Библиотека
«Математическое просвещение»
Выпуск 5

Н. П. Долбилин

Жемчужины теории многогранников

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2000

УДК 513.34
Д64
ББК 22.151.0

Аннотация

Текст брошюры представляет собой обработанные и дополненные записи лекции, прочитанной автором 2 октября 1999 года на Малом мехмате для школьников 9–11 классов.

В брошюре, в частности, рассказывается об основных теоремах теории выпуклых многогранников. Это — теорема Коши о единственности выпуклого многогранника с заданными гранями и теорема Александрова о том, из каких развёрток можно склеить выпуклый многогранник. В основной части брошюры излагаются основные результаты и идеи их доказательства. В Приложении содержатся подробные доказательства нескольких теорем о многогранниках, в том числе доказательство знаменитой теоремы Эйлера.

ISBN 5–900916–48–0

Долбилин Николай Петрович

Жемчужины теории многогранников

(Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“»)
М.: МЦНМО, 2000. — 40 с.: ил.

Главный редактор серии *В. М. Тихомиров.*

Редактор *Р. М. Кузнец.* Технический редактор *М. Ю. Панов.*

Изд. лицензия ЛР №071150 от 11/IV 1995 г. Подписано к печати 6/III 2000 г.
Формат бумаги 60 × 88 1/16. Физ. печ. л. 2,5. Усл. печ. л. 2,5. Уч.-изд. л. 2,38.
Тираж 2000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
121002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11.

Памяти
Александра Даниловича
Александрова
(1912–1999)

Введение

Один молодой человек после прочтения книги Александра Яковлевича Хинчина «Три жемчужины теории чисел» спросил автора этих строк, а имеются ли жемчужины в геометрии. Последовал ответ: несомненно имеются. Прекрасных теорем в геометрии с лихвой бы хватило на великолепное ожерелье. Мы здесь расскажем о двух изумительных теоремах, которые несомненно являются жемчужинами теории многогранников. Одна из них была доказана великим французским математиком Огюстеном Луи Коши, другая принадлежит нашему выдающемуся соотечественнику академику Александру Даниловичу Александрову. Доказательство обеих теорем опирается на знаменитую теорему Эйлера о соотношении между количеством вершин, рёбер и граней в выпуклом многограннике. Это ведь тоже жемчужина, и ещё какая!

Теорема Коши (доказанная в 1813 году) говорит о том, что из данных граней, взятых в определённом порядке, можно склеить единственный (с точностью до движения) выпуклый многогранник. Каждый клеил или держал в руках картонную модель многогранника и ощущал её жёсткость. Это свойство многогранников может вызвать удивление, особенно если сопоставить его с тем, что среди многоугольников жёстким является лишь треугольник. Шарнирный многоугольник с бóльшим числом сторон подвижен. Чтобы задать многоугольник однозначно, требуется знать не только стороны, но и углы. Многогранник же своими гранями задаётся однозначно, несмотря на то что каждые две смежные по ребру грани, взятые сами по себе, легко поворачиваются вокруг общего ребра, словно страницы книжки вокруг корешка. В процессе склеивания модель будущего многогранника может долго сохранять подвижность. Но, как только заклеивается последняя грань, модель становится жёсткой. Доказательство теоремы Коши элементарное (что не означает «лёгкое»), и единственный не школьный материал, который используется в доказательстве, — это и есть знаменитая теорема Эйлера о многогранниках.

Итак, теорема Коши утверждает единственность выпуклого многогранника, который можно склеить из развёртки граней данного многогранника. Теорема Александрова описывает необходимые и достаточные условия на развёртку, при которых из неё можно склеить выпуклый многогранник. В отличие от теоремы Коши, теорема Александрова не является интуитивно очевидной. Как мы увидим позже, многие развёртки, удовлетворяющие условиям этой теоремы, кажутся абсолютно непригодными для того, чтобы клеить из них какой-либо многогранник. И лишь уверенность в теореме Александрова побуждает искать и в итоге находить тот многогранник, который склеивается из данной развёртки.

Доказательство теоремы Александрова совсем не элементарно. Оно, в частности, использует одну важную теорему из топологии. Найти элементарное изложение нам не удалось.

Брошюра разделена на две части. Сначала излагаются основные определения и теоремы, связь между ними и иногда идеи доказательств. Чтобы не перегружать эту часть, доказательства вынесены во вторую часть — Приложение.

Теорема Коши

Выпускника знаменитой парижской Политехнической школы Огюстена Луи Коши (1789–1857) «по его блестящим достижениям во всех областях математики можно поставить почти рядом с Гауссом». Эта оценка французскому математику, данная немецким математиком Феликсом Клейном, очень весома, особенно если учесть, что взаимоотношения между французскими и немецкими математиками развивались в атмосфере острой конкуренции, и признание заслуг соперников никогда не отличалось щедростью. Гигантское научное наследие Коши занимает 25 внушительных томов и включает около 800 работ. Он так часто представлял свои работы в журнал Парижской академии наук *Comptes Rendus*, что академия решила сократить объём публикуемых статей до четырёх страниц. Результаты Коши, принёсшие ему славу великого математика, относятся в основном к математическому анализу, алгебре, математической физике, механике. Его исследования по геометрии могли бы остаться в тени его достижений в этих областях, если бы не работа «О многоугольниках и многогранниках», опубликованная в 1813 году. В этой работе как раз и была доказана знаменитая теорема о выпуклых многогранниках.

Под *многогранником* понимается множество M плоских многоугольников — *граней*, расположенных в пространстве так, что

(1) каждая сторона любого из них является стороной в точности ещё одного многоугольника;

(2) от каждого многоугольника из M к любому другому можно пройти по цепочке многоугольников из M, в которой последовательные многоугольники имеют общую сторону;

(3) если два многоугольника имеют общую вершину, то соединяющую их цепочку можно составить из многоугольников, которые все имеют эту вершину.

Например, фигуры, изображённые на рис. 1, являются многогранниками, совокупность же многоугольников на рис. 2 не является многогранником, потому что условие (1) нарушается для стороны AB; для многоугольников $ABCD$ и DEF нет соединяющей их цепочки, т. е. не выполняется условие (2); условие (3) не выполняется в вершине G.

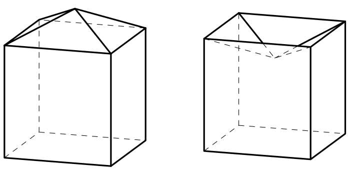


Рис. 1

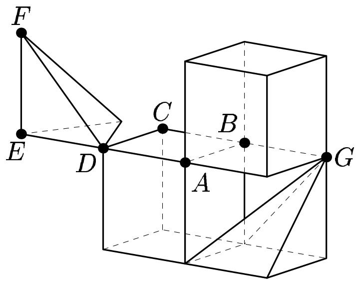


Рис. 2

Два многогранника *равны*, или *конгруэнтны*, если их можно совместить движением. Вспомним, что многогранник называется *выпуклым*, если для каждой его грани плоскость, проходящая через эту грань, оставляет все остальные грани многогранника по одну сторону от этой плоскости.

Теорема Коши о единственности. Два выпуклых многогранника с соответственно равными гранями, составленными в одном и том же порядке, равны.

Вернёмся к многогранникам, показанным на рис. 1. Башня с четырёхскатной крышей на кубическом основании и башня с продавленной крышей составлены из соответственно равных граней, примыкающих друг к другу в одном и том же порядке. Но они не равны друг другу. Один из них невыпуклый, а, как доказал Коши, в классе выпуклых многогранников подобная ситуация невозможна.

Эта теорема объясняет, почему модель выпуклого многогранника не деформируется, или, как ещё говорят, не изгибается. Многогранник, который может непрерывно деформироваться так, что его грани остаются плоскими и равными самим себе, а меняются лишь его двугранные углы, называется *изгибаемым.* Если же такой непрерывной деформации не существует, то многогранник *неизгибаем.*

Выпуклый многогранник неизгибаем. Действительно, допустим, что выпуклый многогранник M изгибаем. Тогда существует другой, не равный ему многогранник M', двугранные углы которого мало отличаются от соответствующих углов многогранника M. Если отличие углов достаточно маленькое, то многогранник M' также выпуклый. А так как соответственные грани этих многогранников равны, то, по теореме Коши, и сами многогранники конгруэнтны.

Для доказательства своей теоремы Коши предложил новый метод, который, по словам А. Д. Александрова, «представляет собой одно из прекраснейших рассуждений, какие только знает геометрия».

Идея доказательства теоремы Коши

Доказательство теоремы о единственности выпуклого многогранника основано на двух замечательных леммах. Рассмотрим выпуклый многогранник. Отметим некоторые его рёбра знаком «+» или «−», а остальные рёбра оставим «нейтральными». Выберем какую-нибудь вершину v и, начиная с любого подходящего к ней ребра, последовательно обойдём все рёбра, сходящиеся в v, и вернёмся к начальному ребру. Если в процессе обхода после очередного ребра с одним знаком следует отмеченное ребро с другим знаком, то мы говорим, что происходит *перемена знака.* Нейтральные рёбра, которые могут находиться между двумя отмеченными рёбрами, здесь не учитываются.

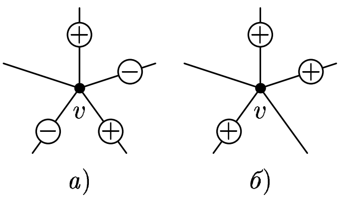


Рис. 3

Обозначим через $N(v)$ общее число перемен знака при обходе вершины v. Так для примера, показанного на рис. 3, *а*, число перемен знака при обходе вершины v равно четырём, а на рис. 3, *б* — нулю. Так как обход вершины заканчивается в том же ребре, с которого он начинается, число перемен знака чётно. В частности, $N(v) = 0$ тогда и только тогда, когда к вершине v не подходит ни одного отмеченного ребра или наряду с нейтральными подходят лишь рёбра одного знака.

Лемма 1 (Коши). Пусть на выпуклом многограннике некоторые рёбра отмечены знаком «+» или «−». Выделим все те вершины многогранника, к которым подходит хотя бы одно отмеченное ребро. Тогда среди выделенных вершин найдётся такая вершина, при обходе которой встретится менее четырёх перемен знака.

В приведённом на рис. 4 примере расстановки знаков на рёбрах октаэдра четыре вершины имеют по четыре перемены знаков и две вершины не имеют перемен знака вообще.

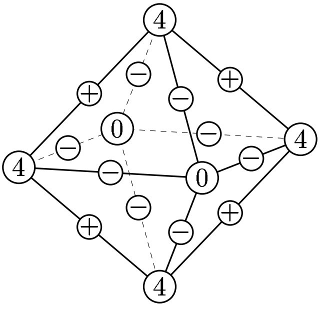


Рис. 4

Во второй лемме речь пойдёт о выпуклых многоугольниках на плоскости и на сфере. Скажем несколько слов о том, что такое сферический многоугольник.

Пусть A_1, A_2, $\ldots$, A_n — совокупность точек на сфере. Замкнутая ломаная, состоящая из n дуг больших окружностей A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1, называется *сферическим многоугольником*. Каждая из n дуг A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 называется *стороной* многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$. *Углом* сферического многоугольника называется угол между касательными, проведёнными к смежным дугам-сторонам в их общей вершине (рис. 5). Сферический многоугольник называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от каждой большой окружности, содержащей его сторону.

