Наука математика и искусство математиков

В. И. Арнольд

Лекция лауреата Государственной премии
Российской Федерации 2007 года
в Московском государственном университете
им. М. В. Ломоносова

Москва, 24 июня 2008 г.

Наука математика и искусство математиков

В. И. Арнольд

Слово «математика» означает «точное знание». Если математик открыл, что дважды два четыре (а это было великое открытие, даже если он сделал его, «считая окурки», как говорил Маяковский), то этот ответ никогда не изменится (даже если будут считаться гораздо бóльшие предметы, у Маяковского — локомотивы).

Эта экспериментальная наука — математика — составляет часть естествознания и физики. Разница только в окончательности выводов и в цене экспериментов. В физике эксперименты стóят, как правило, миллионы долларов, а в математике — единицы рублей.

Как давно уже написал в ленинградской газете академик — секретарь Отделения математики Российской академии наук, вся математика СССР стоила стране в год меньше одной десятой стоимости танка, а была одной из сильнейших в мире.

Ни электроэнергии, ни самолётов, ни спутников, ни компьютеров без математики и математиков не могло бы появиться.

В других науках (хотя все они пользуются языком математики и для движения вперёд, и для точной формулировки своих результатов) положение иное.

Динамический прогноз погоды на пару месяцев вперёд не должен вызывать доверия, даже если он стóит миллионы и погода рассчитывалась лучшими в мире компьютерами. Математики доказали, что такой прогноз принципиально невозможен: малые изменения начальных условий, которые останутся незамеченными любыми датчиками, приведут за пару месяцев к возмущениям планетарного масштаба: циклоны пойдут не туда, ураганы обрушатся на другие континенты, хотя средние значения всех параметров атмосферы в начальный момент (в каждом кубическом километре) останутся практически неизменными.

Пастер (великий прикладник) заметил, что не существует никаких прикладных наук, а есть *науки* (добывающие научные знания) и есть *приложения* этих наук (использующие добытые науками открытия). Уже в его время «прикладные науки» использовались своими адептами для отнимания у фундаментальных наук тех средств, которые тратило на них общество.

Я прочёл недавно в книге одного «прикладного математика» (работающего в США китайца), что разработанные там уравнения экологии яблок являются совершенно новыми, потому что, хотя такие же уравнения уже и исследовались в России лет 40 назад, в русских работах речь шла о картошке («которой в России больше, чем яблок»), а не о яблоках.

Разумеется, яблочная и картофельная математика одинаковы. Поэтому я буду говорить больше о фундаментальных открытиях математики, чем о её яблочных и картофельных приложениях.

Начну с очень простого открытия — формулы «квадрата суммы»

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Жан Жак Руссо пишет в своей «Исповеди», что, когда он в детстве научился раскрывать скобки и вывел эту формулу, он, хотя и был уверен в том, что раскрыл скобки правильно, всё же не верил в своё открытие до тех пор, пока не нарисовал картинку, из которой всё делается ясным.

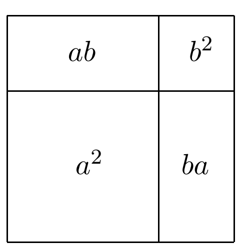
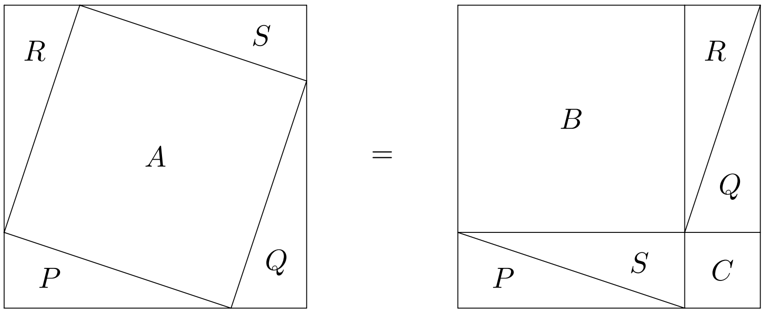


Рис. 1. Квадрат суммы по Руссо

Математика вся состоит из подобных простых и фундаментальных фактов, только желающие повысить свой авторитет специалисты всегда скрывают их простоту, окружая математические достижения ореолом непознаваемости.

Вот древнее доказательство «теоремы Пифагора»:



$$A + (P + Q + R + S) = B + C + (P + Q + R + S) \implies A = B + C.$$

Рис. 2. Доказательство теоремы Пифагора

Пифагор и не открывал, и не доказывал эту теорему. Он был одним из первых в мире индустриальных шпионов и проучился лет 20 у жрецов египетских пирамид, которые всё это ему и рассказали, как только он дал подписку о неразглашении этих государственных тайн Древнего Египта.

Теорема Пифагора использовалась там при строительстве пирамид для построения прямого угла (это угол против длинной стороны в треугольнике со сторонами длин 3, 4 и 5, так как $3^2 + 4^2 = 5^2$)*.

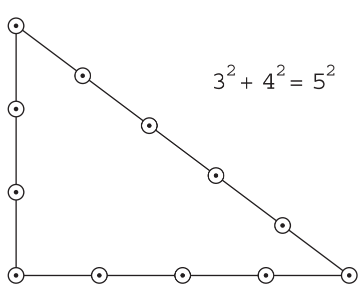


Рис. 3. Египетское построение прямого угла (верёвкой с двенадцатью узлами)

*Одно из лучших современных математических издательств набрало это формулу (в моей статье 2004 г.) как $32 + 42 = 52$: их корректоры не знали, что эта сумма есть 74. Но я надеюсь, что мои слушатели обучены лучше.

Доказательство теоремы Пифагора, вместе с «теоремой о рациональности окружности», доставляющей общую формулу для целочисленных «пифагоровых троек» $x^2 + y^2 = z^2$, было опубликовано халдеями в Вавилоне за пару тысяч лет до Пифагора. Оно сохранилось в виде клинописной надписи на скале. Вот ответ: $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2 + v^2$. Например, при $(u = 2,\ v = 1)$ получаем $(3, 4, 5)$, а при $(u = 3,\ v = 2)$ получаем пифагорову тройку $(5, 12, 13)$: $25 + 144 = 169$.

А вот вывод этого ответа. Подставляя уравнение прямой $Y = t(X + 1)$ в уравнение $X^2 + Y^2 = 1$, мы находим для X квадратное уравнение, один из корней которого ($X = -1$) нам уже известен. Второй корень явно вычисляется (по формулам Виета):

$$X^2(1 + t^2) + 2Xt^2 + (t^2 - 1) = 0,$$

$$X = -\frac{2t^2}{1 + t^2} + 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad Y = t(X + 1) = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Значит, *числа X и Y рациональны, если и только если наклон t прямой рационален.*

Подставляя $t = v/u$, где u и v целые, находим на окружности точку

$$\frac{x}{z} = X = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}, \quad \frac{y}{z} = Y = \frac{2uv}{u^2 + v^2}$$

доставляющую приведённый выше ответ x, y, z.

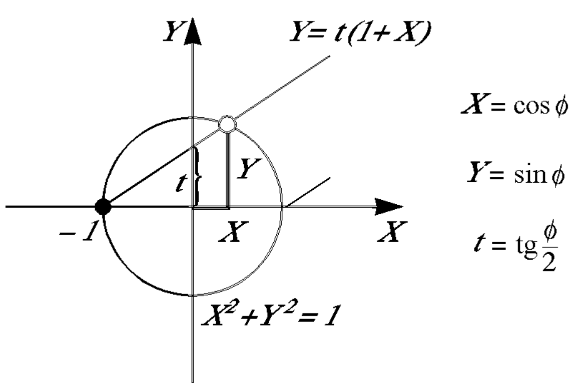


Рис. 4. Доказательство рациональности окружности (введением на ней координаты t)

Некоторое количество вычислений часто необходимо для получения окончательного ответа, но настоящая идея приведённого доказательства формулы для «пифагоровых троек» не в них, а в геометрической конструкции прямой ($Y = t(X+1)$), приводящей к рациональности координат X и Y точки пересечения окружности $X^2 + Y^2 = 1$ с прямой с рациональным наклоном t.

Истинная причина этой рациональности окружности состоит в том, что множество комплексных решений её уравнения (учитывая и две «бесконечно удалённые» точки) — так называемая *риманова поверхность* окружности — топологически одинакова с римановой поверхностью прямой (а именно, является двумерной сферой S^2): комплексные точки оси x составляют двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$, а добавление бесконечно удалённой точки $x = \infty$ превращает её в сферу. Математики пишут просто:

$$\bigl((\mathbb{C}^1 \approx \mathbb{R}^2) \sqcup \{\infty\}\bigr) = (\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \approx S^2).$$

Алгебраические (заданные алгебраическими уравнениями) плоские кривые более высокой степени, чем окружность, имеют более сложные множества комплексных точек, называемые римановыми поверхностями (названы они так потому, что их знал и использовал Ньютон).

Например, уравнение

$$x^2 + y^3 = 1$$

определяет в плоскости двух комплексных координат в $\mathbb{C}^2$ риманову поверхность, представляющую из себя тор (нужно добавить к реше-

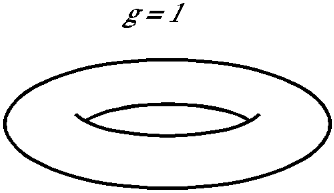


Рис. 5. Тор: гладкая поверхность рода 1

ниям уравнения ещё одну точку, бесконечно удалённую в направлении оси x). Понять этот фундаментальный факт (отсутствующий, к сожалению, в учебниках математических факультетов университетов именно из-за его фундаментальности) — хорошее и нетрудное упражнение для начинающих.

Можно исследовать риманову поверхность алгебраической кривой степени n, заданной на плоскости с координатами x, y уравнением $f(x, y) = 0$, где f — комплексный многочлен степени n. Если на этой поверхности нет особых точек (а их нет для большинства значений коэффициентов многочлена f, например при $c \neq 0$ для $f(x, y) = x^2 + y^2 - c$), то риманова поверхность (с добавленными бесконечно удалёнными точками) будет сферой с g ручками. Число ручек g (на-

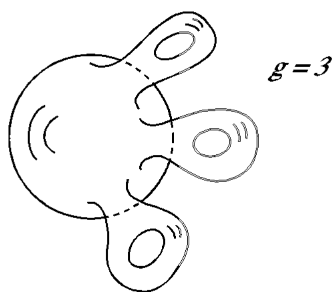


Рис. 6. Сфера с тремя ручками: гладкая поверхность рода 3

зываемое *родом поверхности*) даётся для гладкой плоской алгебраической кривой степени n формулой

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Запомнить эту формулу «Римана—Гурвица» легче всего так: при $n = 1$ (прямая) и $n = 2$ (окружность) ручек нет ($g = 0$). Двойка в знаменателе стоит для того, чтобы получить значение $g = 1$ рода тора, которым является в комплексной области кубическая кривая ($n = 3$).

Замечание. Доказать формулу Римана—Гурвица проще всего при помощи так называемого *«итальянского принципа» алгебраической геометрии*. Принцип этот состоит в том, что одно комплексное уравнение означает два вещественных: равны и вещественная, и мнимая части комплексных чисел. Из-за этого множество тех многочленов f, для которых алгебраическая кривая $f(x, y) = 0$ имеет особые точки (хотя бы комплексные или бесконечно удалённые), имеет в пространстве коэффициентов коразмерность два* (как точка на плоскости или прямая в трёхмерном пространстве), а потом *не делит* пространство коэффициентов: любые две такие неособые кривые A, B можно соединить в многообразии неособых кривых непрерывным путём (обходя неособые кривые стороной).

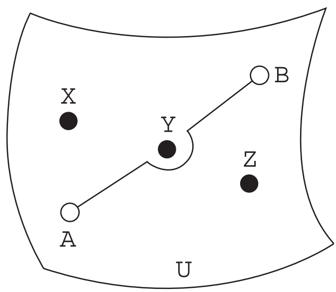


Рис. 7. Путь из A в B, обходящий (чёрное) множество $\{X, Y, Z\}$ коразмерности два (в многообразии U)

Из этого следует, что *все* (неособые) *кривые данной степени* n *задают топологически одинаковые поверхности*. Поэтому, для того чтобы узнать их топологический тип, достаточно найти его для одной такой кривой.

