi' + (\psi' - \omega)\cos\theta]; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

и первое уравнение будет

$$\frac{d}{dt}[\varphi' + (\psi' - \omega)\cos\theta] = 0 \tag{1}$$

Отсюда следует

$$\varphi' + (\psi' - \omega)\cos\theta = n = \text{постоянной} \tag{1'}$$

Затем имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = A[\varphi' + (\psi' - \omega)\cos\theta]\cdot\cos\theta + B(\psi' - \omega)\sin^2\theta =$$

$$= An\cos\theta + B(\psi' - \omega)\sin^2\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right) = -An\sin\theta\cdot\theta' + B\sin^2\theta\cdot\psi'' + 2B(\psi' - \omega)\theta'\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0$$

Следовательно, второе уравнение Лагранжа будет

$$B\sin^2\theta\cdot\psi'' - An\sin\theta\cdot\theta' + 2B(\psi' - \omega)\cdot\theta'\sin\theta\cos\theta = 0 \tag{2}$$

Затем

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = B\theta'; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta'}\right) = B\theta''$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -A[\varphi' + (\psi' - \omega)\cos\theta](\psi' - \omega)\sin\theta + B(\psi' - \omega)^2 \sin\theta\cos\theta =$$

$$= -An(\psi' - \omega)\sin\theta + B(\psi' - \omega)^2 \sin\theta\cos\theta$$

и третье уравнение Лагранжа будет

$$B\theta'' + An(\psi' - \omega)\sin\theta - B(\psi' - \omega)^2 \sin\theta\cos\theta = 0 \qquad (3)$$

Очевидно, что уравнения (2) и (3) имеют следующее *частное решение, удовлетворяющее начальным условиям*,

$$\begin{aligned} \theta' &= 0 \\ \psi' &= \omega \end{aligned} \qquad (4)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 \\ \psi &= \psi_0 + \omega t \end{aligned} \qquad (5)$$

Эти уравнения показывают, что угол θ, т. е. полярное расстояние точки x, остается неизменным, часовой же ее угол изменяется пропорционально времени совершенно так же, как изменяется часовой угол „неподвижных“ звезд, иными словами ось маховика движется по отношению к своему фундаменту или по отношению к Земле, как двигалась бы оптическая ось телескопа-экваториала, постоянно направленная на ту же самую звезду. Короче говоря, эта ось сохраняет *неизменное направление в пространстве*, что непосредственно и следует из закона моментов количеств движения.

Как видно из уравнений (2) и (3), решение (5) не зависит при начальных условиях (4) от скорости вращения маховика n; оно есть следствие, в этом случае, не этого вращения, а сделанного предположения об отсутствии трения и выбора начальных условий. Какое бы тело мы ни подвесили, подобно описанному, без трения и при соответствующих начальных условиях оно сохраняло бы неизменное положение в пространстве и „следило бы за звездой“.[1]

---

[1] Пользуясь методом, примененным выше (§ 36) акад. А. Н. Крыловым, нетрудно показать, что при достаточно большой скорости вращения маховика n и при отсутствии трения, ось его будет при любых начальных условиях, — а не только при начальных условиях (4) — сохранять неизменное положение в пространстве и „следить за звездой“. Действительно, из анализа уравнений (2) и (3) видно, что их решение в первом приближении совпадает с точным решением (5), которое справед-

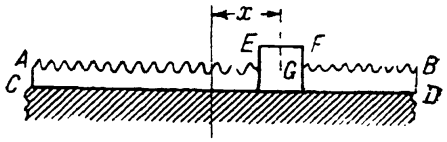
Фуко при устройстве своего прибора принял все возможные меры, чтобы сделать трение, по возможности, малым. Но оно *не может быть устранено вполне*, поэтому надо рассмотреть, сохраняя все прочие сделанные предположения, влияние трения в осях.

§ 39. Прежде чем разбирать влияние трения в осях и подшипниках гироскопа, рассмотрим простейшую задачу.

Пусть тело, масса которого m, скользит по горизонтальной плоскости CD (фиг. 30) и находится под действием пружин AE и FB, концы коих креплены неподвижно. Положение равновесия тела есть то, когда центр тяжести тела G находится посредине между A и B. Пусть мера жесткости пружин есть k, коэффициент трения при покое f_0, коэффициент трения при движении f_1, требуется найти движение тела, предполагая, что в начальный момент оно находилось в расстоянии $x_0 = a$ от среднего положения и пущено без толчка, так что скорости ему сообщено не было.

Когда тело в начальный момент находится в покое в расстоянии a от середины, то натяжение пружин дает силу

$$H = ka$$



Фиг. 30.

направленную при $a > 0$ в сторону отрицательных x.

Если эта сила меньше силы трения в покое $F_0 = f_0 P_1$, то тело останется на месте, и движения не произойдет.

Таким образом, чтобы движение началось, необходимо, чтобы было

$$H > f_0 P$$

или

$$ka > f_0 P \tag{1}$$

Положим, что это условие выполнено, тогда тело начнет двигаться в сторону отрицательных x так, что его скорость

$$x' < 0$$

ливо, однако, только при начальных условиях (4). Но второе приближение приводит к следующему решению уравнений (2) и (3):

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{B}{An} \sin\vartheta_0 (\psi_0' - \omega)\left(\cos\frac{An}{B}t - 1\right) + \frac{B}{An}\vartheta_0' \sin\frac{An}{B}t$$

$$\psi = \psi_0 + \omega t + \frac{B}{An}\frac{\vartheta_0'}{\sin\vartheta_0}\left(1 - \cos\frac{An}{B}t\right) + \frac{B}{An}(\psi_0' - \omega)\sin\frac{An}{B}t$$

Это решение показывает, что при больших значениях n, ось маховика, с точностью до очень мелкого дрожания, будет „следить за звездой", не только при начальных условиях (4), но и при любых начальных значениях ϑ_0 и ψ_0 и любых начальных скоростях ϑ_0' и ψ_0'. (*Ред.*).

и пусть в рассматриваемый момент оно находится в положении, определяемом абсциссою x. Тогда на тело действуют:

1) натяжение пружины

$$Q = -kx$$

направленное к началу координат — поэтому знак минус, и

2) сила трения *в движении*

$$F_1 = f_1 P = f_1 mg$$

направленная в сторону, обратную скорости, т. е. в нашем случае в сторону положительных x; таким образом, пока

$$x' < 0 \tag{2}$$

мы имеем уравнение движения

$$mx'' = -kx + f_1 mg \tag{3}$$

или, положив

$$\frac{k}{m} = n^2$$

$$x'' + n^2 x = f_1 g \tag{3'}$$

общий интеграл которого есть

$$x = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt + \frac{f_1 g}{n^2}$$

В начальный момент $t = 0$ должно быть

$$x = a; \quad x' = 0$$

что дает

$$a = C_1 + \frac{f_1 g}{n^2}; \quad 0 = nC_2$$

и, значит, решение, удовлетворяющее начальным условиям, есть

$$x = \left(a - \frac{f_1 g}{n^2}\right) \cos nt + \frac{f_1 g}{n^2} \tag{4}$$

Это решение имеет место, пока

$$x' < 0$$

но

$$x' = -n\left(a - \frac{f_1 g}{n^2}\right) \sin nt \tag{5}$$

Так как по предположению

$$ka > f_0 mg$$

то

$$a > \frac{f_0 g}{n^2} > \frac{f_1 g}{n^2}$$

ибо коэффициент трения при движении f_1 меньше коэффициента трения при поке f_0. Следовательно, x' остается отрицательным, пока

$$\sin nt > 0$$

т. е.

$$nt < \pi$$

Когда nt сделается равным π, то

$$x' = 0$$

и тело будет в положении

$$x_1 = -\left(a - \frac{f_1 g}{n^2}\right) + \frac{f_1 g}{n^2} = -\left(a - \frac{2f_1 g}{n^2}\right) = -a_1$$

Если в этот момент

$$ka_1 > f_0 mg \tag{6}$$

т. е. натяжение пружин преодолевает силу трения в покое, то тело начнет двигаться в сторону положительных x, если же

$$ka_1 < f_0 mg$$

то оно останется в покое в занимаемом им положении.

Положим, что

$$ka_1 > f\ mg$$

тогда тело будет двигаться в сторону положительных x, т. е. будет

$$x' > 0 \tag{7}$$

и сила трения при движении

$$F = f_1 mg$$

отрицательная, так что уравнение движения будет

$$mx'' = -kx - f_1 mg$$

или

$$x'' + n^2 x = -f_1 g \tag{8}$$

Начальные условия: при $t = \frac{\pi}{n}$ должно быть

$$x = -a_1; \quad x' = 0$$

Общий интеграл уравнения (8) есть

$$x = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt - \frac{f_1 g}{n^2}$$

Начальные условия дают

$$-a_1 = -C_1 - \frac{f_1 g}{n^2}; \quad 0 = C_2$$

так что будет

$$x = \left(a_1 - \frac{f_1 g}{n^2}\right) \cos nt - \frac{f_1 g}{n^2} \qquad \left(\frac{\pi}{n} \leqslant t < \frac{2\pi}{n}\right) \tag{9}$$

Это уравнение имеет место, пока

$$x' > 0$$

но

$$x' = -n\left(a_1 - \frac{f_1 g}{n^2}\right) \sin nt$$

а так как $t > \frac{\pi}{n}$, то будет

$$\sin nt < 0$$

пока

$$\frac{\pi}{n} \leqslant t < \frac{2\pi}{n}$$

и

$$x' > 0$$

ибо по предположению

$$a_1 - \frac{f_1 g}{n^2} > 0$$

Когда будет

$$t = \frac{2\pi}{n}$$

то

$$x' = 0$$

соответствующее значение x есть

$$x = \left(a_1 - \frac{f_1 g}{n^2}\right) - \frac{f_1 g}{n^2} = a_1 - \frac{2 f_1 g}{n^2} = a - \frac{4 f_1 g}{n^2} = a_2 \tag{10}$$

Если при таком отклонении

$$k a_2 < f_0 m g$$

т. е.

$$a_2 < \frac{f_0 g}{n^2}$$

то натяжение пружин будет меньше силы трения, и тело останется в покое в положении

$$x = a_2 = a - \frac{4f_1 g}{n^2}$$

если же будет

$$a_2 > \frac{f_0 g}{n^2}$$

то тело начнет двигаться в сторону отрицательных x, т. е. будет

$$x' < 0$$

и мы увидим, что оно дойдет до положения

$$x = -a_3 = -\left(a - \frac{6f_1 g}{n^2}\right) \tag{11}$$

и будет двигаться, таким образом, с уменьшающимися последовательно на $\frac{2f_1 g}{n^2}$ амплитудами размахов, пока не дойдет до такого размаха скажем i-го, при котором будет по абсолютной величине

$$|a_i| = \left| a - \frac{2if_1 g}{n^2} \right|$$

и

$$|a_i| < \frac{f_0 g}{n^2}$$

В положении

$$x = a_i$$

тело остановится, и движение прекратится.

Положим для краткости

$$\frac{f_1 g}{n^2} = b$$

и

$$\frac{f_0 g}{n^2} = c$$

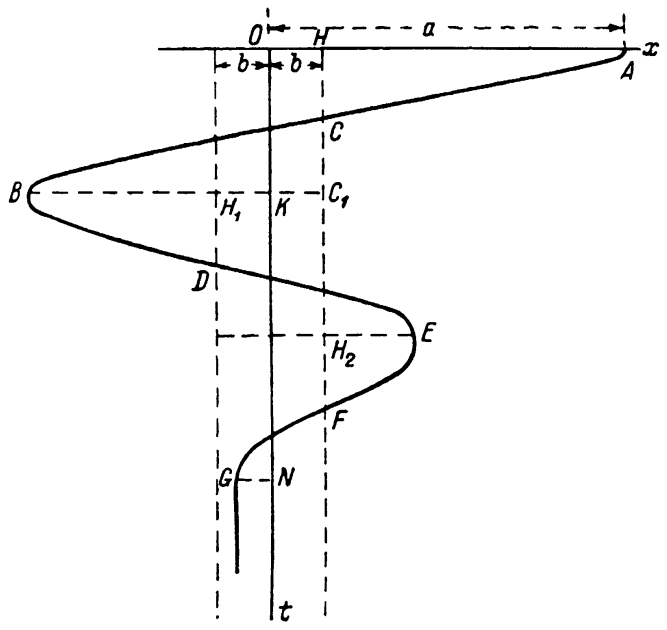
и пусть

$$\tau = \frac{2\pi}{n}$$

тогда предыдущие результаты можно представить следующей таблицей:

№ размаха	Время t		Начальное положение	Уравнение движения	Конечное положение
	от	до			
1	0	$\frac{\tau}{2}$	a	$x=(a-b)\cos\frac{2\pi t}{\tau}+b$	$-(a-2b)$
2	$\frac{\tau}{2}$	τ	$-(a-2b)$	$x=(a-3b)\cos\frac{2\pi t}{\tau}-b$	$+(a-4b)$
3	τ	$\frac{3\tau}{2}$	$+(a-4b)$	$x=(a-5b)\cos\frac{2\pi t}{\tau}+b$	$-(a-6b)$
4	$\frac{3\tau}{2}$	2τ	$-(a-6b)$	$x=(a-7b)\cos\frac{2\pi t}{\tau}-b$	$+(a-8b)$
. .	. . . .	. . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
i	$(i-1)\frac{\tau}{2}$	$i\cdot\frac{\tau}{2}$	$\mp[a-(2i-2)b]$	$x=[a-(2i-1)b]\cos\frac{2\pi t}{\tau}+(-1)^{i-1}b$	$(-1)^i(a-2ib)$
$i+1$	$i\cdot\frac{\tau}{2}$	∞	$\mp(a-2ib)$	$x=(-1)^i(a-2ib)$	. . . . .

Результаты, показанные в этой таблице, можно представить графически чертежом (фиг. 31), который строится следующим образом: для первого размаха имеем



Фиг. 31.

$$x-b=(a-b)\cos\frac{2\pi t}{\tau}$$

т. е. величина x представляется простою синусоидою с амплитудой $(a-b)$, расположенной симметрично относительно прямой $x=b$.

Синусоида эта легко строится.

Для второго размаха

$$x+b=(a-3b)\cos\frac{2\pi t}{\tau}$$

т. е. величина x представляется синусоидой, расположенной симметрично относительно прямой

$$x=-b$$

амплитуда этой синусоиды есть $(a-3b)$.

Проводим прямые

$$x=b \quad \text{и} \quad x=-b$$

и строим последовательно синусоиды с показанными в таблице амплитудами, располагая эти синусоиды поочередно симметрично относительно этих прямых.

Проводим, кроме того, прямые

$$x=c \quad \text{и} \quad x=-c$$

Когда мы дойдем до такого размаха, что вершина синусоиды (наибольшее отклонение) окажется расположенной между этими двумя прямыми, то тело в этом положении остановится, и движение его прекратится.

Подобные колебания совершает, например, картушка компаса при трении ее топки о шпильку. Величина c представляет „застой“ компаса. Как видно, эта величина обратно пропорциональна величине k, которая для компаса пропорциональна направляющей силе, поэтому при определении застоя надо уменьшать, поставив дефлектор или добавочные магниты, направляющую силу в 3—5 раз, чтобы получить во столько же раз увеличенный застой.

§ 40. Рассмотрим теперь влияние трения в оси вращения маховика и в цапфах колец гироскопа.

Положим, что по абсолютной величине момент трения в оси маховика есть Φ_1, в оси внутреннего кольца при покое Θ_0 и при движении Θ_1, в оси наружного кольца при покое Ψ_0 и при движении Ψ_1, моменты эти можно считать постоянными, знаки этих моментов обратны знакам угловых скоростей φ', θ', ψ'.

Примем собственное вращение φ' положительным, тогда Φ_1 будет отрицательное, и мы при этом моменте будем писать знак минус. При Θ_1 и Ψ_1 напишем множители ε и η, которым будем придавать значения $+1$ и -1, соответственно знакам угловых скоростей φ' и ψ'.

При таком условии первое уравнение движения будет (см. § 38)

$$\frac{d}{dt}[\varphi' + (\psi' - \omega)\cos\theta] = -\frac{1}{A}\Phi_1 = -k \qquad (1)$$

Отсюда следует

$$\varphi' + (\psi' - \omega)\cos\theta = n_1 - kt \qquad (1')$$

где n_1 есть величина постоянная.

Второе уравнение (§ 38) будет

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right) = \eta\Psi$$

т. е. в развитой форме

$$A\cos\theta\cdot\frac{d}{dt}[\varphi'+(\psi'-\omega)\cos\theta]-A\theta'[\varphi'+(\psi'-\omega)\cos\theta]\sin\theta+$$
$$+B\sin^2\theta\cdot\psi''+2B(\psi'-\omega)\theta'\sin\theta\cos\theta=\eta\Psi_1$$

или, воспользовавшись уравнениями (1) и (1′),

$$B\psi''\sin^2\theta=\eta\Psi_1+\Phi_1\cos\theta+$$
$$+A(n_1-kt)\theta'\sin\theta-2B(\psi'-\omega)\theta'\sin\theta\cdot\cos\theta \tag{2}$$

Совершенно так же третье уравнение будет

$$B\theta''=\varepsilon\Theta_1-A(n_1-kt)(\psi'-\omega)\sin\theta+B(\psi'-\omega)^2\sin\theta\cos\theta \tag{3}$$

В начальный момент $t=0$ мы имеем

$$\psi=\psi_0;\quad\theta=\theta_0;\quad\psi'=0;\quad\theta'=0;\quad\varphi'=n \tag{4}$$

Так как n весьма велико по сравнению с ψ', то вместо n_1 мы можем писать n и отбросить в предыдущих уравнениях члены, содержащие произведения $\theta'(\psi'-\omega)$ и $(\psi'-\omega)^2$, ибо они ничтожно малы по сравнению с членами, где величины θ' и $(\psi'-\omega)$ множатся на $n-kt$. Тогда уравнения движения будут

$$B\sin^2\theta\cdot\psi''=\eta\Psi_1+\Phi_1\cos\theta+A(n-kt)\theta'\sin\theta \tag{2′}$$

$$B\theta''=\varepsilon\Theta_1-A(n-kt)(\psi'-\omega)\sin\theta \tag{3′}$$

При $t=0$ уравнение (3′) будет

$$B\theta''=\varepsilon\Theta_1+An\omega\sin\theta_0 \tag{5}$$

поэтому, если по абсолютной величине будет

$$|An\omega\sin\theta_0|<\Theta_0 \tag{5′}$$

то начальное трение не будет пересилено, и движение *не начнется*, и все время будет

$$\theta'=0$$
$$\theta=\theta_0 \tag{6}$$

Уравнение (2′) примет тогда вид

$$B\sin^2\theta_0\cdot\psi''=\eta\Psi_1+\Phi_1\cos\theta_0 \tag{2″}$$

Из этого уравнения, видно, что если

$$|\Phi_1\cos\theta_0|>\Psi_0$$

то наружное кольцо будет увлечено трением в подшипниках маховика, и угол ψ не будет изменяться равномерно с угловою скоростью вращения Земли, а равномерно ускоренно, так что будет

$$\psi=\frac{1}{2}\frac{\Phi_1\cos\theta_0-\Psi_1}{B\sin^2\theta_0}\cdot t^2$$

Если бы мы изменили направление вращения маховика, то угол ψ стал бы изменяться в обратную сторону, т. е. прибор совершенно

не стал бы обнаруживать тех закономерных явлений, которые имеют место при отсутствии трения.

Если же будет

$$|\Phi_1 \cos\theta_0| < \Psi_0$$

то вторая часть в уравнении (2″) будет оставаться равной нулю — трение в подшипниках вала маховика не преодолевает трения в цапфах наружного кольца и будет

$$\psi'' = 0; \quad \psi' = 0; \quad \psi = \psi_0$$

а так как и $\theta = \theta_0$, то прибор будет сохранять неподвижное относительно Земли положение, иными словами, совершенно так же не будет обнаруживать вращения Земли, как всякий неподвижный на Земле предмет.

Итак, необходимое условие движения колец есть

$$|An\omega \sin\theta_0| > \Theta_0 \tag{7}$$

Положим, что это условие выполнено, тогда уравнение (3′) будет при начале движения:

$$B\theta'' = An\omega \sin\theta_0 - \Theta_1 \tag{8}$$

т. е. в начальный момент ускорение θ'' будет положительное, скорость θ станет возрастать, начиная от нуля, вместе с тем угол θ начнет возрастать, начиная с своего начального значения θ_0. Когда скорость θ' достигнет такого значения, что будет

$$A(n - kt)\theta' \sin\theta > \Psi_0 + \Phi_1 \cos\theta \tag{9}$$

то начнется движение наружного кольца.

Обыкновенно берут

$$\theta_0 = 90°$$

величина k весьма малая по сравнению с n, что видно из того, что когда маховику придана скорость n, удовлетворяющая условию (7), то маховик продолжает вращаться по инерции $\frac{1}{2}$ часа или более, т. е. 1800 сек., а это показывает, что

$$k < \frac{1}{1800} n$$

При $\theta_0 = 90°$, в предположении, что опыт непродолжителен, можно неравенства (7) и (9) писать так:

$$An\omega > \Theta_0$$

$$An\theta' > \Psi_0$$

ибо $\sin\theta$ в смежности со значением $\theta_0 = 90°$ изменяется весьма медленно и близок к 1.

Пусть будет

$$\frac{An\omega - \Theta_1}{B} = c$$

тогда в начале движения будет

$$\theta'' = c$$

значит

$$\theta' = ct; \quad \theta = \theta_0 + \frac{ct^2}{2}$$

Уравнение (2′) при $t = 0$ будет

$$B\psi'' = 0$$

и будет оставаться таковым, пока при некотором значении $t = t_1$ величина

$$\theta' = ct_1 = \theta_0'$$

достигнет такого значения θ_1', что будет удовлетворено неравенство

$$An\theta_0' > \Psi_0 \tag{10}$$

т. е. „гироскопический момент“ преодолеет начальное трение в цапфах наружного кольца, с этого момента $t = t_1$ начнется движение наружного кольца совместно с внутренним. Для определения этого движения надо брать уравнения (3′) и (2′), которые, после того как в них будут откинуты малые члены, примут вид

$$\begin{aligned} B\theta'' &= \varepsilon\Theta_1 - An\psi' \sin\theta + An\,\omega \sin\theta \\ B\psi'' \sin^2\theta &= \eta\Psi_1 + An\,\theta' \sin\theta \end{aligned} \tag{11}$$

причем надо брать

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -1, \text{ когда } \theta' > 0 \\ \varepsilon &= +1 \quad „ \quad \theta' < 0 \\ \eta &= -1 \quad „ \quad \psi' > 0 \\ \eta &= +1 \quad „ \quad \psi' < 0 \end{aligned}$$

Мы видели, что при отсутствии трения будет

$$\theta = \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\psi = \psi_0 + \omega t$$

положим, что при трении будет

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \theta_1$$

$$\psi = \psi_0 + \omega t + \psi_1$$

величины θ_1 и ψ_1 будут малые, ввиду малости трения, так что можно принять

$$\sin\theta = \sin\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta_1 = 1$$

вместе с тем

$$\theta' = \theta'_1; \quad \psi' = \omega + \psi'_1$$

Положим

$$\theta' = u; \quad \psi' = s$$

тогда уравнения (11) напишутся так:

$$\begin{aligned} Bu' + Ans &= \varepsilon\Theta_1 + An\omega \\ -Anu + Bs' &= \eta\Psi_1 \end{aligned} \tag{12}$$

Общий интеграл этой системы, положив

$$p = \frac{An}{B}$$

есть

$$\begin{aligned} s &= C_1\cos pt + C_2\sin pt + \omega + \varepsilon\frac{\Theta_1}{An} \\ u &= C_2\cos pt - C_1\sin pt - \eta\frac{\Psi_1}{An} \end{aligned} \tag{13}$$

Будем считать время с того момента, когда началось движение наружного кольца, т. е. когда стало

$$\theta_1' = \theta_0' = ct_1 = \frac{\Psi_0}{An} = b$$

тогда начальные условия будут: при $t = 0$ должно быть

$$u = b; \qquad s = 0$$

и мы получим

$$C_1 = -\left(\omega + \frac{\varepsilon\Theta_1}{An}\right)$$

$$C_2 = b + \frac{\eta\Psi_1}{An}$$

Таким образом будет

$$\psi' = \left(\omega + \frac{\varepsilon\Theta_1}{An}\right)(1 - \cos pt) + \left(b + \frac{\eta\Psi_1}{An}\right)\sin pt$$
$$\theta' = \left(\omega + \frac{\varepsilon\Theta_1}{An}\right)\sin pt + \left(b + \frac{\eta\Psi_1}{An}\right)\cos pt + \frac{\Psi_1}{An} \qquad (14)$$

причем для первого размаха надо брать

$$\varepsilon = -1; \qquad \eta = -1$$

ибо в начале движения

$$\theta' > 0; \qquad \psi' > 0$$

Дальнейшее исследование надо было бы провести подобно тому, как в § 39, но оно будет гораздо сложнее.

Чтобы выяснить сущность дела, можно ограничиться случаем, когда

$$\Psi_0 = \Psi_1 = 0$$

т. е. когда приняты меры, чтобы устранить трение в наружном кольце. Практически это осуществлено в гироскопах Сперри „следящей системой"; Фуко в своем гироскопе ставил раму вертикально и подвешивал наружное кольцо на нитях некрученого шелка.

В этом случае в предыдущих уравнениях будет

$$C_1 = -\left(\omega + \frac{\Theta_1}{An}\right); \qquad C_2 = 0$$

и тогда, положив

$$\frac{\Theta_1}{An} = f_1 \qquad (15)$$

и

$$\frac{\Theta_0}{An} = f_0 \qquad (15')$$

получим

$$\psi' = (\omega - f_1)(1 - \cos pt)$$
$$\theta' = (\omega - f_1)\sin pt$$

Эти уравнения имеют место пока

$$\theta' > 0$$

т. е. пока

$$0 < pt < \pi$$

При $pt = \pi$ величина θ' обращается в нуль, величина ψ' принимает значение

$$\psi' = \sigma = 2(\omega - f_1) \qquad (15'')$$

Обращаясь теперь к уравнениям (11), надо определить, в какую сторону будет изменяться θ'; мы это получим, подставив в первое из уравнений (11) вместо ψ' величину σ, положив $\sin\theta = 1$ и взяв трение в покое $\varepsilon\Theta_0$, так что будет

$$B\theta'' = \varepsilon\Theta_0 - An\sigma + An\omega$$

но на основании равенств (15) и (15′) будет

$$\varepsilon\Theta_0 - An\sigma + An\omega = An[\omega - \sigma + \varepsilon f_0]$$

В нашем случае

$$An \cdot [\omega - \sigma + \varepsilon f_0] = [-\omega + 2f_1 + \varepsilon f_0] \cdot An$$

Если, положив

$$\varepsilon = +1$$

окажется, что

$$-\omega + 2f_1 + f_0 < 0 \qquad (16)$$

то будет

$$\theta'' < 0$$

и

$$\theta' < 0$$

т. е. знак θ' соответствует значению $\varepsilon = +1$, и уравнения движения будут

$$Bu' + Ans = +\Theta_1 + An\omega$$

$$-Anu + Bs' = 0$$

Общий интеграл есть

$$\psi' = s = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \omega + f_1$$

$$\theta' = u = -C_1 \sin pt + C_2 \cos pt$$

Начальные условия таковы: при

$$pt = \pi$$

должно быть

$$\psi' = \sigma; \quad \theta' = 0$$

и получится

$$C_1 = \omega + f_1 - \sigma = -(\omega - 3f_1)$$

$$C_2 = 0$$

и уравнения движения для промежутков

$$\pi < pt < 2\pi$$

будут

$$\psi' = -(\omega - 3f_1)\cos pt + \omega + f_1$$

$$\theta' = +(\omega - 3f_1)\sin pt$$

а так как на основании неравенства (16)

$$\omega - 3f_1 > 0$$

то за весь указанный промежуток времени будет

$$\theta' < 0$$

как и было принято.

Заметим, что при начале каждого нового периода одно из начальных условий будет

$$\theta' = 0$$

которое дает

$$C_2 = 0 \tag{17}$$

другое же начальное условие будет

$$\psi' = \sigma$$

Мы видели, что для определения того, может ли движение начаться, надо составить количества

$$\omega - \sigma + \varepsilon f_0$$

и, положив в нем $\varepsilon = +1$ и $\varepsilon = -1$, рассмотреть знаки полученных выражений

$$H = \omega - \sigma + f_0$$

$$G = \omega - \sigma - f_0$$

Если окажется

$$\omega - \sigma + f_0 < 0$$

то в уравнениях движения надо брать $\varepsilon = +1$, и будет $\theta' < 0$. Если окажется

$$\omega - \sigma - f_0 > 0$$

то в уравнениях движения надо брать $\varepsilon = -1$, и будет $\theta' > 0$. Но если бы оказалось совместно

$$\begin{aligned} \omega - \sigma + f_0 &> 0 \\ \omega - \sigma - f_0 &> 0 \end{aligned} \tag{18}$$

то это показывало бы, что гироскопический момент остается меньше момента трения, какое бы направление для θ' ни было, т. е. какой бы знак θ' ни приписывать; в таком случае уравнения будут

$$B\theta'' = 0$$

$$B\dot{\psi}'' = 0$$

ибо когда трение по абсолютной величине больше движущей силы, то в правых частях уравнений движения надо писать нуль.

Таким образом, получим

$$\theta' = 0$$

$$\dot{\psi}' = \sigma$$

вместо равенства

$$\dot{\psi}' = \omega$$

которое имеет место при отсутствии трения.

Наравенства (18), будучи написаны так:

$$\omega + f_0 > \sigma$$

$$\omega - f_0 < \sigma$$

или иначе

$$\omega - f_0 < \sigma < \omega + f_0$$

дают пределы погрешности, в которых при заданном начальном трении будут заключаться показания прибора.

Чтобы еще нагляднее выяснить это обстоятельство, возьмем численный пример, на котором попутно обнаружится и порядок тех величин, с которыми придется иметь дело.

Возьмем гироскоп со следующими элементами:

Вес маховика	$P = mg = 3000$ г
Радиус инерции	$S = 5$ см
Момент инерции	$A = 75$
Пусть будет момент инерции	$B = 45$
Момент трения при покое	$\Theta_0 = 3.00$ г · см
Момент трения при движении	$\Theta = 2.00$ г·см

Прежде всего надо определить наименьшую угловую скорость, при которой гироскоп с таким маховиком может действовать.

Мы видели, что должно быть

$$An\omega > \Theta,$$

но

$$\omega = \frac{1}{13700}$$

следовательно,

$$n > \frac{3 \cdot 13700}{75} = 548$$

т. е. число оборотов в секунду $N = \frac{548}{2\pi} = 87$, чтобы иметь запас, берем $N = 250$, тогда

$$n = 1570$$

$$An = 117800$$

$$p = \frac{An}{B} = 2620$$

$$\tau = \frac{2\pi}{p} = \frac{1}{417} \text{ сек.}$$

$$f_1 = \frac{\Theta_1}{An} = \frac{2}{117800} = \frac{1}{58900} = 0.00001698$$

$$\omega = \frac{1}{13700} = 0.00007299$$

Переводим эти величины в секунды дуги, тогда

$$\omega = 15''.00$$

$$f_1 = 3''.50$$

$$f_0 = 5''.25$$

По этим данным и формулам (15′) имеем

Промежуток времени $0 < t < \frac{\tau}{2}$:

$$\psi' = 11''.50\,(1 - \cos pt)$$

$$\theta' = 11''.50 \sin pt$$

$$\sigma = 23''.00$$

Промежуток времени $\frac{\tau}{2} < t < \tau$:

Критерий: $\omega - \sigma + f_0 = -2.75 < 0$, надо брать $\varepsilon = +1$

Определение постоянных: $C_2 = 0$,

$$23'' = C_1 + f_1 + \omega = -C_1 + 18''.50$$

$$C_1 = -4''.50$$

$$\psi' = -4''.50 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + 18''.50$$

$$\theta' = 4''.50 \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

$$\sigma = 14''.00$$

Промежуток времени $\tau < t < \frac{3\tau}{2}$:

Критерий:

$$\omega - \sigma + f_0 = 15'' - 14'' + 5''.25 = 6''.25 > 0$$

$$\omega - \sigma - f_0 = 15'' - 14'' - 5''.25 = -4''.25 < 0$$

Движение внутреннего кольца продолжаться не может, будет

$$\theta' = 0$$

$$\psi' = 14''.00$$

вместо

$$\psi' = 15''.00$$

как было бы при отсутствии трения.

§ 41. Мы предположили в предыдущем параграфе, что ось наружного кольца гироскопа поставлена по направлению оси мира, но большею частью ее ставят вертикально. Ясно, что если пренебречь трением, то можно принять, что главный момент количеств движения, т. е. практически ось вращения маховика гироскопа, сохраняет неизменное направление в пространстве независимо от того, каким образом достигнута неподвижность центра тяжести прибора, предоставляя ему три степени свободы. Иными словами, ось маховика будет следить за звездой, подобно оптической оси телескопа, на ту же звезду направленного; по отношению же к Земле, когда ось наружного кольца направлена по оси мира, движение подобно движению трубы „экваториала", когда же ось наружного кольца вертикальна, то это движение подобно движению трубы астрономического инструмента, именуемого „альтазимут", если его трубой следить за звездой.

Пусть на фиг. 32 Z_1 есть зенит места наблюдения, P — полюс мира (северный), $PZ_1 = 90° - \lambda$ дополнение широты, $Z_1 x = 90° - h$ зенитное расстояние, угол α — азимут, тогда из „полярного" треугольника $PZ_1 x$ имеем (фиг. 33):

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin\lambda \cos\theta + \cos\lambda \sin\theta \cos\psi \\ -\operatorname{cotg}\alpha \sin\psi &= \operatorname{cotg}\theta \cos\lambda - \sin\lambda \cos\psi \end{aligned} \qquad (1)$$

Эти формулы и выражают зависимость углов h и α, определяющих положение колец при вертикальном положении оси прибора от углов θ и ψ при направлении оси прибора по оси мира.

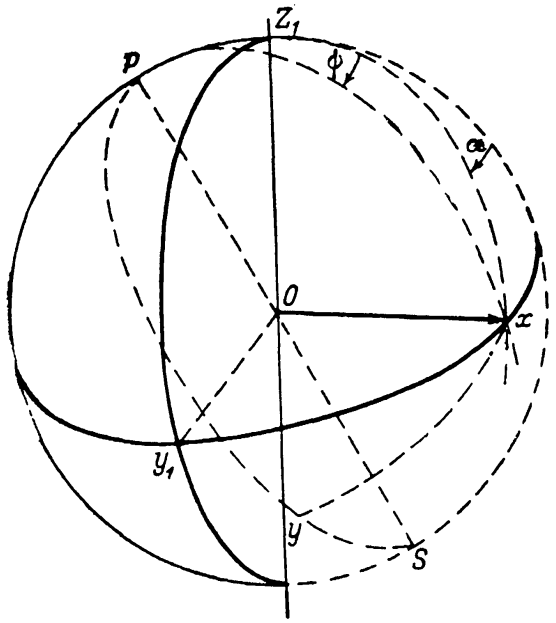
В частном случае, когда

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\psi = \omega t$$

будет

$$\sin h = \cos\lambda \cos\omega t$$

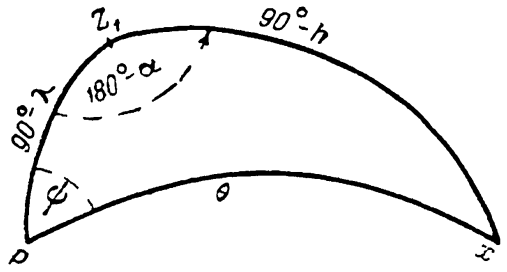


Фиг. 32.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\omega t}{\sin\lambda}$$

В том случае, когда наблюдение непродолжительно, например 10 минут, то

$$\omega t = 15''.600 = 9000'' = 2°30'$$



Фиг. 33.

тангенсы пропорциональны своим дугам, и, вместо предыдущей формулы, будет[1]

$$\alpha = \frac{\omega}{\sin\lambda} \cdot t \qquad (2)$$

$$h = 90° - \lambda.$$

§ 42. Рассмотрим теперь те обычные случаи, когда маховик гироскопа имеет две степени свободы при вертикальном положении оси наружного кольца.

---

[1] Следует отметить и другой частный случай. Пусть в некоторый момент t ось гироскопа помещена в горизонтальную плоскость. Тогда зенитное расстояние будет равно 90° ($h = 0$) и, полагая попрежнему $\psi = \omega t$, получим для этого момента времени из формул (1)

$$\operatorname{ctg}\theta = -\operatorname{ctg}\lambda\cos\psi$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \sin\lambda \operatorname{tg}\psi$$

Если время наблюдения непродолжительно, то аналогично прежнему примеру

$$h = 0$$

$$\alpha = \omega t \sin\lambda$$

Иначе говоря, ось свободного гироскопа, будучи помещена в плоскость горизонта, в течение некоторого промежутка времени вращается по отношению к Земле по ходу часовой стрелки со скоростью $\omega \sin\lambda$. Это свойство гироскопа лежит в основе конструкции некоторых приборов, имеющих применение в технике. (*Ред.*).

Пусть будет (фиг. 34): P — северный полюс мира, ζ — зенит места наблюдения.

Внутреннее кольцо скреплено с наружным неизменно, так что их плоскости взаимно перпендикулярны.

Положение маховика определяется углом ψ, составляемым плоскостью ζx с меридианом, или, что то же, углом $\frac{\pi}{2}+\psi$, составляемым плоскостью наружного кольца с меридианом (полуденною его частью).

Составляем выражения слагающих угловых скоростей.

Слагающие ω:

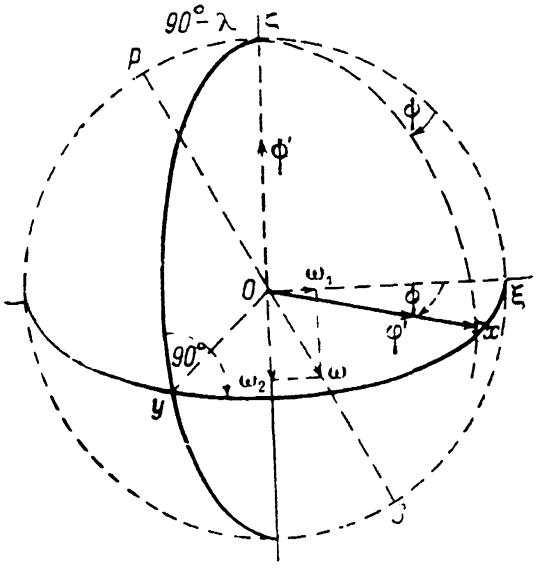
$$\text{по } O\xi \qquad \omega\cos\lambda=\omega_1$$

$$\text{по } O\zeta \qquad \omega\sin\lambda=-\omega_2$$

Угловая скорость ω_1 в свою очередь дает слагающие:

$$\text{по оси } Ox \qquad \omega_1\cos\psi$$

$$\text{„ „ } Oy \qquad -\omega_1\sin\psi$$



Фиг. 34.

Таким образом будет:

$$\text{по } Ox \qquad p=\varphi'+\omega_1\cos\psi$$

$$\text{„ } Oy \qquad q=-\omega_1\sin\psi$$

$$\text{„ } O\zeta \qquad r=\psi'-\omega_2$$

Удвоенная живая сила

$$2T=A(\varphi'+\omega_1\cos\psi)^2+B\omega_1^2\sin^2\psi+B(\psi'-\omega_2)^2$$

Уравнения движения (без трения)

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi'}=A(\varphi'+\omega_1\cos\psi)$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi'+\omega\cos\psi)=0 \qquad (1)$$

Следовательно,

$$\varphi'+\omega\cos\psi=n \qquad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\psi'}=B(\psi'-\omega_2); \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\psi'}\right)=B\psi''$$

$$\frac{\partial T}{\partial\psi}=-A(\varphi'+\omega_1\cos\psi)\cdot\omega_1\sin\psi+B\omega_1^2\sin\psi\cos\psi=$$

$$=-An\omega_1\sin\psi+B\omega_1^2\sin\psi\cos\psi$$

и уравнение движения будет

$$B\psi'' + An\omega_1 \sin\psi - B\omega_1^2 \sin\psi\cos\psi = 0 \qquad (3)$$

В уравнении (2) член $\omega_1 \cos\psi$ весьма мал по сравнению с n, поэтому можно считать

$$\varphi' = n$$

т. е. что n есть собственная угловая скорость вращения маховика.

В уравнении (3) член

$$B\omega_1^2 \sin\psi\cos\psi$$

весьма мал по сравнению с членом $An\omega_1 \sin\psi$ и может быть отброшен, так что это уравнение напишется

$$B\psi'' + An\omega_1 \sin\psi = 0 \qquad (4)$$

Это есть уравнение движения физического маятника, у которого момент инерции равен B, статический же момент равен $An\omega_1$.

Ясно, что положение равновесия есть то, когда

$$\sin\psi = 0$$

т. е.

$$\psi = 0$$

или

$$\psi = \pi$$

Из них лишь первое положение устойчиво, поэтому, обозначив

$$\frac{An\omega_1}{B} = k^2$$

видим, что „малые колебания“ оси около положения равновесия ее в меридиане ($\psi = 0$) имеют период

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{B}{An\omega_1}} \qquad (5)$$

Таким образом, ось маховика, подобно стрелке компаса, имеет свое положение равновесия в меридиане места и, будучи из меридиана выведена, стремится к нему возвратиться с усилием, иначе — „направляющим моментом“, равным $An\omega_1 \sin\psi$.

Положим теперь, что в оси наружного кольца есть трение, момент которого при покое есть Ψ_0, тогда, чтобы прибор вообще мог действовать, надо, чтобы было

$$An\omega_1 > \Psi_0$$

Вместе с тем величина „застоя“ определяется равенством

$$\sin\sigma = \frac{\Psi_0}{An\omega_1}$$

Положим, что мы имеем гироскоп, элементы коего приведены выше, тогда направляющий момент есть в нашей широте $\lambda = 60°$:

$$H = An\omega_1 = An\omega \cdot \cos\lambda = \frac{1}{2} An\omega$$

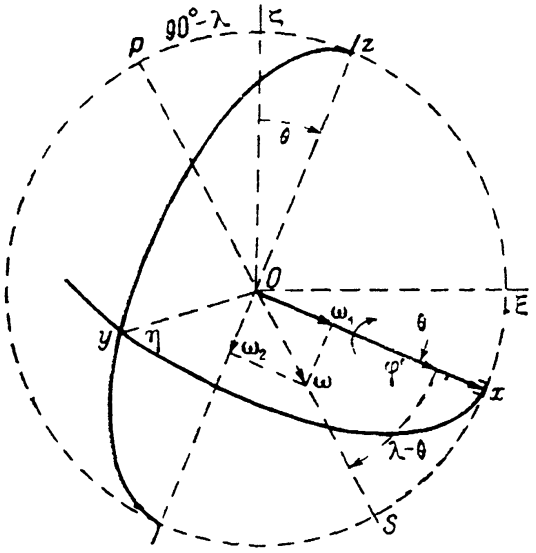
так что при $n = 1570$ будет

$$H = \frac{1}{2} \cdot 75 \cdot 1570 \frac{1}{13700} = 4.3 \text{ г} \cdot \text{см}$$

следовательно, чтобы застой был меньше 1°, надо, чтобы было

$$\Psi_0 \leqslant An\omega_1 \cdot \sin 1° = \frac{4.3}{60} = 0.07 \text{ г} \cdot \text{см}$$

Столь малое трение практически достижимо лишь при совершенно особенной системе подвеса или на „следящей системе“, или на нитях некрученого шелка. Если бы мы пожелали достигнуть этой степени точности, например при $\Psi_0 = 1$ г · см, повышая число оборотов, то получили бы такое число, которое никакой маховик выдержать не может, вследствие развивающихся от центробежной силы напряжений в его ободе.



Фиг. 35.

С давних пор делались попытки использовать это свойство гироскопа в целях получения компаса, независимого от влияния судового железа и земного магнетизма, все такие попытки были неудачны до тех пор, пока лет 20—25 тому назад Аншютц в Германии и Сперри в Америке не изобрели свои гирокомпасы, о которых будет сказано кратко ниже.

§ 43. Фуко показал и третье замечательное свойство своего гироскопа. Положим, что наружное кольцо поставлено и закреплено в плоскости первого вертикала, так что ось вращения маховика лежит в плоскости меридиана, и внутреннее кольцо может свободно качаться на своих цапфах.

Маховик имеет две степени свободы, которым соответствуют Лагранжевы координатные параметры: φ — угол собственного вращения маховика и θ — угол, составляемый осью маховика с горизонтом.

Выбрав эти параметры (фиг. 35), составляем слагающие угловой скорости, удвоенную живую силу и, по схеме Лагранжа, уравнения движения имеем:

1) слагающие угловой скорости:

угловая скорость ω дает:

по оси Ox $\quad \omega\cos(\lambda-\theta)$

„ „ Oz $\quad -\omega\sin(\lambda-\theta)$

2) собственное вращение:

по оси Ox $\quad \varphi'$

3) движение кольца:

по оси Oy $\quad \theta'$

Таким образом получаем

$$p=\varphi'+\omega\cos(\lambda-\theta)$$
$$q=\theta'$$
$$r=-\omega\sin(\lambda-\theta)$$

Удвоенная живая сила

$$2T=A[\varphi'+\omega\cos(\lambda-\theta)]^2+B\theta'^2+B\omega^2\sin^2(\lambda-\theta)$$
$$\frac{\partial T}{\partial\varphi'}=A[\varphi'+\omega\cos(\lambda-\theta)];\quad \frac{\partial T}{\partial\varphi}=0$$

Значит

$$\frac{d}{dt}[\varphi'+\omega\cos(\lambda-\theta)]=0$$

следовательно,

$$\varphi'+\omega\cos(\lambda-\theta)=n=\text{постоянной} \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta'}=B\theta';\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\theta'}\right)=B\theta''$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta}=A\omega[(\varphi'+\omega\cos(\lambda-\theta)]\sin(\lambda-\theta)-B\omega^2\sin(\lambda-\theta)\cos(\lambda-\theta)$$

Таким образом, уравнение движения есть

$$B\theta''-An\omega\sin(\lambda-\theta)+B\omega^2\sin(\lambda-\theta)\cos(\lambda-\theta)=0$$

которое показывает, что положение динамического равновесия есть

$$\theta=\lambda$$

Обозначив

$$\lambda-\theta=\sigma$$

и отбросив последний член, который в виду множителя ω^2 будет весьма мал по сравнению со вторым членом, содержащим множитель $n\omega$, получим уравнение движения в таком виде:

$$B\sigma''+An\omega\sin\sigma=0 \tag{2}$$

Это есть уравнение маятника, колеблющегося около своего положения равновесия $\sigma = 0$.

Это уравнение показывает, что ось вращения маховика стремится стать по направлению оси мира так, чтобы направление вращения маховика совпадало бы с направлением вращения Земли.

Колебания оси маховика около положения своего динамического равновесия происходят подобно колебаниям маятника, у которого момент инерции есть B и статический момент $An\omega$, мгновенный же направляющий момент есть $An\omega \sin\sigma$.

Таким образом, теоретически гироскоп может показать наклоном своей оси к горизонту широту места. Практически, вследствие трения, величина застоя будет настолько велика, что точность такого способа определения широты будет недостаточна, и свойство это для такого определения не используется.

§ 44. В предыдущих параграфах мы не рассматривали массы колец, участвующих в движении маховика; это было нами сделано для того, чтобы яснее выделить сущность основных явлений, обнаруживаемых гироскопом Фуко.

Покажем, каким образом принять во внимание эти массы.

Обозначим через A_1 главный полярный момент инерции наружного кольца, через B_1 его экваториальный момент, через A_2 и B_2 аналогичные количества для внутреннего кольца и прибавим к выражению живой силы соответствующие члены, тогда получатся измененные уравнения движения.

Возьмем для примера случай § 38.

Наружное кольцо участвует только во вращении ψ', которое дает удвоенную живую силу

$$B_1 \psi'^2 \tag{1}$$

Внутреннее кольцо участвует во вращениях, угловые скорости коих суть

$$q = \theta'$$
$$r = (\psi' - \omega)\sin\theta$$

соответственно этому в удвоенную живую силу войдут члены:

$$A_2(\psi' - \omega)^2 \sin^2\theta + B_2\theta'^2 \tag{1'}$$

Таким образом, всего в выражение живой силы добавится количество

$$2T_1 = B_1\psi'^2 + A_2(\psi' - \omega)^2 \sin^2\theta + B_2\theta'^2 \tag{2}$$

следовательно, к уравнениям движения добавится

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \psi'}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial \psi} = B_1\psi'' + A_2\sin^2\theta\cdot\psi'' + 2A_2(\psi' - \omega)\theta'\sin\theta\cos\theta \cong$$
$$\cong (B_1 + A_2\sin^2\theta)\psi'' \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \theta'}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial \theta} = B_2\theta'' - A_2(\psi' - \omega)^2\sin\theta\cos\theta \approx B_2\theta'' \tag{4}$$

отбросив малые члены.

Как видно, в уравнениях движения изменяются только члены, содержащие угловые ускорения ψ'' и θ'', т. е. члены *инерционные*, члены же, содержащие множителем количество движения маховика An, т. е. члены *гироскопические*, остаются без перемены.

Совершенно то же будет и в остальных случаях, поэтому сущность явления останется без перемены, ибо оно протекает под действием „гироскопического момента", выражающегося членами, содержащими множитель An.

Инерционные члены не окажут влияния на положение „динамического равновесия", а лишь на период свободных колебаний около этого положения.

Как видно, учет инерционных членов совершается весьма просто, и мы на нем останавливаться не будем.

ГЛАВА III

ГИРОСКОП НА ПОДВИЖНОМ ФУНДАМЕНТЕ

§ 45. В предыдущих параграфах мы рассматривали гироскоп и проявляемые им свойства, когда он находится на неподвижном по отношению к Земле фундаменте, но такое применение гироскопа, если и имеет, то лишь чисто научное значение, когда им пользуются в механических кабинетах для подтверждения наглядными опытами выводов теории. Но помимо этих научных приложений гироскоп получил целый ряд важных технических применений на корабле и на аэропланах, давая возможность получать и удерживать: а) направление меридиана, заменяя таким образом магнитный компас, б) направление истинной отвесной линии или горизонтальной плоскости, в) неизменное направление в пространстве, г) уничтожать или умерять качание корабля или самолета.

Во всех этих случаях гироскоп находится на корабле или самолете, с которыми неизменно связан его фундамент, участвующий в движениях корабля или самолета и увлекающий с собою гироскоп; поэтому необходимо рассмотреть то влияние, которое движение фундамента будет оказывать на гироскоп, и какие свойства гироскоп будет проявлять, находясь на подвижном фундаменте.

Для решения всех задач этого рода мы, подобно предыдущему, будем применять ту же самую методу — пользования уравнениями Лагранжа во второй их форме.

Вообразим оси $O\xi\eta\zeta$ неподвижные в пространстве, пусть оси $K\lambda\mu\nu$ неподвижные по отношению к фундаменту, т. е. кораблю или самолету, и оси $Gxyz$ — оси того тела, движение которого требуется определить; в нашем случае это будут главные оси инерции маховика гироскопа.

Движение корабля или самолета предполагается заданным, значит будет задано и движение осей $K\lambda\mu\nu$ по отношению к осям $O\xi\eta\zeta$.

Для составления уравнений движения маховика следует избрать те Лагранжевы координатные параметры, которыми положение его осей $Gxyz$ определяется по отношению к фундаменту, т. е. по отношению к осям $K\lambda\mu\nu$, пусть эти параметры суть

$$q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots q_k \qquad (k \leqslant 6) \quad (1)$$

Так как движение осей $K\lambda\mu\nu$ задано, то для любой точки x, y, z можем получить ее положение в пространстве в момент времени t в виде выражений вида

$$\begin{aligned} \xi &= F_1(x,\ y,\ z,\ q_1,\ q_2,\ \ldots q_k,\ t) \\ \eta &= F_2(x,\ y,\ z,\ q_1,\ q_2,\ \ldots q_k,\ t) \\ \zeta &= F_3(x,\ y,\ z,\ q_1,\ q_2,\ \ldots q_k,\ t) \end{aligned} \quad (2)$$

в которых координаты x, y, z, для избранной точки в теле остаются постоянными.

Составив эти выражения (2), составляем выражения проекций скорости точки $(x,\ y,\ z)$ в ее *абсолютном* движении, т. е. величины

$$\begin{aligned} \xi' &= \frac{\partial F_1}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial F_1}{\partial q_2} q_2' + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial q_k} q_k' + \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \eta' &= \frac{\partial F_2}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial F_2}{\partial q_2} q_2' + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial q_k} q_k' + \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ \zeta' &= \frac{\partial F_3}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial F_3}{\partial q_2} q_2' + \ldots + \frac{\partial F_3}{\partial q_k} q_k' + \frac{\partial F_3}{\partial t} \end{aligned} \quad (3)$$

и по ним выражение удвоений живой силы рассматриваемой точки, массу которой обозначим через m:

$$\begin{aligned} m(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = m[&a_{11} q_1'^2 + a_{22} q_2'^2 + \ldots + a_{kk} q_k'^2 + 2b_{12} q_1' q_2' + \\ &+ \ldots + 2b_{k-1,\,k} q'_{k-1} q_k' + 2c_1 q_1' + \ldots + 2cq_k' + h] \end{aligned} \quad (4)$$

при этом все коэффициенты будут *известными* функциями координат x, y, z, параметров q_1, q_2, ... q_k и времени t.

После этого, надо, взяв сумму живых сил для всех точек тела, составить живую силу тела, в нашем случае — маховика; так как мы предполагаем его однородным, то надо вместо m написать $\rho dxdydz$, где ρ — плотность тела, и взять тройной интеграл по всему его объему, т. е. по изменяемости переменных x, y, z, рассматривая все прочие величины при этом интегрировании как постоянные, тогда для удвоенной живой силы получим выражение такого вида:

$$2T = A_{11} q_1'^2 + A_{22} q_2'^2 + \ldots + A_{kk} q_k'^2 +$$
$$+ 2B_{12} q_1' q_2' + \ldots + 2B_{1k} q_1' q_k' +$$
$$+ 2B_{23} q_2' q_3' + \ldots + 2B_{2k} q_2' q_k' +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ 2B_{k-1,k} q'_{k-1} q_k' +$$
$$+ 2C_1 q_1' + 2C_2 q_2' + \ldots + 2C_k q_k' + H \qquad (5)$$

причем коэффициенты $A_{11}, \ldots C_k$, H будут известными функциями параметров $q_1 q, \ldots q_k$ и времени t.

Совершенно так же, составив сперва выражение элементарной работы

$$\delta U = \sum (\Xi \delta\xi + \mathbf{H} \delta\eta + \mathbf{Z} \delta\zeta) \qquad (6)$$

всех сил, действующих на тело, подставляем вместо $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ их выражения

$$\delta\xi = \frac{\partial F_1}{\partial q_1} \delta q_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial q_k} \delta q_k \text{ и проч.}$$

и представляем элементарную работу в виде

$$\delta U = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_k \delta q_k \qquad (7)$$

причем Q_1, $Q_2, \ldots Q_k$ будут известные функции параметров $q_1, \ldots q_k$ и времени t.

После того как выражения

$$2T \text{ и } \delta U$$

составлены, пишем уравнения движения по общей схеме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad (8)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

Такой прием составления уравнений движения не есть наиболее короткий, еще менее можно его назвать изящным, но он наиболее общий, однообразный, требующий вполне определенных, подлежащих затем простой проверке, выкладок, а не рассуждений, и так как наша цель не есть изложение теоретической механики или математики, а чисто практическая — показать технику и инженеру-конструктору, каким образом рассчитать действие проектируемого им прибора, придать ему нужные размеры и элементы, — то математическое изящество мы отодвигаем на второй план и заботимся более всего о простоте и общности применения излагаемых методов расчета.

§ 46. Как простейшее приложение изложенной методы, рассмотрим обыкновенный кренометр на корабле и выясним, каким погрешностям подвержены показания его.

Возьмем простейший случай, когда корабль идет лагом (боком) к совершенно правильной океанской зыби и имеет чисто боковую качку, сопровождаемую орбитальным движением центра тяжести корабля, а значит и всего корабля.

Орбита, описываемая центром тяжести корабля, — предполагая, что собственного хода он не имеет, — лежит в плоскости бега волн и представляет собою круг, радиус которого r_0 равен половине высоты волны; движение центра тяжести корабля по этому кругу равномерное, и период обращения равен периоду волн τ_0. Когда корабль имеет ход, то к этому орбитальному движению присоединяется поступательное движение корабля.

Предполагая, что ход корабля равномерный, и обозначая через c скорость хода его, через ξ_0, η_0, ζ_0 координаты центра тяжести в момент времени t, причем ось ξ направлена параллельно гребням волн, ось ζ — вертикально вниз, ось η — горизонтально вправо, получим для движения центра тяжести корабля уравнения

$$\begin{aligned} \xi_0 &= ct \\ \eta_0 &= r_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau_0} \\ \zeta_0 &= r_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau_0} \end{aligned} \tag{1}$$

Вращательное движение корабля будет состоять из чисто боковой качки, т. е. колебаний около его продольной оси, проходящей через центр тяжести и остающейся все время параллельной оси $O\xi$, так что положение корабля вполне определяется углом его крена θ в момент t:

$$\theta = A \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha\right) + B \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_0} + \beta\right) \tag{2}$$

где A, B, α и β — известные постоянные, τ_1 — период „свободных“ боковых качаний корабля на тихой воде.

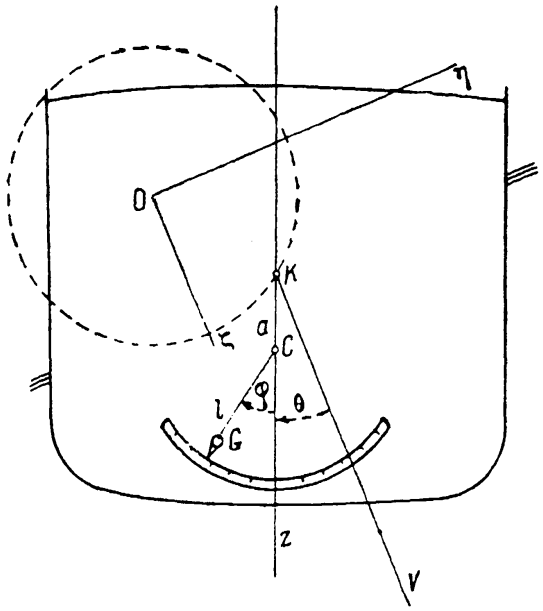
Пусть K есть центр тяжести корабля, и положим, что кренометр подвешен в точке C, лежащей в диаметральной плоскости корабля и в плоскости шпангоута, проведенного через точку K; пусть G есть центр тяжести кренометра.

Положение кренометра в рассматриваемый момент t вполне определяется параметром

$$q_1 = \varphi$$

представляющим угол наклонения к диаметральной плоскости линии GC, соединяющей точку подвеса C кренометра с его центром тяжести, на продолжении этой линии и ставится указатель, который по разделенной дуге и показывает наклонение корабля, если только линия GC, которую будем называть осью кренометра, вертикальна.

Делая обозначения, указанные на чертеже (фиг. 36), за плоскость которого принята плоскость шпангоута, проходящего через K, параллельная плоскости $\zeta o \eta$, получим координаты точки G в момент времени t:



Фиг. 36.

$$\xi_1 = ct$$

$$\eta_1 = \eta_0 - a\sin\theta - l\sin(\theta+\varphi) \quad (3)$$

$$\zeta_1 = \zeta_0 + a\cos\theta + l\cos(\theta+\varphi)$$

Живая сила кренометра будет состоять из живой силы T_1 его поступательного движения, предполагая, что вся его масса M сосредоточена в его центре тяжести, и живой силы T_2 вращательного движения около центра тяжести.

Имеем

$$\xi_1' = c$$

$$\eta_1' = \eta_0' - a\cos\cdot\theta' - l\cos(\theta+\varphi)(\theta'+\varphi') \quad (4)$$

$$\zeta_1' = \zeta_0' - a\sin\theta\cdot\theta' - l\sin(\theta+\varphi)(\theta'+\varphi')$$

таким образом будет

$$2T_1 = M(c^2+\eta_1'^2+\zeta'^2) = M\{[c^2+\zeta_0'^2+\eta_0'^2+a^2\theta'^2+l^2(\theta'+\varphi')^2 -$$

$$-2a\theta'(\zeta_0'\sin\theta+\eta_0'\cos\theta) - 2l[\zeta_0'\sin(\theta+\varphi)+\eta_0'\cos(\theta+\varphi)]\cdot(\theta'+\varphi') +$$

$$+2al(\theta'+\varphi')\theta'\cos\varphi]\} \quad (5)$$

Живая сила вращательного движения

$$2T_2 = J_0(\theta'+\varphi')^2 \quad (6)$$

где J_0 есть момент инерции кренометра относительно оси Gx, параллельной оси $O\xi$.