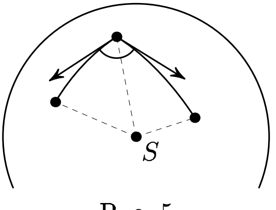


Рис. 5

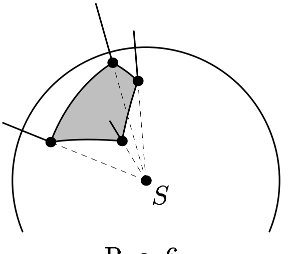


Рис. 6

Каждый выпуклый многогранный угол с вершиной S вырезает на сфере с центром S выпуклый сферический многоугольник, сторонами которого являются дуги, по которым грани многогранного угла пересекаются с этой сферой (рис. 6). Заметим, что при этом равным плоским углам многогранного угла соответствуют равные стороны сферического многоугольника, а равным двугранным углам — равные углы многоугольника.

Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ — выпуклые, оба плоские (или сферические) n-угольники с соответственно равными сторонами:

$$A_1A_2 = B_1B_2,\quad A_2A_3 = B_2B_3,\quad \ldots,\quad A_nA_1 = B_nB_1.$$

Припишем каждой вершине A_i первого многоугольника знак «+» или «−», в зависимости от того угол при вершине A_i больше или меньше угла при вершине B_i. Если $\angle A_i = \angle B_i$, то вершина A_i остаётся нейтральной.

Рассмотрим, например, прямоугольник и параллелограмм с соответственно равными сторонами (рис. 7). Подсчитаем число перемен знака при обходе всех вершин прямоугольника. Это число равно четырём.

Лемма 2 (Коши). *Пусть у двух выпуклых n-угольников на плоскости (или на сфере) соответственные стороны равны, а среди соответственных углов имеются неравные. Отметим знаком «+» (или «−») вершины тех углов первого многоугольника, которые строго больше (или меньше) соответствующих углов другого. Тогда число перемен знака при обходе вершин первого многоугольника не меньше четырёх.*

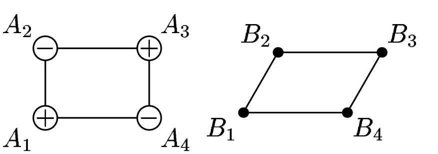


Рис. 7

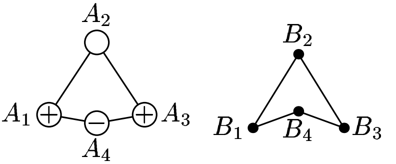


Рис. 8

Заметим, что для невыпуклых многоугольников эта лемма не верна (рис. 8).

Из леммы 2 вытекает важное

Следствие. *Пусть два выпуклых многогранных угла с одинаковым числом граней имеют соответственно равные плоские углы. Припишем каждому ребру первого многогранного угла знак «+» (или «−»), в зависимости от того двугранный угол при нём больше (или меньше) соответствующего двугранного угла другого многогранного угла. Тогда число перемен знака при обходе рёбер первого многогранного угла не меньше четырёх.*

Действительно, из вершин многогранных углов как из центров опишем сферы одинакового радиуса. Грани многогранных углов вырезают на сферах многоугольники, как на рис. 6. Так как соответственные плоские углы многогранных углов равны, равны соответственные стороны сферических многоугольников. А так как углы многоугольников равны двугранным углам многогранных углов, расстановка знаков на рёбрах первого многогранного угла совпадает с расстановкой знаков в вершинах первого многоугольника. Отсюда, по лемме 2, вытекает следствие.

Из этих двух лемм легко получить доказательство теоремы Коши. Допустим, что существуют два неравных выпуклых многогранника M и M' с соответственно равными гранями, взятыми в одинаковом порядке. Это возможно, лишь когда при некоторых соответственных рёбрах этих многогранников имеются *неравные* двугранные углы. Расставим на рёбрах многогранника M знаки «+» и «−», в зависимости от того двугранный угол при данном ребре больше или меньше двугранного угла при соответствующем ребре другого многогранника. При этом соответственные рёбра, двугранные углы при которых равны, не получают никакого знака (остаются нейтральными).

Выберем любую вершину v многогранника M, к которой подходит хотя бы одно ребро со знаком. Возьмём многогранный угол многогранника M с вершиной v. По лемме 2, точнее по следствию из неё, число перемен знака при обходе v не меньше четырёх. С другой стороны, по лемме 1, среди таких вершин должна быть хотя бы одна, при обходе которой число перемен знака не более двух. Полученное противоречие доказывает теорему. Доказательства лемм 1 и 2 приведены в Приложении.

Гипотеза Эйлера и изгибаемые многогранники

Вопрос, однозначно ли задаётся форма многогранной поверхности своими гранями или она может меняться за счёт изменения двугранных углов, интересовал математиков задолго до Коши. В XI книге знаменитых «Начал» Евклида многогранники *определяются* как равные, если они составлены из соответственно равных граней, взятых в одинаковом порядке. Впоследствии многие высказывали мнение, что это, собственно, не определение, а утверждение, нуждающееся в доказательстве. При этом все верили в его справедливость, а в 1776 году великий математик Леонард Эйлер высказал гипотезу: «Замкнутая пространственная фигура не допускает изменений, пока не рвётся». Под «замкнутой пространственной фигурой» понималось то, что сейчас принято называть замкнутой поверхностью, т. е. поверхностью без края. Таким образом, предположение Эйлера относилось не только к многогранным, но и к произвольным поверхностям. Теорема Коши подтвердила гипотезу Эйлера в случае выпуклых многогранников, а также то, что равенство выпуклых многогранников можно определять по Евклиду.

Теорема Коши позволяет также ослабить определение правильных многогранников (тел Платона). Напомним, что *правильным* многогранником называется выпуклый многогранник, у которого все грани суть равные правильные многоугольники и двугранные углы попарно равны. Так вот, вместо равенства углов достаточно потребовать лишь, что в каждой вершине сходится равное число граней. Равенство двугранных углов будет следовать из теоремы Коши.

На протяжении двух веков геометры верили, что не только любой выпуклый, но и любой невыпуклый многогранник тоже неизгибаем. Первые сомнения в этом зародились в 1897 году, после того как французский математик Р. Брикар нашёл первые контрпримеры к гипотезе Эйлера. Правда, эти изгибаемые многогранники, так называемые октаэдры Брикара, — не совсем привычные многогранники: они самопересекаются.

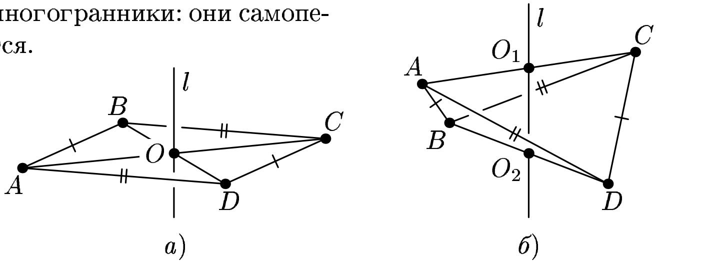


Рис. 9

Идея Брикара очень остроумна. Возьмём в пространстве четырёхугольник $ABCD$ с равными противоположными сторонами: $AB = CD$, $BC = AD$. Если это плоский четырёхугольник, то $ABCD$ — знакомый нам параллелограмм (рис. 9, *а*). Через точку O пересечения его диагоналей проведём прямую l, перпендикулярную к плоскости $ABCD$. Заметим, что при повороте вокруг этой прямой на 180° параллелограмм переходит в себя.

Пусть теперь $ABCD$ — пространственный четырёхугольник, т. е. вершины A, B, C, D не лежат в одной плоскости (рис. 9, *б*). Его диагонали AC и BD лежат на скрещивающихся прямых. Проведём через середины O_1 и O_2 диагоналей прямую l. Так как в данном четырёхугольнике противоположные стороны равны ($AB = CD$, $BC = AD$), прямая l, как нетрудно доказать, перпендикулярна обеим диагоналям. Поэтому при повороте вокруг прямой l на 180° вершины A и C, а также B и D меняются местами и, следовательно, четырёхугольник $ABCD$ переходит в себя.

Возьмём теперь вне прямой l точку S и построим четыре треугольника SAB, SBC, SCD и SDA (рис. 10, *а*). Эти треугольники образуют четырёхгранный угол. В школьном курсе геометрии доказывается, что плоские углы *трёхгранного* угла задают этот трёхгранный угол однозначно. Однако если число граней у пространственного угла больше трёх, то такой однозначности нет. Очевидно, что четырёхгранный угол $SABCD$ допускает непрерывную деформацию. При таком изгибании четырёхугольник $ABCD$ непрерывно деформируется в четырёхугольник $A'B'C'D'$ с соответственно равными сторонами, а ось поворота l четырёхугольника $ABCD$ переходит в ось l' четырёхугольника $A'B'C'D'$.

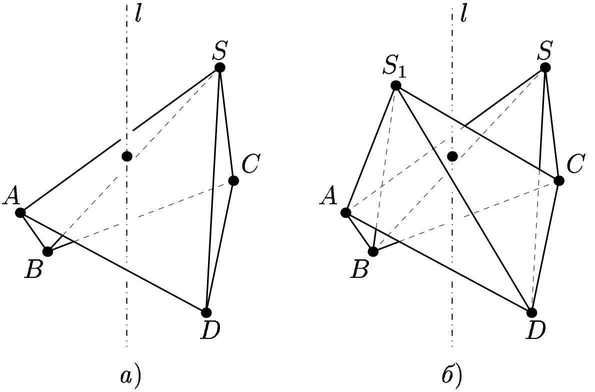


Рис. 10

При повороте вокруг оси l на 180° пространственный угол $SABCD$ переходит в конгруэнтный угол S_1CDAB (рис. 10, *б*). Совокупность восьми треугольников SAB, SBC, SCD, SDA, S_1AB, S_1BC, S_1CD и S_1DA удовлетворяет всем условиям в определении многогранника. Правда, некоторые грани этого многогранника пересекают друг друга. Этот самопересекающийся многогранник и есть *октаэдр Брикара*.

Почему октаэдр Брикара изгибаем? Половинка октаэдра, очевидно, изгибается. Вторая половинка получается из первой поворотом вокруг оси l, и, следовательно, её деформация в точности повторяет деформацию первой половинки. Значит, и весь октаэдр Брикара изгибаем.