В качестве простейшей алгебраической кривой степени n можно взять набор n прямых:

$$f(x, y) = l_1 l_2 \ldots l_n, \quad \text{где} \quad l_j = a_j x + b_j y - c_j.$$

Эта кривая имеет особенности (во всех точках попарного пересечения n прямых $l_j = 0$). Заменяя уравнение $f(x, y) = 0$ близким уравнением $f(x, y) = \varepsilon$ (со сколь угодно малым ε), мы получим уже неособую комплексную кривую степени n.

Эта кривая будет малым возмущением набора n комплексных прямых (т. е. n сфер S^2), которым была кривая $f = 0$. Это возмущение заменит каждую из точек попарного пересечения прямых (а их было $(n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = n(n-1)/2$) малой трубочкой (как это происходит при переходе от пары прямых $xy = 0$ к гиперболе $xy = \varepsilon$).

*Чтобы кривая имела особенности, коэффициенты уравнения должны удовлетворять некоторому алгебраическому уравнению.

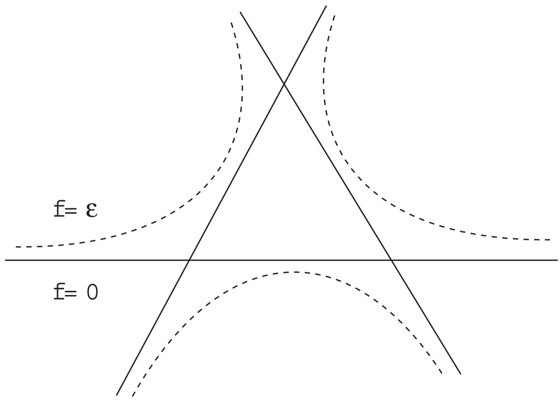


Рис. 8. Возмущение $f = \varepsilon$ особой кривой $f = 0$, делающее её неособой (сглаживая особенности в вершинах треугольника)

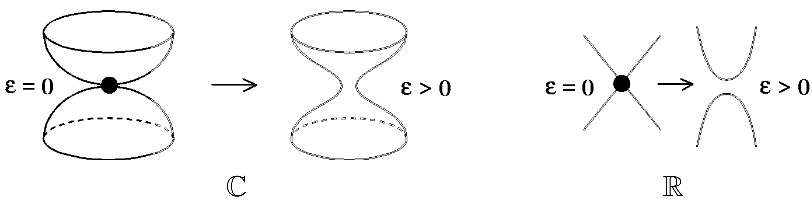


Рис. 9. Сглаживание комплексной (и вещественной) особенности кривой $xy = 0$ переходом к гиперболе $xy = \varepsilon$

Из этого видно, что *сглаженное объединение наших n прямых является сферой с $(n-1)(n-2)/2$ ручками*. Действительно, первая сфера I пересекалась с $n-1$ другой прямой общего положения в $n-1$ точке. Замена этих точек пересечения трубочками превратила объединение всех n сфер в одну сферу, на которой останется ещё

$$(n-2) + (n-3) + \ldots + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

точек пересечения остальных сфер друг с другом.

Сглаживание этих точек пересечения превратит каждую из них в ручку, что и доказывает формулу

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

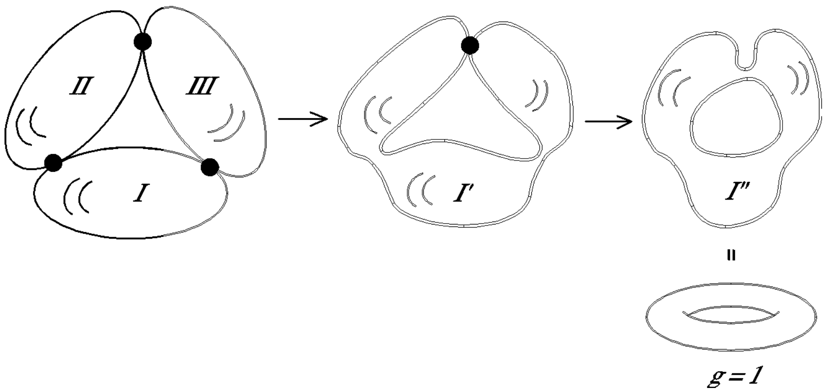


Рис. 10. Доказательство формулы Римана—Гурвица сглаживанием объединения пересекающихся сфер (I, II, III), соединяющим их сперва в единую поверхность I′ с самопересечениями, а затем в гладкую поверхность I″ (где g точек самопересечения стали g ручками)

Род римановой поверхности (комплексных точек алгебраической кривой $f(s,y)=0$) оказывает удивительное влияние на все её свойства.

Абелевым интегралом называется интеграл вдоль алгебраической кривой от рациональной функции:

$$I = \int\limits_{f(x,y)=0} R(x,y)\,dx.$$

Пример:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}.$$

Оказывается, что если род кривой равен нулю, то такой интеграл всегда «берётся явно»: он оказывается даже элементарной функцией (от своего верхнего предела, если интеграл определённый).

В курсах анализа всегда зубрят много формул, доставляющих эти интегралы для кривых второй степени («длинный логарифм», «высокий логарифм», «подстановка Эйлера»). Но *топологическая* суть этих аналитических фактов скрывается при таком формальном изложении за сложными алгоритмами вычисления (в то время как в действительности у этой возможности интегрирования в явном виде причина такая же, как и у возможности явно решить диофантово уравнение «пифагоровых троек»: равенство нулю рода кривой).

Если род кривой больше нуля, то бóльшая часть абелевых интегралов вдоль такой кривой не только явно не вычисляется, но и вообще никак к элементарным функциям не сводится. Это так уже для «эллиптических интегралов», доставляющих, например, закон (не малых) колебаний нелинейного маятника

$$t(X) = \int\limits_{X_0}^{X} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + ax + b}}.$$

Причина «неэлементарности» этих интегралов топологическая: она связана с топологией римановой поверхности фазовой кривой ($Y^2 = X^3 + aX + b$), заданной законом сохранения энергии. А именно, топология многозначной функции t, заданной этим интегралом на римановой поверхности, слишком сложна: никакая элементарная функция не может иметь на алгебраической кривой такой топологической структуры, которую имеет изучаемый многозначный интеграл. Формально говоря, этот многозначный интеграл не эквивалентен топологически ограничению никакой элементарной функции на алгебраическую кривую.

Топологический вид *вещественной* алгебраической кривой тоже сильно зависит от её рода. Например, вещественная гладкая кривая рода $g = 0$ всегда может быть нарисована одним росчерком пера на проективной плоскости, т. е. включая две бесконечно удалённые точки в гиперболу и одну в параболу.

Если же род g выше 0, то вещественная кривая может распадаться на несколько компонент (их число не превосходит $g + 1$, т. е. 2 для кубической кривой).

Кривая степени n, которую можно нарисовать одним росчерком пера, должна иметь не менее $(n-1)(n-2)/2$ особых точек. Такие кривые существуют.

Например, кубическая фазовая кривая

$$y^2 = x^3 - 3x + c$$

имеет особую точку ($x = 1$, $y = \infty$) при критическом значении энергии, $c = 2$, и в этом случае кривая может быть нарисована одним росчерком пера. При $c < 2$ связных компонент две.

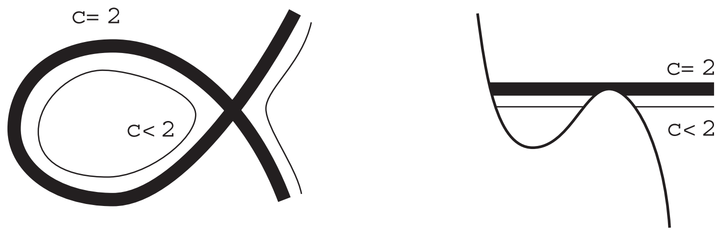


Рис. 11. Особая кубическая фазовая кривая $c = 2$ нелинейного маятника связна (соседняя неособая состоит из двух компонент связности, замкнутой и уходящей на бесконечность)

Таким образом, одно и то же математическое понятие — род римановой поверхности — отвечает и за элементарность абелевых интегралов, и за решение диофантова уравнения пифагоровых троек, и за топологию как вещественной кривой, так и её множества комплексных точек.

Недаром говорят, что математика — это искусство называть непохожие вещи одинаковыми именами, улавливая черты, общие всем кажущимся совершенно различными явлениям.

Отдельные области математики (вроде искусства умножения многозначных чисел) могут некоторое время развиваться как не связанные между собой ремёсла. Но весь опыт развития математической науки показывает, что основные её достижения связаны именно с её единством: связи между отдельными областями, от теории чисел до топологии и теории интегралов до анализа базовых кривых, оказываются чрезвычайно полезными для развития всех её многообразных ветвей.

Поверхности комплексных точек алгебраических кривых называются римановыми потому, что их теорию построили до Римана Абель и Якоби. Но Ньютон знал их на сотню лет раньше. Он использовал их топологию в лемме 28 своих «Математических начал натуральной философии».

При определении положения P планеты на её кеплеровом эллипсе в данный момент времени t используется *закон площадей* Кеплера: площадь S, заметённая радиус-вектором, пропорциональна времени t, прошедшему после прохождения перигелия A.

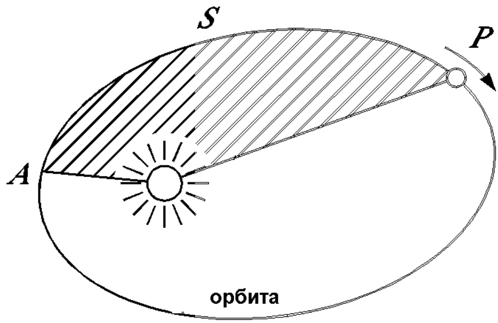


Рис. 12. Площадь S, заметённая радиус-вектором планеты P

Для определения положения P получается трансцендентное уравнение Кеплера $S(P) = ct$. Ньютон счёл, что жизнь астрономов была бы много легче, если бы это уравнение Кеплера было алгебраическим (т. е. если бы функция S была алгебраической: существовал бы такой интеграл F от P и S, что $F(P, S) = 0$, когда $S = S(P)$).

Ньютон предположил поэтому, что Господу, когда он выбирал закон всемирного тяготения, следовало бы выбрать его так, чтобы уравнение Кеплера стало алгебраическим (для обычного закона тяготения, сила которого обратно пропорциональна квадрату расстояния до притягивающей точки, оно не алгебраическое, так как орбиты — эллипсы или даже окружности, а получающаяся для случая окружности функция sin не алгебраическая).

Лемма 28 «Principia» Ньютона утверждает: такого закона тяготения не существует, ни для какой замкнутой орбиты уравнение Кеплера не получается алгебраическим; площадь, отсекаемая от ограниченной орбитой области прямой, не может быть алгебраической функцией от этой прямой.

Доказательство Ньютона было основано на том, что замкнутая орбита является на своей римановой поверхности замкнутым путём. Площадь, заметённая радиус-вектором, оказывается на этой римановой поверхности бесконечнозначной функцией (так как она увеличивается на площадь, ограниченную всей замкнутой кривой, при каждом обходе всей этой орбиты).

Но алгебраическая функция, хотя она и может быть многозначной, как $\sqrt{x}$, принимает в каждой точке лишь *конечное* число значений. Значит, изучаемая функция S точки P не алгебраическая.

Интересно, что Лейбниц написал на полях своего экземпляра книги Ньютона в этом месте: «**ERROR**». В качестве контрпримера он привёл такую «замкнутую кривую»: треугольник. Для треугольника отсекаемая площадь, действительно, алгебраически зависит от отсекающей прямой. Но Лейбниц, в отличие от Ньютона, не понимал римановых поверхностей. Дело в том, что треугольник определяет не одну риманову поверхность, а три (соединяющиеся в его вершинах), и к нему рассуждение Ньютона из-за этого не применимо.

Ньютон же знал, что орбита — гладкая алгебраическая кривая*. Она замкнута замкнута на своей римановой поверхности, и Ньютоново доказательство неалгебраичности функции S точки P безупречно.

Интересно, что для аналогичной задачи в трёхмерном пространстве дело обстоит совершенно иначе. А именно, существуют гладкие замкнутые поверхности, для которых объём части, отсекаемой от ограниченного поверхностью тела плоскостью, является алгебраической функцией от этой плоскости.