Полная живая сила

$$2T = 2T_1 + 2T_2$$

На кренометр действуют только сила тяжести Mg, приложенная в центре тяжести G, и реакции N в точке подвеса C, значит элементарная работа

$$\delta U = Mg \cdot \delta\zeta_1 + N_\eta \cdot \delta\eta_c + N_\zeta \delta\zeta_c$$

где N_η и N_ζ суть слагающие реакции, параллельные осям $O\zeta$ и $O\eta$, η_c и ζ_c — координаты точки C. Как легко видеть, эти координаты от параметра φ не зависят, и мы получим

$$\delta U = Mg \cdot \frac{\partial\zeta_1}{\partial\varphi} \cdot \delta\varphi = -Mgl \cdot \sin(\theta + \varphi) \cdot \delta\varphi \tag{7}$$

Затем имеем

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi'} = (J_0 + Ml^2)(\theta' + \varphi') + M\{al\theta' \cos\varphi - l[\zeta_0' \sin(\theta + \varphi) + \eta_0' \cos(\theta + \varphi)]\}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\varphi'}\right) = (J_0 + Ml^2)(\theta'' + \varphi'') + Mal\theta'' \cos\varphi - Mal\theta'\varphi' \sin\varphi -$$

$$- Ml[\zeta_0'' \sin(\theta + \varphi) + \eta_0'' \cos(\theta + \varphi)] -$$

$$- Ml[\zeta_0' \cos(\theta + \varphi) - \eta_0' \sin(\theta + \varphi)](\theta' + \varphi')$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = -Mal(\theta' + \varphi')\theta' \sin\varphi - Ml[\zeta_0' \cos(\theta + \varphi) - \eta_0' \sin(\theta + \varphi)](\theta' + \varphi')$$

Положив

$$J_0 + Ml^2 = J_1$$

получим уравнение движения кренометра в таком виде:

$$J_1(\theta'' + \varphi'') + Mal\theta'' \cos\varphi + Mal\theta'^2 \sin\varphi - Ml[\zeta_0'' \sin(\theta + \varphi) + \eta_0'' \cos(\theta + \varphi)] =$$

$$= -Mgl \sin(\theta + \varphi) \tag{8}$$

Напишем это уравнение в следующем виде, из которого нагляднее видно механическое значение входящих в это уравнение членов:

$$J_1(\theta + \varphi)'' + Mgl \sin(\theta + \varphi) = +Ml[\zeta_0'' \sin(\theta + \varphi) + \eta_0'' \cos(\theta + \varphi)] -$$

$$- Mal\theta'' \cos\varphi - Mal\theta'^2 \sin\varphi \tag{8'}$$

Очевидно, что, предположив корабль неподвижным, мы получим в правой части предыдущего уравнения нуль, так что будет

$$J_1(\theta + \varphi)'' + Mgl \sin(\theta + \varphi) = 0 \tag{9}$$

Это представляет уравнение движения маятника с моментом инерции относительно точки подвеса, равным J_1, статическим моментом Mgl, делающего размахи $(\theta + \varphi)$.

Члены, стоящие в правой части, представляют возмущающие этот маятник моменты сил, происходящих от движения корабля. Так, первый член можно написать следующим образом:

$$-[-M\zeta_0'' \sin(\theta+\varphi) - M\eta_0'' \cos(\theta+\varphi)]\,l \tag{10}$$

в нем величины $-M\zeta_0''$ и $-M\eta_0''$ представляют взятые со знаками минус произведения массы тела на проекции ζ_0'' и η_0'' ускорения в движении центра тяжести корабля, иначе — „силы инерции“ массы кренометра, происходящие от орбитального движения корабля; все же произведение есть момент этих сил относительно точки подвеса кренометра.

В члене

$$-Ma\theta'' \cdot l\cos\varphi \tag{11}$$

величина $-Ma\theta''$ представляет произведение массы маятника M на взятое с обратным знаком линейное касательное ускорение $a\theta''$ точки C подвеса маятника, происходящее от углового ускорения θ'' в движении корабля; это линейное ускорение направлено перпендикулярно к линии OC, т. е. есть сила инерции маятника в переносном движении его точки подвеса C; все же произведение $-Ma\theta'' \cdot l\cos\varphi$ есть момент этой силы относительно точки подвеса.

Наконец, в члене

$$Ma\theta'^2 \cdot l\sin\varphi \tag{12}$$

величина $a\theta'^2$ представляет взятое в обратном направлении нормальное ускорение точки C, происходящее от вращательного движения корабля, так что $Ma\theta'^2$ есть „центробежная“ сила, которая имела бы место, если бы масса M была помещена в точке C. Весь же член есть момент этой силы относительно точки C, если силу эту считать приложенной в точке G.

Алгебраическая сумма вышеуказанных трех моментов представляет момент „геометрической“ суммы сказанных сил, иными словами „силы инерции“ массы M при таком ее переносном движении, которым в рассматриваемый момент обладает точка подвеса маятника C.

На основании этого свойства можно писать уравнения движения кренометра сразу в окончательной форме, вычислив лишь сказанное ускорение *точки подвеса его*.

При этом выводе мы не предполагали, что движение центра тяжести корабля совершается по кругу, мы приняли лишь, что ход его равномерный и ось подвеса маятника параллельна продольной оси корабля, т. е. что маятник может колебаться лишь в плоскости шпангоута.

В уравнении движения кренометра сумма углов $\theta+\varphi$ представляет отклонение указателя кренометра от истинной отвесной линии, а так как

показания кренометра верны и дают наклонение корабля, когда его указатель совпадает с отвесной линией, то сумма

$$\theta + \varphi = \varepsilon$$

представляет погрешность показаний кренометра; таким образом, уравнение движения кренометра будет

$$J_1 \varepsilon'' + Mgl \sin \varepsilon = + Ml [\zeta_0'' \sin \varepsilon + \eta_0'' \cos \varepsilon] - \\ - Mal [\theta'' \cos \varphi + \theta'^2 \sin \varphi] \qquad (13)$$

Из этого уравнения видно, что при

$$a = 0$$

последний член в правой части пропадает, т. е. *в показаниях кренометра, ось подвеса которого проходит через центр тяжести корабля, боковая качка корабля погрешностей не производит.*

Если корабль раскачать на тихой воде, то будет

$$\zeta_0 = 0; \qquad \eta_0 = 0$$

тогда такой кренометр, у которого $a = 0$, будет давать на тихой воде *верные* показания, на волнении погрешность его показаний происходит только от орбитального движения корабля.

Центр тяжести корабля обыкновенно лежит близко к грузовой ватерлинии, поэтому для кренометра, поставленного в машинном отделении на уровне грузовой ватерлинии (и еще лучше на уровне центра тяжести), величина $a = 0$.

Для такого кренометра уравнение движения будет

$$J_1 \varepsilon'' + Mgl \sin \varepsilon = + Ml [\zeta_0'' \sin \varepsilon + \eta_0'' \cos \varepsilon] \qquad (14)$$

Рассмотрим случай „малых“ колебаний кренометра, т. е. положим

$$\sin \varepsilon = \varepsilon; \qquad \cos \varepsilon = 1$$

Мы имеем из уравнений (1):

$$\eta_0'' = -\frac{4\pi^2}{\tau_0^2} r_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau_0} \\ \zeta_0'' = -\frac{4\pi^2}{\tau_0^3} r_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau_0} \qquad (15)$$

Но по свойствам трохоидальных волн, к которым океанская зыбь близко подходит,

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}} \quad \text{и} \quad \Theta_0 = \frac{2\pi r_0}{\lambda}$$

где λ — длина волны, Θ_0 — угол наибольшего волнового склона (около 7°, так что $\Theta_0 \approx \frac{1}{8}$), таким образом будет

$$\eta_0'' = -g \cdot \Theta_0 \cdot \sin \frac{2\pi t}{\tau_0}$$
$$\zeta_0'' = -g \cdot \Theta_0 \cdot \cos \frac{2\pi t}{\tau_0} \qquad (15')$$

и, положив

$$\frac{Mgl}{J_1} = k^2$$

получим

$$\varepsilon'' + k^2 \varepsilon = -k^2 \left[\Theta_0 \cdot \varepsilon \cdot \sin \frac{2\pi t}{\tau_0} + \Theta_0 \cdot \cos \frac{2\pi t}{\tau_0} \right] \qquad (16)$$

Величина $\Theta_0 \varepsilon$ будет малая по сравнению с Θ_0, и предыдущее уравнение будет

$$\varepsilon'' + k^2 \varepsilon = -k^2 \Theta_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau_0} \qquad (16')$$

Необходимо, однако, обратить внимание, что при отбрасывании в самом дифференциальном уравнении малого члена, в особенности, когда он содержит самое неизвестную функцию, нельзя с уверенностью, сказать, что в интеграле этого уравнения будут отброшены малые члены; может оказаться, что порядок членов, отбрасываемых в общем интеграле, будет ниже того, нежели в дифференциальном уравнении.

Это обстоятельство пояснено на подробно проделанном примере в изданной Академией Наук книге: *А. Н. Крылов. Лекции о приближенных вычислениях*, гл. V.

Полагая

$$\frac{2\pi}{\tau} = k$$

так что τ есть период свободных качаний кренометра на его оси подвеса, имеем из уравнения (16')

$$\varepsilon = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt - \frac{k^2}{k^2 - \frac{4\pi^2}{\tau_0^2}} \Theta_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau_0} \qquad (17)$$

Свободные колебания кренометра обыкновенно сами собою погашаются вследствие тех сопротивлений, которые имеют место и которые мы для простоты выкладок не принимали во внимание, и остается

$$= \frac{\tau_0^2}{\tau^2 - \tau_0^2} \Theta_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau_0} \qquad (18)$$

---

[1] См.: Собр. тр. т. III, ч. 1, 1949.

Отсюда видно, что по абсолютной величине погрешность показаний нашего кренометра может составить

$$\left| \frac{\tau_0^2}{\tau_0^2 - \tau^2} \Theta_0 \right|$$

Эта величина *мала*, когда отношение $\frac{\tau_0}{\tau}$ периода волны к периоду свободных качаний кренометра *малое*; так, например, если

$$\frac{\tau_0}{\tau} = \frac{1}{5}$$

то

$$\left| \frac{\tau_0^2}{\tau_0^2 - \tau^2} \Theta_0 \right| = \frac{\tau_0^2}{\tau^2 - \tau_0^2} \Theta_0 = \frac{1}{24} \Theta_0 \approx \frac{1^\circ}{3}$$

т. е. погрешность показаний не превышает $\frac{1^\circ}{3}$. Наибольший период волн океанской зыби не превышает 14 сек., значит, если период свободных качаний кренометра будет 70 сек., то погрешность его показаний не превышает $\frac{1^\circ}{3}$; если взять 60 сек., то погрешность будет не более $\frac{1^\circ}{2}$.

Кренометры с таким периодом были устроены для записи размахов качки почти одновременно Фрудом в Англии и Бертеном во Франции. Ниже мы приведем краткое описание кренометра Бертена.

Другой крайний случай — тот, когда отношение $\frac{\tau}{\tau_0}$ весьма мало, т. е. период свободных колебаний кренометра весьма мал.

В этом случае оказывается, что указатель кренометра направлен по нормали к волне, так что кренометр показывает во всякий момент наклонение корабля по отношению к той нормали к волновой поверхности, которая в этот момент проходит через центр тяжести корабля.

Все эти выводы относятся к кренометру, ось подвеса которого проходит через центр тяжести корабля, но обыкновенно на корабле имеется кренометр в штурманской рубке на верхнем мостике. Для такого кренометра величина a — значительная, даже для судов средней величины — около 10 м, и притом отрицательная.

Положим

$$a = -h$$

тогда последний член в уравнении (13) будет

$$Mhl[\theta'' \cos\varphi + \theta'^2 \sin\varphi]$$

и уравнение (16′) будет

$$\varepsilon'' + k^2 \varepsilon = -k^2 \Theta_0 \cos\frac{2\pi t}{\tau_0} + \frac{Mhl}{J_1}[\theta'' \cos\varphi + \theta'^2 \sin\varphi] \qquad (19)$$

Величина $\theta'^2 \sin\varphi$ будет мала по отношению к $\theta'' \cos\varphi$, или просто θ'', ибо $\cos\varphi$ можно заменить единицей.

Величины

$$\frac{Mhl}{J_1} = k^2 \frac{h}{g}$$

$$\theta'' = -\frac{4\pi^2}{\tau_1^2} A \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha\right) - \frac{4\pi^2}{\tau_0^2} B \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_0} + \beta\right) \tag{20}$$

что следует из уравнения (2).

Таким образом, вынужденные колебания кренометра, которые только и остаются после погашения свободных, будут

$$\varepsilon = E_1 + E_2 + E_3$$

причем

$$E_1 = \frac{\tau_0^2}{\tau_0^2 - \tau^2} \Theta_0 \cos\frac{2\pi t}{\tau}$$

$$E_2 = \frac{4\pi^2}{\tau_1^2} \cdot \frac{h}{g} \cdot \frac{\tau_1^2}{\tau^2 - \tau_1^2} \cdot A \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha\right) \tag{21}$$

$$E_3 = \frac{4\pi^2}{\tau_0^2} \cdot \frac{h}{g} \cdot \frac{\tau_0^2}{\tau^2 - \tau_0} \cdot B \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_0} + \beta\right)$$

Здесь член E_1 происходит от орбитального движения корабля, члены E_2 и E_3 — от боковой качки корабля, а именно: E_2 — от его свободных колебаний, E_3 — от вынужденных.

Положим для примера: $h = 10$ м,

период волны $\tau_0 = 10$ сек.,

период свободных качаний корабля $\tau_1 = 12$ сек.,

период свободных качаний кренометра 1 сек.,

волновой склон $\Theta_0 = 7°$.

Примем, что для качаний корабля

$$A = 12°; \qquad B = 6°$$

тогда будет

$$E_1 = -\frac{100}{99} \cdot 7° \cdot \cos\frac{2\pi t}{\tau_0} = -7° \cos\frac{2\pi t}{\tau_0}$$

$$E_2 = -\frac{40}{144} \cdot \frac{10}{9.8} \cdot \frac{144}{143} \cdot 12° \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha\right) = -3°3 \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha\right) \tag{22}$$

$$E_3 = -\frac{40}{100} \cdot \frac{10}{9.8} \cdot \frac{100}{99} \cdot 6° \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_0} + \beta\right) = -2°4 \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_0} + \alpha\right)$$

Следовательно, погрешность показаний кренометра будет иногда достигать

$$7° + 3°3 + 2°4 = 12°7$$

так что, вместо истинной величины наибольшего размаха качки в 18°, кренометр может показать почти 31°.

Отсюда видно, насколько ненадежны показания маятникового кренометра с малым периодом свободных колебаний, в особенности, когда такой кренометр поставлен в штурманской рубке, высоко над центром тяжести корабля.

§ 47. Период свободных качаний маятника выражается формулою

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{Mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{Pl}} \qquad (1)$$

где J_1 есть момент инерции маятника относительно оси подвеса, Pl — его статический момент.

Отсюда ясно, что для получения маятника большого периода надо момент инерции делать как можно больше, статический момент — как можно меньше. Поясним на численном примере порядок тех величин, с которыми здесь приходится иметь дело.

Ясно, что для получения возможно большого момента инерции надо придавать маятнику форму маховика, вся масса которого сосредоточена практически в его ободе. Чтобы получить малый статический момент, надо сперва маховик вполне уравновесить так, чтобы его центр тяжести в точности лежал на оси подвеса, и затем прикрепить к маховику маленький противовес или грузик, дающий требуемый статический момент.

Пусть, например, будет маховик диаметром 1.30 м, так что его радиус инерции $\rho = 60$ см и вес маховика $P = 250$ кг, и мы хотим иметь период качаний 70 сек.

Отсюда

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{pl}} = 2\pi \sqrt{\frac{P\rho^2}{gpl}} \qquad (2)$$

где p — вес грузика.

Следовательно, статический момент pl будет

$$pl = \frac{4\pi^2 P\rho^2}{g\tau^2}$$

В нашем случае $\tau = 70$ сек., значит будет

$$pl = \frac{4 \cdot 9.87 \cdot 250 \cdot 3600}{980 \cdot 4900} \simeq 7.5 \text{ кг} \cdot \text{см} = 7500 \text{ г} \cdot \text{см}$$

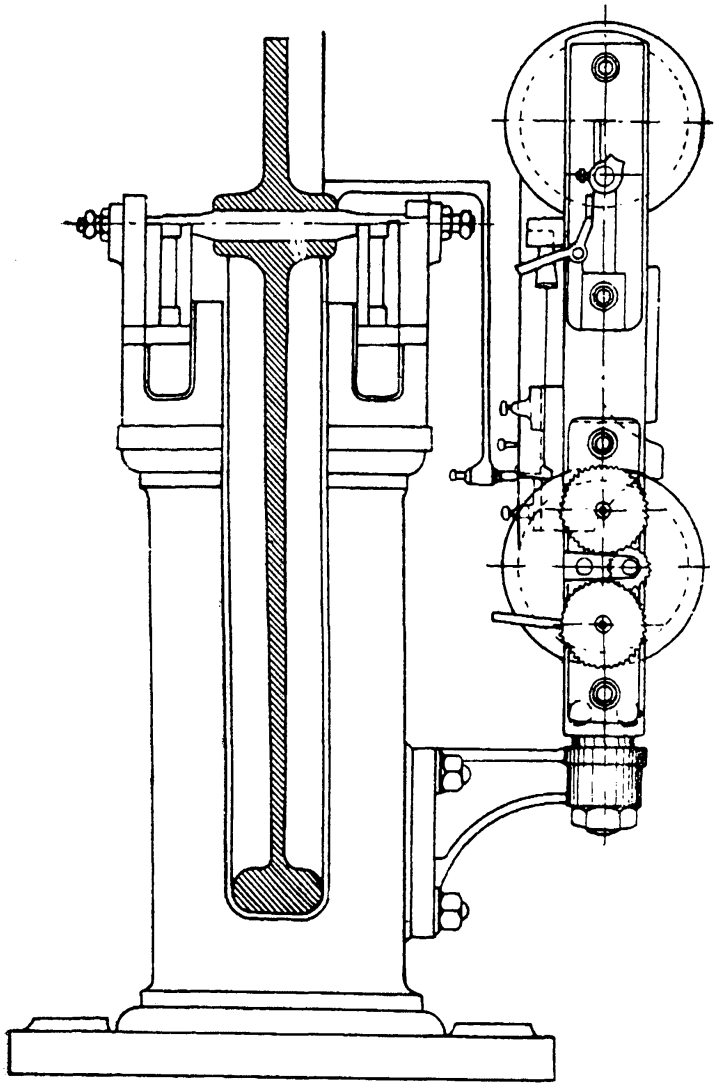
Таким образом, если взять грузик весом в $p = 150$ г, то его надо прикрепить на расстоянии 50 см ниже оси подвеса.

Эта малая величина показывает, с какою тщательностью должен

быть сделан подвес, чтобы маятник вследствие трения не имел бы настолько большого застоя, что его показания были бы слишком неточны.

Кренометр Бертена фиг. 37 и 38 состоял из двух маятников — большого и маленького.

Большой маятник имел период колебаний около 80 сек. и состоял из маховика, ось которого, для уменьшения трения, лежала на секторах, опиравшихся на призмы, как показано на схеме; малый маятник состоял из небольшого сектора, подвешенного на оси, проходящей через его центр перпендикулярно его плоскости.



Фиг. 37.

Оба маятника были снабжены пишущим приспособлением, дававшим запись качки корабля на прозрачной бумаге, которая тянулась часовым механизмом, причем записи приходились друг против друга на противоположных сторонах бумаги.

Анализ этих записей к предмету наших лекций не относится, его можно найти в сочинении: Pollard et Dudebout, Théorie du Navire, t. II.

§ 48. На кренометр, находящийся на корабле, кроме указанных выше сил, происходящих от ускорения переносного движения, действует еще трение в его оси подвеса.

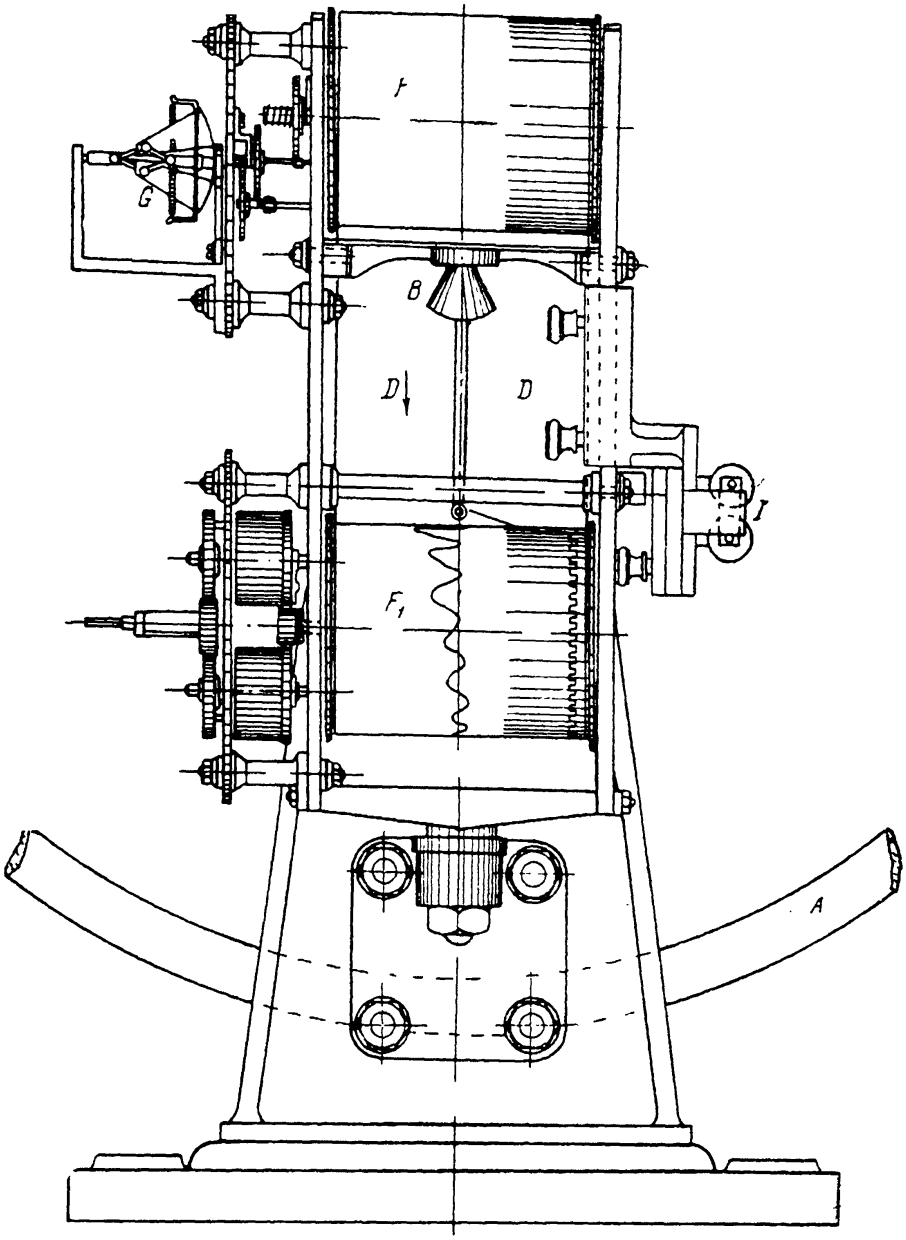
Чтобы выяснить сущность дела, рассмотрим такую задачу: тело M под действием привода совершает прямолинейные гармонические колебания.

На верхней горизонтальной плоскости этого тела лежит другое тело массы m, затянутое пружинами между неподвижными точками A и B, требуется определить движение массы m, зная, что коэффициент трения при покое есть f_0, при движении f_1.

Положение массы m (фиг. 39) определяется координатою $OG = x$ ее центра тяжести. Пусть жесткость пружины есть k, так что натяжение

пружины есть $-kx$, т. е. направлено к точке O. Пусть положение массы M определяется координатою $EC = x_1$ точки C, и пусть

$$x_1 = -a\cos\frac{2\pi t}{\tau}$$



Фиг. 38.

Положим, что в начальный момент $t = 0$ было

$$x = b; \quad x' = 0$$

тогда в первое время движения будет

$$x' < 0, \; x_1' > 0$$

и значит сила трения будет направлена в сторону положительных значений x, так что уравнение движения будет

$$mx'' = -kx + mgf$$

или, полагая

$$n^2 = \frac{k}{m}$$

$$x'' + n^2 x = gf \tag{1}$$

откуда

$$x = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt + \frac{gf}{n^2} \tag{2}$$

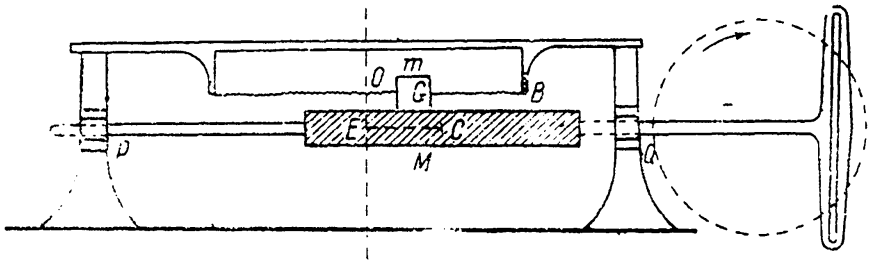
При $t = 0$ имеем

$$b = C_1 + \frac{gf}{n^2}$$

$$C_2 = 0$$

$$x = b \cos nt + \frac{gf}{n^2}(1 - \cos nt) \tag{3}$$

$$x' = \left(-nb + \frac{gf}{n}\right) \sin nt$$



Фиг. 39.

Это уравнение имеет место, пока

$$x_1' - x' > 0$$

т. е. пока

$$\frac{2\pi}{\tau} a \sin \frac{2\pi t}{\tau} - \left(nb - \frac{gf}{n}\right) \sin nt > 0$$

Вычертив синусоиду $ABCD$ (фиг. 40), представляющую

$$x_1' = \frac{2\pi}{\tau} a \sin \frac{2\pi t}{\tau} \tag{4}$$

вычерчиваем в одинаковом масштабе для амплитуд и времени синусоиду $O\varepsilon H$:

$$x' = \left(-nb + \frac{gf}{n}\right) \sin nt \tag{5}$$

и определяем первую точку H_1 пересечения этих двух синусоид; пусть эта точка соответствует моменту

$$t = t_1$$

Вычисляем по формуле (3) соответствующие значения

$$x = b_1 \quad \text{и} \quad x' = c_1$$

тогда уравнение движения для следующего размаха есть

$$x'' + n^2 x = -gf \tag{6}$$

и общий его интеграл напишем так:

$$x = C_1 \cos n(t - t_1) + C_2 \sin n(t - t_1) - \frac{gf}{n^2} \tag{7}$$

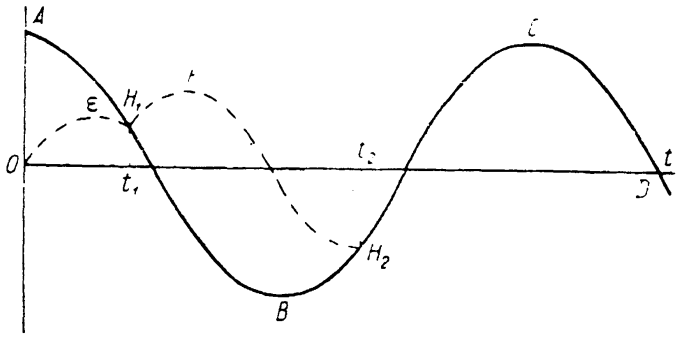
Начальные условия при $t = t_1$

$$x = b_1 \quad \text{и} \quad x' = c_1$$

дают

$$C_1 = b_1 + \frac{gf}{n^2}; \quad C_2 = \frac{c_1}{n}$$

и, значит, для второго размаха будет



Фиг. 40.

$$x = \left(b_1 + \frac{gf}{n^2}\right) \cos n(t - t_1) + \frac{c_1}{n} \sin n(t - t_1) - \frac{gf}{n^2} \tag{7'}$$

Отсюда следует

$$x' = -n\left(b_1 + \frac{gf}{n^2}\right) \sin n(t - t_1) + c_1 \cos n(t - t_1) \tag{8}$$

Положив

$$-n\left(b_1 + \frac{gf}{n^2}\right) = h_1 \cos n\gamma \quad \text{и} \quad -C_1 = h_1 \sin n\gamma$$

приводим предыдущую формулу к виду

$$x' = h \sin n(t - t_1 - \gamma) \tag{9}$$

и строим соответствующую синусоиду $H_1 F H_2$, начиная от точки H_1 до ее пересечения с синусоидою x_1' в точке H_2 в момент $t = t_2$, и продолжаем таким образом далее, пока характер движения массы m не будет выяснен в достаточной мере.

Сказать в общем случае, сколько размахов придется просчитать, нельзя, но так как синусоида x_1' остается все время одна и та же, то приходится вычерчивать только одну синусоиду x', и расчет, кроме некоторой длинноты, не представляет затруднений.

Само собою разумеется, что подобный расчет надо делать при разработке проекта приборов более точных и ответственных, нежели кренометр, и притом как расчет поверительный, т. е. предположив сперва, что трения нет, и приняв при разработке конструкции прибор-

все меры к доведению трения до наименьшей величины, надо затем, когда элементы прибора определены и выработан подвес, цапфы и проч., сделать пробную цапфу и определить величину трения, после чего и сделать поверительный расчет, который приведется к совершенно таким же уравнениям, как в рассмотренной задаче.

Заметим еще, что в рассмотренной задаче трение является не „пассивною“ силою, погашающей размахи и вызывающей „застой“, а силою „активной“, поддерживающей колебания массы m, представляющей как бы прибор, масса же M представляет как бы корабль или самолет. Колебания массы m являются в сущности вынужденными, между тем „частота“ или период их размахов равен периоду „свободных“ колебаний массы m, а не периоду возмущающей силы.

§ 49. *Гидравлический успокоитель.* Из предыдущего видно, что на корабле на кренометр или гироскоп действуют разного рода возмущающие силы, заставляющие прибор колебаться, для точности же показаний прибора надо, чтобы этих колебаний или совсем не было, или они были сведены к возможно малой величине; для этого надо, чтобы в самом приборе было какое-нибудь приспособление, погашающее его размахи.

Из таких приспособлений мы разберем гидравлический успокоитель, применяемый в гирокомпасах, — понятно, что его можно применять и в других случаях.

Положим для простоты рассуждений, что мы имеем маятник, центр тяжести которого в точке G, вес которого P, момент инерции относительно оси подвеса J, ось подвеса O, и что этот маятник снабжен „гидравлическим успокоителем“, который состоит из двух чашек, соединенных тонкой трубкой и заполненных жидкостью — маслом или ртутью.

Требуется определить малые колебания такой системы, т. е. маятника и жидкости в чашках.

Положение маятника определяется углом его наклонения θ, положение жидкости — изменением z ее уровня в чашках, причем очевидно, что насколько жидкость в одной чашке, скажем правой, стоит выше нормального, настолько же в левой чашке она будет стоять ниже нормального уровня.

Сделаем указанные на чертеже (фиг. 41) обозначения, и пусть вес единицы объема (1 см^3) жидкости есть q.

На основании опытных исследований, произведенных в 1840-х годах французским врачом Пуазейлем над истечением жидкости через трубки весьма малого диаметра, исследований, подтвержденных впоследствии и теоретически, скорость протекания жидкости через „тонкую“ трубку пропорциональна напору, так что при разности уровней h скорость v выражается формулой

$$v = k_1 h \qquad (1)$$

где k_1 есть некоторая постоянная для данной трубки, причем k_1 зависит от длины трубки, ее диаметра и рода жидкости, но нам эта зависимость не нужна. В нашем случае напор h будет

$$h = 2b\theta - 2z = 2(b\theta - z) \tag{2}$$

предполагая колебания „малыми", следовательно количество Q жидкости, протекшей за время t, есть

$$Q = qc \cdot \int_0^t v\,dt = 2qk_1 c \int_0^t (b\theta - z)\,dt \tag{3}$$

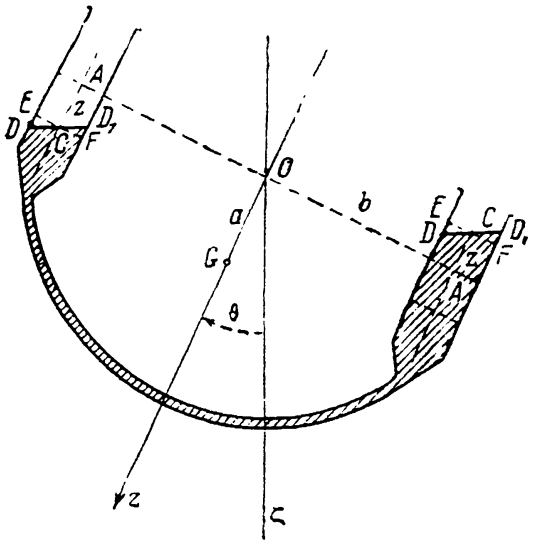
где c — некоторая постоянная для данной трубки, которая по опытам Пуазейля оказалась пропорциональной *квадрату* площади сечения, т. е. *четвертой* степени диаметра трубки, а не просто площади сечения, как можно бы было думать.

Перетекшая жидкость дает положительный, т. е. действующий в сторону наклонения, момент

$$2Qb\cos\theta = 2Qb$$

так что полный момент, действующий на маятник, будет

$$-Pa\sin\theta + 2Qb\cos\theta = -Pa\theta + 2Qb$$



Фиг. 41

таким образом, уравнение движения маятника будет

$$J\theta'' = -Pa\theta + 2Qb$$

или по подстановке вместо Q его значения

$$J\theta'' + Pa\theta = 4qk_1 cb \int_0^t (b\theta - z)\,dt \tag{4}$$

Ясно, что

$$4qk_1 c = 2k \tag{5}$$

есть величина постоянная, характеризующая прибор и представляющая весовое количество жидкости, перетекающее в 1 сек. из чашки в чашку, когда разность уровней равна 1, т. е. 1 см.

Второе уравнение будет

$$z = \frac{Q}{qS}$$

где S есть площадь сечения чашки, так что в развитом виде это уравнение есть

$$z = \frac{2qk_1 c}{qS} \int_0^t (b\theta - z)\, dt = \frac{k}{qS} \int_0^t (b\theta - z)\, dt$$

Обозначим для краткости

$$\frac{k}{qS} = f \tag{5'}$$

тогда будет

$$z = f \cdot \int_0^t (b\theta - z)\, dt \tag{6}$$

Из уравнений (4) и (6) следует

$$\begin{aligned} J\theta''' + Pa\theta' - 2kb^2\theta + 2kbz &= 0 \\ z' - bf\cdot\theta + fz &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

или символически

$$\begin{aligned} (J\delta^3 + Pa\delta - 2kb^2)\,\theta + 2kbz &= 0 \\ -bf\theta + (\delta + f)\, z &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$[(J\delta^3 + Pa\delta - 2kb^2)(\delta + f) + 2kb^2 f]\,\theta = 0$$

т. е.

$$J\theta^{IV} + Jf\theta'' + Pa\theta'' + (Paf - 2kb^2)\,\theta' = 0 \tag{7'}$$

характеристическое уравнение есть

$$J\lambda^4 + Jf\lambda^3 + Pa\lambda^2 + (Paf - 2kb^2)\,\lambda = 0$$

оно имеет очевидный корень

$$\lambda_1 = 0$$

другие же три корня даются уравнением

$$J\lambda^3 + Jf\lambda^2 + Pa\lambda + (Paf - 2kb^2) = 0 \tag{8}$$

Чтобы маятник был устойчив, необходимо, чтобы корни этого уравнения были или все три вещественные и отрицательные, или же один вещественный отрицательный, другие два — мнимые с отрицательною вещественною частью.

В „Динамике“ Рауза (Dynamics of a system of rigid bodies, part II) показано, что для уравнения

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

это условие выражается так: надо составить количество

$$A = bc - ad \tag{9}$$

и тогда *все* величины

$$a,\ b,\ c,\ d \text{ и } A$$

должны быть *одного* и того же знака — безразлично какого.

В нашем случае коэффициенты уравнения (8) суть

$$J,\ Jf,\ Pa;\quad Paf - 2kb^2$$

значит

$$A = Jf \cdot Pa - J[Paf - 2kb^2] = 2kJb^2 \tag{10}$$

а так как первый коэффициент в уравнении (8) J — положительный и величины Jf, Pa и A — положительные, то должно быть

$$Paf - 2kb^2 > 0; \tag{11}$$

на основании равенства

$$f = \frac{k}{qS}$$

предыдущее условие будет

$$Pa - 2b^2 qS > 0 \tag{12}$$

Заметим, что $2b^2 S$ есть момент инерции площади чашки относительно оси подвеса O, и, считая размеры этой площади ничтожно малыми, легко показать, что если учесть и клиновые объемы ECD и $D_1 CF$, то вместо

$$2Sb^2$$

надо будет писать

$$2S(b^2 + \rho^2) = 2Sb_1^2$$

где

$$S\rho^2 = i$$

есть момент инерции площади чашки относительно оси C. Если положить

$$\frac{Pa - 2Sqb_1^2}{J} = \gamma \frac{Pa}{J}$$

то наше уравнение будет

$$\lambda^3 + f\lambda^2 + \frac{Pa}{J}\lambda + \gamma \frac{Pa}{J} \cdot f = 0 \tag{13}$$

Корни этого уравнения будут вида

$$\lambda_2 = -\alpha$$
$$\lambda_3 = -h + n_1\sqrt{-1}$$
$$\lambda_4 = -h - n_1\sqrt{-1}$$

и общий интеграл уравнения (7′) будет вида

$$\theta = C_1 + C_2 e^{-\alpha t} + e^{-ht}[C_3 \cos n_1 t + C_4 \sin n_1 t]$$

т. е. свободные колебания погашаются, и если прибор урегулирован так, чтобы при покое было $\theta = 0$, то будет $C = 0$, и тогда

$$\theta = C_2 e^{-\alpha t} + e^{-ht}[C_3 \cos n_1 t + C_4 \sin n_1 t]$$

Таким образом для прибора, элементы которого известны, все дело свелось к решению уравнения (13).

§ 50. Мы рассмотрели свободные колебания маятника, снабженного гидравлическим успокоителем; разберем теперь вынужденные его колебания под действием периодической возмущающей силы, дающей момент

$$A \sin(\beta t + \mu)$$

так что вместо системы (7) мы имели бы систему

$$\begin{gathered} J\theta''' + Pa\theta' - 2kb^2\theta + 2kbz = A\beta\cos(\beta t + \mu) \\ z' - bf\theta + fz = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

Исключая из этих двух уравнений переменную z, получим, подобно предыдущему,

$$\begin{gathered} J\theta^{IV} + Jf\theta''' + Pa\theta'' + (Paf - 2kb_1^2)\theta' = A\beta[f\cos(\beta t + \mu) - \beta\sin(\beta t + \mu)] = \\ = A\beta\sqrt{f^2 + \beta^2}\cos(\beta t + \nu) \end{gathered} \tag{2}$$

причем вместо b^2 мы написали b_1^2, чтобы принять во внимание и клиновые объемы в чашках, и положили

$$\nu = \mu + \operatorname{arctg}\frac{\beta}{f}$$

После одного интегрирования имеем

$$J\theta''' + Jf\theta'' + Pa\theta' + (Paf - 2kb_1^2)\theta = C_1 + A\sqrt{f^2 + \beta^2}\sin(\beta t + \nu) \tag{3}$$

где C_1 — произвольная постоянная, нас не интересующая.

„Статическая“ амплитуда есть

$$\Theta_s = -\frac{A\sqrt{f^2 + \beta^2}}{Paf - 2kb_1^2} \tag{4}$$

„Динамическую“ амплитуду получим, определив частное решение

$$\theta = M\cos(\beta t + \nu) + N\sin(\beta t + \nu)$$

и положив

$$\Theta_d = \sqrt{M^2 + N^2}$$

Для определения M и N имеем уравнения

$$(Paf - 2kb_1^2 - Jf\beta^2)M + (Pa\beta - J\beta^3)N = 0$$

$$-(Pa\beta - J\beta^3)M + (Paf - 2kb_1^2 - Jf\beta^2)N = A\beta\sqrt{f^2 + \beta^2}$$

Отсюда следует

$$\sqrt{M^2 + N^2} = \frac{A\beta\sqrt{f^2+\beta^2}}{\{(Paf - 2kb_1^2 - Jf\beta^2)^2 + (Pa\beta - J\beta^3)^2\}^{\frac{1}{2}}} \tag{5}$$

таким образом, будет

$$\frac{\Theta_d}{\Theta_s} = \frac{\beta(Paf - 2kb_1^2)}{\{(Paf - 2kb_1^2 - Jfb^2)^2 + (Pa\beta - J\beta^3)^2\}^{\frac{1}{2}}} \tag{6}$$

Задаваясь наименьшей частотой β возмущающей силы и требуемым отношением амплитуд, характеризующим точность показаний прибора, получим между постоянными

$$J,\ Pa,\ b_1,\ k,\ S$$

прибора ряд соотношений, которые вместе с неравенством

$$Pa - 2b_1 Sq > 0$$

и послужат для выбора этих постоянных соответственно назначению прибора.

Выбор этот проще всего пояснить на численном примере.

Положим, что мы хотим иметь маятник, период свободных колебаний которого $\tau = 60$ сек., и пусть погашение в нем $h\tau = 1$, т. е. отношение величин двух последовательных размахов

$$\frac{\theta_k}{\theta_{k-1}} = e^{-1} = \frac{1}{2.72} = 0.37$$

итак,

$$h = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{60}; \quad 2h = \frac{1}{30} = 0.0333$$

Зная h и τ, составим соответствующий им множитель в составе характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2h\lambda + n^2$$

Мы имеем вообще

$$\tau = \frac{2\pi}{n_1}$$

где

$$n_1 = \sqrt{n^2 - h^2}$$

значит, будет

$$n_1 = \frac{2\pi}{60} = 0.1047$$

$$n^2 = n_1^2 + h^2 = 0.01096 + 0.00028 = 0.01124$$

следовательно, характеристическое уравнение будет

$$(\lambda^2 + 0.0333\lambda + 0.01124)(\lambda + \alpha) = 0$$

где α — пока неизвестная величина.

Левая часть этого уравнения должна тожественно равняться

$$\lambda^3 + f\lambda^2 + \frac{Pa}{J}\lambda + \gamma f \frac{Pa}{J}$$

следовательно, должно быть

$$0.0333 + \alpha = f$$

$$0.0333\alpha + 0.01124 = \frac{Pa}{J}$$

$$0.01124\alpha = \gamma f \frac{Pa}{J}$$

Отсюда следует

$$0.01124\alpha = \gamma(0.0333 + \alpha)(0.0333\alpha + 0.01124)$$

т. е.

$$30\gamma\alpha^2 + (11.116\gamma - 10.116)\alpha + 0.3372\gamma = 0$$

т. е.

$$\alpha = -\frac{11.116\gamma - 10.116}{60\gamma} \pm \frac{1}{60\gamma} \cdot \sqrt{(11.116\gamma - 10.116)^2 - 0.3372 \cdot 120 \cdot \gamma^2}$$

величина α должна быть вещественная и положительная, следовательно, подкоренная величина должна быть положительная, но

$$0.3372 \cdot 120 = 40.464 = (6.361)^2$$

поэтому подкоренная величина равна

$$(17.477\gamma - 10.116)(4.755\gamma - 10.116) = 83.1(\gamma - 0.579)(\gamma - 2.126) \quad (7)$$

Из равенства

$$\gamma = \frac{Pa - 2Sqb_1^2}{Pa}$$

очевидно, что $\gamma < 1$, значит, должно быть

$$\gamma < 0.579$$

Примем

$$\gamma = 0.500$$

тогда

$$\alpha = \frac{4.558}{30} \pm \frac{1}{30}\sqrt{10.68}$$

$$\alpha_1 = \frac{4.558 + 3.268}{30} = 0.261$$

$$\alpha_2 = \frac{4.558 - 3.268}{30} 0.043$$

Берем

$$\alpha = \alpha_1 = 0.261$$

тогда

$$f = 0.0333 + \alpha_1 = 0.294$$

$$\frac{Pa}{J} = 0.0333\,\alpha + 0.01124 = 0.0199$$

Для дальнейшего расчета надо задать P и J или радиус инерции ρ_1.

Пусть будет

$$P = 250 \text{ кг}$$
$$\rho_1 = 60 \text{ см}$$

тогда

$$J = \frac{250}{981} \cdot 3600 = 918$$

$$Pa = 0.0199\,J = 18.4 \text{ кг} \cdot \text{см}$$

$$\gamma = 1 - \frac{2qSb_1^2}{Pa} = \frac{1}{2}$$

значит,

$$2qSb_1^2 = \frac{1}{2}Pa = 9.2$$

За жидкость попробуем взять масло, пусть для него

$$q = \frac{1}{1000}\frac{\text{кг}}{\text{см}^3}$$

и принимаем

$$b_1 = 30$$

тогда будет

$$S = 5.1 \text{ см}^2$$

Делаем чашку круглой, тогда диаметр ее есть $d = 2.55$ см. Для круга радиус инерции равен половине радиуса, следовательно,

$$b^2 = b_1^2 - \rho^2 = 900 - (0.64)^2$$

т. е.

$$b \cong 30 \text{ см} = b_1$$

Затем мы имеем

$$f=\frac{k}{qS}=0.294$$

отсюда

$$2k=0.294\cdot\frac{2}{1000}\cdot 5.1=0.0030\text{ кг}=3.0\text{ г}$$

т. е. трубку надо взять такого диаметра, чтобы через нее протекало в 1 сек. при разности уровней в 1 см 3.0 г или 3.0 см^3 масла. Этот объем настолько велик, что выгоднее взять ртуть, плотность которой в 13.6 раза больше нежели масла, поэтому для ртути будет

$$S=\frac{5.1}{13.6}=0.37\text{ см}^3$$

и объем, протекающий в 1 сек.,

$$2k=\frac{3.0}{13.6}0.22\text{ см}^3$$

Для предварительных подсчетов можно пользоваться следующими данными.

Объем V жидкости в кубических сантиметрах, протекающий через трубку кругового сечения, радиус коего равен r см, выражается формулой

$$V=\frac{\pi}{8\mu}\cdot\frac{p_0-p_1}{l}\cdot r^4 \qquad (8)$$

где p_0-p_1 есть разность давлений (напор) в единицах CGS, l — длина трубки в сантиметрах и $\mu=0.016$ для ртути при комнатной температуре.

Таким образом, когда разность уровней равна 1 см столба ртути, то

$$p_0-p_1=13.6\cdot g=13350$$

при $r=0.1$ и $l=50$ будет

$$V=\frac{3.14}{0.128}\cdot\frac{13350}{50}\cdot\frac{1}{10000}=0.655\text{ см}^3$$

поэтому, чтобы было $V=2k=0.24$, надо брать трубку, радиус которой есть

$$r=0.1\cdot\sqrt[4]{\frac{220}{655}}=0.076\text{ см}=0.76\text{ мм}$$

т. е. кругло 1.5 мм диаметром.

В формуле (8) μ есть коэффициент вязкости или внутреннего трения жидкости, этот коэффициент зависит от температуры; из жидкостей, для которых μ мало, отметим:

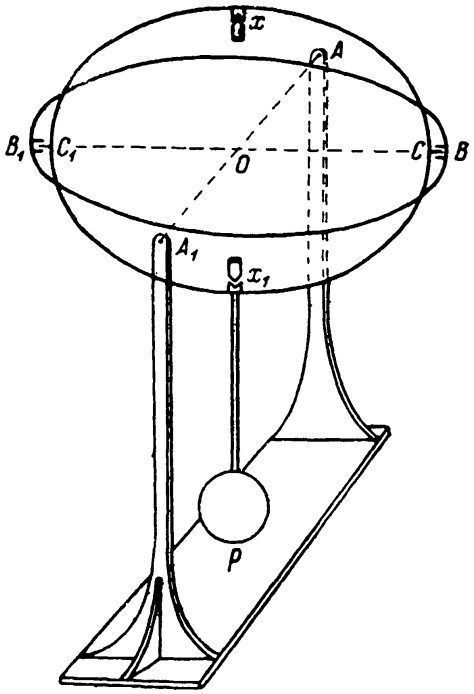
толуол ($C_6H_5CH_3$), для которого μ имеет следующие значения:

при	$t = 0°C$	$\mu = 0.00902$
„	$t = 20$	$\mu = 0.00586$
„	$t = 50$	$\mu = 0.00420$
„	$t = 100$	$\mu = 0.00269$

Кривая, построенная по этим данным, даст значение μ при любой температуре между 0 и 100° С. Плотность толуола 0.88, т. е.

$$q = \frac{1}{1136} \frac{\text{кг}}{\text{см}^3}.$$

§ 51. *Гироскопический маятник.* На качающемся корабле, для надобностей центрального управления артиллерийским огнем, требуется иметь направление истинной отвесной линии; для этой цели пользуются между прочим и гироскопическим маятником; как то видно по краткому описанию некоторых заграничных патентов, опубликованных в технических журналах.



Фиг. 42.

В этом параграфе мы имеем в виду рассмотреть теорию такого рода приборов и основания расчета их устройства.

Положим, что на кардановском подвесе, у которого ось наружного кольца поставлена в диаметральной плоскости корабля и ось внутреннего кольца — в плоскости шпангоута, плоскость этого кольца поставлена вертикально, так что ось маховика занимает также вертикальное положение. Маховик урегулирован так, что центр его тяжести совпадает с точкою пересечения осей цапф колец, к внутреннему же кольцу прикреплен противовес, дающий статический момент H, причем центр тяжести кольца с противовесом лежит на оси маховика.

Составим уравнения движения такой системы, начав с того случая, когда корабль не качается и находится в прямом положении, т. е. система находится в тех же условиях, как на неподвижном фундаменте на берегу.

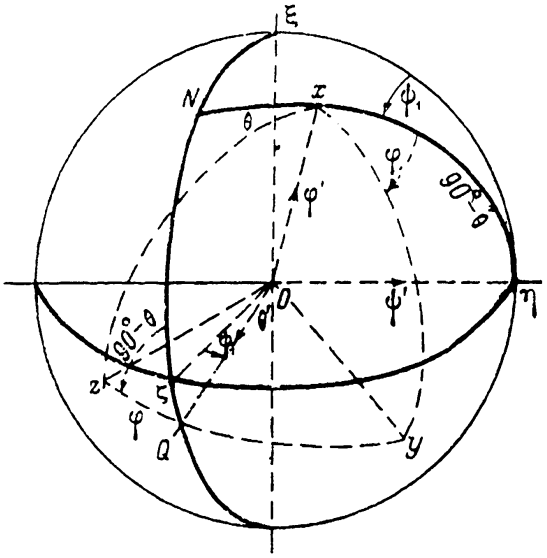
Очевидно, что таким подвесом, пренебрегая инерцией колец и принимая маховик за волчок, воспроизводится такое движение волчка, когда его центр тяжести лежит ниже точки опоры настолько, что статический момент равен H.

Пусть ABA_1B_1 — наружное кольцо (фиг. 42), A и A_1 — его цапфы, CxC_1x_1 — внутреннее кольцо, C и C_1 — его цапфы, вложенные в подцапфенники B и B_1 наружного кольца, xx_1 — ось маховика.

Возьмем оси ξ, η, ζ, неподвижные в пространстве (фиг. 43); положение осей x, y, z определим углами ψ_1, φ и θ, взятыми так, чтобы когда ось x близка к оси $O\xi$, то углы θ и ψ_1 были бы малы. Мы взяли для ясности чертежа угол ψ_1, следовало бы взять угол

$$\psi = -\psi_1$$

но тогда чертеж был бы неясный, поэтому мы эту замену сделаем в формулах, дающих косинусы углов между осями.



Фиг. 43.

Отметим точку Q пересечения плоскостей zOy и $\xi O\zeta$, тогда

$$xQ = 90°; \quad \eta Q = 90°$$

значит, прямая OQ перпендикулярна к плоскости ηxN и угол $\zeta OQ = \psi_1$; вместе с тем прямая $O\eta$ перпендикулярна к плоскости $\xi O\zeta$, прямая Ox перпендикулярна к плоскости zOy, значит угол $xO\eta$ равен сферическому (двугранному) углу NQz.

Составляем выражения косинусов, беря всякий раз сферический треугольник, в котором одна вершина есть Q, другие две — концы тех осей, между которыми угол ищется:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{x\xi}) &= \cos\theta\cos\psi_1 \\ \cos(\widehat{x\eta}) &= \sin\theta \\ \cos(\widehat{x\zeta}) &= \cos\theta\sin\psi_1 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{y\xi}) &= -\sin\varphi\sin\psi_1 - \cos\varphi\cos\psi_1\sin\theta \\ \cos(\widehat{y\eta}) &= \cos\varphi\cos\theta \\ \cos(\widehat{y\zeta}) &= \sin\varphi\cos\psi_1 - \cos\varphi\sin\psi_1\sin\theta \end{aligned} \tag{1'}$$

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{z\xi}) &= -\cos\varphi\sin\psi_1 + \sin\varphi\cos\psi_1\sin\theta \\ \cos(\widehat{z\eta}) &= -\sin\varphi\cos\theta \\ \cos(\widehat{z\zeta}) &= \cos\varphi\cos\psi_1 + \sin\varphi\sin\psi_1\sin\theta \end{aligned} \tag{1''}$$

Заменив ψ_1 через $-\psi$, имеем

$$\begin{aligned}
&\cos(\widehat{x\xi}) = \cos\theta\cos\psi \\
&\cos(\widehat{x\eta}) = \sin\theta \qquad (2)\\
&\cos(\widehat{x\zeta}) = -\cos\theta\sin\psi \\
&\cos(\widehat{y\xi}) = \sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\sin\theta \\
&\cos(\widehat{y\eta}) = \cos\varphi\cos\theta \qquad (2')\\
&\cos(\widehat{y\zeta}) = \sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cos\varphi\sin\theta \\
&\cos(\widehat{z\xi}) = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\sin\theta \\
&\cos(\widehat{z\eta}) = -\sin\varphi\cos\theta \qquad (2'')\\
&\cos(\widehat{z\xi}) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sin\theta
\end{aligned}$$

Не рассматривая пока влияния вращения Земли, имеем следующие слагающие:

ψ' по оси $o\eta$
φ' „ „ ox
θ' „ „ OQ

таким образом, будет

$$\begin{aligned}
&p = \varphi' + \psi'\sin\theta \\
&q = \psi'\cos(\widehat{y\eta}) + \theta'\cos QOy = \theta'\sin\varphi + \psi'\cos\varphi\cos\theta \qquad (3)\\
&r = \theta'\cos\varphi + \psi'\cos(\widehat{z\eta}) = \theta'\cos\varphi - \psi'\sin\varphi\cos\theta
\end{aligned}$$

Живая сила маховика будет

$$2T_0 = Ap^2 + B(q^2 + r^2) = A(\varphi' + \psi'\sin\theta)^2 + B(\theta'^2 + \psi'^2\cos^2\theta) \qquad (4)$$

К этому надо присовокупить живую силу колец. Наружное кольцо может вращаться только около неподвижной оси $O\eta$, соответствующая угловая скорость есть ψ', следовательно живая сила его

$$2T_1 = B_1\psi'^2$$

Плоскость внутреннего кольца совпадает с плоскостью zOy, его главная полярная ось есть Ox, экваториальные оси Oz и Oy, поэтому живая сила внутреннего кольца будет

$$2T_2 = A_2(p - \varphi')^2 + B_2(q^2 + r^2)$$

ибо во вращении φ' кольцо не участвует.

Положим для простоты выкладки, что мы распорядились так, сделав, например, внутреннее кольцо из двух взаимно перпендикулярных колец, что

$$A_2 = B_2$$

тогда будет

$$2T_2 = A_2(\theta'^2 + \psi'^2)$$

Наконец, к внутреннему кольцу прикреплен противовес на продолжении оси маховика; пусть его вес есть P, а расстояние до точки O есть l, тогда координаты его центра тяжести суть

$$x_0 = -l; \quad y_0 = 0; \quad z_0 = 0$$

Значит,

$$\zeta_0 = -l\cos\theta\cos\psi \qquad \xi_0' = l\theta'\sin\theta\cos\psi + l\psi'\cos\theta\sin\psi$$

$$\eta_0 = -l\sin\theta \qquad \eta_0' = -l\theta'\cos\theta$$

$$\zeta_0 = l\cos\theta\sin\psi \qquad \zeta_0' = -l\theta'\sin\theta\sin\psi + l\psi'\cos\theta\cos\psi$$

$$\xi_0'^2 + \eta_0'^2 + \zeta_0'^2 = l^2\theta'^2 + l^2\psi'^2\cos^2\theta = l^2(\theta'^2 + \psi'^2\cos^2\theta)$$

и, значит, живая сила противовеса есть

$$2T_3 = \frac{P}{g}l^2[\theta'^2 + \psi'^2\cos^2\theta]$$

но

$$Pl = H$$

поэтому

$$2T_3 = \frac{Hl}{g}[\theta'^2 + \psi'^2\cos^2\theta]$$

по малости размеров противовеса живою силою его вращательного движения можно пренебречь. Таким образом, полная живая сила нашей системы будет

$$2T = 2T_0 + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 = A(\varphi' + \psi'\sin\theta)^2 +$$
$$+ B(\theta'^2 + \psi'^2\cos^2\theta) + B_1\psi'^2 + A_2[\theta'^2 + \psi'^2] +$$
$$+ \frac{Hl}{g}[\theta'^2 + \psi'^2\cos^2\theta] \qquad (5)$$

или

$$2T = A(\varphi' + \psi'\sin\theta)^2 + \left[B + A_2 + \frac{Hl}{g}\right]\theta'^2 +$$
$$+ \left(A_2 + B_1 + B\cos^2\theta + \frac{Hl}{g}\cos^2\theta\right)\psi'^2 \qquad (5')$$

Нас интересует такое движение, при котором ось Ox мало отклоняется от вертикали, поэтому в вышеприведенном выражении можно принять

$$\cos^2\theta = 1$$

и тогда, положив

$$B + A_2 + \frac{Hl}{g} = C$$

$$B_1 + A_2 + B + \frac{Hl}{g} = D$$

будем иметь

$$2T = A(\varphi' + \psi' \sin\theta)^2 + C\theta'^2 + D\psi'^2 \qquad (I)$$

Надо еще составить выражение элементарной работы δU. Единственная сила, которая при перемещении, определяемом величинами $\delta\theta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$, производит работу, есть вес противовеса. Эта работа есть

$$\begin{aligned}\delta U = -P \cdot \delta\xi_0 &= -Pl[\sin\theta\cos\psi \cdot \delta\theta + \cos\theta\sin\psi \cdot \delta\psi] = \\ &= -H\sin\theta\cos\psi \cdot \delta\theta - H\cos\theta\sin\psi \cdot \delta\psi\end{aligned} \qquad (II)$$

Лангранжевы уравнения движения будут

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = A(\varphi' + \psi'\sin\theta); \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi' + \psi'\sin\theta) = 0$$

следовательно,

$$\varphi' + \psi'\sin\theta = n = \text{постоянной} \qquad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = A(\varphi' + \psi'\sin\theta)\cdot\sin\theta + D\psi' = An\sin\theta + D\psi'$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0$$

$$\Psi = -H\cos\theta\sin\psi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right) = D\psi'' + An\theta'\cos\theta$$

следовательно будет

$$D\psi'' + An\theta'\cos\theta = -H\cos\theta\sin\psi \qquad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = C\theta'; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = A(\varphi' + \psi'\sin\theta)\psi'\cos\theta = An\psi'\cos\theta$$

следовательно будет

$$C\theta'' - An\psi'\cos\theta = -H\sin\theta\cos\psi\ . \qquad (8)$$

Рассматривая лишь малые размахи, имеем уравнения

$$\begin{aligned} D\psi'' + An\theta' + H\psi &= 0 \\ C\theta'' - An\psi' + H\theta &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Так как движение будет иметь колебательный характер, то ищем решение вида

$$\begin{aligned} \psi &= M\cos(pt + \alpha) \\ \theta &= N\sin(pt + \alpha) \end{aligned}$$

где M, N, α и p — неизвестные постоянные.

По подстановке имеем

$$\begin{aligned} M[H - Dp^2] + AnpN &= 0 \\ Anp \cdot M + (H - Cp^2)N &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Эти уравнения имеют решение, отличное от нуля только тогда, когда

$$(H - Dp^2)(H - Cp^2) - A^2 n^2 p^2 = 0 \tag{11}$$

Это и есть характеристическое уравнение для нашей системы. В развитой форме это уравнение есть

$$CDp^4 - [A^2 n^2 + H(C + D)]p^2 + H^2 = 0$$

Откуда

$$p^2 = \frac{A^2 n^2 + H(C + D)}{2CD} \pm \frac{1}{2CD}\sqrt{[A^2 n^2 + H(C + D)]^2 - 4CDH^2} \tag{12}$$

Здесь $A^2 n^2$ есть весьма большая величина; подобное выражение мы имели не раз, и было показано, что одно значение $p^2 = p_1^2$ весьма большое, другое $p^2 = p_2^2$ весьма малое, а именно:

$$\begin{aligned} p_1^2 &\approx \frac{A^2 n^2}{CD}, \quad \text{т. е.} \quad p_1 \approx \frac{An}{\sqrt{CD}} \\ p_2^2 &\approx \frac{H^2}{A^2 n^2}, \quad \text{т. е.} \quad p_2 \approx \frac{H}{An} \end{aligned} \tag{13}$$

Корню p_1 соответствует весьма малый период

$$\tau_1 = 2\pi \frac{\sqrt{CD}}{An} \tag{14}$$

Корню p_2 соответствует весьма большой период

$$\tau_2 = 2\pi \frac{An}{H} \tag{15}$$

Таким образом, решение будет

$$\begin{aligned}\psi &= M_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha_1\right) + M_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau_2} + \alpha_2\right)\\ \theta &= N_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_1} + \alpha_1\right) + N_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_2} + \alpha_2\right)\end{aligned} \tag{16}$$

причем на основании уравнения (10) будет

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{Dp_1^2 - H}{Anp_1} M_1\\ N_2 &= \frac{Dp_2^2 - H}{Anp_2} M_2\end{aligned} \tag{17}$$

M_1, M_2, α_1, α_2 — постоянные произвольные, определяемые по начальным условиям.