В 1970-е годы выяснилось, что Эйлер в своём предположении был «почти» прав... и не прав. Почти прав, потому что, как было установлено в 1975 году, «почти все» многогранники неизгибаемы. «Почти все» означает, что неизгибаемые многогранники составляют в некотором смысле «подавляющее большинство». Два года спустя, в 1977 году,

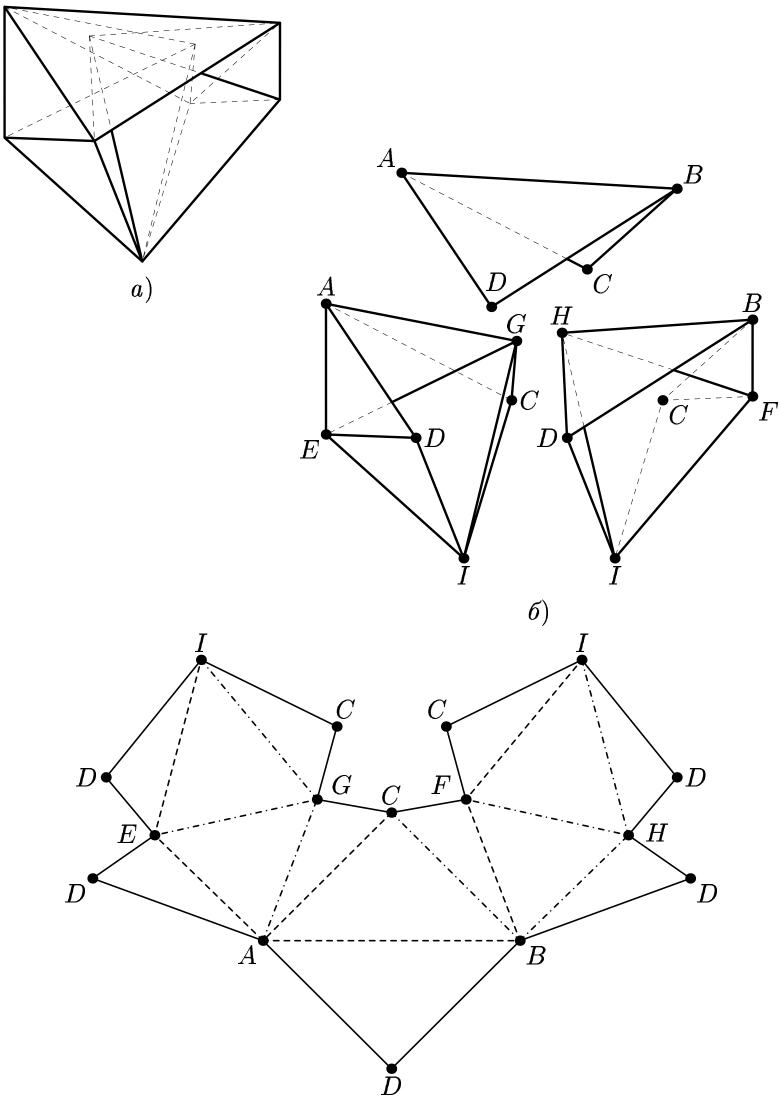


Рис. 11

американский геометр Роберт Коннелли построил первые примеры изгибаемых многогранников и тем самым опроверг гипотезу Эйлера. На рис. 11, *а* изображён изгибаемый многогранник с девятью вершинами, построенный в 1979 году немецким геометром Клаусом Штеффеном. Развёртка многогранника Штеффена показана на рис. 11, *в*. Разный вид пунктирных линий на развёртке означает, что грани перегибаются вдоль этих линий сгиба в разные стороны. На рис. 11, *б* показана схема «сборки» многогранника Штеффена. Возможно, что девять — это наименьшее число вершин у изгибаемых несамопересекающихся многогранников.

Гипотеза кузнечных мехов и теорема Сабитова

Не исключено, что открытие изгибаемых многогранников кому-то покажется не очень удивительным, особенно если он вспомнит о мехах музыкальных инструментов, например баяна. Но это неверная ассоциация. Мехи баяна «работают» из-за эластичности и сминаемости материала, из которого они изготовлены. Если бы мехи были собраны из твёрдых пластин, соединённых между собой петлями, то сыграть на инструменте не удалось бы. Такие мехи нельзя было бы ни сжать, ни растянуть (рис. 12).

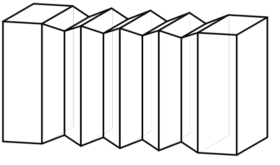


Рис. 12

Впрочем, изгибаемый многогранник тоже непригоден для мехов, хотя и по другой причине. При изгибании многогранник меняет свою форму, но было замечено, что заключённый в многограннике объём при этом остаётся постоянным, т. е. изгибаемый многогранник «не дышит». Возникла *гипотеза кузнечных мехов* о том, что это всегда так: объём многогранника не изменяется при изгибании.

Содержательная проблема хороша тем, что попытки решить её приводят к появлению новых методов и теорем, которые иногда более интересны, чем породившая их проблема. Так произошло и в этом случае, когда раздумья над гипотезой кузнечных мехов привели к открытию неожиданной теоремы.

Чтобы лучше понять её смысл, вспомним формулу Герона. Она выражает площадь треугольника лишь через его стороны:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{где} \ \ p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Для многоугольников с бо́льшим числом сторон формулы, выражающей площадь лишь через стороны, нет, поскольку стороны сами по себе, если не заданы углы, не определяют ни форму многоугольника, ни его площадь. Например, площадь ромба со стороной a может быть любой между 0 и a^2.

Для многогранников картина принципиально иная. Предположим сначала, что все грани многогранника — треугольники. Тогда длины его рёбер однозначно определяют форму треугольных граней. Поэтому если многогранник выпуклый, то, по теореме Коши, длины рёбер однозначно определяют форму многогранника, а следовательно, и его объём. Сама же зависимость величины объёма от длин рёбер была неизвестной. Из существования изгибаемых многогранников следует, что длины рёбер форму многогранника, вообще говоря, не задают.

Теорема, доказанная в 1996 году российским математиком Иджатом Хаковичем Сабитовым, устанавливает связь между длинами рёбер любого, не обязательно выпуклого многогранника с треугольными гранями и его объёмом. Пусть дан такой многогранник. Тогда можно построить многочлен

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ которого выражаются при помощи четырёх арифметических действий через параметры $l_1, \ldots, l_m$ — длины рёбер многогранника. То, как коэффициенты многочлена выражаются через параметры — длины рёбер, зависит, собственно, не от длин рёбер и величин углов многогранника, а от комбинаторного типа многогранника, т. е. от того, сколько рёбер у граней, сколько граней у многогранника, как грани сходятся в вершинах и т. п. Подставляя теперь вместо $l_1, \ldots, l_m$ значения длин рёбер данного многогранника, получаем многочлен $F(x)$ с конкретными числовыми коэффициентами. Теорема Сабитова утверждает, что *объём данного многогранника есть один из корней этого многочлена.*

Теперь можно объяснить, почему в силу этой теоремы гипотеза кузнечных мехов верна: многогранники при изгибании сохраняют объём. Если у многогранника имеются многоугольные грани с числом сторон, превосходящим три, то их можно разбить диагоналями на треугольники. Мы получаем новый многогранник, грани которого суть треугольники. Далее, при изгибании комбинаторный тип многогранника не меняется, грани сохраняются, длины рёбер остаются постоянными. Поэтому существует многочлен F с заданными коэффициентами такой, что объём многогранника есть один из корней этого многочлена. Если бы объём многогранника при изгибании менялся, то это должно было бы происходить непрерывно. А так как объём является корнем многочлена F, то это должен быть один и тот же корень. Таким образом, объём многогранника должен оставаться при изгибании неизменным.

Развёртки многогранников

Для того чтобы понять смысл теоремы Александрова, необходимо ближе познакомиться с тем, что такое развёртка многогранника.

Сделаем это на примере развёрток куба. Разрежем поверхность куба вдоль всех его рёбер. Получим шесть квадратов, у которых склеиваемые стороны и вершины отмечены одинаковыми буквами (рис. 13, *а*). Эта совокупность квадратов является развёрткой куба. Но это — особая развёртка. Каждый её многоугольник — это грань многогранника. А каждая сторона многоугольника (вместе с ещё одной стороной другого многоугольника) — это ребро многогранника. Вершины развёртки, отмеченные одной буквой, склеиваются в одну вершину многогранника.

Склеив между собой некоторые многоугольники по одноимённым сторонам, получаем другую, хорошо известную, крестообразную развёртку куба (рис. 13, *б*). Она состоит лишь из одного многоугольника с 14 вершинами и таким же количеством сторон. Отмеченные одинаковыми буквами вершины и стороны склеиваются между собой. На этой развёртке грани куба уже не представлены в виде отдельных многоугольников. Не представлены на ней также и некоторые рёбра, но представлены все вершины.

Теперь, вместо того чтобы склеивать квадратные грани между собой, разрежем каждую из них на четыре треугольника. Получим новую развёртку куба, состоящую из 24 треугольников (рис. 13, *г*). Каждый треугольник — это лишь часть грани куба. В этой развёртке мы сталкиваемся с новым для нас обстоятельством: *не все* стороны развёртки являются рёбрами многогранника и *не все* вершины развёртки являются вершинами многогранника.

Эти 24 треугольника можно склеить вдоль отождествляемых сторон и по-другому (рис. 13, *д*). В этой развёртке, состоящей из единственного многоугольника, *ни одна* из сторон не является истинным ребром куба, который получается из этой развёртки.

Теперь дадим определение развёртки. Пусть имеется несколько многоугольников, у которых каждая сторона отождествлена с одной

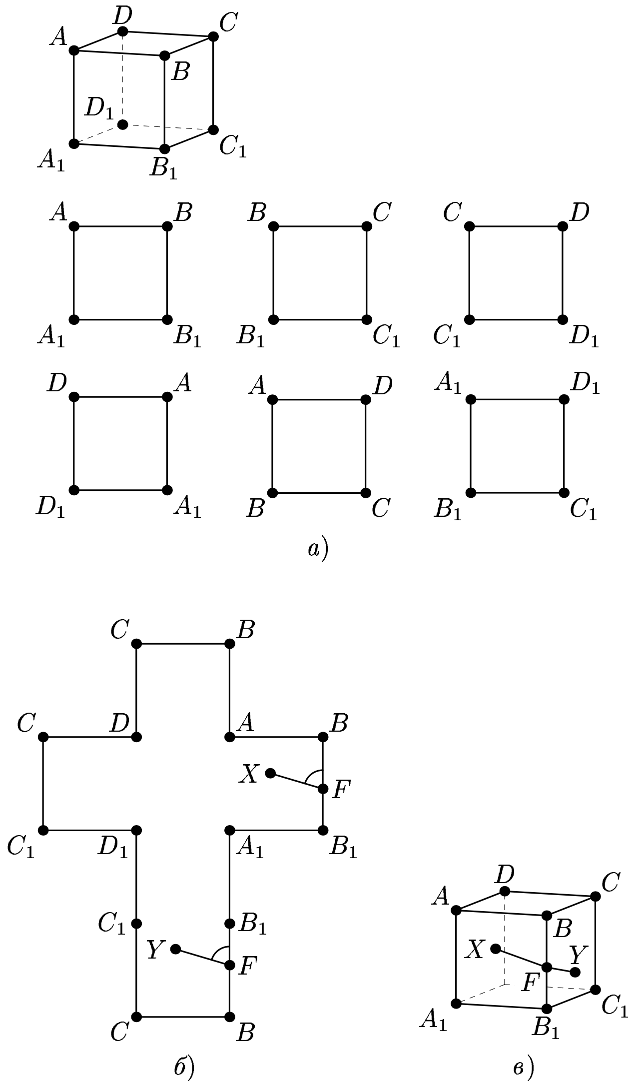
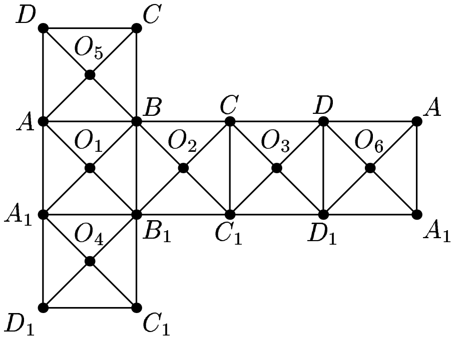
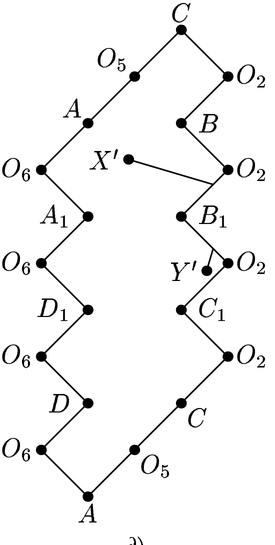