Такой поверхностью является сфера, как это доказал Архимед: площадь S сферического сегмента прямо пропорциональна его высоте h (и отсюда легко вывести, что объём такого сегмента шара зависит от h алгебраически).

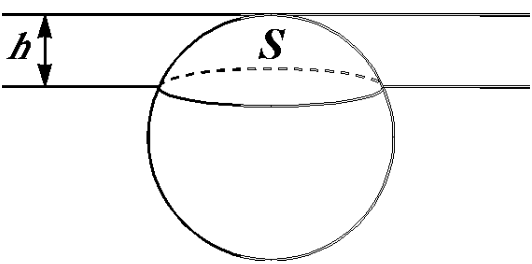


Рис. 13. Площадь S сферического сегмента прямо пропорциональна его высоте h (теорема Архимеда)

Из этой теоремы Архимеда вытекают аналогичные свойства алгебраичности объёмов сегментов всех эллипсоидов, гиперболоидов

*Это следует из его теории «параллелограмма Ньютона», которую он считал своим главным математическим открытием и опубликовал в виде «длинной анаграммы» — сегодня эту теорию обычно называют «теорией рядов Пюизо», а данное Ньютоном обоснование этой теории называют «теорией преобразования Фурье обобщённых функций».

и параболоидов в трёхмерном пространстве (и вообще в пространстве нечётного числа измерений — а если число измерений чётно, то обобщение рассуждения Ньютона проходит и объём не бывает алгебраическим).

Однако вопрос о том, есть ли другие поверхности в трёхмерном пространстве с алгебраическими объёмами сегментов (кроме перечисленных поверхностей второй степени) до сих пор не решён. Это «маленькое обобщение» задачи Ньютона оказывается недоступным даже всей мощи современной математики (нужная здесь область которой называется «теорией Пикара—Лефшеца связности Гаусса—Фукса»).

Закон всемирного тяготения и его эквивалентность законам Кеплера часто считается основным достижением Ньютона, но сам он был об этом другого мнения. А именно, Ньютон хорошо знал, что и закон обратных квадратов для силы притяжения, и законы Кеплера, и вывод одного из другого были известны за тысячелетия до него. В библиотеке Ньютона в Кембридже сохранилось много переизданий книги «Tabula Smaragdina» («Изумрудная скрижаль») Гермеса Трисмегиста (т. е. «трижды величайшего»), восходящей к I веку, где было сказано, что трудные математические доказательства сформулированных в ней теорем о кеплеровом движении содержатся в книге, хранящейся в Александрийском мусейоне. Ньютон писал (в первой рукописи своей книги): «К сожалению, обскурантисты сожгли эти древние доказательства в Мусейоне, и только мне принадлежит честь восстановить их для современного человечества».

Уже в VII веке до н. э. римский царь Нума Помпилий (следующий после Ромула) построил в Риме на Форуме в храме Весты гелиоцентрический планетарий. В центре горел факел, изображавший Солнце. На полу были нарисованы пять эллиптических планетных орбит. Пять весталок носили по этим орбитам планеты (Венеру, Землю с Луной, Марс, Юпитер и Сатурн) в соответствии с законом площадей Кеплера.

Желающий увидеть Сатурн шёл ночью в храм, становился около весталки, несущей Землю, и смотрел на ту, у которой Сатурн. Выйдя затем из храма и глядя в параллельном соединяющему весталок вектору направлении, он обнаруживал там истинный Сатурн.

Гелиоцентрическая «коперниковская» система* старше птолемеевых эпициклов (построенных позже для того, чтобы не объяснять потребителям теорию эллипсов, нужную для расчёта кеплеровых движений — разлагая эти сложные движения в ряды Фурье, астрономы, естественно, пришли к суперпозиции круговых равномерных движений). Интересно, что Галилей никогда не говорил «а всё-таки она вертится» о Земле, и осуждён был вовсе не за это — как объяснил мне в Ватикане в 1998 году папа Иоанн Павел II.

Галилей учился в Университете Пизы на врача, чтобы зарабатывать больше денег, чем его отец-музыкант. Но медицинское образование того времени предусматривало некоторые курсы математики и астрономии — это нужно было для того, чтобы составлять гороскопы, что входило во врачебную практику.

Эти науки Галилею так понравились, что он составил гороскоп герцога Медичи, правящего тогда Тосканой из Флоренции, и отправил его герцогу. Гороскоп был так замечателен, что герцог немедленно вызвал Галилея во Флоренцию, дав ему большое жалование «первого математика Тосканы» и назначив его воспитателем своего сына Козимо (а медицинский факультет Галилей так и не кончил, поскольку не захотел тратить время на сдачу требовавшихся ещё заключительных экзаменов). Открытые им в свой телескоп спутники Юпитера Галилей назвал «звёздами Медичи», вследствие чего герб Медичи имеет с тех пор вид

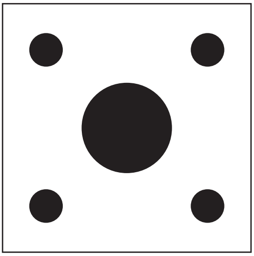


Рис. 14. Герб Медичи (с четырьмя «медицейскими звёздами» Галилея, окружающими Юпитер)

На вопрос инквизиции о гелиоцентрической системе Галилей ответил: «Лично я никогда в эту пифагорейскую теорию не верил, не

*Называвшаяся, впрочем, «пифагорейской» — например, так называл её Галилей.

верю и сейчас и вряд ли когда поверю». Он объяснил, что, согласно его принципу относительности, никакой разницы между геоцентрической и гелиоцентрической системами, кроме преобразования координат, нет, вопрос только в удобстве.

Но он добавил, что если бы Земля вокруг Солнца вращалась, то через полгода направление на далёкую звезду стало бы слегка другим. Поэтому, считал Галилей, указанное движение Земли можно, в принципе, заметить, если измерить малый угол α между этими двумя направлениями на далёкую звезду (называемый параллаксом этой звезды).

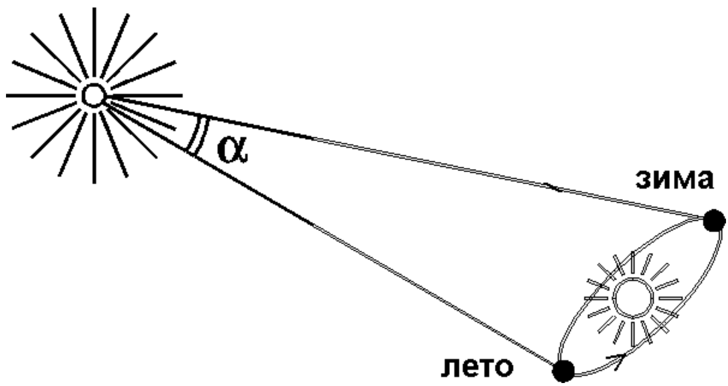


Рис. 15. Параллакс звезды

Но Галилей добавил: «Параллаксы звёзд столь малы, что современные телескопы, даже мои, не позволяют их обнаружить, и я не надеюсь дожить до того времени, когда прогресс техники телескопических наблюдений позволит узнать, бывает ли ненулевой параллакс».

Параллакс впервые измерил немецкий астроном Ф. В. Бессель в 1835 году (и тогда Ватикан вычеркнул книги Галилея из своего «Индекса запрещённых книг»).

Иоанн Павел II объяснил мне, что осуждён Галилей был не за гелиоцентрическую картину мира, а за теологическое утверждение, будто эти представления «не противоречат Священному Писанию». После чего папа объяснил мне, что и ему самому не удалось убедить сегодняшний Ватикан признать вращение Земли — реабилитировал Галилея он иначе, признав ошибочным его осуждение. Современный

Ватикан признал не гелиоцентрическое описание мира, а лишь то, что оно «не противоречит» Священному Писанию.

Наши беседы с Иоанном Павлом II были длительными и откровенными. Я прожил тогда в Ватикане несколько недель во время конференции Ватиканской академии наук, куда меня пригласили войти.

Я, однако, отказался, сославшись на сожжение Ватиканом Джордано Бруно (памятник которому стоит на площади Кампо-деи-Фьори — «площади цветов» в Риме, где его и сожгли).

Папа в ответ на мой отказ рассказал много интересного, в совершенно неформальных беседах. Прежде всего он предложил вести эти беседы не по-французски, а «просто по-русски». Затем он объяснил, что Джордано Бруно, в отличие от Галилея, был осуждён за действительный проступок: он заявил, будто «наукой доказана множественность обитаемых миров». Бруно считал, что некоторые из них достигли более высокого уровня развития своей цивилизации, чем мы, и уже посылают нам сигналы, «к которым нужно только прислушаться». «Откройте мне *хоть одну* внеземную цивилизацию — и я сразу реабилитирую Джордано Бруно!» — сказал мне папа.

Добавлю, кстати, что интересную статью об истории Джордано Бруно опубликовал в газете «Монд» бывший директор Европейского банка Жорж Атали. А именно, в его статье написано, что, когда Бруно работал в Оксфорде наборщиком два года, он подружился там с одним писателем, который и вывел его в двух своих пьесах — странные речи Просперо в «Буре» Шекспира есть, на самом деле, его изложение бесед с Джордано Бруно. Вторая пьеса — «Бесплодные усилия любви». Черты Джордано Бруно приданы там присланному в Англию из Франции философу, Бирону.

Обсуждая историю Бруно с разными коллегами во Франции и Великобритании, я столкнулся с тем, что его имя оказалось почти никому не известным. Например, одна дама в Париже, руководившая крупным научным издательством, сказала мне: «Конечно, Ватикан совершил глупость, когда сжёг Галилея!» Я попытался рассказать ей о судьбе Галилея, что, мол, сожгли не его, а... — но имя Бруно я не успел произнести, она сама добавила: «Ох, я спутала Галилея с Тихо Браге». Я надеюсь, что мои слушатели ещё знают, кто такой Джордано Бруно — в старое время в советских школах все это учили (а в европейских и американских — нет).

Папа Иоанн Павел II рассказал мне и о своём общем взгляде на взаимодействие науки и религии. «И та и другая очень заинтересованы в открытии истины, — сказал он. — Разница, однако, в том, что учёные располагают для этого всеми средствами — аппаратурой, методами и т. д., а религия — ничем». «Поэтому, — продолжал он, — надо договориться, чтобы не повторять ошибок прошлого: учёным — открывать научные истины, а церкви — не мешать им делать это полезное дело». Дальше он заметил, что, однако, когда научная истина уже открыта, использовать её можно и на пользу людям, и во вред им. И атомные бомбы, и аборты вызывают у многих возражения. «Поэтому, — заключил Иоанн Павел II, — учёным надо бы прислушиваться к мнению неучёных о пользе применения того или иного открытия, и здесь голос церкви может иметь очень значительный вес».

Я был поражён здравомыслием папы и задал ему напрашивавшийся вопрос: «Здесь, в Ватикане, я ни от кого не слышал таких разумных слов — ни кардиналы, ни члены Ватиканской академии их не скажут. А ведь Иоанн Павел II уже не молод — не последует ли за ним расцвет нового обскурантизма?» Ответ папы убедительно подтвердил моё высокое мнение о его уме: «Конечно, опасность есть, но и я, хотя не сегодня всё это и придумал, молчал. Ведь, если бы кто-нибудь раньше узнал эти мои мнения, никогда бы меня в папы не выбрали. Поэтому то, что сейчас никто такого, как я, не говорит, вовсе не значит, что они думают иначе, чем я».

Мой тогдашний доклад Ватиканской академии наук был посвящён следующему наблюдению: количества населения в разных странах мира доставляют пару сотен чисел со странной статистикой. А именно, первая цифра числа, выражающего количество населения, оказывается единицей примерно в 30 % случаев, а девяткой — меньше чем в 4 %, с постепенным снижением (30 %, 18 %, 9 %,. . . , 4 %) частот первой цифры.