Пусть будет

$$M_1 = Anp_1 P_1; \quad M_2 = Anp_2 P_2 \tag{17'}$$

тогда предыдущие формулы напишутся так:

$$\begin{aligned}\psi &= Anp_1 P_1 \cos(p_1 t + \alpha_1) + Anp_2 P_2 \cos(p_2 t + \alpha_2)\\ \theta &= (Dp_1^2 - H) P_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) + (Dp_2 - H) P_2 \sin(p_2 t + \alpha_2)\end{aligned} \tag{18}$$

и если принять общие начальные условия: при $t = 0$ должно быть

$$\psi = \psi_0, \quad \psi' = \psi_0'; \quad \theta = \theta_0, \quad \theta' = \theta_0'$$

то для определения постоянных произвольных получим уравнения

$$\begin{aligned}\psi_0 &= Anp_1 P_1 \cos\alpha_1 + Anp_2 P_2 \cos\alpha_2\\ -\psi_0' &= Anp_1^2 P_1 \sin\alpha_1 + Anp_2^2 P_2 \sin\alpha_2\\ \theta_0 &= (Dp_1^2 - H) P_1 \sin\alpha_1 + (Dp_2^2 - H) P_2 \sin\alpha_2\\ \theta_0' &= (Dp_1^2 - H) p_1 P_1 \cos\alpha_1 + (Dp_2^2 - H) p_2 P_2 \cos\alpha_2\end{aligned} \tag{19}$$

Из первого и последнего из этих уравнений найдем $P_1 \cos\alpha_1$ и $P_2 \cos\alpha_2$; из второго и третьего найдем $P_1 \sin\alpha_1$ и $P_2 \sin\alpha_2$, после чего найдутся P_1, P_2, α_1 и α_2; так как всякий раз придется решать лишь два уравнения с двумя неизвестными, то выкладка никаких затруднений не представит и на ней останавливаться не будем.

Мы видели при рассмотрении маятникового кренометра, насколько трудно получение маятника с периодом даже в 60 сек. и каким ничтожным статическим моментом он должен обладать.

Для маятника гироскопического получение не только такого периода, но и гораздо большего, не представляет никаких затруднений.

В самом деле, мы имели формулу

$$\tau_2 = 2\pi \cdot \frac{An}{H}$$

Возьмем для примера малый гироскоп § 40 с такими элементами:

Вес маховика	$P = 3000$ г
Радиус инерции	$\rho = 5$ см
Момент инерции	$A = 75$
Угловая скорость	$n = 1570$
Момент количественного движения	$An = 117\,800$

Положим, что мы хотим иметь $\tau_2 = 70$ сек., тогда будет

$$H = \frac{2\pi \cdot 117800}{70} = 10600 \text{ г} \cdot \text{см}$$

т. е. в $1^1/_2$ раза больше, нежели для маятника Фруда с маховиком диаметром 130 см и весом 250 кг.

Если мы для нашего гироскопа возьмем противовес в 100 г на плече 10 см, так что

$$H = 1000$$

то будет

$$\tau = \frac{2\pi \cdot 117800}{1000} = 740 \text{ сек.} = 12 \text{ мин. } 20 \text{ сек.}$$

с простым маятником такой период абсолютно не достижим, здесь же его дает весьма компактный прибор, обладающий притом хорошей остойчивостью, благодаря которой он может свободно преодолевать трение в цапфах своего подвеса.

§ 52. Формулы (16) показывают, что такой гироскопический маятник не имеет погашения размахов; отсюда ясно, что его необходимо снабдить гидравлическим успокоителем. Формулы (16) показывают, что ось вращения маховика совершает вокруг вертикальной оси $O\xi$ коническое движение; поэтому, чтобы погашать одновременно возможно энергичнее размахи ψ и θ, надо на внутреннее кольцо поставить или один успокоитель, но так, чтобы его плоскость была наклонна к осям цапф, или два, из которых плоскость одного была бы перпендикулярна оси цапф наружного кольца, плоскость другого была бы перпендикулярна оси цапф внутреннего кольца. В остальном оба успокоителя можно иметь вполне одинаковыми.

Рассмотрим движение такого гироскопического маятника, снабженного успокоителями.

Мы уже обращали внимание, что главное колебание длинного периода получится, если в уравнениях (9) отбросить члены $D\psi''$ и $C\theta''$ и писать эти уравнения так:

$$\begin{aligned} An\theta' + H\psi &= 0 \\ -An\psi' + H\theta &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

если мы присовокупим успокоители, то эти уравнения примут вид

$$\begin{aligned} An\theta' + H\psi - 2kb\int_0^t (b\psi - z_1)\,dt = 0 \\ -An\psi' + H\theta - 2kb\int_0^t (b\theta - z_2)\,dt = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

$$z_1 - f\int_0^t (b\psi - z_1)\,dt = 0 \tag{3}$$

$$z_2 - f\int_0^t (b\theta - z_2)\,dt = 0 \tag{4}$$

сохраняя обозначения § 49.

Дифференцируя эти уравнения, имеем

$$An\theta'' + H\psi' - 2kb^2\psi + 2kbz_1 = 0 \tag{1'}$$

$$-An\psi'' + H\theta' - 2kb^2\theta + 2kbz_2 = 0 \tag{2'}$$

$$z_1' - bf\psi + fz_1 = 0 \tag{3'}$$

$$z_2' - bf\theta + fz_2 = 0 \tag{4'}$$

Из этих четырех уравнений исключаем переменные z_1 и z_2, для этого, дифференцируя первые два уравнения и заменив в них z_1' и z_2' их величинами из последних двух уравнений, получим уравнения

$$\begin{aligned} An\theta''' + H\psi'' - 2kb^2\psi' + 2kb^2 f\psi - 2kbfz_1 = 0 \\ H\theta'' - 2kb^2\theta - An\psi''' + 2kb^2 f\theta - 2kbfz_2 = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

придав к этим уравнениям соответственно уравнения (1') и (2'), умноженные на f, получим

$$\begin{aligned} An\theta''' + Anf\cdot\theta'' + H\psi'' + (fH - 2kb^2)\psi' = 0 \\ H\theta'' - (fH - 2kb^2)\theta' - An\psi''' - Anf\psi'' = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Эти уравнения, будучи проинтегрированы по одному разу, принимают вид

$$\begin{aligned} An\theta'' + Anf\theta' + H\psi' + (fH - 2kb^2)\psi = C_1 \\ H\theta' + (fH - 2kb^2)\theta - An\psi'' - Anf\psi' = C_2 \end{aligned} \tag{7}$$

Характеристическое уравнение этой системы есть

$$A^2n^2(\lambda^2 + f\lambda)^2 + [H\lambda + fH - 2kb^2]^2 = 0 \tag{8}$$

Полагая для краткости письма

$$\frac{H}{An} = 2a; \qquad \frac{fH - 2kb^2}{An} = c$$

напишем это уравнение так:

$$(\lambda^2 + 2ai\lambda + f\lambda + ci)(\lambda^2 - 2ai\lambda + f\lambda - ci) = 0 \tag{9}$$

Положив затем

$$\begin{aligned} 2p^2 &= +\sqrt{(f-a^2)^2 + c^2} + (f - a^2) \\ 2q^2 &= +\sqrt{(f+a^2)^2 + c^2} - (f - a^2) \end{aligned} \tag{10}$$

будем иметь следующие выражения корней:

$$\lambda_1 = -p + (a+q)i; \qquad \lambda_2 = -p + (a-q)i$$

$$\lambda_3 = -p - (a+q)i; \qquad \lambda_4 = -p - (a-q)i$$

Пара корней λ_1 и λ_3 дает колебания, частота которых примерно равна $2a = \frac{H}{An}$, т. е. частоте системы, как если бы не было затухания. Вторая пара корней дает еще меньшую частоту и, следовательно, еще больший период. Займемся главными колебаниями, определяемыми первыми двумя корнями.

Как видно, для этих колебаний будет

$$e^{-pt}\{C_2 \cos(a+q)t + C_3 \sin(a+q)t\}$$

и логарифмический декремент есть

$$p = +\sqrt{\frac{\sqrt{(f-a^2)^2 + c^2} + f - a^2}{2}} \tag{11}$$

Значит присоединение гидравлического успокоителя описанного устройства дает действительно требуемое погашение свободных колебаний.

Что касается вынужденных колебаний, то об их величине можно составить приближенное суждение, пользуясь следующими соображениями.

Когда свободные колебания выражаются формулою вида

$$\psi = e^{-pt}\{C_2 \cos(a+q)t + C_3 \sin(a+q)t\} \tag{12}$$

то это значит, что характеристическое уравнение имеет вид

$$(\lambda + p)^2 + (a+q)^2 = 0$$

т. е.

$$\lambda^2 + 2p\lambda + p^2 + (a+q)^2 = 0$$

Значит ψ удовлетворяет уравнению вида

$$\psi'' + 2p\psi' + [p^2 + (a+q)^2]\psi = 0 \tag{13}$$

поэтому, когда на маятник действует возмущающая сила

$$F \sin(gt + \alpha) = F \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \alpha\right) \tag{14}$$

то для того чтобы иметь возмущение достаточно малым, стоит только период свободных колебаний сделать достаточно большим по сравнению с периодом возмущающей силы, а это, как показано для гироскопического маятника, легко осуществимо.

Возмущающие же силы, действующие на кренометр или маятник вследствие движений корабля, показаны в § 46.

На самолете весьма значительное возмущение происходит при повороте (вираже).

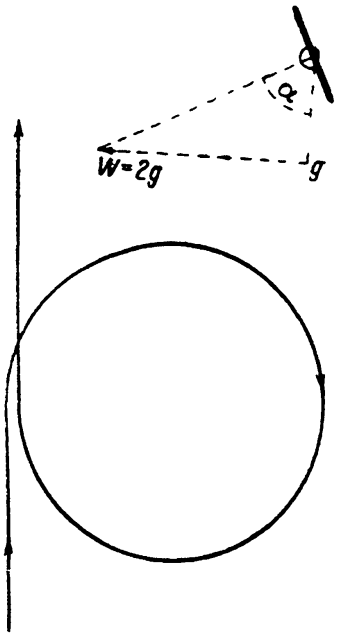
Положим, для примера, что самолет летит со скоростью 60 м в секунду и описывает циркуляцию в 20 сек.

На такой циркуляции ускорение

$$w=\frac{v^2}{r}=\frac{4\pi^2}{\tau^2}\cdot r=\frac{2\pi}{\tau}\cdot v=\frac{2\pi}{20}\cdot 60\approx 20 \text{ м/сек.}^2$$

т. е. в два раза больше ускорения силы тяжести, так что маятник короткого периода стал бы к вертикали под углом

$$\alpha=\operatorname{arctg} 2=63°30'$$



Фиг. 44.

Посмотрим, какое отклонение получит гироскопический маятник с периодом 720 сек., когда самолет с прямого курса опишет полную циркуляцию и ляжет на тот же курс (фиг. 44).

Вместо гироскопического маятника можем вообразить простой маятник того же самого периода, а для такого маятника мы имели бы уравнение

$$I\sigma''+pl\sigma=\frac{20\cdot pl}{g}=2pl \qquad (15)$$

или

$$\sigma''+k^2\sigma=2k^2$$

где

$$k^2=\frac{pl}{I}; \qquad k=\frac{2\pi}{\tau}$$

Начальные условия: при $t=0$ было $\psi=0$ и $\psi'=0$, значит решение уравнения (15) есть

$$\sigma=2(1-\cos kt)=2\left(1-\cos\frac{2\pi t}{\tau}\right)=115°\left(1-\cos\frac{2\pi t}{\tau}\right)$$

Полное время поворота самолета есть $t=20$ сек.; $\tau=720$ сек., следовательно, к концу этого времени

$$\sigma=115°\left[1-\cos 2\pi\cdot\frac{20}{720}\right]=115°[1-\cos 10°]=$$

$$=115°[1-0.985]=115°\cdot 0.015=1°75\approx 1°45'$$

На такой приблизительно угол от вертикали отклонится и ось гироскопического маятника, а так как можно считать

$$\sigma^2 = \theta^2 + \psi^2$$

и углы θ и ψ одинаковы, то, приближенно, в конце поворота будет

$$\theta = \psi = 1^\circ 75 \cdot 0.7 = 1^\circ 25$$

После чего гироскопический маятник будет совершать затухающие свободные колебания.

§ 53. Мы не принимали во внимание вращения Земли и влияния его на гироскоп; чтобы оценить порядок величины этого влияния, положим, что плоскость $\xi O\eta$ есть плоскость меридиана места, тогда от вращения Земли прибавляются угловые скорости

$$\omega_1 = \psi \cos\lambda \qquad \text{по оси } O\eta$$
$$\omega_2 = -\omega \sin\lambda \qquad \text{„ „ } O\xi$$

где λ есть широта места, так что с принятой точностью в уравнениях (1) § 52 надо вместо $+\psi'$ писать $+\psi' + \omega_1$, и наши уравнения будут

$$\begin{aligned} An\theta' + H\psi &= 0 \\ -An\psi' + H\theta &= An\omega_1 \end{aligned} \tag{1}$$

чему соответствует частное решение

$$\theta_1 = \frac{An\omega_1}{H}; \qquad \psi_1 = 0$$

Но мы видели, что

$$\tau_2 = 2\pi \frac{An}{H}$$

значит

$$\theta_1 = \omega_1 \cdot \frac{\tau_2}{2\pi} = \frac{\omega \cdot \tau_2}{2\pi} \cdot \cos\lambda$$

Но $\omega = 15''$ в секунду, значит будет

$$\theta_1 = \frac{15''}{2\pi} \cdot \tau_2 \cdot \cos\lambda = 2''4 \cdot \tau_2 \cdot \cos\lambda$$

так, например, для маятника с периодом 720 сек. в нашей широте

$$\cos\lambda = \frac{1}{2}$$

будет

$$\theta_1 = 864'' = 14'24'' \approx \frac{1^\circ}{4}$$

Такой величины угол θ достигает, когда корабль идет по курсу, перпендикулярному к меридиану.

Мы видели, что когда кренометр поставлен в центре тяжести корабля, то погрешность его происходит только от орбитального движения центра тяжести корабля и выражается формулою

$$\frac{\Theta_0 \cdot \tau_0^2}{\tau_2^2 - \tau_0^2}$$

причем Θ_0 около 7°. Как видно, эта погрешность тем меньше, чем τ_2 больше; с другой стороны, от влияния вращения Земли погрешность тем больше, чем период больше; можно поставить вопрос: какой взять период, чтобы сумма обеих погрешностей была наименьшая?

Ясно, что для этого надо найти minimum величин

$$\varepsilon = a\tau_2 + \frac{\Theta_0 \cdot \tau_0^2}{\tau_2^2 - \tau_0^2} \qquad (2)$$

Положим

$$\frac{\tau_2}{\tau_0} = x$$

тогда будет

$$\varepsilon = a\tau_0 \cdot x + \frac{\Theta_0}{x^2 - 1}$$

значит, x определяется уравнением

$$-2\Theta_0 \cdot \frac{x}{(x^2-1)^2} + a\tau_0 = 0 \qquad (3)$$

или, положив

$$b = 2\frac{\Theta_0}{a\tau_0}$$

имеем для определения x уравнение

$$(x^2-1)^2 - bx = 0$$

так как x^2 будет весьма велико по сравнению с 1, то приближенно будет

$$x = \sqrt[3]{b}$$

Так, например, пусть в нашей широте

$$\tau_0 = 10 \text{ сек.}$$

тогда

$$b = 2\frac{7 \cdot 3600}{1.2 \cdot 10} = 4200$$

$$x = \sqrt[3]{4200} = 16.1$$

$$\tau_2 = 161 \text{ сек.}$$

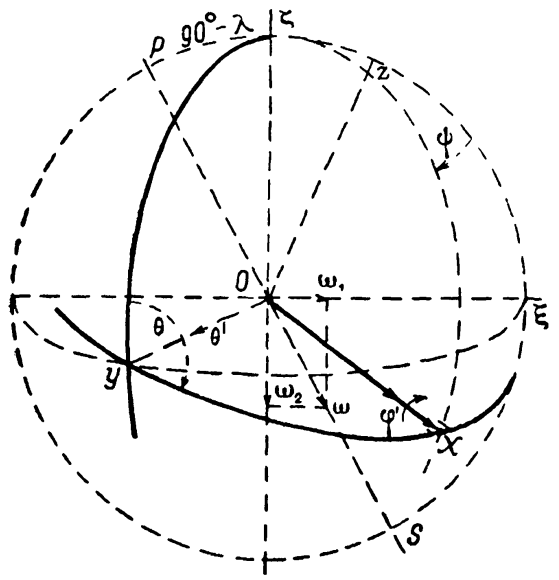
Погрешность ε будет

$$\varepsilon = \frac{7 \cdot 3600 \cdot 100}{(161)^2 - 100} + 1''{,}2 \cdot 161 = 97'' + 194'' = 291''$$

т. е. наибольшая погрешность при таком выборе составит около $0°5'$ в самом невыгодном случае.

§ 54. Рассмотрим теперь гироскоп, который можно назвать гироскопом с неполною связью.

Положим, что для гироскопа с тремя степенями свободы движение внутреннего кольца стеснено тем, что это кольцо связано с наружным пружиной, которая стремится поставить внутреннее кольцо перпендикулярно наружному, а во всяком другом положении пружина дает момент, пропорциональный углу отклонения кольца от перпендикулярности.



Фиг. 45.

Когда наружное кольцо поставлено вертикально и может поворачиваться только около вертикальной оси, то вместо пружины можно к внутреннему кольцу прикрепить противовес, заставляющий это кольцо становиться горизонтально, когда маховик не вращается.

Короче говоря, на внутреннее кольцо действует „восстановляющий момент“ $H \cdot \cos\theta$, где θ есть угол между плоскостями колец.

Гироскоп с такою „неполною связью“ и применяется в гирокомпасах, и только благодаря этому применению удалось гирокомпас осуществить.

Итак, положим, что ось наружного кольца вертикальна, примем координатные параметры ψ, θ, φ, показанные на фиг. 45, причем плоскость $\zeta O\xi$ есть плоскость меридиана места, λ — широта его. Массою колец сперва пренебрежем, чтобы сущность дела выявилась в простейшем виде.

Для составления уравнений движения поступим как и раньше, т. е. составим: выражения косинусов углов между осями, проекции угловой скорости на главные оси инерции маховика, удвоенную живую силу его, элементарную работу, которая теперь не равна нулю, и затем применим схему Лагранжа. В полученных уравнениях отбросим те члены, которые ничтожно малы по сравнению с главными гироскопическими членами, содержащими множитель An — момент количеств движения маховика.

Поступая таким образом, получим

$$\begin{aligned}
\cos(\widehat{x\xi}) &= \sin\theta\cos\psi \\
\cos(\widehat{x\zeta}) &= \cos\theta \\
\cos(\widehat{z\xi}) &= -\cos\theta\cos\psi \\
\cos(\widehat{z\zeta}) &= \sin\theta \\
\cos(\widehat{y\xi}) &= -\sin\psi
\end{aligned} \tag{1}$$

Слагающие угловых скоростей суть

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \omega\cos\lambda && \text{по оси } O\xi \\
-\omega_2 &= -\omega\sin\lambda && \text{„ „ } O\zeta \\
\psi' &\text{ по оси } O\zeta \\
\theta' &\text{ „ „ } Oy \\
\varphi' &\text{ „ „ } Ox
\end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, будет

$$\begin{aligned}
p &= \varphi' + \omega_1\cos(\widehat{x\xi}) + (\psi' - \omega_2)\cos(\widehat{x\zeta}) = \varphi' + \omega_1\sin\theta\cos\psi + (\psi' - \omega_2)\cos\theta \\
q &= \theta' + \omega_1\cos(\widehat{y\xi}) = \theta' - \omega_1\sin\psi \\
r &= \omega_1\cos(\widehat{z\xi}) + (\psi' - \omega_2)\cos(\widehat{z\zeta}) = -\omega_1\cos\theta\cos\psi + (\psi' - \omega_2)\sin\theta
\end{aligned} \tag{3}$$

Удвоенная живая сила

$$\begin{aligned}
2T = A[\varphi' + \omega_1\sin\theta\cos\psi + (\psi' - \omega_2)\cos\theta]^2 + B(\theta' - \omega_1\sin\psi)^2 + \\
+ B[-\omega_1\cos\theta\cos\psi + (\psi' - \omega_2)\sin\theta]^2
\end{aligned} \tag{4}$$

Первое уравнение движения будет

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\varphi'}\right) = 0$$

и дает

$$\varphi' + \omega_1\sin\theta\cos\psi + (\psi' - \omega_2)\cos\theta = n = \text{постоянной} \tag{5}$$

Затем имеем

$$\frac{\partial T}{\partial\theta'} = B(\theta' - \omega_1\sin\psi); \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\theta'}\right) = B\theta'' - B\omega_1\psi'\cos\psi$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta} = An\omega_1\cos\theta\cos\psi - An(\psi' - \omega_2)\sin\theta + (\text{члены высшего порядка})$$

Отбрасывая малые члены, имеем

$$B\theta'' + An(\psi' - \omega_2)\sin\theta - An\omega_1\cos\theta\cos\psi = H\cos\theta \tag{6}$$

ибо элементарная работа

$$\delta U = H\cos\theta\cdot\delta\theta$$

Затем

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = A[\varphi' + \omega_1 \sin\theta\cos\psi + (\psi' - \omega_2)\cos\theta]\cos\theta +$$
$$+ B[-\omega_1\cos\theta\cos\psi + (\psi' - \omega_2)\sin\theta]\sin\theta$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right) = B\sin^2\theta\psi'' - An\theta'\sin\theta + \ldots$$
$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = -An\omega_1\sin\theta\sin\psi + \ldots$$

причем малые члены отброшены.

Таким образом имеем следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} &B\theta'' + An(\psi' - \omega_2)\sin\theta - An\omega_1\cos\theta\cos\psi = H\cos\theta \\ &B\sin^2\theta\psi'' + An\omega_1\sin\theta\sin\psi - An\theta'\sin\theta = 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

Нас интересуют малые колебания около меридиана, т. е. когда угол ψ малый и угол θ близок к $\frac{\pi}{2}$, т. е. внутреннее кольцо близко к горизонтальному положению, поэтому положим

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \sigma$$

тогда приближенно будет

$$\sin\theta = \cos\sigma = 1; \quad \cos\theta = -\sin\sigma = \sigma; \quad \sin\psi = \psi; \quad \cos\psi = 1$$
$$B\sin^2\theta = B$$

и уравнения (7) примут вид

$$\begin{aligned} &B\psi'' + An\omega_1\psi - An\sigma' = 0 \\ &An\psi' + B\sigma'' + (An\omega_1 + H)\sigma = An\omega_2 \end{aligned} \qquad (8)$$

Полагая в этих уравнениях

$$\psi'' = 0; \quad \psi' = 0$$
$$\sigma'' = 0; \quad \sigma' = 0$$
$$\psi = \psi_0; \quad \sigma = \sigma_0$$

получим положение „динамического равновесия“

$$\psi_0 = 0$$
$$\sigma_0 = \frac{An\omega_2}{An\omega_1 + H}$$

Эти уравнения показывают, что положение равновесия есть то, когда ось маховика в меридиане и наклонена под углом σ_0 к горизонту.

Приняв в уравнениях (8)

$$\psi''=0; \quad \sigma''=0$$

получим уравнения „установившегося движения“

$$\begin{aligned} An\omega_1\psi - An\sigma' &= 0 \\ An\psi' + (An\omega_1 + H)\sigma &= An\omega_2 \end{aligned} \tag{9}$$

полагая

$$\mu^2 = \frac{An\omega_1 + H}{An}\omega_1$$

получим общий интеграл этих уравнений в виде

$$\begin{aligned} \psi &= C_1\cos\mu t + C_2\sin\mu t \\ \sigma &= \frac{\omega_1}{\mu}(C_1\sin\mu t - C_2\cos\mu t) + \sigma_0 \end{aligned} \tag{10}$$

Эти уравнения показывают, что гироскоп при установившемся движении совершает около своего положения динамического равновесия маятникообразные колебания, период которых есть

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\mu} = 2\pi\sqrt{\frac{An}{(An\omega_1 + H)\omega_1}} \tag{11}$$

В гирокомпасах берут „восстановляющий момент“ H так, чтобы было приближенно

$$H = \frac{300\,An\omega}{\cos\lambda} \approx \frac{1}{45}\frac{An}{\cos\lambda} \tag{12}$$

тогда будет $An\omega_1$ весьма мало по сравнению с H, и приближенно получим

$$\sigma_0 = \frac{1}{600}\sin 2\lambda$$

что для широты 45° дает

$$\sigma_0 = \frac{1}{600} \approx 0{,}1$$

Период же τ_1 будет

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{An}{H\omega_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{300\omega^2}} = \\ &= 2\pi\cdot\frac{13700}{\sqrt{300}} \approx 5000 \text{ сек.} \approx 84 \text{ мин.} \end{aligned} \tag{13}$$

Причина такого выбора будет указана в дальнейшем.
Наконец, полные уравнения движения суть

$$\begin{aligned} B\psi'' + An\omega_1\psi - An\sigma' &= 0 \\ An\psi' + B\sigma'' + (An\omega_1 + H)\sigma &= An\omega_2 \end{aligned} \tag{14}$$

Согласно изложенному в § 24, имеем характеристическое уравнение

$$(B\mu^2 + An\omega_1)(B\mu^2 + An\omega_1 + H) + A^2 n^2 \mu^2 = 0$$

или, положив

$$\mu^2 = \alpha$$

$$B^2\alpha^2 + (A^2 n^2 + 2ABn\omega_1 + BH)\alpha + An\omega_1 \cdot H + A^2 n^2 \omega_1^2 = 0$$

величина $2ABn\omega_1$ весьма мала по сравнению с $A^2 n^2$ и может быть отброшена, так что будет

$$\alpha_1 = -\frac{A^2 n^2 + BH}{2B^2} - \frac{1}{2B^2} \cdot \sqrt{(A^2 n^2 + BH)^2 - 4B^2(An\omega_1 H + A^2 n^2 \omega_1^2)}$$

$$\alpha_2 = -\frac{A^2 n^2 + BH}{2B^2} + \frac{1}{2B^2} \cdot \sqrt{(A^2 n^2 + BH)^2 - 4B^2(An\omega_1 H + A^2 n^2 \omega_1^2)}$$

Величина $A^2 n^2 + BH$ весьма велика по сравнению с $4B^2(An\omega_1 \cdot H + A^2 n^2 \omega_1^2)$, поэтому приближенно будет

$$\alpha_1 = -\frac{A^2 n^2 + BH}{B^2}$$

$$\alpha_2 = -\frac{An\omega_1 H + A^2 n^2 \omega_1^2}{A^2 n^2 + BH} \approx -\frac{H\omega_1}{An}$$

следовательно,

$$\mu_2 = -\mu_4 = \sqrt{\frac{A^2 n^2 + BH}{B^2}} \cdot \sqrt{-1} \approx -\frac{An}{B}\sqrt{-1}$$

$$\mu_1 = -\mu_3 = \sqrt{\frac{H\omega_1}{An}} \cdot \sqrt{-1}$$

Этим корням соответствуют периоды

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\mu_1} = 2\pi\sqrt{\frac{An}{H\omega_1}} \tag{15}$$

$$\tau_2 = \frac{2\pi}{\mu_2} = 2\pi\frac{B}{An} \tag{16}$$

период τ_1 будет весьма большой, как уже сказано, для гирокомпасов около 84 минут и соответствует „установившемуся движению“, период τ_2 будет весьма малый, порядка $\frac{1}{200}$ сек., и соответствует малой вибрации около сказанного установившегося движения.

Общий интеграл будет

$$\psi = C_1 \cos\frac{2\pi}{\tau_1}t + C_2 \sin\frac{2\pi}{\tau_1}t + C_3 \cos\frac{2\pi}{\tau_2}t + C_4 \sin\frac{2\pi}{\tau_2}t$$

$$\sigma = \sigma_0 + \left(\sqrt{\frac{An\omega_1}{H}} - \frac{B}{An}\sqrt{\frac{H\omega_1}{An}}\right)\left(C_1 \sin\frac{2\pi}{\tau_1}t - C_2 \cos\frac{2\pi}{\tau_1}\right) +$$

$$+ \left(\frac{B\omega_1}{An} - 1\right)\left(C_3 \sin\frac{2\pi}{\tau_2}t - C_4 \cos\frac{2\pi}{\tau_1}t\right)$$

или с принятой степенью точности

$$\psi = C_1 \cos\frac{2\pi}{\tau_1}t + C_2 \sin\frac{2\pi}{\tau_1}t + C_3 \cos\frac{2\pi}{\tau_2}t + C_4 \sin\frac{2\pi}{\tau_2}t$$

$$\sigma = \sigma_0 + \sqrt{\frac{An\omega_1}{H}}\left(C_1 \sin\frac{2\pi}{\tau_1}t - C_2 \cos\frac{2\pi}{\tau_1}t\right) - C_3 \sin\frac{2\pi}{\tau_2}t +$$

$$+ C_4 \cos\frac{2\pi}{\tau_2}t$$

Мы не будем определять значений, постоянных при общих начальных условиях, а ограничимся теми, которые имеют место при пуске в ход гирокомпаса, а именно: при $t=0$

$$\psi = \psi_1; \quad \psi' = 0$$
$$\sigma = 0; \quad \sigma' = 0$$

Таким образом, будет

$$\psi_1 = C_1 + C_3$$
$$-\sigma_0 = C_4 - \sqrt{\frac{An\omega_1}{H}}C_2$$

$$0 = \frac{C_2}{\tau_1} + \frac{C_4}{\tau_2}$$
$$0 = \sqrt{\frac{An\omega_1}{H}}\frac{C_1}{\tau_1} - \frac{C_3}{\tau_2}$$

Заметим, что отношение

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} \approx \frac{1}{1000000}; \quad \sqrt{\frac{An\omega_1}{H}} \approx \frac{\cos\lambda}{17}$$

отсюда следует, что

$$C_1 \simeq \psi_1; \qquad C_3 \simeq \frac{\cos\lambda}{1700000}C_1$$
$$C_2 \simeq \sqrt{\frac{H}{An\omega_1}}\sigma_0; \quad C_4 \simeq -\frac{1}{1000000}C_2$$

и, значит, практически будет

$$\psi = \psi_1 \cos\frac{2\pi}{\tau_1}t + \sqrt{\frac{H}{An\omega_1}}\sigma_0 \sin\frac{2\pi}{\tau_1}t$$
$$\sigma = \sigma_0 + \sqrt{\frac{An\omega_1}{H}}\psi_1 \sin\frac{2\pi}{\tau_1}t - \sigma_0 \cos\frac{2\pi}{\tau_1}t \qquad (17)$$

Как видно, полученное решение есть то самое, которое следует из уравнений (9) установившегося движения.

§ 55. ***Гироскоп со связанным внутренним кольцом и гидравлическим успокоителем.*** Мы рассмотрели в § 54 гироскоп, у которого

внутреннее кольцо свободно, но или снабжено противовесом, или же связано упругою связью с наружным кольцом.

Уравнения движения в этом случае, пренебрегая инерцией колец, были

$$\begin{aligned} B\psi'' + An\omega_1\psi - An\sigma' &= 0 \\ An\psi' + B\sigma'' + (An\omega_1 + H)\sigma - An\omega_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

и мы видели, какие выгоды такое устройство гироскопа доставляет, дозволяя осуществлять весьма длинные периоды свободных качаний; ясно, что для такого гироскопа особенно важно иметь сильное погашение свободных колебаний, ибо иначе он слишком долго не приходил бы в состояние динамического равновесия.

Покажем, какое влияние оказывает на такой гироскоп гидравлический успокоитель.

На основании изложенного в § 49 видно, что от прикрепления к внутреннему кольцу гидравлического успокоителя в плоскости, перпендикулярной к его оси цапф, первое уравнение не изменится, ко второму же прибавится член

$$-2kb\int_0^t (b\sigma - z)\,dt$$

и к системе надо присоединить уравнение

$$z = f\int_0^t (b\sigma - z)\,dt$$

Таким образом получим

$$\begin{aligned} B\psi'' + An\omega_1\psi - An\sigma' &= 0 \\ An\psi' + B\sigma'' + (An\omega_1 + H)\sigma - An\omega_2 - 2kb\int_0^t (b\sigma - z)\,dt &= 0 \\ z - f\int_0^t (b\sigma - z)\,dt &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

В § 54 показано, что главная часть движения, представляемая членами большого периода, получается, отбросив в предыдущих уравнениях члены, содержащие ψ'' и σ'', что и понятно, ибо если в состав ψ и σ войдет член с весьма большим периодом τ, например $\tau_1 = 5000$, т. е. член вида

$$\alpha \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \varepsilon\right)$$

то в производные ψ'' и σ'' войдут члены вида

$$\frac{4\pi^2}{\tau_1^2}\alpha \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}+\varepsilon\right)=\frac{40}{2500000}\alpha \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}+\varepsilon\right)$$

которые будут ничтожно малы по сравнению с прочими. Отсюда ясно, что, отбросив члены с ψ'' и σ'', мы из оставшихся уравнений члены с большим периодом получим правильно, а эти-то члены и характеризуют движение.

Таким образом можно рассматривать уравнения

$$An\omega_1\psi - An\sigma' = 0$$

$$An\psi' + (An\omega_1 + H)\sigma - An\omega_2 - 2kb\int_0^t (b\sigma - z)\,dt = 0 \tag{3}$$

$$z - f\cdot\int_0^t (b\sigma - z)\,dt = 0$$

иначе

$$An\omega_1\psi - An\sigma' = 0 \tag{1'}$$

$$An\psi'' + (An\omega_1 + H)\sigma' - 2kb^2\sigma + 2kbz = 0 \tag{2'}$$

$$z' - bf\sigma + fz = 0 \tag{3'}$$

Во втором из этих уравнений было бы неправильно отбросить член $An\psi''$, ибо множитель An — весьма большой.

Для системы трех уравнений (1'), (2'), (3'), подобно как для системы двух уравнений, ищем частное решение вида

$$\psi = C_1 e^{\lambda t};\quad \sigma = C_2 e^{\lambda t};\quad z = C_3 e^{\lambda t} \tag{4}$$

по подстановке в предложенные уравнения и сокращения на $e^{\lambda t}$ имеем

$$\begin{aligned} \omega_1 C_1 - \lambda C_2 &= 0 \\ An\lambda^2 C_1 + [(An\omega_1 + H)\lambda - 2kb^2]C_2 + 2kbC_3 &= 0 \\ -bfC_2 + (\lambda + f)C_3 &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Отсюда следует для определения λ уравнение

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \omega_1 & -\lambda & 0 \\ An\lambda^2 & (An\omega_1 + H)\lambda - 2kb^2 & 2kb \\ 0 & -bf & \lambda + f \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

умножив последний столбец на b и придав ко второму, получим во втором столбце общий множитель λ, который выносим за черту, тогда будет

$$\Delta(\lambda)=\lambda\begin{vmatrix}\omega_1 & -1 & 0\\ An\lambda^2 & An\omega_1+H & 2kb\\ 0 & b & \lambda+f\end{vmatrix}=0 \tag{7}$$

Развив этот определитель по элементам первой строки, имеем

$$\Delta(\lambda)=\lambda\{\omega_1[(An\omega_1+H)(\lambda+f)-2kb^2]+An\lambda^2(\lambda+f)\}=$$
$$=\lambda[An\lambda^3+Anf\lambda^2+(An\omega_1^2+H\omega_1)\lambda+(An\omega_1^2+H\omega_1)f-2kb^2\omega_1]=0 \tag{8}$$

Корни этого уравнения пусть будут

$$0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$$

Полагая в уравнениях (5) $\lambda=0$, имеем

$$C_1=0;\quad C_3=bC_2;$$

Примем, для простоты, что

$$C_1=C_2=C_3=0 \tag{9}$$

Пусть $\lambda=\lambda_1$, тогда будет

$$C_2=\frac{\omega_1}{\lambda_1}C_1$$

$$C_1[An\lambda_1^3+(An\omega_1^2+H\omega_1)\lambda_1-2kb^2\omega_1]+2kb\lambda_1 C_3=0 \tag{10}$$

Но на основании уравнения (8) имеем

$$An\lambda_1^3+(An\omega_1^2+H\omega_1)\lambda_1-2kb^2\omega_1=-(An\lambda_1^2+An\omega_1^2+H\omega_1)f$$

и, замечая, что по формуле (5′) § 49

$$f=\frac{k}{qS}$$

получим

$$C_3=\frac{An\lambda_1^2+An\omega_1^2+H\omega_1}{2qbS}\cdot\frac{C_1}{\lambda_1} \tag{11}$$

и, полагая

$$M_1=\frac{An\lambda_1^2+An\omega_1^2+H\omega_1}{2qbS}\quad\text{и}\quad C_1=D_1$$

напишем решение, соответствующее корню $\lambda=\lambda_1$, так:

$$\begin{aligned}\psi&=D_1e^{\lambda_1 t}\\ \sigma&=\frac{\omega_1}{\lambda_1}D_1e^{\lambda_1 t}\\ z&=\frac{M_1\cdot D_1}{\lambda_1}e^{\lambda_1 t}\end{aligned} \tag{12}$$

Очевидно, что решения, соответствующие корням $\lambda=\lambda_2$ и $\lambda=\lambda_3$, получатся простою заменою, и, обозначая через D_2 и D_3 произвольные постоянные, будем иметь

$$\begin{aligned}\psi &= D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t} + D_3 e^{\lambda_3 t}\\ \sigma &= \omega_1\left[\frac{D_1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{D_2}{\lambda_2} e^{\lambda_2 t} + \frac{D_3}{\lambda_3} e^{\lambda_3 t}\right]\\ z &= \frac{M_1 D_1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{M_2 D_2}{\lambda_2} e^{\lambda_2 t} + \frac{M_3 D_3}{\lambda_3} e^{\lambda_3 t}\end{aligned} \tag{13}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\frac{M_1}{\lambda_1} &= \frac{An}{2qbS}\cdot\lambda_1 + \frac{An\omega_1^2 + H\omega_1}{2qbS}\cdot\frac{1}{\lambda_1}\\ \frac{M_2}{\lambda_2} &= \frac{An}{2qbS}\cdot\lambda_2 + \frac{An\omega_1^2 + H\omega_1}{2qbS}\cdot\frac{1}{\lambda_2}\\ \frac{M_3}{\lambda_3} &= \frac{An}{2qbS}\cdot\lambda_3 + \frac{An\omega_1^2 + H\omega_1}{2qbS}\cdot\frac{1}{\lambda_3}\end{aligned} \tag{14}$$

Возьмем за начальные условия: при $t=0$ должно быть

$$\psi=\psi_0;\quad \sigma=0;\quad z=0$$

тогда для определения произвольных постоянных получим уравнения

$$\begin{aligned}\psi_0 &= D_1 + D_2 + D_3\\ 0 &= \frac{D_1}{\lambda_1} + \frac{D_2}{\lambda_2} + \frac{D_3}{\lambda_3}\\ 0 &= \frac{M_1}{\lambda_1} D_1 + \frac{M_2}{\lambda_2} D_2 + \frac{M_3}{\lambda_3} D_3\end{aligned} \tag{15}$$

На основании равенств (14) и второго из уравнений (15), третье уравнение (15) напишется так:

$$0=\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 + \lambda_3 D_3$$

полагая

$$D_1=\lambda_1 E_1;\quad D_2=\lambda_2 E_2;\quad D_3=\lambda_3 E_3$$

мы для определения E_1, E_2 и E_3 получим систему

$$\begin{aligned}0 &= E_1 + E_2 + E_3\\ \psi_0 &= \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3\\ 0 &= \lambda_1^2 E_1 + \lambda_2^2 E_2 + \lambda_3^2 E_3\end{aligned} \tag{15'}$$

Определитель этой системы есть

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\end{vmatrix} = (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)$$

следовательно, будет

$$E_1 = -\frac{\lambda_3^2-\lambda_2^2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)}\cdot\psi_0 = -\psi_0\cdot\frac{\lambda_2+\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}$$

$$E_2 = -\psi_0\cdot\frac{\lambda_1+\lambda_3}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} \qquad (15'')$$

$$E_3 = -\psi_0\cdot\frac{\lambda_1+\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}$$

Таким образом, движение гироскопа и жидкости в успокоителе будет вполне определено по данным начальным условиям, после того как по известным его элементам будут вычислены корни уравнения

$$An\lambda^3 + Anf\lambda^2 + (An\omega_1^2 + H\omega_1)\lambda + (An\omega_1^2 + H\omega_1)f - 2kb^2\omega_1 = 0$$

т. е. уравнения

$$\lambda^3 + f\lambda^2 + \left(\omega_1^2 + \frac{H\omega_1}{An}\right)\lambda + \left(\omega_1^2 + \frac{H\omega_1}{An}\right)f - \frac{2kb^2\omega_1}{An} = 0 \qquad (16)$$

Мы видели, что для получения весьма большого периода величину H надо брать порядка

$$H \approx \frac{1}{20}An$$

тогда очевидно, что ω_1^2 будет весьма мало по сравнению с $\frac{H\omega_1}{An} \approx \frac{1}{20}\omega_1$, при этом предполагается, что время выражено в секундах. Элементы гироскопа следует выбрать так, чтобы вещественный корень уравнения (16) был отрицательный, а для этого необходимо, чтобы было

$$\left(\omega_1^2 + \frac{H\omega_1}{An}\right)f - \frac{2kb^2\omega_1}{An} > 0 \qquad (17)$$

так как ω_1^2 может быть отброшено, то, положив

$$\frac{H\omega_1}{An}\cdot f - \frac{2kb^2\omega_1}{An} = \gamma f\cdot\frac{H\omega_1}{An} = \gamma f\varepsilon \qquad (18)$$

придадим уравнению (16) вид

$$\lambda^3 + f\lambda^2 + \varepsilon\lambda + \gamma f\varepsilon = 0 \qquad (19)$$

причем ε — весьма малая величина.

Отсюда видно, что вещественный корень λ_1 близок к $-f$, и его величину можно разложить в ряд по степеням ε, тогда мы получим

$$\lambda_1 = -f + \frac{1-\gamma}{f}\cdot\varepsilon$$

Другие два корня λ_2 и λ_3 найдутся на основании соотношений

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -f$$
$$-\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \gamma f \varepsilon$$

из которых, ограничиваясь первою степенью ε, следует

$$\lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{1-\gamma}{f} \cdot \varepsilon$$
$$\lambda_2 \lambda_3 = \gamma\varepsilon$$

следовательно, λ_2 и λ_3 суть корни уравнения

$$\lambda^2 + \frac{1-\gamma}{f} \cdot \varepsilon \cdot \lambda + \gamma\varepsilon = 0$$

откуда

$$\lambda = -\frac{1-\gamma}{2f}\varepsilon \pm \sqrt{\left(\frac{1-\gamma}{2f}\right)^2 \cdot \varepsilon^2 - \gamma\varepsilon}$$

так что будет

$$\lambda_2 = -\frac{1-\gamma}{2f} \cdot \varepsilon + \sqrt{\gamma\varepsilon} \cdot \sqrt{-1} = -h + m\sqrt{-1}$$
$$\lambda_3 = -\frac{1-\gamma}{2f} \cdot \varepsilon - \sqrt{\gamma\varepsilon} \cdot \sqrt{-1} = -h - m\sqrt{-1} \qquad (20)$$

В составе общего интеграла этим двум корням будет соответствовать член вида

$$\alpha e^{-ht} \cos(mt + \beta)$$

т. е. затухающий с логарифмическим декрементом h и периодом

$$\sigma = \frac{2\pi}{m}$$

Но мы имели

$$\varepsilon = \frac{H\omega_1}{An}$$

значит

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\frac{An}{H\omega_1}} \qquad (21)$$

когда же успокоителя нет, то, как мы видели в § 54,

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{An}{H\omega_1}} \qquad (22)$$

Мы имели равенство

$$\frac{H\omega_1}{An} \cdot f - \frac{2kb^2\omega_1}{An} = \gamma \cdot f \frac{H\omega_1}{An} \qquad (23)$$

На основании этого равенства и приведенных выражений погашения и периода легко определяются все элементы гироскопа и успокоителя к нему, удовлетворяющего заданным условиям, ибо корни характеристического уравнения выражены в общем виде непосредственно через элементы маховика и успокоителя.

После того как элементы выбраны, надо сделать поверительный расчет, приняв во внимание инерцию колец, как объяснено в § 44, и если надо, то ввести соответствующие поправки.

Гироскоп со связанным внутренним кольцом и гидравлическим успокоителем составляет основную часть гирокомпаса; изложенная теория заключает существенную часть теории гироскопа, на деталях устройства которого останавливаться здесь не будем, отсылая к руководствам по этому делу, в которых этот вопрос разобран со всею полнотою и устройство гирокомпаса пояснено всеми необходимыми чертежами. Приведем для примера некоторые данные, относящиеся к гирокомпасам Сперри.

Гирокомпас Сперри

	Марка X	Марка VIII
Вес маховика	54.5 кг	25 кг
Диаметр маховика	34 см	25.2 см
Момент инерции A	9.52	2.4
Радиус инерции	13.1 см	9.7 см
Число оборотов в минуту . .	10 000	6000
Угловая скорость	1050	630
Статический момент H	280 кг·см	—

§ 56. Всякому гироскопическому компасу присуща небольшая погрешность, имеющая характер полукруговой девиации.

Эта погрешность зависит от скорости хода и курса корабля и от широты места.

В самом деле, положим, что корабль в северном полушарии идет по курсу α со скоростью v узлов и что в рассматриваемый момент его широта есть λ.

Этой скорости хода и курсу соответствует быстрота изменения широты

$$\frac{d\lambda}{dt} = v\cos\alpha = \lambda'$$

и долготы

$$\frac{dl}{dt} = \frac{v\sin\alpha}{\cos\lambda} = l'$$

градусных минут в час, ибо один узел составляет скорость — одну морскую милю в час, морская же миля равна одной градусной минуте

земного меридиана. Следовательно, в числовой мере указанные скорости будут

$$\lambda' = \frac{2\pi}{360} \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{v \cos \alpha}{3600}$$

$$l' = \frac{2\pi}{360} \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{v \sin \alpha}{3600 \cos \lambda}$$

Ясно, что величины λ' и l' представляют угловые скорости, которые изображаются следующими векторами: λ' — вектором, откладываемым перпендикулярно меридиану к Ost, когда λ' положительное, и к Westy, когда λ' отрицательное; l' изображается вектором, откладываемым по оси мира по направлению к северному полюсу, когда l' положительное, и к южному, когда l' отрицательное.

Вообразив в рассматриваемый момент координатные оси $O\xi\eta\zeta$, неподвижные в пространстве, причем $O\zeta$ направлено вертикально вверх, $O\xi$ горизонтально к Nord'y и $O\eta$ — горизонтально к Osty, имеем следующие слагающие угловых скоростей, с которыми увлекается гирокомпас:

1) Угловой скорости Земли ω:

По оси	$O\xi$	$-\omega \cos \lambda$
„ „	$O\eta$	0
„ „	$O\zeta$	$-\omega \sin \lambda$

2) Угловой скорости корабля λ':

По оси	$O\xi$	0
„ „	$O\eta$	λ'
„ „	$O\zeta$	0

3) Угловой скорости корабля l':

По оси	$O\xi$	$l' \cos \lambda$
„ „	$O\eta$	0
„ „	$O\zeta$	$l' \sin \lambda$

Таким образом, полная угловая скорость Ω, с которою гирокомпас в рассматриваемый момент переносится, имеет слагающие:

По оси	$O\xi$	$\Omega_1 = -(\omega - l') \cos \lambda = \Omega \cos(\Omega\xi)$
„ „	$O\eta$	$\Omega_2 = \lambda' = \Omega \cos(\Omega\eta)$
„ „	$O\zeta$	$\Omega_3 = -(\omega - l') \sin \lambda = \Omega \cos(\Omega\zeta)$

Сила тяжести, пренебрегая ничтожно малым поворотным ускорением, действует попрежнему по направлению оси $O\zeta$ вниз, следовательно, когда корабль имеет ход, то гироскопический компас переносится в пространстве не с угловою скоростью вращения Земли, а с угловою скоростью Ω, и, значит, на ходу для гироскопического компаса поло-

жением равновесия будет не плоскость географического меридиана, проводимая через отвесную линию $O\zeta$ и направление вектора, изображающего угловую скорость вращения Земли ω, иначе ось мира, а плоскость, проведенная через отвесную линию $O\zeta$ и через вектор, представляющий угловую скорость Ω. Очевидно, что эта вертикальная плоскость составляет с меридианом места угол δ, определяемый равенством

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = -\frac{\lambda'}{(\omega - l')\cos\lambda} \tag{1}$$

Эта формула принимает более простой вид, заметив, что

$$\frac{\lambda'}{\omega} = \frac{2\pi}{360}\,\frac{1}{60}\,\frac{v\cos\alpha}{3600}\,\frac{1}{7.291\cdot 10^{-5}} = \frac{1}{903}\,v\cos\alpha \simeq \frac{1}{900}\,v\cos\alpha$$

$$\frac{l'}{\omega} = \frac{2\pi}{360}\,\frac{1}{60}\,\frac{v\sin\alpha}{3600\cos\lambda}\,\frac{1}{7.291\cdot 10^{-5}} = \frac{1}{903}\,\frac{v\sin\alpha}{\cos\lambda} \simeq \frac{1}{900}\,\frac{v\sin\alpha}{\cos\lambda}$$

таким образом будет

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{1}{900}\cdot\frac{v\cos\alpha}{\cos\lambda}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{900}\,\frac{v\sin\alpha}{\cos\lambda}} \tag{2}$$

Скорость хода больших морских судов не превышает в настоящее время 36 узлов, поэтому отношение

$$\frac{v}{900} \leqq \frac{1}{25}$$

Значит, можно приближенно писать

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{1}{900}\,\frac{v}{\cos\lambda}\cos\alpha$$

или даже по малости угла δ, вне близполярных широт, в градусах:

$$\delta^\circ = -\frac{57.3}{900}\cdot\frac{v}{\cos\lambda}\cdot\cos\alpha \approx -\frac{1}{15}\,\frac{v}{\cos\lambda}\cdot\cos\alpha \tag{3}$$

Отсюда видно, что в нашей широте погрешность при ходе в 36 узлов составит кругло:

$$\delta^\circ = -5^\circ\cdot\cos\alpha$$

Для самого быстроходного 72-узлового моторного катера эта погрешность составила бы в нашей широте

$$\delta^\circ = -10^\circ\cdot\cos\alpha$$

а для самолета со скоростью 200 узлов (360 км в час) было бы

$$\delta^\circ = 28^\circ\cdot\cos\alpha$$

При компасах Сперри имеется особое корректирующее приспособление, которым эта погрешность исправляется для всех курсов автоматическим передвижением курсовой черты. В детали устройства этого приспособления входить не будем.

§ 57. В предыдущем параграфе показано выражение так называемой „курсовой погрешности" гирокомпаса, представляющее ее зависимость от курса корабля и скорости хода.

Когда корабль, скажем, быстроходный минный крейсер, идет со скоростью 36 узлов по курсу N в нашей широте, то он имеет при этом курсовую погрешность

$$\delta^\circ = -5^\circ$$

если этот крейсер, положив руль на борт, опишет полуциркуляцию и приведет на курс S, то его курсовая погрешность будет

$$\delta^\circ = +5^\circ$$

Продолжительность описания полуциркуляции составляет около $1\frac{1}{2}$ минут, т. е. 90 сек. времени, а так как период свободных колебаний компаса весьма велик (5000 сек.), то представляется, что за эти 90 сек. компас не поспеет притти в новое положение равновесия, а отстане от него примерно на 10°, и потребуется, по крайней мере, 40 минутт времени, чтобы компас, сделав всего лишь один полуразмах, прошел через новое положение равновесия, которое он по инерции перейдет, и, значит, кораблем в течение часа или более по этому компасу править нельзя, ибо погрешность компаса не известна и не может быть учтена.

Но, оказывается, что дело обстоит совершенно иначе — во время поворота компас совершает не „свободное", а „вынужденное" колебание, и выбором элементов гироскопа можно распорядиться так, что скорость прецессии гироскопа будет равна быстроте изменения курсовой погрешности; поэтому не только к концу поворота корабля, но даже во время самого поворота компас занимает соответствующее мгновенному значению курса и скорости корабля положение равновесия, и если его курсовая погрешность автоматически уничтожается, то во всякий момент во время самого поворота компас показывает мгновенный истинный курс корабля, и после того как корабль ляжет на новый курс, никаких колебаний совершать не будет. Совершенно то же имеет место и при изменении скорости корабля.

Это свойство гирокомпаса — именно автоматическое уничтожение „баллистической погрешности" — и делает его, можно сказать, незаменимым для военных судов, которым приходится беспрестанно совершать сложное маневрирование, меняя курсы и скорость хода.

Чтобы выяснить это свойство, обратимся к основным уравнениям движения гирокомпаса, выведенным в § 54, сохраняя сделанные в этом параграфе обозначения.

Мы имели уравнения

$$\begin{aligned} B\psi'' + An\omega_1\psi - An\sigma' &= 0 \\ An\psi' + B\sigma'' + (An\omega_1 + H)\sigma &= An\omega_2 \end{aligned} \tag{1}$$

для того случая, когда на гироскоп никаких внешних возмущающих сил не действует.

Мы видели, что в этих уравнениях инерционные члены $B\psi''$ и $B\sigma''$ могут быть отброшены, что равносильно тому, что не рассматривается мелкое, практически не ощутимое, нутационное дрожание гироскопа; таким образом, вместо уравнений (1), можно рассматривать уравнения

$$\begin{aligned} An\omega_1\psi - An\sigma' &= 0 \\ An\psi' + (An\omega_1 + H)\sigma &= An\omega_2 \end{aligned} \tag{2}$$

Начнем рассмотрение с того простейшего случая маневрирования, когда корабль, идя по курсу N, делает поворот и меняет свой курс на обратный. Практически можно принять, что при описании циркуляции корабль или, точнее говоря, центр тяжести его движется равномерно по кругу некоторого радиуса c, описывая полный круг во время τ_0. Приняв для простоты, что центр подвеса компаса совпадает с центром тяжести корабля, мы видим, что при таком переносном движении центр тяжести гироскопа, лежащий чуть-чуть ниже точки подвеса, движется по тому же кругу, как и центр тяжести корабля, следовательно, можно принять, что к центру тяжести гироскопа приложена „центробежная сила“ F, которая направлена горизонтально по радиусу внаружу описываемого кораблем круга, так что в момент t, считаемый от начала поворота, направление этой силы составляет с меридианом угол

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi t}{\tau_0} - \frac{\pi}{2}$$

где α — мгновенное значение курса корабля, величина этой силы есть

$$F = \frac{4\pi^2}{\tau_0^2} c \cdot \frac{P}{g} \tag{*}$$

где P — вес гироскопа.

Обозначим через b расстояние центра тяжести гироскопа до оси цапф внутреннего кольца его, так что

$$Pb = H \tag{**}$$

Так как ось цапф внутреннего кольца перпендикулярна к оси маховика, которая лишь ничтожно мало отклоняется от меридиана, то в рассматриваемое мгновение t сила F дает момент M около оси цапф, равный

$$M = F \cdot b \cdot \cos\beta = Fb \sin\frac{2\pi t}{\tau_0}$$

На основании равенств (*) и (**) будет

$$M = \frac{4\pi^2}{\tau_0^2} \frac{Hc}{g} \sin \frac{2\pi t}{\tau_0}$$

При составлении уравнений движения на подвижном корабле кроме этого момента нужно учесть еще в первом уравнении (2) скорость изменения широты λ'. Таким образом, вместо системы (2), будем иметь

$$\begin{aligned} &\omega_1 \psi - \sigma' + \lambda' = 0 \\ &An\,\psi' + (An\,\omega_1 + H)\,\sigma = An\,\omega_2 + \frac{4\pi^2}{\tau_0^2} \frac{Hc}{g} \sin \frac{2\pi}{\tau_0} t \end{aligned} \tag{2'}$$

Учитывая, что величина $An\,\omega_1$ мала по сравнению с H, и вводя обозначение

$$p = \frac{2\pi}{\tau_0} \tag{3}$$

получим

$$\begin{aligned} &\omega_1 \psi - \sigma' + \lambda' = 0 \\ &An\,\psi' + H\sigma = An\,\omega_2 + p^2 \frac{Hc}{g} \sin pt \end{aligned} \tag{4}$$

Мы имели раньше

$$\lambda' = \frac{\omega}{900} v \cos pt$$

$$\delta = -\frac{v}{900 \cos \lambda} \cos pt$$

где скорость корабля v выражена в узлах. Так как один узел равен 0.5144 м/сек., то, выражая скорости в метрах в секунду, будем иметь

$$\lambda' = \frac{\omega v}{464.5} \cos pt \tag{5}$$

$$\delta = -\frac{v}{464.5 \cos \lambda} \cos pt \tag{6}$$

Положим для удобства

$$\nu^2 = \frac{g\omega}{464.5} \sim 1.54 \cdot 10^{-6} \text{ сек.}^{-2} \tag{7}$$

Тогда будет

$$\lambda' = \frac{\nu^2}{g} v \cos pt \tag{5'}$$

$$\delta = -\frac{\nu^2}{g\omega_1} v \cos pt \tag{6'}$$

Из равенств (5) и (6) выводим

$$\lambda' = -\omega_1 \delta$$

Исключив из системы (4) угол σ и применив сделанные обозначения, получим для определения ψ уравнение

$$\psi'' + \mu^2 \psi = \frac{\mu^2}{g\omega_1} (-\nu^2 v + p^3 c) \cos pt$$

где

$$\mu^2 = \frac{H\omega_1}{An} = \frac{4\pi^2}{\tau_1^2} \tag{8}$$

Так как при циркуляции корабля

$$v = pc$$

то уравнение для ψ приводится к виду

$$\psi'' + \mu^2 \psi = \frac{\mu^2 v}{g\omega_1} (p^2 - \nu^2) \cos pt \tag{9}$$

Нужно считать, что в начальный момент ось гирокомпаса была в плоскости компасного меридиана и составляла с плоскостью горизонта угол σ_0. Тогда при $t = 0$

$$\psi = \delta_0 = -\frac{\nu^2}{g\omega_1} v$$

$$\sigma = \sigma_0$$

Но последнее условие на основании второго уравнения системы (2') равносильно тому, что

$$\psi' = 0$$

С учетом этих начальных условий уравнение (9) дает

$$\psi = \left[\delta_0 - \frac{\mu^2 v}{g\omega_1} \frac{p^2 - \nu^2}{\mu^2 - p^2}\right] \cos \mu t + \frac{\mu^2 v}{g\omega_1} \frac{p^2 - \nu^2}{\mu^2 - p^2} \cos pt$$

или, вводя значение δ_0,

$$\psi = -\frac{v}{g\omega_1} \frac{\mu^2 - \nu^2}{\mu^2 - p^2} p^2 \cos \mu t + \frac{\mu^2 v}{g\omega_1} \frac{p^2 - \nu^2}{\mu^2 - p^2} \cos pt \tag{10}$$

Если выбрать элементы гирокомпаса так, чтобы было

$$\mu^2 = \nu^2 \tag{11}$$

или

$$\frac{H\omega_1}{An} = \frac{g\omega}{464.5} \tag{11'}$$

то из (10) и (6') следует, что

$$\psi = \delta$$

т. е. компас будет в точности следовать за изменением курсовой погрешности и не будет совершать колебаний.[1]

Из условий (11), (7) и (8) следует

$$\tau_1 = 2\pi\sqrt{\frac{464.5}{g\omega}} \approx 5063 \text{ сек.} = 84 \text{ мин. } 23 \text{ сек.} \qquad (11')$$

В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} \lg 2\pi &= 0.79818 \\ \lg \sqrt{464.5} &= 1.33350 \\ \lg \sqrt{\frac{1}{g}} &= \bar{1}.50416 \\ \lg \sqrt{\frac{1}{\omega}} &= 2.06856 \\ &\overline{3.70440} \end{aligned}$$

$$\tau_1 = 5063 \text{ сек.} = 84 \text{ мин. } 23 \text{ сек.}$$

Нетрудно показать, что баллистическая погрешность будет уничтожена не только, когда корабль описывает круговую циркуляцию равномерным движением, но и при любом движении корабля по любой кривой. В самом деле, пусть движение корабля определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \xi &= F(t) + a_1 t \\ \eta &= F_1(t) + b_1 t \end{aligned} \qquad (12)$$

тогда возмущающий момент M будет

$$M = -\frac{Pb}{g} F''(t) = -\frac{H}{g} F''(t)$$

и уравнения движения гироскопа будут

$$\begin{aligned} \omega_1 \psi - \sigma' - \omega_1 \delta &= 0 \\ An\psi' + H\sigma &= An\omega_2 - \frac{H}{g} F''' \end{aligned}$$

или исключая σ

$$\psi'' + \mu^2 \psi = \mu^2 \delta - \frac{H}{gAn} F''' \qquad (13)$$

В уравнениях (12) функции $F(t)$ и $F_1(t)$ представляют отклонение движения корабля от первоначального равномерного и прямолинейного.

