Конкурс по решению задач по математике

Очный тур

Порядком перестановки называется наименьшее положительное число повторений этой перестановки, возвращающее каждый из переставляемых предметов на место.

Так, например, перестановка $1 \to 2 \to 3 \to 1$, $4 \to 5 \to 4$ имеет порядок 6.

Задача 1. Какой наибольший порядок N может иметь перестановка n предметов?

Какой наибольший порядок $N(100)$ может иметь перестановка $n = 100$ предметов? Как растет при $n \to \infty$ наибольший возможный порядок $N(n)$ перестановки n предметов?

Задача 2. Преобразование «кошки Фибоначчи» переводит точку (x, y) (где x и y — остатки от деления на целое число m) в точку с координатами

$$(2x + y, x + y) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m.$$

Это преобразование переставляет все m^2 точек «дисплея» $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$ размера $m \times m$.

Найти порядок N этой перестановки при $m = 150$ (когда число точек дисплея составляет $n = 22500$, как в эксперименте нобелевского лауреата Ф. Дайсона).

Как растет число $N(m)$ при $m \to \infty$:

а) для преобразования кошки, выписанного выше;

б) для самого долгопериодичного преобразования

$$(x, y) \to (px + qy, rx + sy),$$

сохраняющего площади (дисплея $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$);

в) для самого долгопериодичного преобразования

$$A\colon \mathbb{Z}_m^k \to \mathbb{Z}_m^k$$

всех m^k точек дисплея $\mathbb{Z}_m^k$ размерности k (где $k = 3, 4, \ldots$);

г) для этого же преобразования, переставляющего проходящие через ноль прямые того же дисплея?

Задача 3. Перестановка шести элементов

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{array}$$

разбивается на три цикла $1 \rightleftarrows 2$, $3 \circlearrowleft$, $\begin{tikzcd}[column sep=small] 4 \arrow[rr] & & 6 \arrow[dl] \\ & 5 \arrow[ul] & \end{tikzcd}$ (длин 2, 1 и 3).

Как меняется с ростом числа s суммарное число всех циклов длины s у всех $n!$ перестановок данных n точек? (Растет ли оно с числом s или убывает? И сколь быстро? Что вероятнее (для точки x) — попасть в один из циклов длины p или длины q?)

Задача 4. Число разных перестановок шести данных элементов, состоящих из трех циклов длин 1, 2 и 3, равно ста двадцати. А число таких перестановок с тремя циклами длины 2 составляет всего 15.

Для какого набора длин циклов $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ число перестановок данных n элементов, имеющих циклы этих длин, максимально?

Задача 5. Треугольник со сторонами длин (a, b, c) ортогонально проектируется на двумерную плоскость своего евклидова пространства (размерности 3).

Найти среднее значение площади проекции (усредняя по всем направлениям проектирования, считая разные направления проектирования равновероятными).

Задача 6. Скорость света в воде составляет $3/4$ его скорости в воздухе. Во сколько раз стоящая на столе кастрюля с водой кажется более мелкой, чем ее истинная глубина, для наблюдателя, который смотрит в воду сверху?