Это — несомненный экспериментальный факт. Но, оказывается, у него есть математическое объяснение: дело в *законе Мальтуса*. Согласно этому закону количества населения в разные годы составляют (примерно) геометрическую прогрессию:

$$\{A,\, aA,\, a^2A,\, a^3A, \ldots\}, \quad \text{где} \quad a > 1.$$

Рассмотрим, например, первые цифры геометрической прогрессии, которую составляют степени двойки:

$$1,\ 2,\ 3,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512 \text{ и т. д.}$$

Из первых десяти членов прогрессии с единицы начинаются 30 %.

Г. Вейль доказал, что так же ведут себя и первые цифры всех геометрических прогрессий общего положения: частоты первых цифр $(1, 2, \ldots, 9)$ в них универсальны (не зависят от прогрессии), а именно первая цифра k встречается с частотой $p_k = \log_{10}(1+1/k)$. Например, $p_1 = \log_{10} 2 \approx 0{,}30103$.

Объясняется это равномерной распределённостью арифметической прогрессии $\{t \log_{10} a\}$ $(t = 1, 2, \ldots)$ дробных долей чисел $t \log_{10} a$ на интервале $[0, 1)$, т. е. эргодической теорией.

Из этого свойства геометрических прогрессий следует, что если бы, вместо населений разных стран сегодня, мы рассматривали население одной страны в разные годы, то, поскольку количества населения образовывали бы геометрическую прогрессию (Мальтуса), частоты первых цифр $k = 1, \ldots, 9$ были бы равны p_k.

И, наконец, согласно эргодической теории пространственные средние должны быть равны временны́м: среднее по разным странам в один год должно быть таким же, как среднее для одной страны в разные годы (это как в лесном деле: не нужно ждать сотню лет, чтобы понять, как развивается дуб или сосна, а достаточно пойти в лес и посмотреть там на деревья разных возрастов).

Как это часто бывает при математическом описании явлений реального мира, с описанной ситуацией связаны поучительные ошибки «специалистов».

Так называемый «закон Бенфорда» утверждает, будто «все случайные числа чаще начинаются с цифры 1, чем с цифры 9». Этот «закон» был открыт физиком Бенфордом (в 30-е годы XX века) следующим образом: он заметил, что первые страницы таблицы логарифмов в библиотеке гораздо *грязнее* последних, и заключил, что их приходилось использовать чаще.

Я проверил этот «закон» так: сравнил первые цифры длин рек и высот гор (используя в качестве единиц длины то километры и метры, то мили и футы). И оказалось, что с 1 и с 9 начинается в этих списках примерно одинаковое количество чисел: закон Бенфорда просто ошибочен.

Статистика населений стран объясняется только законом Мальтуса, а где нет геометрических прогрессий (а их нет ни для рек, ни для гор), там другое распределение первых цифр (чаще всего — равномерное).

На эксперимент и тут позволил сделать шаг вперёд: оказалось, что такую же статистику, как первые цифры населений стран мира, имеют и их площади (какой бы ни была используемая единица площади).

Можно было бы, конечно, объяснить эту статистику малыми различиями плотностей населения в разных местах планеты, если бы только эти различия не были столь велики.

Я предпочитаю другое объяснение — его доставляет «передел мира», приводящий то к распаду больших стран на малые, то к объединению малых в большие.

А именно, целый ряд различных математических моделей передела мира приводит к указанным выше вероятностям p_k значений k первой цифры числа, выражающего площадь страны.

Например, в одной из моделей каждая страна за T лет с вероятностью p делится на две вдвое меньших, а с вероятностью $1-p$ остаётся прежней. Можно, в чуть более сложной модели, добавить и объединение (с определённой вероятностью) с другой страной — можно той же площади, можно вдвое большей площади и т. д., можно даже допускать объединение только с географически соседними странами — все эти модели приводят к той же статистике p_k первой цифры k площади страны (в некоторых моделях это строго доказанная теорема, а в других — описание результатов длительного компьютерного эксперимента).

Подход математиков и физиков к описанию реального мира часто бывает неоправданно разным. Две следующие истории о путешествиях на воздушном шаре об этом свидетельствуют.

В первой путешественники заблудились, но увидели внизу человека и спустились к нему, спрашивая сверху: «Где мы?» Житель сперва ничего не отвечал, но потом всё же ответил: «На воздушном шаре». Тогда один из заблудившихся, физик, сказал другим: «Это — математик: во-первых, он ничего не отвечает сразу, а всегда думает. Во-вторых, его ответ безукоризненно правилен. А в-третьих — абсолютно бесполезен».

Во второй истории математик путешествует над Андами в паре с физиком. Физик записывает в своём путевом журнале: «В этом районе Анд водятся чёрные овцы, мы видели их стадо». Математик же записал: «Видели трёх овец, чёрных сверху».

Думаю, что я, вслед за моим учителем Колмогоровым, скорее физик, чем математик. Колмогоров говорил мне: «Не ищите для моих результатов в теории турбулентного движения жидкости доказательств — я не умею выводить их из базисных уравнений гидродинамики, и даже не знаю, можно ли будет доказать их хоть когда-нибудь. Эти результаты не *доказаны*, а *верны* — что гораздо важнее».

Поучительно, что один из создателей дедуктивно-механизированной математики логического вывода, Алан Тьюринг, писал (в своей книге «Может ли машина мыслить?»), что глубоко ошибочно распространённое мнение, будто и математика, и другие науки переходят от одного надёжно установленного факта к другому при помощи строгих логических дедукций, будто цепи таких последовательных дедукций и составляют науку. Математика состоит из дедукций в том же смысле, в каком стихи состоят из букв.

По словам Тьюринга, никакой прогресс науки на дедуктивном пути строгих выводов невозможен. Напротив, совершенно необходимые элементы развития науки — это примеры, догадки, гипотезы, ошибки, причём всё это играет в математике такую же решающую роль, как и в любой другой области естествознания.

В качестве такой (гениальной) догадки самого Тьюринга упомяну здесь так называемый «тезис Чёрча», согласно которому никакие будущие шаги компьютерной науки и техники нисколько не изменят сложившееся к середине XX века понятие алгоритма. К тому времени для этого понятия было предложено разными авторами несколько десятков совершенно различных определений, но дальнейшие исследования показали, что все эти определения алгоритмов эквивалентны: если какая-либо задача решается алгоритмом одного из этих типов, то она доступна и всем другим, так что из того, что машина какого-либо типа ни за какое время не сумеет справиться с какой-либо задачей, следует, что эту задачу не решит и никакой другой алгоритм*.

*Пример такой неразрешимой задачи — узнать по данному диофантову уравнению, есть ли у него целочисленное решение (хоть одно).

История этого «тезиса Чёрча» такова. Молодой английский математик Алан Тьюринг в 1930-е годы хотел работать над проблемой Римана о нулях дзета-функции, а для этого решил вычислить хотя бы первый миллион этих нулей приближённо.

Он быстро понял, что для этих огромных вычислений нужен компьютер, а потому изобрёл его, изготовил и сосчитал нужные ему нули. После этого он стал думать о компьютерах и решил защитить о них диссертацию. Но такой науки в Англии не было, и он стал искать пути в Принстон.

К счастью, фон Нейман оценил его достижения в теории чисел, раздобыл грант, так что Тьюринг оказался в Принстоне и начал упрашивать Чёрча поддержать его работу о машинах. Чёрч, однако, ответил очень жёстко, что все эти идеи о машинах Тьюринга ошибочны, так как он придумал более сильные алгоритмы, которые этим машинам недоступны — диссертацию же лучше защитить по работам в теории чисел, которые так высоко оценил фон Нейман.

Когда же оказалось, что Тьюринг прав и его «универсальная машина» способна решать и все задачи, которые доступны алгоритмам Чёрча, тот сдался — он стал пропагандировать мнение «своего ученика» Тьюринга, вот эта-то пропаганда и стала «тезисом Чёрча».

Возвращаясь к общим вопросам о применимости математических идей к описанию реального мира, расскажу здесь о господствующей во Франции «картезианской точке зрения» (хотя Монтень уже осудил эту точку зрения в своих «Опытах» ещё до того, как Декарт сформулировал свои принципы).

Из десятков принципов Декарта я упомяну всего четыре. Первый из них таков:

> не имеет никакого смысла сравнивать исходные положения научной теории (её аксиомы) с какой бы то ни было реальностью, с какими бы то ни было экспериментами.

Согласно Декарту, исходные аксиомы — это просто произвольные утверждения, не имеющие ни к чему реальному никакого отношения.

Второй принцип близок к первому:

> когда теория привела к каким-либо заключениям, бессмысленно сравнивать их с реальностью, проверять их справедливость экспериментально.

Ибо, если исходные аксиомы не имели к реальности отношения, откуда бы могло появиться соответствие реальности у выводов?

Третий принцип занимает промежуточное место между первыми двумя:

> переход от аксиом к выводам должен быть чисто дедуктивной цепью силлогизмов по строгим правилам логики Аристотеля.

Никакие примеры, догадки, индуктивные заключения (от частного к общему) не допускаются, особенно же нужно исключить всякое влияние воображения: например, чтобы сделать геометрию наукой, необходимо изгнать из неё чертежи (которые ведь и являются простейшим вариантом экспериментирования, запрещённого первым принципом, и открывают простор для игры воображения, особенно при поиске сходства изображений разных объектов).

Наконец, четвёртый принцип — опаснее всех.

> Правительству следует запретить все иные виды преподавания, кроме моего, так как только он один является политически корректным. А именно, при моём методе обучения самый тупой ум будет продвигаться (по цепи формальных дедукций) столь же быстро, как и самый гениальный — никакого таланта для применения моей методики не потребуется.

Вот пример того, как Декарт сам использовал свои принципы. Он был уже немолодым офицером, справедливо считавшимся крупнейшим математиком и учёным Франции (открывшим, например, теорию радуги, центр которой всегда лежит в противосолнечной точке, а радиус всегда составляет около 42°, лишь немного различаясь для лучей разных цветов; Декарт доказал также, опережая Эйлера на сотню лет, теорему Эйлера о выпуклых многогранниках: $\text{В}+\Gamma=\text{Р}+2$ (В — число вершин, Г — граней, Р — рёбер, для куба $8+6=12+2$)). И вот, однажды к великому учёному пришёл совершенно ему неизвестный молодой человек, желавший рассказать о своих гидростатических и барометрических опытах и теориях.

Выслушав рассказ, объясняющий разницу показаний барометра у подножья башни Сен-Жак в Париже и на её вершине и затягивающий ртуть вверх характер торричеллиевой пустоты, Декарт ответил:

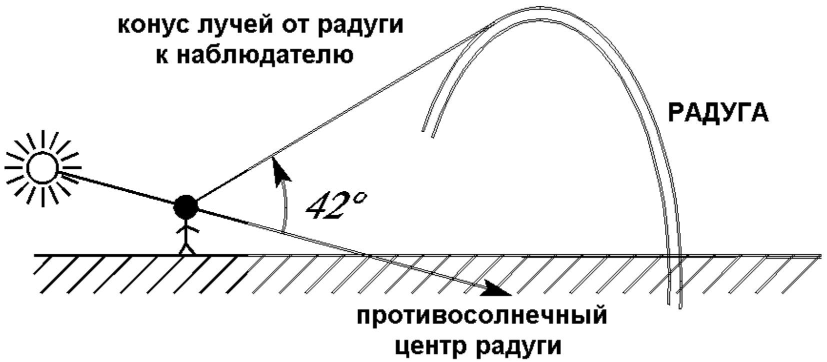


Рис. 16. Декартово описание радуги

«Всё это не наука, так как противоречит моим принципам. Я же учу, что никакие опыты по проверке исходных положений (изотропности сил давления) не нужны: нужно лишь знать аксиомы и дедуктивно выводить из них следствия. А ты ведь даже и аксиом не знаешь!»

Паскаль спросил: «А что такое "аксиомы"?» — «Ну как же, — ответил Декарт, — за тысячи лет до тебя Аристотель уже опубликовал главную аксиому гидростатики: "природа не терпит пустоты". А у тебя всё основано на "торричеллиевой пустоте". Иди, выучи аксиомы — тогда и построишь настоящую теорию».

Когда Паскаль ушёл, Декарт написал письмо Гюйгенсу (оно сохранилось!). В этом письме он рассказывает: «Этот нахальный невежда и к тебе, конечно, полезет со своими теориями. Моё же мнение таково: я нигде в природе никакой пустоты не вижу, кроме как, быть может, в голове у Паскаля».