---

[1] В работе „О теории гирокомпаса Аншютца, изложенной проф. Геккелером" (см.: т. II Собр. трудов акад. А. Н. Крылова) акад. А. Н. Крылов показал, что при выполнении условия (11), будет компенсироваться только первый член в разложении курсовой девиации в ряд Маклорена и что в некоторых случаях, даже при соблюдении условия (11), девиация может появиться. (*Ред.*).

Кладут ли на корабле руль, стопорят ли машину или дают ей задний ход, во всех случаях возмущающая сила нарастает постепенно, поэтому при $t=0$ будет

$$\begin{aligned} F(0)=F'(0)&=F''(0)=0 \\ F_1(0)=F_1'(0)&=F_1''(0)=0 \end{aligned} \tag{14}$$

С другой стороны, выражая широту λ в числовой, а не в градусной мере, имеем из первого уравнения (12)

$$\xi'=F'(t)+a=R\lambda'$$

где R — радиус Земли. Следовательно, курсовая погрешность во время маневрирования будет

$$\delta=-\frac{\lambda'}{\omega\cos\lambda}=-\frac{a}{R\omega\cos\lambda}-\frac{F'}{R\omega\cos\lambda} \tag{15}$$

За время маневрирования широта λ изменяется столь мало, что вместо $\cos\lambda$, можно писать $\cos\lambda_0$, где λ_0 — широта в момент $t=0$. При этом условии найдем из (15):

$$F''=-R\omega\cos\lambda\delta''$$

и, следовательно, уравнение (13) примет вид

$$\psi''+\mu^2\psi=\frac{\mu^2R}{g}\left(\delta''+\frac{g}{R}\delta\right) \tag{16}$$

Это уравнение нужно проинтегрировать при начальных условиях: $t=0$

$$\begin{aligned} \psi&=\delta_0 \\ \psi'&=0 \end{aligned}$$

что приводит к решению

$$\psi=\delta_0\cos\mu t+\frac{1}{\mu}\int_0^t\frac{\mu^2R}{g}\left(\delta''+\frac{g}{R}\delta\right)\sin\mu(t-\xi)\,d\xi$$

или

$$\psi=\delta_0\cos\mu t+\mu\frac{R}{g}\int_0^t\delta''\sin\mu(t-\xi)\,d\xi+\mu\int_0^t\delta\sin\mu(t-\xi)\,d\xi \tag{17}$$

Но мы имеем

$$\int_0^t\delta''\sin\mu(t-\xi)\,d\xi=[\delta'\sin\mu(t-\xi)]_0^t+\mu\int_0^t\delta'\cos\mu(t-\xi)\,d\xi=$$

$$=\mu\int_0^t\delta'\cos\mu(t-\xi)\,d\xi$$

так как, на основании (14) и (15)

$$\delta'(0) = -\frac{F''(0)}{R\omega\cos\lambda} = 0$$

Далее

$$\int_0^t \delta \sin\mu(t-\xi)\,d\xi = \frac{1}{\mu}\left[\delta\cos\mu(t-\xi)\right]_0^t - \frac{1}{\mu}\int_0^t \delta'\cos\mu(t-\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\mu}\delta - \frac{1}{\mu}\delta_0\cos\mu t - \frac{1}{\mu}\int_0^t \delta'\cos\mu(t-\xi)\,d\xi$$

Подставляя полученные выражения в (17), будем иметь

$$\psi = \delta + \left(\mu^2\frac{R}{g} - 1\right)\int_0^t \delta'\cos\mu(t-\xi)\,d\xi$$

или

$$\psi = \delta + \frac{R}{g}\left(\mu^2 - \frac{g}{R}\right)\int_0^t \delta'\cos\mu(t-\xi)\,d\xi \qquad (18)$$

Следовательно, если постоянные прибора выбрать так, чтобы

$$\mu^2 = \frac{g}{R} \qquad (19)$$

то вне зависимости от характера отклонения движения корабля от первоначального равномерного и прямолинейного, гирокомпас будет в точности следовать за изменением курсовой погрешности.[1]

Из условия (19) следует

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\mu} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \qquad (20)$$

Это есть другое выражение периода колебаний гирокомпаса, само собою разумеется, равносильное выражению (11′), что легко показать алгебраическим преобразованием, а еще нагляднее, вычислив период по этой формуле; именно будет:

$$\begin{aligned} \lg 2\pi &= 0.79818 \\ \lg\sqrt{\frac{1}{g}} &= \bar{1}.50416 \\ \lg\sqrt{R} &= 3.40208 \\ \hline & 3.70440 \end{aligned}$$

$$\tau_1 = 5063 \text{ сек.} = 84 \text{ мин. } 23 \text{ сек.}$$

[1] См. примечание к условию (11). (*Ред.*).

Выводы курсовой и баллистической погрешностей гирокомпаса приведены здесь с такою подробностью потому, что в руководствах по гироскопии эти выводы, в особенности второй из них, излагаются недостаточно ясно и неудовлетворительно, причем не показываются ни те предположения, которые делаются, ни те величины, которые принимаются за малые и отбрасываются.

Относительно баллистической погрешности и ее уничтожения выбором периода свободных колебаний ограничиваются случаем постоянного ускорения по широте и не показывают, что это свойство есть общее, что оно следует из общих уравнений движения гирокомпаса и относится к движению корабля по любой кривой, например, по курсовой локсодромии (логарифмическая спираль) при стрельбе по неподвижной цели.

ГЛАВА IV

ПРИМЕНЕНИЕ ГИРОСКОПА ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ

§ 58. В 1905 г. в Германии для сообщения между курортами побережья Немецкого моря был построен роскошно оборудованный пароход „Сильвана“. Так как это побережье мелководное, то пароход был построен мелкосидящим, вследствие чего он обладал весьма большою остойчивостью и, значит, был восприимчив к качке и притом стремительной и больших размахов.

Вскоре пароход приобрел среди сухопутной курортной публики такую славу, что его стали избегать, и он оказался убыточным.

Германский инженер О. Шлик, столь известный своими работами по уравновешиванию морских паровых машин, предложил тогда снабдить этот пароход гироскопическим стабилизатором, умеряющим и даже почти совсем уничтожающим боковую качку судна.

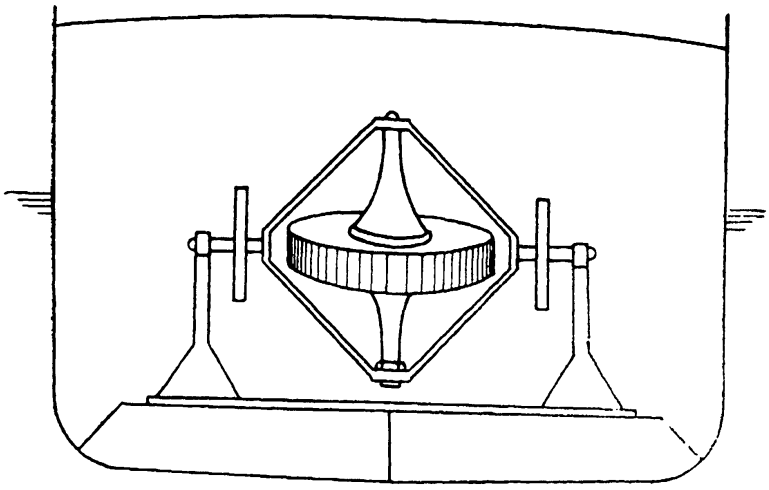
Прибор был осуществлен, действие его оказалось вполне удовлетворительным, но регулировка тормоза затруднительной, и стабилизаторы Шлика в практику не вошли.

Около того же времени Э. Сперри в Америке изменил конструкцию гироскопического стабилизатора, благодаря чему прибор стал более компактным, так что его оказалось возможным применять не только на малых судах („Сильвана“ был водоизмещением около 900 т), но и на больших; так, в последние годы стабилизатор Сперри был установлен на японском крейсере водоизмещением 13 000 т, на японском пассажирском пароходе водоизмещением свыше 15 000 т, на одном из итальянских линейных кораблей водоизмещением свыше 20 000 т и, наконец, недавно на одном итальянском трансатлантическом пароходе водоизмещением в 45 000 т.

Сущность всех этих приспособлений и расчет их имеют так много общего, что достаточно разобрать одно из них, чтобы ту же методу

расчета применить и ко всякому другому. Мы ограничимся таким разбором прибора Шлика, как первым по времени, и прибора Сперри, как получившего широкое применение.

§ 59. Устройство прибора Шлика изображено схематически на фиг. 46. Большой и тяжелый маховик вращается при помощи паровой турбины или электромотора на подпятнике между подшипниками, укрепленными на прочной раме. Эта рама снабжена цапфами, ось коих перпендикулярна оси вращения маховика. Рама своими цапфами лежит в подшипниках фундамента, скрепленного неизменно с кораблем, так что ось цапф перпендикулярна к диаметральной плоскости корабля. Таким образом, рама вместе с маховиком может качаться на своих цапфах, причем ось маховика будет оставаться в диаметральной пло-



Фиг. 46.

скости корабля. На цапфы рамы насаживается тормоз, препятствующий свободе качаний маховика. Центр тяжести качающейся системы располагается немного ниже оси цапф, центр тяжести маховика — на оси цапф, таким образом, при покое маховика его ось становится вертикально, и система устойчива.

Маховику сообщается быстрое вращательное движение и все время поддерживается работой турбины или электромотора.

При боковой качке корабля, вследствие „гироскопических“ сил, маховик вместе с рамой начинает качаться в диаметральной плоскости; затормаживая эти качания, *но не останавливая их совсем*, мы заставим раму оказывать добавочные давления на свои цапфы, эти давления приводятся к паре, лежащей в плоскости шпангоута, пара эта противодействует качаниям корабля и тем умеряет боковую его качку.

Тормоз имеет двоякое значение: с одной стороны, он ограничивает размахи рамы, с другой стороны, этим тормозом поглощается та энергия, которая происходит от действия волн на корабль и которой поддерживается его качка.

Качания рамы в диаметральной плоскости ограничены с обеих сторон упорами, чтобы наклон ее не выходил за назначенные пределы.

Сперри на первых своих успокоителях изменил описанное устройство в том отношении, что он как бы обменял местами ось маховика и ось рамы, т. е. рама его прибора могла вращаться около вертикальной оси, а маховик в раме вращался около горизонтальной оси.

Затем Сперри в последних своих приборах перешел к расположению, подобному тому, как у Шлика, с тем, однако, существенным различием, что вместо тормоза он заставляет действовать на раму особый мотор, который поворачивает раму в ту или другую сторону так, чтобы этим еще усиливать реакцию на корабль. Золотник этого мотора управляется автоматически также гироскопом малого размера, но зато весьма большой чувствительности по сравнению с главным гироскопом.

Заметим, что если управлять золотником машины вручную или переключать контакты малого гироскопа, то прибором Сперри можно раскачивать корабль на тихой воде, что, например, полезно для ледоколов при проходе их через торос. Прибором Шлика этого сделать нельзя.

Короче говоря, работа прибора Шлика — пассивная, прибора Сперри — активная.

Итак, вообразим корабль, снабженный прибором Шлика, и составим дифференциальные уравнения движения этой системы, т. е. корабля и маховика, ограничиваясь случаем боковой качки.

Действие гироскопа на корабль, как уже сказано, проявляется в виде некоторой пары, лежащей в плоскости шпангоута; назовем абсолютную величину момента этой пары через M (этот момент будет изменяющийся с течением времени), и примем, что на корабль от гироскопа действует пара $-M$, тогда на раму гироскопа в плоскости шпангоута действует пара $+M$. Кроме того, на раму действует тормозящее усилие, сводящееся также к некоторой паре, лежащей в диаметральной плоскости корабля. Это усилие обозначим через εF, причем при тормозе трения ε есть некоторый разрывный множитель, как было объяснено в § 39.

Ввиду того, что масса рамы мала по сравнению с массою маховика, можно считать, что усилия, действующие на раму, целиком передаются маховику.

Понятно, что от тормоза на корабль действует усилие $-\varepsilon F$, так как оно приложено в диаметральной плоскости корабля, но с этою парою считаться нечего, ибо единственно, чем она могла бы проявить свое действие, это сообщить кораблю ничтожно малые килевые качания.

При сделанных предположениях уравнение боковой качки корабля при сопротивлении воды, пропорциональном первой степени скорости, будет

$$K\theta'' + N\theta' + P(\rho - a)\,\theta = P(\rho - a)\,\theta_0 \sin pt - M \qquad (1)$$

причем сделаны следующие обозначения:

K — момент инерции корабля,

P — вес корабля,

$(\varrho - a)$ — метацентрическая высота,

Θ_0 — действующий волновой склон,

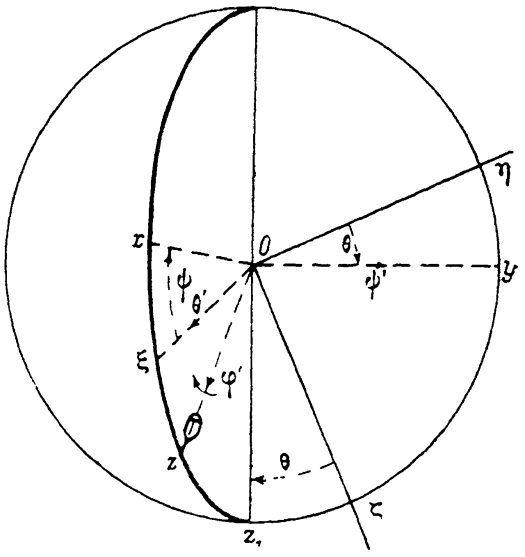
θ — угол крена в рассматриваемый момент времени t,

N — коэффициент сопротивления воды качаниям корабля,

$p = \frac{2\pi}{\tau_0}$ — частота волн.

Для составления уравнения движения гироскопа воспользуемся второю Лагранжевою формою.

Изберем в пространстве абсолютные оси координат $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, начало коих примем в центре тяжести корабля, с которым — предположим для простоты рассуждений — совпадает и центр тяжести маховика. В корабле возьмем оси $OX_1 Y_1 Z_1$, наконец, в гироскопе — оси $OXYZ$, и так как нам надо рассматривать лишь вращательное движение, то вынесем все эти оси на вспомогательную сферу, обозначая соответствующие осям $OX_1 Y_1 Z_1$ и $OXYZ$ точки теми же буквами, но строчными, а не прописными (фиг. 47).



Фиг. 47.

Положим, что в рассматриваемый момент t корабль наклонен на угол θ и гироскоп — на угол ψ в диаметральной плоскости корабля.

Ось Ox_1 все время совпадает с осью $O\xi$, ось Oy_1 с осью Oy. Это последнее предположение можно сделать потому, что маховик есть тело вращения, одна из главных осей инерции его есть ось симметрии Oz, около которой он вращается, всякая ось, лежащая в плоскости обода, перпендикулярная к Oz, есть главная, а так как оси Ox_1 и Oy_1 нужны только для составления выражения живой силы маховика, то и можно принять, что в рассматриваемый момент Oy_1 совпадает с Oy.

Угловые скорости следующие: 1) качаний корабля θ' направлена по оси Ox_1 корабля, совпадающей с $O\xi$; 2) собственного вращения маховика φ' направлена по Oz; 3) качаний рамы, а с нею и маховика ψ', направлена по оси Oy_1, или, что то же, Oy.

Угловую скорость θ' разлагаем по осям Ox и Oz, что дает слагающие

$$\theta' \cos\psi \text{ по оси } Ox$$
$$\theta' \sin\psi \text{ „ „ } Oz$$

Таким образом получаем для маховика слагающие

$$p = \theta' \cos\psi$$
$$q = \psi'$$
$$r = \psi' + \theta' \sin\psi$$

и для рамы слагающие

$$p_1 = \theta' \cos\psi$$
$$q_1 = \psi'$$
$$r_1 = \theta' \sin\psi$$

Пусть будут моменты инерции:

$$\textit{маховика} \begin{cases} \text{около оси } Oz & A \\ \text{„ осей } Ox \text{ и } Oy & B \end{cases}$$

$$\textit{рамы} \begin{cases} \text{около осей } Oy \text{ и } Oz & B_1 \\ \text{„ оси } Ox & A_1 \end{cases}$$

причем приближенно можно считать

$$B = \frac{1}{2} A$$

и

$$B_1 = \frac{1}{2} A_1$$

вместе с тем величины A_1 и B_1 малы по сравнению с A и B.

Таким образом будет удвоенная живая сила:

$$\text{маховика } 2T_1 = A(\varphi' + \theta' \sin\psi)^2 + B(\psi'^2 + \theta'^2 \cos^2\psi)$$
$$\text{рамы } 2T_2 = A_1 \theta'^2 \cos^2\psi + B_1(\psi'^2 + \theta'^2 \sin^2\psi)$$

следовательно, полная живая сила всей качающейся системы есть

$$2T = 2T_1 + 2T_2 = A(\varphi' + \theta' \sin\psi)^2 + (B + B_1)\psi'^2 + (B + A_1)\theta'^2 \cos^2\psi + B_1 \theta'^2 \sin^2\psi \qquad (2)$$

Элементарная работа

$$\delta U = M\delta\theta + (\varepsilon F - H \sin\psi)\delta\psi \qquad (3)$$

где H есть статический момент качающейся системы относительно оси цапф.

Заметим еще, что на маховик в его плоскости действуют вращающий момент мотора и трение в подпятнике, а так как собственное вращение маховика равномерное, то эти два момента взаимно уравновешиваются, и в выражении элементарной работы множитель Φ при перемещении $\delta\varphi$ равен нулю.

Таким образом, имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = A(\varphi' + \theta' \sin\psi); \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi' + \theta' \sin\psi) = 0$$

значит

$$\varphi' + \theta' \sin\psi = n = \text{постоянной} \tag{4}$$

Величина φ' — угловая скорость собственного вращения маховика — составляет 30—100 оборотов в секунду, т. е. от 200 до 600, скорость же θ' — около 2—3° в секунду, т. е. $\frac{1}{30} - \frac{1}{20}$, так что θ' ничтожно мало по сравнению с φ'.

Затем

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = (B + B_1)\psi'; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right) = (B + B_1)\psi''$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = A(\varphi' + \theta' \sin\psi) \cdot \theta' \cos\psi + B_1 \theta'^2 \cdot \sin\psi \cos\psi - (B + A_1)\theta'^2 \sin\psi \cos\psi =$$

$$= An\theta' \cos\psi - (B + A_1 - B_1)\theta'^2 \sin\psi \cos\psi$$

так как θ' ничтожно мало по сравнению с n, то последний член можно отбросить, так что будет

$$(B + B_1)\psi'' - An\theta' \cos\psi = \varepsilon F - H \sin\psi \tag{5}$$

Наконец,

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = A(\varphi' + \theta' \sin\psi) \cdot \sin\psi + (B + A_1)\theta' \cos^2\psi + B_1 \theta' \sin^2\psi =$$

$$= An \sin\psi + (B + A_1)\theta' \cos^2\psi + B_1 \theta' \sin^2\psi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta'}\right) = [(B + A_1)\cos^2\psi + B_1 \sin^2\psi]\theta'' + An\psi' \cos\psi -$$

$$- 2(B + A_1)\theta'\psi' \sin\psi \cos\psi + 2B_1 \theta'\psi' \sin\psi \cos\psi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

Значит, будет, отбрасывая весьма малые по сравнению с $An\psi'$ члены, содержащие произведение $\theta'\psi'$,

$$[(B + A_1)\cos^2\psi + B_1 \sin^2\psi]\theta'' + An\psi' \cos\psi = M \tag{6}$$

Таким образом имеем следующие уравнения движения:
корабля:

$$K\theta'' + N\theta' + P(\rho - a)\theta = P(\rho - a)\Theta_0 \sin pt - M$$

гироскопа:

$$[(B+A_1)\cos^2\psi+B_1\sin^2\psi]\,\theta''+An\psi'\cos\psi=M$$
$$(B+B_1)\,\psi''-An\theta'\cos\psi=\varepsilon F-H\sin\psi$$

Исключая из этих уравнений момент реакции M, получим

$$\begin{gathered}[K+(B+A_1)\cos^2\psi+B_1\sin^2\psi]\,\theta''+\\+N\theta'+P(\rho-a)\,\theta+An\psi'\cos\psi=P(\rho-a)\,\Theta_0\sin pt\\(B+B_1)\,\psi''+H\sin\psi-An\theta'\cos\psi=\varepsilon F\end{gathered}\qquad(7)$$

Момент инерции большого корабля K обыкновенно в 500—1000 раз больше момента инерции маховика вместе с рамой, поэтому в первом члене первого уравнения множитель при θ'' можно брать просто K и писать уравнения движения так:

корабля:

$$K\theta''+N\theta'+P(\rho-a)\,\theta+An\psi'\cos\psi=P(\rho-a)\,\Theta_0\sin pt\qquad(8)$$

гироскопа:

$$(B+B_1)\,\psi''+H\sin\psi-An\theta'\cos\psi=\varepsilon F\qquad(8')$$

Уже было упомянуто, что качания рамы ограничиваются упорами, на которые рама ложится, когда угол ψ достигает заданного значения около 30°, в таком случае $1>\cos\psi>0.87$; поэтому если принять $\cos\psi=0.93$, то погрешность не превзойдет $7^0/_0$, это равносильно тому, чтобы принять $\cos\psi=1$, а затем рассчитанную величину An увеличить на $7^0/_0$, вместе с тем $\sin\psi$ можно заменить через ψ. Разделив первое уравнение на K, второе на $B+B_1$ и положив

$$2h=\frac{N}{K};\quad k^2=\frac{P(\rho-a)}{K};\quad \frac{An}{K}=\alpha$$

$$m^2=\frac{H}{B+B_1};\quad c=\frac{K}{B+B_1};\quad f=\frac{F}{B+B_1}$$

будем иметь уравнения

$$\theta''+2h\theta'+k^2\theta+\alpha\psi'=k^2\Theta_0\sin pt\qquad(9)$$
$$\psi''+m^2\psi-\alpha c\theta'=\varepsilon f\qquad(10)$$

Решения этих уравнений будут иметь различный вид соответственно виду функции εf, представляющей тормозящую пару. Здесь может быть несколько случаев, из которых перечислим главнейшие, как то:

1) гироскоп свободен, тогда

$$\varepsilon f=0$$

2) гироскоп снабжается воздушным или пружинным „накатником", подобным орудийному, в этом случае можно принять

$$\varepsilon f = -l^2 \dot{\psi}$$

3) гироскоп снабжается электромагнитным тормозом, тогда

$$\varepsilon f = -b\psi'$$

4) гироскоп снабжается тормозом трения или гидравлическим компрессором постоянного давления, тогда величина f — постоянная, множитель же $\varepsilon = +1$, когда $\psi' < 0$ и $\varepsilon = -1$, когда $\psi' > 0$;

5) воздействие на гироскоп активное, т. е.

$$\varepsilon f = f \sin(pt + \beta)$$

Начнем с простейшего случая: $\varepsilon f = 0$. Напишем уравнения (9), (10) символически:

$$(\delta^2 + 2h\delta + k^2)\,\theta + \alpha\delta\psi = k^2 \Theta_0 \sin pt$$
$$-c\alpha\delta\theta + (\delta^2 + m^2)\,\psi = 0$$

Отсюда следует

$$[(\delta^2 + m^2)(\delta^2 + 2h\delta + k^2) + \alpha^2 c\delta^2]\,\dot{\psi} = \alpha k^2 c\Theta_0 p \cos pt$$

Характеристическое уравнение есть

$$(\lambda^2 + m^2)(\lambda^2 + 2h\lambda + k^2) + \alpha^2 c\lambda^2 = 0$$

т. е.

$$\lambda^4 + 2h\lambda^3 + (m^2 + k^2 + \alpha^2 c)\,\lambda^2 + 2hm^2\lambda + k^2 m^2 = 0 \qquad (11)$$

применив критерий Routh'a, видим, что для того, чтобы вещественные части корней этого уравнения были отрицательные, надо, чтобы было

$$4h^2 m^2 (m^2 + k^2 + \alpha^2 c) - 4h^2 m^4 - 4h^2 k^2 m^2 > 0$$

т. е. по упрощении

$$4h^2 m^2 \alpha^2 c > 0 \qquad (12)$$

Это условие, очевидно, всегда выполнено, следовательно свободные колебания погашаются.

Но здесь необходимо заметить, что это погашение происходит не от того, что поставлен гироскоп, а вследствие присутствия члена $2h\theta'$, представляющего сопротивление воды; в самом деле, положим

$$h = 0$$

уравнение (11) будет

$$\lambda^4 + (m^2 + k^2 + \alpha^2 c)\,\lambda^2 + k^2 m^2 = 0$$

его корни, вследствие того, что

$$\lambda^2 = -\frac{m^2 + k^2 + \varkappa^2 c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 + k^2 + \varkappa^2 c)^2 - 4k^2 m^2} < 0$$

будут *чисто мнимые*, и, значит, свободные колебания не погашаются от присутствия гироскопа, а погашаются лишь от сопротивления воды.

Характеристическое уравнение не зависит от вида правых частей уравнений (9) и (10), значит, указанное свойство есть общее при всяком тормозном устройстве, если только в эту правую часть не будут входить переменные ψ' или ψ и если гироскоп совершает качания, ударяясь об упоры.

Но так как сопротивление воды всегда есть, то свободные колебания сами собою погашаются и остаются одни вынужденные.

§ 60. Остановимся сперва несколько подробнее на простейшем случае колебания корабля или всякого иного тела, снабженного гироскопическим успокоителем и подвешенного подобно маятнику, причем рама гироскопа уравновешена на своих цапфах и гироскоп качается в диаметральной плоскости свободно, не ложась на стопора и не имея тормоза. Качания корабля или тела будем считать не встречающими сопротивления среды и свободными.

В таком случае в уравнениях (8) и (8′) надо положить

$$N=0; \quad H=0; \quad F=0; \quad \Theta_1=0$$

тогда будет для „малых“ размахов:

$$\begin{aligned} K\theta'' + P(\rho - a)\,\theta + An\psi' &= 0 \\ (B + B_1)\,\psi'' - An\theta' &= 0 \end{aligned} \tag{11′}$$

За начальные условия примем, что при $t=0$ должно быть

$$\theta = \theta_0, \quad \theta' = \theta_0'; \quad \psi = 0 \quad \psi' = 0,$$

При этих начальных условиях из второго уравнения (11′) следует

$$(B + B_1)\,\psi' - An\theta = -An\theta_0 \tag{12′}$$

Исключая из этого уравнения и первого из уравнений (11′) величину ψ', получим

$$K\theta'' + \left[P(\rho - a) + \frac{A^2 n^2}{B + B_1}\right]\theta = \frac{A^2 n^2}{B + B_1}\theta_0$$

положив

$$k_1^2 = \frac{P(\rho - a)}{K} + \frac{A^2 n^2}{(B + B_1)K}$$

получим

$$\theta'' + k_1^2\theta = \frac{A^2 n^2}{(B + B_1)K}\theta_0$$

Гироскопу придается такое количество движения An, что

$$An = \gamma \sqrt{K \cdot P(\rho - a)}$$

причем γ — некоторый численный множитель, величину которого берут для судов от $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{12}$.

Таким образом, будет

$$k_1^2 = \frac{P(\rho - a)}{K}\left[1 + \gamma^2 \frac{K}{B + B_1}\right] \tag{13}$$

Полагая

$$k^2 = \frac{P(\rho - a)}{K}$$

$$c^2 = \gamma^2 \frac{K}{B + B_1}$$

получим

$$k_1^2 = k^2(1 + c^2)$$

$$\theta'' + k_1^2 \theta = k^2 c^2 \theta_0$$

Отсюда следует

$$\theta = \frac{k^2 c^2 \theta_0}{k_1^2} + C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t \tag{14}$$

Определив постоянные произвольные C_1 и C_2 по начальным условиям, имеем

$$C_1 = \frac{k^2}{k_1^2}\theta_0; \quad C_2 = \frac{\theta_0'}{k_1}$$

$$\theta = \frac{k^2 c^2}{k_1^2}\theta_0 + \frac{k^2}{k_1^2}\theta_0 \cos k_1 t + \frac{\theta_0'}{k_1}\sin k_1 t \tag{14'}$$

Гироскопу придается, как уже сказано, такое количество движения An, что

$$An = \gamma \sqrt{K \cdot P(\rho - a)}$$

причем γ составляет от $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{12}$.

Отношение момента инерции K корабля к моменту инерции $B + B_1$ рамы и маховика весьма большое: 500—2000.

Возьмем для примера $\gamma = \frac{1}{5}$ и отношение моментов инерции 600, тогда будет

$$c^2 = 24; \qquad k_1^2 = 25k^2; \qquad k_1 = 5k$$

и мы получим

$$\theta = \frac{24}{25}\theta_0 + \frac{1}{25}\theta_0 \cos 5kt + \frac{\theta_0'}{5k}\sin 5kt \tag{15}$$

Если бы гироскоп закрепить на стопоре или в среднем положении, то при тех же условиях свободные качания корабля были бы

$$\theta = \theta_0 \cos kt + \frac{\theta_0'}{k} \sin kt \tag{16}$$

Положим, что момент включения гироскопа выбирается так, чтобы было

$$\theta = \theta_0 = 0; \qquad \theta' = \theta_0'$$

тогда качания в нашем примере будут:
гироскоп выключен:

$$\theta = \frac{\theta_0'}{k} \sin kt \tag{15'}$$

гироскоп включен:

$$\theta = \frac{\theta_0'}{5k} \sin 5\,kt \tag{16'}$$

как видно, амплитуда размахов будет в пять раз менее и период их — в пять раз короче.

Подобный опыт обыкновенно показывают на моделях, для которых гироскоп берется сравнительно гораздо большего размера, нежели для судна, например, берут γ около 1 и отношение моментов инерции около 200, тогда будет

$$k_1 = 14\,k$$

и делают такое автоматическое устройство, что гироскоп включается в тот момент, когда модель проходит через прямое положение; получается, что при включении модель, качавшаяся, например, на 15° на сторону, сразу начинает делать лишь мелкое быстрое дрожание, с амплитудой в 1°, около своего прямого положения.

Стоит только гироскоп включить в тот момент, когда модель накренена на какой-либо угол θ_0, тогда это мелкое дрожание будет происходить около этого угла крена, а если включение сделать при наибольшем угле крена, то и мелкое дрожание будет происходить около этого наклоненного на крайний угол положения модели; таким образом вышеприведенные формулы получают весьма наглядное подтверждение, но опыт не должен продолжаться долго, ибо иначе гироскоп ляжет на ограничители, как то видно, если составить формулы и для угла ψ в зависимости его от времени t, именно будет:

$$\psi' = \frac{An}{B + B_1} (\theta - \theta_0)$$

Поставив вместо θ его значение (16), получим после интегрирования

$$\psi = \frac{An}{B + B_1} \left\{ \frac{k^2}{k_1^2} \theta_0 \left[\frac{1}{k_1} \sin k_1 t - t \right] + \frac{\theta_0'}{k_1^2} (1 - \cos k_1 t) \right\} \tag{17}$$

ясно, что первый член, при неопределенном возрастании t, по абсолютной величине также неопределенно растет, и лишь при $\theta_0 = 0$ получается чисто периодическое движение с периодом

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{k_1}$$

около наклонного на угол $\frac{\theta_0'}{k_1^2}$ положения с таковою же амплитудой.

§ 61. Посмотрим, какое влияние окажет свободный гироскоп на амплитуду вынужденных колебаний корабля.

Здесь обнаружится любопытное свойство, состоящее в том, что на абсолютно правильной зыби при достаточных размерах гироскопа может установиться такое движение, при котором корабль почти не будет качаться, а все действие волн будет только раскачивать гироскоп.

В самом деле, положив

$$\theta = M\cos pt + N\sin pt$$

$$\psi = M_1\cos pt + N_1\sin pt$$

получим из (9) и (10) при $\varepsilon f = 0$ для определения M, N, M_1, N_1, уравнения

$$(k^2 - p^2)M + 2hpN + \alpha pN_1 = 0$$

$$-2hpM + (k^2 - p^2)N - \alpha pM_1 = k^2\Theta_0$$

$$(m^2 - p^2)M_1 - \alpha cpN = 0$$

$$(m^2 - p^2)N_1 + \alpha cpM = 0$$

откуда следует

$$[(k^2 - p^2)(m^2 - p^2) - \alpha^2 cp^2]M + 2hp(m^2 - p^2)N = 0$$

$$-2hp(m^2 - p^2)M + [(k^2 - p^2)(m^2 - p^2) - \alpha^2 cp^2]N = k^2(m^2 - p^2)\Theta_0$$

так что

$$\sqrt{M^2 + N^2} = \frac{k^2(m^2 - p^2)\Theta_0}{\{[(k^2 - p^2)(m^2 - p^2) - \alpha^2 p^2 c]^2 + 4h^2 p^2 (m^2 - p^2)^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sqrt{M_1^2 + N_1^2} = \frac{\alpha cp}{m^2 - p^2}\cdot\sqrt{M^2 + N^2} =$$

$$= \frac{\alpha cp\cdot k^2\Theta_0}{\{[(k^2 - p^2)(m^2 - p^2) - \alpha^2 p^2 c]^2 + 4h^2 p^2 (m^2 - p^2)^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

Самый невыгодный случай при качаниях корабля тот, когда

$$k = p$$

в этом случае будет

$$\sqrt{M_1^2 + N_1^2} = \frac{\alpha c p^2}{\{\alpha^4 p^2 c^2 + 4h^2 (m^2 - p^2)\}^{\frac{1}{2}}} \cdot \Theta_0$$

$$\sqrt{M^2 + N^2} = \frac{p \cdot (m^2 - p^2)}{\{\alpha^4 p^2 c^2 + 4h^2 (m^2 - p^2)\}^{\frac{1}{2}}} \cdot \Theta_0$$

Но мы имели

$$\alpha = \frac{An}{K}; \qquad c = \frac{K}{B + B_1}$$

следовательно,

$$\alpha c = \frac{An}{B + B_1} \approx 2n$$

Таким образом, отношение величины размахов боковой качки корабля к размахам гироскопа составит по абсолютной величине:

$$\frac{\sqrt{M^2 + N^2}}{\sqrt{M_1^2 + N_1^2}} = \left| \frac{p}{c\alpha} \cdot \frac{p^2 - m^2}{p^2} \right| \approx \frac{1}{c\alpha} \cdot p \approx \frac{p}{2n}$$

и, значит, при надлежащем выборе размеров гироскопа это отношение может быть сделано весьма малым и размахи гироскопа меньше, например, 30°, тогда размахи корабля будут весьма малые.

Отношение $\frac{A}{K}$ составляет около $\frac{1}{800} - \frac{1}{1000}$, величина n не менее 200, значит, α не менее $\frac{1}{5}$; величина h не более $\frac{1}{20}$ для больших судов, поэтому $c^2 \alpha^4$ будет приблизительно такое же, как $4n^2 h^2$, т. е. весьма велико по сравнению с $4h^2 (m^2 - p^2)$, ибо множитель $m^2 - p^2$ не больше 1. Значит, предыдущие формулы можно писать так:

$$\sqrt{M_1^2 + N_1^2} = \frac{p}{\alpha} \Theta_0 = \frac{k}{\alpha} \Theta_0$$

Величина волнового склона Θ_0 около 7—8°, примем $7\frac{1}{2}^\circ$; тогда, чтобы гироскоп мог свободно качаться, не *ложась на упоры*, поставленные на 30° на сторону, надо, чтобы было

$$\frac{k}{\alpha} \leqslant 4$$

т. е.

$$\alpha \geqslant \frac{1}{4} k$$

иначе

$$An \geqslant \frac{1}{4} \sqrt{K \cdot P (\rho - a)} \qquad (1)$$

но для периода свободных качаний корабля имеем формулу

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{K}{P(\rho - a)}}$$

значит, будет

$$An \geqslant \frac{\tau}{8\pi} P(\rho - a) \qquad (2)$$

где P — вес корабля, $(\rho - a)$ — метацентрическая высота.

Так, например, пусть имеется крейсер, для которого

$$P = 10000 \text{ т}; \qquad (\rho - a) = 1 \text{ м}; \qquad \tau = 12 \text{ сек.}$$

тогда будет

$$An \geqslant \frac{12}{8\pi} \cdot 10000 = 4800 \text{ т} \cdot \text{м}$$

Чтобы определить размеры маховика, надо задать его форму и выбрать число оборотов. Для выбора числа оборотов необходимо иметь в виду, что наибольшее напряжение в материале вследствие центробежной силы выражается формулою

$$S = \frac{3}{4} q \frac{n^2 \cdot r^2}{g} = \frac{3}{4} q \frac{v^2}{g}$$

где q есть *вес* 1 кубической единицы материала. Так, например, выражая r в метрах и вес в тоннах, будет для стали $q = 7.8$, значит

$$S = \frac{3}{4} \cdot \frac{7.8}{9.8} \cdot v^2 = 0.6\, v^2 \quad (\text{т} \cdot \text{м}^2)$$

но 10 т на квадратный метр составляют 1 атм., поэтому напряжение S в атмосферах будет

$$S = 0.06\, v^2 \text{ атм.}$$

Принимая для стали высокого сорта наибольшее напряжение в 2400 атм., видим, что наибольшая допустимая окружная скорость составляет

$$nr = v = 200 \text{ м/сек.}$$

Примем маховик той формы, как изображено в разрезе на фиг. 48. Тогда будет, выражая вес в тоннах и радиус в метрах:

вес маховика

$$Q = 6.3\, r^3$$

момент инерции

$$A = 0.41\, r^5$$

Таким образом, в нашем случае имеем уравнения

$$nr = 200$$

$$0.41\, r^5 n = 4800$$

отсюда следует:

$$r=2.75 \text{ м}; \qquad Q=131 \text{ т}; \qquad n=73$$

Ясно, что выгоднее взять *два* гироскопа, тогда для каждого будет

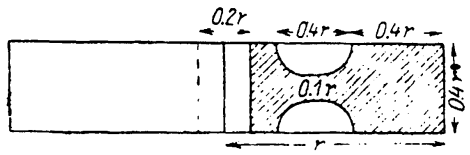
$$nr=200$$

$$0.41\, r^5 n=2400$$

откуда

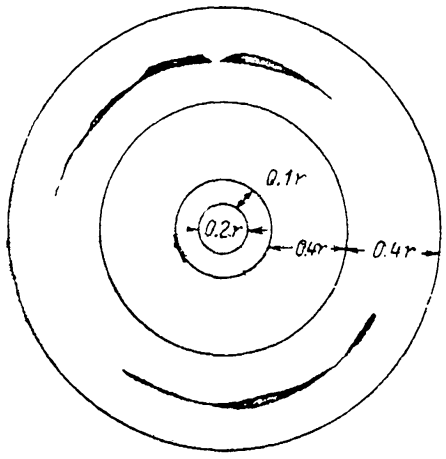
$$r=2.31; \qquad Q=78 \text{ т}; \qquad n=87$$

Отношение величин размахов боковой качки корабля к размахам гироскопа, составляющее



$$\frac{\sqrt{M^2+N^2}}{\sqrt{M_1^2+N_1^2}}=\left|\frac{1}{c\alpha}\cdot\frac{p^2-m^2}{p^2}\right|\approx\frac{1}{c\alpha}\cdot p$$

при $\alpha c\approx 2n$; $\quad p=\frac{2\pi}{12}\approx\frac{1}{2}$



Фиг. 48.

показывает, что размахи корабля составили бы

$$\frac{1}{4n}\,30^\circ\approx\frac{30^\circ}{348}\approx\frac{1^\circ}{10}$$

так что корабль практически совсем бы не качался, а гироскоп качался бы на 30° на сторону, но зато этому гироскопу или гироскопам, если их взять два, пришлось бы придать весьма большие размеры, вместе с тем действие такого гироскопа было бы правильное лишь на абсолютно правильной зыби, синхронной с кораблем. Таких условий на море практически не бывает, поэтому необходимо снабжать гироскоп тормозящим приспособлением, которое поглощало бы энергию, и гироскоп оказывался бы действительным при всяких условиях и на всяком волнении.

§ 62. Разберем еще для примера случай электромагнитного торможения, т. е. когда

$$\varepsilon f=-f\psi'$$

В этом случае уравнения движения будут

$$\begin{aligned}&\theta''+2h\theta'+k^2\theta+\alpha\psi'=k^2\Theta_0\sin pt\\&\psi''+m^2\psi-c\alpha\theta'+f\psi'=0\end{aligned}\qquad(1)$$

т. е. написанное символически

$$\begin{aligned}&(\delta^2+2h\delta+k^2)\,\theta+\alpha\delta\psi=k^2\Theta_0\sin pt\\&-c\alpha\delta\theta+(\delta^2+f\delta+m^2)\,\psi=0\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение будет

$$(\lambda^2+2h\lambda+k^2)(\lambda^2+f\lambda+m^2)+\alpha^2 c\lambda^2=0$$

или в развитой форме:

$$\lambda^4+(2h+f)\lambda^3+(k^2+m^2+2hf+\alpha^2 c)\lambda^2+(2hm^2+k^2 f)\lambda+k^2 m^2=0$$

корни этого уравнения будут комплексные с отрицательною вещественною частью и в том случае, когда $h=0$, т. е. гироскоп будет погашать не только вынужденные, но и свободные колебания.

Для определения амплитуды вынужденных колебаний будем попрежнему иметь уравнения

$$\begin{gathered}(k^2-p^2)M+2hpN+\alpha pN_1=0\\ -2hpM+(k^2-p^2)N-\alpha pM_1=k^2\Theta_0\\ (m^2-p^2)M_1+fpN_1-\alpha cpN=0\\ -fpM_1+(m^2-p^2)N_1+\alpha cpM=0\end{gathered}$$

Отсюда следует

$$\sqrt{M_1^2+N_1^2}=\frac{\alpha cp}{[(m^2-p^2)^2+f^2p^2]^{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{M^2+N^2}$$

и при $k^2=p^2$, когда качка корабля наибольшая, получим

$$\sqrt{M^2+N^2}=\frac{pD\Theta_0}{\{[2hD+\alpha^2 cp^2 f]^2+\alpha^4 c^2 p^2(m^2-p^2)^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

где положено

$$D=(m^2-p^2)^2+f^2p^2$$

Значит, в этом случае

$$\sqrt{M_1^2+N_1^2}=\frac{\alpha cp^2 D^{1/2}\Theta_0}{\{\cdots\}^{\frac{1}{2}}}$$

Посмотрим, какова относительная величина членов в этой формуле, имеем приближенно

$$m^2-p^2\approx p^2$$

$$f^2\approx 8p^2$$

значит

$$D\approx 9p^4$$

$$2h\approx p$$

$$\alpha^2 c=\frac{A}{B+B_1}\,\frac{A}{K}\,n^2\approx 2\cdot\frac{1}{1000}\cdot 200\cdot 200=80$$

$$\alpha^2 cp^2 f\approx 240\,p^3$$

следовательно,

$$2hD + \alpha^2 cp^2 f \simeq \alpha^2 cp^2 f$$

и если положить

$$m^2 - p^2 = \beta p$$

то будет

$$\sqrt{M_1^2 + N_1^2} = \frac{p}{\alpha} \Theta_0$$

Чтобы гироскоп не ложился на упоры, надо, чтобы было

$$\sqrt{M_1^2 + N_1^2} < 4\Theta_0$$

отсюда

$$\alpha \geqslant \frac{p}{4}$$

и, следовательно, как и в формуле (1) § 61

$$An \geqslant \frac{1}{4} \sqrt{K \cdot P(\rho - a)} = \frac{\tau}{8\pi} \cdot P(\rho - a) \qquad (2)$$

Отсюда, как и выше, определятся размеры маховика. Так, для предыдущего примера, взяв попрежнему два гироскопа, будем иметь для каждого, как получено выше,

$$An = \frac{12}{8\pi} \cdot \frac{10000}{2} = 87$$

$$r = 2.31; \quad n = 2400; \quad Q = 78 \text{ т}$$

если взять форму сечения, показанную на фиг. 48.

Определим ту энергию, которую должен поглощать тормоз.

За один размах с одного упора до другого эта работа составит при размахе на сторону $30° = \frac{\pi}{6}$

$$\frac{\pi}{3} \cdot F = (B + B_1) f$$

Но мы взяли

$$f^2 = 8p^2$$

значит

$$f = 2.83\, p = \frac{2.83 \cdot 2\pi}{12} = 1.48$$

положим, что

$$B + B_1 = \frac{3}{4} A = 5.0$$

тогда

$$F = 5f = 7.40$$

т. е. поглощаемая работа

$$\frac{\pi}{3} \cdot 7.40 = 7.75 \text{ т} \cdot \text{м}$$

Эта работа поглощается в течение 6 сек., значит, средняя мощность составит

$$\frac{7.75 \cdot 1000}{75 \cdot 6} = 17 \text{ лош. сил}$$

На такую среднюю мощность надо рассчитывать ту динамомашину, якорь которой приводится во вращение от рамы гироскопа, и, вращаясь в *постоянном* магнитном поле, дает тормозящий момент, пропорциональный ψ'.

§ 63. Рассмотрим в заключение активный гироскоп Сперри, т. е. такой, для которого

$$\varepsilon F = F \cdot \sin(pt + \beta)$$

и возьмем гироскоп вполне уравновешенный, так что

$$H = 0$$

тогда уравнения движения корабля и гироскопа будут:

$$K\theta'' + N\theta' + P(\rho - a)\theta + An\psi' = P(\rho - a)\Theta_0 \sin pt$$
$$(B + B_1)\psi'' - An\theta' = F \sin(pt + \gamma)$$

причина Θ_0 есть наибольший волновой склон, равный $7°.5 = \frac{\pi}{24}$; для больших судов вместо Θ_0 надо брать действующий волновый склон около $\frac{1}{2}\Theta_0$.

Определим F так, чтобы было

$$\theta = 0$$

для этого надо взять F и β так, чтобы было

$$\psi' = \frac{P(\rho - a)}{An}\Theta_0 \sin pt \qquad (1)$$

Но размахи гироскопа ψ ограничены величиной в $30° = \frac{\pi}{6}$ на сторону, значит, должно быть

$$\psi = -\frac{\pi}{6} \cdot \cos pt = -30° \cos pt \tag{2}$$

следовательно,

$$\psi' = \frac{\pi}{6} p \cdot \sin pt$$

Самый невыгодный случай качки имеет место на синхронной волне, для которой

$$p^2 = k^2 = \frac{P(\rho - a)}{K}$$

Таким образом, имеем уравнение

$$\frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{P(\rho - a)}{K}} = \frac{\pi}{24} \cdot \frac{P(\rho - a)}{An} \tag{3}$$

откуда

$$An = \frac{1}{4} \sqrt{KP(\rho - a)} \tag{3'}$$

Чтобы заставить гироскоп-стабилизатор двигаться, согласно уравнению (1), на него действует мотор, золотниками коего управляет малый гироскоп, качающийся в диаметральной плоскости корабля.

Если обозначить через a_1 его главный момент инерции, b_1 его экваториальный момент инерции, b_2 момент инерции его рамы, f_1 трение на цапфах, σ угол отклонения, n_1 угловую скорость вращения маховика, тогда будет

$$(b_1 + b_2)\sigma'' + a_1 n_1 \theta' = \varepsilon f_1$$

т. е.

$$(b_1 + b_2)\sigma'' = \varepsilon f_1 - a_1 n_1 \theta'$$

Расстояние между упорами делается весьма малым, так что практически гироскоп соответственно знаку θ' лежит то на носовом, то на кормовом упоре, нажимая на него с силою, пропорциональною

$$\varepsilon f_1 - a_1 n_1 \theta'$$

таким образом, сообразно знаку θ', причем эта величина при малом трении f_1 и большом значении $a_1 n_1$ будет весьма малая, гироскоп, нажимая на тот или иной упор, замыкает ток, действием которого перекладываются золотники мотора, управляющего качаниями главного гироскопа.

При соотношении

$$\psi' = \frac{P(\rho - a)}{An} \Theta_0 \sin pt$$

мощность An гироскопа достаточна для уничтожения качки полностью в самом невыгодном случае, при действующем волновом склоне, равном наибольшему, т. е. Θ_0, который составляет до 7°5.

Для больших судов действующий волновой склон значительно меньше наибольшего; положив действующий склон равным $\beta\Theta_0$, где β правильная дробь, следовало бы взять

$$\psi' = \beta \frac{P(\rho - a)}{An} \Theta_0 \sin pt$$

Соответственно этому вместо формулы (3′) получим

$$An = \frac{1}{4} \beta \sqrt{KP(\rho - a)}$$

так, например, при $\beta = \frac{1}{2}$ было бы

$$An = \frac{1}{8} \sqrt{KP(\rho - a)},$$

т. е. маховик был бы меньших размеров.

§ 64. *Стабилизация платформы на корабле.* Если на корабле для какой-нибудь надобности требуется иметь платформу, сохраняющую горизонтальное положение при качке корабля, то это может быть достигнуто разными способами.

Так, например, эту платформу можно прикрепить к внутреннему кольцу гироскопического маятника перпендикулярно к оси маховика: так как ось маховика остается практически вертикальной, то платформа останется с такою же степенью точности горизонтальной; но можно искать и другое решение этой задачи.

Можно вообразить, что платформа подвешена на кардановском подвесе и прикреплена к его внутреннему кольцу, на платформу же поставлено два гироскопических стабилизатора, из которых один уничтожает килевые качания платформы, другой — боковые.

Можно искать и следующее решение: платформа прикреплена к внутреннему кольцу гироскопического маятника перпендикулярно к оси его маховика, маятник этот взят сильно устойчивым, так чтобы период его свободных колебаний был небольшой, например 60 сек., тогда его постоянная погрешность, вызываемая вращением Земли, будет около 1′, но колебания вследствие орбитального движения корабля составят до 12′ или более — эти колебания надо погашать весьма чувствительным гироскопическим стабилизатором.

Само собою разумеется, что можно придумать и другие конструкции.

В настоящем параграфе мы имеем в виду показать, каким образом можно, составив схему устройства прибора, рассчитать, каково будет его действие.

Возьмем, например, просто платформу, подвешенную на карданов-ском подвесе и стабилизируемую гироскопическим стабилизатором Шлика с электромагнитным тормозом.

Рассмотрим случай чисто боковой качки корабля, чтобы выяснить сущность дела, причем примем, что прибор поставлен в центре тяжести корабля.

На основании изложенного о маятниковом кренометре мы можем движения самого корабля не рассматривать и считать, что платформа находится на неподвижном фундаменте под действием тех переменных сил, которые возникают от движения корабля; при сделанных предположениях эти силы дадут момент относительно оси подвеса платформы, выражающийся формулою вида

$$F \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_0} + \beta\right)$$

где τ_0 есть период волны, F и β некоторые постоянные, поэтому если на платформе стабилизаторов не было или они были бы застопорены, то колебания платформы определялись бы уравнением вида

$$J\theta'' + Pl\theta = F \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_0} + \beta\right)$$

и так как статическое отклонение, которое может вызвать момент F, равно углу волнового склона Θ_0, то

$$F = \Theta_0 \cdot Pl$$

и, значит, уравнение движения платформы без стабилизатора было бы совершенно того же вида как уравнение боковой качки корабля на волнении, не учитывая сопротивления воды.

Сохраняя сделанные обозначения и повторив все рассуждения § 60, получим следующие уравнения движения платформы, снабженной стабилизатором:

$$J \cdot \theta'' + Pl\theta = \Theta_0 \cdot Pl \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_0} + \beta\right) - M$$

и гироскопа на ней:

$$\begin{aligned} [(B + A_1)\cos^2\psi + B_1 \sin^2\psi]\,\theta'' + An\psi' \cos\psi &= M \\ (B + B_1)\,\psi'' + H \sin\psi - An\theta' \cos\psi &= -F_1\psi' \end{aligned} \qquad (1)$$

Исключая M, получим

$$\begin{aligned} [J + (B + A_1)\cos^2\psi + B_1 \sin^2\psi]\,\theta'' + An\psi' \cos\psi + Pl\theta = \\ = \Theta_0 Pl \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_0} + \beta\right) \qquad (2) \\ (B + B_1)\,\psi'' + H \sin\psi - An\theta' \cos\psi = -F_1\psi' \end{aligned}$$

Мы имеем вообще

$$2\cos^2\psi = 1 + \cos 2\psi$$

$$2\sin^2\psi = 1 - \cos 2\psi$$

следовательно, будет

$$(B + A_1)\cos^2\psi + B_1\sin^2\psi = \frac{1}{2}[B + A_1 + B_1 + (B + A_1 - B_1)\cos 2\psi]$$

сделаем раму так, чтобы было

$$B + A_1 - B_1 = 0$$

и положим

$$J + B + A_1 + B_1 = K$$

если вместе с тем распорядиться так, чтобы было

$$|\psi| < 15^\circ$$

то будет

$$1 - \cos\psi < \frac{1}{2}\cdot\psi^2 < \frac{1}{32}$$

$$\psi - \sin\psi < \frac{1}{6}\psi^3 < \frac{1}{384}$$

и, заменив $\cos\psi$ через 1 и $\sin\psi$ через ψ, получим:

$$K\theta'' + Pl\theta + An\psi' = \Theta_0 Pl \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_0} + \beta\right) \tag{3}$$

$$(B + B_1)\psi'' + H\psi - An\theta' + F_1\psi' = 0 \tag{4}$$

Когда мы пишем уравнения (3) и (4), то, взяв инерционный член

$$(B + B_1)\psi''$$

мы тем самым предполагаем, что якорь динамомашины, служащей тормозом, насажен прямо на продолжение цапф рамы, т. е., что его угловая скорость и угловое ускорение такие же, как и рамы. Практически такое устройство неосуществимо, и между рамою и якорем надо поставить передачу, увеличивающую во много раз угловую скорость якоря. Пусть это передаточное число есть s, так что угловая скорость якоря есть $s\psi'$; ясно, что в выражение живой силы тогда войдет член

$$s^2 a\psi'^2$$

где a есть момент инерции якоря, поэтому, оставляя в первом уравнении обозначенный через B_1 момент инерции рамы с ее принадлежностью и как бы застопоренным якорем, надо во втором уравнении писать вместо B_1 величину

$$B_1 + s^2 a$$

и хотя a может быть и мало по сравнению с B_1 но $s^2 a$ может быть велико, ибо множитель s^2 будет от 1000 до 10 000 или еще более.

Сделаем

$$\frac{Pl}{K}=k^2;\quad \frac{An}{K}=\alpha$$

$$\frac{H}{B+B_1+as^2}=m^2;\quad \frac{K}{B+B_1+as^2}=c;\quad \frac{F_1}{B+B_1+as^2}=f$$

тогда получим:

$$\begin{aligned}&\theta''+k^2\theta+\alpha\psi'=k^2\Theta_0\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_0}+\beta\right)\\&\psi''+m^2\psi+f\psi'-\alpha c\theta'=0\end{aligned}\tag{5}$$

т. е. уравнения того же самого вида, как уравнения (1) § 62, если в них положить $h=0$.

Частное решение этих уравнений будем писать под видом

$$\begin{aligned}\theta&=M\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau_0}+\beta\right)+N\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_0}+\beta\right)\\\psi&=M_1\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau_0}+\beta\right)+N_1\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_0}+\beta\right)\end{aligned}\tag{6}$$

тогда, положив

$$\frac{2\pi}{\tau_0}=p$$

получим для определения M, N, M_1 и N_1 уравнения:

$$\begin{aligned}(k^2-p^2)M+\alpha pN_1&=0\\(k^2-p^2)N-\alpha pM_1&=k^2\Theta_0\\(m^2-p^2)M_1+pfN_1-\alpha cpN&=0\\-pfM_1+(m^2-p^2)N_1+\alpha cpM&=0\end{aligned}$$

Из этих уравнений следует

$$\sqrt{M_1^2+N_1^2}=\frac{\alpha cp}{[(m^2-p^2)^2+p^2f^2]^{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{M^2+N^2}=\frac{\alpha cp}{\sqrt{D}}\sqrt{M^2+N^2}$$

и

$$\sqrt{M^2+N^2}=\frac{k^2D\Theta_0}{\{[(k^2-p^2)D-\alpha^2cp^2(m^2-p^2)]^2+\alpha^4c^2p^6f^2\}^{\frac{1}{2}}}\tag{7}$$

где

$$D=(m^2-p^2)^2+p^2f^2$$

Так как

$$\Theta_0=7{}^\circ5=450'$$

и надо, чтобы было

$$\sqrt{M^2 + N^2} < 1'$$

$$\sqrt{M_1^2 + N_1^2} \leqslant 15° = 900'$$

то мы имеем неравенства

$$\frac{\alpha c p}{\sqrt{D}} \leqslant 900 \tag{8}$$

$$\frac{k^2 D}{\left\{ [(k^2 - p^2) D - \alpha^2 c p^2 (m^2 - p^2)]^2 + \alpha^4 c^2 p^6 f^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \leqslant \frac{1}{450} \tag{9}$$

Если мы выберем α так, чтобы эти неравенства были удовлетворены при вполне уравновешенном гироскопе, т. е. сделав

$$m = 0$$

и при выключенном тормозе, т. е. когда

$$f = 0$$

то определенный таким образом момент количества движения An гироскопа будет более чем достаточен.

При сделанных предположениях будет

$$D = p^4$$

и неравенства (8) и (9) будут

$$\alpha c \leqslant 900\, p \tag{10}$$

$$\alpha^2 c \geqslant 450\, k^2 \tag{11}$$

но мы имели

$$\frac{Pl}{K} = k^2; \quad \frac{An}{K} = \alpha; \quad \frac{K}{B + B_1 + as^2} = c \tag{12}$$

Из неравенства (10) следует

$$n \leqslant 900 \cdot \frac{B + B_1 + as^2}{A} \cdot p \tag{13}$$

Возьмем

$$a = \frac{1}{10000} A; \quad s = 200$$

величина

$$B + B_1 > \frac{1}{2} A$$

$$p > \frac{1}{3}$$

тогда

$$\frac{B+B_1+as^2}{A}>4.5$$

Поэтому, если взять

$$n=1200\simeq 19 \text{ об. в секунду}$$

то неравенство (10) будет выполнено.

Остается выбрать A так, чтобы было удовлетворено неравенство (11), которое дает

$$\frac{A^2n^2}{K^2}\cdot c>450\cdot\frac{Pl}{K}$$

но

$$c>4.5>4$$

поэтому, определив An так, чтобы было

$$\frac{4A^2n^2}{K^2}=450\frac{Pl}{K}$$

т. е.

$$An=10.5\sqrt{K\cdot Pl} \tag{14}$$

мы этому неравенству удовлетворим. При $n=1200$ будет

$$A=\frac{1}{114}\cdot\sqrt{K\cdot Pl} \tag{15}$$

Так, например, положим, что платформа, со всем на ней находящимся, весит 50 кг и радиус инерции ее равен 31.3 см, тогда будет

$$K=\frac{50000}{980}\cdot 31.3\cdot 31.3=50000$$

Чтобы иметь хорошую статическую остойчивость, возьмем

$$k^2=\frac{Pl}{K}=9$$

тогда

$$Pl=450000;\quad l=9 \text{ см}$$

$$A=\frac{1}{38}K=1315$$

Положим, что маховик стальной и имеет относительные размеры, показанные на фиг. 48, тогда, выражая радиус маховика в сантиметрах и вес в граммах, будем иметь приближенно:

вес маховика

$$Q=6.28\cdot r^3$$

момент инерции

$$A=\frac{1}{250}r^5$$

По этим формулам для нашего случая получаем:

радиус маховика $r = 12.7$ см

вес маховика $Q = 12.9$ кг

При таких размерах и угловой скорости платформа, даже при свободных гироскопах, которых должно быть два — один для килевой качки, другой для боковой, будет совершать вынужденные колебания, остающиеся в назначенных пределах, тормоз же должен служить, чтобы погашать свободные колебания, образующиеся вследствие изменяемости элементов волны (см. § 23).