A B C D A1 B1 C1 D1
A B A1 B1
B C B1 C1
C D C1 D1
D A D1 A1
A D B C
A1 D1 B1 C1
а)
C B
C D A B
X F
C1 D1 A1 B1
C1 B1
Y F
C B
б)
A D C B
X F Y
A1 B1 C1
в)

Рис. 13, *а–в*


D
C
O_5
A
B
C
D
A
O_1
O_2
O_3
O_6
A_1
B_1
C_1
D_1
A_1
O_4
D_1
C_1

г)


C
O_5
O_2
A
B
O_6
X'
O_2
A_1
B_1
O_6
Y'
O_2
D_1
C_1
O_6
O_2
D
C
O_6
O_5
A

д)

Рис. 13, г, д

и только одной стороной того же или другого многоугольника этой совокупности. Это отождествление (или склеивание) сторон должно удовлетворять ещё двум условиям:

1) отождествляемые стороны имеют одинаковую длину;
2) от каждого многоугольника к любому другому можно перейти, проходя по многоугольникам, имеющим отождествлённые стороны.

Совокупность многоугольников, удовлетворяющая условиям 1) и 2), называется *развёрткой*.

Возьмём на развёртке точки X и Y. В силу условия 2) их можно соединить ломаными, переходящими с одного многоугольника развёртки на другой через отождествляемые точки границ этих многоугольников. Выберем среди всех ломаных, соединяющих данные точки, самую короткую. Длина кратчайшей ломаной, соединяющей две точки, называется *расстоянием* между ними на развёртке. Кратчайшей ломаной, соединяющей точки X и Y на развёртке, показанной на рис. 13, *б*, является ломаная XFY (соответствующая ломаная на поверхности куба показана на рис. 13, *в*). Всякая кратчайшая состоит из прямолинейных отрезков на многоугольниках развёртки. Причём, как нетрудно видеть, два отрезка кратчайшей, подходящие к отождествляемым точкам, составляют с отождествляемыми сторонами равные углы (рис. 13, *б*). Введённое расстояние удовлетворяет неравенству треугольника: $\rho(X, Y) + \rho(Y, Z) \geqslant \geqslant \rho(X, Z)$.

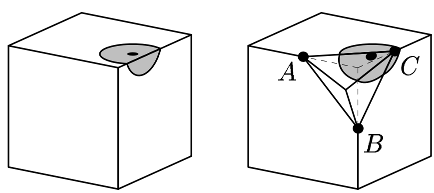
Давайте перекроим теперь эту развёртку в новую путём разрезания и склеивания. Точкам X и Y первой развёртки будут соответствовать точки X' и Y' новой развёртки (рис. 13, *д*). Расстояние между любыми двумя точками на новой развёртке будет тем же, что и расстояние между соответствующими точками на предыдущей развёртке. О таких развёртках говорят, что они *изометричны*. Таким образом, если одна развёртка получена из другой при помощи разрезания её многоугольников и склеивания вдоль отождествляемых сторон, то они изометричны друг другу.

Совершенно аналогично, развёртка многогранника изометрична самому многограннику (его поверхности). Если X и Y — точки на развёртке, а X' и Y' — соответствующие им точки на многограннике, то расстояние $\rho_{\text{р}}(X, Y)$ между X и Y на развёртке равно расстоянию $\rho_{\text{м}}(X', Y')$ между точками X' и Y', измеренному по поверхности многогранника. Все утверждения, которые можно получить, измеряя расстояния между точками многогранника, составляют так называемую *внутреннюю геометрию* многогранника.

Идея внутренней геометрии поверхности, в частности внутренней геометрии многогранника, впервые появилась в работах великого немецкого математика Карла Гаусса (1777–1855). Представим себе, что на какой-то поверхности живёт некий геометр по фамилии Точкин. Точкин — это двумерное существо очень небольших размеров, которое может свободно перемещаться по поверхности и измерять расстояния $\rho(X, Y)$ между любыми двумя её точками X и Y.

Всё, что может вывести из этой информации наш геометр, как раз и составляет предмет внутренней геометрии поверхности. С другой стороны, Точкин даже не подозревает о существовании пространства, в котором находится данная поверхность. Тем более он ничего не знает о том, как эта поверхность расположена в пространстве.

Мы, обитатели Земли, в отличие от Точкина, живём в трёхмерном мире. Мы можем любоваться картиной звёздного неба. Стоя на берегу моря и наблюдая, как скрывается за горизонтом корабль, мы можем догадаться о том, что поверхность Земли — это не плоскость. У Точкина же, повторяем, никакой информации об окружающем пространстве нет. Оставляя за рамками разговора особенности восприятия Точкиным двумерного мира, попытаемся представить, что можно было бы сделать на его месте. Например, можно было бы определить окружность радиуса R с центром O как множество точек на поверхности, удалённых от O на расстояние R. Будь это поверхность многогранника, например куба, Точкин заметил бы, что формула длины окружности или площади круга зависит не только от радиуса, но и от выбора центра. Он обнаружил бы, что длина $l(R)$ окружности с центром в вершине куба выражается как $l(R) = \frac{3}{2}\pi R$, если R не превосходит длины ребра куба, в то время как окружность с центром не в вершине куба при достаточно маленьком радиусе (меньшем расстояния от центра до ближайшей вершины) имеет длину $2\pi R$ (рис. 14, *а*). При бо́льших значениях радиуса зависимость длины окружности от радиуса перестаёт быть линейной. Давайте, исходя из куба, построим другой многогранник. Для этого «продавим» часть многогранного угла в многогранный угол, симметричный исходному относительно плоскости ABC (рис. 14, *б*). Нетрудно видеть, что между точками куба и



а) *б*)

Рис. 14

продавленного куба существует взаимно однозначное соответствие, при котором расстояния между соответствующими точками равны. Хотя эти многогранники не конгруэнтны друг другу, их внутренняя геометрия одинакова. Так что если бы наш знакомый геометр заснул на поверхности куба и в спящем состоянии был перенесён на поверхность куба с продавленным углом, то, проснувшись, он бы не заметил никакой разницы.

Единственность выпуклого многогранника с данной развёрткой

Теорема Александрова о единственности. Два выпуклых многогранника с одинаковыми развёртками конгруэнтны.

Эта теорема сильнее теоремы Коши. Действительно, если нам даны все грани многогранника, а также правило их склеивания, то, конечно, развёртка задана. Более того, по такой специального вида развёртке в силу теоремы Коши многогранник восстанавливается однозначно. Но, вообще говоря, по развёртке практически ничего нельзя сказать о гранях и рёбрах будущего многогранника. По развёртке легко определить лишь точки, которым соответствуют настоящие вершины многогранника. Таким образом, задание развёртки является гораздо более слабым условием, чем задание граней, как это требуется в теореме Коши. Доказательство теоремы о единственности многогранника с данной развёрткой опирается на теорему Коши. Так как эта теорема, доказанная Александровым, продолжает линию, начатую Коши, мы будем ссылаться на неё как на теорему Коши—Александрова.

Допустим противное: из данной развёртки склеены два различных выпуклых многогранника M и M'. Между точками многогранника и точками его развёртки существует взаимно однозначное соответствие, при котором расстояния между соответствующими точками равны. При этом соответствии рёбра многогранника переходят в отрезки или наборы отрезков на развёртке. Многогранники M и M' порождают на развёртке две сетки отрезков, соответствующих рёбрам этих многогранников. Так как многогранники различны, то эти сетки могут совпадать лишь отчасти. На рис. 15, *а* сетка рёбер многогранника M показана линиями потолще, а рёбра многогранника M' — линиями потоньше. Перенесём теперь обе сетки с развёртки на поверхности обоих многогранников M и M' (рис. 15, *б*, *в*). Образы рёбер многогранника M' на многограннике M разбивают его грани на «новые грани». В свою очередь, сетка рёбер многогранника M, нанесённая на многогранник M', разбивает грани последнего также на новые грани.

Каждой новой грани многогранника M соответствует равная ей новая грань многогранника M', и наоборот. Мы получаем два многогранника с соответственно равными гранями, взятыми в одинаковом порядке. Всё почти как в теореме Коши. Различие заключается лишь в том, что эти многогранники уже нестрого выпуклые: двугранные углы между новыми гранями при новых рёбрах могут быть равны π.

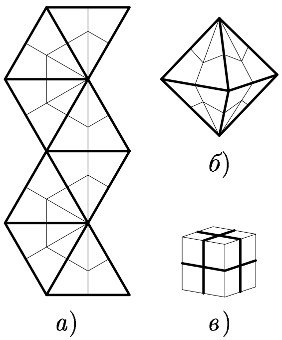


Рис. 15*

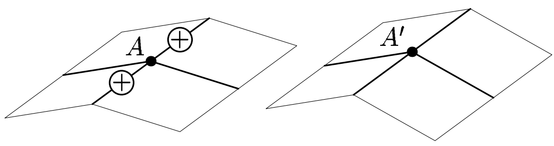


Рис. 16

Теорема Коши неприменима к нестрого выпуклым многогранникам, потому что утверждение о четырёх и более переменах знака при обходе вершины выпуклого многогранного угла уже неверно, если, например, один из многогранных углов сводится к двугранному углу. Допустим, что в соответственных вершинах A и A' сходятся по четыре квадрата (рис. 16). Соответствующая расстановка знаков на рёбрах не даёт ни одной перемены знака при обходе вершины A. Так что прямого противоречия с леммой 1, согласно которой существует вершина с не более чем двумя переменами знака, не получается.

Таким образом, для доказательства единственности выпуклого многогранника с данной развёрткой нужно показать, что теорема Коши верна и для нестрого выпуклых многогранников (соответствующая теорема и её доказательство приведены в Приложении).

Более того, из развёртки многогранника нельзя получить вообще никакой другой выпуклой поверхности, не только многогранной, но и криволинейной. Это усиление теоремы Коши—Александрова было получено в 1941 году С. П. Оловянишниковым. Сергей Пантелеймонович Оловяни́шников — победитель первой в СССР математической олимпиады (1934 год). Из-за купеческого происхождения в 1930-х годах долго

* Рисунки 15, *б*, *в* условны, так как в действительности два таких многогранника одновременно существовать не могут.

не мог поступить в университет. В 1941 году закончил Ленинградский университет и поступил в аспирантуру к А. Д. Александрову, тут же ушёл на фронт, осенью 1941 года был ранен. В госпитале написал работу об усилении теоремы Коши—Александрова. Вернувшись на фронт, С. П. Оловянишников погиб в декабре 1941 года на «невском пятачке» — известном кровопролитными боями плацдарме.