Через полгода теория Паскаля стала общепризнанной, его родственник измерил разницу показаний барометра у основания и у вершины горы Пюи-де-Дом в Оверни, которая куда выше башни Сен-Жак (у подножья которой сегодня сидит памятник Паскалю) — и вся теория (веса атмосферы) подтвердилась.

И когда Декарта спрашивали, знает ли он об этих замечательных открытиях молодого француза (оставившего позади голландцев, давно занимавшихся гидростатикой ради своих каналов), то он отвечал: «Да, знаю этого неуча. Он приходил ко мне, не зная даже аксиом. Но я всё ему объяснил, теперь он везде выдаёт мою теорию за свою!»

Тяжёлые последствия принципов Декарта заметны даже сейчас. Например, в начале 90-х годов XX века я присутствовал на заседании Французского математического общества, где тогдашний министр науки, образования и технологий сообщил, что он выяснил, проверяя уровень арифметических знаний у школьника лет восьми (лучшего в своём классе). На вопрос, сколько будет два плюс три, школьник ответил: «Это будет три плюс два, так как операция сложения коммутативна». Беседа с этим школьником выявила, что он никаким способом (без компьютера) не может вычислить ответ «пять» и даже не понимает, чего от него хотят: никто не объяснил ему, что такое сложение (в соответствии с первым принципом Декарта), и никто не научил его считать хотя бы на пальцах (это не Аристотелевы силлогизмы).

Министр хотел заменить в средних школах преподавателей такой арифметики сапожниками, чтобы дети хоть чему-нибудь из арифметики научились. Естественно, математикам это не понравилось — министра разжаловали, и даже его министерство расформировали. После чего я прочитал в статье французского физика «Пятое правило арифметики», что аттестат зрелости во Франции нельзя получить, если не знаешь безо всяких доказательств (наизусть, как таблицу умножения), что $3/6 = 1/3$. Он это обнаружил, когда у нескольких десятков студентов-физиков Университета Жюсьё радиус земного шара получился 11 миллиметров (при вычислении второй космической скорости). В деканате этому профессору объяснили, что прав не он, а студенты: «прошёл XIX век, когда надо было воспитывать студентов знающих, думающих, понимающих — теперь у нас XXI век, обществу нужны не они, а надёжные исполнители непонятных приказов. Как мы их учили, что $3/6 = 1/3$, так они всё и выучили: мы добились, чего хотели».

Я надеюсь, что в этом потоке обскурантистских перестроек образования Россия отстаёт лет на 30: наши школьники всё ещё знают, что такое $3/6$, интересуются настоящей математикой, решают задачи, побеждают на олимпиадах, приходят на математический факультет из-за любви к математике (а не из-за желания много зарабатывать в банке).

Зато один из лучших американских математиков сказал мне: «Огромная разница между нашими с тобой математиками состоит в том, что ты всегда рассматриваешь десятки* примеров, в то время как я — никогда ни одного: доказать общую теорему во столько раз легче, чем разобрать хоть один её пример! Исследование частных случаев уж слишком для меня трудно, я никогда их и не исследую!»

Эти слова американского профессора странно похожи на мнение школьника, для которого коммутативность сложения ($2 + 3 = 3 + 2$) куда проще (недоступного ему) реального складывания! Причина в обоих случаях одна — формально-обскурантистски-декартовское образование.

Общая мировая тенденция борьбы и общества и правительств и с образованием, и с наукой, и с культурой вообще объясняется простой боязнью конкуренции: люди, принимающие решения, опасаются, как бы более компетентные, лучше подготовленные представители новых поколений их не сменили.

Приятно думать, что в России дело всё ещё обстоит лучше. Наши школьники даже проиграли недавно из-за этого мировое соревнование по решению «математических» задач. Они разумно заявили, что вывести из одних и тех же предпосылок два противоположных вывода (требовалось доказать и миролюбивость страны X, и её воинственность) невозможно. Школьники победивших стран легко с этим упражнением в лицемерии справились, так как были воспитаны «политически корректным» картезианским методом.

Хотя я и не считаю приведённую выше лицемерную задачу (о миролюбивости страны) математической, упомяну здесь всё же и о разумном математическом подходе к внешним для математики проблемам теории многоступенчатых систем управления.

Пусть рабочий делает табуретки, x_1 штук в день. Мастер может приказать ему увеличить выпуск:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2.$$

В свою очередь, приказ мастера, x_2, меняется со временем по команде x_3 начальника цеха

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3,$$

*Мой собеседник ошибался — я редко останавливаюсь разбирать примеры, пока их число не достигнет многих миллионов.

на приказ x_3 начальника цеха влияет таким же образом директор завода, на него — представитель главка, на того — министерство, и так далее до самого верхнего этажа иерархии, принимающего решение x_n (уже без команды сверху). Этот высший начальник смотрит, достигла ли уже мощность изготовления табуреток x_1 желаемого значения z, и если оно превышено ($x_1 > z$), то склоняется к отрицательному решению:

$$\frac{dx_n}{dt} = -c(x_1 - z).$$

Анализ этой (простейшей) иерархической модели приводит немедленно к следующему выводу:

описанная иерархическая система управления заведомо неустойчива, если число этажей иерархии больше двух.

Следует это из того, что вершины правильного n-угольника с центром в нуле (на плоскости комплексного собственного числа λ) не могут все лежать в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ при $n > 2$.

Из этого вывода следует, что многоступенчатые системы управления если где-нибудь и работают устойчиво, то только за счёт коррумпирующего влияния взяток на управляющих различных рангов, решения которых начинают вследствие этих взяток зависеть не только от приказов начальства, но и от реального положения дел — ведь если оно будет плохим, то и взятка уменьшится!

Математический аппарат современной теории оптимизации создан нашим замечательным математиком Леонидом Витальевичем Канторовичем.

Работая в 30-е годы XX века в Ленинградском университете, он решил (для заказчика — фанерного треста) задачу об оптимальном раскрое данного листа (с минимальными отходами). Экономисты, однако, написали на него донос, будто он пытается протащить в Советский Союз фашистскую теорию. Дело в том, что Канторович ссылался на классические условия оптимальности итальянского математика Парето, а Б. Муссолини (некстати) объявил Парето лучшим математиком Италии.

Леонид Витальевич рассказал мне, что узнал о работе Парето из книги моего деда, В. Ф. Арнольда, бывшего первым экономическим математиком в России: дед издал в 1904 году свою книгу, где перевёл все экономические теории (включая Марксову) на язык дифференциальных уравнений.

Но обвинение в фашизме было страшным — Канторовича уволили из Ленинградского университета, и он не сразу нашёл работу. Правда, кончились эти поиски благополучно: он стал работать над математическими задачами атомного проекта. И. Г. Петровский, отвечавший перед ЦК за качество математических работ проекта, рассказывал мне впоследствии, что основные надежды возлагались на «прикладных математиков» — там работали и М. А. Лаврентьев, и С. Л. Соболев, и Н. Н. Боголюбов, и многие другие хорошо себя зарекомендовавшие прикладными работами математики.

Но, как это ни странно, наиболее нужный для дела вклад внесли не они, а именно чистый теоретик Канторович, никогда прежде не занимавшийся никакой математической физикой.

Когда работы Канторовича по оптимизации стали стандартным аппаратом расчёта цен в каждом американском супермаркете, а потом ему (вместе с другим русским экономистом, Василием Леонтьевым, эмигрировавшим в США) присудили Нобелевскую премию по экономике, эти работы были уже признаны и в СССР — он стал профессором в Новосибирске, был избран в Академию наук, вернулся в Москву и в Ленинградский университет.

Сейчас эта теория оптимизации стала широко известной. Я слышал, например, что в одной из областей России оптимизация плана транспортных перевозок по этой схеме показала, что их можно удешевить этой оптимизацией на 40 %.

Но математика, точное знание, — это одно, а экономика, управление реальными перевозками — другое. Местные власти отказались реализовывать предложенный математиками план — и вот почему.

Дело в том, что зарплата того человека, который должен был отдать приказ о реализации оптимизированного плана перевозок, составляет фиксированный процент от стоимости этих перевозок. Менять нужно было бы не только план перевозок.

Видя такое противоречие между математическими достижениями науки и жизнью, приходится вспомнить слова Наполеона, любимого ученика Лапласа (которого он назначил министром внутренних дел, как единственно известного ему «честного человека Франции»): «Лапласа надо сменить, так как он пытается применять к управлению дух бесконечно малых». Беда в том, что Лаплас требовал, чтобы отчёты у его подчинённых сходились до копейки, и не терпел взяток — а без смазки этими взятками система работать не могла.

Впрочем, Наполеону же принадлежит и антиматематический приказ своим юристам, составляющим свод законов: «Пишите коротко и непонятно». К сожалению, многие математики так до сих пор и руководствуются этим призывом: примеры в их текстах отсутствуют, так что понять ничего и нельзя.

Возвращаясь от приложений к математическим открытиям, упомяну старинную «задачу Бюффона» о бросании иголки на линованную бумагу.

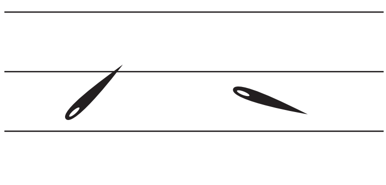


Рис. 17. Иголка Бюффона, доставляющая число π при случайном бросании на линованную бумагу, пересекает линии не всегда, а лишь с некоторой вероятностью p

Пусть расстояние между параллельными линейками бумаги составляет 1 дюйм, длина иголки — тоже 1 дюйм. Эту иголку 1000 раз случайно бросили на эту линованную бумагу. Сколько раз она попадёт на какую-нибудь одну из линий? Поэкспериментировав несколько часов, каждый может убедиться, что вероятность пересечения есть $p = 2/\pi$, так что иголка пересекает линии примерно $\frac{2}{\pi} \cdot 1000 \approx 637$ раз.

Но я привёл эту задачу не для экспериментирования, а для того чтобы показать, как работает настоящее математическое рассуждение.

Заметим прежде всего, что если для нашей иголки длиной один дюйм среднее число пересечений за одно бросание равно p, то для иголки длиной в два дюйма оно составит $2p$ (как если бы мы бросали обе половины независимо друг от друга). По той же причине таким же будет среднее число пересечений и для «кочерги» длиной два дюйма. Обобщая это простое рассуждение, мы приходим к выводу, что и для любой «кривой иголки» длины l среднее за бросание число пересечений составит lp.

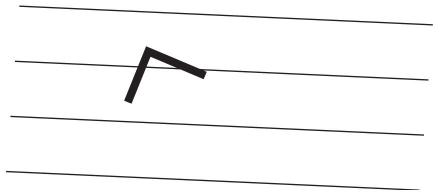


Рис. 18. Случайное бросание кочерги на линованную бумагу Бюффона

Выберем теперь иголку в форме окружности диаметра один дюйм (т. е. длины $l = \pi$ дюймов). Среднее число пересечений есть $lp = \pi p$. Но при *любом* бросании такой окружности точек пересечения будет две. Значит, среднее равно 2, т. е. $\pi p = 2$, $p = 2/\pi \approx 0{,}637$.

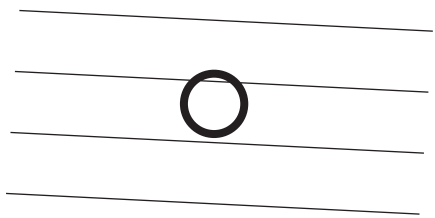


Рис. 19. Случайное бросание окружности на линованную бумагу Бюффона (доказывающее формулу $p = 2/\pi$)

Это простое рассуждение есть начало целой большой области современной математики, называемой *интегральная геометрия*. Возникла эта область математики ради интерпретации геометрии тонких срезов сложных трёхмерных структур (вроде клеток различных тканей). О строении этих трёхмерных структур можно судить по статистике граничных кривых разных элементов на двумерных срезах.

Вот ещё одна (удивительная) задача такого же типа; её исследовал в середине XIX века немецкий геометр Шлефли, но его результат был столь поразительным, что никто его диссертации не верил (до 1902 года, когда её переиздали в солидном издательстве).