Чтобы свободные колебания не накоплялись, надо обеспечить достаточно энергичное погашение их, мы его рассчитаем, пользуясь характеристическим уравнением для системы (5), именно:

$$(\lambda^2 + k^2)(\lambda + f) + \alpha^2 c\lambda = 0$$

Но мы имели

$$k^2 = 9; \quad \alpha^2 c = 450\, k^2 = 4050$$

так что будет

$$\lambda^3 + f\lambda^2 + 4059\lambda + 9f = 0$$

Вещественный корень приближенно равен

$$\lambda_1 \approx -\frac{1}{450} f$$

Значит, для остальных двух корней приближенно будет

$$\lambda_2 \lambda_3 \cdot \frac{f}{450} = 9f$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{450} f = -f$$

следовательно, λ_1 и λ_2 определяются из уравнения

$$\lambda^2 + f\lambda + 4050 = 0$$

откуда

$$\lambda = -\frac{f}{2} \pm \sqrt{4050 - \frac{f^2}{4}} \cdot \sqrt{-1} = -\frac{f}{2} \pm 64\sqrt{-1}$$

достаточно взять

$$f = 2$$

ибо даже за время пробега короткой волны с периодом $\tau_0 = 6$ сек. погашение составит

$$e^{-6} = \frac{1}{400}$$

При $f=1$ тормозящий момент F_1 будет

$$F_1=(B+B_1+a^2 s)f=\frac{K}{c}f=12000 \text{ г/см}=0.12 \text{ кг/м}$$

Соответственно этому моменту и передаточному числу $s=200$ определяются размеры тормозящей динамо.

Значения

$$\lambda_1=-1+64\sqrt{-1}$$

$$\lambda_2=-1-64\sqrt{-1}$$

корней характеристического уравнения показывают, что свободные колебания будут содержать член вида

$$C_1 e^{-t}\cdot \sin(64t+\gamma)$$

частота которого

$$k=\frac{64}{2\pi}=10$$

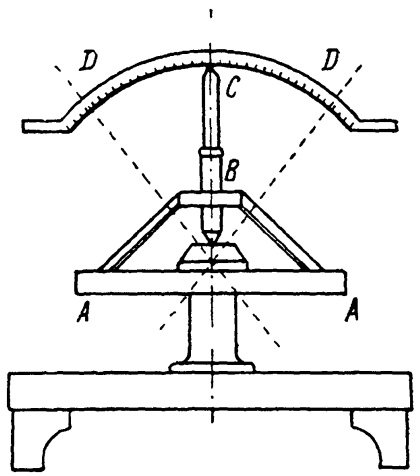
показывает, что этот член при весьма малой амплитуде будет представлять мелкое дрожание, совершающееся 10 раз в секунду, это представляет один из недостатков стабилизованной платформы, поэтому, если на ней ставятся приборы, которые не должны вибрировать, то их надо ставить на упругий подвес, которым эти мелкие дрожания погашаются.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ОПИСАНИЕ НЕКОТОРЫХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

§ 65. Из практических применений волчка отметим два: 1) прибор адмирала Париса для записи качания корабля на волнении, 2) гироскопический горизонт адмирала Флерие.

Прибор Париса, изображенный схематически на фиг. 49, состоит из волчка, который запускался в особом станке, подобно обыкновенному игрушечному волчку, при помощи навернутой на его ось нитки, после чего волчок ставился на свою опору, и ось его вскоре приходила в вертикальное положение. Ось оканчивалась острием, над которым сильным часовым механизмом протягивалась закопченная бумага, на которой и записывались качания корабля.



Фиг. 49.

В § 72 мы приводим описание современных более совершенных приборов, служащих для записи качки, которыми размахи боковой и килевой качки записываются раздельно, тогда как на приборе Париса записывались вместе боковая и килевая качки, т. е. как бы сферическое основание того конуса, который описывается в пространстве мачтою корабля.

Прибор Флерие был им изобретен в 1886 г. и тогда же удостоен Парижской Академией наук удвоенной премии за изобретения и открытия, способствующие успехам мореплавания. Прибор этот давал практическое и достаточно точное решение вопроса о получении на качающемся на волнении корабле искусственного горизонта — вопроса, попытки решить который восходят к середине XVIII столетия. Над этим вопросом трудился и наш М. В. Ломоносов.

Наиболее удачное решение, повидимому, принадлежало Серсону, о котором в сочинении А. Грея (стр. 129) говорится следующее:

„В «*Gentleman's Magazine*» за 1754 г. напечатана такая заметка: «Одиннадцать или двенадцать лет тому назад Серсон, искусный механик, воспользовался свойством вращающегося волчка сохранять вертикальное положение своей оси и устроил род волчка, верхняя поверхность которого, перпендикулярная к оси вращения, представляла круглую полированную металлическую площадку, и, как он и ожидал, оказалось, что при быстром вращении волчка эта площадка вскоре становилась горизонтальной, так что всякий покоящийся предмет при отражении в этой площадке казался глазу совершенно неподвижным; если эта вращающаяся площадка намеренно выводилась из своего горизонтального положения, то вскоре она опять к нему возвращалась и оставалась горизонтальной, пока ее вновь не наклоняли или пока скорость вращения не становилась слишком малой»".

„Очевидно, — продолжает Грей, — это устройство давало удовлетворительное решение вопроса об искусственном горизонте для наблюдений секстаном на море, когда вследствие мглы естественный горизонт не виден. Благодаря знаменитому механику Дж. Грехему прибор был осуществлен в виде волчка, который запускался, как обыкновенно, тесьмой, навитой на ось. Адмиралтейство сперва отказывалось испытать прибор, но затем он был испытан на яхте в Английском канале в 1743 г. и получил одобрительный отзыв. Серсон был вскоре отправлен Адмиралтейством в плавание на корабле «Виктори» для испытания нового прибора, но корабль погиб со всеми на нем находившимися. Грехем тогда сделал еще один прибор и часто выражал сильное негодование по поводу необъяснимого презрения, оказываемого многообещающему изобретению, которое он сам много раз испытывал".

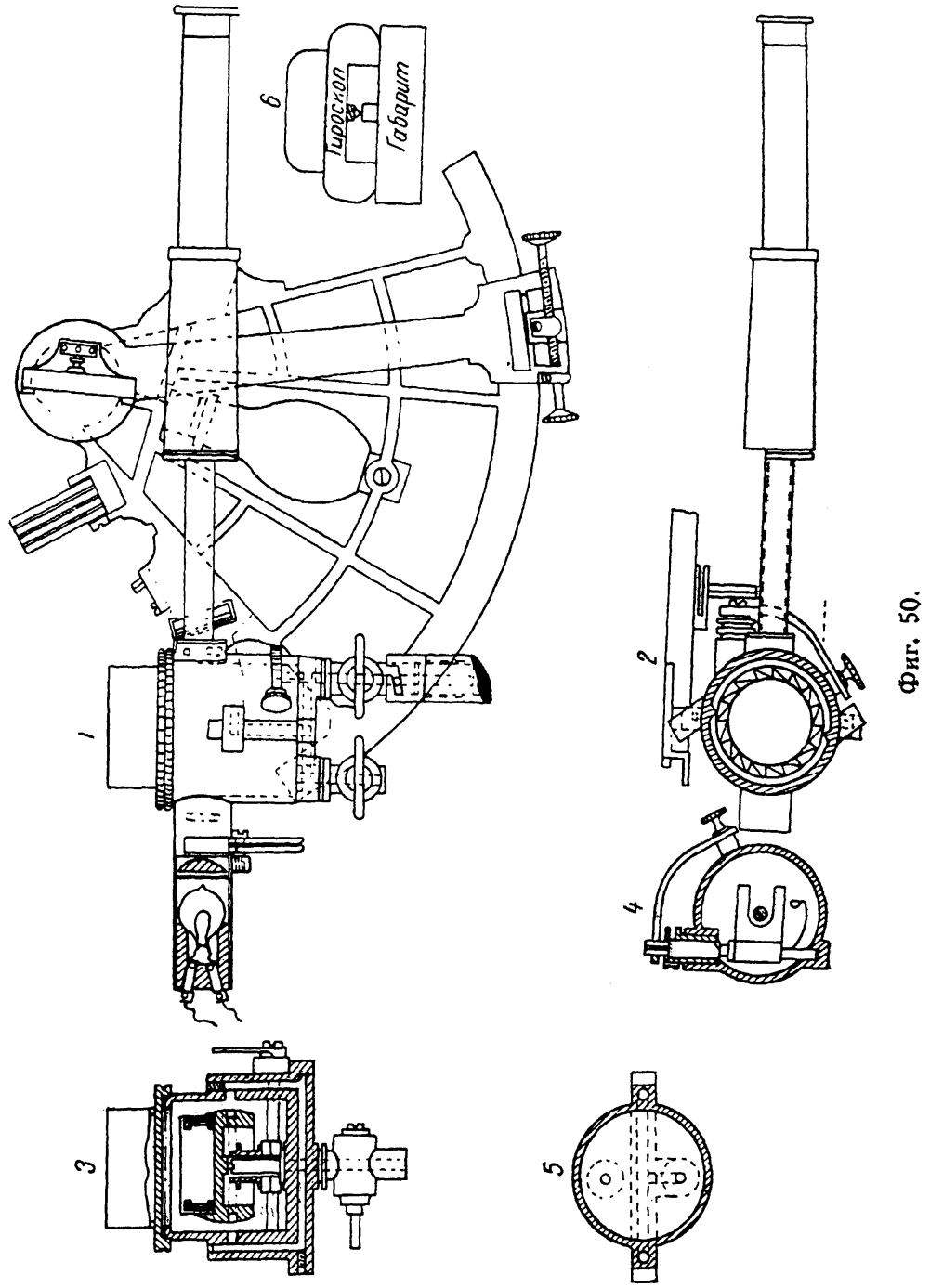
Таким образом прошло почти 150 лет после того, как идея Серсона получила совершенно иное практическое осуществление в гироскопическом коллиматоре Флерие.

Необходимо заметить, что даже на берегу наблюдения звезд или планет секстаном в искусственный горизонт представляет некоторое затруднение, так как достаточно небольшого движения тела, чтобы звезда ушла из поля зрения, поэтому на качке наблюдение в прибор Serson'a должно было представлять большие трудности вследствие того, что отраженное изображение светила в искусственном горизонте беспрестанно исчезало из поля зрения трубы секстана.

Этот важнейший недостаток устранен в приборе Флерие тем, что прибор нацепляется на секстан перед малым зеркалом и горизонт находится все время в поле зрения трубы, даже при довольно значительных покачиваниях ее.

Прибор Флерие, изображенный на фиг. 50, состоит из небольшой камеры, в которой помещается быстро вращающийся волчок формы, показанной в сечении на фиг. 50 (*3*). На верхней поверхности волчка в первоначальном образце прибора помещалось два плоско-выпуклых

стекла, обращенных плоскими поверхностями друг к другу; расстояние между стеклами равнялось их главному фокусному расстоянию, на поверхности одного из стекол наносится ряд тонких штрихов, парал-



Фиг. 50.

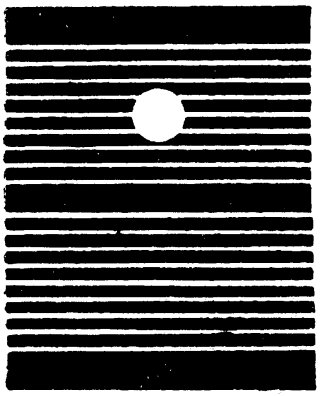
лельных верхней грани волчка в определенном угловом (относительно оптического центра другого стекла) расстоянии друг от друга. Средний штрих сделан толще других.

Таким образом, в поле зрения трубы при быстром вращении волчка видна сетка, как показано на фиг. 51. Причем, *когда ось волчка вертикальна*, то средний штрих соответствует горизонтальному направлению луча зрения, от него идущего.

Таким образом, стоит только привести дважды отраженное изображение светила в прикосновение с этим штрихом, подобно тому как при наблюдении в естественный горизонт, чтобы на лимбе получить высоту светила.

При наблюдениях по лимбу отсчетов не производят, а закрепляют алидаду, скажем, в том положении, когда получено первое касание, и все отсчеты производят по видимой в трубе сетке, причем, чтобы исключить влияние прецессии, надо произвести, по меньшей мере, три отсчета крайних положений, т. е. или два максимума и один между ними минимум видимой высоты, или же два минимума и один между ними максимум.

По окончании наблюдений волчок с секстана снимается, по секстану производится отсчет положения алидады, к которому затем придаются отсчеты по сетке с надлежащими поправками, подробно указываемыми в инструкции для пользования прибором.



Фиг. 51.

Прибор запускается в ход дутьем воздуха при помощи ручного насоса, затем (фиг. 50, *1*), переключают краны и тем же насосом выкачивают воздух из камеры, образуя в ней пустоту примерно до $^1/_{10}$ атм., после чего прибор нацепляют на секстан. В камере с выкачанным воздухом волчок сохраняет достаточную скорость вращения (около 10 000 оборотов в минуту) до 30 минут.

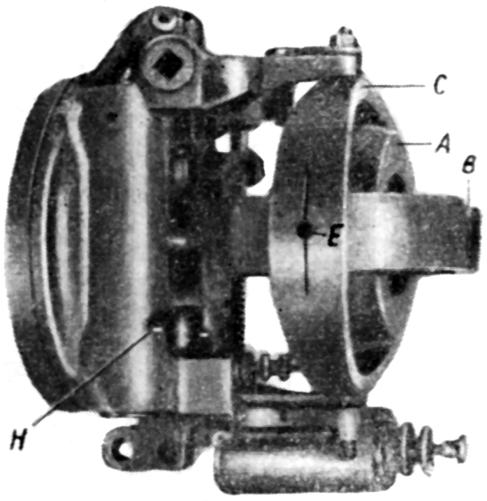
Период прецессии волчка около 100—120 секунд, поэтому качания корабля на него практически влияния не оказывают. Точность результатов по отзывам специальных комиссий, испытывавших прибор, достигает 2—5′, т. е. для большей части наблюдений на море, в особенности, когда горизонта не видно, вполне достаточная.

Само собою разумеется, что наблюдение при помощи прибора Флерие требует упражнения и навыка; большого распространения прибор не получил, и теперь благодаря радиопеленгаторам, дающим возможность определять место корабля во всякое время и при всякой погоде, сильно утратил первоначальное свое значение.

§ 66. Гироскоп с тремя степенями свободы получил в высшей степени важное практическое применение в виде прибора Обри (лейтенанта австрийского флота), управляющего вертикальными рулями мины Уайтхеда и заставляющего ее сохранять приданный ей при выстреле курс или даже автоматически приходить и итти по желаемому направлению, хотя бы при вылете из аппарата она имела и другое направление.

Общий наружный вид прибора изображен на фиг. 52, разрез его по оси маховика в положении при пуске в ход — на фиг. 53. Маховик A помещается внутри горизонтального кольца B, несущего в высшей

степени точно сделанные шариковые подшипники, на которых маховик вращается. Кольцо B свободно (с весьма малым трением) поворачивается на цапфах E, ось коих перпендикулярна оси маховика, внутри вертикального наружного кольца C, которое может вращаться около вертикальной оси, перпендикулярной оси цапф кольца B. На нижнем конце оси кольца C укреплен небольшой эксцентрик L, действующий на тягу M золотника рулевой машинки. Как только мина отклонится от своего курса примерно на 1° и, значит, повернется на столько же по отношению к маховику и кольцу C, которые свое направление сохраняют, то эксцентрик L переведет золотник, который дает сжатый воздух под поршень рулевой машинки; машинка эта соответственно положит руль и приведет мину на курс.



Фиг. 52.

Чтобы маховик сохранял постоянное направление не в абсолютном пространстве, а по отношению к Земле, на его оси помещен грузик m_1, который регулируется так, чтобы производимая им скорость прецессии была равна скорости изменения маховиком своего азимута вследствие вращения Земли. Это может быть достигнуто лишь на сравнительно непродолжительное время, примерно до 1 часа, причем азимут сохраняется до 1°, но так как на самую дальнюю дистанцию мина идет около 10 минут, то этого более чем достаточно.

Для пуска маховика в ход служит воздушная турбина. При выпуске мины из аппарата сжатый воздух поступает в кольцевое пространство F и действует на лопатки D турбинного колеса, насаженного на ось G, которая первоначально сцеплена с осью I маховика. По прошествии некоторого времени, в течение которого маховик приобретет свое полное число оборотов, в особой камере постепенно повышающееся давление достигнет такой величины, что освободит пружину, которая переложит рычаг H и освободит маховик от турбины, после чего гироскоп становится свободным и выправляет курс мины.

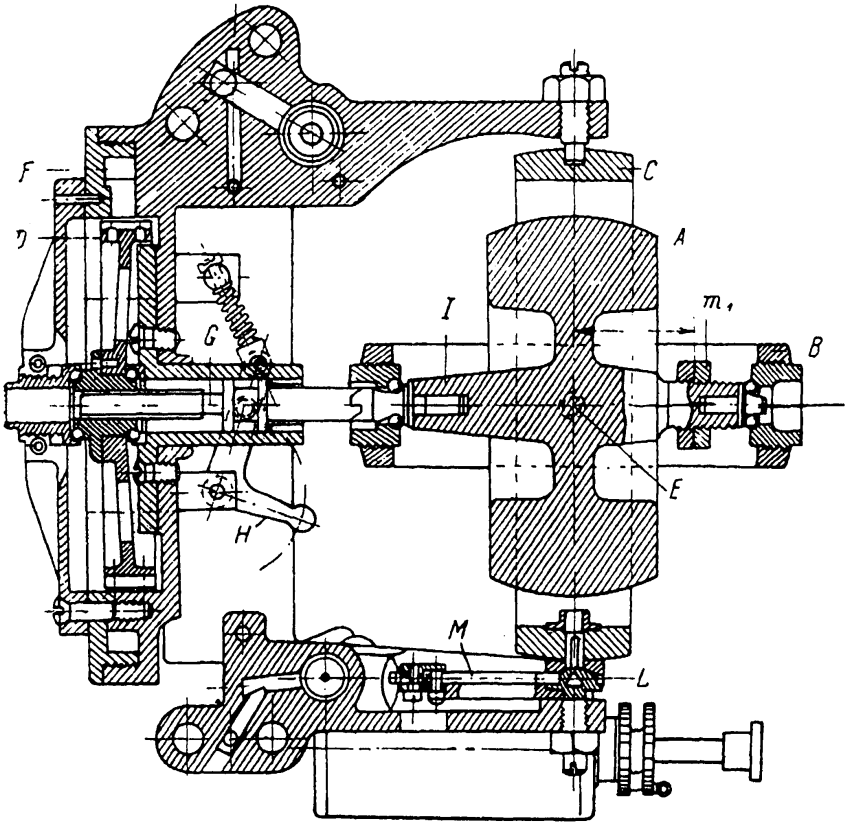
В другой системе приборов вращение маховика поддерживается непрерывно током сжатого воздуха и при свободном положении колец. Продолжительность действия таких приборов составляет до 30 минут.

Мина Уайтхеда изобретена в конце 1870-х годов, прибор Обри — в конце 1880-х и, будучи принят во всех флотах всего мира, доведен в малейших деталях конструкции до высшей степени точности, законченности и совершенства.

§ 67. Важнейшим применением гироскопа, в котором внутреннее кольцо обладает неполною или упругою связью с наружным, являются гирокомпасы.

В настоящее время имеется три главных системы гирокомпасов: 1) Аншютца (Германия, Киль), 2) Сперри (Нью-Йорк), 3) Брауна (Лондон). Принцип использования гироскопа во всех системах одинаков, детали же исполнения существенно различны.

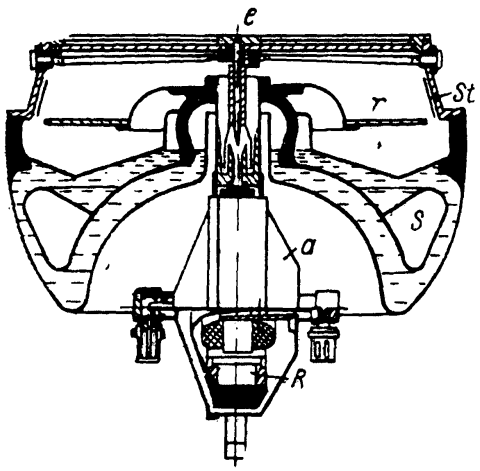
Первоначальное устройство компаса Аншютца показано схематически на фиг. 54. Внутри кожуха a помещается маховик R, представляющий



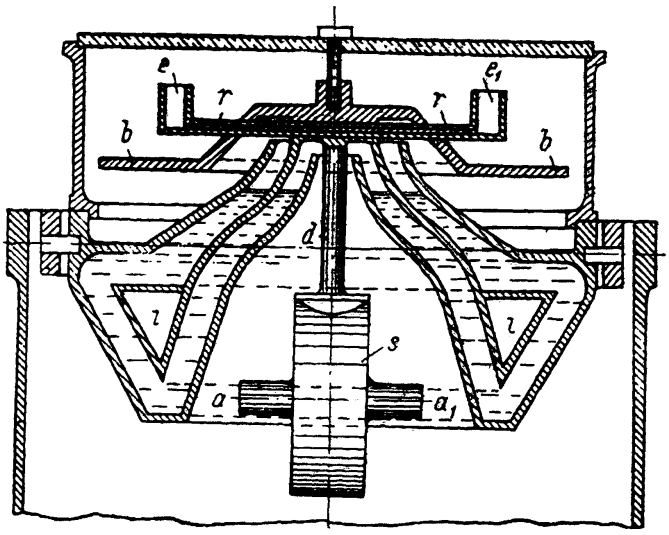
Фиг. 53.

ротор трехфазного мотора, статор которого имеет форму кольца, находящегося внутри маховика и окружающего его ось вращения. К камере a прикреплен полый кольцеобразный стальной поплавок S, погруженный в заполненный ртутью котелок, к этому же поплавку прикреплена картушка r, линия NS которой параллельна оси вращения ротора. Котелок закрыт стеклянным колпаком с плоскою крышкою, на стенке колпака курсовая черта St, и вся система подвешивается на карданновом подвесе, подобно обыкновенному компасу. От крышки опущена шпилька e, служащая для центрования камеры. Ток подводится к статору через провода, погруженные в кольцевую ванночку со ртутью, помещенную наверху камеры. Ясно, что, благодаря такому устройству, камера, несущая ось маховика, может свободно, с ничтожным трением ртути о поплавок, поворачиваться около вертикальной оси и вместе

с тем может наклоняться около любой горизонтальной оси, но это наклонение не свободно, а вызывает восстанавливающий момент, лежащий в плоскости наклонения и равный произведению из веса всей плавающей системы на расстояние между ее центром тяжести и центром пловучести (центр тяжести вытесненной поплавком жидкости)



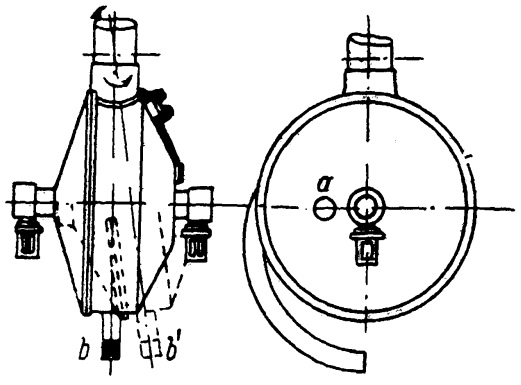
Фиг. 54.



Фиг. 55.

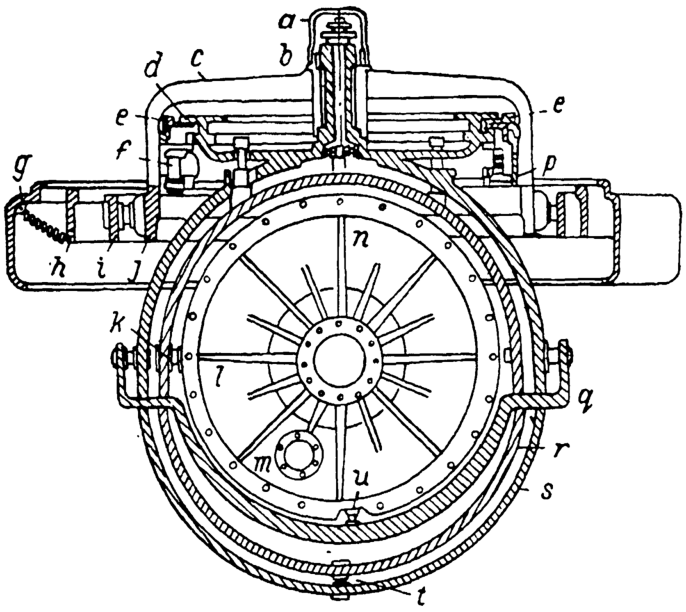
и на синус угла наклонения. Таким образом, гироскопическая система находится как раз в условиях, рассмотренных в § 54.

Для погашения Аншютц применял два приспособления: 1) изображенный схематически на фиг. 55 гидравлический успокоитель с чашками e e_1, соединенными тонкой трубкой rr, и 2) для более энергичного успокоения он воспользовался еще воздушным успокоителем, схематически показанным на фиг. 56. Ротор при своем вращении, подобно центробежному насосу, засасывает через отверстие a воздух в камеру и выбрасывает его с большою скоростью через отверстие b изогнутой трубки, плоскость которой перпендикулярна к оси маховика. Когда эта ось горизонтальна, а значит и в меридиане, то реакция выбрасываемой воздушной струи дает лишь небольшой наклон поплавку около оси, параллельной оси ротора, не нарушая его положения динамического равновесия, когда же ось маховика из меридиана выйдет, а значит, и наклонится к горизонту, то камера придет в положение, показанное пунктиром, и реакция струи даст момент около вертикальной оси, который и заставит ось приходить в горизонтальное положение, препятствуя, таким образом, наклонениям, значит, успокаивая размахи.



Фиг. 56.

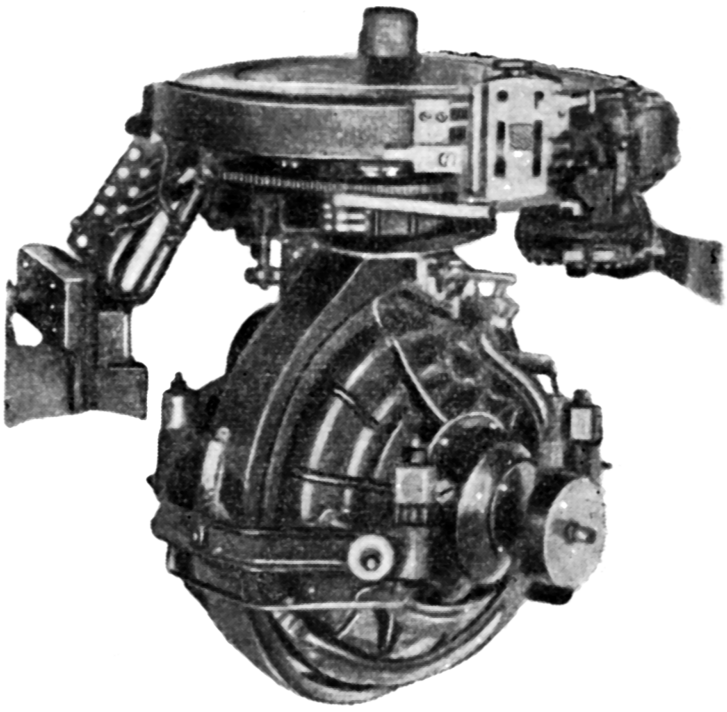
Впоследствии Аншютц стал делать компасы с тремя гироскопами, монтированными на общей площадке, находящейся внутри общей камеры, снабженной поплавком шаровидной формы. Наконец, в новейшем типе взято два гироскопа, помещенных внутри сферического поплавка, плавающего в жидкости, заполняющей сферический же котелок, причем ток подводится через самую жидкость и поплавок нигде не касается котелка.



Фиг. 57.

Подробности устройства описаны в статье Б. И. Кудревича „Новый Аншютц“.

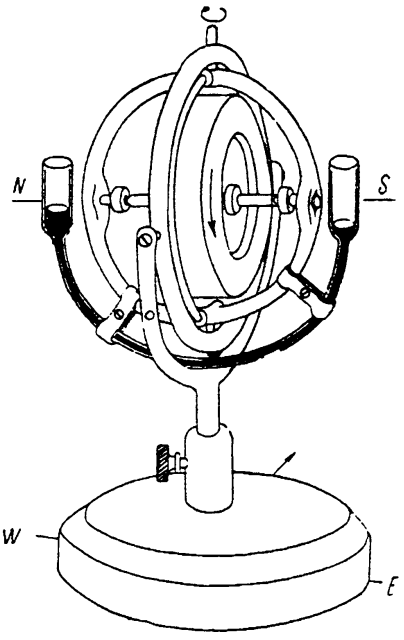
§ 68. Сущность устройства компаса Сперри показана полусхематически на фиг. 57, а наружный его вид, когда он вынут из нактоуза — на фиг. 58. Маховик компаса помещен внутри камеры или кожуха l и вращается на шариковых подшипниках, укрепленных в боковых стенках камеры. Самая камера подвешена на цапфах k, ось коих перпендикулярна оси маховика внутри вертикального кольца r, которое само снабжено в верхней своей части центрующей личинкой n, в которой закреплены нижние концы пучка тонких стальных проволок, проходящих через полый стебель b к крутильной головке a, на которой и висит вертикальное кольцо вместе с камерой, содержащей маховик. Стебель b составляет одно целое с так называемым следящим кольцом s, охватывающим с большим зазором вертикальное кольцо r, с которым оно соединено еще внизу шипом t, свободно вращающимся в своем гнезде,



Фиг. 58.

укрепленном на следящем кольце. Следящее кольцо несет прикрепленную картушку *d*, свободно ходящую внутри азимутального круга *e e*. Азимутальный круг свободно охватывается крестовиною *c*, нижние концы которой прикреплены к внутреннему кругу *j* карданова подвеса, цапфы которого свободно вращаются в подшипниках *i* наружного круга, цапфы наружного кольца свободно вращаются в подшипниках, укрепленных в кольце, подвешенном на пружинах *h* в нактоузе *q*.

Крестовина имеет посередине втулку, через которую проходит стебель *b* следящего кольца и в которой он вращается на упорном и центрирующем шариковом подшипнике. Таким образом, давление крутильной головки проволочного подвеса, несущего вертикальное кольцо, камеру и маховик, воспринимаемое стеблем *b* следящего кольца через упорный подшипник, втулку и радиусы крестовины, передается на внутреннее кольцо карданова подвеса.



Фиг. 59.

Следящая система несет контактные колесики, а азимутальный круг—контактные планки *p*. Эта контактная система дает ток в маленький моторчик *f*, заставляющий плоскость следящего кольца становиться всегда перпендикулярно плоскости оси маховика, не давая таким образом подвесу закручиваться и удерживая линию NS картушки параллельно оси вращения маховика, т. е. в плоскости меридиана.

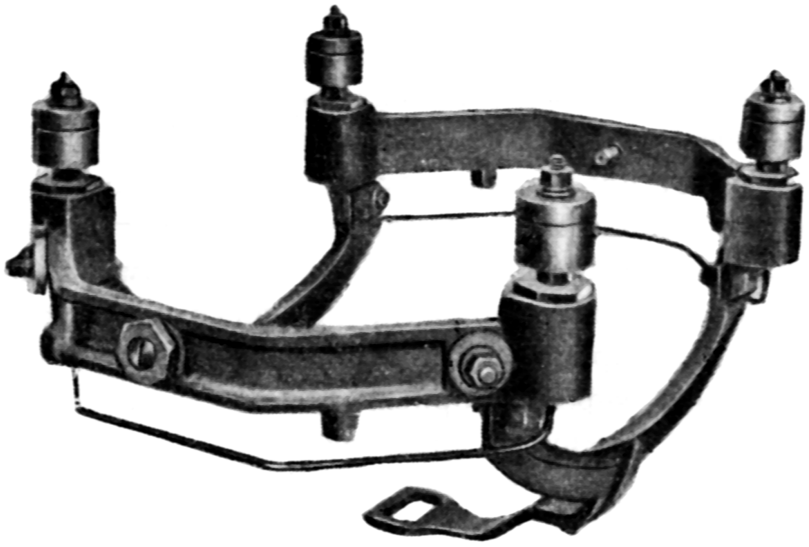
Следящее кольцо несет противовес *q*, который соединяется несколько эксцентрично насаженным рычажком *u* с нижнею частью камеры, и таким образом сообщает ей маятникообразную устойчивость и устанавливает квазиупругую связь между кольцами, несущими гироскопическую систему.

В последних моделях маятникообразная устойчивость достигается ртутными сосудами, схематически изображенными на фиг. 59, на деле же устроенными, как показано на фиг. 60.

Компасы Сперри приняты на большей части флотов и на первоклассных торговых судах. Их исполнено несколько тысяч экземпляров, все детали изучены и разработаны до мельчайших подробностей, с которыми можно ознакомиться по сочинению Б. И. Кудревича „Гирокомпас“, а также по книге: Rawlings. The theory of the gyroscopic compass. London, 1929.

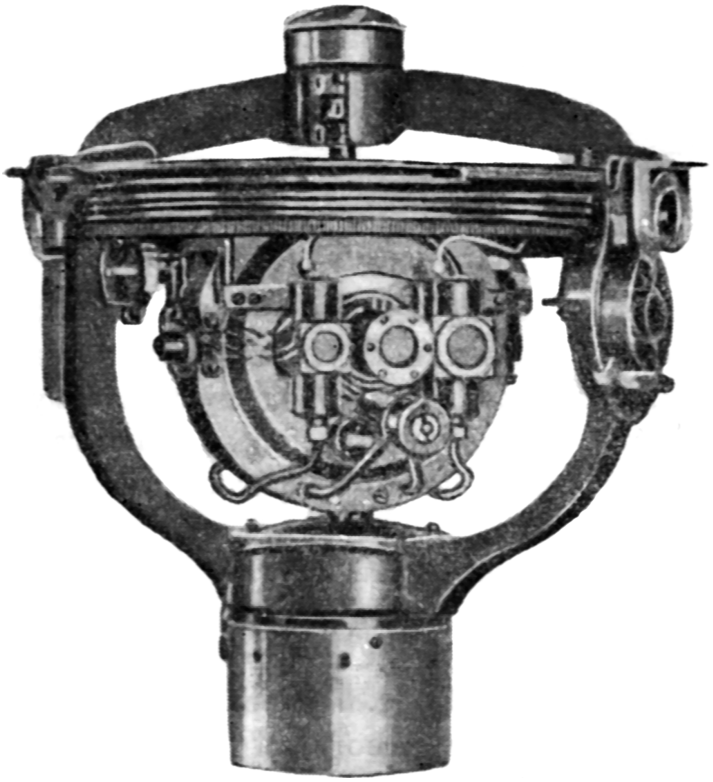
§ 69. Гирокомпас Брауна значительно проще компасов Аншютца и Сперри, причем простота устройства достигнута тем, что камера, несущая ротор, подвешена просто на весьма тщательно исполненных цапфах внутри вертикального кольца (фиг. 61), несущего неподвижно с ним

скрепленную картушку; вертикальное кольцо также вращается в снабженном тяжелым противовесом внутреннем кольце карданова подвеса на двух цапфах, из коих верхняя является лишь центрующей во



Фиг. 60.

втулке крестовины карданова подвеса, а нижняя снабжена особого устройства упорным подшипником, в который накачивается масло под большим давлением пульсирующим насосом, делающим 180 пульсаций в минуту, поэтому нижний шип никогда не имеет прикосновения к металлу подпятника, а постоянно слегка колеблется вверх и вниз, как бы плавая в масле. Благодаря этим колебаниям трение в шариковых подшипниках верхней центрующей цапфы также ничтожно мало.



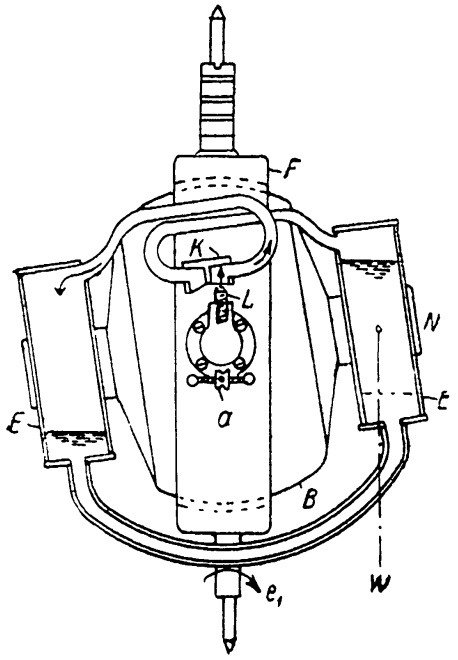
Фиг. 61.

Камера вместе с ротором в своем вертикальном кольце вполне уравновешена; квазиупругая же ее связь и восстановляющая пара при работе гироскопа достигается весьма остроумным приспособлением, показанным на фиг. 62, представляющей схематически вид компаса с восточной стороны. Положим, что северный конец N оси маховика поднят вверх, тогда из сопла L струя поступает, как по-

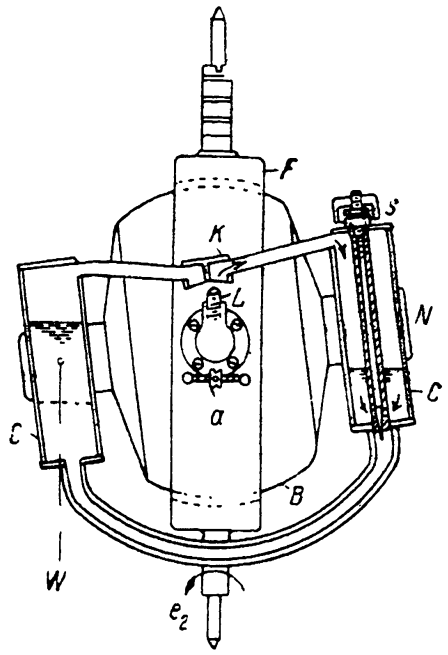
казано, больше в правый конец воздушной трубки, и так как трубка эта перекрещена, то воздух гонит жидкость из левой чашки в правую, и перетекшая жидкость своим весом производит тот же самый эффект, какой производил бы прикрепленный к камере противовес.

Для успокоения колебаний служит гидравлический успокоитель, показанный на фиг. 63 и укрепленный на западной стороне камеры.

Вся разница его от предыдущего состоит только в том, что воздушная трубка не перекрещена, соединительная трубка меньшего диаметра и, кроме того, в правой чашке сделана игла, которой можно регулировать входное отверстие в эту чашку, а значит, и быстроту протекания жидкости из чашки в чашку.



Фиг. 62.



Фиг. 63.

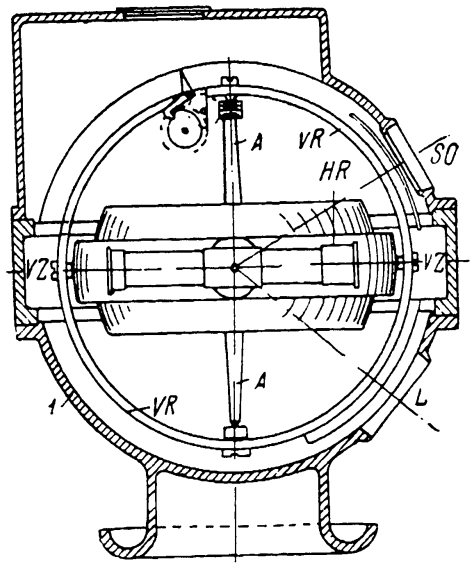
Как видно, этот успокоитель действует совершенно подобно описанному в § 55 лишь с иным напором и скоростью перетекания, которая и подбирается непосредственно опытом, регулируя положение иглы.

Компасы Брауна применяются преимущественно на коммерческих судах. Цена их вдвое дешевле компасов Аншютца и Сперри.

§ 70. Одно из применений гироскопического маятника описано в сочинении: F. Auerbach und W. Hort. Physikalishe und technische Mechanik, B. II, p. 464 и сл., как патентованный фирмою Крупп автоматический замыкатель для стрельбы из орудий с качающегося корабля; приводим здесь перевод этого описания.

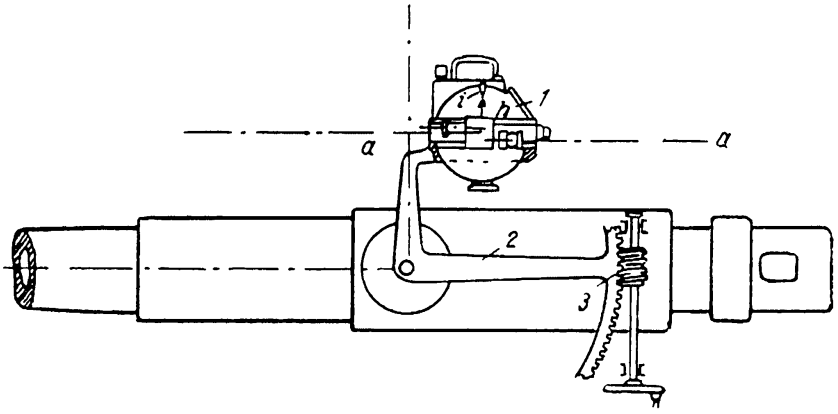
Важным применением гироскопического маятника служит приспособление к автоматическому производству стрельбы из находящихся на корабле орудий в тот момент, когда орудия имеют соответствующий дистанции угол возвышения, независимо от боковой и килевой качки корабля. Выстрел при этом производится или непосредственно

или через замыкание тока. Гироскоп служит при этом для удержания горизонта. На фиг. 64 и 65 представлено схематически подобное устройство. Внутри кожуха *1* фиг. 64 и 65 помещен небольшой гироскоп на кардановом подвесе, ось гироскопа вертикальна. Маховик гироскопа имеет диаметр 13 см и при помощи небольшого мотора (на фиг. не показанного) постоянного тока поддерживается во вращении с 10 000 оборотов в минуту. Положение гироскопа видно на фиг. 64. *A* есть ось маховика, подшипники коей несутся кольцом *VR*, это кольцо в свою очередь имеет цапфы *VZ*, подшипники коих несутся кольцом карданова подвеса, имеющего горизонтальные цапфы, подшипники коих прикреплены к кожуху *1*.



Фиг. 64.

Цапфы эти выступают из кожуха *1*, и на свободном конце одной из них находится легкая прицельная труба, линия визирования которой удерживается таким образом гироскопом приблизительно в горизонтальном положении. Как то следует из свойств гироскопического маятника, это положение трубы не является в точности горизонтальным, и линия визирования совершает вследствие движений корабля или толчков при выстреле малые и медленные колебания. Чтобы их

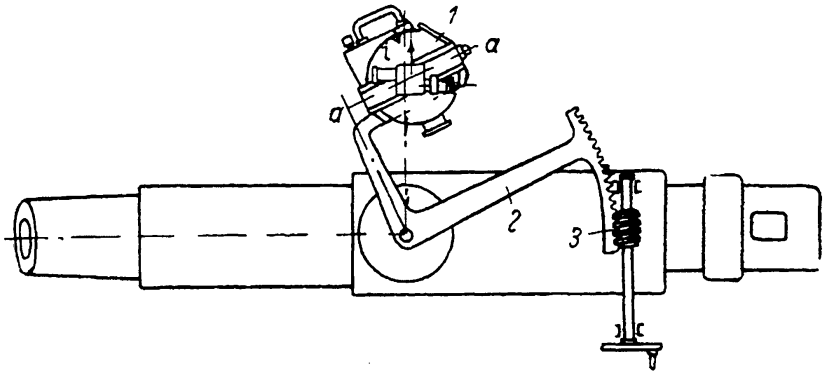


Фиг. 65.

успокоить, в кожухе сделано отверстие *L*, через которое наводчик может слегка нажимать пальцем на кольцо *VR*; после некоторого упражнения он легко приспособляется удерживать крест нитей трубы на ватерлинии цели, так что кольцо кардановой подвеса остается горизонтальным. Таким образом гироскоп, строго говоря, служит лишь для того, чтобы настолько уменьшить и замедлить свободные колебания трубы и кольца, что для наводчика является возможность

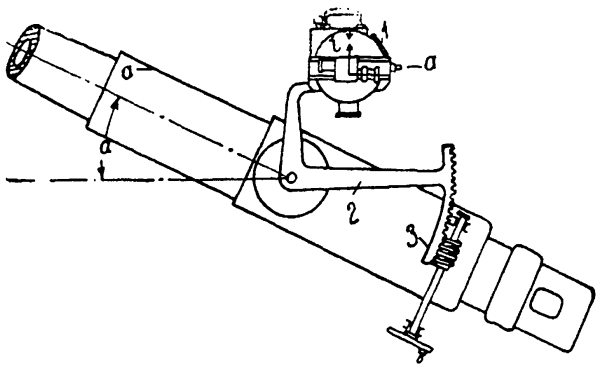
удерживать трубу в горизонтальном положении. На кольце *аа* укреплен один контакт, на кожухе другой; они касаются друг друга и замыкают ток при вертикальном положении одного над другим.

Весь прибор прикреплен к коленчатому рычагу *2*, так что, действуя на маховичок червяка *3*, можно придать продольной оси кожуха соответствующий дистанции угол наклонения α к оси орудия, как то показано



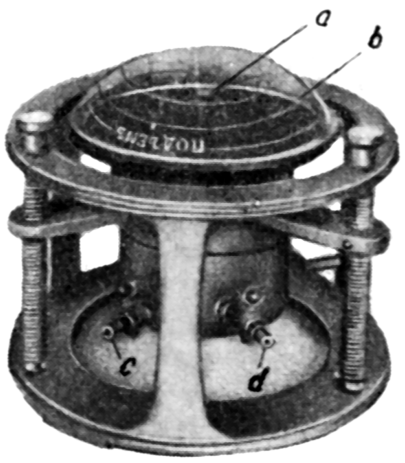
Фиг. 66.

на фиг. 66. В этом положении контакты удалены друг от друга на угол α, если ось орудия горизонтальна, ибо контакт при правильном управлении прибором перпендикулярен к линии визирования, которая горизонтальна. Когда ось орудия вследствие приданного ему угла возвышения, а также и качания корабля, придет в такое положение, что она будет составлять угол α, то контакты придут в прикосновение (фиг. 67) и замкнут ток, при этом, чтобы произошел выстрел, надо, чтобы был замкнут ток и в кнопке комендора, что им делается, когда орудие подходит к требуемому положению. В этом описании приведена лишь идея устройства прибора. При практическом его исполнении принят во внимание целый ряд других требований, не относящихся к гироскопу и здесь не описываемых, так, например, контакты не замыкают непосредственно тока, а освобождают механически курок, которым и замыкается ток в другом месте. Кроме того, необходимо принять во внимание так называемое опаздывание вылета, т. е. промежуток времени между касанием контактов и вылетом снаряда из орудия, этот промежуток времени составляет около 0.2 секунды. Происходящая от этого погрешность в угле возвышения зависит от угловой скорости качаний корабля и устраняется особым



Фиг. 67.

приспособлением. Когда орудие вследствие качаний корабля получает также наклон цапф, то контакты и могли бы миновать друг друга; чтобы этого не было, одному из них придается надлежащая ширина в направлении, перпендикулярном оси орудия. Наконец, кожух *1* прикреплен к рычагу *2* не намертво, а на пружинах, чтобы сотрясение при выстреле не передавалось на оси подвеса и на ось маховика гироскопа и не вызывало их поломки.



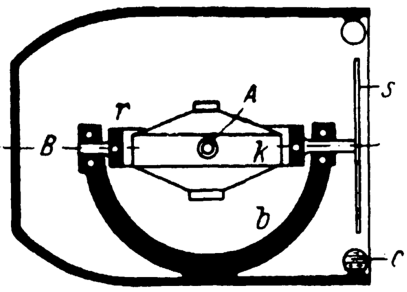
Фиг. 68.

§ 71. Далее в той же книге описываются указатели горизонта для аэропланов; приведем здесь перевод этого описания.

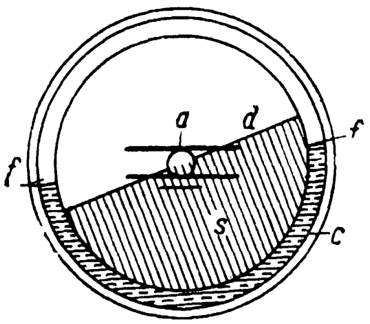
Ввиду того, что погрешности в показаниях маятника или кренометра на корабле или аэроплане, происходящие от периодических толчков, тем меньше, чем период прецессии больше, гироскопический маятник часто применялся как указатель вертикали или горизонта, или как указатель углов наклонения аэроплана.

Примером такого прибора может служить прибор системы фирмы Жарнэ (в Париже), которым во время первой мировой войны пользовались на французских и русских самолетах. Общий вид этого прибора изображен на фиг. 68.

Внутри кожуха находится небольшой волчок, вращающийся на шпильке, подобно тому как в приборе Флерие. На ободе этого волчка нарезаны косые зубцы, как у храпового колеса, бьющий на них ток



Фиг. 69.



Фиг. 70.

воздуха поддерживает вращение волчка, этот ток производится самим движением самолета и подводится через кран *c*, отводится через кран *d*. Ось вращения волчка продолжена в виде небольшого стержня, оканчивающегося пуговкой *a*, которую видно под прозрачным градуированным колпаком *b*. Вследствие прецессии конец стержня *a* описывает по отношению к нанесенным на колпаке делениям маленький круг. При наклонениях самолета центр этого круга перемещается по отношению к колпаку, неизменно связанному с самолетом, и показывает по нанесенным делениям его наклонения.

Однако это прибор далеко не совершенный, ибо период прецессии маленького волчка составляет всего от 1 до 2 минут, вследствие чего длительные ускорения самолета, например, такие, которые происходят при поворотах или шквалах, могут вывести ось волчка на значительный угол из вертикального положения. Много совершеннее прибор Аншютца, показанный схематически на фиг. 69 и 70. В этом приборе маховик, помещенный в камере k, приводится в движение трехфазным током и делает 20 000 оборотов в минуту. Ток доставляется маленькою динамомашиною, приводимою в движение током воздуха при полете аэроплана. Камера качается около оси A цапф в кольце r карданового подвеса, цапфы этого кольца вращаются в подшипниках вилки B, неподвижно скрепляемой с самолетом так, чтобы ось цапф кольца r была параллельна продольной оси самолета.

На конце оси B насажен диск s, одна половина которого зачернена, другая белая, на стеклянной крышке прибора начерчен схематически самолет. Кроме того, по окружности крышки помещена стеклянная согнутая по кругу трубка c, наполовину наполненная жидкостью, в трубке сделан перехват, чтобы она служила гидравлическим успокоителем. Уровень жидкости f становится перпендикулярно кажущейся силе тяжести и показывает кажущийся горизонт.

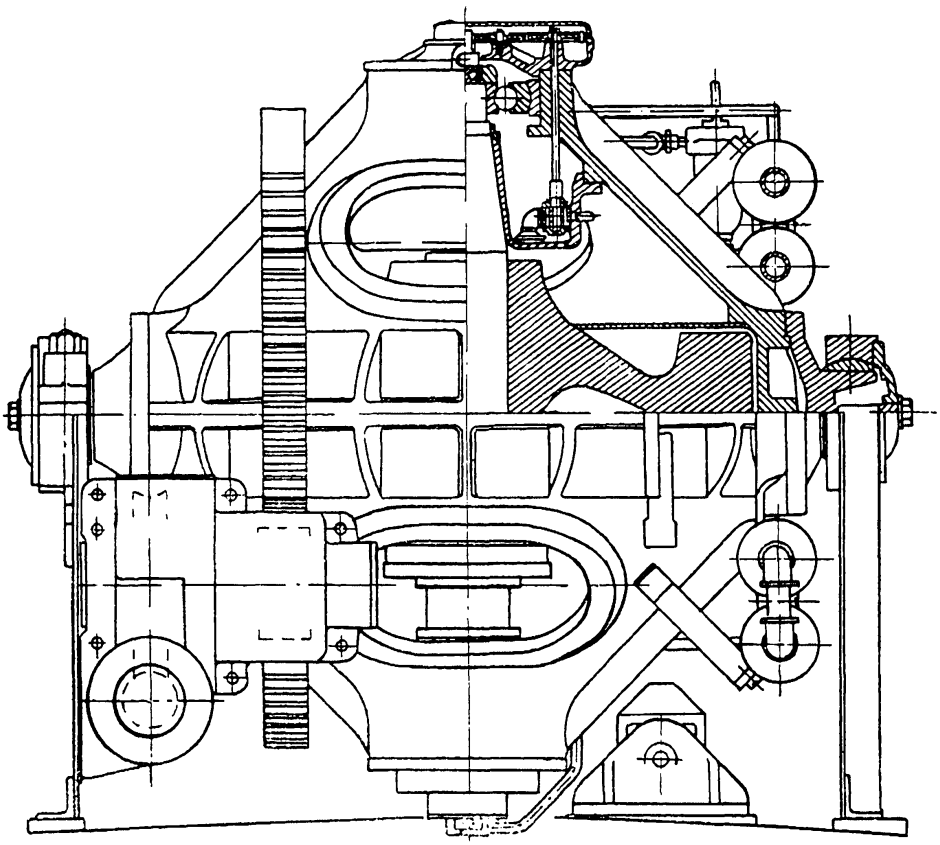
Качающаяся гироскопическая система, представляющая собою, как видно из этого описания, гироскопический маятник, снабженный гидравлическим успокоителем, уравновешена так, что при указанном числе оборотов маховика период ее качаний есть 84 минуты, как и для гирокомпаса, чтобы компенсировать „баллистическую погрешность“, происходящую при перемене курса.

На фиг. 70 показано положение начерченного на крышке аэроплана a по отношению к линии d, представляющей истинный горизонт и, значит, истинный наклон аэроплана. Угол между линиями ff — уровнем жидкости — и истинным горизонтом d показывает наклонение кажущегося горизонта, т. е. угол между кажущейся отвесной линией, совпадающей с направлением равнодействующей ускорения силы тяжести и ускорения самолета, и истинной отвесной линией. Если, например, линии ff и d совпадают, то полет аэроплана прямолинейный, если же при этом a наклонно к d, то самолет имеет крен и надо действовать „элеронами“.

Необходимо, однако, иметь в виду, что при указанном периоде 84 минуты „баллистическая погрешность“ может считаться компенсированной лишь при кратковременном действии происходящей от ускорения самолета силы, возмущающей гироскопический маятник; при длительном полете по кривой, а значит, и при длительном центростремительном ускорении, ось гироскопа постепенно будет приближаться к направлению равнодействующей ускорения силы тяжести и центростремительного. Вследствие этого и показываемый прибором горизонт может более или менее отклоняться от истинного, что представляет еще и тот

недостаток, что вследствие большой величины периода колебаний ошибочность показаний сохраняется продолжительное время.

§ 72. Из стабилизаторов мы ограничимся упоминанием о стабилизаторе Сперри, как единственном, который теперь изготовляется, и стабилизаторе Фиэ, представляющем удачное видоизменение стабилизатора с гидравлическим тормозом.



Фиг. 71.

На фиг. 71 показан разрез стабилизатора, устроенного в 1915 г. на яхте „Widgeon“, плавающей на Великих американских озерах.

Размеры яхты таковы:

Длина по ватерлинии	120 футов
Ширина по ватерлинии	18 футов 2 дюйма
Водоизмещение	165 т
Метацентрическая высота $(\rho - a)$	1.75 фута = 0.534 м
Полный период размаха (двойного)	4.75 сек.

Маховик гироскопа имеет момент инерции $A = 0.0114$ т • м^2 и делает 2750 оборотов в минуту, так что $n = 288$, по этим данным

$$An = 3.3$$

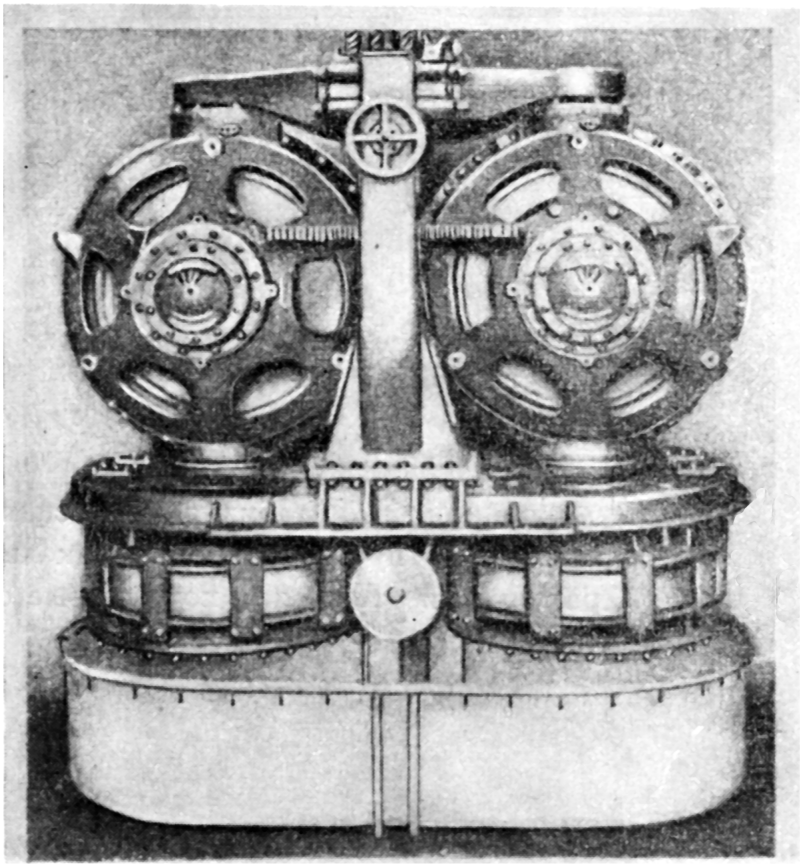
и коэффициент α в формуле

$$An = \alpha \sqrt{K \cdot P \cdot (\rho - a)}$$

будет

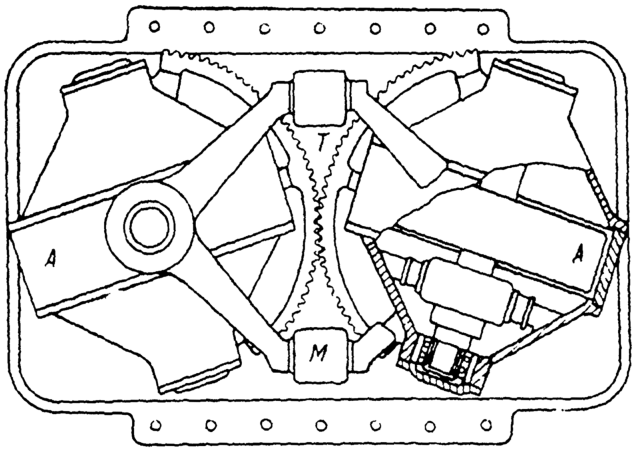
$$\alpha = \frac{1}{20}$$

Испытание показало, что качка, размахи которой составляли от 12 до 20° на сторону, низводилась стабилизатором до размахов в 2—3° на сторону. Гироскоп имел упоры, ограничивающие его размахи до 45° на сторону, но часто на них ложился.



Фиг. 72.

Стабилизатор через зубчатую дугу, к нему прикрепленную, сцепляется с шестерней сервомотора и раскачивает его соответственно

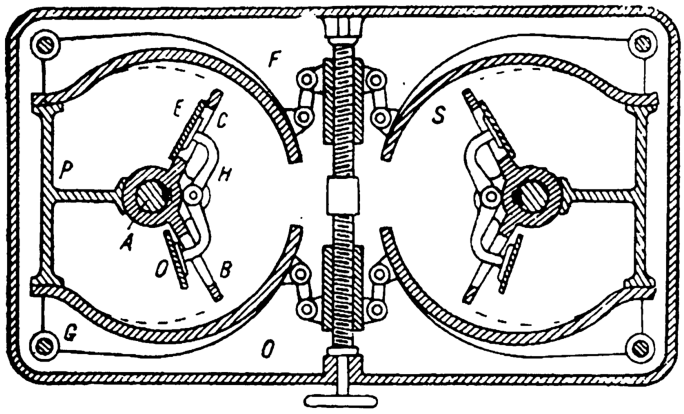


Фиг. 73.

качаниям корабля, погашая их; сервомотором управляет малый гироскоп, дающий контакты в ту или другую сторону, соответственно

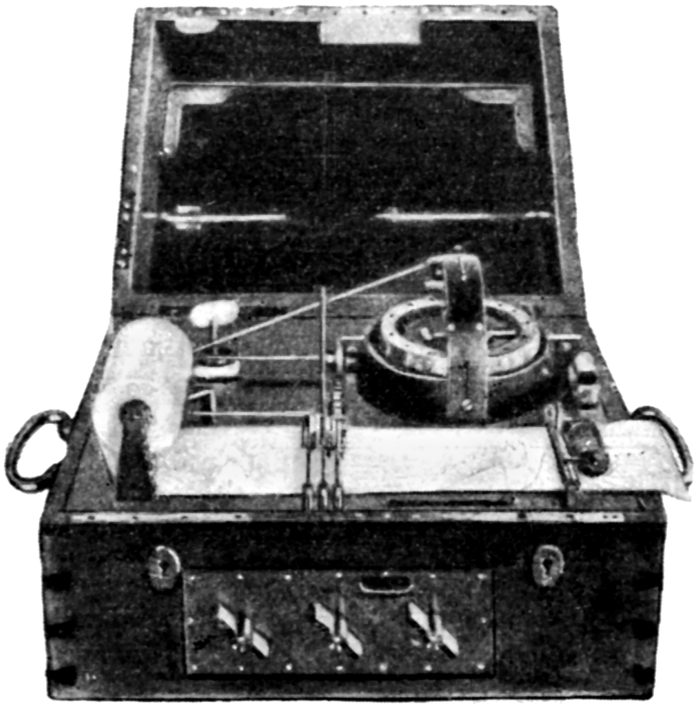
направлению мгновенной угловой скорости корабля. Вес маховика гироскопа около 1 т, его диаметр 0.8 м.