Что касается наиболее полного обобщения теоремы Коши на случай произвольных, а не только многогранных поверхностей, то этот вопрос долгое время оставался нерешённым. Пусть произвольная замкнутая выпуклая поверхность выполнена из тонкого, гибкого, но нерастяжимого материала. Можно ли получить из этого же материала другую, неконгруэнтную первой выпуклую поверхность? Если исходная поверхность — выпуклый многогранник, то нельзя — это случай теоремы Коши—Александрова—Оловянишникова о единственности.

Окончательный результат для произвольных выпуклых поверхностей был получен в 1949 году представителем школы Александрова академиком Алексеем Васильевичем Погореловым (род. в 1919 году). Он доказал теорему единственности для любой замкнутой выпуклой поверхности: две изометричные друг другу замкнутые выпуклые поверхности конгруэнтны. Теорема Погорелова о единственности, как и теорема Александрова о развёртке, принадлежит к числу выдающихся достижений в области геометрии.

Теорема Александрова о развёртке

Итак, мы подошли к основной теореме Александрова о развёртках выпуклых многогранников. Нам понадобится *эйлерова характеристика развёртки*, которая определяется аналогично эйлеровой характеристике многогранника:

$$\chi = B - P + \Gamma,$$

где Γ — число многоугольников, входящих в развёртку, P — число сторон многоугольников, при этом каждые две отождествляемые между собой стороны считаются за одну, B — число вершин, причём отождествляемые между собой вершины также считаются за одну.

Подсчитаем эйлерову характеристику для нескольких развёрток. Для крестообразной развёртки куба (рис. 13, *б*) имеем: $B = 8$, $P = 7$, $\Gamma = 1$ и, соответственно, $\chi = 2$. Для развёртки куба, изображённой на рис. 13, *д*, имеем: $B = 11$, $P = 10$, $\Gamma = 1$, откуда опять $\chi = 2$.

Для специальной развёртки, у которой каждый многоугольник — это грань многогранника, каждое ребро — это ребро многогранника, а вершина — вершина многогранника, легко видеть, что эйлерова характеристика развёртки равна эйлеровой характеристике многогранника. Но нетрудно показать, что эйлерова характеристика сохраняется при перекраивании данной развёртки в изометричную ей. Таким образом, эйлерова характеристика любой развёртки многогранника равна характеристике этого многогранника. Поэтому у развёртки выпуклого многогранника эйлерова характеристика равна 2.

Далее, если вершине развёртки соответствует настоящая вершина многогранника, то сумма подходящих к вершине развёртки углов строго меньше 2π. Если же вершине развёртки соответствует какая-нибудь точка внутри грани или ребра, то сумма подходящих к вершине углов равна 2π. Поэтому в развёртке выпуклого многогранника сумма углов, подходящих к каждой её вершине, *не превышает* 2π.

Теорема Александрова о развёртке. Из всякой развёртки, удовлетворяющей условиям:

(1) её эйлерова характеристика равна 2;

(2) сумма углов, подходящих к любой вершине развёртки, не превосходит 2π,

можно склеить выпуклый многогранник.

Отметим, что среди этих многогранников могут встретиться и вырожденные многогранники. Возьмём развёртку, состоящую из двух равных выпуклых многоугольников, у которых соответственные стороны и вершины попарно отождествлены (рис. 17). Эйлерова характеристика такой развёртки $\chi = B - P + \Gamma = n - n + 2 = 2$, где n — число сторон у равных многоугольников. Эта развёртка удовлетворяет и условию (2). По теореме Александрова, из неё можно склеить многогранник. Это — вырожденный многогранник, или иначе «двойной многоугольник».

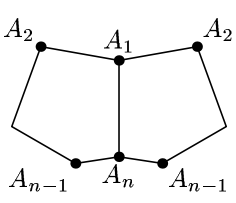


Рис. 17

Мы уже упоминали, что в отличие от теоремы Коши теорема Александрова не является интуитивно очевидной. Рассмотрим два примера.

«Тетраэдрический» пакет. В недалёком прошлом молоко разливалось в пакеты, которые имели форму не параллелепипеда, как сейчас, а правильного тетраэдра. Хотя упаковывать в тару эти тетраэдры было неудобно, зато их легко изготавливать. Сначала прямоугольная лента склеивается в цилиндр, горизонтальные края которого затем заклеиваются в двух взаимно

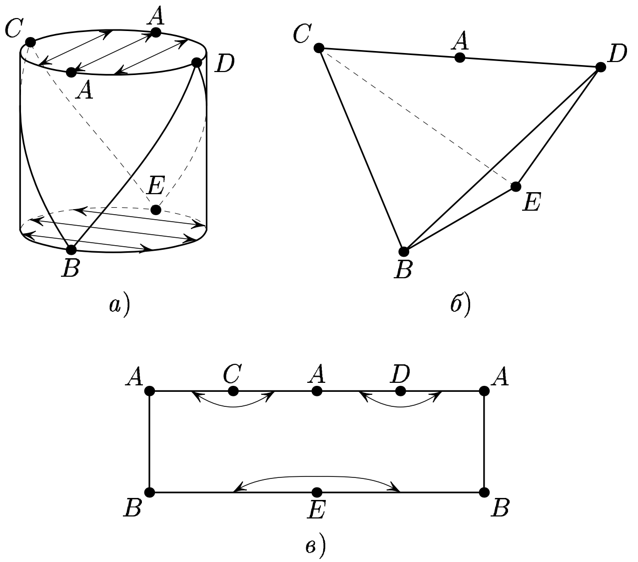


Рис. 18

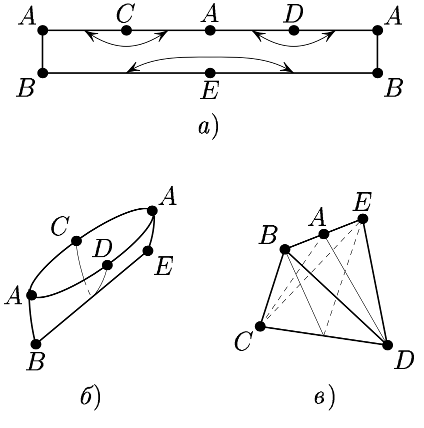
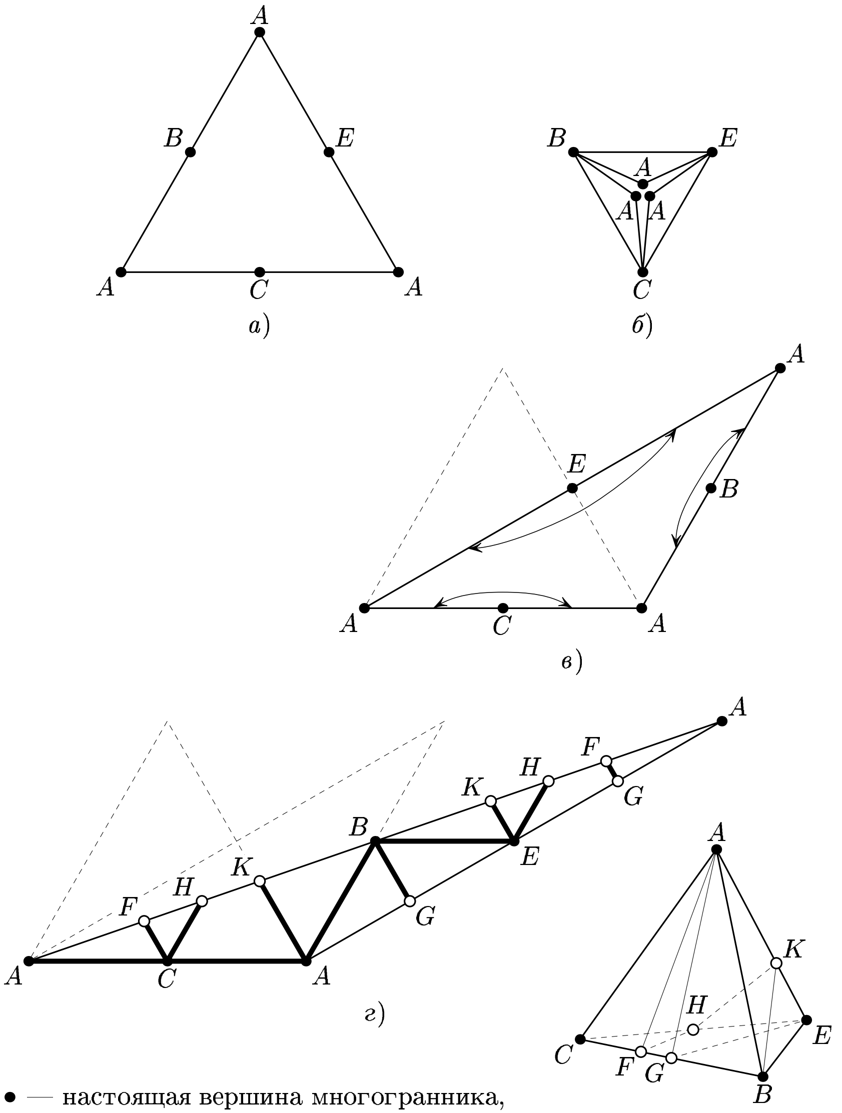


Рис. 19



● — настоящая вершина многогранника,

○ — фиктивная вершина.

Рис. 20

перпендикулярных плоскостях (рис. 18, *а*, *б*). Развёртка такого тетраэдра — это прямоугольник, стороны которого разбиваются на меньшие отрезки-рёбра развёртки, попарное отождествление которых показано на рис. 18, *в*. Данная развёртка удовлетворяет обоим условиям теоремы Александрова. Это можно даже не проверять, так как это развёртка выпуклого многогранника. Теперь предположим, что автомат, изготавливающий пакеты, «зачастил». Конкретнее, предположим, что прямоугольник развёртки очень «низкий», а правила склеивания остаются теми же (рис. 19, *а*). Эта развёртка, так же как и «высокий» прямоугольник, удовлетворяет условиям (1) и (2). По теореме Александрова, из этой развёртки можно склеить выпуклый многогранник. С другой стороны, если нижний край цилиндра уже склеен, то для склеивания в перпендикулярном направлении не хватает высоты (рис. 19, *б*). Кажется почти очевидным, что эта развёртка является контрпримером к теореме Александрова. Тем не менее, и из этой развёртки тоже можно склеить тетраэдр (рис. 19, *в*).

Другой «контрпример». Возьмём правильный треугольник, поделим его стороны пополам и отождествим половинку каждой стороны с другой её половинкой (рис. 20, *а*). Очевидно, что из такой развёртки можно склеить правильный тетраэдр (рис. 20, *б*).

Разрежем треугольник по высоте AE (рис. 20, *а*) на два прямоугольных треугольника, которые склеим по другому общему катету AE. Получим новую, изометричную развёртку $ACABAE$ (рис. 20, *в*). И опять возникает сомнение в том, можно ли склеить из неё правильный тетраэдр. Между прочим, развёртка, показанная на рис. 20, *в*, изометрична развёртке, показанной на рис. 20, *а*, и, следовательно, склеить её в многогранник тоже можно. Более того, это будет тот же правильный тетраэдр. На рис. 20, *г* представлена ещё одна развёртка, изометричная предыдущим. Возможность склеить из этой тупоугольнотреугольной развёртки тетраэдр кажется ещё более сомнительной.