Предположим, что большое число плоскостей (размерности $n-1$) делит выпуклый n-мерный многогранник на куски. Каждый кусок A является выпуклым многогранником, имеющим $a_0(A)$ вершин, $a_1(A)$ рёбер,..., $a_{n-1}(A)$ граней.

Шлефли задал себе вопрос: а какими будут *средние значения* этих чисел a_k граней разных размерностей, если число делящих разрезов велико, а их места случайны?

Ответ Шлефли таков: среднее значение каждого из чисел a_k будет равным числу k-мерных граней у куба размерности n. Например, для плоскости ($n = 2$) среднее число сторон многоугольного кусочка будет 4 (хотя среди этих кусочков будут, как правило, и треугольники, и пятиугольники, и т. д.).

При разрезании же трёхмерного тела случайными плоскостями среднее число вершин получающихся многогранных кусочков равно 8, среднее число граней — 6, а среднее число рёбер — 12. При этом сами кусочки вовсе не будут похожими на куб: средние значения $a_0 = 8$, $a_1 = 12$ и $a_2 = 6$ достигаются, как правило, не на одном кусочке, так что получающиеся кусочки будут иметь совсем другие числа вершин, рёбер и граней.

Этот результат Шлефли был в середине XX века переоткрыт Андреем Дмитриевичем Сахаровым, когда жена поручила ему нашинковать капусту (и он сосчитал указанные средние, получив для плоской задачи, где $n = 2$ четырёхугольные в среднем кусочки).

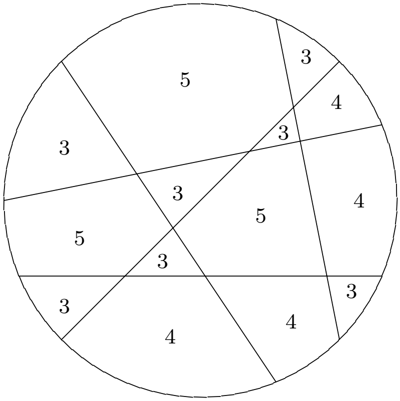


Рис. 20. Разрезание плоского слоя капустного кочана Сахарова пятью прямыми на 7 треугольников, 4 четырёхугольника и 3 пятиугольника. Среднее число сторон кусочка — $52/14 \approx 3{,}7$

Возвращаясь к Кеплеру и его учителю Тихо Браге, расскажу о замечательных математических работах Кеплера.

Тихо Браге (в своей обсерватории «Ураниенбург» на отданном ему острове близ Копенгагена и гамлетовского Эльсинора) многие десятилетия крайне точно измерял координаты звезд и планет на небесной сфере. Измерения производились невооружённым глазом, через очень удалённый от наблюдателя B визир A.

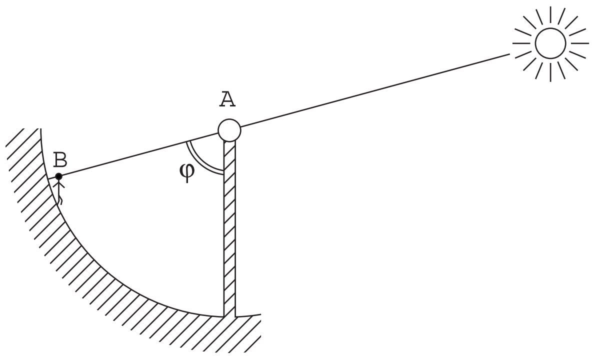


Рис. 21. Метод Тихо Браге измерения высоты звезды φ невооружённым глазом

Эта удалённость (на десятки метров расстояния AB) позволяла измерять угол φ с такой огромной точностью, что Ньютону (столетиями позже) приходилось ещё посылать своего ученика Галлея в эту обсерваторию с телескопом, дабы доказать им, что и телескопические наблюдения могут достигать такой же точности, хотя телескопы и были короче метра.

Обрабатывая результаты наблюдений Марса своим учителем, Кеплер нарисовал получившуюся гелиоцентрическую орбиту. Она оказалась вполне круговой, только Солнце было не в центре, а сдвинутым (примерно на 10 % радиуса).

Но наблюдения Тихо Браге были столь точны, что Кеплеру удалось измерить и (малые) отличия орбиты от окружности: её диаметр, проходящий через Солнце, оказался длиннее ортогонального ему (примерно на полпроцента).

А Кеплер знал теорию конических сечений, например эллипсов. Эллипс — это геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых до двух фиксированных точек этой плоскости (называемых *фокусами* эллипса) постоянна:

$$|AP| + |BP| = \text{const}.$$

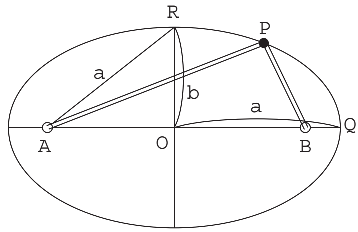


Рис. 22. Эллипс с фокусами A, B и полуосями длин a, b с эксцентриситетом $e \approx 0{,}8$

Эллипс можно получить из конуса, пересекая его плоскостью: фокусами будут точки её касания со «сферами Данделена», вписанными в конус и касающимися исследуемой плоскости.

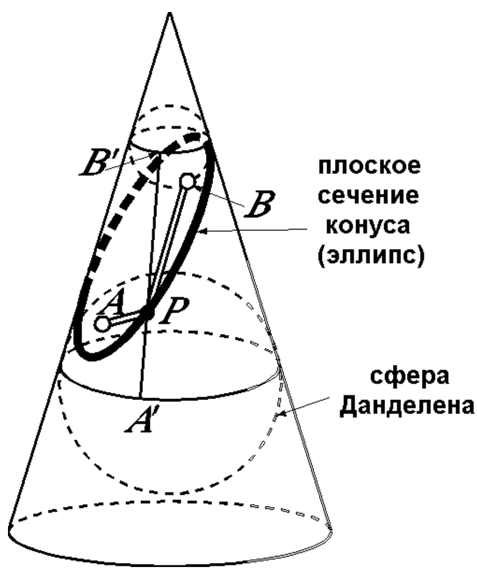


Рис. 23. Доказательство Данделена эллиптичности конического сечения: плоскость сечения касается сфер в фокусах эллипса, так как расстояние между параллелями касания сфер с конусом всюду одинаково

Расстояние $|PA|$ равно $|PA'|$, $|PB| = |PB'|$, поэтому

$$|PA| + |PB| = |PA'| + |PB'| = |A'B'| = \mathrm{const}$$

не зависит от точки эллипса P.

Если обозначить большую полуось эллипса через a, а малую через b, то

$$|PA| + |PB| = |QA| + |QB| = 2a.$$

Поэтому $|RA| = |RB| = a$. По теореме Пифагора (для $\triangle AOR$) находим $AO = \sqrt{a^2 - b^2}$. Отношение AO/a называется *эксцентриситетом* e эллипса (для окружности $e = 0$). Из выписанной формулы следует, что $b = a\sqrt{1 - e^2}$.

Кеплер хорошо знал замечательную «формулу Ньютона»: если ε мало, то

$$(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$$

(с погрешностью порядка ε^r). Для $e = 0{,}1$, $\varepsilon = -0{,}01$, $n = 1/2$ эта формула даёт

$$b = a\left(1 - \frac{e^2}{2} + \ldots\right) \approx a\left(1 - \frac{1}{200}\right)$$

(с погрешностью порядка e^4), т. е. малая ось должна быть короче большой примерно на полпроцента.

Так Кеплер и открыл свой *первый закон*: планеты движутся по эллипсам (с фокусом в Солнце).

Поскольку использованная выше формула $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \varepsilon/2$ совершенно замечательна, упомяну ещё несколько её приложений.

Первые реактивные моторы сжигали хвостовое оперение самолёта своей раскалённой струёй. Но конструкторы, вроде Туполева, знали упомянутую формулу и повернули моторы на малый угол ε.

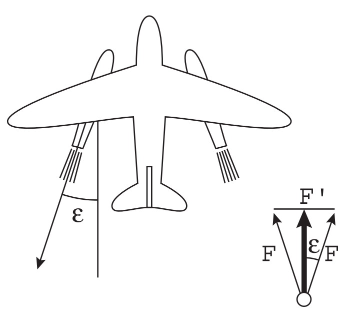


Рис. 24. Спасение хвостового оперения от реактивной струи малым поворотом двигателя (на угол ε)

Опасная струя отодвинулась от корпуса на расстояние порядка ε. Сила тяги при этом, конечно, несколько уменьшилась. Но эта сила каждого мотора будет порядка

$$|F'| = |F|\sqrt{1-\varepsilon^2} \approx |F|\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right).$$

При угле 3° (т. е. примерно $1/20$ радиана) потеря в силе тяги всего $1/800$, а хвост был спасён.

Другой пример того же рассуждения: насколько вы удлиняете свой путь домой, AB, возвращаясь туда по синусоиде $\widetilde{AB}$?

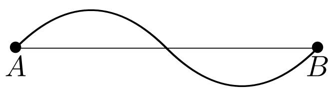


Рис. 25. Синусоидальный путь из A в B длиннее прямого всего процентов на 20

Наивные жёны пьяниц считают, что вдвое, а более разумные мужья — что примерно в полтора раза (как при движении по сторонам квадрата вместо его диагонали). На самом же деле синусоида $\widetilde{AB}$ длиннее отрезка прямой AB всего примерно на 20 %.

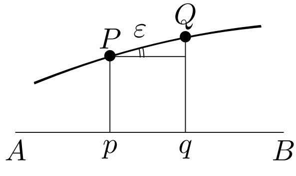


Рис. 26. Близость длины гипотенузы $|PQ|$ к длине катета $|pq|$ (объясняющая, почему синусоида столь коротка)

Дело в том, что отклонение направления синусоидального пути от направления прямого пути в большей части точек синусоиды мало, а тогда удлинение (второго порядка малости, по тому же рассуждению Кеплера) вовсе незначительно:

$$\frac{|PQ|}{|pq|} \approx 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Например, для примерно двух третей пути AB выполняется неравенство $|\varepsilon| < 1/2$, т. е. удлинение составляет меньше $1/8$, что составляет всего лишь около 12 %.

Из других математических открытий Кеплера отмечу изобретение им пяти «кубов Кеплера», вписанных в правильный додекаэдр (он придумал эту конструкцию ради своего «четвёртого закона», описывающего размеры орбит пяти планет геометрией пяти вписанных друг в друга правильных многогранников).

Додекаэдр, как и указывает его название, имеет 12 граней. Выбрав по диагонали на каждой из этих (пятиугольных) граней, Кеплер и получил 12 рёбер своего куба. А так как на каждой пятиугольной грани диагоналей пять, кубов так можно вписать в додекаэдр тоже пять.

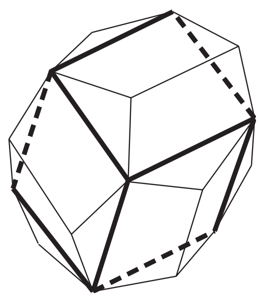


Рис. 27. Куб Кеплера, вписанный им в додекаэдр (по одному ребру куба на каждой из двенадцати пятиугольных граней додекаэдра)

Вращения додекаэдра представляют кубы Кеплера, образуя группу $S^+(5)$ из 60 чётных перестановок пяти объектов.

Этот изоморфизм Кеплера между группами вращательных симметрий додекаэдра и чётных перестановок пяти элементов послужил основой данного Абелем доказательства невозможности решить общее уравнение пятой степени в радикалах.

Предложенное Кеплером применение додекаэдра к описанию радиусов планетных орбит оказалось менее удачным: теория предсказывала (между Марсом и Юпитером) ещё одну планету, а вместо неё последующие наблюдения обнаружили лишь обилие астероидных орбит. Движущиеся по ним тела либо являются остатками развалившейся планеты, либо ещё не успели сорганизоваться в единую планету.

Додекаэдр, видимо, не был известен Сирано де Бержераку, собиравшемуся до Луны при помощи «икосаэдрических зеркал».

Математические идеи присутствуют и во многих других работах Кеплера. Например, в своей «Стереометрии винных бочек» он предлагает замечательный метод, как определить вместимость бочки всего *одним* измерением (тогда как представляется необходимым измерять независимо и высоту бочки h и её диаметр d).