Прибор Фиэ представляет (фиг. 72, 73, 74) соединение как бы двух стабилизаторов первоначального типа Сперри, т. е. с горизонтально



Фиг. 74.

расположенными осями маховиков. Эти стабилизаторы сцеплены зубчатыми дугами между собою, и на продолжении вертикальной оси их кожухов находятся гидравлические тормоза, показанные схематически



Фиг. 75.

на фиг. 74, причем, действуя маховиком можно сближать или раздвигать крылья F и G и, изменяя зазор между ними и лопатками C и B, регулировать торможение. Жидкость заполняет всю систерну, в которой находятся крылья и лопатки, и которая на фиг. 72 представлена опущенной вниз, чтобы было видно расположение тормозов.

Прибор был испытан на канонерской лодке французского флота, водоизмещение которой было 900 т. Вес маховиков по 2.68 т каждый, диаметр их 1.20 м, число оборотов 2150 в минуту, амплитуда размахов качки уменьшалась приблизительно в 6 раз по отношению к той, которая имела место при выключенном стабилизаторе.

Наконец, на фиг. 75 представлен общий вид гироскопического кренометра, дающего одновременно запись боковой и килевой качки корабля на бумажной ленте, которая тянется приводом от электромоторчика.

Вращение маховика гироскопа также поддерживается маленьким электромотором, якорь которого насажен на ось гироскопа.

Прибор этот работы механика Петровача (Petrovač) в Вене был представлен в 1913 г. фирмою Блом и Фосс комиссии, бывшей под моим председательством и испытывавшей на зафрахтованном для этой цели пароходе „Метеор“ действие успокоительных систерн Фрама при плавании в Атлантическом океане в течение марта месяца 1913 г. Комиссия имела также фотографический кренометр, построенный по моим указаниям и дававший абсолютную величину размахов качки с точностью до 0°.1. Сличение показаний подтвердило полную правильность записи, даваемой прибором Петровача.[1]

Самозаписывающие гироскопические кренометры изготовляются теперь и многими другими фирмами, по сущности своего действия они не отличаются от прибора Петровача, вся разница состоит в деталях устройства.

---

[1] Подробное описание этого плавания и обработки произведенных наблюдений даны в книге акад. А. Н. Крылова „Качка корабля“ (изд. 1938 г.), стр. 252—270. См. также: Собр. тр. акад. А. Н. Крылова, т. XI. (*Ред.*).

НЕКОТОРЫЕ РАБОТЫ ПО МЕХАНИКЕ
(1938—1940)

О ВИБРАЦИИ ФУНДАМЕНТОВ НЕ ВПОЛНЕ УРАВНОВЕШЕННЫХ МАШИН И СПОСОБАХ ЕЕ УМЕНЬШЕНИЯ[1]

§ 1. Во многих руководствах по технической механике вопрос об уменьшении вибрации фундаментов под не вполне уравновешенными машинами при помощи упругих подвесов или упругих подкладок излагается недостаточно отчетливо, в особенности по отношению к колебаниям вращательным, что ведет к неясностям и несогласованности с методами теоретической механики.

Такую несогласованность следует тщательно избегать в учебных руководствах.

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы дать изложение этого вопроса более строгое и более общее, нежели обычное.

§ 2. Всякая машина состоит из так называемых неподвижных и движущихся частей. При установке машины ее неподвижные части неизменно скрепляются с фундаментом и представляют вместе с ним одно твердое тело.

Каждая из движущихся частей представляет также твердое тело, движение которого по отношению к фундаменту определяется конструкцией самой машины. Ход машины предполагается установившимся, т. е. вращение ее главного вала равномерным с постоянною угловою скоростью ω. При таком условии движение всех частей машины будет периодическое с основным периодом $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$, который будем выражать в секундах.

Вопрос состоит в том, чтобы по известной кинематической конструкции машины и заданным движениям ее масс определить движение ее фундамента и связать ее упругими связями с принимаемыми за абсолютно неподвижные частями сооружения так, чтобы амплитуды колебаний его не превосходили наперед назначенные пределы, предполагаемые весьма малыми.

---

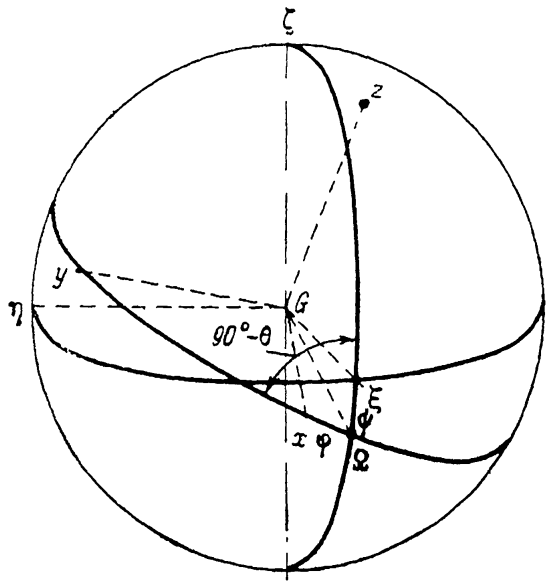
1. Впервые опубликовано в научно-техническом журнале „Вестник металлопромышленности“ (1938, 82—99). (*Ред.*).

Положим, что число движущихся частей машины есть n, тогда мы имеем систему $(n+1)$ тел, из которых масса одного (фундамента с неизменно скрепленными с ним неподвижными частями машины) M_0 весьма велика не только по сравнению с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ движущихся частей, но и с суммою их.

Нас интересует движение тела M_0, когда движение тел $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и их связи между собою и телом M_0 заданы.

Мы применим к решению этого вопроса общую теорию малых колебаний, развитую Лагранжем.

§ 3. Возьмем две системы прямолинейных прямоугольных координат: *первую* — относительную G_0xyz, неизменно связанную с телом M_0, и *вторую* — абсолютную, неподвижную в пространстве, или, точнее говоря, неизменно связанную с Землей. Начало координат G_0 первой системы берем в центре тяжести тела M_0 и оси координат направляем по главным осям инерции этого тела.



Фиг. 1. $\xi\Omega = \psi$; $\Omega x = \varphi$; $x\Omega\xi = 90° - \theta$.

Начало координат O второй системы берем в том положении точки G_0, которое эта точка занимает, когда машина установлена „на марки“ и масса M_0 находится в равновесии и покое на своих упругих подушках или пружинах; оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, этой системы надо брать так, чтобы при упомянутом равновесии и покое тела M_0 они соответственно совпадали с осями G_0x, G_0y, G_0z.

Положение координатной системы G_0xyz относительно осей $O\xi\eta\zeta$ определяется координатами

$$\xi_0, \eta_0, \zeta_0 \qquad (1)$$

точки G_0 и тремя Эйлеровыми углами

$$\varphi, \psi, \theta_1 = 90° - \theta \qquad (2$$

Эти углы надо брать не так, как это делается в астрономии и во всех руководствах по аналитической механике, а так, как это мною указано при рассмотрении качки корабля, т. е. чтобы при малых колебаниях тела M_0, когда его оси G_0x, G_0y, G_0z составляют во все время движения „малые“ углы с соответствующими им осями $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, все три угла φ, ψ и θ оставались „малыми“. Понятие „малый“ будет разъяснено ниже.

Такой выбор Эйлеровых углов представлен на фиг. 1, где они вынесены на вспомогательную сферу. При таком выборе углов φ, ψ, θ

косинусы углов между осями выражаются следующими формулами, которые получаются, применяя основную формулу сферической тригонометрии к сферическим треугольникам

$$x\Omega\xi,\ x\Omega\eta,\ x\Omega\zeta;\ y\Omega\xi,\ y\Omega\eta,\ y\Omega\zeta;\ z\Omega\xi,\ z\Omega\eta,\ z\Omega\zeta$$

именно будет

$$\begin{aligned}
a_1 &= \cos(\widehat{x\xi}) = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\sin\theta \simeq 1\\
b_1 &= \cos(\widehat{x\eta}) = \sin\varphi\cos\theta \simeq \varphi\\
c_1 &= \cos(\widehat{x\zeta}) = -\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\sin\theta \simeq -\psi\\
a_2 &= \cos(\widehat{y\xi}) = -\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\sin\theta \simeq \varphi\\
b_2 &= \cos(\widehat{y\eta}) = \cos\varphi\cos\theta \simeq 1\\
c_2 &= \cos(\widehat{y\zeta}) = \sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\sin\theta \simeq \theta\\
a_3 &= \cos(\widehat{z\xi}) = \sin\psi\cos\theta \simeq \psi\\
b_3 &= \cos(\widehat{z\eta}) = -\sin\theta \simeq -\theta\\
c_3 &= \cos(\widehat{z\zeta}) = \cos\varphi\cos\theta \simeq 1
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь приведены и приближенные выражения косинусов, когда углы φ, ψ, θ „малые“, т. е. когда с тою точностью, которая в поставленном вопросе достаточна, можно полагать

$$\sin\varphi = \varphi;\ \sin\psi = \psi;\ \sin\theta = \theta;\ \cos\varphi = 1;\ \cos\psi = 1;\ \cos\theta = 1$$

В нашем случае эти углы не превосходят $0^\circ.1$, т. е. заключаются кругло в пределах от $\frac{1}{500}$ до $\frac{1}{1000}$, а тогда относительная точность этих двух формул будет

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 = \frac{1}{500}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{1}{500\cdot 500}\right) = \frac{1}{500}\left(1 - \frac{1}{1500000}\right)$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{500\cdot 500} = 1 - \frac{1}{500000}$$

Такая относительная точность далеко превосходит погрешности исполнения и, значит, вместо „точной“ таблицы косинусов

	x	y	z
ξ	a_1	a_2	a_3
η	b_1	b_2	b_3
ζ	c_1	c_2	c_3

(4)

можно брать „приближенную“

	x	y	z
ξ	1	$-\varphi$	ψ
η	φ	1	$-\theta$
ζ	$-\psi$	θ	1

(5)

„Точные“ выражения проекций мгновенной угловой скорости p, q, r на оси G_0x, G_0y, G_0z суть

$$p = \theta_1' \cos\varphi + \psi' \cos(x\eta) = \psi' \sin\varphi \cos\theta - \theta' \cos\varphi$$
$$q = \theta_1' \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + \psi' \cos(y\eta) = \psi' \cos\varphi \cos\theta + \theta' \sin\varphi$$
$$r = \varphi' + \psi' \cos(z\eta) = \varphi' - \psi' \sin\theta$$

Их „приближенные“ выражения

$$p = \theta_1' = -\theta'; \quad q = \psi'; \quad r = \varphi' \tag{6}$$

Таблица [формула (5)] и формула (6) показывают, что при „малых“ углах φ, ψ, θ можно рассматривать, что эти углы представляют повороты тела M_0 около осей G_0x, G_0y, G_0z или около осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, ибо разности этих поворотов выражаются членами второго порядка относительно φ, ψ, θ и в нашем случае пренебрежимы. Это обыкновенно принимается без доказательства, без оценки погрешностей и, умалчивая о том, что сложение вращений в отличие от сложения угловых скоростей не следует правилу параллелограмма (для конечных вращений) и есть операция не коммутативная.

§ 4. Выяснив кинематическую часть поставленного вопроса, перейдем к динамической, т. е. к составлению дифференциальных уравнений движения тела M_0 и затем к интегрированию их.

Для составления уравнений движения применяем вторую Лагранжеву форму их, т. е.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{7}$$

где q_i есть „обобщенная“ координата (координатный параметр), в нашем случае одна из переменных ξ_0, η_0, ζ_0, φ, ψ, θ; T — живая сила системы и

$$\delta U = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3 + \ldots \tag{8}$$

элементарная работа всех сил системы при перемещениях δq_1, δq_2, $\delta q_3 \ldots$ по координатным параметрам.

Полная живая сила рассматриваемой системы $(n+1)$ масс $M_0, m_1, m_2, \ldots, m_n$ состоит из живой силы массы M_0 и суммы живых сил прочих масс $m_1, m_2, \ldots, m_n$, так что при само собою понятном обозначении будет

$$T = T_0 + T_1 + T_2 + \ldots + T_n \tag{9}$$

При сделанном выборе координатных осей будет

$$T_0 = \frac{1}{2} M_0 [\xi_0'^2 + \eta_0'^2 + \zeta_0'^2] + \frac{1}{2} [A\varphi'^2 + B\psi'^2 + C\theta'^2] \tag{10}$$

где A, B, C — главные моменты инерции тела M_0 относительно осей G_0x, G_0y, G_0z, около которых происходят повороты φ, ψ, θ.

Чтобы составить выражения $T_1, T_2, \ldots, T_n$, составим сперва T_1, по которому напишем и остальные.

Пусть в рассматриваемый момент времени t координаты центра тяжести g_1 массы m_1, суть x_1, y_1, z_1; это будут три заданные функции времени t, ибо движение точки g_1 относительно фундамента задается; так что при подробном начертании следовало бы писать

$$x_1 = x_1(t); \quad y_1 = y_1(t); \quad z_1 = z_1(t) \tag{11}$$

Разобьем мысленно массу m_1 на элементы dm_1, проведем через точку g_1 оси, параллельные среднему положению осей G_0x, G_0y, G_0z; тогда, пренебрегая ничтожно малыми поворотами этих осей, получим координаты точки dm_1 под видом

$$x_1 + \alpha, \quad y_1 + \beta, \quad z_1 + \gamma \tag{12}$$

тогда переменные α, β, γ будут независимы от времени и служат лишь для определения элемента dm_1 в теле m_1 относительно центра тяжести g_1 этого тела.

Очевидно, будет

$$\int_{m_1} \alpha\, dm_1 = \int_{m_1} \beta\, dm_1 = \int_{m_1} \gamma\, dm_1 \tag{13}$$

причем под знаком $\int_{m_1}$ надо разуметь суммы, распространенные на все элементы dm_1 (это будут тройные интегралы).

На основании таблицы [формула (5)] абсолютные координаты ξ_1, η_1, ζ_1 элемента dm_1 будут

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_0 + (x_1 + \alpha) - (y_1 + \beta)\varphi + (z_1 + \gamma)\psi \\ \eta_1 &= \eta_0 + (x_1 + \alpha)\varphi + (y_1 + \beta) - (z_1 + \gamma)\theta \\ \zeta_1 &= \zeta_0 - (x_1 + \alpha)\psi + (y_1 + \beta)\theta + (z_1 + \gamma) \end{aligned} \tag{14}$$

Живая сила T_1 массы m_1 равняется сумме живых сил всех ее элементов и при сделанных обозначениях будет

$$2T_1 = \int_{m_1} [\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2]\, dm_1 = \int_{m_1} \xi_1'^2\, dm_1 + \int_{m_1} \eta_1'^2\, dm_1 + \int_{m_1} \zeta_1'^2\, dm_1 \qquad (15)$$

причем суммирование производится по буквам α, β, γ.

Обозначим входящие в эту формулу интегралы через $2F_1$, $2G_1$, $2H_1$ и возьмем первый из них, который будет

$$2F_1 = \int_{m_1} \xi_1'^2\, dm_1 = \int_{m_1} [\xi_0' + x_1' - y_1'\varphi + z_1'\psi - (y_1+\beta)\varphi' + (z_1+\gamma)\psi']^2\, dm_1 \qquad (16)$$

Составим выражение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F_1}{\partial \xi_0'} - \frac{\partial F_1}{\partial \xi_0} \qquad (17)$$

которое интеграл $2F_1$ вносит в левую часть уравнения Лагранжа; исчислив это количество, мы простою заменою букв получим и все остальные.

Имеем

$$\frac{\partial F_1}{\partial \xi_0'} = \int_{m_1} [\xi_0' + x_1' - y_1'\varphi + z_1'\psi - (y_1+\beta)\varphi' + (z_1+\gamma)\psi']\, dm_1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F_1}{\partial \xi_0'} = \int_{m_1} [\xi_0'' + x_1'' - 2y_1'\varphi' + 2z_1'\psi' - y_1''\varphi + z_1''\psi - (y_1+\beta)\varphi'' + (z_1+\gamma)\psi'']\, dm_1$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \xi_0} = 0$$

так как суммы берутся по переменным β и γ, то на основании формул

$$\int_{m_1} \beta\, dm_1 = \int_{m_1} \gamma\, dm_1 = 0$$

получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_0'}\right) - \frac{\partial F_1}{\partial \xi_0} = m_1[\xi_0'' + x_1'' + 2z_1'\psi' - 2y_1'\varphi' + \psi z_1'' - \varphi y_1'' + z_1\psi'' - y_1\varphi'']$$

и через замену букв:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G_1}{\partial \eta_0'}\right) - \frac{\partial G_1}{\partial \eta_0} &= m_1[\eta_0'' + y_1'' + 2x_1'\varphi' - 2z_1'\theta' + \varphi x_1'' - \theta z_1'' + x_1\varphi'' - z_1\theta''] \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H_1}{\partial \zeta_0'}\right) - \frac{\partial H_1}{\partial \zeta_0} &= m_1[\zeta_0'' + z_1'' + 2y_1'\theta' - 2x_1'\psi' + \theta y_1'' - \psi x_1'' + y_1\theta'' - x_1\psi''] \end{aligned} \qquad (18)$$

Совершенно подобные же выражения получим для масс $m_2, m_3, \ldots, m_n$. Придав сумму всех этих выражений к формуле (18), полу-

чим то, что доставляет в левую часть первых трех уравнений Лагранжа сумма живых сил $T_1 + T_2 + \ldots + T_n$

Положим

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 \quad + \ldots + m_n \quad &= m \\ m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n &= mX \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n &= mY \\ m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_n z_n &= mZ \end{aligned} \tag{19}$$

так что m есть сумма масс движущихся частей; X, Y, Z — координаты общего центра тяжести этих масс в момент времени t. Вспомнив, что x_1, x_2, ..., x_n — заданные функции времени t и при подробном начертании надо бы писать: $x_1 = x_1(t)$, ..., $x_n = x_n(t)$, то под X, Y, Z надо разуметь функции, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} mX(t) &= m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t) + \ldots m_n x_n(t) \\ mY(t) &= m_1 y_1(t) + m_2 y_2(t) + \ldots m_n y_n(t) \\ mZ(t) &= m_1 z_1(t) + m_2 z_2(t) + \ldots m_n z_n(t) \end{aligned} \tag{20}$$

которые будут известны для любого значения t, ибо $x_1(t)$, $y_1(t)$, ..., $z_n(t)$ суть заданные функции вида

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_{11} \sin(\omega t + \alpha_{11}) + a_{12} \sin(2\omega t + \alpha_{12}) + \ldots a_{1k} \sin(k\omega t + \alpha_{1k}) \\ x_2(t) &= a_{21} \sin(\omega t + \alpha_{21}) + a_{22} \sin(2\omega t + \alpha_{22}) + \ldots a_{2k} \sin(k\omega t + \alpha_{2k}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(t) &= a_{n1} \sin(\omega t + \alpha_{n1}) + a_{n2} \sin(2\omega t + \alpha_{n2}) + \ldots a_{nk} \sin(k\omega t + \alpha_{nk}) \end{aligned}$$

Таким образом функция $mX(t)$ будет вида

$$mX(t) = A_1 \sin(\omega t + \delta_1) + A_2 \sin(2\omega t + \delta_2) + \ldots + A_k \sin(k\omega t + \delta_k) \tag{21}$$

причем, например, коэффициент A_i составится так:

$$\begin{aligned} A_i \cos\delta_i &= m_1 a_{i1} \cos\alpha_{i1} + m_2 a_{i2} \cos\alpha_{i2} + \ldots m_n a_{in} \cos\alpha_{in} = Q_i \\ A_i \sin\delta_i &= m_1 a_{i1} \sin\alpha_{i1} + m_2 a_{i2} \sin\alpha_{i2} + \ldots m_n a_{in} \sin\alpha_{in} = S_i \end{aligned} \tag{22}$$

тогда будет

$$\begin{aligned} A_i &= \sqrt{Q_i^2 + S_i^2} \\ \cos\delta_i &= \frac{Q_i}{A_i}; \quad \sin\delta_i = \frac{S_i}{A_i}; \quad \operatorname{tg}\delta_i = \frac{S_i}{Q_i} \end{aligned} \tag{23}$$

Совершенно подобно получим для $mY(t)$ и $mZ(t)$ выражения вида (21)

$$\begin{aligned} mY(t) &= B_1 \sin(\omega t + \varepsilon_1) + B_2 \sin(2\omega t + \varepsilon_2) + \ldots B_k \sin(k\omega t + \varepsilon_k) \\ mZ(t) &= C_1 \sin(\omega t + \sigma_1) + C_2 \sin(2\omega t + \sigma_2) + \ldots C_k \sin(k\omega t + \sigma_k) \end{aligned}$$

Равенствами (22) и (23) амплитуда и фаза i-го члена определяются однозначно: равенство (22) дает величину A_i, равенство (23) $\operatorname{tg}\delta_i = S_i/Q_i$

доставит величину фазы, знаки же S_i и Q_i, т. е. $\sin\delta_i$ и $\cos\delta_i$ укажут ту четверть, в которой δ_i лежит.

Совершенно подобно вычисляются и прочие амплитуды и фазы для величин mY и mZ.

Сделав обозначения (19), получим левые части первых трех уравнений Лагранжа, определяющих поступательные колебания фундамента:

$$\begin{aligned}
&(M_0+m)\,\xi_0''+m[X''+2\psi' Z'-2\varphi' Y'+\psi Z''-\varphi Y''+Z\psi''-Y\varphi'']\\
&(M_0+m)\,\eta_0''+m[Y''+2\varphi' X'-2\theta' Z'+\varphi X''-\theta Z''+X\varphi''-Z\theta''] \qquad (24)\\
&(M_0+m)\,\zeta_0''+m[Z''+2\theta' Y'-2\psi' X'+\theta Y''-\psi X''+Y\theta''-X\psi']
\end{aligned}$$

§ 5. Прежде чем составлять следующую группу трех уравнений Лагранжа для вращательных колебаний, сделаем несколько замечаний по поводу выражений (24).

В уравнениях, коих левые части суть (24), величины X, Y, Z — известные периодические функции времени t с основным периодом $\tau=\frac{2\pi}{\omega}$.

Неизвестными в этих уравнениях являются величины

$$\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0;\quad \varphi,\ \psi,\ \theta$$

Отсюда видно, насколько сложны эти уравнения, хотя они и линейные, но с периодическими коэффициентами. Эти уравнения напоминают по своему виду уравнения небесной механики для возмущенного движения. Благоприятными обстоятельствами здесь являются:

а) Малость масс m_1, m_1, ..., m_n и даже их суммы m по сравнению с массою M_0, так что m составляет около $\frac{1}{50}-\frac{1}{100}$ от M_0.

б) Малость величин φ, ψ, θ по сравнению с 1 в любой момент времени t, вследствие чего такие члены, как $\varphi Y''$, $\psi Z''$, $\varphi X''$ и проч., малы по сравнению с членами X'', Y'', Z'', ибо, как указано выше, φ, ψ, θ — порядка $\frac{1}{500}-\frac{1}{1000}$, следовательно, в каждой скобке третий и четвертый члены могут быть отброшены как весьма малые по сравнению с первым.

в) Как уже сказано, X, Y, Z являются периодическими функциями от t, причем аргумент основного члена вида $(\omega t+\delta)$, поэтому X', Y', Z' содержат множитель ω, члены же X'', Y'', Z'' содержат множитель ω^2, величины φ, ψ, θ, как ниже будет показано, будут также периодическими функциями времени t, причем в них основной член будет вида $\varepsilon\sin(pt+\beta)$, где p составляет около $\frac{1}{10}\omega\sim\frac{1}{2}\omega$, так что такие члены, как $\varphi' Y'$, $\psi' Z'$ и т. п., будут содержать множитель $\varepsilon\times p\times\omega$, а так как ε около $\frac{1}{500}$, то даже при $p=\frac{1}{2}\omega$ эти члены составят около $\frac{1}{1000}$ от членов X'', Y'', Z'', а при $p=\frac{1}{10}\omega$ — около $\frac{1}{5000}$.

Наконец, члены $\varphi'' X$, $\psi'' X$ и проч. будут содержать множитель εp^2, т. е. около $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{500} \omega^2$ при $p = \frac{1}{2} \omega$ и около $\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{500} \omega^2$ при $p = \frac{1}{10} \omega$; члены же X'', Y'', Z'' будут содержать множитель ω^2 и будут приблизительно $\omega^2 X$, $\omega^2 Y$, $\omega^2 Z$, поэтому и членами $\varphi'' X$, $\psi'' Y$ можно пренебречь по сравнению с X'', Y'', Z''. Тогда левые части уравнений будут

$$\begin{aligned} &(M_0 + m)\,\xi_0'' + mX'' \\ &(M_0 + m)\,\eta_0'' + mY'' \\ &(M_0 + m)\,\xi_0'' + mZ'' \end{aligned} \tag{25}$$

Мы увидим, что правые части этих трех уравнений будут

$$-\lambda_1 \xi_0, \quad -\lambda_2 \eta_0, \quad -\lambda_3 \zeta_0$$

причем λ_1, λ_2, λ_3 — некоторые постоянные, так что уравнения движения будут вида

$$\begin{aligned} (M_0 + m)\,\xi_0'' + \lambda_1 \xi_0 &= -mX'' \\ (M_0 + m)\,\eta_0'' + \lambda_2 \eta_0 &= -mY'' \\ (M_0 + m)\,\zeta_0'' + \lambda_3 \zeta_0 &= -mZ'' \end{aligned} \tag{26}$$

из которых видно, что поступательные колебания ξ_0, η_0, ζ_0 вызываются силами инерции, происходящими от движения центров тяжести движущихся частей машины, причем совокупность всех масс этих частей можно заменить одною массою, равною их сумме, расположенной в общем их центре тяжести, координаты которого в момент времени t суть $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$.

Здесь необходимо помнить, что всякое движение любого тела можно заменить поступательным движением, таким, каким обладает центр тяжести этого тела, если вообразить, что в нем сосредоточена масса всего тела и к ней приложен главный вектор всех сил, действующих на тело, и вращательным движением около его центра тяжести.

Это замечание надо иметь в виду при учете, например, движения шатунов.

Во все эти подробности необходимо было войти, чтобы дать оценку относительной величины тех членов, которые по их „малости“ отброшены в дифференциальных уравнениях движения; без такой оценки слово „малый“ не имеет определенного смысла.

Однако здесь надо иметь в виду, что не всегда при отбрасывании „малого“ члена в дифференциальном уравнении исчезает малый же член того же порядка и в интеграле этого уравнения: этого может и не быть.[1]

---

[1] См. пример движения сферического маятника в § 82 моих „Лекций о приближенных вычислениях“.* Собр. тр., т. III, ч. 1, 1949, стр. 333—342, см. также в настоящем томе статью „О движении сферического маятника“, стр. 299. (*Ред.*).

Такой случай может практически представиться, если в числе движущихся частей машины есть такие, движение которых замедленно так, что для них частота основного члена не есть ω, а, например, $\frac{l\omega}{k}$, где l и k — целые числа. Такой случай может представиться для турбин или дизелей с зубчатой передачей; останавливаться на нем не будем.

§ 6. Перейдем теперь к составлению остальных трех уравнений, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= \Phi \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \psi'} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= \Psi \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= \Theta \end{aligned} \qquad (27)$$

которыми определяются вращательные колебания фундамента.

Для этого будем поступать совершенно подобно предыдущему, т. е. возьмем сперва член T_0, который доставит в левой части требуемых уравнений выражения

$$A\varphi'', \quad B\psi'', \quad C\theta''$$

где A, B, C — главные моменты инерции массы M_0.

Затем берем член

$$2F_1 = \int_{m_1} \xi_1'^2\, dm_1 = \int_{m_1} [\xi_0' + x_1' + z_1\psi - y_1'\varphi + (z_1' + \gamma)\psi' - (y_1 + \beta)\varphi']^2\, dm_1$$

и составляем выражение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_1}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial F_1}{\partial \varphi}$$

Имеем

$$\frac{\partial F_1}{\partial \varphi'} = -\int_{m_1} [\xi_0' + x_1' + z_1'\psi - y_1'\varphi + (z_1 + \gamma)\psi' - (y_1 + \beta)\varphi'](y_1 + \beta)\, dm_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_1}{\partial \varphi'}\right) = -\int_{m_1} [\xi_0'' + x_1'' + 2z_1'\psi' - 2y_1'\varphi' + z_1''\psi - y_1''\varphi +$$

$$+ (z_1 + \gamma)\psi'' - (y_1 + \beta)\varphi''](y_1 + \beta)\, dm_1 -$$

$$- \int_{m_1} [\xi_0' + x_1' + z_1'\psi - y_1'\varphi + (z_1 + \gamma)\psi' - (y_1 + \beta)\varphi']y_1'\, dm_1$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \varphi} = +\int_{m_1} [\xi_0' + x_1' + z_1'\psi - y_1'\varphi + (z_1 + \gamma)\psi' - (y_1 + \rho)\varphi']y_1'\, dm_1$$

Таким образом будет

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_1}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} = -\int_{m_1} [\xi_0'' + x_1'' + 2z_1'\psi' - 2y_1'\varphi' + z_1''\psi - y_1'' + (z_1 + \gamma)\psi'' - (y_1 + \beta)\varphi''](y_1 + \beta)\, dm_1 =$$

$$= -m_1[\xi_0'' + x_1'' + 2z_1'\psi' - 2y_1'\varphi' + z_1''\psi - y_1''\varphi]y_1 + \varphi'' \int_{m_1} (y_1 + \beta)^2\, dm_1 - \psi'' \int_{m_1} (z_1 + \gamma)(y_1 + \beta)\, dm_1$$

Совершенно так же будет

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G_1}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial G_1}{\partial \varphi} = m_1(\eta_0'' + y_1'' + 2x_1'\varphi' - 2z_1'\theta' + x_1''\varphi - z_1''\theta)x_1 + \varphi'' \int_{m_1} (x_1 + \alpha)^2\, dm_1 - \theta'' \int_{m_1} (z_1 + \gamma)(x_1 + \alpha)\, dm_1$$

Величина H_1 букв φ' и φ не содержит, поэтому будет

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H_1}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} = 0$$

Эти три выражения надо сложить, чтобы получить

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial \varphi}$$

последние члены при сложении дадут

$$\int_{m_1} [(y_1 + \beta)^2 + (x_1 + \alpha)^2]\, dm_1 = m_1(x_1^2 + y_1^2) + \int_{m_1} (\alpha^2 + \beta^2)\, dm_1 = I_{1,z}$$

т. е. момент инерции массы m_1 относительно оси $G_0 z$.
Выражения же

$$\int_{m_1} (z_1 + \gamma)(y_1 + \beta)\, dm_1 = m_1 z_1 y_1 + \int_{m_1} \gamma\beta\, dm_1 = I_{1,yz}$$

$$\int_{m_1} (z_1 + \gamma)(x_1 + \alpha)\, dm_1 = m_1 x_1 z_1 + \int_{m_1} \alpha\gamma\, dm_1 = I_{1,xz}$$

представляют центробежные моменты для той же оси.

Таким образом получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \varphi_1'}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} = m_1\{[\eta_0'' + y_1'' + 2x_1'\varphi' - 2z_1'\theta' + x_1''\varphi - z_1''\theta]x_1 - [\xi_0'' + x_1'' + 2z_1'\psi' - 2y_1'\varphi' + z_1''\psi - y_1'\varphi]y_1\} + I_{1,z}\varphi'' - I_{1,zy}\psi'' - I_{1,zx}\theta''$$

Заметим здесь же механическое значение входящих в эту формулу величин: члены η_0'' и ξ_0'' представляют проекции абсолютного ускорения точки G_0, члены y_1' и x_1'' — проекции относительного ускорения массы m_1, члены $(2x_1'\varphi' - 2z_1'\theta')$ и $(2\psi' z_1' - 2\varphi' y_1')$ — проекции поворотного, или кориолисова, ускорения, члены $(x_1''\varphi - z_1''\theta), (z_1''\varphi - y_1''\varphi)$ — проекции переносного ускорения. Каждое из этих ускорений, будучи умножено на массу, представляет соответствующую силу, разность, стоящая в больших скобках, — момент этих сил относительно оси $G_0 z$.

Члены, содержащие множители φ, θ, ψ, φ', θ', ψ', представляют приближенные выражения косинусов углов, находящихся в таблице [формула (4)], и их производные. На основании вышеуказанного механического значения все эти приближенные выражения могут быть заменены точными, выводимыми в курсах механики, в главе об относительном движении, но нет надобности этого делать, ибо все эти члены по их малости по сравнению с y_1'' и x_1'' могут быть отброшены.

Заменяя значок 1 через 2, 3, ..., n, придав сумму полученных выражений к первому и присовокупив $A\varphi''$, получим выражение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi}$$

представляющее левую часть уравнения Лагранжа, относящегося к переменной φ.

Ниже будет показано, что в правой части должны стоять члены

$$-\lambda_4\varphi, \quad -\lambda_5\psi, \quad -\lambda_6\theta$$

Отбрасывая все „малые“ члены в левых частях уравнений Лагранжа, мы для аналогии с уравнениями (26) удержим члены, содержащие множители φ'', ψ'', θ'' при моментах инерции I_z, I_y, I_x.

Обозначив эти члены так:

$$\begin{aligned} I_{1,z} + I_{2,z} + \ldots + I_{n,z} &= a \\ I_{1,y} + I_{2,y} + \ldots + I_{n,y} &= b \\ I_{1,x} + I_{2,x} + \ldots + I_{n,x} &= c \end{aligned}$$

получим уравнения

$$\begin{aligned} (A+a)\varphi'' + \lambda_4\varphi + \sum m_i(y_i'' x_i - x_i'' y_i) &= 0 \\ (B+b)\psi'' + \lambda_5\psi + \sum m_i(x_i'' z_i - z_i'' x_i) &= 0 \\ (C+c)\theta'' + \lambda_6\theta + \sum m_i(z_i'' y_i - y_i'' z_i) &= 0 \end{aligned} \qquad (28)$$

Эти уравнения суть уравнения моментов относительно соответствующих осей.

§ 7. Для интегрирования составленных уравнений возьмем сперва уравнения (26), разделим их на $M_0 + m$ и положим

$$\frac{\lambda_1}{M_0+m}=p_1^2;\quad \frac{\lambda_2}{M_0+m}=p_2^2;\quad \frac{\lambda_3}{M_0+m}=p_3^2$$

На основании формулы (21) и двух ей аналогичных имеем:

$$-mX''=m\omega^2[A_1\sin(\omega t+\delta_1)+4A_2\sin(2\omega t+\delta_2)+$$
$$+9A_3\sin(3\omega t+\delta_3)+\ldots]=m\omega^2\sum k^2A_k\sin(k\omega t+\delta_k)$$

Точно так же будет

$$-mY''=m\omega^2\sum k^2B_k\sin(k\omega t+\varepsilon_k)$$
$$-mZ''=m\omega^2\sum k^2C_k\sin(k\omega t+\sigma_k)$$

так что уравнения (26) будут

$$\left.\begin{aligned}\xi_0''+p_1^2\xi_0&=\frac{m\omega^2}{M_0+m}\sum k^2A_k\sin(k\omega t+\delta_k)\\ \eta_0''+p_2^2\eta_0&=\frac{m\omega^2}{M_0+m}\sum k^2B_k\sin(k\omega t+\varepsilon_k)\\ \zeta_0''+p_3^2\zeta_0&=\frac{m\omega^2}{M_0+m}\sum k^2C_k\sin(k\omega t+\tau_k)\end{aligned}\right\}\qquad(29)$$

Все эти уравнения имеют одинаковый вид, и достаточно рассмотреть одно из них, например третье, чтобы полученное для него решение применить и к остальным уравнениям.

Общий интеграл этого уравнения будет вида

$$\zeta_0=D\cos(p_3t+\delta)-\frac{m\omega^2}{M_0+m}\sum\frac{k^2C_k}{k^2\omega^2-p_3^2}\sin(k\omega t+\tau_k)$$

Желательно, чтобы ζ_0 было по абсолютной величине возможно меньше. Для этого, подбирая жесткость подушек под фундамент, примем p_3^2 так, чтобы оно было возможно меньше по сравнению с ω^2, тогда p_3^2 будет мало по сравнению с $k^2\omega^2$.

Очевидно, имеем

$$\frac{k^2C_k}{k^2\omega^2-p_3^2}=\frac{1}{\omega^2}\cdot\frac{C_k}{1-\frac{p_3^2}{k^2\omega^2}}$$

так что общий интеграл будет

$$\zeta_0=D\cos(p_3t+\delta)-\frac{m}{M_0+m}\sum\frac{C_k}{1-\frac{p_3^2}{k^2\omega^2}}\sin(k\omega t+\tau_k)\qquad(30)$$

где D и δ — произвольные постоянные, которые следовало бы определить по начальным условиям, но практически в этом нет надобности, ибо, составляя уравнения (29), мы не приняли во внимание сопротивлений движению, которые всегда есть. Вследствие этого член

$D\cos(p_3 t + \delta)$, представляющий свободные колебания, погашается, второй же член, представляющий вынужденные колебания, остается практически без изменения.

Таким образом через небольшой промежуток времени после пуска машины установится колебание

$$\zeta_0 = \frac{m}{M_0 + m} \sum \frac{C_k}{1 - \frac{p_3^2}{k^2\omega^2}} \sin(k\omega t + \tau_k)$$

Если отношение $\frac{p_3^2}{k^2\omega^2}$ „мало“ по сравнению с 1, то можно принять

$$\frac{1}{1 - \frac{p_3^2}{k^2\omega^2}} \approx 1$$

и мы получим

$$\zeta_0 = \frac{m}{M_0 + m} \sum C_k \sin(k\omega t + \tau_k) = \frac{m}{M_0 + m} Z \qquad (31)$$

Совершенно так же будет

$$\eta_0 = \frac{m}{M_0 + m} Y; \quad \xi_0 = \frac{m}{M_0 + m} X$$

т. е. амплитуда колебаний фундамента будет относиться к амплитуде колебаний центра тяжести движущихся масс, как $\frac{m}{M_0 + m}$, а так как m „мало“ по сравнению с M_0, то это отношение приблизительно равно $m : M_0$.

Необходимо пояснить значение слова „мало“ для отношений

$$\frac{p_3^2}{k^2\omega^2}, \quad \frac{p_2^2}{k^2\omega^2}, \quad \frac{p_1^2}{k^2\omega^2}$$

или, что то же, для отношений

$$\frac{p_3}{k\omega}, \quad \frac{p_2}{k\omega}, \quad \frac{p_1}{k\omega}$$

Всего проще сделать это на примере для одного из них, и все, о нем сказанное, будет относиться и к остальным.

Итак, пусть будет

$$\frac{p_3}{\omega} = \frac{1}{10}$$

тогда значения дроби $\frac{p_3^2}{k^2\omega^2}$ будут при последовательных значениях k:

$$\frac{1}{100}, \frac{1}{400}, \frac{1}{900}, \frac{1}{1600}, \frac{1}{2500} \text{ и т. д.}$$

и дробь $\frac{1}{1-\frac{p_3^2}{k^2\omega^2}}$ будет

$$\frac{100}{99},\ \frac{400}{399},\ \frac{900}{899},\ \frac{1600}{1599},\ \frac{2500}{2499}$$

отличаясь от 1 на

$$\frac{1}{99},\ \frac{1}{399},\ \frac{1}{899},\ \frac{1}{1599},\ \frac{1}{2499}$$

Эти числа показывают, что практически отношение $\frac{p_3}{\omega}=\frac{1}{10}$ является в данном вопросе „малым", но такое отношение трудно достижимо. Возьмем $\frac{p_3}{\omega}=\frac{1}{2}$, так что значения дроби $\frac{p_3^2}{k^2\omega^2}$ будут

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{36},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{100}$$

и величина $\frac{1}{1-\frac{p_3^2}{k^2\omega^2}}$ составит

$$\frac{4}{3},\ \frac{16}{15},\ \frac{36}{35},\ \frac{64}{63},\ \frac{100}{99},\ \text{и т. д.}$$

т. е. 1.33, 1.07, 1.03, 1.015, 1.01, . . . , и т. д.

Следовательно, при $\frac{p_3}{\omega}=\frac{1}{2}$ в формуле (30) будет при первом члене стоять множитель 1.33; при втором — 1.07 и т. д., или, кругло говоря, перед всею суммою множитель 1.33, т. е. будет

$$\zeta_0 = 1.33\,\frac{m}{M_0+m}Z \tag{32}$$

вместо

$$\zeta_0 = \frac{m}{M_0+m}Z \tag{33}$$

Если довольствоваться таким умерением амплитуды вибрации, то и значение $\frac{p_3}{\omega}=\frac{1}{2}$ может почитаться „малым" и является допустимым.

Формула (31) показывает, что уменьшение вибрации фундамента достигается, главным образом, за счет отношения

$$\frac{m}{M_0+m}=\frac{\frac{m}{M_0}}{1+\frac{m}{M_0}}$$

и если нет ограничений для веса фундамента, то выбором отношения $\frac{m}{M_0}=\frac{q}{Q_0}$, где q — вес движущихся частей и Q — вес фундамента, можно достигнуть любого уменьшения поступательных, т. е. направленных по осям координат, колебаний фундамента, ибо ясно, что все сказан-

ное о вертикальных колебаниях ζ_0 относится и к горизонтальным, составляющие которых η_0 и ξ_0; надо только распорядиться так, чтобы отношения $\frac{p_1}{\omega}$ и $\frac{p_2}{\omega}$ были не больше отношения $\frac{p_3}{\omega}$, для которого можно довольствоваться значением $\frac{1}{2}$.

Очевидно, что отношение $\frac{p_3}{\omega}$ равно отношению $\frac{\tau}{\tau_3}$ периодов: τ — обращения машины и τ_3 — периода свободных колебаний фундамента на упругих пружинах или подушках его, надо, чтобы это отношение было „малое", причем „1/2" практически достаточно.

§ 8. Перейдем к рассмотрению вращательных колебаний, определяемых уравнениями (28)

$$\begin{aligned}(A+a)\varphi'' + \lambda_4 \varphi \sum m_k (y_k'' x_k - x_k'' y_k) &= 0\\ (B+b)\psi'' + \lambda_5 \psi \sum m_k (x_k'' z_k - z_k'' x_k) &= 0\\ (C+c)\theta'' + \lambda_6 \theta \sum m_k (z_k'' y_k - y_k'' z_k) &= 0\end{aligned}$$

Как видно, и эти уравнения одинакового вида подобно уравнениям (26).

Мы видели, что

$$x_k = \sum a_k \sin(k\omega t + \alpha_k); \quad y_k = \sum b_k \sin(k\omega t + \beta_k)$$

$$z_k = \sum C_k \sin(k\omega t + \gamma_k)$$

Суммы

$$\sum m_k (y_k'' x_k - x_k'' y_k), \ \sum m_k (x_k'' z_k - z_k'' x_k),$$

$$\sum m_k (z_k'' y_k - y_k'' z_k) \tag{34}$$

будут представляться выражениями вида

$$\omega^2 \sum D_k \sin(k\omega t + \mu_k), \quad \omega^2 \sum E_k \sin(k\omega t + \nu_k), \quad \omega^2 \sum F_k \sin(k\omega t + \delta_k) \tag{35}$$

причем каждый из коэффициентов D_k, E_k, F_k не будет выражаться линейно через a_k, b_k, c_k, а будет выражаться линейно через произведения коэффициентов a_k, b_k, c_k, взятых попарно. Мы не будем выводить этих общих выражений, они сложны, а заметим только, что их размерность есть

$$\text{масса} \cdot (\text{длина})^2$$

т. е. размерность момента инерции; поэтому, обозначая через $m\rho_1^2$, $m\rho_2^2$, $m\rho_3^2$ суммы моментов инерции всех движущихся масс относительно осей $G_0 x$, $G_0 y$, $G_0 z$, представим суммы выражений (35) так:

$$\begin{aligned}&\omega^2 m\rho_1^2 \sum D_k' \sin(k\omega t + \mu_k)\\ &\omega^2 m\rho_2^2 \sum E_k' \sin(k\omega t + \nu_k)\\ &\omega^2 m\rho_3^2 \sum F_k' \sin(k\omega t + \delta_k)\end{aligned} \tag{36}$$

причем величины

$$D_k' = \frac{D_k}{m\rho_1^2}; \quad E_k' = \frac{E_k}{m\rho_2^2}; \quad F_k' = \frac{F_k}{m\rho_3^2}$$

будут безразмерные отвлеченные числа. Но в § 6 величины $m\rho_1^2$, $m\rho_2^2$, $m\rho_3^2$ уже обозначены соответственно через a, b, c; поэтому, разделив уравнения (28) соответственно на $A+a$, $B+b$, $C+c$ и положив

$$\frac{\lambda_4}{A+a} = p_4^2; \quad \frac{\lambda_5}{B+b} = p_5^2; \quad \frac{\lambda_6}{C+c} = p_6^2 \tag{37}$$

получим уравнения

$$\begin{aligned}
\varphi'' + p_4^2\varphi &= \frac{a}{A+a}\omega^2 \sum D_k' \sin(k\omega t + \mu_k) \\
\psi'' + p_5^2\psi &= \frac{b}{B+b}\omega^2 \sum E_k' \sin(k\omega t + \nu_k) \\
\theta'' + p_6^2\theta &= \frac{c}{C+c}\omega^2 \sum F_k' \sin(k\omega t + \delta_k)
\end{aligned} \tag{38}$$

т. е. совершенно того же вида, как и уравнения (29), только вместо массы M_0 стоят ее главные моменты инерции и вместо m — суммы масс $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ — стоят a, b, c — суммы их моментов инерции.

Таким образом уравнения (38) имеют полную аналогию с уравнениями (29), как и должно быть, ибо при вращательном движении моменты инерции играют ту же роль, как массы при движении поступательном. Следовательно, все сказанное об уравнениях (29) приложимо и здесь, и когда величины отношений $\frac{p_4}{\omega}$, $\frac{p_5}{\omega}$, $\frac{p_6}{\omega}$ достаточно малы, то интегралы уравнений (38), после того как свободные колебания погасятся, будут

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{a}{A+a} \sum D_k' \sin(k\omega t + \mu_k) \\
\psi &= \frac{b}{B+b} \sum E_k' \sin(k\omega t + \nu_k) \\
\theta &= \frac{c}{C+c} \sum F_k' \sin(k\omega t + \delta_k)
\end{aligned} \tag{39}$$

§ 9. Остается показать, каким образом распорядиться так, чтобы в правых частях уравнений Лагранжа стояли величины $-\lambda_1\xi_0$, $-\lambda_2\eta_0$, $-\lambda_3\zeta_0$; $-\lambda_4\varphi$, $-\lambda_5\psi$; $-\lambda_6\theta$, которые и переходят затем в правые части в уравнениях (29) и (38).

Недавно в Москве при устройстве фундаментов под разные механизмы в Институте физических проблем проложили между основанием, на котором ставится фундамент, и самим фундаментом резиновые подушки, по схеме, представленной на фиг. 2. При таком расположении подушек, которые все между собою одинаковы, всякая слагающая поступательного перемещения дает силу, этой слагающей пропорциональную и параллельную, всякое весьма малое вращательное

перемещение дает момент, ему пропорциональный, около той же оси. Таким образом потенциальная энергия U будет вида

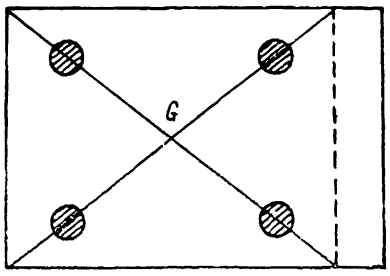
$$-U = Qh + \frac{1}{2}\lambda_1 \xi_0^2 + \frac{1}{2}\lambda_2 \eta_0^2 + \frac{1}{2}\lambda_3 \zeta_0^2 + \\ + \frac{1}{2}\lambda_4 \varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda_5 \psi^2 + \frac{1}{2}\lambda_6 \theta^2$$

Значит, элементарная работа δU будет

$$\delta U = -\lambda_1 \xi_0 \delta\xi_0 - \lambda_2 \eta_0 \delta\eta_0 - \lambda_3 \zeta_0 \delta\zeta_0 - \\ - \lambda_4 \varphi\delta\varphi - \lambda_5 \psi\delta\psi - \lambda_6 \theta\delta\theta \qquad (40)$$

что и требуется для того, чтобы приведенные выше расчеты колебаний фундамента имели место.

Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ зависят от размеров, упругих свойств и расположения подушек относительно вертикальной оси $G_0 z$ — это расположение должно быть симметричное.



Фиг. 2.

Кроме одинаковых между собою подушек, показанных на фиг. 2, может быть добавлена при надобности еще центральная подушка на самой оси $G_0 z$.

§ 10. Формулами (31) и (39) расчет вибрации приводится к весьма простым выкладкам, причем не требуется предварительного вычисления сил инерции движущихся частей машины.

В самом деле, расчет вибрации фундамента по координатным осям приводится к вычислению величин $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ по формулам (20), и нет надобности приводить эти величины к виду (21), применяя формулы (22), нет и надобности дважды дифференцировать эти формулы.

Даже при аналитическом решении вопроса это вносит существенное упрощение в расчеты, которое еще значительнее при расчете графическом, ибо не надо будет делать довольно сложного построения ускорений.

Весьма существенное упрощение может быть внесено и в формулы, которыми определяется вращательное движение. В самом деле, возмущающие моменты в уравнениях (28) представлены количествами

$$\sum m_i (y_i'' x_i - x_i'' y_i), \quad \sum m_i (x_i'' z_i - z_i'' x_i), \quad \sum m_i (z_i'' y_i - y_i'' z_i) \qquad (41)$$

которые в таком виде при графическом решении требовали бы построения ускорений; но если эти количества написать в виде

$$\frac{d}{dt}\sum m_i (y_i' x_i - x_i' y_i), \quad \frac{d}{dt}\sum m_i (x_i' z_i - z_i' x_i), \quad \frac{d}{dt}\sum m_i (z_i' y_i - y_i' z_i) \qquad (42)$$

то потребуется лишь построение скоростей, что совершается гораздо проще, нежели построение ускорений, в чем можно убедиться, взяв для примера шатун.

§ 11. На основании дифференциальных уравнений (26) и (28), не производя их интегрирования, легко перейти к общим условиям уравновешивания машин, стоит только выразить, что значения

$$\begin{gathered}\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0 \\ \varphi = \psi = \theta = 0\end{gathered} \tag{43}$$

являются решениями уравнений (26) и (28). В самом деле, уравнения (26) дают условия

$$mX'' = 0; \quad mY'' = 0, \quad mZ'' = 0 \tag{44}$$

т. е.

$$\sum m_i x_i'' = 0; \quad \sum m_i y_i'' = 0; \quad \sum m_i z_i'' = 0 \tag{44'}$$

которые словами выразятся так: *в уравновешенной машине суммы проекций сил инерции движущихся частей машины, предполагая, что массы их сосредоточены в их центрах тяжести, должны равняться нулю для каждой оси в отдельности.*

Но вместо условий (44') можно написать

$$\sum m_i x_i' = C_1; \quad \sum m_i y_i' = C_2; \quad \sum m_i z_i' = C_3 \tag{45}$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные произвольные; тогда это условие выразится словами так: *в уравновешенной машине суммы проекций количеств движения должны оставаться во все время движения постоянными для каждой оси в отдельности.*

Наконец, вместо условий (45) можно брать

$$\begin{gathered}\sum mx_i = mX = C_1 t + D_1; \quad \sum my_i = mY = C_2 t + D_2; \\ \sum mz_i = mZ = C_3 t + D_3\end{gathered} \tag{46}$$

таким образом, в уравновешенной машине центр тяжести движущихся частей покоится или движется равномерно и прямолинейно.

Само собою разумеется, что эти требования не являются независимыми, — они представляют различную формулировку одного и того же требования.

Уравнения (28) вращательных колебаний дают условия

$$\begin{gathered}\sum m_i (y_i'' x_i - x_i'' y_i) = 0; \quad \sum m_i (x_i'' z_i - z_i'' x_i) = 0; \\ \sum m_i (z_i'' y_i - y_i'' z_i) = 0\end{gathered} \tag{47}$$

которые словами выражаются так: *в уравновешенной машине суммы моментов сил инерции относительно осей координат должны в любое мгновение времени равняться нулю для каждой оси в отдельности.*

Условия (48) могут быть написаны и в следующей форме:

$$\frac{d}{dt}\sum m_i(y_i' x_i - x_i' y_i) = 0; \quad \frac{d}{dt}\sum m_i(x_i' z_i - z_i' x_i) = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\sum m_i(z_i' y_i - y_i' z_i) = 0$$

откуда следует

$$\sum m_i(y_i' x_i - x_i' y_i) = C_1; \quad \sum m_i(x_i' z_i - z_i' x_i) = C_2;$$
$$\sum m_i(z_i' y_i - y_i' z_i) = C_3 \qquad (48)$$

Эти условия словами выражаются так: *в уравновешенной машине суммы моментов количеств движения относительно осей координат должны сохранять для каждой оси в отдельности постоянное значение.*

Наконец, можно обе гуппы условий выразить кратко так: *в уравновешенной машине главный вектор и главный момент количеств движения сохраняют каждый в отдельности постоянную величину и постоянное направление.*

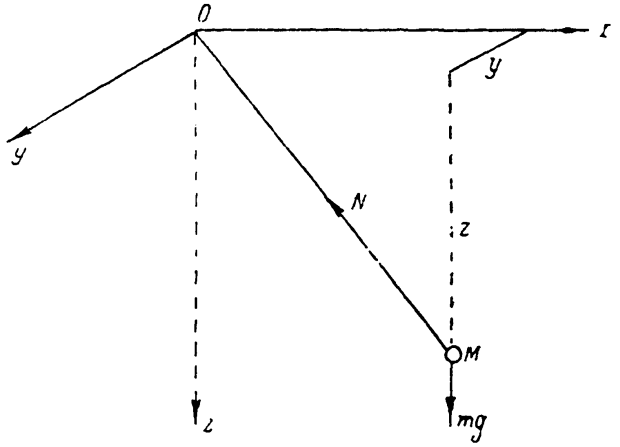
Как уже пояснено выше, расчеты и построения количеств движения много проще, нежели сил инерции, и можно сказать, что вся теория уравновешивания машин состоит в применении двух великих законов, данных 250 лет назад Ньютоном, названных им законом движения центра тяжести системы и законом площадей; но надо было 100 лет и гении Эйлера, Маклорена и Лагранжа, чтобы придать этим законам ту аналитическую формулировку, которой мы пользовались.

ДВИЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

§ 1. *Сферическим маятником* называют движущуюся под действием силы тяжести материальную точку, подвешенную на гибкой нерастяжимой нити к постоянной точке O.

Для осуществления такого маятника следует подвесить на длинной тонкой проволоке тяжелую гирю и сообщить ей какой-либо толчок, т. е. скорость, направление которой не пересекается с вертикалью точки подвеса.

Мы ограничимся случаем „малых" колебаний такого маятника, не потому чтобы эта задача имела практическое значение, а потому, что на ней наглядно выясняются некоторые приближенные способы интегрирования таких дифференциальных уравнений, к которым приводят многие технические вопросы, между прочим и вопрос о вращательном движении продолговатого снаряда в воздухе.



Фиг. 1.

§ 2. Примем точку подвеса маятника за начало координат, направив ось Oz вертикально вниз (фиг. 1). Обозначим через N натяжение нити, действующее в момент t на точку M, когда ее координаты суть xyz.

Точка находится под действием своего веса $P=mg$, где m — масса точки и g — ускорение силы тяжести и натяжения нити N; проекции этих сил на оси координат суть

силы P	$0,$	$0,$	mg
силы N	$-\frac{Nx}{l},$	$-\frac{Ny}{l},$	$-\frac{Nz}{l}$

значит, уравнения движения будут

$$mx'' = -\frac{Nx}{l} \tag{1}$$

$$my'' = -\frac{Ny}{l} \tag{2}$$

$$mz'' = -\frac{Nz}{l} + mg \tag{3}$$

и уравнение связи

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{4}$$

Положим, что начальные условия таковы: при $t = 0$ должно быть

$$\begin{aligned} (x)_0 &= a; \qquad (y)_0 = 0 \\ (x')_0 &= 0; \qquad (y')_0 = b \end{aligned} \tag{5}$$

Положим сперва, что маятник отклоняется от вертикали настолько мало, что можно пренебречь степенями выше второй отношения этого отклонения к длине l. При таком условии из уравнения (4) следует

$$z = l\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}} = l\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x^2 + y^2}{l^2} + \ldots\right) \tag{6}$$

Принимая отношения $\frac{x}{l}$ и $\frac{y}{l}$ за малые величины *первого* порядка, мы видим, что координата z отличается от постоянной величины l на малые величины *второго* порядка, поэтому естественно принять за исходное приближение

$$z = l \tag{7}$$

и ожидать, что и величины x и y, подобно тому как и z, будут отличаться от истинных своих значений также на величины второго порядка малости или даже высшего. В самом деле, на основании (7) имеем из уравнения (3)

$$N = mg \tag{8}$$

тогда, положив

$$\frac{g}{l} = n^2 \tag{9}$$

имеем уравнение

$$x'' + n^2 x = 0 \tag{1'}$$

$$y'' + n^2 y = 0 \tag{2'}$$

и, положив

$$b = nc \tag{5'}$$

получаем следующие решения, удовлетворяющие начальным условиям (5)

$$\begin{aligned} x &= a\cos nt \\ y &= c\sin nt \end{aligned} \tag{10}$$

причем по предположению величины $\frac{a}{l}$ и $\frac{c}{l}$ суть „малые“, считаемые нами за малые первого порядка.

Из уравнений (10) следует, что проекция траектории точки на плоскость xOy есть эллипс, коего уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1 \tag{11}$$

т. е. полуоси коего суть a и c. Примем $a > c$. Перейдем теперь к следующему приближению. Подставив значения (10) в уравнение (6), имеем

$$z = l\left[1 - \frac{1}{2}\frac{a^2\cos^2 nt + c^2\sin^2 nt}{l^2} + \ldots\right]$$

и, заметив, что

$$\cos^2 nt = \frac{1}{2}(1 + \cos 2nt); \quad \sin^2 nt = \frac{1}{2}(1 - \cos 2nt)$$

имеем

$$z = l\left[1 - \frac{a^2 + c^2}{4l^2} - \frac{a^2 - c^2}{4l^2}\cos 2nt\right] \tag{12}$$

Положим для краткости

$$\frac{a^2 + c^2}{4l^2} = \alpha; \quad \frac{a^2 - c^2}{4l^2} = \beta \tag{13}$$

как видно, это будут малые величины *второго* порядка, и уравнение (12) будет

$$z = l(1 - \alpha - \beta\cos 2nt) \tag{12'}$$

Подставляя эту величину в уравнение (3), имеем

$$4mn^2\beta l\cos 2nt = mg - N(1 - \alpha - \beta\cos 2nt)$$

откуда, заметив, что $n^2 l = g$, и ограничиваясь первыми степенями величин α и β, имеем

$$\begin{aligned} N &= mg(1 - \alpha - \beta\cos 2nt)^{-1} - 4mg\beta(1 - \alpha - \beta\cos 2nt)^{-1}\cos 2nt = \\ &= mg(1 + \alpha) + mg\beta\cos 2nt - 4mg\beta\cos 2nt = \\ &= mg(1 + \alpha) - 3mg\beta\cos 2nt \end{aligned} \tag{12''}$$

и уравнения (1) и (2) принимают вид

$$x'' + n^2(1+\alpha)\,x = 3n^2\beta\,x\cdot\cos 2nt \qquad (1'')$$

$$y'' + n^2(1+\alpha)\,y = 3n^2\beta\,y\cdot\cos 2nt \qquad (2'')$$

Представляется, что уравнения (1′) и (2′) отличаются от (1″) и (2″) лишь тем, что в этих последних откинуты члены, содержащие множители αx и βx, αy и βy — величины третьего порядка, или, иначе, малые величины αa и βc, второго порядка относительно a и c.