Тем не менее, по теореме Александрова, это можно сделать. И вообще, пусть в рассматриваемой развёртке имеются ровно четыре вершины, у которых сумма подходящих углов строго меньше 2π. Их определить нетрудно. Ясно, что из такой развёртки можно склеить лишь тетраэдр, который может вырождаться в четырёхугольник. Чтобы получить на развёртке рёбра будущего тетраэдра, нужно уже выделенные вершины попарно соединить кратчайшими. Это и будут рёбра тетраэдра. Когда развёртка «хорошая» (рис. 20, *а*), эти кратчайшие состоят из целых отрезков и хорошо угадывается будущий многогранник. Но, вообще говоря, кратчайшая на развёртке состоит из нескольких отрезков (рис. 20, *в*, *г*), и из-за этого трудно определить вид тетраэдра. На рис. 20, *г* приведена «подозрительная» развёртка тетраэдра с уже нарисованными на ней рёбрами. Результат склейки показан на рис. 20, *д*.

Задача определения многогранника по развёртке, если развёртка имеет более четырёх настоящих вершин (в которых сумма подходящих углов меньше 2π), является очень трудной. По теореме Александрова о развёртке, мы знаем, что выпуклый многогранник существует. По теореме Коши—Александрова, он единственный. Возникает вопрос: каков он? Легко определить на развёртке вершины многогранника. Каждому ребру на многограннике соответствует кратчайшая, соединяющая какие-то вершины. Но не все кратчайшие, соединяющие вершины, являются рёбрами. Определить, какие пары вершин на развёртке соединяются рёбрами, — очень трудная, нерешённая задача.

Приложение

Теорема Эйлера

В доказательстве теорем Коши и Александрова используется теорема Эйлера. Эта знаменитая теорема впервые появилась в 1752 году в журнале Петербургской академии наук в работах Леонарда Эйлера* «Элементы учения о телах» и «Доказательство некоторых замечательных свойств, которым подчинены тела, ограниченные плоскими гранями».

Теорема Эйлера. Пусть B — число вершин выпуклого многогранника, P — число его рёбер и Γ — число граней. Тогда верно равенство

$$B - P + \Gamma = 2.$$

Число $\chi = B - P + \Gamma$ называется *эйлеровой характеристикой* многогранника. Согласно теореме Эйлера, для выпуклого многогранника эта характеристика равна 2. То что эйлерова характеристика равна 2 для

* Леонард Эйлер (1707, Базель, Швейцария — 1783, Санкт-Петербург) — гениальный математик, более 30 лет проработал в Санкт-Петербурге, член Петербургской академии наук.

Многогранник	$В$	$Р$	$Г$	χ
Тетраэдр	4	6	4	2
Октаэдр	6	12	8	2
Параллелепипед	8	12	6	2
n-угольная пирамида	$n+1$	$2n$	$n+1$	2
n-угольная призма	$2n$	$3n$	$n+2$	2

некоторых знакомых нам многогранников, видно из таблицы.

Для доказательства теоремы Эйлера возьмём произвольную грань F_1 многогранника, а также смежную с ней по ребру грань F_2. Подчеркнём, что эту пару граней ограничивает связный (т. е. состоящий из одного куска) несамопересекающийся контур из рёбер этих граней. Выберем третью грань F_3, которая прилегает к этой паре по некоторому связному куску ломаной, состоящей из рёбер (рис. 21). Это, как нетрудно увидеть, всегда можно сделать. Тогда граница тройки этих граней тоже представляет собой связный несамопересекающийся контур. Легко показать, что к уже отобранным граням можно присоединить четвёртую грань, затем пятую и т. д. так, чтобы получающаяся на очередном шаге совокупность граней F_1, F_2, …, F_i была ограничена связным несамопересекающимся контуром.

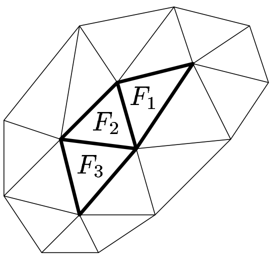


Рис. 21

Подсчитывать эйлерову характеристику многогранника будем поэтапно. На первом этапе вклад грани F_1 в эйлерову характеристику, т. е. число вершин грани минус число её рёбер (такое же) плюс число граней (в данном случае равное 1), равен 1. Присоединяя новую грань F_2, мы прибавляем некоторое число новых вершин, отнимаем число (меньшее числа вершин на единицу) новых рёбер и прибавляем единицу, соответствующую новой грани. В итоге, вклад в эйлерову характеристику на втором этапе нулевой. Так как присоединяемая на каждом этапе грань имеет с предыдущими гранями общую границу в виде одной связной ломаной, то на каждом шаге (за исключением последнего) число новых вершин на единицу меньше числа новых рёбер. Поэтому на каждом шаге, начиная со второго вплоть до предпоследнего, вклад в эйлерову характеристику нулевой. Присоединение последней грани не даёт ни новых вершин, ни новых рёбер, добавляя в эйлеровой характеристике к уже имеющейся единице ещё одну, соответствующую последней грани. Таким образом, на последнем этапе мы получаем эйлерову характеристику многогранника, равную 2.

Теорема Эйлера имеет огромное значение в геометрии. Эта теорема породила новое направление в математике — топологию. Эйлерова характеристика не зависит ни от длин рёбер, ни от площадей граней, ни от каких-либо углов многогранника. Эйлерова характеристика равна 2 независимо от того, выпуклый это многогранник или нет. Главное — чтобы поверхность этого многогранника не имела дыр и была «похожа» на сферу, а не на рамку (рис. 22). Для многогранника, «похожего» на рамку, эйлерова характеристика равна 0.

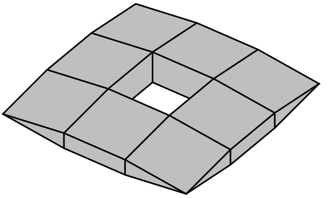
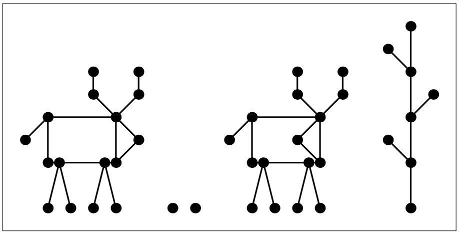


Рис. 22

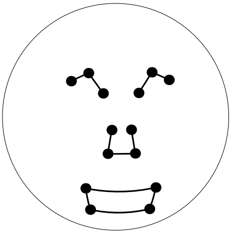
Обобщённая теорема Эйлера

В действительности нам понадобится соответствующая формула Эйлера не для выпуклого многогранника, а для графа, составленного лишь из части рёбер выпуклого многогранника. Рассмотрим на плоскости (или на сфере) граф, состоящий из B вершин, P рёбер — отрезков (или дуг больших окружностей в случае сферы), соединяющих вершины этого графа. Мы предполагаем, что любые два ребра графа не пересекаются и могут иметь лишь общие вершины. Этот граф разбивает плоскость (или сферу) на некоторое число Γ областей, так что от любой точки области можно пройти к любой другой точке этой же области, не пересекая рёбра графа. Сам граф может состоять из k *связных компонент*. Связная компонента состоит из всех рёбер и вершин графа, таких что любые две вершины компоненты можно соединить ломаной, состоящей из рёбер этой компоненты. На рис. 23 показаны примеры



$B = 42 \quad \Gamma = 5$

$P = 41 \quad k = 5$



$B = 14 \quad \Gamma = 2$

$P = 11 \quad k = 4$

$$B - P + \Gamma = k + 1$$

Рис. 23

графов, слева — на плоскости, справа — на сфере. Легко проверить, что в обоих случаях имеет место равенство $B - P + \Gamma = k + 1$. Следующая теорема является обобщением теоремы Эйлера:

Обобщённая теорема Эйлера. Для графа, состоящего из B вершин, P рёбер, k компонент и разбивающего плоскость (или сферу), на которой он лежит, на Γ областей, выполняется равенство $B - P + \Gamma = k + 1$.

Рассмотрим пару примеров, иллюстрирующих эту теорему. Если в графе нет ни одного ребра и имеются только B вершин, то $P = 0$, $\Gamma = 1$, $k = B$ и $B - P + \Gamma = k - 0 + 1 = k + 1$.

Другой пример. Возьмём выпуклый многогранник, например куб, и из точки, лежащей внутри его, спроецируем вершины, рёбра и грани этого многогранника на сферу с центром в центре проектирования (рис. 24) соответственно в вершины, рёбра графа и области, на которые разбивается сфера рёбрами графа. Для полученного графа на сфере $k = 1$. В этом случае обобщённая теорема есть по существу теорема Эйлера для выпуклых многогранников.

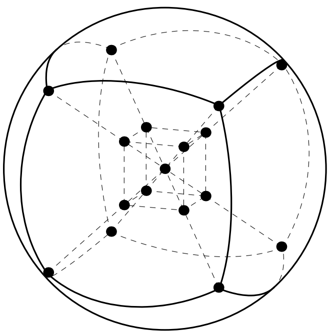


Рис. 24

Докажем обобщённую теорему. Пусть в графе имеется концевая вершина: так мы будем говорить о вершине, из которой выходит только одно ребро графа. Рассмотрим две возможности: второй конец этого ребра принадлежит ещё одному ребру или второй конец принадлежит лишь этому ребру. Рассмотрим сначала второй случай. Удалим ребро и обе его вершины. При этом число областей Γ не изменится, число вершин B уменьшится на 2, число рёбер P и число компонент k уменьшатся на 1 каждое. Величина $B - P + \Gamma - k$ не изменится. В первом случае удалим ребро и лишь одну его вершину — концевую. При этом число областей Γ опять не изменится, число вершин B и число рёбер P уменьшатся на 1 каждое, число компонент k не изменится. В итоге величина $B - P + \Gamma - k$ не изменится.

Пусть в нашем графе нет концевых вершин, т. е. из каждой вершины выходит по крайней мере два ребра. Тогда из рёбер графа можно составить замкнутый несамопересекающийся путь. Такой путь разбивает плоскость (или сферу) на две связные части.* Выбросим из этого

* Это, казалось бы, очевидное утверждение (называемое теоремой Жордана) доказать очень не просто. Оно верно и на плоскости, и на сфере. А вот, например, на

пути одно ребро. Тогда числа B и k не изменятся, число P уменьшится на 1. Уменьшится на 1 также и число Γ, так как две области, смежные по этому ребру, теперь объединятся в одну область.

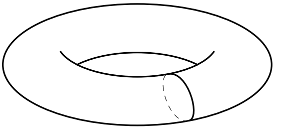


Рис. 25

Поэтому при удалении ребра из замкнутого пути величина $B-P+\Gamma-k$ также не изменится.

Таким образом, мы можем удалить из графа все рёбра, при этом не изменяя величины $B - P + \Gamma - k$. А для графа, не содержащего ни одного ребра, но состоящего из B вершин, как мы видели выше, $P = 0$, $B = k$, $\Gamma = 1$. Следовательно, $B-P+\Gamma = k+1$. Обобщённая теорема Эйлера доказана.