Кеплер решил оценивать объём бочке по длине диагонали a, вставляя штырь в место пробки. Оказалось, что в разных городах Германии формы бочек разные, так что при одинаковых значениях параметра a объёмы бочек разных городов различны.

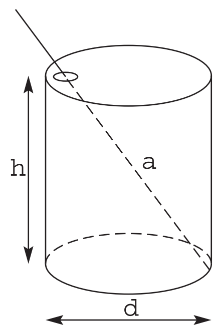


Рис. 28. Метод Кеплера определения ёмкости винной бочки одним измерением: $hd^2 = ?f(a)$

Кеплер решил выбрать тот город, где объём бочек с данным значением a максимален. И когда он это сделал, то оказалось, что, хотя разные бочки с данной длиной диагонали a имели некоторые различия отношения высоты к диаметру (h/d), на величину объёма бочки (с данной длиной диагонали a) эти различия почти не влияли.

Сперва Кеплер удивился, но потом понял, в чём тут дело. Объём V — гладкая функция от отношения h/d (при фиксированном a). А около точки максимума ($*$) изменение значения аргумента почти не влияет на значение функции!

Интересно, что теория радуги Декарта была основана на той же самой идее. Световые лучи $AOQRB$, преломлённые и отражённые шаровой каплей воды, отклоняются на некоторый угол α (от направления назад, к Солнцу A). Этот угол гладко зависит от точки P падения луча на каплю. Декарт сосчитал, что функция α достигает

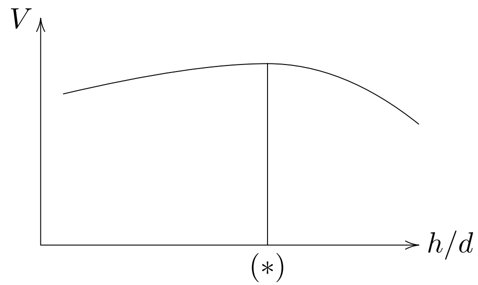


Рис. 29. Обоснование метода Кеплера: гладкая функция почти постоянна около своей точки максимума $(*)$

максимального значения 42° в некоторой точке $(*)$ капли. В близких к $(*)$ точках P угол $\alpha(P)$ будет почти таким же, поэтому преломлённых именно на этот угол лучей будет больше, чем на другие (меньшие) углы. Вследствие чего именно от капель, находящихся на конусе с раствором 42° (с центром в противосолнечной точке) к глазу наблюдателя придёт больше всего света, этот конус и будет виден как более яркая дуга окружности на небе (с центром окружности в противосолнечной точке).

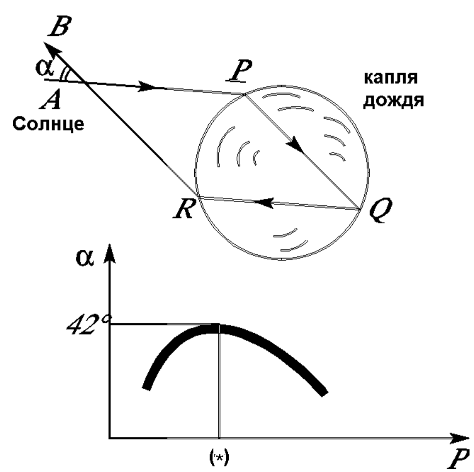


Рис. 30. Обоснование теории радуги Декарта: угол α отклонения луча $APQR$ (созданного преломлениями в P, R и отражением в Q) гладко зависит от точки P и достигает максимума в 42°

Различие цветов дуг радуги объясняется тем, что для лучей разных цветов показатели преломления воды немного различаются, вследствие чего и максимальное значение угла отклонения тоже не совсем одинаково для лучей разного цвета.

Интересно, что само понятие *цвета* тоже связано с удивительными математическими теориями — так называемым цветоведением. Первое достижение в этой области экспериментальной математики принадлежит Гёте. Он открыл, что многообразие видимых цветов имеет топологическую размерность, равную трём.

Как открыл ещё Ньютон, белый цвет — это смесь лучей разных длин волн, видимых как красные, оранжевые, жёлтые,. . . , фиолетовые цвета.

Но ощущение цвета не то же самое, что длина волны светового луча. Например, смешение жёлтого цвета с синим (Гёте клал на быстро вращающийся диск секторы разных цветов, чтобы смешивать цвета) видится глазу как зелёный цвет, хотя никаких лучей «зелёной» длины волны глаз и не получает.

В мозгу человека имеется маленький (размером меньше миллиметра) компьютер, перерабатывающий полученные колбочками сетчатки сведения о длинах волн наблюдаемых лучей в ощущение цвета (зависящее и от наблюдённого соседними колбочками сетчатки).

Экспериментируя со смешением цветов, Гёте обнаружил, что всё многообразие световых ощущений трёхмерно. Одной из координат в этом многообразии можно считать интенсивность, яркость цвета. Но даже если и не различать одинаково красные цвета разных яркостей, всё же остаётся двумерное разнообразие существенно различных цветов. При этом можно получить практически все цвета, смешивая (в различных пропорциях) всего три крайних цвета — именно на этом математическом факте основана цветная фотография.

Гёте задумывался и о других математических вопросах — он был настоящим естествоиспытателем. Например, ему принадлежит блестящее определение бесконечно удалённых точек проективной геометрии (кажется, даже стихотворное). А именно, он писал: «Если хочешь устремиться в бесконечность, то тебе нужно, оставаясь в конечном, исследовать все направления движения в нём». В современных математических терминах это звучит так: проективной плоскостью $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ называется многообразие всевозможных прямых, проходящих через точку O трёхмерного пространства $\mathbb{R}^3$.

Алгебраические кривые, о которых я говорил выше, рассматривая их римановы поверхности, помещаются на проективную плоскость так. Многочлену $f(x,y)$ поставим в соответствие, кроме кривой, где $f(x,y)=0$, на плоскости с координатами (x,y), ещё и конус в трёхмерном пространстве с координатами (x,y,z), проходящий через кривую с уравнением $f(x,y)=0$, лежащую на плоскости $z=1$. Уравнение этого конуса можно записать в виде

$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0.$$

Если степень многочлена f была n, то, умножив левую часть на z^n, можно переписать это уравнение конуса в виде

$$F(x,y,z) = 0,$$

где F — однородный многочлен от трёх переменных. Например, окружность $x^2+y^2=1$ превращается так в конус $x^2+y^2=z^2$.

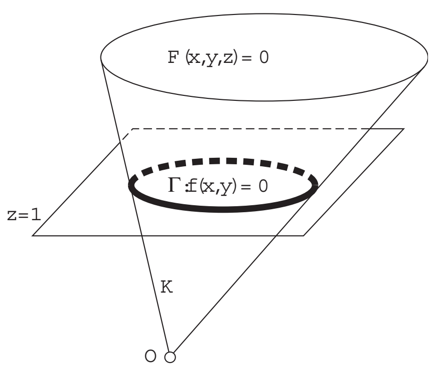


Рис. 31. Вложение плоской алгебраической кривой Γ в проективную плоскость $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ (проходящих через O лучей трёхмерного пространства) при помощи конуса K пересекающих кривую Γ плоскости $z=1$ лучей

Конус содержит с каждой своей точкой соединяющую её с O прямую. Поэтому его можно считать подмножеством многообразия $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ всех проходящих через O прямых трёхмерного пространства.

Мы построили вложение алгебраической кривой Γ в проективную плоскость: $\Gamma \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

Добавление бесконечно удалённых точек производится теперь следующим образом: к точкам построенного подмножества $\Gamma \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ добавляются его предельные точки.

То же самое можно сделать и так: рассмотреть те решения однородного уравнения $F(x, y, z) = 0$, где $z = 0$ (точки пересечения алгебраической кривой $f(x, y) = 0$) с «бесконечно удалённой прямой» $\{z = 0\} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^2$).

Пример. Начнём с гиперболы $xy = 1$. Соответствующий конус задаётся уравнением $xy = z^2$. Его пересечение с бесконечно удалённой прямой имеет уравнения $\{xy = 0,\ z = 0\}$, т. е. состоит из двух прямых — оси x и оси y в трёхмерном пространстве. Мы заключаем, что гипербола имеет в $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ две бесконечно удалённые точки.

Замечание. Такие же вычисления в случае окружности

$$x^2 + y^2 = R^2$$

приводят к уравнениям

$$\{x^2 + y^2 = 0,\ z = 0\}.$$

У окружности на проективной плоскости $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ нет бесконечно удалённых точек. Но если допускать и комплексные решения уравнения, то мы найдём два решения — две прямые пересечения конуса с плоскостью $z = 0$:

$$\mathrm{I}\colon \{y = ix,\ z = 0\}, \quad \mathrm{II}\colon \{y = -ix,\ z = 0\}.$$

Мы приходим к выводу: окружность на комплексной проективной плоскости пересекает бесконечно удалённую прямую в двух (комплексно-сопряжённых) бесконечно удалённых точках. Эти две точки (называемые «циклическими») — общие для всех окружностей!

Вот к каким выводам приводит совет Гёте исследовать все направления выхода из конечной точки $x = y = z = 0$.

Вернёмся на конечную евклидову плоскость с координатами (x, y) и рассмотрим её точки с целыми координатами, $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$.

Определение. Вектор $z \in \mathbb{Z}^n$ называется *неделимым* (или *простым*) вектором, если он не получается ни из какого другого вектора целочисленной решётки $\mathbb{Z}^n$ умножением на целое число, большее единицы.

Пример. Простые векторы плоскости $\mathbb{Z}^2$ в круге $x^2 + y^2 \leqslant 25$ таковы:

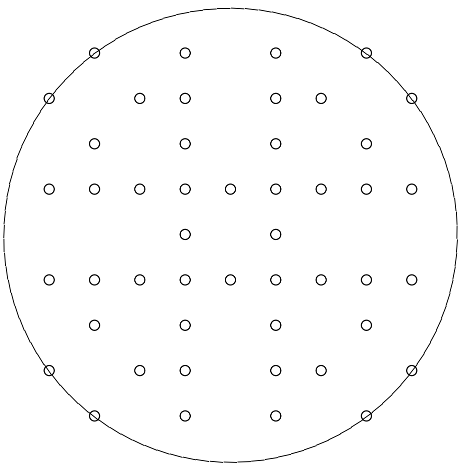


Рис. 32. Простые (неделимые) векторы в круге $x^2 + y^2 \leqslant 25$ радиуса 5 целочисленной плоскости: их 48

В круге $x^2 + y^2 \leqslant 25$ оказалось $4 \cdot 12 = 48$ простых векторов. Всего же в этом круге векторов с целыми координатами больше: их число равно $1 + 4 \cdot 20 = 81$ вектор. Стало быть, простые векторы составляют немного больше половины от всех целочисленных:

$$\frac{48}{81} = \frac{16}{27} \approx 0{,}59.$$

Если увеличивать радиус круга, то доля простых векторов среди всех целочисленных в этом круге будет принимать близкие значения: Эйлер доказал, что в пределе при $R \to \infty$

$$\frac{\text{число простых векторов круга } x^2 + y^2 \leqslant R^2}{\text{число целочисленных векторов круга } x^2 + y^2 \leqslant R^2} \to c,$$

где постоянная c имеет следующее значение:

$$c = \text{вероятность несократимой дроби } \frac{y}{x} = \frac{1}{\zeta(2)} = \\ = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2} \approx 0{,}608$$

(произведение по всем простым числам p). Здесь дзета-функция Эйлера ζ определяется формулой

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1).$$

Несколько лет назад выпускница Университета Пизы, жившая с мужем в Гёттингене, получила от факультета биологии Гёттингенского университета приглашение прочитать им курс теории чисел для студентов. Всё лето она потратила на изучение свойств дзета-функции (при комплексных значениях «размерности» s), ибо они играют в «аналитической теории чисел» огромную роль.

Осенью она начала читать свой курс теории чисел студентам-биологам, он они ничего не понимали. В конце концов заказчики-биологи объяснили лектору-математику свой заказ так: «Мы хотели, чтобы вы научили их правильно складывать дроби: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ (а не $\frac{2}{5}$, как думают студенты: в Америке простые дроби исключены из программы средней школы). Ведь эти простые дроби нужны нам в генетике, где ими выражается, например, закон Менделя исследования рецессивных аллелей: $\frac{3}{4}$ потомков гороха будут во втором поколении доминантного цвета и только $\frac{1}{4}$ — рецессивного».