Для получения следующего приближения подставим в правые части уравнений (1″) и (2″) вместо x и y их величины (10) и мы получим

$$\begin{aligned} x'' + n^2(1+\alpha)\,x &= 3n^2\beta a\cdot\cos 2nt\cdot\cos nt \\ y'' + n^2(1+\alpha)\,y &= 3n^2\beta c\cdot\cos 2nt\cdot\sin nt \end{aligned} \qquad (14)$$

или, заменив произведения синусов и косинусов через косинусы и синусы кратных аргументов и положив $n_1^2 = n^2(1+\alpha)$, будем иметь

$$x'' + n_1^2\,x = \frac{3}{2}n^2\beta a[\cos nt + \cos 3nt]$$

$$y'' + n_1^2\,y = \frac{3}{2}n^2\beta c[\sin 3nt - \sin nt]$$

Общие интегралы этих уравнений суть

$$x = C_1\cos n_1 t + C_2\sin n_1 t + \frac{3}{2}\frac{\beta an^2}{n_1^2-n^2}\cos nt - \frac{3}{2}\frac{\beta an^2}{9n^2-n_1^2}\cos 3nt$$

$$y = C_3\cos n_1 t + C_4\sin n_1 t - \frac{3}{2}\frac{\beta cn^2}{n_1^2-n^2}\sin nt + \frac{3}{2}\frac{\beta cn^2}{9n^2-n_1^2}\sin 3nt$$

Начальные условия дают

$$a = C_1 + \frac{3}{2}\frac{\beta an^2}{n_1^2-n^2} - \frac{3}{2}\frac{\beta an^2}{9n^2-n_1^2}$$

$$0 = C_2$$

$$0 = C_3$$

$$nc = n_1 C_4 - \frac{3}{2}\frac{\beta cn^2}{n_1^2-n^2}\cdot n + \frac{9}{2}\frac{\beta cn^2}{9n^2-n_1^2}\cdot n$$

Но величина

$$\beta\frac{n^2}{n_1^2-n^2} = \beta\frac{n^2}{\alpha n^2} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}$$

есть величина *конечная*, величины же

$$\frac{\beta n^2}{9n^2-n_1^2} = \frac{\beta n^2}{9n^2-n^2-n^2\alpha} \approx \frac{1}{8}\beta$$

Положив

$$\frac{3}{2}\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}=k$$

получим

$$C_1=a(1-k)+\frac{3}{16}\beta a; \quad C_2=0$$

$$C_4=c(1-k)-\frac{9}{16}\beta c; \quad C_3=0$$

таким образом будет

$$\begin{aligned} x&=(1-k)\,a\cos n_1 t+ak\cos nt+\text{члены высшего порядка}\\ y&=(1+k)\,c\sin n_1 t-ck\sin nt\ +\text{члены высшего порядка}\end{aligned} \tag{15}$$

Отсюда видно, что полученные значения отличаются от исходного приближения

$$x=a\cos nt; \qquad y=c\sin nt \tag{10}$$

на члены того же порядка, как сами эти величины, т. е. на члены *первого* порядка, тогда как дифференциальные уравнения (1′) и (2′) от уравнения (1″) и (2″) отличаются на члены *третьего* порядка. Это произошло потому, что при получении частного решения уравнений (1″) и (2″) вошел *малый делитель* $n_1^2-n^2=n^2\alpha$. На это обстоятельство надо обращать внимание, применяя методу последовательных приближений, и иметь всегда в виду, что при отбрасывании в самих дифференциальных уравнениях членов высших порядков в их интегралах могут оказаться отброшенными члены *низшего* порядка, которые надлежало бы удержать.

§ 3. Движение, представляемое уравнением (10), существенно разнится от движения, представляемого уравнением (15): в то время как в первом проекция траектории точки есть неподвижный эллипс, во втором случае эта проекция представляет спираль, состоящую из бесчисленного множества завитков, каждый из которых близок к эллипсу, причем этот эллипс поворачивался бы в своей плоскости равномерно на некоторый угол ψ за время $\tau=\frac{2\pi}{n_1}$ описания этого эллипса. Чтобы определить этот угол, стоит только найти два последовательных положения „вершины“ завитков спирали, например начального с координатами $x_0=a$ и $y_0=0$ и первого с координатами x_1 и y_1, при которых величина

$$x_1x'+y_1y'=0 \tag{16}$$

т. е. направление радиуса перпендикулярно касательной и x близко к a, момент же прохождения через эту вершину близок к τ.

Пусть будет

$$nt_1=2\pi+\sigma$$

где σ — малая величина того же порядка, как α и β, тогда, заметив, что

$$n_1 = n\sqrt{1+\alpha} = n + \frac{1}{2}n\alpha + \ldots$$

будем иметь, отбросив члены высших порядков,

$$n_1 t_1 = 2\pi + \pi\alpha + \sigma = 2\pi + \varphi$$

причем положено

$$\varphi = \pi\alpha + \sigma$$

Тогда будет

$$\cos n_1 t_1 = \cos nt_1 = 1; \quad \sin n_1 t_1 = \varphi; \quad \sin nt_1 = \sigma \tag{17}$$

Затем имеем

$$x' = -(1-k)an_1 \sin n_1 t_1 - nak \sin nt_1$$
$$y' = \quad (1+k)cn_1 \cos n_1 t_1 - cnk \cos nt_1$$

и уравнение (16) на основании значений (17) по приведении и отбрасывании членов высших порядков будет

$$-a^2[\sigma + (1-k)\pi\alpha] + c^2[\sigma + (1+k)\pi\alpha] = 0$$

из него следует

$$\sigma = \frac{\pi}{2}\alpha = \frac{\pi}{8}\frac{a^2+c^2}{l^2}$$

Таким образом прохождение через ближайшую к начальной вершину завитка происходит в момент t_1, определяемый уравнением

$$nt_1 = 2\pi + \frac{\pi}{2}\alpha$$

соответствующие координаты вершины будут

$$x_1 = a; \qquad y_1 = c\left[(1+k)\pi + \frac{\pi}{2}\right]\alpha = \frac{3}{4}\pi\frac{a^2 c}{l^2}$$

и, значит, направление радиуса, т. е. угол поворота эллипса за время полного оборота маятника, будет

$$\psi = \frac{y_1}{x_1} = \frac{3}{4}\pi\frac{ac}{l^2} \tag{18}$$

Запись подобного движения см. в „Лекциях о приближенных вычислениях“.[1]

Угловая скорость этого поворота есть

$$\omega = \frac{\psi}{\tau} = \frac{3}{4}\pi \cdot \frac{ac}{l^2} \cdot \frac{n}{2\pi} = \frac{3}{8}\frac{ac}{l^2}n \simeq \frac{3}{8}\frac{ac}{l^2}n_1 \tag{19}$$

---

[1] Собр. тр. акад. А. Н. Крылова, т. III, ч. 1, 1949, стр. 341. (*Ред.*).

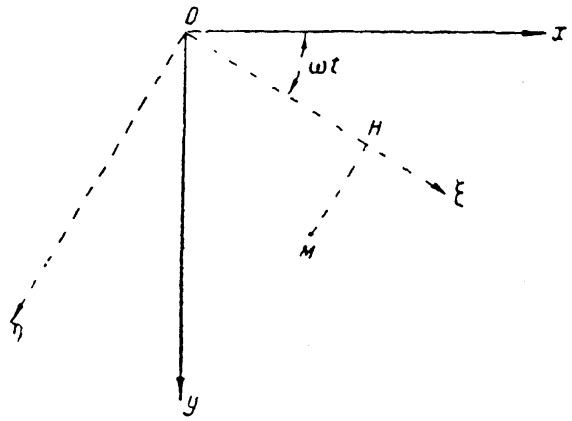
§ 4. Отнесем теперь движение маятника к координатной системе, равномерно вращающейся около оси Oz с угловой скоростью ω. Ясно, что координата z останется без перемены, координаты же x и y заменяются через ξ и η (фиг. 2), причем

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t \\ y &= \eta \cos \omega t + \xi \sin \omega t \end{aligned} \tag{20}$$

Значит, будет

$$\begin{aligned} x'' &= (\xi'' - 2\omega\eta' - \omega^2 \xi) \cos \omega t - (\eta'' + 2\omega\xi' - \omega^2 \eta) \sin \omega t \\ y'' &= (\xi'' - 2\omega\eta' - \omega^2 \xi) \sin \omega t + (\eta'' + 2\omega\xi' - \omega^2 \eta) \cos \omega t \end{aligned}$$

$$z = l\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\xi^2 + \eta^2}{l^2}\right)$$



Фиг. 2.

Взяв опять для исходного приближения

$$z = l$$

получим попрежнему

$$N = mg$$

и первое уравнение движения

$$x'' + n^2 x = 0$$

по подстановке вместо x'' и x их значений будет

$$[\xi'' - 2\omega\eta' + (n^2 - \omega^2)\xi] \cos \omega t - [\eta'' + 2\omega\xi' + (n^2 - \omega^2)\eta] \sin \omega t = 0$$

Совершенно так же второе уравнение будет

$$[\eta'' + 2\omega\xi' + (n^2 - \omega^2)\eta] \cos \omega t + [\xi'' - 2\omega\eta' + (n^2 - \omega^2)\xi] \sin \omega t = 0$$

Откуда следует

$$\begin{aligned} \xi'' - 2\omega\eta' + (n^2 - \omega^2)\xi &= 0 \\ \eta'' + 2\omega\xi' + (n^2 - \omega^2)\eta &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Так как

$$\begin{aligned} x' &= (\xi' - \omega\eta) \cos \omega t - (\eta' + \omega\xi) \sin \omega t \\ y' &= (\eta' + \omega\xi) \cos \omega t + (\xi' - \omega\eta) \sin \omega t \end{aligned}$$

то начальным значениям $(x)_0 = a$; $(y')_0 = nc$; $x_0' = y_0 = 0$ соответствуют начальные значения

$$\begin{aligned} (\xi)_0 &= a; \quad \xi_0' = 0 \\ (\eta)_0 &= 0; \quad \eta_0' = nc - \omega a \end{aligned}$$

Для интегрирования уравнений (21) применяют следующий прием: положим

$$u = \xi + i\eta, \quad \text{где} \quad i^2 = -1$$

тогда будет

$$u' = \xi' + i\eta'; \quad u'' = \xi'' + i\eta''$$

Умножим второе из уравнений (21) на i и приложим к первому, тогда получим

$$(\xi'' + i\eta'') + 2\omega(i\xi' - \eta') + (n^2 - \omega^2)(\xi + i\eta) = 0$$

тогда, заметив, что $i^2 = -1$, получим

$$2\omega(i\xi' - \eta') = 2\omega(i\xi' + i^2\eta') = 2i\omega(\xi' + i\eta')$$

и предыдущее уравнение будет

$$u'' + 2i\omega u' + (n^2 - \omega^2)u = 0 \tag{22}$$

Начальные же значения будут

$$u_0 = a; \quad u_0' = (nc - \omega a)i \tag{23}$$

Характеристическое уравнение для (22) есть

$$\lambda^2 + 2i\omega\lambda + (n^2 - \omega^2) = 0$$

откуда следует

$$\lambda = -i\omega \pm \sqrt{-\omega^2 - (n^2 - \omega^2)} = -i\omega \pm ni$$

значит

$$\lambda_1 = -(n + \omega)i; \quad \lambda_2 = (n - \omega)i$$

следовательно,

$$u = \xi + i\eta = C_1 e^{-(n+\omega)it} + C_2 e^{(n-\omega)it} \tag{24}$$

Начальные условия дают для определения C_1 и C_2 уравнения

$$a = C_1 + C_2$$

$$(nc - \omega a)i = -(n + \omega)iC_1 + (n - \omega)iC_2$$

откуда следует

$$a = C_1 + C_2$$
$$c = -C_1 + C_2$$

т. е.

$$C_1 = \frac{a - c}{2}; \quad C_2 = \frac{a + c}{2} \tag{24'}$$

подставляя в уравнение (24) и заметив, что

$$e^{-(n+\omega)it} = \cos(n + \omega)t - i\sin(n + \omega)t$$
$$e^{(n-\omega)it} = \cos(n - \omega)t + i\sin(n - \omega)t$$

получим по отделении вещественной и мнимой части

$$\xi = \frac{a-c}{2}\cos(n+\omega)t + \frac{a+c}{2}\cos(n-\omega)t$$
$$\eta = -\frac{a-c}{2}\sin(n+\omega)t + \frac{a+c}{2}\sin(n-\omega)t \qquad (25)$$

Этот прием решения уравнений вида (21) следует заметить.

Из уравнений (25) на основании формулы (20) следует

$$x = \frac{a-c}{2}\cos nt + \frac{a+c}{2}\cos nt = a\cos nt$$
$$y = -\frac{a-c}{2}\sin nt + \frac{a+c}{2}\sin nt = c\sin nt$$

т. е. те же формулы (10), как и выше, для исходного приближения при всяком значении ω. Формулы же (25) можно писать так:

$$\xi = a\cos nt\cos\omega t + c\sin nt\sin\omega t$$
$$\eta = -a\cos nt\sin\omega t + c\sin nt\cos\omega t \qquad (25')$$

и геометрическое место точек (ξ, η), т. е. траектория на подвижной плоскости, как легко видеть из уравнений (25), и представляет некоторую эпициклоиду, которой элементы, т. е. радиусы направляющего и катящегося круга и положение производящей точки, предлагается определить в виде задачи.

§ 5. Мы имеем выражение

$$z = l\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\xi^2+\eta^2}{l^2}\right)$$

на основании формул (25) оно будет

$$z = l[1 - \alpha - \beta\cos 2nt],$$

т. е. то же самое, как и раньше (формула 12'), и, следовательно, попрежнему (12'')

$$N = mg(1+\alpha) - 3mg\beta\cos 2nt$$

как это, очевидно, и должно быть, ибо натяжение нити не зависит от той системы координат, к которой движение относится.

Два первые уравнения движения

$$x'' = -\frac{N}{ml}x; \quad y'' = -\frac{N}{ml}y$$

по подстановке обращаются в следующие:

$$(\xi'' - 2\omega\eta' - \omega^2\xi)\cos\omega t - (\eta'' + 2\omega\xi' - \omega^2\eta)\sin\omega t =$$
$$= -(n_1^2 - 3n^2\beta\cos 2nt)(\xi\cos\omega t - \eta\sin\omega t)$$
$$(\eta'' + 2\omega\xi'' - \omega^2\eta)\cos\omega t + (\xi'' - 2\omega\eta' - \omega^2\xi)\sin\omega t =$$
$$= -(n_1^2 - 3n^2\beta\cos 2nt)(\eta\cos\omega t + \xi\sin\omega t)$$

из которых следует

$$\begin{aligned}\xi'' - 2\omega\eta' + (n_1^2 - \omega^2)\,\xi &= 3n^2\beta\xi\cos 2nt \\ \eta'' + 2\omega\xi' + (n_1^2 - \omega^2)\,\eta &= 3n^2\beta\eta\cos 2nt\end{aligned} \tag{26}$$

Умножив второе из этих уравнений на $i = \sqrt{-1}$ и приложив к первому, получим, полагая $u = \xi + i\eta$,

$$\begin{aligned}u'' + 2i\omega u' + (n_1^2 - \omega^2)\,u &= 3n^2\beta u\cos 2nt = \\ &= \frac{3}{2}n_2\beta u\left[e^{2nit} + e^{-2nit}\right]\end{aligned} \tag{27}$$

В правой части этого уравнения в первом приближении можно заменить величину u ее значением (24) и (24′)

$$u = \frac{a-c}{2}e^{-(n+\omega)it} + \frac{a+c}{2}e^{(n-\omega)it}$$

тогда уравнение (27) будет

$$\begin{aligned}u'' + 2i\omega u' + (n_1^2 - \omega^2)u &= \frac{3}{4}(a-c)\,n^2\beta e^{(n-\omega)it} + \\ + \frac{3}{4}(a+c)\,n^2\beta e^{-(n+\omega)it} + \frac{3}{4}(a-c)\,n^2\beta e^{-(3n+\omega)it} &+ \\ + \frac{3}{4}(a+c)\,n^2\beta e^{(3n-\omega)it}\end{aligned} \tag{28}$$

Общий интеграл соответствующего уравнения без последнего члена, очевидно, получится, заменив в формуле (24) величину n на n_1, и будет

$$u = C_1 e^{-(n_1+\omega)it} + C_2 e^{(n_1-\omega)it}$$

Частное решение u будет состоять из суммы членов того же вида, как стоящие в правой части, причем, решение, соответствующее первым двум членам, будет иметь малого делителя, вследствие чего оно будет не третьего, а первого порядка, решение же, соответствующее двум последним членам, будет третьего порядка и в первом приближении может быть отброшено. В самом деле положим для краткости

$$\frac{3}{4}(a-c)\,n^2\beta = A$$

и будем искать u под видом

$$u = Me^{(n-\omega)it}$$

тогда имеем для определения M уравнение

$$\left[-(n-\omega)^2 - 2\omega(n-\omega) + n_1^2 - \omega^2\right]M = A$$

но мы имели

$$n_1^2 = n(1+\alpha)$$

значит будет

$$M = \frac{A}{n_1^2 - n^2} = \frac{3}{4}(a-c)\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{4}(a-c)\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2} \tag{29}$$

Совершенно так же для второго члена, положив

$$u = Ne^{-(n+\omega)it} \quad \text{и} \quad \frac{3}{4}(a+c)n^2\beta = B$$

получим

$$[-(n+\omega)^2 + 2\omega(n+\omega) + n^2 - \omega^2]N = B$$

$$N = \frac{B}{n_1 - n^2} = \frac{3}{4}(a+c)\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{4}(a+c)\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2} \tag{29'}$$

Таким образом, ограничиваясь членами первого порядка, имеем

$$u = C_1 e^{-(n_1+\omega)it} + C_2 e^{(n_1-\omega)it} + Me^{(n-\omega)it} + Ne^{-(n+\omega)it} \tag{30}$$

Начальные условия (23) дают для определения C_1 и C_2 уравнения:

$$a = C_1 + C_2 + M + N$$
$$nc - \omega a = -(n_1+\omega)C_1 + (n_1-\omega)C_2 + (n-\omega)M - (n+\omega)N \tag{30'}$$

или, по упрощении,

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= a(1-k) \\ C_2 - C_1 &= \frac{n}{n_1}c(1+k) = c(1+k) \end{aligned} \tag{31}$$

причем попрежнему положено

$$k = \frac{3}{2}\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}$$

Отсюда следует

$$C_1 = \frac{n_1 a - nc}{2n_1} - k\frac{n_1 a + nc}{2n_1}; \quad C_2 = \frac{n_1 a + nc}{2n_1} - k\frac{n_1 a - nc}{2n_1} \tag{31'}$$

Отделив в уравнении (30) вещественную и мнимую части, имеем

$$\begin{aligned} \xi &= C_2\cos(n_1-\omega)t + C_1\cos(n_1+\omega)t + \\ &+ M\cos(n-\omega)t + N\cos(n+\omega)t \\ \eta &= C_2\sin(n_1-\omega)t - C_1\sin(n_1+\omega)t + \\ &+ M\sin(n-\omega)t - N\sin(n+\omega)t \end{aligned} \tag{32}$$

Надо теперь определить величину ω и период обращения τ так, чтобы траектория на плоскости ξ, η была замкнутая и неподвижная.

Очевидно, что период обращения τ будет близок к $\frac{2\pi}{n_1}$, поэтому полагаем

$$n_1\tau = 2\pi + \varphi \tag{33}$$

Чтобы траектория была неподвижная и замкнутая — надо, чтобы в момент $t=\tau$ было

$$\xi' = 0; \quad \eta = 0 \tag{34}$$

Величины φ и ω, очевидно, будут малыми (и даже малыми второго порядка); поэтому будет, полагая $\omega\tau = \sigma$

$$\sin(n_1 \pm \omega)\tau = \sin(2\pi + \varphi \pm \omega\tau) = \sin(\varphi \pm \omega\tau) \approx \varphi \pm \sigma$$
$$\sin(n \pm \omega)\tau = \left(n_1 - \frac{1}{2}n_1\alpha\right)\tau \pm \omega\tau \approx 2\pi - \pi\alpha + \varphi \pm \sigma$$
$$\sin(n \pm \omega)\tau = \sin(2\pi - \pi\alpha + \varphi \pm \sigma) \approx -\pi\alpha + \varphi \pm \sigma$$

На основании этих равенств уравнения (34) будут, при $t=\tau$:

$$(n_1 - \omega)C_2(\varphi - \sigma) + (n_1 + \omega)C_1(\varphi + \sigma) + M(-\pi\alpha + \varphi - \sigma)(n - \omega) + (n + \omega)N(-\pi\alpha + \varphi + \sigma) = 0$$
$$C_2(\varphi - \sigma) - C_1(\varphi + \sigma) + M(-\pi\alpha + \varphi - \sigma) - N(-\pi\alpha + \varphi + \sigma) = 0$$

Отбрасывая малые величины высших порядков, можем в первом уравнении полагать

$$n_1 - \omega = n_1 + \omega = n - \omega = n + \omega = n$$

и тогда получим

$$(C_2 + C_1 + M + N)\varphi - (C_2 - C_1 + M - N)\sigma - (M + N)\pi\alpha = 0$$
$$(C_2 - C_1 + M - N)\varphi - (C_2 + C_1 + M + N)\sigma - (M - N)\pi\alpha = 0$$

или на основании формулы (29), (29′) и (31) получим

$$\begin{aligned} a\varphi - c\sigma &= ak \cdot \pi\alpha \\ c\varphi - a\sigma &= -ck \cdot \pi\alpha \end{aligned} \tag{35}$$

откуда следует

$$\sigma = 2\pi\frac{ac}{a^2 - c^2} \cdot k\alpha = 2\pi\frac{ac}{a^2 - c^2} \cdot \frac{3}{2}\frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \cdot \frac{a^2 + c^2}{4l^2} = \frac{3}{4}\pi\frac{ac}{l^2},$$

значит

$$\omega = \frac{\sigma}{\tau} = \frac{\sigma \cdot n_1}{2\pi} = \frac{3}{8}\frac{ac}{l^2}n_1$$

отбросив члены высших порядков. Этот же результат мы получили и раньше [см. формулу (9)].

Из тех же уравнений (35) имеем

$$\varphi = \frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2}k\pi\alpha = \frac{3}{2}\pi\alpha$$

Но

$$n_1\tau=\left(n+\frac{1}{2}\alpha\right)\tau=2\pi+\varphi=2\pi\left(1+\frac{3}{4}\alpha\right)$$

следовательно,

$$\tau=\frac{2\pi}{n}\left(1+\frac{1}{4}\alpha\right)=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\frac{a^2+c^2}{l^2}\right) \tag{36}$$

Мы вошли в столь подробное рассмотрение задачи о сферическом маятнике не потому, что она представляется важной по своим приложениям, а чтобы показать простейшие приемы применения методы последовательных приближений и тех предосторожностей, которые надо соблюдать при отбрасывании „малых“ членов в самих дифференциальных уравнениях, ввиду возможности появления малых делителей. Кроме того, эта задача дала нам пример применения при интегрировании системы двух уравнений введения комплексной зависимой переменной и пояснить на примере этот способ.

§ 6. Мы имели в § 2 уравнения (1′) и (2′)

$$x''+n_1^2x=3n^2\beta x\cos 2nt \tag{1''}$$
$$y''+n_1^2y=3n^2\beta y\cos 2nt \tag{2''}$$

Очевидно, что эти уравнения относятся к классу уравнений, которые можно писать так:

$$v''+(q^2+2\varepsilon\cos 2kt)v=0 \tag{37}$$

причем начальные условия таковы: при $t=0$ должно быть

$$(v)_0=a;\quad (v')_0=0 \tag{38}$$

Уравнения этого типа представляют частный случай уравнений вида

$$w''+(n^2+2q_1\cos 2kt+2q_2\cos 4kt+\ldots)w=0 \tag{39}$$

к которому приводятся весьма многие уравнения, встречающиеся в прикладных и технических вопросах.

Рассмотрение этих уравнений начнем с простейшего случая (37), предполагая величину ε малой, и применим для решения этого уравнения методу, изложенную в моих лекциях „О приближенных вычислениях“.[1]

Полагаем

$$\begin{aligned} v&=v_0+\varepsilon v_1+\varepsilon^2v_2+\varepsilon^3v_3+\ldots\\ q^2&=p^2+C_1\varepsilon+C_2\varepsilon^2+C_3\varepsilon^3+\ldots \end{aligned} \tag{40}$$

---

[1] Собр. тр., т. III, ч. 1, 1949, стр. 342 и сл. (*Ред.*).

причем v_0, v_1, v_2, v_3...— неизвестные функции переменной t и C_1, C_2 C_3...— неопределенные постоянные коэффициенты.

Из формулы (40) следует

$$v'' = v_0'' + \varepsilon v_1'' + \varepsilon^2 v_2'' + \varepsilon^3 v_3'' + \ldots$$

подставляя это значение и выражения (40) в уравнение (37), имеем

$$\begin{aligned} &v_0'' + \varepsilon v_1'' + \varepsilon^2 v_2'' + \varepsilon^3 v_3'' + (p^2 + C_1\varepsilon + C_2\varepsilon^2 + \\ &+ C_3\varepsilon^3 + \ldots)(v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon^3 v_3 + \ldots) + \\ &+ 2\varepsilon(v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \ldots)\cos 2kt = 0 \end{aligned} \tag{41}$$

так как это уравнение должно иметь место при всяком значении буквы ε, то собираем члены с одинаковыми степенями ε и приравниваем их в отдельности нулю, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &v_0'' + p^2 v_0 = 0 \\ &v_1'' + p^2 v_1 = -C_1 v_0 - 2v_0 \cos 2kt \\ &v_2'' + p^2 v_2 = -C_2 v_0 - C_1 v_1 - 2v_1 \cos 2kt \\ &v_3'' + p^2 v_3 = -C_3 v_0 - C_2 v_1 - C_1 v_2 - 2v_2 \cos 2kt \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{42}$$

На основании (38), как легко видеть, начальные условия будут: при $t=0$ должно быть

$$\begin{aligned} &v_{0,0} = a; \quad && v'_{0,0} = 0 \\ &v_{1,0} = 0; \quad && v'_{1,0} = 0 \\ &v_{2,0} = 0; \quad && v'_{2,0} = 0 \\ &v_{3,0} = 0; \quad && v'_{3,0} = 0 \\ &\ldots\ldots && \ldots\ldots \end{aligned} \tag{43}$$

Нетрудно видеть, что без ущерба общности можно положить $a=1$ и полученные в этом предположении решения в окончательном результате умножить на a. Мы и будем так поступать.

Первое уравнение (42) на основании первого условия (43) при $a=1$ дает

$$v_0 = \cos pt$$

тогда второе уравнение (42) будет

$$v_1'' + p^2 v_1 = -C_1 \cos pt - [\cos(p-2k)t + \cos(p+2k)t]$$

Чтобы решение этого уравнения не заключало времени вне знаков синуса или косинуса, надо взять

$$C_1 = 0$$

тогда будет

$$v_1 = A_1 \cos pt + B_1 \sin pt +$$

$$+ \frac{1}{(p+2k)^2 - p^2} \cos(p+2k)t - \frac{1}{p^2 - (p-2k)^2} \cos(p-2k)t$$

где A_1 и B_1 постоянные произвольные, для определения которых начальные условия дают уравнения

$$0 = A_1 + \frac{1}{2k(2p+2k)} - \frac{1}{2k(2p-2k)}$$

$$0 = B_1$$

откуда следует

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2 - k^2}$$

Таким образом будет

$$v_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2 - k^2} \cos pt +$$

$$+ \frac{1}{4k} \left[\frac{1}{p+k} \cos(p+2k)t - \frac{1}{p-k} \cos(p-2k)t \right]$$

Третье уравнение (42) будет

$$v_2'' + p^2 v_2 = -C_2 \cos pt - \frac{1}{4k} \left[\frac{1}{p+k} \cos(p+4k)t - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{p-k} \cos(p-4k)t \right] + \frac{1}{2} \frac{1}{p^2 - k^2} \cos pt -$$

$$- \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p^2 - k^2} \cos(p+2k)t + \cos(p-2k)t \right]$$

Чтобы время t не выходило из-под знаков синуса и косинуса, надо взять C_2 так, чтобы в правой части члены, содержащие $\cos pt$, пропадали, т. е., чтобы было

$$-C_2 + \frac{1}{2(p^2 - k^2)} = 0 \qquad (44)$$

т. е.

$$C_2 = \frac{1}{2(p^2 - k^2)}$$

тогда будет

$$v_2 = A_2 \cos pt + B_2 \sin pt + \frac{1}{4k} \cdot \frac{\cos(p+4k)t}{(p+k)[(p+4k)^2 - p^2]} +$$

$$+ \frac{1}{4k} \cdot \frac{\cos(p-4k)t}{[p^2 - (p-4k)^2](p-k)} +$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p^2 - k^2} \left[\frac{\cos(2p+k)t}{(p+2k)^2 - p^2} - \frac{\cos(p-2k)t}{p^2 - (p-2k)^2} \right]$$

Начальные условия дают

$$A_2 = \frac{(p^2 - 2k^2) \cdot (p^2 + 3k^2)}{16k^2 (p^2 - k^2)^2 \cdot (p^2 - 4k^2)}$$

$$B_2 = 0$$

Таким образом будет

$$v_2 = \frac{(p^2 - 2k^2) \cdot (p^2 + 3k^2)}{16k^2 (p^2 - k^2)^2 (p^2 - 4k^2)} \cos pt + \frac{1}{32} \frac{\cos (p + 4k) t}{k^2 (p + k) (p + 2k)} +$$

$$+ \frac{1}{32} \frac{\cos (p - 4k) t}{k^2 (p - k) (p - 2k)} + \frac{1}{16} \frac{\cos (p + 2k) t}{k (p^2 - k^2) (p + k)} - \frac{1}{16} \frac{\cos (p - 2k) t}{k (p^2 - k^2) (p - k)}$$

причем p^2 определяется уравнением

$$q^2 = p^2 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{p^2 - k^2} \tag{45}$$

решение которого с точностью до членов второго порядка относительно ε есть

$$p^2 = q^2 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{q^2 - k^2} \tag{45'}$$

Подобным образом можно продолжать далее, до членов любого порядка относительно ε.

§ 7. Ясно, что получаемый для величины v ряд сходится тем быстрее, чем величина ε меньше; если бы получаемые по изложенному в предыдущем параграфе способу ряды получились медленно сходящимися и пришлось бы в них брать много членов, то выкладки стали бы очень сложны, тогда надо применить другой прием, принадлежащий американскому астроному XIX в. Хиллу.[1]

---

[1] Действительно, уравнение (37) есть линейное второго порядка с периодическим коэффициентом при искомой функции v; оно представляет собой частный случай уравнения Хилла. Метод интегрирования этого уравнения изложен акад. А. Н. Крыловым в его работе „Леонард Эйлер. Новая теория движения Луны". (Собр. тр. акад. А. Н. Крылова, Дополнение к тт. V и VI, 1937, стр. 209—216). (*Ред.*).

О ДВИЖЕНИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ[1]

§ 1. До сих пор при изучении движения мы предполагали, что оси координат, к которым это движение относится, неподвижны, но так как большая часть движений, с которыми приходится технику иметь дело, рассматривается по отношению к Земле, то и надо изучить, какое влияние оказывает движение самой Земли на движения, совершающиеся по отношению к ней.

§ 2. Как известно, движение Земли двоякое: первое — годовое и второе — суточное.

Рассмотрим сперва годовое движение, которое совершается вокруг Солнца по эллиптической орбите, весьма близкой к кругу, ибо эксцентриситет составляет 0.01675 или кругло $^1/_{60}$.

Вообразим, что через центр Солнца проведена система трех взаимно перпендикулярных осей $S\xi$, $S\eta$, $S\zeta$, из которых первые две лежат в плоскости орбиты Земли (эклиптики) и направлены: $S\xi$ — в точку весеннего равноденствия, $S\eta$ — в точку, гелиоцентрическая долгота которой есть 90°, и ось $S\zeta$ — к полюсу эклиптики в северное полушарие.

Через центр Земли C вообразим систему осей, параллельных первым, и обозначим эти оси через Cx, Cy, Cz. Возьмем точку на поверхности Земли с координатами x, y, z. Эта точка, участвуя в *поступательном* движении Земли, имеет то же самое ускорение, как и центр Земли. Сравним это ускорение с ускорением силы тяжести $g = 9.81$ м/сек.^{2}, наблюдаемым на земной поверхности.

Для простоты расчета будем считать орбиту Земли кругом с радиусом R, радиус же Земли обозначим через r, Землю примем за шар.

Астрономическими наблюдениями установлено, что радиус Земли r

---

[1] Неопубликованная лекция, прочитанная акад. А. Н. Крыловым адъюнктам Военно-морской академии им. Ворошилова. Хранится в Архиве АН СССР (ф. 759, оп. 1, № 90).

усматривается из центра Солнца под углом, именуемым „солнечным параллаксом“. Этот угол составляет 8″.80, так что

$$\frac{r}{R} = \frac{8''.80}{206265} = \frac{1}{23440}$$

При движении по круговой орбите, ускорение w направлено к центру круга и выражается формулой

$$w = \frac{v^2}{R}$$

где v — скорость движения. Принимая обращение Земли вокруг Солнца за равномерное в продолжение года = 365.25 суток, т. е. $365.25 \times \times 24 \cdot 60 \cdot 60$ секунд $= T$, будем иметь

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

и значит

$$w = \frac{4\pi^2}{T^2} R = \frac{4\pi^2}{T^2} 23440\, r$$

но $2\pi r = 40\,000\,000$ м, значит будет при единицах метр и секунда

$$w = \frac{2\pi \cdot 23440 \cdot 40000000}{(365.25 \cdot 24 \cdot 3600)^2} = 0.005916 \text{ м/сек.}^2$$

как это следует из приводимого ниже вычисления:

$\lg 2\pi =$	0.79818	$\lg 365.25 = 2.56259$
$\lg 23440 =$	4.36996	$\lg 24 = 1.38021$ } *
$\lg 40000000 =$	7.60206	$\lg 3600 = 3.55630$
$\lg$ числ. $=$	12.77020	$\lg (*) = 7.49910$; $2 \lg (*) = 14.99820$
colg знам. $=$	15.00180	
$\lg w =$	$\bar{3}.77200$	$w = 0.0059157$

Это ускорение происходит от притяжения Солнцем; обозначая массу Солнца через M и через k некоторую постоянную (постоянную Ньютонова тяготения), имеем

$$w = k \frac{M}{R^2}$$

С другой стороны, ускорение силы тяжести происходит, главным образом, от притяжения Земли, и, положив

$$g = k \frac{m}{r^2}$$

мы получим равенство

$$\frac{w}{g} = \frac{M}{m}\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Отсюда следует

$$\frac{M}{m} = \frac{w}{g}\left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{w}{g}(23440)^2 = 355000$$

$$\begin{aligned} \lg w &= \bar{3}.77200 \\ \operatorname{colg} g &= 1.00831 \\ 2\lg 23440 &= 8.73992 \\ \hline \lg \frac{M}{m} &= 5.52023 \\ \frac{M}{m} &= 331300 \end{aligned}$$

Более точный расчет, учитывая вращение Земли и влияние ее формы на величину g, дает

$$\frac{M}{m} = 333400$$

Видимый полудиаметр Солнца есть

$$0°16' = 960''$$

следовательно, радиус ρ Солнца, форма которого сферическая, получится из пропорции

$$\frac{\rho}{r} = \frac{960''}{8''.8} = 109$$

значит объем Солнца V относится к объему Земли v_0 как $(109)^3 : 1$, т. е.

$$V = 1295000\, v_0$$

Средняя плотность Солнца δ_0 по сравнению со средней плотностью Земли Δ_0 получится из равенств

$$M = V\delta_0 \quad \text{и} \quad m = v_0\Delta_0$$

т. е. будет

$$\frac{\delta_0}{\Delta_0} = \frac{Mv_0}{mV} = 333400\ \frac{1}{1295000} = 0.258$$

а так как средняя плотность Земли, по отношению к воде, равна 5.52, то средняя плотность Солнца будет кругло 1.4.

§ 3. Пусть точка S есть центр Солнца, C — центр Земли, A точка ее поверхности (фиг. 1).

Притяжение Солнца сообщает точке C, а значит, и всей Земле как твердому телу ускорение $w = \frac{kM}{R^2}$, ускорение же w_1, сообщаемое

точке A, есть $w_1 = k\frac{M}{R_1^2}$, где $R_1 = SA$ есть расстояние до этой точки, которое обозначим через $R + \theta r$, где, очевидно, будет $-1 \leqslant \theta \leqslant +1$.

Наибольшее значение угла ASC есть 8″80, следовательно w и w_1 можно считать параллельными и вместо геометрической разности w и w_1 брать алгебраическую $w_1 - w$. Эта величина представит то ускорение, которое получает точка A по отношению к поверхности Земли под действием притяжения Солнца. Таким образом будет

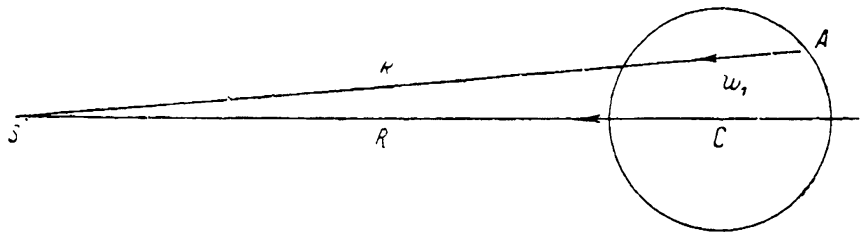
$$\frac{kM}{(R-r)^2} \geqslant w_1 \geqslant \frac{kM}{(R+r)^2}$$

Отсюда следует

$$\frac{kM}{(R-r)^2} - \frac{kM}{R^2} > w_1 - w$$

но

$$\frac{kM}{(R-r)^2} - \frac{kM}{R^2} = \frac{kM}{R^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{r}{R}\right)^2} - 1\right] = \frac{kM}{R^2}\left(\frac{2r}{R} + \ldots\right)$$



Фиг. 1.

т. е.

$$w_1 - w \leqslant \frac{2kM}{R^2} \cdot \frac{r}{R}$$

Точно так же будет

$$\frac{kM}{R^2} - \frac{kM}{(R+r)^2} \leqslant w - w_1, \quad \text{т. е.} \quad \frac{2kM}{R^2}\frac{r}{R} \leqslant w - w_1$$

Следовательно, по абсолютной величине будет

$$|w - w_1| < \frac{2kM}{R^2}\frac{r}{R}$$

но мы видели, что

$$\frac{kM}{R^2} = w = 0.005916 \text{ м/сек.}^2; \quad \frac{r}{R} = \frac{1}{23440}$$

значит

$$|w - w_1| < 0.005916\ \frac{1}{11720} \text{ м/сек.}^2$$

иначе

$$\frac{|w - w_1|}{g} < \frac{0.005916}{9.81} \cdot \frac{1}{11720} < \frac{1}{10^8}$$

Эта величина настолько мала, что ни на какие движения (кроме приливов) по отношению к земной поверхности практически заметного влияния не оказывает и может быть отбрасываема.

Таким образом мы можем сказать, что *при изучении движений, совершающихся по отношению к поверхности Земли, ее орбитальное (годовое) движение и притяжение Солнца можно не рассматривать и ограничиться лишь рассмотрением ее вращательного или суточного движения.*

§ 4. Суточное движение Земли происходит около оси, положение которой при рассмотрении всех обыкновенно кратковременных движений, совершающихся у поверхности Земли, может быть принимаемо за постоянное как в пространстве, т. е. относительно „неподвижных" звезд, так и относительно Земли.

В самом деле, относительно неподвижных звезд ось вращения Земли обладает двоякого рода движением: 1) *прецессией*, состоящей в том, что земная ось, иначе „полюс мира", описывает около оси эклиптики круговой конус с углом растворения около 47°, делая полный оборот в 2600 лет; 2) *нутацией*, состоящей в том, что земная ось совершает около среднего своего положения, обладающего вышеуказанным прецессионным движением, еще коническое движение по эллиптическому конусу, имеющему по направлению к полюсу эклиптики угол растворения в 18″, а по направлению перпендикулярному 13″. Этот конус описывается в 18 лет 9 месяцев.

Медленность прецесионного движения по сравнению с суточным вращением и медленность и малая величина нутационного движения таковы, что и ими при рассмотрении всех движений тел земных можно пренебрегать.

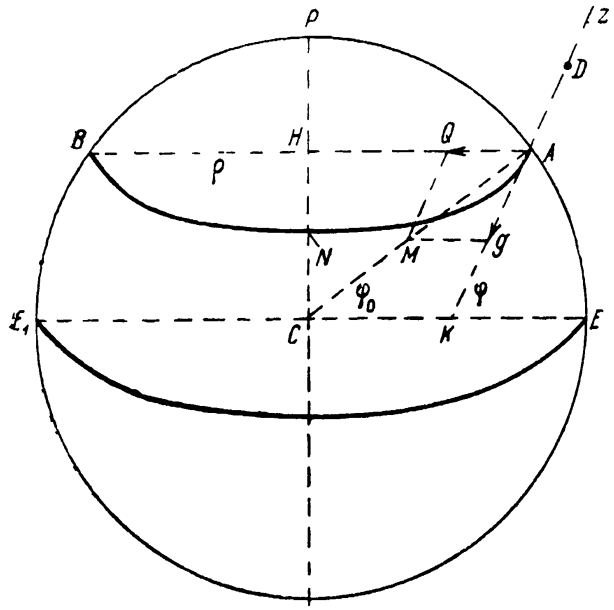
Внутри Земли ось ее вращения совершает также коническое движение по конусу, имеющему основание в виде неправильной спирали, но растворение этого конуса составляет менее 0″5 и обращение по нему около 430 суток.

Это движение сказывается на периодическом изменении географической широты мест земной поверхности, которое обнаруживается с большим трудом при точнейших астрономических наблюдениях, и на движение земных тел никакого влияния оказывать не может.

Таким образом мы можем принять, что *суточное вращение Земли происходит около оси, занимающей неизменное положение как в пространстве, так и внутри Земли.*

Прежде чем составлять общие уравнения движения точки по отношению к земной поверхности, поясним связь между ускорением силы тяжести и притяжением Земли.

Пусть CP (фиг. 2) есть ось вращения Земли, которую для простоты рассуждений примем за шар, плоскость EE_1, проведенная через центр земли C перпендикулярно CP, — экватор, A — точка поверхности земли, AZ — направление отвесной линии, тогда угол $ZKE=\varphi$ есть географическая широта. При суточном вращении точка A движется по кругу ANB равномерно, описывая этот круг в промежуток времени, именуемый *звездными* сутками, который равен $23^r56^m4^c.09 = 86164.09$ секунды среднего солнечного времени, по которому регулируются все часы в обиходной жизни, так что угловая скорость этого движения есть



Фиг. 2.

$$\omega = \frac{2\pi}{86164.09} = \frac{1}{13713}$$

Радиус ρ указанной параллели есть $\rho = r\cos\varphi_0$.

При движении по этому кругу точка A обладает ускорением w_1, направленным к центру H параллели и равным $\omega^2\rho$, значит, если масса точки есть μ, то на нее должна действовать по направлению AH сила

$$F = \mu w_1 = \mu\omega^2\rho = \mu\omega^2 r\cos\varphi_0$$

Положим, что эта масса μ подвешена на нити в точке D и по отношению к Земле находится в покое, значит, в пространстве движется с ускорением w_1. Натяжение нити в этом случае равно и прямо противоположно *весу* точки A, т. е. равно $p=\mu g$, следовательно сила AM притяжения Земли разлагается на две слагающие: во-первых, по направлению отвесной линии слагающие силы есть $p=\mu g$ и, во-вторых, по направлению радиуса AH параллели к центру ее H сила AM имеет слагающую $F=\mu w_1=\mu\omega^2 r\cos\varphi_0$. Полагая $\mu=1$, получим соответствующие ускорения: силы тяжести g, силы притяжения Земли f и центростремительной w_1.

Чтобы получить ускорение f, стоит только построить указанный на фиг. 3 параллелограмм и рассмотреть элементы его. Обозначим через δ угол $\varphi-\varphi_0$, т. е. разность между географической и геоцентрической широтой, тогда имеем пропорцию

$$\frac{\sin\delta}{\sin\varphi_0} = \frac{w_1}{g} = \frac{\omega^2 r\cos\varphi_0}{g}$$

отсюда следует

$$\sin\delta = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 r}{g}\sin 2\varphi_0$$

Ясно, что наибольшее значение $\delta_{max.}$ имеет место при $\varphi_0 = 45°$

$$\sin \delta_{max.} = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{1}{2} \frac{1}{(13713)^2} \frac{6370000}{9.81}$$

это дает

$$\delta_{max.} = 356'' = 5'56''$$

Отсюда заключаем, что если бы Земля была сферическая, то было бы

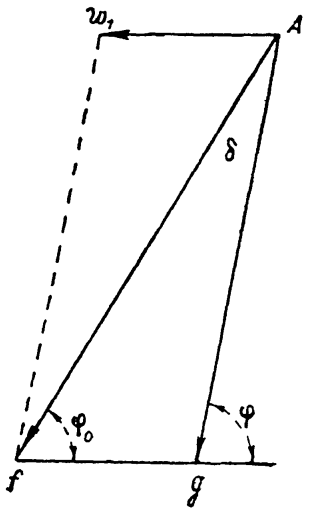
$$\delta = \varphi - \varphi_0 = 5'56'' \sin 2\varphi_0 \approx 5'56'' \sin 2\varphi$$

Ввиду малости угла δ очевидно, что

$$f \cos \delta = f; \quad g \cos \delta = g$$

отсюда ясно, что, проектируя ломаную Agf на направление Af, получим

$$f = g + w_1 \cos \varphi_0$$



Фиг. 3.

но мы видели, что

$$w_1 = \omega^2 r \cos \varphi_0 = \frac{1}{(13713)^2} 6370000 \cos \varphi_0 =$$

$$= 0.00339 = \frac{1}{289} g$$

Таким образом будет

$$f = g\left(1 + \frac{1}{289} \cos^2 \varphi_0\right)$$

Очевидно, что, пренебрегая малыми величинами порядка $(1/289)^2$, имеем

$$g = f\left(1 - \frac{1}{289} \cos^2 \varphi_0\right) \tag{1}$$

Пусть g_1 представляет значение g на полюсе ($\varphi_0 = 90°$), тогда предыдущую формулу можно писать так:

$$g = g_1\left(1 - \frac{1}{289} \cos^2 \varphi_0\right) = g_1\left(1 - \frac{1}{289} \cos^2 \varphi\right) \tag{1'}$$

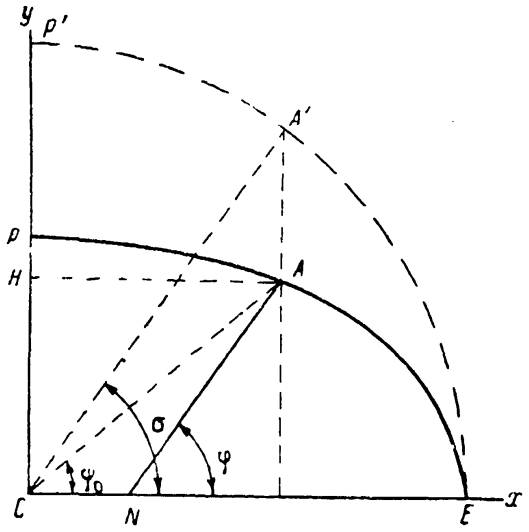
§ 5. Все предыдущие формулы выведены в предположении, что Земля имеет форму шара, но многочисленными и весьма точными геодезическими измерениями установлено, что форма Земли весьма близка к эллипсоиду вращения, коего полуоси, по вычислениям знаменитого астронома Бесселя, суть

$$a = 6377397 \text{ м}; \quad b = 6356078 \text{ м}; \quad \alpha = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{299}$$

причем малая ось совпадает с осью вращения Земли, т. е. проходит через полюсы ее.

Зная эту форму, нетрудно вывести формулы для $(\varphi - \varphi_0)$ и g, принимая во внимание эллипсоидальный вид Земли.

Пусть эллипс PAE (фиг. 4) представляет четверть меридионального сечения Земли, P — северный полюс, A — точка поверхности Земли; проведем в этой точке нормаль AN к эллипсу PAE — это будет и нормаль к поверхности Земли — значит и направление отвесной линии в точке A, тогда угол $ENA = \varphi$ есть географическая широта этой точки, угол $ECA = \varphi_0$ — ее геоцентрическая широта.



Фиг. 4.

Опишем из точки C как центра радиусом a круг $EA'P'$ и, построив координаты точки A

$$x = HA; \quad y = CH$$

продолжим ординату до встречи в точке A' со сказанным кругом, обозначим угол ECA' через σ, тогда, как известно, будет

$$x = a\cos\sigma; \quad y = b\sin\sigma$$

Отсюда следует:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\sigma; \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{y}{x} = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\sigma$$

следовательно будет

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0) = \frac{a^2 - b^2}{ab} \cdot \frac{\operatorname{tg}\sigma}{1 + \operatorname{tg}^2\sigma}$$

но $b = a(1 - \alpha)$, значит

$$\frac{a^2 - b^2}{ab} = \frac{a^2(2\alpha - \alpha^2)}{a^2(1 - \alpha)} \approx 2\alpha$$

и мы получим

$$\operatorname{tg}\delta = 2\alpha \frac{\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi}{1 + \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}^2\varphi} \approx \alpha \sin 2\varphi = \frac{1}{300}\sin 2\varphi$$

по малости угла δ эту формулу можно писать так:

$$\delta = 11'27'' \sin 2\varphi \qquad (2)$$

Из соотношений $\operatorname{tg}\sigma = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\varphi_0$ очевидно, что будет

$$\varphi_0 < \sigma < \varphi$$

значит будет

$$\sigma - \varphi_0 < \delta \quad \text{и} \quad \varphi - \sigma < \delta$$

Ускорение w_1 будет

$$w_1 = \omega^2 x = \omega^2 a \cos\sigma$$

а так как

$$\omega^2 a = \left(\frac{1}{13713}\right)^2 \cdot 6377000$$

то можно писать

$$w_1 = \omega^2 a \cos\varphi_0 = \omega^2 a \cos\varphi \tag{3}$$

и, значит, с тою степенью точности, которою мы ограничились, отбрасывая члены порядка α^2, формулы

$$\begin{gathered} g = f\left(1 - \frac{1}{289}\cos^2\varphi_0\right); \quad f = g\left(1 + \frac{1}{289}\cos\varphi_0\right) \\ g = g_1\left(1 - \frac{1}{289}\cos^2\varphi_0\right) = g_1\left(1 - \frac{1}{289}\cos^2\varphi\right); \quad g_1 = 9.83 \end{gathered} \tag{4}$$

будут попрежнему иметь место.

Знаменитый немецкий геодезист Гельмерт, на основании обработки 1603 определений величины g в различных пунктах земной поверхности, дал следующую зависимость величины ускорения силы тяжести от широты места

$$g = 980.632 - 2.5928\cos 2\varphi + 0.0068\cos^2 2\varphi \tag{5}$$

причем[1] g выражено в см/сек^2.

§ 6. Перейдем теперь к рассмотрению движения материальной точки по отношению к осям координат, неизменно связанных с Зем-

---

[1] При сопоставлении этого выражения с данными выше, следует иметь в виду, что при выводе формулы (4) предполагалось, что ускорение притяжения Земли f направлено по радиусу к ее центру; но это имело бы место лишь если бы вся масса Земли была сосредоточена в ближайших к ее центру областях; если же учесть, что на любую частицу поверхности Земли действуют по закону всемирного тяготения все остальные частицы ее массы, то вопрос значительно осложняется; в высшей геодезии показано, что при учете всех взаимных притяжений частиц коэффициент при $\cos^2\varphi$ в формулах (4) должен быть заменен следующим:

$$\frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{g} - \alpha = \frac{5}{2}\frac{1}{289} - \frac{1}{300} = \frac{1}{188}$$

Так что коэффициент при $\cos 2\varphi$ должен быть

$$-\frac{1}{2} \cdot 981 \cdot \frac{1}{188} = -2.60$$

что приближенно и соответствует его выражению у Гельмерта. (*Ред.*).

лею, причем для простоты рассуждений будем считать Землю за шар, уравнения же этого движения выведем сперва в общем виде.

Рассмотрим две системы координатных осей: $O\xi\eta\zeta$ — неподвижную в пространстве и $Gxyz$ — подвижную, движение которой по отношению к первой системе задано (фиг. 5).

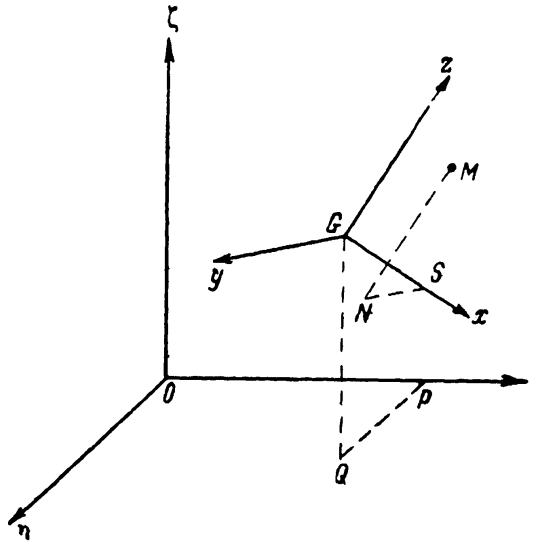
Это задание аналитически состоит в том, что задаются координаты ξ_0, η_0, ζ_0 точки G в функции времени t уравнениями вида

$$\xi_0 = f(t); \quad \eta_0 = f_1(t); \quad \zeta_0 = f_2(t)$$

а также выражения Эйлеровых углов φ, θ, ψ в функции времени, тогда и все 9 косинусов между осями будут выражаться известными функциями времени.

Обозначим эти косинусы, как обыкновенно, таблицей

	x	y	z
ξ	a	b	c
η	a_1	b_1	c_1
ζ	a_2	b_2	c_2



Фиг. 5.

Тогда, если имеется какая-либо точка M, то ее движение может быть отнесено как к неподвижным осям и представится уравнениями вида

$$\xi = F(t); \quad \eta = F_1(t); \quad \zeta = F_2(t)$$

или же к осям подвижным и представится уравнениями

$$x = G(t); \quad y = G_1(t); \quad z = G_2(t)$$

Первая наша задача будет состоять в том, чтобы найти соотношения между элементами этих движений, т. е. координатами, проекциями скорости и проекциями ускорения на те и другие оси.

Для координат на основании таблицы имеем

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + ax + by + cz \\ \eta &= \eta_0 + a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \zeta &= \zeta_0 + a_2 x + b_2 y + c_2 z \end{aligned} \tag{I}$$

и обратно

$$\begin{aligned} x &= (\xi - \xi_0)\, a + (\eta - \eta_0)\, a_1 + (\zeta - \zeta_0)\, a_2 = -x_0 + a\xi + a_1\eta + a_2\zeta \\ y &= (\xi - \xi_0)\, b + (\eta - \eta_0)\, b_1 + (\zeta - \zeta_0)\, b_2 = -y_0 + b\xi + b_1\eta + b_2\zeta \\ z &= (\xi - \xi_0)\, c + (\eta - \eta_0)\, c_1 + (\zeta - \zeta_0)\, c_2 = -z_0 + c\xi + c_1\eta + c_2\zeta \end{aligned} \tag{II}$$

Дифференцируя формулу I, получаем

$$\begin{aligned}\xi' &= \xi_0' + ax' + by' + cz' + a'x + b'y + c'z\\ \eta' &= \eta_0' + a_1x' + b_1y' + c_1z' + a_1'x + b_1'y + c_1'z\\ \zeta' &= \zeta_0' + a_2x' + b_2y' + c_2z' + a_2'x + b_2'y + c_2'z\end{aligned} \qquad (I')$$

Отсюда следует

$$x' = (\xi' - \xi_0')a + (\eta' - \eta_0')a_1 + (\zeta' - \zeta_0')a_2 + (aa' + a_1a_1' + a_2a_2')x + \\ + (b'a + b_1'a_1 + b_2'a_2)y + (c'a + c_1'a_1 + c_2'a_2)z$$

но в силу равенства

$$a^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1$$

будет

$$aa' + a_1a_1' + a_2a_2' = 0$$

Значит

$$x' = (\xi' - \xi_0')a + (\eta' - \eta_0')a_1 + (\zeta' - \zeta_0')a_2 + (b'a + b_1'a_1 + b_2'a_2)y + \\ + (c'a + c_1'a_1 + c_2'a_2)z$$

и другие два подобные равенства для y' и z'. В эти формулы входят шесть трехчленных множителей при координатах xyz, но на основании равенств

$$ab + a_1b_1 + a_2b_2 = 0; \quad cb + c_1b_1 + c_2b_2 = 0; \quad ac + a_1c_1 + a_2c_2 = 0$$

будет

$$\begin{aligned}(a'b + a_1'b_1 + a_2'b_2) + (b'a + b_1'a_1 + b_2'a_2) &= 0\\ (c'b + c_1'b_1 + a_2'b_2) + (b'c + b_1'c_1 + b_2'c_2) &= 0\\ (a'c + a_1'c_1 + a_2'c_2) + (c'a + c_1'a_1 + c_2'a_2) &= 0\end{aligned}$$

таким образом эти трехчлены приводятся лишь к трем различным, и можно положить:

$$\begin{aligned}(a'b + a_1'b_1 + a_2'b_2) &= -(b'a + b_1'a_1 + b_2'a_2) = r\\ (c'b + c_1'b_1 + c_2'b_2) &= -(b'c + b_1'c_1 + b_2'c_2) = q\\ (a'c + a_1'c_1 + a_2'c_2) &= -(c'a + c_1'a_1 + c_2'a_2) = p\end{aligned} \qquad (III)$$

Таким образом будет

$$\begin{aligned}x' &= (\xi' - \xi_0')a + (\eta' - \eta_0')a_1 + (\zeta' - \zeta_0')a_2 + qz - ry\\ y' &= (\xi' - \xi_0')b + (\eta' - \eta_0')b_1 + (\zeta' - \zeta_0')b_2 + rx - pz\\ z' &= (\xi' - \xi_0')c + (\eta' - \eta_0')c_1 + (\zeta' - \zeta_0')c_2 + py - qx\end{aligned} \qquad (III')$$

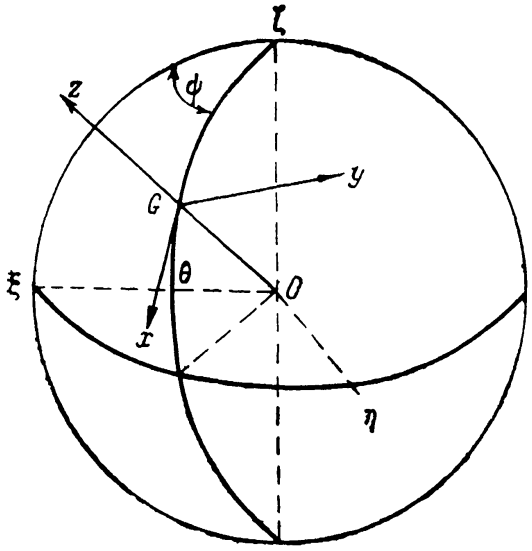
Дифференцируя формулу (I) дважды, получим

$$\begin{aligned}\xi'' &= \xi_0'' + ax'' + by'' + cz'' + 2(a'x' + b'y' + c'z') + a''x + b''y + c''z\\ \eta'' &= \eta_0'' + a_1x'' + b_1y'' + c_1z'' + 2(a_1'x' + b_1'y' + c_1'z') + \\ &\qquad + a_1''x + b_1''y + c_1''z\\ \zeta'' &= \zeta_0'' + a_2x'' + b_2y'' + c_2z'' + 2(a_2'x' + b_2'y' + c_2'z') + \\ &\qquad + a_2''x + b_2''y + c_2''z\end{aligned} \qquad (I'')$$

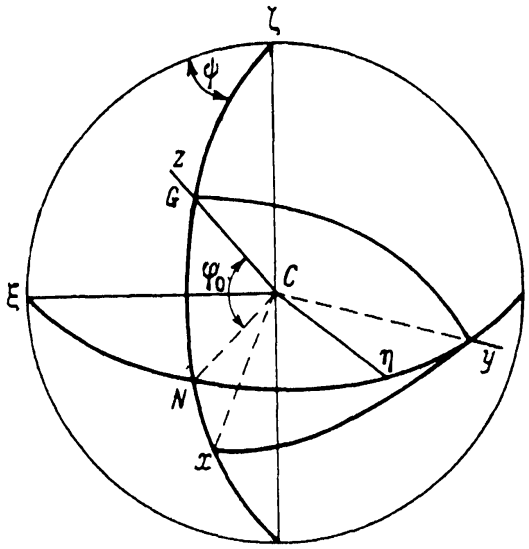
§ 7. Применим теперь эти общие формулы к частному примеру — движению точки по отношению к осям, неизменно связанным с Землею.

Эти оси возьмем так: за начало координат принимаем точку G земной поверхности, за ось Gz берем отвесную линию в точке G, направляя ее вверх, за плоскость Gzx берем меридиан места, направляя ось Gx горизонтально к югу (точка G предполагается в северном полушарии), тогда ось Gy будет направлена перпендикулярно меридиану к востоку (фиг. 6).

Начало неподвижных осей координат берем в центре Земли (ибо показано, что при рассмотрении движений на поверхности Земли орбитальным ее движением можно пренебречь), ось $O\xi$ направляем



Фиг. 6.



Фиг. 7.

в точку весеннего равноденствия, ось $O\eta$ в плоскости экватора в точку, коей прямое восхождение $O\eta$ равно 90°, и ось $O\zeta$ — по оси мира в северное полушарие.

Беру произвольную точку C (фиг. 7), описываю из центра C произвольным радиусом вспомогательную сферу и провожу через точку C лучи, соответственно параллельные осям координат; пересечение этих лучей с поверхностью сферы помечаю теми же буквами, как оси, и провожу большие круги $\zeta\xi$, $\zeta\eta$, $\xi\eta$, zx, zy, xy и отмечаю точку N пересечения плоскостей zx и $\xi\eta$.

Примем Землю за шар, тогда координаты точки G будут приближенно

$$\xi_0 = R\cos\varphi_0\cos\psi;\quad \eta_0 = R\cos\varphi_0\sin\psi;\quad \zeta_0 = R\sin\varphi_0 \qquad (6)$$

где φ_0 есть геоцентрическая широта места G.