Леммы Коши

Лемма 1 (Коши). Пусть на выпуклом многограннике некоторые рёбра отмечены знаком «+» или «−». Выделим все те вершины многогранника, к которым подходит хотя бы одно отмеченное ребро. Тогда среди выделенных вершин найдётся такая вершина, при обходе которой встретится менее четырёх перемен знака.

Рёбра, отмеченные тем или иным знаком, образуют граф. Этот граф, имеющий B вершин и P рёбер, состоит из k компонент и разбивает поверхность многогранника на Γ областей. Обозначим через N общее число перемен знака при обходах всех вершин многогранника. Так как нейтральные рёбра при подсчёте числа N не учитываются, то число N перемен знака будет равно общему числу перемен знака при обходе вершин лишь нашего графа.

Для доказательства леммы достаточно показать, что $N < 4B$. В действительности, мы, вслед за Коши, докажем более сильное неравенство: $N \leqslant 4B - 8$.

Легко видеть, что общее число перемен знака при обходах вершин равно общему числу перемен знака при обходах контуров всех областей (рис. 26, *а*). Это следует из того, что каждая пара соседних рёбер при обходе вершины является одновременно парой соседних рёбер и при обходе контура соответствующей области и наоборот.

Так как области, на которые граф разбивает поверхность многогранника, могут оказаться довольно сложными, то необходимо чуть

поверхности тора оно не верно. На рис. 25 изображён замкнутый путь на торе, не разбивающий поверхность тора на части.

подробнее разобраться с тем, что такое число перемен знака при обходе контура области. Представим себе, что наша область — это озеро, а рёбра, примыкающие к ней, составляют берега озера. Эти берега окаймляют, в частности, острова, полуострова. Некоторые из этих островов-полуостровов могут быть «нулевой» ширины, так как в них входят рёбра, омываемые с обеих сторон этим озером (рис. 26, *б*). Находясь в лодке возле какого-то берегового ребра, отправимся в прибрежное плавание. Плывя вдоль берега от одного ребра к следующему, подсчитываем число перемен знака. Если при этом очередное ребро имеет свободную концевую вершину, то мы оплываем это ребро сначала с одной его стороны, а затем, после вершины, это же ребро, но с другой стороны. Естественно, что перемены знака при переходе с одной стороны на другую сторону того же ребра нет. Рано или поздно наше каботажное плавание завершится возвращением к исходному ребру. Если мы при этом оплыли все береговые рёбра данного озера (области), то мы подсчитали вклад данной области в общее число перемен знака. Если же имеются ещё рёбра, мимо которых мы не проплывали, нам нужно совершить новое прибрежное плавание, отправляясь от одного из них, и т. д. В результате мы получим полный вклад в общее число перемен знака при обходе рёбер данной области. Вклад области, изображённой на рис. 26, *б*, равен 8. Просуммировав вклады по всем областям, получим общее число N перемен знака.

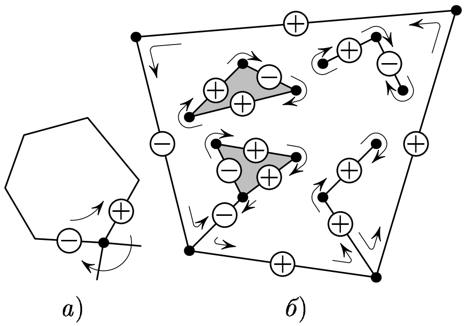


Рис. 26

Обозначим через Γ_i число областей, ограниченных i рёбрами, $i \geqslant 3$. При этом каждое ребро считается один раз, если данная область прилегает к нему только с одной стороны, и два раза, если с обеих. Например, область, изображённая на рис. 26, *б*, имеет 20 рёбер.

Тогда

$$\Gamma = \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6 + \ldots \qquad (*)$$

Ясно, что при обходе контура i-рёберной области число перемен знака не больше i, а если i нечётно, то не больше чем $i-1$. Поэтому

$$N \leqslant 2\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 4\Gamma_5 + 6\Gamma_6 + 6\Gamma_7 + \ldots \qquad (**)$$

Так как каждое ребро либо принадлежит двум областям, либо считается дважды в одной области,

$$2P = 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + 6\Gamma_6 + \ldots \qquad ({}^{*}_{**})$$

Так как граф состоит из $k \geqslant 1$ компонент, то, по обобщённой теореме Эйлера, имеем:

$$B - P + \Gamma \geqslant 2.$$

Последнее неравенство перепишем в виде

$$4B - 8 \geqslant 4P - 4\Gamma. \qquad ({}^{**}_{**})$$

Подставим в $({}^{**}_{**})$ соотношения $({}^{*}_{**})$ и $(*)$:

$$\begin{aligned} 4B - 8 &\geqslant 2(3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + \ldots) - 4(\Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \ldots) = \\ &= \sum_{i\geqslant 3} 2i\Gamma_i - \sum_{i\geqslant 3} 4\Gamma_i = \sum_{i\geqslant 3}(2i-4)\Gamma_i = \sum_{i\geqslant 3} 2(i-2)\Gamma_i. \qquad ({}^{***}_{**}) \end{aligned}$$

В неравенстве $({}^{***}_{**})$ коэффициент при Γ_i равен $2(i-2)$ и при $i \geqslant 3$ не меньше ближайшего к i снизу чётного числа. А именно такой коэффициент стоит при Γ_i в неравенстве $(**)$. Поэтому из $(**)$ и $({}^{***}_{**})$ следует требуемое неравенство $N \leqslant 4B - 8$.

Лемма 2 (Коши). Пусть у двух выпуклых n-угольников на плоскости (или на сфере) соответственные стороны равны, а среди соответственных углов имеются неравные. Отметим знаком «$+$» (или «$-$») вершины тех углов первого многоугольника, которые строго больше (или меньше) соответствующих углов другого. Тогда число перемен знака при обходе вершин первого многоугольника не меньше четырёх.

Предположим, что число перемен знака при обходе вершин многоугольника равно двум. Тогда вершины многоугольника группируются в два блока: в одном нет ни одной вершины со знаком «$-$», во втором — нет вершин со знаком «$+$».

Возьмём на многоугольнике $\mathscr{A} = A_1A_2\ldots A_n$ точки E и F, лежащие между вершинами с разными знаками (рис. 27). Возьмём теперь на многоугольнике $\mathscr{B} = B_1B_2\ldots B_n$ соответствующие точки G и H, т. е. такие что $A_iE = B_iG$, $A_jF = B_jH$ (см. рис. 27).

Сравним ломаные $EA_i\ldots A_jF$ и $GB_i\ldots B_jH$. Среди углов A_k первой ломаной есть хотя бы один, который строго больше соответствующего угла второй, а все остальные углы A_k не меньше своих визави.

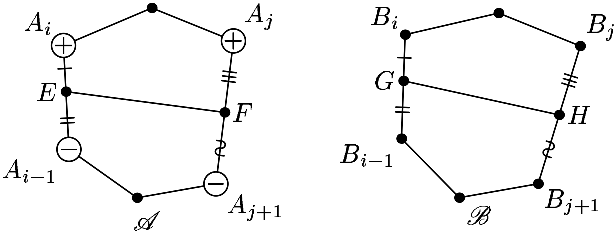


Рис. 27

Поэтому ломаную $EA_i \dots A_jF$ можно получить из ломаной $GB_i \dots B_jH$ увеличением углов последней. Представляется очевидным, что в результате такой деформации ломаной замыкающая её хорда должна увеличиваться, т. е. $EF > GH$. Это неравенство следует из теоремы Коши о многоугольниках (см. ниже). Хорда EF стягивает и другую ломаную — $EA_{i-1} \dots A_{j+1}F$, которая получается из ломаной $GB_{i-1} \dots B_{j+1}H$ уменьшением углов последней. Поэтому $EF < GH$. Два противоречащих друг другу неравенства показывают, что предположение о наличии ровно двух перемен знака неверно. Аналогичные рассуждения показывают, что число перемен знака не может равняться и нулю. Следовательно, перемен знака не меньше четырёх, что и требовалось доказать.

Теорема Коши о многоугольниках

Теорема о многоугольниках (Коши). Пусть $\mathscr{A} = A_1 \dots A_n$ и $\mathscr{B} = B_1 \dots B_n$ — два выпуклых многоугольника (плоских или сферических) с одним и тем же числом вершин. Пусть, далее, выполнены условия

1) все стороны, кроме A_nA_1 и B_nB_1, соответственно равны:

$$A_1A_2 = B_1B_2, \quad \dots, \quad A_{n-1}A_n = B_{n-1}B_n;$$

2) углы между этими сторонами у первого многоугольника не больше, чем у второго, т. е.

$$\angle A_2 \leqslant \angle B_2, \quad \dots, \quad \angle A_{n-1} \leqslant \angle B_{n-1},$$

причём хотя бы в одном случае имеет место строгое неравенство.

Тогда сторона A_nA_1 первого многоугольника меньше, чем сторона B_nB_1 второго:

$$A_nA_1 < B_nB_1.$$

Доказательство проведём индукцией по числу сторон. Пусть число сторон n равно 3. Теорема сводится к следующему: если у двух треугольников две стороны одного равны двум сторонам другого ($A_1A_2 = B_1B_2$ и $A_2A_3 = B_2B_3$), а углы, заключённые между ними, не равны, то третья сторона больше там, где больше угол. Для плоских треугольников эта теорема имеется в учебниках, для сферических треугольников она доказывается дословно так же. Предположим, что теорема верна для $(n-1)$-угольников. Докажем её для n-угольников ($n > 3$). Пусть n-угольники $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ удовлетворяют условиям теоремы. Имеются две возможности:

1) все углы $A_2, \ldots, A_{n-1}$ строго меньше соответствующих углов $B_2, \ldots, B_{n-1}$;
2) среди этих углов имеются равные, скажем $\angle A_k = \angle B_k$.

Докажем теорему сначала во втором случае: $\angle A_k = \angle B_k$. Проведём диагонали $A_{k-1}A_{k+1}$ и $B_{k-1}B_{k+1}$ (рис. 28). Они отсекают от многоугольников треугольники T и T' соответственно. Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. У многоугольников Q и Q', остающихся после отсечения равных треугольников T и T', соответственные стороны равны: стороны $A_{k-1}A_{k+1}$ и $B_{k-1}B_{k+1}$ равны из-за равенства треугольников T и T'. Углы в многоугольнике Q при вершинах A_{k-1} и A_{k+1} не больше, чем углы в Q' при соответствующих вершинах B_{k-1} и B_{k+1}. Углы при остальных вершинах в Q и Q' такие же, как и соответствующие углы в $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. Итак, многоугольники Q и Q' удовлетворяют тем же условиям, а вершин у них на одну меньше. По предположению индукции, теорема для них верна. Поэтому $A_nA_1 < B_nB_1$. Предположим теперь, что все углы $A_2, \ldots, A_{n-1}$ многоугольника $\mathscr{A}$ строго меньше соответствующих углов $\mathscr{B}$. Возьмём вершину A_k выпуклого многоугольника $\mathscr{A}$ ($k \neq 1$, $k \neq n$) и проведём хорды A_1A_k и A_nA_k. Многоугольник $\mathscr{A}$ разбивается, вообще говоря, на два многоугольника Q и R и треугольник T (рис. 29, *а*). Один из многоугольников Q или R может вырождаться в отрезок.