Хотя плотность неделимых векторов в пространстве $\mathbb{Z}^s$ размерности s равна $1/\zeta(s)$, я буду предполагать ниже размерность s вещественной, а именно равной 2.

Доказательство теоремы Эйлера

Вектор z не прост, если и только если он делится нацело на одно (хотя бы) простое число. Вероятности делимости целочисленной компоненты x на p равна $1/p$, компоненты y тоже $1/p$, причём эти делимости независимы. Поэтому вероятность делимости целочисленного вектора z на p равна $1/p^2$. Значит, вероятность неделимости на p вектора z составляет $1 - 1/p^2$.

Делимости на разные простые числа независимы. Значит, вероятность P того, что целочисленный вектор $z \in \mathbb{Z}^2$ не делится нацело ни на одно простое число, составляет (бесконечное) произведение

$$P = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Покажем теперь, что

$$\frac{1}{P} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{1}$$

С этой целью заметим, что

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots,$$

так что

$$\frac{1}{P} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^6} + \ldots\right).$$

Раскрывая скобки, мы получим (бесконечную) сумму произведений вида

$$\frac{1}{p_1^2} \cdot \frac{1}{p_2^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{p_k^2} = \frac{1}{(p_1 p_2 \ldots p_k)^2} \tag{$*$}$$

с (не обязательно разными) простыми сомножителями p_j.

Но каждое натуральное число n единственным образом разлагается на свои простые сомножители. Значит, произведения $(*)$ пробегают (по одному разу) все обратные квадраты натуральных чисел, $1/n^2$. Формула (1) тем самым доказана: $1/P = \zeta(2)$.

Доказательство формулы Эйлера

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

можно получить, например, из ряда Фурье для пилообразной функции периода 2π, определённой условием

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - |x| \quad \text{при} \quad |x| \leqslant \pi$$

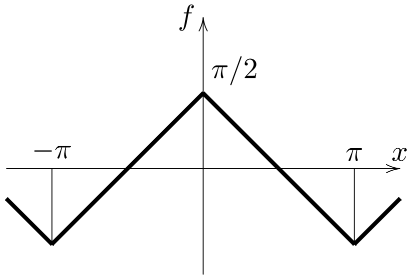


Рис. 33. Пилообразная функция периода 2π

(подробности см., например, в моей книге «Группы Эйлера и арифметика геометрических прогрессий», МЦНМО, 2003, стр. 6).

Нарисовав компьютером красивые множества M простых (неделимых) векторов в бо́льших областях целочисленной плоскости $\mathbb{Z}^2$ (скажем, в круге $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, где $R = 100$), можно заметить следующее.

Во-первых, неделимые векторы распределены на плоскости довольно равномерно: их локальные «плотности» в разных местах плоскости одинаковы (и равны $c = 6/\pi^2$). Это значит, что для любого конечного многоугольника A число простых векторов ($z \in M$) в растянутом многоугольнике NA относится к числу всех целочисленных векторов в этом растянутом многоугольнике так, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|M \cap (NA)|}{|\mathbb{Z}^2 \cap (NA)|} = c. \qquad (2)$$

Во-вторых, множество M простых целочисленных векторов оставляет на плоскости сколь угодно большие дыры, свободные от неделимых (простых) векторов. Равномерности (2) распределения множества M эти дыры не мешают потому, что большие дыры встречаются только очень далеко от начала координат, да и там редки — поэтому-то их присутствие и не меняет средней плотности c формулы (2).

Сейчас равномерность распределения простых векторов доказана и в целочисленных пространствах $\mathbb{Z}^n$ любой размерности $n > 1$.

В размерности $n = 1$ (т. е. для распределения обычных простых чисел) распределение на положительной полуоси неравномерно: его плотность уменьшается вдали от 0, убывая как $1/\ln z$ в далёких от 0 точках $z \in \mathbb{Z}$. Этот факт открыл экспериментально Лежандр, рассмотрев первый миллион значений z. Затем Чебышёв превратил эмпирическое наблюдение Лежандра в теорему, заключив «плотность» между $a/\ln z$ и $b/\ln z$, где $a < b$ довольно близки, но различны. Позже он доказал, что если асимптотика «плотности» вида $c/\ln z$ существует, то коэффициент c может быть только единицей.

Существование указанной асимптотики было после этого установлено Адамаром и Валле Пуссеном. Их поэтому и считают «авторами» асимптотического закона (Лежандра) распределения простых чисел: среднее расстояние между простыми числами, близкими к большому числу z, составляет $\ln z$.

Я предполагаю, что, хотя плотность $1/\ln z$ и не постоянна, всё же и при $n = 1$ распределение простых векторов обладает некоторой равномерностью. В определении этой равномерности формула (2) заменяется следующей конструкцией (3) (допускающей убывание плотности на бесконечности и не требующей её постоянства, которое доставляет формула (2)).

Нужное здесь определение асимптотической равномерности распределения я сформулирую для множества $M \subset \mathbb{R}^2$, предполагая лишь, что число точек этого множества в любой конечной области пространства конечно.

Обозначим через $B_r(z)$ шар радиуса r с центром в точке z (пространства $\mathbb{R}^n$).

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *асимптотически равномерно распределённым*, если существует положительная функция $\rho\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, заданная на положительной полуоси, такая, что

$$\lim_{R\to\infty} \rho(R) = \infty, \quad \lim_{R\to\infty} \frac{\rho(R)}{R} = 0,$$

такая, что для любых двух точек z, w из $\mathbb{R}^n$ и любого вектора единичной длины v из $\mathbb{R}^n$ выполняется следующее асимптотическое соотношение между числами $\#(M \cap B)$ точек множества M в двух шарах:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\#(M \cap B_{\rho(R)})(z + Rv)}{\#(M \cap B_{\rho(R)})(w + Rv)} = 1. \tag{3}$$

Я предполагаю, что распределение простых чисел (на положительной полуоси $\mathbb{R}^+$, $n = 1$) удовлетворяет условию асимптотической равномерности (3) (для некоторой функции ρ).

Другой пример такого (предположительно асимптотически равномерного распределения) множества затухающей на бесконечности плотности — множество M' натуральных чисел, представляющих собой суммы квадратов пар натуральных чисел:

$$M' = \{2,\, 5,\, 8,\, 10,\, 13,\, 17,\, 18, \ldots\}.$$

Произведение двух элементов множества M' лежит в M' (так как модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей).

В качестве третьего примера я назову лежащее внутри M' множество «красных чисел». Целое число Q называется красным, если длина периода периодической цепной дроби иррационального числа $\sqrt{Q}$ нечётна.

Красные числа обладают многими замечательными свойствами. Например, простой делитель красного числа всегда красен. Число 125 красное, но 25 нет. Все простые элементы множества сумм квадратов M' (например, 2, 5, 13, 17,...) красные. Произведение двух красных чисел не всегда красное (хотя и входит в M'): примером является число

$$2 \cdot 17 = 34 = 25 + 9.$$

Длина периода цепной дроби числа $\sqrt{34}$ равна 4, так что число 34 не красное.

Я предполагаю, что множество красных чисел M'' распределено асимптотически равномерно в смысле (3), составляя асимптотически около половины множества сумм квадратов M'. Но это не доказано.

Лежандр открыл свой закон распределения простых чисел в XVIII веке, но доказательство этого закона появилось только сотню лет спустя.

Часто ставится нематематиками вопрос о том, является ли сегодняшняя математика естественной наукой или же набором ремёсел (позволяющих, как говорил Маяковский, «ежесекундно извлекать квадратный корень»). Как я пытался показать выше десятками примеров, математика получает от своих открытий примерно такое же удовольствие, как мореплаватель, открывший новый материк, альпинист, покоривший неподдававшуюся вершину, или инженер, построивший первую подводную лодку или первый самолёт.

«Другие по живому следу пройдут твой путь за пядью пядь», — говорил Пастернак, математик же, по словам Сирано де Бержерака, должен «радоваться травам и цветам собственного своего сада, спасаясь этим и от соблазняющих наград Цезаря, и от желания вырасти выше дуба и липы».

Миновать благожелательство Цезаря нелегко.

«Больше всего», — говорила мне в шестидесятые годы очень достойная математическая дама, — я опасаюсь Славкиного желания сделать и тебя, и своего племянника такими же генералами от науки, каким он стал сам. Но у него ведь было только два пути — либо превращаться в генерала, либо быть расстрелянным, подобно многим другим. А вам теперь никакой расстрел не грозит — вот и не надо поддаваться на его заманивающие похвалы (хотя они и заслужены)».

Я к тому времени успел уже не только посотрудничать с «генералом», но и серьёзно возражать генеральскому мнению: он считал, что Советскому Союзу не надо разрабатывать новую компьютерную технику, так как наши математики настолько сильны, что и без компьютеров сумеют всё рассчитать, что надо. Мои возражения на его решение, далеко отодвинувшее страну назад, не повлияли. Но высказанные мною в этих спорах идеи о методах (компьютерного) расчёта орбит спутников всё же сегодня всюду используются.

В СССР эти методы были в 1960-е годы забракованы из-за недостаточности компьютерной базы, а в США из-за того, что «наши компьютеры столь хороши, что шаг вычислений можно уменьшить в тысячи раз, а тогда можно обойтись и без предлагаемых новшеств».

Зато встреченный мною в 1965 году в Париже китайский стажёр Фенг Канг, вернувшись в Китай, реализовал мой замысел. Во время культурной революции он и был посажен, но, когда американцы стали использовать в своих космических программах разработанное им по моей просьбе симплектическое интегрирование гамильтоновых дифференциальных уравнений, Фенг Канг был не только выпущен, но стал академиком, а его «Избранные труды» издали с золочёными обложками.

К моему приезду в Пекин в 1990-е годы он внезапно безвременно умер (вследствие смены угнетения восхвалениями), так что мне не удалось с ним снова увидеться.

Но симплектическое интегрирование используется теперь и у нас: недостающие компьютерные мощности требовались именно для разработки метода, а теперь, когда Фенг Канг это осуществил, с применениями его метода справляются и имеющиеся компьютеры.

Сущность симплектического интегрирования состоит в следующем. При численном компьютерном решении обыкновенное дифференциальное уравнение, задающее в фазовом пространстве непрерывный поток, заменяется отображением фазового пространства в себя («потоком с дискретным временем»).

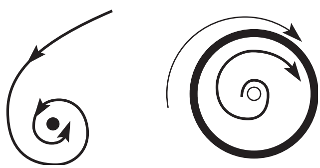


Рис. 34. Аттракторы (невозможные в гамильтоновых динамических системах из-за несжимаемости их фазовых потоков)

Для гамильтоновых уравнений фазовый поток не может иметь аттракторов (например, притягивающих точек или притягивающих замкнутых орбит), так как он «несжимаем»: каждая область переходит под влиянием этого потока в область такого же объёма (это основа статистической механики). Но при осуществляемом разностной схемой компьютера переходе к дискретному времени аттракторы могут возникать, так как возникающее отображение фазового пространства не обязано точно сохранять объёмы областей, а может их слегка менять.

Из-за этого при расчёте поведения спутника в течение длительного времени (многих лет, как это нужно, например, для исследования образования планет) может обнаружиться приближение всех их орбит к одной, которого нет на самом деле: это «артефакт», т. е. свойство приближённой компьютерной модели, а не исходной задачи небесной механики.

Выход из положения состоит в том, что компьютерная дискретная аппроксимация непрерывной системы не единственна: в ней есть параметры, которые можно выбирать по-разному (даже при заданной заранее точности аппроксимации).

Идея симплектического интегрирования состоит в том, чтобы эти параметры выбрать так, чтобы получающийся фазовый поток с дискретным временем сохранял объёмы (и другие инварианты областей фазового пространства — так называемые «симплектические структуры») столь же идеально, как фазовый поток исходной системы гамильтоновых дифференциальных уравнений небесной механики.

И Фенг Кангу удалось так выбрать эти параметры дискретной модели, которыми теперь и пользуются.

Индекс

Этот путеводитель написан для того, чтобы читатель мог быстро найти нужное место, не отвлекаясь чтением не менее интересных ненужных.