Положим

$$R\cos\varphi_0 = \rho;\quad R\sin\varphi_0 = h$$

вместе с тем угол ψ будет

$$\psi = \omega(t - t_0)$$

ибо вращение Земли совершается равномерно с угловою скоростью ω около оси $O\zeta$, причем t_0 есть постоянная.

Таким образом будет

$$\xi_0 = \rho\cos\psi;\quad \eta_0 = \rho\sin\psi;\quad \zeta_0 = h;\quad \psi' = \omega \tag{7}$$

Пользуясь чертежом (фиг. 7), составляем выражения косинусов углов, рассматривая сферические треугольники, у коих одна вершина в N, другие две в точках, между коими угол подлежит определению, таким образом будет

$$\begin{aligned}
&\cos(\xi, x) = a = \cos\psi\sin\varphi;\quad \cos(\xi, y) = b = \cos(90^\circ + \psi) = -\sin\psi;\\
&\cos(\eta, x) = a_1 = \sin\psi\sin\varphi;\quad \cos(\eta, y) = b_1 = \cos\psi;\\
&\cos(\zeta, x) = a_2 = -\cos\varphi;\quad \cos(\zeta, y) = b_2 = \cos 90^\circ = 0;
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&\cos(\xi, z) = c = \cos\varphi\cos\psi\\
&\cos(\eta, z) = c_1 = \cos\varphi\sin\psi\\
&\cos(\zeta, z) = c_2 = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin\varphi
\end{aligned}$$

Заметив, что $\psi' = \omega$, имеем

$$\begin{aligned}
&a' = -\omega\sin\psi\sin\varphi = -\omega a_1; && b' = -\omega\cos\psi = -\omega b_1;\\
&a_1' = \omega\cos\psi\sin\varphi = \omega a; && b_1' = -\omega\sin\psi = \omega b;\\
&a_2' = 0; && b_2' = 0;
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&c' = -\omega\sin\psi\cos\varphi = -\omega c_1\\
&c_1' = \omega\cos\psi\cos\varphi = \omega c\\
&c_2' = 0
\end{aligned}$$

На основании этих формул имеем

$$\begin{aligned}
&a'' = -\omega a_1' = -\omega^2 a; && b'' = -\omega b_1' = -\omega^2 b; && c'' = -\omega c_1' = -\omega^2 c\\
&a_1'' = \omega a' = -\omega^2 a_1; && b_1'' = \omega^2 b_1; && c_1'' = \omega c' = -\omega^2 c_1\\
&a_2'' = 0; && b_2'' = 0; && c_2'' = 0
\end{aligned} \tag{10}$$

На основании формул (I″) и (9) и (10) получим

$$\xi'' - \xi_0'' = ax'' + by'' + cz'' - 2\omega(a_1 x' + b_1 y' + c_1 z') - \omega^2(ax + by + cz)$$

На основании формулы (I): $ax + by + cz = \xi - \xi_0$, значит будет

$$\begin{aligned}
&\xi'' - \xi_0'' = ax'' + by'' + cz'' - 2\omega(a_1 x' + b_1 y' + c_1 z') - \omega^2(\xi - \xi_0)\\
&\eta'' - \eta_0'' = a_1 x'' + b_1 y'' + c_1 z'' - 2\omega(ax' + by' + cz') - \omega^2(\eta - \eta_0)\\
&\zeta'' - \zeta_0'' = a_2 x'' + b_2 y'' + c_2 z''
\end{aligned}$$

Но на основании формулы (6)

$$\xi_0'' = -\omega^2\xi_0;\quad \eta_0'' = -\omega^2\eta_0;\quad \zeta_0'' = 0 \tag{11}$$

значит будет

$$\begin{aligned}\xi'' &= ax'' + by'' + cz'' - 2\omega(a_1 x' + b_1 y' + c_1 z') - \omega^2 \xi \\ \eta'' &= a_1 x'' + b_1 y'' + c_1 z'' - 2\omega(ax' + by' + cz') - \omega^2 \eta \\ \zeta'' &= a_2 x'' + b_2 y'' + c_2 z''\end{aligned} \tag{12}$$

Заметив, что

$$\begin{aligned} ab_1 - ba_1 &= \sin\varphi; \quad & ac_1 - ca_1 &= 0; \quad & ca_1 - ac_1 &= 0 \\ ba_1 - b_1 a &= -\sin\varphi; \quad & bc_1 - cb_1 &= -\cos\varphi \end{aligned} \tag{13}$$

получим

$$\begin{aligned} x'' &= a(\xi'' + \omega^2 \xi) + a_1(\eta'' + \omega^2 \eta) + a_2 \zeta'' - 2\omega y' \sin\varphi \\ y'' &= b(\xi'' + \omega^2 \xi) + b_1(\eta'' + \omega^2 \eta) + b_2 \zeta'' + 2\omega(x' \sin\varphi + z' \cos\varphi) \\ z'' &= c(\xi'' + \omega^2 \xi) + c_1(\eta'' + \omega^2 \eta) + c_2 \zeta'' - 2\omega y' \cos\varphi \end{aligned} \tag{14}$$

Если на точку действует сила, проекции которой на неподвижные оси координат суть Ξ, H, Z, то уравнения движения точки суть

$$m\xi'' = \Xi; \quad m\eta'' = \mathrm{H}; \quad m\zeta'' = \mathrm{Z}$$

Умножив первое уравнение (14) на m, получаем

$$mx'' = a\Xi + a_1 \mathrm{H} + a_2 \mathrm{Z} + \omega^2(a\xi + a_1 \eta) - 2m\omega y' \sin\varphi$$

но $a\Xi + a_1 \mathrm{H} + a_2 \mathrm{Z} = X$, причем X есть проекция силы на ось x; и мы получим уравнения

$$\begin{aligned} mx'' &= X + \omega^2(a\xi + a_1 \eta) - 2m\omega y' \sin\varphi \\ my'' &= Y + \omega^2(b\xi + b_1 \eta) + 2m\omega(x' \sin\varphi + z' \cos\varphi) \\ mz'' &= Z + \omega^2(c\xi + c_1 \eta) - 2m\omega y' \cos\varphi \end{aligned} \tag{15}$$

Но на основании таблицы косинусов и их значений имеем

$$\begin{aligned} (a\xi + a_1 \eta) &= (\xi_0 \cos\psi + \eta_0 \sin\psi)\sin\varphi + \frac{1}{2} z \sin 2\varphi + x \sin^2\varphi \\ (b\xi + b_1 \eta) &= (\eta_0 \cos\psi - \xi_0 \sin\psi) + y \\ (c\xi + c_1 \eta) &= (\xi_0 \cos\psi + \eta_0 \sin\psi)\cos\varphi + (x \cos\psi + y \sin\psi)\cos\varphi + z \cos^2\varphi \end{aligned}$$

Заменяя

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi); \quad \cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$$

получим окончательно

$$\begin{aligned} mx'' = X - 2my'\omega \sin\varphi + \omega^2 \Big[&(\xi_0 \cos\psi + \eta_0 \sin\psi) \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} x + \\ &+ \frac{1}{2}(z \sin 2\varphi - x \cos 2\varphi) \Big] m \end{aligned}$$

$$my'' = Y - 2m(x'\omega\sin\varphi + z'\omega\cos\varphi) + \omega^2[\eta_0\cos\psi - \xi\sin\psi + y]m \quad (16)$$

$$mz'' = Z - 2my'\omega\cos\varphi + \omega^2\Big[(\xi_0\cos\psi + \eta_0\sin\psi)\cdot\cos\varphi +$$

$$+ (x\cos\psi + y\sin\psi)\cdot\cos\varphi + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z\cos 2\varphi\Big]m$$

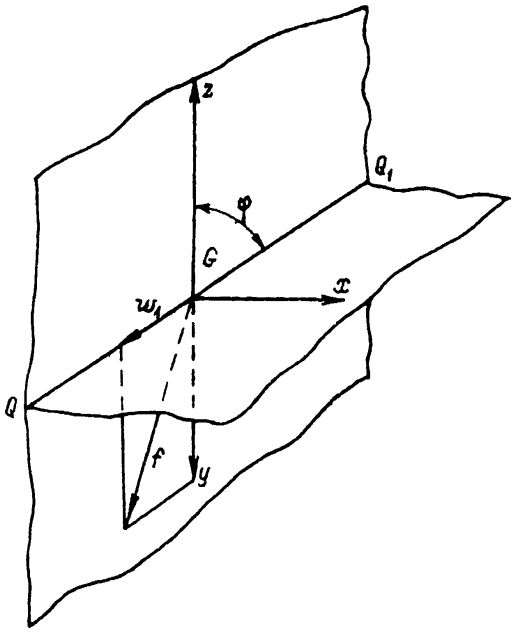
причем

$$\xi_0 = \rho\cos\psi; \quad \eta = \rho\sin\psi; \quad \psi = \omega(t - t_0); \quad \rho = R\cos\varphi_0.$$

§ 8. Применив выведенные уравнения к рассмотрению некоторых простейших случаев движения, начав с свободного падения тел в безвоздушном пространстве. В этом случае сила, действующая на точку по отношению к неподвижным осям, есть *притяжение Земли* с ускорением f, а не сила тяжести с ускорением g.

Мы примем, что ускорение f направлено в плоскости меридиана места и составляет с экватором угол φ_0, равный геоцентрической широте, и представляет геометрическую сумму ускорения g и ускорения w, направленного к центру параллели, причем $w_1 = \rho\omega^2$, где ρ радиус параллели.

Примем плоскость бумаги за плоскость меридиана и составим чертеж (фиг. 8). Ось z направлена вертикально вверх, x — горизонтально к югу, y — перпендикулярно в сторону от читателя, т. е. к востоку.



Фиг. 8.

Пусть линия QQ_1 есть пересечение параллели с плоскостью чертежа, так что угол $zGQ_1 = \varphi$, тогда имеем

$$\frac{1}{m}X = f\cos(\hat{fx}) = g\cos(\hat{gx}) + w_1\cos(\hat{w_1 x}) = w_1\cos(90^\circ + \varphi) = -w_1\sin\varphi$$

$$\frac{1}{m}Y = f\cos(\hat{fy}) = 0 \quad (17)$$

$$\frac{1}{m}Z = f\cos(\hat{fz}) = g\cos(\hat{gz}) + w_1\cos(\hat{w_1 z}) = -g +$$

$$+ w_1\cos(180^\circ - \varphi) = -g - w_1\cos\varphi$$

Таким образом будет

$$X = -mw_1\sin\varphi = -m\omega^2\rho\sin\varphi; \quad Y = 0; \quad Z = -mg - mw_1\cos\varphi =$$

$$= -mg - m\omega^2\rho\cos\varphi$$

На основании уравнений

$$\xi_0 = \rho\cos\psi; \quad \eta_0 = \rho\sin\psi$$

имеем

$$\xi_0 \cos\psi + \eta_0 \sin\psi = \rho; \quad \eta_0 \cos\psi - \xi_0 \sin\psi = 0$$

следовательно, уравнения (16) по сокращении на m будут

$$\begin{aligned} x'' &= -2y'\omega\sin\varphi + \frac{1}{2}\omega^2[z\sin 2\varphi + x(1-\cos 2\varphi)] \\ y'' &= -2\omega(z'\cos\varphi + x'\sin\varphi) + \omega^2 y \\ z'' &= -g - 2y'\omega\cos\varphi + \frac{\omega^2}{2}[z(1+\cos 2\varphi) + 2(x\cos\psi + y\sin\psi)\cos\varphi] \end{aligned} \tag{18}$$

Хотя эти уравнения и представляют систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами и, следовательно, их можно было бы интегрировать по общим правилам, но так как свободное падение тел без начальной скорости есть явление кратковременное, продолжающееся несколько секунд, то при малости величины ωt проще разлагать решение по степеням этого количества, представляющего *отвлеченное* число, независимое от единиц меры.

Полагаем, что точка падает из начала координат g без начальной скорости, т. е. при $t=0$ должно быть $z'=0$; $z=0$.

Берем последнее уравнение, отбрасываем в нем все члены, содержащие множитель ω; получаем по интегрировании

$$z' = -gt; \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{19}$$

Подставляем во второе уравнение, в котором удерживаем члены с множителем ωt, и отбрасываем с множителем $(\omega t)^2$, получаем

$$y'' = 2g(\omega t)\cos\varphi - 2\omega x'\sin\varphi$$

Это уравнение дает по интегрировании

$$y' = gt^2\omega\cos\varphi - 2\omega x\sin\varphi = gt(\omega t)\cos\varphi - 2\omega t\frac{x}{t}\sin\varphi \tag{20}$$

На основании первого уравнения (18) видно, что последний член второго порядка относительно ωt, поэтому, ограничиваясь членами первого порядка, получим

$$y = \frac{1}{3}g\omega t^3\cos\varphi \tag{21}$$

Отбрасывая в первом уравнении член $\frac{1}{2}\omega^2 x(1-\cos 2\varphi)$, который будет четвертого порядка, получим

$$x'' = -2y'\omega\sin\varphi + \frac{1}{2}\omega^2 z\sin 2\varphi$$

и после подстановки вместо y' и z их значений имеем

$$x'' = -\frac{3}{4} gt^2 \omega^2 \sin 2\varphi$$

следовательно

$$x = -\frac{1}{16} gt^4 \omega^2 \sin 2\varphi \tag{22}$$

Возвращаясь к последнему уравнению и удерживая в нем члены второго порядка, имеем

$$z'' = -g - 2gt^2 \omega^2 \cos^2 2\varphi + \frac{1}{2} g\omega^2 t^2 \cos^2 \varphi$$

т. е.

$$z'' = -g - \frac{3}{2} gt^2 \omega^2 \cos^2 \varphi$$

отсюда следует

$$z = -\frac{1}{2} gt^2 - \frac{1}{8} gt^2 \omega^2 t^2 \cos^2 \varphi \tag{23}$$

Уравнения (19), (22), (23) представляют движение свободно падающего тела с точностью до членов *второго* порядка относительно ωt.

Эти уравнения показывают, что под влиянием вращения Земли свободно падающее тело отклоняется на величину

$$y = \frac{1}{3} gt^3 \omega \cos \varphi = \frac{1}{3} gt^2 (\omega t \cos \varphi)$$

к востоку и на величину

$$x = -\frac{1}{16} gt^4 \omega^2 \sin 2\varphi$$

к северу (на что указывает знак минус) и опережает тело, которое бы падало с ускорением g на величину

$$\frac{1}{8} gt^4 \omega^2 \cos^2 \varphi$$

Обозначим через $z_0 = \frac{1}{2} gt^3$, тогда будет по абсолютной величине

$$z = z_0 \left(1 + \frac{1}{4} t^2 \omega^2 \cos 2\varphi\right) \tag{24}$$

Самая глубокая шахта имеет глубину около 1000 м; для нее $t^2 \approx 200$, значит будет $\omega t = \frac{1}{13713} \cdot 14 \approx \frac{1}{1000}$, значит будет

$$\frac{1}{4} (t\omega)^2 \cos 2\varphi = \frac{1}{4} \cdot 200 \frac{1}{13000^2} \cos 2\varphi < \frac{1}{4000000}$$

Эта величина настолько мала, что существующими средствами измерена быть не может, следовательно можно брать

$$z = -\frac{1}{2} g t^2$$

Величина y может быть написана

$$y = \frac{2}{3} z_0 \omega t \cos \varphi \qquad (21')$$

Но при свободном падении с высоты z_0 $t = \sqrt{\frac{2z_0}{g}}$, поэтому будет

$$y = \frac{2}{3} z_0 t\omega \cos \varphi = \frac{1}{20000} z_0 \sqrt{\frac{2z_0}{g}} \cos \varphi \qquad (21'')$$

Эта величина составляет в широте $\varphi = 53°$, где $\cos \varphi = 0.60$.

При $z = 100$ м . . . . . $y = 9.5$ мм
» $z = 200$ » . . . . . $y = 26.8$ »
» $z = 300$ » . . . . . $y = 49.3$ »

Эти величины хотя и весьма малые, но могут быть измерены, такие испытания были произведены Рейхом в шахте близ Фрейбурга, причем, несмотря на громадную трудность измерений, получилось удовлетворительное согласие наблюдений к вычисленной величине. Высота падения была $158\,^1/_2$ м, среднее отклонение из 106 опытов оказалось $28\,^1/_3$ мм, отклонение к югу приблизительно в 20 раз меньше.

Главная трудность наблюдений состояла в установлении с достаточной точностью теоретического места падения (отвесной линии) и устремления боковых токов воздуха, влияющих на правильность движения тела. (См. статью Пауссона в „Journal de l'Ecoll polytechnique“ за 1838 г.).[1]

---

[1] Над теорией отклонения падающих тел работал и Гаусс (см.: C. F. Gauss, Werke, Bd. X, 2. — H. Geppert. Uber Gauss Arbeiten zur Mechanik und Potentialtheorie; там же о гауссовой модификации маятника Фуко). Однако наиболее полное развитие рассматриваемой теории принадлежит безвременно скончавшемуся в 1919 г. советскому астроному М. А. Вильеву (Исследование траектории свободно падающего в пустоте тела. Изв. АН, 1916, стр. 643—671). (*Ред.*).

О ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА[1]

§ 1. Ровно 100 лет тому назад в ноябрьском выпуске 1840 г. „Журнала чистой и прикладной математики“ Ж. Лиувилля появилась обширная (60 стр. in 4°) статья Олинда Родрига „О геометрических законах, управляющих перемещениями в пространстве твердой системы, и об изменениях координат, происходящих от этих перемещений, если рассматривать их независимо от причин, могущих их вызвать“.[2]

В этой статье О. Родриг приводит все, что по вопросу о перемещениях твердого тела было сделано до него, а затем дает свои подробные и обстоятельные исследования этого вопроса; таким образом, его статья впоследствии в виде более или менее кратких выдержек вошла во все известные руководства по теоретической механике.

Не вдаваясь в подробности, мы приведем здесь важнейшие свойства перемещений твердого тела, которые надо отчетливо знать в гироскопическом деле.

§ 2. В учении о перемещении не рассматривается ни время, в течение которого оно совершалось, ни путь, по которому тело следовало, ни причина, которая заставила тело перейти из одного положения в другое, а рассматривается единственно только начальное и конечное положение тела, которые относятся к какой-либо системе координат, принимаемой за неподвижную.

Мы условимся брать систему прямоугольных прямолинейных координат $oxyz$ (фиг. 1), причем направления осей возьмем так, чтобы при повороте в плоскости xoy на угол в 90° по часовой стрелке ось ox переходила в oy; затем при повороте в плоскости yoz по часовой

---

[1] Неопубликованная статья акад. А. Н. Крылова. Подлинник хранится в Архиве АН СССР (ф. 759, оп. 1, № 89а).

[2] Olinde Rodrigues. Des lois géometriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés independamment des causes qui peuvent les produire (Journ. d. Math. pures et appliqueés, Liouville, t. V, 1840, p. 380—440). — Заметим, что никаких чертежей в тексте этой статьи не имеется; те фигуры, которые мы помещаем в тексте, выполнены самим А. Н. Крыловым. (*Ред.*).

стрелке на угол 90° ось *oy* переходила в *oz* и, наконец, ось *oz* при повороте на 90° по часовой стрелке переходила в ось *ox*.

Перемещение твердого тела называется *„поступательным“*, если перемещения всех его точек равны и параллельны между собою.

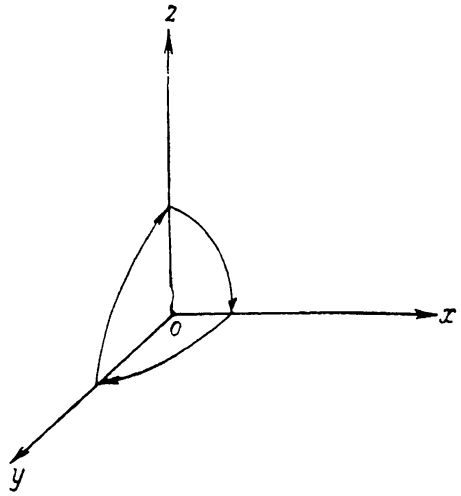
Перемещением точки называется отрезок прямой, соединяющий начальное положение $A_0(x_0, y_0, z_0)$ рассматриваемой точки с конечным ее положением $A_1(x_1, y_1, z_1)$.

Этому отрезку приписывают *величину* и *направление*.

Величина перемещения A_0A_1 измеряется расстоянием или длиною l отрезка A_0A_1, эта величина считается всегда положительной, т. е.

$$l = +\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)} \qquad (1)$$

Направление перемещения определяется косинусами углов, составляемых направлением от A_0 к A_1 с положительными частями осей координат, так что:



Фиг. 1.

$$\cos(\widehat{lx}) = \frac{x_1 - x_0}{l} = a$$
$$\cos(\widehat{ly}) = \frac{y_1 - y_0}{l} = b \qquad (2)$$
$$\cos(\widehat{lz}) = \frac{z_1 - z_0}{l} = c$$

На основании формулы (1) очевидно, что будет всегда

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \qquad (3)$$

каковы бы ни были знаки самих косинусов, определяемых алгебраически по величине и знакам координат.

При таких условиях *проекции* перемещения на оси координат будут выражаться формулами

$$lx = l\cos(\widehat{lx}) = x_1 - x_0$$
$$ly = l\cos(\widehat{ly}) = y_1 - y_0 \qquad (4)$$
$$lz = l\cos(\widehat{lz}) = z_1 - z_0$$

Само собою разумеется, что хотя величина l перемещения всегда положительная, но ее проекции на оси координат имеют знаки разностей, стоящих в правой части равенств (4).

§ 3. Положим, что рассматриваемая точка, начальное положение которой было $A_0(x_0, y_0, z_0)$, сперва была перемещена в $A_1(x_1, y_1, z_1)$, а затем из A_1 в $A_2(x_2, y_2, z_2)$; обозначим перемещение A_0A_1 через l_1, перемещение A_1A_2 — через l_2, ясно, что окончательное положение точки есть A_2 и, значит, ее полное перемещение есть $L = A_0A_2$ и его проекции

$$x_2 - x_0, \qquad y_2 - y_0, \qquad z_2 - z_0$$

Но мы имеем тожественно

$$x_2 - x_0 = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1)$$
$$y_2 - y_0 = (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1)$$
$$z_2 - z_0 = (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1)$$

т. е. при понятных обозначениях:

$$L_x = L\cos(\widehat{Lx}) = x_2 - x_0 = l_1\cos(\widehat{l_1 x}) + l_2\cos(\widehat{l_2 x})$$
$$L_y = L\cos(\widehat{Ly}) = y_2 - y_0 = l_1\cos(\widehat{l_1 y}) + l_2\cos(\widehat{l_2 y})$$
$$L_z = L\cos(\widehat{Lz}) = z_2 - z_0 = l_1\cos(\widehat{l_1 z}) + l_2\cos(\widehat{l_2 z})$$

Эти равенства показывают, что перемещения l_1 и l_2 „складываются“ по правилу параллелограмма.

Совершенно так же увидим, что несколько перемещений $l_1, l_2, \ldots, l_n$ точки складываются по правилу „многоугольника“ и что сумма проекций „составного“ перемещения на любую ось равна *алгебраической* сумме проекций составляющих перемещений точки на эту ось.

Само же составное перемещение L равно „геометрической“ сумме составляющих перемещений $l_1, l_2, \ldots, l_n$.

Очевидно, что это свойство относится и к „сложению“ *поступательных* перемещений твердого тела, ибо таковые сводятся к перемещениям любой точки рассматриваемого тела.

§ 4. Следующим по простоте перемещением твердого тела является его перемещение, параллельное заданной неподвижной плоскости; так именуется такое перемещение тела, при котором всякая плоскость, проведенная в теле при начальном его положении параллельно заданной плоскости, остается ей параллельной и после перемещения; иными словами, всякая фигура, взятая в теле, плоскость которой параллельна заданной первоначально плоскости, перемещена, оставаясь в своей плоскости.

Рассмотрим сперва такое перемещение какой-либо заданной плоскости фигуры.

Очевидно, что положение плоской фигуры, которая перемещена, оставаясь, скажем, в плоскости чертежа лицевою стороною вверх, определяется положением какой-либо прямой AB этой фигуры.

Итак, пусть A_0B_0 есть начальное положение этой прямой и $A_0B_0C_0$ — положение самой фигуры; A_1B_1 и $A_1B_1C_1$ суть соответствующие положения после перемещения.

Таким образом, A_0A_1 есть перемещение точки A и B_0B_1 есть перемещение точки B.

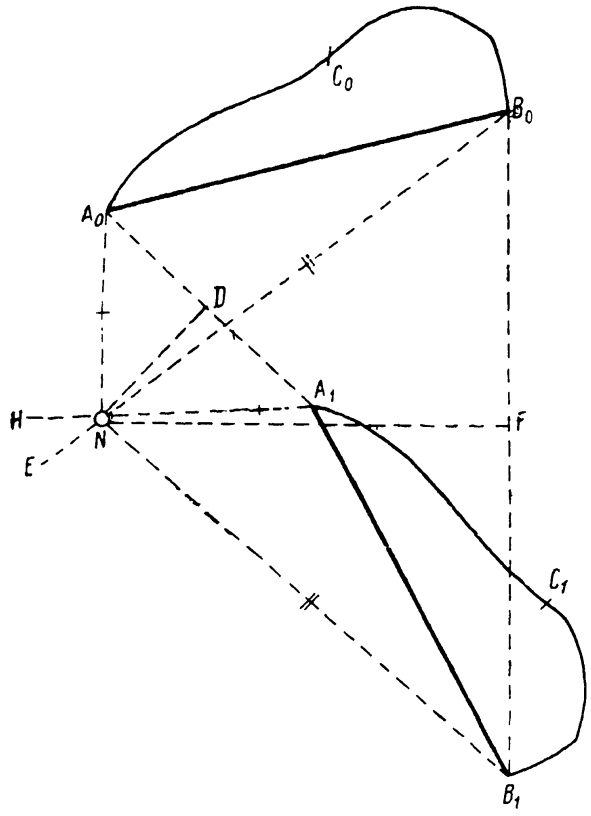
Через середину D прямой A_0A_1 (фиг. 2) проводим перпендикуляр DE к этой прямой; точно так же через середину F прямой B_0B_1 проводим к этой прямой перпендикуляр FH. Эти два перпендикуляра, DE и FH,

пересекутся в точке N, которую и отмечаем, и соединяем с точками A_0, A_1, B_0, B_1 прямыми NA_0; NA_1; NB_0; NB_1, тогда получаем треугольники A_0B_0N и A_1B_1N.

Эти треугольники равны, ибо три стороны одного равны соответственно трем сторонам другого, т. е.

$$NA_0 = NA_1$$
$$NB_0 = NB_1$$
$$A_0B_0 = A_1B_1$$

Следовательно, и углы A_0NB_0 и A_1NB_1 равны, т. е.



Фиг. 2.

$$\angle A_0NB_0 = \angle A_1NB_1 \quad (*)$$

Придавая к обеим частям этого равенства общий угол B_0NA_1, получим равенство:

$$\angle A_0NB_0 + \angle B_0NA_1 = \angle A_1NB_1 + \angle B_0NA_1$$

т. е.

$$\angle A_0NA_1 = \angle B_0NB_1 \quad (**)$$

Из равенств (*) и (**) следует:

1) что при указанном перемещении точка N осталась на месте;

2) что, после поворота фигуры $A_0B_0C_0$ около точки N на угол A_0NA_1, фигура $A_0B_0C_0$ примет положение $A_1B_1C_1$.

Таким образом, имеет место

Теорема I. *Всякое перемещение плоской фигуры $A_0B_0C_0$ в ее плоскости состоит в повороте этой фигуры около неподвижного центра N, лежащего в этой плоскости.*

Очевидно, что если через точку N провести перпендикуляр к плоскости фигуры, то при указанном повороте все точки этого перпендикуляра останутся на месте, и можно сказать, что не только перемещение фигуры $A_0B_0C_0$, но и всего тела состоит в повороте около этого перпендикуляра, как около оси.

Отсюда следует

Теорема II. *Перемещение тела, параллельное плоскости, состоит в повороте этого тела около некоторой неподвижной оси, перпендикулярной к сказанной плоскости.*

При выводе этих теорем мы предположили общий случай, когда перпендикуляры DE и FH пересекаются в точке N, лежащей в *конечном* расстоянии от перемещений A_0A_1 и B_0B_1. В частном случае может оказаться. что прямые DE и FH между собою параллельны, причем есл и они от точек D и F идут в одну сторону, то и прямые A_0B_0 и A_1B_1 будут между собою параллельны и $A_0A_1=B_0B_1$ направлены в одну сторону, т. е. перемещение тела поступательное; если же прямые DE и FH, будучи параллельными, направлены в противоположные стороны, то, составив чертеж, нетрудно видеть, что перемещение будет состоять из поворота на 180° около середины прямой A_0B_0 и поступательного ее перемещения. Нетрудно разобрать и другие частные случаи, на чем останавливаться не будем.

§ 5. Другое простейшее перемещение есть то, при котором *одна и та же точка тела* остается неподвижной; оно называется вращением тела около неподвижной точки.

Примем эту неподвижную точку O за центр и опишем произвольным радиусом вспомогательную сферу, остающуюся *неподвижной* в пространстве, и вообразим другую сферу, описанную тем же радиусом, но неизменно связанную с телом. Очевидно, что при перемещении тела эта подвижная сфера будет скользить по неподвижной и всякая фигура, взятая или начерченная на подвижной сфере, будет двигаться по сфере неподвижной совершенно подобно тому, как плоская фигура перемещается в своей плоскости.

Положение такой сферической фигуры вполне определяется положением двух ее точек, A и B, через которые для ясности вообразим проведенным большой круг сферы.

Итак, вообразим, что для рассматриваемой фигуры начальное положение определяется положением точек A_0, B_0 на неподвижной сфере или, что то же, дугою большого круга A_0B_0; конечное положение обозначим A_1B_1.

Проведем дуги больших кругов A_0A_1 и B_0B_1; это будут, условно выражаясь, „сферические“ перемещения точек A и B.

Отметим середины D и F дуг A_0A_1 и B_1B_1 и совершенно подобно тому, как мы поступали на плоскости, проведем через эти точки дуги DE и FH, соответственно перпендикулярные дугам A_0A_1 и B_0B_1. Дуги DE и FH пересекутся в точке N на неподвижной и подвижной сферах, и совершенно подобно тому, как для плоскости мы видим, что эта точка не переместилась, а так как точка O тоже неподвижна, то и вся прямая ON неподвижна и не переместилась, т. е. перемещение тела свелось к повороту около неподвижной оси.

Таким образом имеем

Теорема III. *Всякое перемещение тела около неподвижной точки приводится к повороту на некоторый угол около неподвижной оси, проведенной через сказанную точку.*

Здесь никаких частных случаев нет, ибо на сфере нет дуг *больших* кругов, не пересекающихся между собою.

§ 6. Теперь можно перейти к изучению самого общего перемещения *твердого тела.*

Отметим в теле какую-либо точку P; пусть при начальном положении тела эта точка занимает положение P_0 и при конечном положении тела — положение P_1.

Сообщим телу *поступательное* перемещение P_0P_1, тогда точка P_0 совместится с P_1 так, что эту точку можно принять за неподвижную на основании теоремы III, чтобы привести тело в его окончательное положение, надо будет повернуть тело около некоторой оси, проходящей через точку P_1, или, что то же, через точку P тела.

Вообразим теперь, что в теле взята какая-либо другая точка Q, и пусть начальное ее положение есть Q_0, т. е. когда P находилось в P_0, то Q находилось в Q_0, а после перемещения, т. е. когда точка P заняла положение P_1, точка Q заняла положение Q_1, так что для приведения тела в его окончательное положение надо телу сообщить поворот около некоторой оси, проходящей через точку Q_1, или, что то же, через точку Q тела.

Спрашивается, есть ли какое-либо соотношение между углами поворотов, поступательными перемещениями и положением осей поворота?

Ответ на эти вопросы получается на основании следующей теоремы, данной в 1830 г. французским геометром Михаилом Шалем (Michel Chasles).

Теорема Шаля. *Каким бы способом ни было произведено перемещение твердого тела из одного заданного положения в другое также заданное, то при разложении этого перемещения на поступательное, общее всем точкам тела, и вращательное около некоторой оси имеют место следующие свойства:*

1) *ось поворота имеет одно и то же направление в пространстве;*

2) *угол поворота имеет одну и ту же величину;*

3) *проекция поступательного перемещения на направление оси вращения сохраняет постоянную величину, для какой бы точки тела это поступательное перемещение ни было взято.*

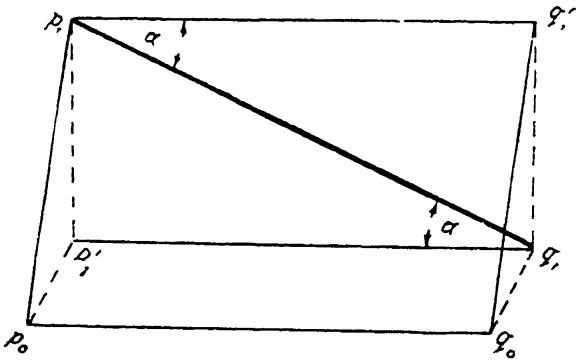
Доказательство этой знаменитой теоремы состоит в следующем рассуждении: возьмем в теле какие-нибудь две точки P и Q, начальные положения которых суть P_0, Q_0 и конечные P_1 и Q_1.

Вообразим, что телу сообщено поступательное перемещение P_0P_1, после которого точка P из P_0 переведена в точку P_1, т. е. в ее окончательное положение, но точка Q пришла из Q_0 в такое положение Q_1', при котором ее перемещение Q_0Q_1' равно и параллельно P_0P_1. Так как точка P заняла свое окончательное положение P_1, то, чтобы и тело привести в его окончательное положение, надо телу сообщить

около определенной оси $P_1 I$ поворот на некоторый угол α. При таком повороте *всякая* плоскость, перпендикулярная к оси $P_1 I$, скользит в самой себе и поворачивается около оси $P_1 I$ на один и тот же угол α, все же точки, лежащие на оси $P_1 I$, не изменяют своего положения.

Вообразим же в пространстве неподвижную ось $P_1 I$ и плоскость S, проведенную через точку Q тела перпендикулярно направлению $P_1 I$; при поступательном перемещении $P_0 P_1$ плоскость S перемещается параллельно самой себе, и когда точка Q придет в Q_1', то плоскость S займет некоторое положение R, в котором будет лежать точка Q_1', и в этой же плоскости будет лежать и точка Q_1, ибо при повороте около оси $P_1 I$, приводящем точку Q из промежуточного ее положения Q_1' в окончательное Q_1, плоскость R только скользит в самой себе.

Отсюда следует, что если телу будет сперва сообщено поступательное перемещение $Q_0 Q_1$, то плоскость S совместится с плоскостью R, и чтобы привести тело в его окончательное положение надо будет повернуть тело около некоторой оси $Q_1 K$, *перпендикулярной к плоскости* R, а значит, параллельной оси $P_1 I$, что и доказывает п. 1 теоремы.



Фиг. 3.

Так как плоскости S и R параллельны между собою и обе перпендикулярны к прямой $P_1 I$, точки же P и Q и точки $P_1 Q_1$ лежат соответственно в плоскостях S и R, то проекции длин PP_1 и QQ_1 равны расстоянию между сказанными плоскостями и, значит, равны между собою, чем и доказан п. 2 теоремы.

Для доказательства п. 3 теоремы Шаля составим чертеж, спроектировав обе последовательности перемещений на плоскость.

Пусть начальное положение проекции прямой PQ есть p_0, q_0 (фиг. 3), окончательное положение $p_1 q_1$, причем $p_0 q_0 = p_1 q_1$. Возьмем перемещения по первому способу, т. е. когда тело перемещено *поступательно* так, чтобы точка P перешла из положения P_0 в P_1, при этом ее проекция переместится из p_0 в p_1. Перемещение точки Q будет $q_0 q_1'$, равное и параллельное $p_0 p_1$, и точка Q ляжет в q_1', причем так как перемещение тела поступательное, то $p_1 q_1$ параллельно и равно $p_0 q_0$, которое само равно $p_1 q_1'$, значит

$$p_1 q_1' = p_1 q_1 = p_0 q_0 \qquad (*)$$

Поэтому, чтобы перевести точку q_1' в ее окончательное положение q_1, сохраняя положение точки p_1, надо повернуть прямую $p_1 q_1$, а значит,

и все тело около некоторой оси p_1K, или, что то же, P_1K на угол $q_1'p_1q_1=\alpha$.

По второму способу, когда телу будет сообщено поступательное перемещение, при котором точка Q перейдет из Q_0 в Q_1, то проекция этой точки перейдет из точки q_0 в точку q_1, и точка p_0 перейдет в p_1', причем p_0p_1' будет равно и параллельно q_0q_1, и прямая $p_1'q_1$ равна и параллельна p_0q_0. Из рассмотрения этого чертежа ясно, что для того, чтобы точка p_1' поворотом около точки q_1 в плоскости S была перемещена в свое окончательное положение p_1, надо телу сообщить поворот на угол $p_1'q_1p_1$, а так как прямые p_1q_1' и $p_1'q_1$ между собою параллельны, то угол

$$p_1'q_1p_1=\alpha$$

т. е. при обоих способах перемещения угол поворота один и тот же и в ту же сторону направлен, в нашем случае по часовой стрелке.

Таким образом и п. 3 теоремы Шаля доказан.

§ 7. Из бесчисленного множества способов разложения общего перемещения твердого тела на поступательное и вращательное, между которыми установлена связь, выраженная теоремою Шаля, *отмечают тот способ, при котором направление поступательного перемещения* совпадает с направлением оси вращения.

Чтобы построить ось вращения для этого случая, поступают так: берут в теле какие-либо три точки A, B, C, *не лежащие на одной прямой*, и пусть начальное их положение есть $A_0B_0C_0$ и конечное $A_1B_1C_1$, так что перемещения этих точек суть A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1. По теореме Шаля проекции этих перемещений на направление оси вращения между собою равны. Чтобы построить направление оси вращения, берут какую-либо неподвижную в пространстве точку O и проводят через нее прямые OE, OF и OH, соответственно параллельные A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 и откладывают по этим прямым длины

$$OE=A_0A_1;\qquad OF=B_0B_1;\qquad OH=C_0C_1$$

Точки E, F, H определяют плоскость, перпендикулярную к искомому направлению оси вращения, которое получится, если опустить на эту плоскость EFH перпендикуляр из точки O.

Чтобы получить самое положение оси вращения, стоит только спроектировать на плоскость EFH начальные и конечные положения двух каких-либо из вышеуказанных точек A, B, C, например A и B; пусть эти проекции будут $A_0'B_0'$ и $B_1'A_1'$. В плоскости EFH по указанному в § 4 приему строят „центр поворота“ I, прямая IN, проведенная через точку I перпендикулярно к плоскости EFH, и есть искомая ось.

Для любой точки тела, взятой на прямой IN, *поступательное* перемещение будет совпадать с осью вращения.

Таким образом самое общее перемещение твердого тела может быть приведено *к поступательному перемещению вдоль по некоторой прямой и к повороту около этой прямой.*

Такое перемещение, подобное перемещению винта в неподвижной гайке, называется *винтовым*, и предыдущее свойство может быть кратко выражено так: *всякое перемещение твердого тела может быть приведено к винтовому.*

О сложении вращений

§ 8. В § 3 показана замена двух или нескольких последовательных перемещений точки *одним*, которое выполняется построением их геометрической суммы.

Совершенно то же имеет место и для *поступательных* перемещений твердого тела.

Такая замена двух или нескольких последовательных перемещений одним называется *сложением перемещений.*

Рассмотрим теперь сложение других перемещений твердого тела.

Положим, что требуется сложить два вращения около параллельных осей, например вращение корабля около вертикальной оси и вращение установленной на нем башни.

Итак, пусть даны оси A и B, перпендикулярные к плоскости чертежа, и два последовательные перемещения тела суть:

1) поворот тела около оси A на угол α и

2) поворот тела на угол β около того положения, которое после первого поворота приняла ось B.

Так как обе оси перпендикулярны к плоскости чертежа, то достаточно рассмотреть повороты около „центров“ A и B, в которых оси пересекают плоскость чертежа.

Пусть A_0 и B_0 (фиг. 4) суть начальные положения точек A и B.

Сообщаем сперва телу поворот около оси A_0 на угол α, тогда точка B_0 придет в точку B_1, затем, оставляя точку B_1 на месте, сообщаем телу около оси B_1 поворот на угол β, тогда точка A_0 придет в точку A_1 и в результате обоих поворотов прямая AB из начального своего положения пришла в положение A_1B_1.

Построим по правилу § 4 общий центр поворота, которым совместно точка A из A_0 перемещается в A_1 и точка B перемещается из B_0 в B_1. Для построения точки C надо, отметив середины дуг B_0B_1 и A_0A_1, т. е. точки a и b, провести равноделящие углов $B_0A_0B_1$ и $A_0B_1A_1$; пересечение этих равноделящих и даст положение центра поворота C, а значит, и соответствующей оси. Проведем прямые CB_1, CB_0 и равноделящую aCA_0, проведем также прямую bCB_1, тогда получим треугольники A_1B_1C и A_0B_0C. В этих треугольниках

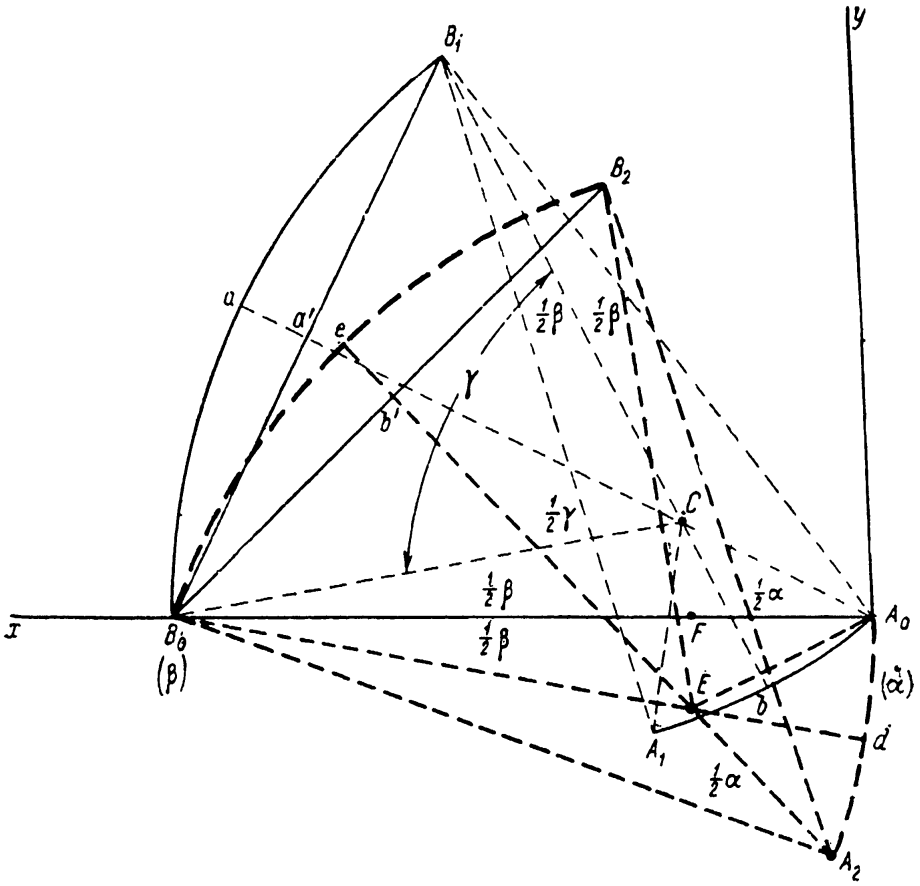
$$A_1B_1 = A_0B_0; \qquad A_1C = A_0C; \qquad B_0C = B_1C$$

Следовательно, эти два треугольника равны и угол

$$CB_1A_1 = CB_0A_0 = \frac{1}{2}\beta$$

Половина угла поворота около точки C есть угол $aCB_0 = \frac{1}{2}\gamma$, но этот угол есть внешний для треугольника CB_0A_0, следовательно

$$aCB_0 = CA_0B_0 + CB_0A_0$$



Фиг. 4.

т. е.

$$\frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$$

Значит, полный угол поворота около оси C будет

$$\gamma = \alpha + \beta$$

Из треугольника A_0B_0C следует

$$\frac{A_0C}{\sin\frac{1}{2}\beta} = \frac{B_0C}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{A_0B_0}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \qquad (1)$$

Этими равенствами определяется положение центра, значит и оси равнодействующего поворота для их *первой* последовательности.

Перейдем теперь к другой последовательности и для отличия составим чертеж жирными пунктирными линиями.

При повороте около точки B_0 на угол β точка A перейдет из положения A_0 в A_2, второй поворот производится около точки A_2 на угол α, этим поворотом точка B перемещается из B_0 в B_2 и окончательное положение прямой есть A_2B_2.

Подобно тому, как и в первом случае, проводя равноделящие B_0d и A_2e, получаем в точке их пересечения центр поворота E, очевидно, что этот центр не будет совпадать с центром поворота C при первом порядке вращений, ибо точка E определяется пересечением иных прямых, нежели точка C.

Из равенства треугольников B_0A_2E и A_2B_2E заключаем, что угол $A_2B_0E = \frac{1}{2}\beta$, отсюда, как и в первом случае, найдем, что угол поворота

$$B_2EB_0 = A_0EA_2 = \alpha + \beta$$

как и в первом случае.

Положение точки E определяется из пропорции, следующей из треугольника A_0B_0E:

$$\frac{A_0E}{\sin\frac{1}{2}\beta} = \frac{B_0E}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{A_0B_0}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \qquad (2)$$

Вместе с тем из равенства и симметричного расположения треугольников A_0B_0C и A_0B_0E относительно прямой A_0B_0 видно, что центры поворота C и E расположены симметрично относительно прямой A_0B_0, т. е. прямая CE (на чертеж не нанесенная) перпендикулярна к A_0B_0 и разделяется точкою пересечения с этой прямою пополам.

Отсюда видно, что „равнодействующий“ поворот около двух параллельных осей равен сумме обоих поворотов, когда они совершаются в одну сторону, независимо от их порядка, но положение оси этого суммарного поворота зависит от того порядка, в котором они следуют один за другим, т. е. сложение вращений конечной величины есть действие не коммутативное.

Нетрудно показать, что если одно вращение, скажем α, совершается по часовой стрелке, а другое β — против часовой стрелки, то суммарный поворот γ будет

$$\gamma = \alpha - \beta$$

Для удобства определения положения точек C и E относительно прямой A_0B_0 примем точку A_0 этой прямой за начало прямолинейных

прямоугольных координат, ось A_0x направим по прямой A_0B_0 ось A_0y направим так, что при повороте около точки A_0 на 90° по часовой стрелке ось A_0x переходит в A_0y.

Отметим точку F пересечения прямой CE с прямой A_0B_0, т. е. с осью A_0x, тогда координаты точек C и E будут:

$$x_C=A_0F;\quad y_C=FC;\quad x_E=A_0F;\quad y_E=-FE$$

Очевидно, будет

$$x_C=A_0C\cos\frac{1}{2}\alpha$$

$$y_C=A_0C\sin\frac{1}{2}\alpha$$

Но из пропорции (1) имеем

$$A_0C=A_0B_0\frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

или, полагая

$$A_0B_0=l$$

$$A_0C=l\frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

Следовательно,

$$x_C=l\frac{\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)};\qquad y_C=l\frac{\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

иначе

$$x_C=l\frac{\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\gamma};\qquad y_C=l\frac{\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$$

$$x_E=l\frac{\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\gamma};\qquad y_E=-l\frac{\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$$

Эти формулы точные и относятся к любой величине поворотов α и β *около параллельных осей.*

Положим теперь, что углы α, β, γ малые, так что с требуемою для практики точностью можно полагать:

$$\sin\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{48}\alpha^3; \qquad \sin\frac{1}{2}\beta=\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{48}\beta^3$$

$$\sin\frac{1}{2}\gamma=\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{48}\gamma^3; \qquad \cos\frac{1}{2}\alpha=1-\frac{1}{8}\alpha^2$$

тогда будет

$$x_C=l\,\frac{\beta\left(1-\frac{1}{24}\beta^2\right)\left(1-\frac{1}{8}\alpha^2\right)}{\gamma\left(1-\frac{1}{24}\gamma^2\right)}\approx l\,\frac{\beta}{\gamma}\left(1-\frac{1}{24}\beta^2\right)\left(1-\frac{1}{8}\alpha^2\right)\left(1+\frac{1}{24}\gamma^2\right)\approx$$

$$\approx l\,\frac{\beta}{\gamma}\left(1-\frac{1}{24}\beta^2-\frac{1}{8}\alpha^2+\frac{1}{24}\gamma^2\right)\approx l\,\frac{\beta}{\gamma}\left(1+\frac{1}{12}\alpha(\beta-\alpha)\right) \qquad (*)$$

прочие члены будут четвертого и шестого порядка и могут быть отброшены.

Совершенно так же имеем

$$y_C=l\,\frac{\beta\alpha\left(1-\frac{1}{24}\beta^2\right)\left(1-\frac{1}{24}\alpha^2\right)}{\gamma\left(1-\frac{1}{24}\gamma^2\right)}=\frac{1}{2}l\,\frac{\alpha\beta}{\gamma}\left(1-\frac{1}{24}\alpha^2\right)\left(1-\frac{1}{24}\beta^2\right)\left(1+\frac{1}{24}\gamma^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}l\,\frac{\alpha\beta}{\gamma}\left(1-\frac{1}{24}\alpha^2-\frac{1}{24}\beta^2+\frac{1}{24}\gamma^2\right)=\frac{1}{2}l\,\frac{\alpha\beta}{\gamma}\left(1+\frac{1}{12}\alpha\beta\right) \qquad (**)$$

причем

$$\gamma=\alpha+\beta$$

Формулы (*) и (**) обладают точностью до членов третьего порядка ***включительно.***

Итак, мы имеем приближенные формулы

$$\begin{aligned} x_C&=l\,\frac{\beta}{\gamma}\left[1+\frac{1}{12}\alpha(\beta-\alpha)\right]; & y_C&=\frac{1}{2}l\,\frac{\alpha\beta}{\gamma}\left(1+\frac{1}{12}\alpha\beta\right)\\ x_E&=l\,\frac{\beta}{\gamma}\left[1+\frac{1}{12}\alpha(\beta-\alpha)\right]; & y_E&=-\frac{1}{2}l\,\frac{\alpha\beta}{\gamma}\left(1+\frac{1}{12}\alpha\beta\right)\end{aligned} \qquad (3)$$

Очевидно, что в пределе будет

$$x_C=l\,\frac{\beta}{\gamma}=l\,\frac{\beta}{\alpha+\beta}=x_E$$

$$y_C=y_E=0$$

т. е. точки C и E в пределе совпадут с точкою F, через которую и будет проходить ось суммарного поворота $(\alpha+\beta)$, параллельно осям α и β. Точка F лежит на прямой A_0B_0 и разделяет эту прямую на части, обратно пропорциональные поворотам α и β.

Чтобы иметь наглядное представление о численной величине рассмотренных величин, возьмем пример; пусть будет

$$\alpha=\frac{1}{10};\qquad \beta=\frac{1}{5};\qquad \gamma=\alpha+\beta=\frac{3}{10}$$

тогда будет

$$x_C=x_E=l\,\frac{1}{5}\cdot\frac{10}{3}\left(1+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\right)=\frac{2}{3}\,l\left(1+\frac{1}{1200}\right)$$

$$y_C=-y_E=\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{10}{3}\left(1+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{30}\,l\left(1+\frac{1}{600}\right)$$

Как видно, эти значения x_C и y_C отличаются от своих предельных значений на

$$\frac{1}{1800}\,l$$

что, например, при $l=100$ мм составит

$$\frac{1}{18}\text{ мм}$$

Нетрудно также составить приближенные выражения для углов поворота и сличить их с точными, на чем останавливаться не будем.

§ 9. Рассмотрим теперь случай, когда оси составляющих поворотов пересекаются в точке O, которую примем за центр вспомогательной сферы, на поверхности которой и будем выполнять построение, подобное вышеописанному, заменяя проводимые прямые дугами больших кругов, делая совершенно те же обозначения, как и при сложении вращений около осей параллельных.

В самом деле, вернемся к фиг. 4, которую надо вообразить начерченной на плоскости S, перпендикулярной к направлению осей вращения, проведенных через точку A и через точку B, в которых эти оси и проектируются и прямая A_0B_0 есть след *плоскости*, проведенной через начальное положение этих осей.

Положим теперь, что надо сложить два вращения около осей OA и OB, пересекающихся в точке O.

Приняв точку O за центр, описываем произвольным радиусом вспомогательную (или как ее также называют — небесную) сферу.

При вращении тела около любой оси, проходящей через точку O, всякая фигура, начерченная на этой сфере, будет двигаться по ее поверхности совершенно подобно тому, как плоская фигура движется в своей плоскости, и, повторяя изложенные выше рассуждения, увидим, что всякое перемещение сферической фигуры по поверхности сферы может быть заменено вращением около „центра поворота“, лежащего на поверхности сферы, иначе говоря около оси, проходящей через „центр поворота“ и центр сферы.

Построение центра поворота на поверхности сферы совершается совершенно подобно, как для плоской фигуры, но вместо того чтобы проводить следы плоскостей, надо на поверхности сферы проводить большие круги, этим плоскостям соответствующие.

Из фиг. 4 видно, что для построения точки C, вместо того, чтобы проводить перпендикуляр через перемещения B_0B_1 точки B, т. е. в пространстве ту плоскость, коей след есть прямая $aa'A_0$, проходящая как через точку a, середину дуги B_0B_1, так и через точку a', середину хорды B_0B_1 и через точку A_0; в пространстве этому следу соответствует плоскость, перпендикулярная плоскости чертежа.

То же самое относится и до *всех* прямых линий на фиг. 4, т. е. все эти прямые суть *следы* плоскостей, перпендикулярных к плоскости чертежа.

Из фиг. 4 видно, что для построения точки C нет надобности проводить перпендикуляры через середины перемещений B_0B_1 и A_0A_1, а можно построить треугольник B_0CA_0, в котором угол $CA_0B_0=\frac{1}{2}\alpha$ и угол $CB_0A_0=\frac{1}{2}\beta$, где α и β суть соответствующие углы поворотов вокруг осей A и B. Откладываем эти углы в обратную сторону, получив точку E.

Возьмем сперва точку C. На плоскости, т. е. на фиг. 4, строится прямолинейный треугольник A_0B_0C, внешний угол, прилегающий к стороне B_0C и к продолжению стороны A_0C, равен $\frac{1}{2}\gamma$, где γ есть искомый равнодействующий угол поворота; но здесь треугольник A_0B_0C не плоский, а сферический и в нем *внешний угол* не равен сумме двух внутренних углов, с ним не смежных; однако, полагая

$$B_0CA_0=\vartheta$$

попрежнему будем иметь

$$\frac{1}{2}\gamma=\pi-\vartheta$$

угол же ϑ найдется из треугольника B_0CA_0, в котором известны сторона $A_0B_0=\lambda$, где λ есть угол B_0OA_0 между обеими осями вращений

и два угла, $\frac{1}{2}\alpha$ и $\frac{1}{2}\beta$, прилегающие к этой стороне. Формула косинуса угла дает

$$-\cos\vartheta = \cos\tfrac{1}{2}\alpha \cdot \cos\tfrac{1}{2}\beta - \sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta \cos\lambda$$

Следовательно, будет

$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma = \cos\tfrac{1}{2}\alpha \cos\tfrac{1}{2}\beta - \sin\tfrac{1}{2}\alpha \cdot \sin\tfrac{1}{2}\beta \cos\lambda \tag{4}$$

Затем, по формуле синусов, будет

$$\frac{\sin A_0 C}{\sin\frac{1}{2}\beta} = \frac{\sin B_0 C}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin\lambda}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$$

Из этой пропорции следует:

$$\begin{aligned} \sin A_0 C &= \frac{\sin\lambda}{\sin\frac{1}{2}\gamma}\sin\tfrac{1}{2}\beta \\ \sin B_0 C &= \frac{\sin\lambda}{\sin\frac{1}{2}\gamma}\sin\tfrac{1}{2}\alpha \end{aligned} \tag{5}$$

Наклонение оси OC к плоскости $A_0 B_0 C$ измеряется дугою CF большого круга, перпендикулярною к стороне $A_0 B_0$, которую обозначим через p.

Из сферического треугольника $A_0 FC$, в котором угол $F = 90°$, следует

$$\sin CF = \sin p = \sin A_0 C \cdot \sin\tfrac{1}{2}\alpha$$

и на основании формулы (5)

$$\sin CF = \sin p = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha \cdot \sin\frac{1}{2}\beta \cdot \sin\lambda}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$$

Совершенно так же будет

$$\sin EF = \sin p = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha \cdot \sin\frac{1}{2}\beta \cdot \sin\lambda}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$$

ибо точка E лежит симметрично с точкою C относительно дуги $A_0 B_0$ большого круга.

В случае весьма малых поворотов α и β, но конечного угла λ между осями, полагая в формуле (4)

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = 1 - \tfrac{1}{8}\alpha^2; \qquad \cos\tfrac{1}{2}\beta = 1 - \tfrac{1}{8}\beta^2; \qquad \cos\tfrac{1}{2}\gamma = 1 - \tfrac{1}{8}\gamma^2$$

$$\sin\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}\alpha\left(1-\frac{1}{24}\alpha^2\right);\qquad \sin\frac{1}{2}\beta=\frac{1}{2}\beta\left(1-\frac{1}{24}\beta^2\right);$$

$$\sin\frac{1}{2}\gamma=\frac{1}{2}\gamma\left(1-\frac{1}{24}\gamma^2\right)$$

получим

$$1-\frac{1}{8}\gamma^2=\left(1-\frac{1}{8}\alpha^2\right)\left(1-\frac{1}{8}\beta^2\right)-\frac{1}{4}\alpha\beta\left(1-\frac{1}{24}\alpha^2\right)\left(1-\frac{1}{24}\beta^2\right)\cos\lambda$$

т. е.

$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\lambda \qquad (6)$$

если пренебрегать членами четвертого порядка относительно α и β.

Эта формула показывает, что в этом случае малые углы поворота α и β складываются по правилу параллелограмма, который строится, откладывая по осям OA и OB соответствующие углы поворотов α и β в каком-либо масштабе; тогда длина ON диагонали этого параллелограмма представит *величину угла* γ суммарного поворота в том же масштабе, но надо помнить, что направление ON не есть направление оси OC равнодействующего поворота, ибо эта ось *не лежит* в плоскости A_0OB_0, а составляет с этою плоскостью угол p, определяемый формулой

$$\sin p=\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\cdot\sin\frac{1}{2}\beta\cdot\sin\lambda}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$$

или, приближенно,

$$p=\frac{1}{2}\frac{\alpha\beta}{\gamma}\sin\lambda$$

с точностью до членов *второго порядка.*

В том случае, когда угол λ весьма малый, будет

$$\sin p=\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\cdot\sin\frac{1}{2}\beta\cdot\sin\lambda}{\sin\frac{1}{2}\gamma}=\frac{1}{2}\frac{\alpha\beta}{\gamma}\lambda=p$$

и угол p будет второго порядка.

Наконец, когда оси параллельны, то $\lambda = 0$ и будет

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2$$

т. е.

$$\gamma = +(\alpha + \beta)$$

причем взят знак плюс, ибо если отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ весьма малое, то, очевидно, что γ должно приближаться к α а не к $-\alpha$.

Мы не будем излагать учения о сложении винтовых перемещений и вообще сложении вращений около осей, непараллельных и не пересекающихся в пространстве.

1 декабря 1940 г.

ОПЕЧАТКИ

Страница	*Строка*	*Напечатано*	*Должно быть*
26	6 сверху	ζN_x	ξN_x
61	14 „	$\frac{\partial F_1}{\partial z_1}$	$\frac{\partial F_1}{\partial z_2}$
65	13 снизу	$+2Dpq$	$-2Dpq$
76	1 „	$\frac{A}{(n^2-k^2)+4k^2h^2}$	$\frac{A}{(n^2-k^2)^2+4h^2k^2}$
81	13 „	n_2-h^2	n^2-h^2
122	10 сверху	ψ_1	ψ_2
160	1 снизу	$\omega-\sigma-f_0>0$	$\omega-\sigma-f_0<0$
174	15 „	$a\cos\cdot\theta'$	$a\cos\theta\cdot\theta'$
289	2 сверху	y_1''	$y_1''\varphi$

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Академии Наук СССР

*

Редактор издательства *О. И. Дейнека*
Технический редактор *А. В. Смирнова*
Корректор *А. С. Малютина*

*

РИСО АН СССР № 4403
Подписано к печати 9/XII 1950 г. М-39724.
Бумага 70 × 108 1/16. Бум. л. 11.
Печ. л. 30.14 + 2 вкл. Уч.-изд. л. 25.1.
Тираж 3000. Зак. № 1751.
Цена в переплете 23 руб.

1-я тип. Изд-ва Академии Наук СССР.
Ленинград, В. О., 9-я линия, д. 12.