Будем непрерывно изменять треугольник T, увеличивая его угол при вершине A_k и сохраняя длины его сторон A_1A_k и A_nA_k. Лежащая против увеличивающегося угла сторона A_1A_n увеличивается, так что после деформации сторона $A_1''A_n''$ будет длиннее A_1A_n. При этой деформации многоугольники Q и R перемещаются как жёсткое целое. Увеличим угол A_k до величины $\angle B_k$. Тогда в деформированном многоугольнике $\mathscr{A}''$ (рис. 29, *б*) $\angle A_2'' < \angle B_2, \ldots, \angle A_{n-1}'' < \angle B_{n-1}$, за исключением угла A_k'', который равен $\angle B_k$.

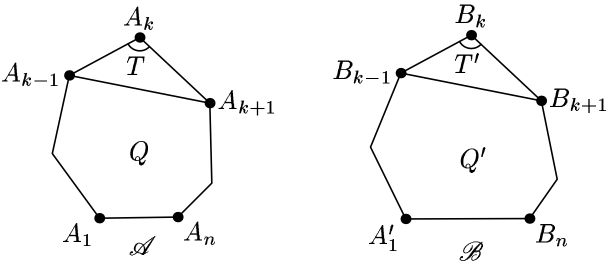


Рис. 28

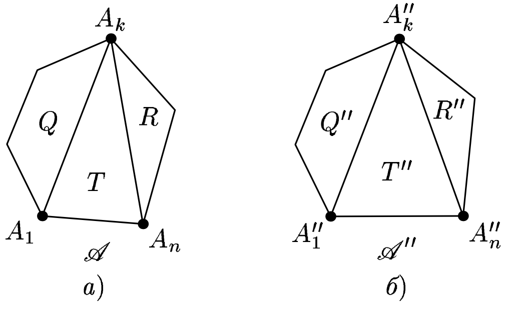


Рис. 29

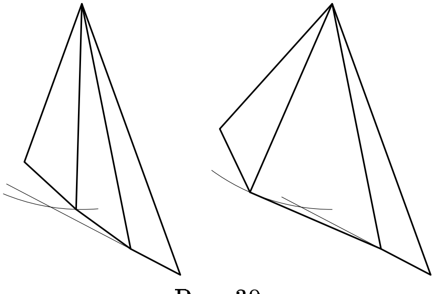


Рис. 30

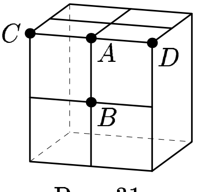


Рис. 31

Случай 1) сводится к уже рассмотренному случаю 2), согласно которому $B_1B_n > A_1''A_n'' > A_1A_n$. На этом доказательство теоремы о многоугольниках, данное Коши, заканчивалось.

В течение более ста лет теорема считалась доказанной, и только в начале XX века был замечен и закрыт пробел в доказательстве. Дело в том, что ссылка на случай 1) правомерна, если получаемый в результате деформации многоугольник $\mathscr{A}''$ выпуклый. Однако при увеличении угла A_k многоугольник может оказаться невыпуклым (рис. 30). Довольно длинное окончание доказательства мы опускаем.

Нестрого выпуклые многогранники

Как мы знаем, теорема Коши была доказана лишь в случае строго выпуклых многогранников и неверна для невыпуклых многогранников. Обобщение теоремы Коши для нестрого выпуклых многогранников немедленно вытекает из следующей, самой по себе очень интересной теоремы.

Теорема (А. Д. Александров). Даны два, вообще говоря, нестрого выпуклых многогранника одинакового комбинаторного типа. Если соответственные плоские углы их граней равны, то двугранные углы при соответственных рёбрах также равны.

Обратим внимание на то, что в нестрого выпуклом многограннике, кроме настоящих рёбер и вершин, имеются также и фиктивные рёбра и вершины. *Фиктивное* ребро нестрого выпуклого многогранника — это ребро, двугранный угол при котором равен π. *Фиктивная* вершина — это вершина, для которой сумма подходящих плоских углов равна 2π. Многогранный угол в фиктивной вершине является двугранным углом (вершина A на рис. 31), который, в частности, может вырождаться в плоскость (вершина B на рис. 31). В фиктивной вершине могут сходиться либо два настоящих ребра, либо ни одного. Так как пространственный угол в фиктивной вершине сводится к двугранному, то настоящие рёбра, подходящие к ней, должны лежать на одной прямой и быть продолжением друг друга (рёбра AC и AD на рис. 31).

Пусть два многогранника M и M' удовлетворяют условиям теоремы. Как и при доказательстве теоремы Коши, сообщим каждому ребру многогранника M знак «+», если двугранный угол при ребре больше, чем угол при соответствующем ребре многогранника M', или знак «−», если этот двугранный угол меньше.

Рассмотрим число перемен знака при обходе вершины. Пусть A и A' — соответственные вершины. Так как настоящая вершина отличается от фиктивной тем, что сумма подходящих плоских углов строго меньше 2π, а, по условию теоремы, все соответственные плоские углы у многогранников равны, то вершины A и A' обе либо настоящие, либо фиктивные. Если эти вершины настоящие, то, по лемме 2, как мы уже знаем, число перемен знака при обходе каждой из них либо равно 0 (когда ни одно ребро со знаком к A не подходит), либо не меньше 4.

Рассмотрим случай, когда вершины A и A' фиктивные. Здесь различают две возможности:

1) среди рёбер, подходящих к обеим вершинам, имеются настоящие рёбра, и при этом одному из настоящих рёбер с концом в A соответствует фиктивное ребро с концом в A';
2) все прочие случаи, т. е. когда хотя бы при одной из этих вершин нет настоящих рёбер либо настоящие рёбра имеются при обеих вершинах и они соответствуют друг другу.

Покажем, что в случае 1) число перемен знака при обходе вершины A равно 4, а в случае 2) вершина A может быть исключена из подсчёта общего числа перемен знака.

Случай 1). Пусть к обеим фиктивным вершинам A и A' подходят настоящие рёбра (их может быть лишь два). Обозначим через a_1, a_2 настоящие рёбра, сходящиеся в вершине A, а через b_1', b_2' — настоящие рёбра, подходящие к вершине, ей соответствующей (рис. 32). Напомним, что настоящие рёбра, подходящие к фиктивной вершине, лежат на одной прямой и взаимно дополняют друг друга. Поэтому если настоящему ребру a_2 соответствует фиктивное ребро a_2', то и второму настоящему ребру a_1 соответствует также фиктивное ребро a_1'. Поэтому и обратно, настоящим рёбрам b_1' и b_2' в M' соответствуют фиктивные рёбра b_1, b_2 в M. Следовательно, знаки на рёбрах a_1, b_1, a_2, b_2 суть «$-$», «$+$», «$-$», «$+$» соответственно. Так как все остальные рёбра, подходящие к данным вершинам (если они есть), фиктивные, мы имеем в случае 1) в точности четыре перемены знака при обходе вершины A.

Случай 2) разбивается на три подслучая:

2а) ни к A, ни к A' не подходит ни одного настоящего ребра;
2б) настоящие рёбра имеются лишь в одной из них;
2в) настоящие рёбра имеются в обеих фиктивных вершинах, и они соответствуют друг другу.

Случай 2а). Настоящих рёбер нет ни в A, ни в A'. Соответственные двугранные углы (все равные π) равны между собой. Таким образом, обе

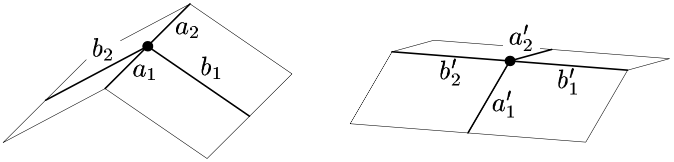


Рис. 32

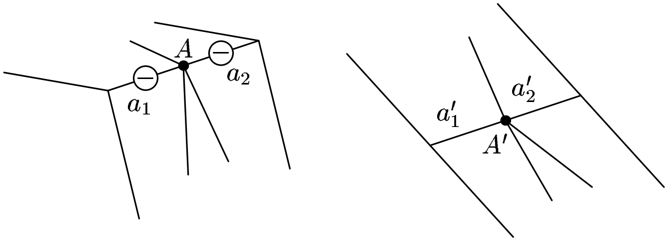


Рис. 33

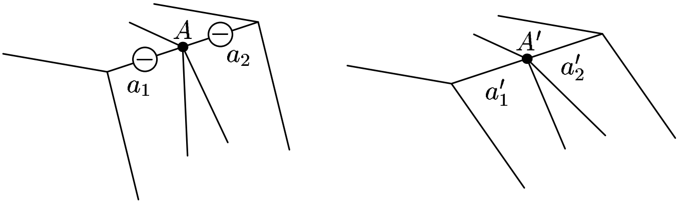


Рис. 34

вершины и все подходящие к ним рёбра находятся внутри некоторой настоящей грани, и их можно исключить.

Случаи 2б) и 2в). Пусть к фиктивной вершине A подходит настоящее ребро a_1. Следовательно, к этой вершине подходит и другое настоящее ребро a_2, которое является продолжением ребра a_1. Тогда в случае 2б) все рёбра, подходящие к A', должны быть фиктивными. Кроме того, легко понять, что соответствующие рёбра a'_1 и a'_2 также дополняют друг друга. Поэтому мы можем выбросить вершины A и A', а также все сходящиеся в них рёбра за исключением a_1, a_2, a'_1 и a'_2, которые мы попарно объединяем в два ребра: $a_1 \cup a_2$ и $a'_1 \cup a'_2$. При этом знак у нового ребра $a_1 \cup a_2$ будет тот же, что и у исходных рёбер a_1 и a_2 (рис. 33).

В случае 2в) рёбра a'_1 и a'_2 также настоящие и дополняют друг друга. Остальные рёбра фиктивные. Поэтому, как и в случае 2б), можно исключить обе вершины A и A' и все фиктивные рёбра, подходящие к ним. При этом рёбра a_1 и a_2 и, соответственно, a'_1 и a'_2 лежат на одной прямой, а рёбра a_1 и a_2, кроме того, имеют одинаковый знак. Их можно объединить в новые, более крупные рёбра, соответственно $a_1 \cup a_2$ и $a'_1 \cup a'_2$, и приписать первому из них соответствующий знак (рис. 34).

Таким образом, фиктивные вершины, подчиняющиеся случаю 2), и входящие в них лишние фиктивные рёбра можно исключить. Пара оставшихся рёбер, входивших в фиктивную вершину, объединяется в одно ребро, которое снабжается общим для старых рёбер знаком. Поэтому если на многограннике M имеются отмеченные знаком рёбра, то при обходе всякой оставшейся вершины (это либо настоящая вершина, либо фиктивная вершина в случае 1)) не менее четырёх перемен знака. А это противоречит лемме 1, согласно которой существует вершина с числом перемен знака не больше 2. Лемма 1 была сформулирована для выпуклых многогранников. В действительности же, как видно из её доказательства, она верна для любого многогранника, эйлерова характеристика которого равна 2. Полученное противоречие доказывает теорему.